Bài 1. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là n các số thực dương ($n \in \mathbb{N}^+$). Chứng minh rằng $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_1 + x}{a_2 + x} + \frac{a_2 + x}{a_3 + x} + \cdots + \frac{a_{n-1} + x}{a_n + x} + \frac{a_n + x}{a_1 + x},$$

là hàm giảm.

Bài 2.Với a, b, c là các số thực khác 0. Chứng minh rằng:

$$\left|\frac{b}{a} - \frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right| + |bc + 1| > 1$$

Bài 3. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi X là 1 điểm trên đường tròn (I) không trùng D, E, F. XD cắt EF tại J, XE cắt DF tại K, XF cắt DE tại L. Gọi M, N, P là các điểm nằm trên BC, CA, AB tương ứng sao cho $AM \parallel BN \parallel CP$. Chứng minh rằng MJ, NK, PL đồng quy.

Bài 4. Giả sử a, b là 2 số thực dương phân biệt thỏa mãn $\lfloor na \rfloor$ là ước của $\lfloor nb \rfloor$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng a, b nguyên dương.

Bài 5.Tìm số thực t sao cho với bất kì 120 điểm $P_1, P_2, ..., P_{120}$ nào nằm trên biên 1 hình vuông đơn vị thì luôn tồn tại điểm Q cũng nằm trên biên hình vuông đơn vị ấy thỏa mãn

$$|P_1Q| + |P_2Q| + \cdots + |P_{120}Q| = t$$

Bài 1. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n các số thực dương ($n \in \mathbb{N}^+$). Chứng minh rằng $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_1 + x}{a_2 + x} + \frac{a_2 + x}{a_3 + x} + \cdots + \frac{a_{n-1} + x}{a_n + x} + \frac{a_n + x}{a_1 + x},$$

là hàm giảm.
Đạo hàm, xét $0 \le x \le y$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1} - a_i}{(x + a_{i+1})(y + a_{i+1})}$$

Vậy quy về chứng minh:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{(x + a_{i+1})(y + a_{i+1})} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(x + a_{i+1})(y + a_{i+1})}$$

Ta thấy rằng với $a_i \le a_j$ thì $(x + a_i)(y + a_i) \le (x + a_j)(y + a_j)$, do đó theo BĐT sắp xếp lại:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i . \frac{1}{(x + a_i)(y + a_i)} \le \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} . \frac{1}{(x + a_i)(y + a_i)}$$

$x_1, x_2, ... x_n$
$y_1, y_2, ... y_n$
$x1.y_n + ... \le \sum x_i.y_j \le x_1.y_1 + ...$
Remark

Bài 2.Với a, b, c là các số thực khác 0. Chứng minh rằng:

$$\left|\frac{b}{a}-\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right|+|bc+1|>1$$

Ta tìm cách bỏ các dấu giá trị tuyệt đối:
Xét b, c cùng dấu
Xét $a<0$ đổi dấu $a \rightarrow -a$
Xét $a>0, b>0, c<0$, ta đổi $-c=d$ thì lúc này cần chứng minh với $a, b, d>0$:

$$\frac{b}{a}+\frac{b}{d}+\left|\frac{d}{a}-\frac{d}{b}\right|>1$$

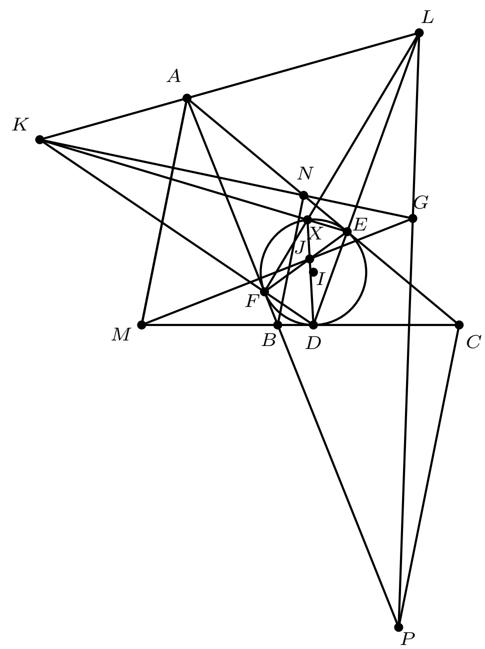
Tiếp tục tìm cách bỏ dấu giá trị tuyệt đối:
Xét $b>a$ hoặc $b>d$
Xét $b \leq a, b \leq d$. Ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{b}{a}+\frac{b}{d}+\frac{d}{b}-\frac{d}{a}>1$$

$$b/a+b/d+d\left(1/b-1/a\right) \geq b/a+2\sqrt{\frac{b}{d}.d.\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}=b/a+2\sqrt{1-b/a}$$

Remark

Bài 3. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi X là 1 điểm trên đường tròn (I) không trùng D, E, F. XD cắt EF tại J, XE cắt DF tại K, XF cắt DE tại L. Gọi M, N, P là các điểm nằm trên BC, CA, AB tương ứng sao cho $AM \parallel BN \parallel CP$. Chứng minh rằng MJ, NK, PL đồng quy.



Ta thấy J nằm trên đối cực của A nên theo La Hire thì A nằm trên đối cực của J, suy ra K, A, L thẳng hàng. Tương tự,
Do DJ, EK, FL đồng quy nên theo định lý Ceva nest AJ, BK, CL đồng quy
ABC, DEF, XYZ Gergone
Kết hợp với AM, BN, CP đồng quy tại điểm ∞ trên phương AM, theo Ceva nest ta có MJ, NK, PL đồng quy.
Remark

Bài 4. Giả sử a, b là 2 số thực dương phân biệt thỏa mãn $\lfloor na \rfloor$ là ước của $\lfloor nb \rfloor$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng a, b nguyên dương.
Đặt $t_n = \dfrac{\lfloor nb \rfloor}{\lfloor na \rfloor}, n = 1, 2, ...$ Ta có

$$t_n = \frac{\lfloor nb \rfloor}{\lfloor na \rfloor} = \frac{nb - \{nb\}}{na - \{na\}} = \frac{b - \dfrac{\{nb\}}{n}}{a - \dfrac{\{na\}}{n}}$$

Do đó khi $n \to \infty$,$t_n \to \dfrac{b}{a}$. Nên $b = ka$ với $k \in \mathbb{N}^+$ nào đó
Xét số nguyên N đủ lớn, ta sẽ có:

$$\lfloor nb \rfloor = k \lfloor na \rfloor, \forall n \geq N \Leftrightarrow nb - \lfloor nb \rfloor = kna - k\lfloor na \rfloor \Leftrightarrow \{nb\} = k\{na\}$$

Từ đây, nếu a, b không là các số nguyên, $\{nb\}, \{na\} > 0$, và ta thấy đẳng thức $\{nb\} = k\{na\}$ ko thể bảo toàn được quá lâu nếu n tiếp tục tăng.
Khi a,b ko nguyên.

$$\{na\} = \frac{\{nb\}}{k} < \frac{1}{k}$$

0 $1/k^n$ ... $1/k^2$ $1/k$ 1
Giả sử: $\{na\} \in (1/k^{i+1}; 1/k^i)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k} < \{k^i.na\}$$

Remark
$min \leq t_0 \leq S \leq max$

Bài 5. Tìm số thực t sao cho với bất kì 120 điểm $P_1, P_2, ..., P_{120}$ nào nằm trên biên 1 hình vuông đơn vị thì luôn tồn tại điểm Q cũng nằm trên biên hình vuông đơn vị ấy thỏa mãn

$$|P_1Q| + |P_2Q| + \cdots + |P_{120}Q| = t$$

Gọi $S(X) = \sum_{i=1}^{120} |P_iX|$ Ta thấy $S(X)$ liên tục
Giả sử A, B, C, D là các đỉnh của hình vuông, X, Y, X, T lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.
Ta có 2 đánh giá quan trọng sau, với mọi P_i trên cạnh hình vuông:

$$|P_iA| + |P_iB| + |P_iC| + |P_iD| \geq 1 + \sqrt{5}$$

$$|P_iX| + |P_iY| + |P_iZ| + |P_iT| \leq 1 + \sqrt{5}$$

Từ đây, ta có:

$$\sum_{i=1}^{120} |P_iA| + |P_iB| + |P_iC| + |P_iD| \geq 120(1 + \sqrt{5})$$

$$\sum_{i=1}^{120} |P_iX| + |P_iY| + |P_iZ| + |P_iT| \leq 120(1 + \sqrt{5})$$

Hay:

$$S(A) + S(B) + S(C) + S(D) \geq 120(1 + \sqrt{5})$$

$$S(X) + S(Y) + S(Z) + S(T) \leq 120(1 + \sqrt{5})$$

Từ đây ta suy ra $maxS(X) \geq 30(1 + \sqrt{5})$ và $min(X) \leq 30(1 + \sqrt{5})$
Định lý giá trị trung gian cho ta điều phải chứng minh.
Remark