



**INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS**

LE CNAM
INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS

Projet ECMA

Auteurs :
Justine DE SOUSA
Natalia JORQUERA

Superviseur :
Zachari ALES

le cnam

2 janvier 2022

Table des matières

1	Partie théorique	1
1.1	Modélisation statique	1
1.2	Modélisation robuste	1
1.3	Plans coupants et LazyCallback	2
1.3.1	Robustesse dans les contraintes	2
1.3.2	Problème maître	2
1.3.3	Sous-problèmes	3
1.3.4	Solution optimale	3
1.3.5	Coupes à ajouter	3
1.4	Dualisation	4
1.4.1	Reformulation de la fonction objectif	4
1.4.2	Problème interne lié aux variables δ_{ij}^1	5
1.4.3	Problème Dual	5
1.4.4	Reformulation des contraintes robustes	5
1.4.5	Problème interne lié aux variables δ_j^2	5
1.4.6	Problème Dual	5
1.4.7	PLNE du problème robuste	6

1 Partie théorique

1.1 Modélisation statique

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté, un sommet origine $s \in V$ et un sommet destination $t \in V$, chaque arc $(ij) \in A$ a une durée de trajet d_{ij} , de plus, chaque sommet a un poids p_i . Le problème statique consiste à trouver un plus court chemin d'un sommet s à un sommet t , où la somme pondérée des sommets appartenant au chemin est inférieure ou égale à un nombre entier S .

On utilise les variables suivantes :

$x_{ij} = 1$ ssi l'arc (ij) est emprunté

$y_i = 1$ ssi le sommet i est emprunté

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_x \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot x_{ij} & \\ \text{s.c. :} & \\ \sum_{i \in V} p_i \cdot y_i \leq S & \text{(contrainte de sac à dos)} \\ \sum_{i: ij \in A} x_{ij} = \sum_{i: ji \in A} x_{ji} \quad \forall j \in V \setminus \{s, t\} & \text{(autant d'arcs entrants que d'arcs sortants)} \\ \sum_{j: sj \in A} x_{s,j} = 1 & \text{(un arc sortant de s)} \\ \sum_{i: it \in A} x_{i,t} = 1 & \text{(un arc entrant en t)} \\ \sum_{j: ij \in A} x_{ij} = y_i \quad \forall i \in V \setminus \{s\} & \text{(chaque sommet appartenant au chemin est passé une seule fois)} \\ \sum_{j: ji \in A} x_{ji} = y_i \quad \forall i \in V \setminus \{t\} & \text{(chaque sommet appartenant au chemin est passé une seule fois)} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in A & \\ y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V & \end{array} \right.$$

1.2 Modélisation robuste

La version robuste de ce problème considère différents scénarios étant donné l'incertitude de certains de ses paramètres :

Incertainité sur les durées : $d_{ij}^1 \in \mathcal{U}^1$

$$\mathcal{U}^1 = \left\{ \{d_{ij}^1 = d_{ij} \cdot (1 + \delta_{ij}^1)\}_{ij \in A} \mid \sum_{ij \in A} \delta_{ij}^1 \leq d_1, \delta_{ij}^1 \in [0, D_{ij}] \quad \forall ij \in A \right\}$$

Incertainité sur les poids : $p_i^2 \in \mathcal{U}^2$

$$\mathcal{U}^2 = \left\{ \{p_i^2 = p_i + \delta_i^2 \cdot \hat{p}_i\}_{i \in V} \mid \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq d_2, \delta_i^2 \in [0, 2] \quad \forall i \in V \right\}$$

Le problème robuste s'écrit de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(x,y)} \max_{\delta_{ij}^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot (1 + \delta_{ij}^1) \cdot x_{ij} \\ \text{s.c. :} \\ \left. \begin{array}{l} \sum_{i:ij \in A} x_{ij} = \sum_{i:j \in A} x_{ji} \quad \forall j \in V \setminus \{s, t\}, \\ \sum_{j \in V} x_{sj} = 1, \\ \sum_{i \in V} x_{it} = 1, \\ \sum_{j:ij \in A} x_{ij} = y_i \quad \forall i \in V \setminus \{s\}, \\ \sum_{j:j \in A} x_{ji} = y_i \quad \forall i \in V \setminus \{t\}, \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (ij) \in A, \quad y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \end{array} \right\} \mathcal{X}^{comb} \\ \left. \begin{array}{l} \sum_{ij \in A} \delta_{ij}^1 \leq d_1, \\ \delta_{ij}^1 \in [0, D_{ij}] \quad \forall (i, j) \in A, \\ \sum_{i \in V} (p_i + \delta_i^2 \cdot \hat{p}_i) \cdot y_i \leq S, \\ \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq d_2, \\ \delta_i^2 \in [0, 2] \quad \forall i \in V, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathcal{U}^1 \\ \mathcal{U}^2 \end{array} \end{array} \right\} \mathcal{X}^{num}$$

1.3 Plans coupants et LazyCallback

1.3.1 Robustesse dans les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,y,z} \quad z \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot (1 + \delta_{ij}^1) \cdot x_{ij} \leq z, \\ (x, y) \in \mathcal{X}^{comb}, \\ (x, y) \in \mathcal{X}^{num} \end{array} \right.$$

1.3.2 Problème maître

A la première itération, on fixe

$$\mathcal{U}^{1*} = \emptyset \quad \mathcal{U}^{2*} = \emptyset$$

On résoudra donc le problème maître suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,y,z} \quad z \\ \text{s.c. :} \\ (x, y) \in \mathcal{X}^{comb} \end{array} \right. \quad (\text{MP})$$

C'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,y,z} \quad z \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{i:ij \in A} x_{ij} = \sum_{i:ji \in A} x_{ji} \quad \forall j \in V \setminus \{s, t\}, \\ \sum_{j \in V} x_{sj} = 1, \\ \sum_{i \in V} x_{it} = 1, \\ \sum_{j:ij \in A} x_{ij} = y_i \quad \forall i \in V \setminus \{s\}, \\ \sum_{j:ji \in A} x_{ji} = y_i \quad \forall i \in V \setminus \{t\}, \\ x \in \{0, 1\}^{n^2}, y \in \{0, 1\}^n \end{array} \right. \quad (\text{MP})$$

1.3.3 Sous-problèmes

On résout le problème maître et on obtient une solution (x^*, y^*, z^*) . Les sous-problèmes nécessaires à la résolution du problème robuste par plans coupants sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta_{ij}^1} \quad \sum_{(ij) \in A} d_{ij} \cdot (1 + \delta_{ij}^1) \cdot x_{ij}^* \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{(ij) \in A} \delta_{ij}^1 \leq d_1 \\ \delta_{ij}^1 \in [0, D_{ij}], \quad \forall (ij) \in A \end{array} \right. \quad (\text{SPo})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta_i^2} \quad \sum_{i \in V} (p_i + \delta_i^2 \cdot \hat{p}_i) \cdot y_i^* \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq d_2 \\ \delta_i^2 \in [0, 2], \quad \forall i \in V \end{array} \right. \quad (\text{SP2})$$

1.3.4 Solution optimale

On résout SPo et SP2 et on obtient des solutions δ^{1*} et δ^{2*} .

Une solution (x^*, y^*, z^*) du problème maître est optimale si

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{(ij) \in A} d_{ij} \cdot (1 + \delta_{ij}^{1*}) \cdot x_{ij}^* \leq z^* \\ \sum_{i \in V} (p_i + \delta_i^{2*} \cdot \hat{p}_i) \cdot y_i^* \leq S \end{array} \right.$$

1.3.5 Coupes à ajouter

Si l'une des conditions ci-dessus n'est pas respectée, il faudra alors ajouter l'une ou deux des coupes ci-dessous (en fonction desquelles ne sont pas respectées) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{(ij) \in A} d_{ij} \cdot (1 + \delta_{ij}^{1*}) \cdot x_{ij} \leq z \\ \sum_{i \in V} (p_i + \delta_i^{2*} \cdot \hat{p}_i) \cdot y_i \leq S \end{array} \right.$$

On itère ce processus jusqu'à obtenir une solution réalisable. Celle-ci sera alors optimale.

Une façon d'améliorer l'algorithme consiste à utiliser des callbacks afin d'ajouter les coupes au fur et à mesure plutôt que de démarrer à zéro à chaque ajout de coupe.

1.4 Dualisation

Rappelons la formulation du problème robuste :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(x,y)} \max_{\delta_{ij}^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot (1 + \delta_{ij}^1) \cdot x_{ij} \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{i:ij \in A} x_{ij} = \sum_{i:j \in A} x_{ji} \quad \forall j \in V \setminus \{s, t\}, \\ \sum_{j \in V} x_{sj} = 1, \\ \sum_{i \in V} x_{it} = 1, \\ \sum_{j:ij \in A} x_{ij} = y_i \quad \forall i \in V \setminus \{s\}, \\ \sum_{j:ji \in A} x_{ji} = y_i \quad \forall i \in V \setminus \{t\}, \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (ij) \in A, \quad y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \\ \left. \begin{array}{l} \sum_{ij \in A} \delta_{ij}^1 \leq d_1, \\ \delta_{ij}^1 \in [0, D_{ij}] \quad \forall (i, j) \in A, \end{array} \right\} \mathcal{U}^1 \\ \left. \begin{array}{l} \sum_{i \in V} (p_i + \delta_i^2 \cdot \hat{p}_i) \cdot y_i \leq S, \\ \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq d_2, \\ \delta_i^2 \in [0, 2] \quad \forall i \in V, \end{array} \right\} \mathcal{U}^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathcal{X}^{comb} \\ \mathcal{X}^{num} \end{array}$$

1.4.1 Reformulation de la fonction objectif

$$\begin{aligned} & \min_{(x,y)} \max_{\delta_{ij}^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot (1 + \delta_{ij}^1) \cdot x_{ij} \\ &= \min_{(x,y)} \max_{\delta_{ij}^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot \delta_{ij}^1 \cdot x_{ij} \\ &= \min_{(x,y)} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot x_{ij} + \max_{\delta_{ij}^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot \delta_{ij}^1 \cdot x_{ij} \end{aligned}$$

Le problème devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(x,y)} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot x_{ij} + \max_{\delta_{ij}^1 \in \mathcal{U}^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot \delta_{ij}^1 \cdot x_{ij} \\ \text{s.c. :} \\ x \in \mathcal{X}^{comb}, \\ x \in \mathcal{X}^{num} \end{array} \right.$$

1.4.2 Problème interne lié aux variables δ_{ij}^1

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta_{ij}^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot \delta_{ij}^1 \cdot x_{ij} \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{ij \in A} \delta_{ij}^1 \leq d_1 \\ \delta_{ij}^1 \leq D_{ij} \quad \forall ij \in A \\ \delta_{ij}^1 \geq 0 \end{array} \right.$$

REMARQUE : x n'est pas considéré comme une variable ici.

1.4.3 Problème Dual

Le problème dual du problème interne est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha, \beta} \sum_{ij \in A} D_{ij} \cdot \beta_{ij} + d_1 \cdot \alpha \\ \text{s.c. :} \\ \alpha + \beta_{ij} \geq d_{ij} \cdot x_{ij} \quad \forall ij \in A \\ \alpha \geq 0 \\ \beta_{ij} \geq 0 \quad \forall ij \in A \end{array} \right.$$

1.4.4 Reformulation des contraintes robustes

La contrainte robuste se réécrit :

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in V} (p_i + \delta_i^2 \cdot \hat{p}_i) \cdot y_i \leq S \quad \forall \delta^2 \in \mathcal{U}^2 \\ & = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in V} p_i \cdot y_i + \max_{\delta^2} \sum_{i \in V} \delta_i^2 \cdot \hat{p}_i \cdot y_i \leq S \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq d_2 \\ \delta_i^2 \leq 2 \quad \forall i \in V \\ \delta_i^2 \geq 0 \quad \forall i \in V \end{array} \right. \end{aligned}$$

1.4.5 Problème interne lié aux variables δ_j^2

Il s'agit alors de résoudre le problème interne suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta_i^2} \sum_{i \in V} \delta_i^2 \cdot \hat{p}_i \cdot y_i \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq d_2 \\ \delta_i^2 \leq 2 \quad \forall i \in V \\ \delta_i^2 \geq 0 \quad \forall i \in V \end{array} \right.$$

1.4.6 Problème Dual

Son dual s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\gamma, \varepsilon} \sum_{i \in V} 2 \cdot \varepsilon_i + d_2 \cdot \gamma \\ \text{s.c. :} \\ \gamma + \varepsilon_i \geq \hat{p}_i \cdot y_i \quad \forall i \in V \\ \gamma \geq 0 \\ \varepsilon_i \geq 0 \quad \forall i \in V \end{array} \right.$$

REMARQUE : y n'est pas considéré comme une variable ici.

1.4.7 PLNE du problème robuste

On remplace l'objectif par la nouvelle expression trouvée en 1.4.1. Par dualité forte et 1.4.3, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta_{ij}^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot \delta_{ij}^1 \cdot x_{ij} \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{ij \in A} \delta_{ij}^1 \leq d_1 \\ \delta_{ij}^1 \leq D_{ij} \quad \forall ij \in A \\ \delta_{ij}^1 \geq 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha, \beta} \sum_{ij \in A} D_{ij} \cdot \beta_{ij} + d_1 \cdot \alpha \\ \text{s.c. :} \\ \alpha + \beta_{ij} \geq d_{ij} \cdot x_{ij} \quad \forall ij \in A \\ \alpha \geq 0 \\ \beta_{ij} \geq 0 \quad \forall ij \in A \end{array} \right.$$

De même, par dualité forte et 1.4.6, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta_i^2} \sum_{i \in V} \delta_i^2 \cdot \hat{p}_i \cdot y_i \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq d_2 \\ \delta_i^2 \leq 2 \quad \forall i \in V \\ \delta_i^2 \geq 0 \quad \forall i \in V \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \min_{\gamma, \varepsilon} \sum_{i \in V} 2 \cdot \varepsilon_i + d_2 \cdot \gamma \\ \text{s.c. :} \\ \gamma + \varepsilon_i \geq \hat{p}_i \cdot y_i \quad \forall i \in V \\ \gamma \geq 0 \\ \varepsilon_i \geq 0 \quad \forall i \in V \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(x,y), (\alpha, \beta)} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{ij \in A} D_{ij} \cdot \beta_{ij} + d_1 \cdot \alpha \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{i:ij \in A} x_{ij} = \sum_{i:ji \in A} x_{ji} \quad \forall j \in V \setminus \{s, t\}, \\ \sum_{j \in V} x_{sj} = 1, \\ \sum_{i \in V} x_{it} = 1, \\ \sum_{j:ij \in A} x_{ij} = y_i \quad \forall i \in V \setminus \{s\}, \\ \sum_{j:ji \in A} x_{ji} = y_i \quad \forall i \in V \setminus \{t\}, \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (ij) \in A, y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \\ \alpha + \beta_{ij} \geq d_{ij} \cdot x_{ij} \quad \forall ij \in A \\ \alpha \geq 0, \beta_{ij} \geq 0 \quad \forall ij \in A \end{array} \right\} \mathcal{X}^{comb}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in V} p_i \cdot y_i + \sum_{i \in V} 2\varepsilon_i + d_2 \cdot \gamma \leq S, \\ \gamma + \varepsilon_i \geq \hat{p}_i \cdot y_i \quad \forall i \in V \\ \gamma \geq 0, \varepsilon_i \geq 0 \quad \forall i \in V \end{array} \right\} \mathcal{U}^1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma + \varepsilon_i \geq \hat{p}_i \cdot y_i \quad \forall i \in V \\ \gamma \geq 0, \varepsilon_i \geq 0 \quad \forall i \in V \end{array} \right\} \mathcal{U}^2$$