MPRO – Projet ECMA 2021 - 2022

1 Objectifs du projet

Le but de ce projet est l'étude d'un problème de plus court chemin robuste. Vous devrez résoudre ce problème :

1. par un algorithme de plans coupants ;
2. par un algorithme de *branch-and-cut* (via un LazyCallback) ;
3. par dualisation ;
4. par une heuristique ou la résolution d'une formulation non compacte.

2 Présentation du problème

2.1 Problème statique

Soient

- un graphe orienté $G = (V, A)$;
- un sommet origine $s \in V$ et un sommet destination t ;
- une durée de trajet d_{ij} associée à chaque arc $ij \in A$;
- un poids p_i associé à chaque sommet $i \in V$.

Le problème statique consiste à trouver un plus court chemin (court en terme de temps) de s à t dont le poids des sommets est inférieur ou égal à un entier S.

Par exemple le chemin $(s, 4, 3, 5, 8, t)$ sera une solution admissible si et seulement si $p_s + p_4 + p_3 + p_5 + p_8 + p_t \leq S$.

2.2 Problème robuste

Nous souhaitons résoudre une version robuste du problème statique car il est possible que les valeurs choisies pour les durées et les poids soient sous évalués.

2.2.1 Incertitude sur les durées

Nous supposons qu'en cas de bouchons, le temps de parcours d'un arc ij peut au maximum être augmenté de D_{ij}%. L'augmentation totale de la durée des arcs est limitée par le paramètre d_1.

En d'autres termes, si δ^1_{ij} est le pourcentage d'augmentation de la durée de l'arc ij, on peut représenter les valeurs que peuvent prendre les distances du graphe par l'ensemble :

$$\mathcal{U}^1 = \left\{ \{d^1_{ij} = d_{ij}(1 + \delta^1_{ij})\}_{ij \in A} \text{ tel que } \sum_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leq d_1,\ \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}]\ \forall ij \in A \right\} \tag{1}$$

Remarque : Seules les δ^1_{ij} sont des variables. d_{ij}, D_{ij} et d_1 sont des données du problème.

2.2.2 Incertitude sur les poids

Le poids p_i d'un sommet peut au maximum être augmenté de $2\hat{p}_i$. L'augmentation totale des poids du graphe est limitée par le paramètre d_2.

Les valeurs que peuvent prendre les poids du graphe peuvent être représentées par l'ensemble :

$$\mathcal{U}^2 = \left\{ \{p_i^2 = p_i + \delta_i^2 \hat{p}_i\}_{i \in V} \text{ tel que } \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq d_2,\ \delta_i^2 \in [0, 2]\ \forall i \in V \right\} \tag{2}$$

Remarque : Seules les δ_i^2 sont des variables. p_i, $\hat{p}_i$ et d_2 sont des données du problème.

3 Travail demandé

Exercise 1 Modélisation papier

1. Proposer une modélisation du problème statique sous la forme d'un programme linéaire en nombre entiers **compact**.
2. Proposer une modélisation du problème robuste sous la forme d'un programme en nombres entiers.
3. **Résolution par plans coupants et LazyCallback**
   a) Modifier le problème afin que la robustesse n'apparaisse plus dans l'expression de l'objectif mais dans les contraintes.
   b) Définir les ensembles $\mathcal{U}^{1*}$ et $\mathcal{U}^{2*}$ que vous utiliserez initialement dans le problème maître.
   c) Exhiber les sous-problèmes nécessaires à la résolution du problème robuste par plans coupants (les contraintes devront être exprimées de manière explicite).
   d) Quelles sont les conditions à satisfaire pour qu'une solution du problème maître soit optimale ?
   e) Quelle est l'expression des coupes ajoutées par chaque sous-problème ?
4. **Résolution par dualisation**
   a) Reformuler l'objectif du problème robuste afin d'isoler le terme faisant intervenir les variables δ_{ij}^1.
   b) Exhiber le problème interne lié aux variables δ_{ij}^1
   c) Dualiser ce problème.
   d) Reformuler la contrainte robuste afin d'isoler le terme faisant intervenir les variables δ_i^2.
   e) Exhiber le problème interne lié aux variables δ_i^2.
   f) Dualiser ce problème.
   g) Utiliser ces deux dualisations afin de présenter le problème robuste sous la forme d'un simple programme linéaire en nombres entiers.

Answer of exercise 1

1. Problème statique

$$\left\{\begin{array}{llll}
\min_x & \sum_{ij \in A} d_{ij} x_{ij} & & \\
\text{s.c.} & \sum_{j \in \delta^+(s)} x_{sj} = 1 & & \text{(le chemin quitte } s\text{)} \\
& \quad \text{Successeurs de } s & & \\
& \sum_{i \in \delta^-(t)} x_{it} = 1 & & \text{(le chemin arrive en } t\text{)} \\
& \quad \text{Prédécesseurs de } t & & \\
& \sum_{i \in \delta^-(v)} x_{iv} = \sum_{j \in \delta^+(v)} x_{vj} & \forall v \in V \backslash \{s,t\} & \text{(conservation du flot)} \\
& y_v = \sum_{j \in \delta^+(v)} x_{vj} & \forall i \in V \backslash \{t\} & \text{(lien entre les variables } x \text{ et } y\text{)} \\
& y_t = \sum_{j \in \delta^-(t)} x_{it} & \forall i \in V \backslash \{t\} & \text{(lien entre les variables } x \text{ et } y_t\text{)} \\
& \sum_{v \in V} p_v y_v \leq S & & \text{(contrainte robuste)} \\
& x_{ij}, y_v \in \{0,1\} & \forall ij \in A,\ \forall v \in V &
\end{array}\right.$$

2. Problème robuste

$$
\left\{
\begin{array}{rlll}
\min_x \max_{d^1 \in \mathcal{U}^1} & \sum_{ij \in A} d^1_{ij} x_{ij} & & \text{(objectif robuste)} \\
\text{s.c.} & \sum_{j \in \delta^+(s)} x_{sj} = 1 & & \\
 & \sum_{i \in \delta^-(t)} x_{it} = 1 & & \\
 & \sum_{i \in \delta^-(v)} x_{iv} = \sum_{j \in \delta^+(v)} x_{vj} & \forall v \in V \backslash \{s,t\} & \\
 & y_v = \sum_{j \in \delta^+(v)} x_{vj} & \forall i \in V \backslash \{t\} & \\
 & y_t = \sum_{j \in \delta^-(t)} x_{it} & \forall i \in V \backslash \{t\} & \\
 & \sum_{v \in V} p^2_v y_v \leq S & \forall p^2 \in \mathcal{U}^2 & \text{(contrainte de poids sur les sommets)} \\
 & x_{ij}, y_v \in \{0,1\} & \forall ij \in A,\ \forall v \in V &
\end{array}
\right.
$$

3. (a) Reformulation de l'objectif robuste

$$
\left\{
\begin{array}{rll}
\min & z & \\
\text{s.c.} & z \geq \sum_{ij \in A} d^1_{ij} x_{ij} & d^1 \in \mathcal{U}^1 \\
 & \ldots &
\end{array}
\right.
$$

(b) $\mathcal{U}^{1*} = \left\{ \{d^1_{ij} = d_{ij}\}_{ij \in A} \right\}, \mathcal{U}^{2*} = \left\{ \{p^2_i = p_i\}_{i \in V} \right\}$

(c)
- Sous-problème lié à $\mathcal{U}^1$

Solution courante du problème maître

$$
(SP_1) \left\{
\begin{array}{rll}
z_1 = \max_{\delta^1_{ij}} & \sum_{ij \in A} d_{ij}(1 + \delta^1_{ij}) x^*_{ij} & \\
\text{s.c.} & \sum_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leq d_1 & \\
 & \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}] & \forall ij \in A
\end{array}
\right.
$$

- Sous-problème lié à $\mathcal{U}^2$

Solution courante du problème maître

$$
(SP_2) \left\{
\begin{array}{rll}
z_2 = \max_{\delta^2_v} & \sum_{v \in V} (p_v + \delta^2_v \hat{p}_v) y^*_v & \\
\text{s.c.} & \sum_{v \in V} \delta^2_v \leq d_2 & \\
 & \delta^2_v \in [0, 2] & \forall v \in V
\end{array}
\right.
$$

- Une solution x^*_{ij} est optimale si $z_1 = z^*$ et si $z_2 \leq S$

Solution courante du problème maître

(d)
- Contrainte de (SP_1) : $z \geq \sum_{ij \in A} d_{ij}(1 + \delta^{1*}_{ij}) x_{ij}$

Solution de (SP_1)

- Contrainte de (SP_2) : $\sum_{v \in V} y_v (p_v + \hat{p}_v \delta^{2*}_v) \leq S$

Solution de (SP_2)

4. (a) Reformulation de l'objectif

$$
\begin{aligned}
\min_x \max_{d^1 \in \mathcal{U}^1} \sum_{ij \in A} d^1_{ij} x_{ij} &= \min_x \max_{d^1 \in \mathcal{U}^1} \sum_{ij \in A} d_{ij}(1 + \delta^1_{ij}) x_{ij} \\
&= \min_x \left(\sum_{ij \in A} d_{ij} x_{ij} + \max_{\delta^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} \delta^1_{ij} x_{ij} \right)
\end{aligned}
$$

(b)
$$
(PI_1) \left\{
\begin{array}{rll}
\max_{\delta^1} & \sum_{ij \in A} d_{ij} \delta^1_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.c.} & \sum_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leq d_1 & \\
 & \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}] & \forall ij \in A
\end{array}
\right.
$$

(c)
$$
(D_1) \left\{
\begin{array}{rll}
\min_{t_1, z} & d_1 t_1 + \sum_{ij \in A} D_{ij} z_{ij} & \\
\text{s.c.} & t_1 + z_{ij} \geq d_{ij} x_{ij} & \forall ij \in A \\
 & t_1 \geq 0 & \\
 & z_{ij} \geq 0 & \forall ij \in A
\end{array}
\right.
$$

(d) Reformulation de la contrainte robuste

$$
\begin{array}{lll}
 & \sum_{v \in V} p^2_v y_v \leq S & \forall p^2 \in \mathcal{U}^2 \\
\Leftrightarrow & \sum_{v \in V} (p_v + \delta^2_v \hat{p}_v) y_v \leq S & \forall \delta^2 \\
\Leftrightarrow & \sum_{v \in V} p_v y_v + \sum_{v \in V} \delta^2_v \hat{p}_v y_v \leq S & \forall \delta^2
\end{array}
$$

(e) $(PI_2)\begin{cases} \max_{\delta^2} & \sum_{v\in V}\delta_v^2\hat{p}_v y_v \\ \text{s.c.} & \sum_{v\in V}\delta_v^2 \le d_2 \\ & \delta_v^2\in[0,2] \qquad \forall v\in V \end{cases}$

(f) $(D_2)\begin{cases} \min_{t_2,z'} & t_2 d_2 + \sum_{v\in V} 2z'_v \\ \text{s.c.} & t_2 + z'_v \ge \hat{p}_v y_v \qquad \forall v\in V \\ & t_2 \ge 0 \\ & z'_v \ge 0 \qquad \forall v\in V \end{cases}$

(g) Problème robuste dualisé

$$\begin{cases} \min_{x,t_1,z} & \sum_{ij\in A} d_{ij}x_{ij} + d_1 t_1 + \sum_{ij\in A} D_{ij} z_{ij} & & \text{(1 simple minimisation)} \\ \text{s.c.} & \sum_{j\in\delta^+(s)} x_{sj} = 1 & & \\ & \sum_{i\in\delta^-(t)} x_{it} = 1 & & \\ & \sum_{i\in\delta^-(v)} x_{iv} = \sum_{j\in\delta^+(v)} x_{vj} & \forall v\in V\backslash\{s,t\} & \\ & y_v = \sum_{j\in\delta^+(v)} x_{vj} & \forall i\in V\backslash\{t\} & \\ & y_t = \sum_{j\in\delta^-(t)} x_{it} & \forall i\in V\backslash\{t\} & \\ & \sum_{v\in V}(p_v y_v + 2z'_v) + t_2 d_2 \le S & & \text{(contrainte robuste dualisée)} \\ & t_1 + z_{ij} \ge d_{ij}x_{ij} & \forall ij\in A & \\ & t_2 + z'_v \ge \hat{p}_v y_v & \forall v\in V & \\ & x_{ij}, y_v \in\{0,1\} & \forall ij\in A,\ \forall v\in V & \\ & t_1, t_2 \ge 0 & & \\ & z_{ij}\ge 0 & \forall ij\in A & \\ & z'_v \ge 0 & \forall v\in V & \end{cases}$$

Exercise 2 Résolution numérique

1. Implémenter la résolution du problème robuste par dualisation, par plans coupants et par *branch-and-cut*. Vous pourrez tenter d'améliorer les performances de ces méthodes en les adaptant. Vous pouvez par exemple, essayer de résoudre heuristiquement les sous-problèmes, d'ajouter des callbacks, de fournir des solutions initiales à CPLEX, de retirer de la symétrie, de simplifier les données en entrée, de renforcer les coupes robustes ajoutées, ...
2. Choisir une des deux options :
   - *(Choix 1)* - Implémenter une heuristique permettant de résoudre ce problème. Cette heuristique devra fournir une garantie de performances a posteriori (en utilisant par exemple la relaxation du problème dualisé).
   - *(Choix 2)* - Résoudre le problème robuste en utilisant une formulation non compacte du problème.
3. a) Comparer les performances de ces quatre méthodes sur les données fournies. Vous ne pourrez résoudre optimalement toutes les instances. Vous pourrez donc fixer un temps maximal et calculer le gap entre la meilleure solution réalisable obtenue (si vous en avez obtenu une) et la meilleure relaxation du problème.
   b) Présenter vos résultats sous la forme d'un tableau tel que le suivant (la colonne PR correspond au prix de la robustesse qui est le gap entre la valeur de l'objectif d'une solution optimale robuste et d'une solution optimale statique) :

Instance	**PR**	**Plans coupants**		**Branch-and-cut**		**Dualisation**		**Heuristique**	
		Time	**Gap**	**Time**	**Gap**	**Time**	**Gap**	**Time**	**Gap**
20_USA-road-d.BAY	8%	10s	0%	10s	0%	10s	0%	10s	0%
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

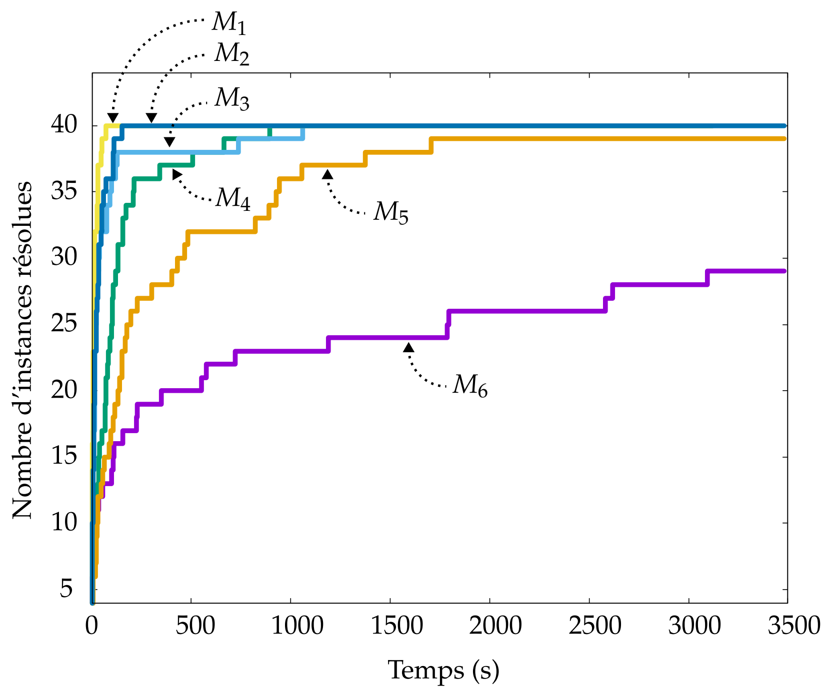

Figure 1: Exemple de diagramme de performances.

c) La lecture de tableaux de ce type pouvant parfois être fastidieuses, nous allons également représenter les résultats sous la forme de diagrammes de performances. Un diagramme de performances est une représentation graphique des performances de différentes méthodes sur les mêmes instances d'un même problème. Il représente pour chaque méthode le nombre d'instance résolues en fonction du temps. Par exemple, la Figure 1 permet de comparer aisément les performances de 6 méthodes.

4 Echéancier et modalités

Ce projet s'effectue en binôme.

- **Modélisation papier (à rendre pour le 3 janvier 2021)**

  Une modélisation vous sera fournie par mail quelques jours après la date de rendu (afin de vous permettre de corriger d'éventuelles erreurs de modélisation).

- **Rapport (à rendre le 6 février 2022)**

  Ce rapport devra présenter les algorithmes proposés ainsi que les résultats expérimentaux obtenus. Vous mentionnerez en annexe une solution optimale obtenue pour chaque instance résolue ainsi que la valeur de son objectif.

- **Soutenances (11 février 2022)**

  L'évaluation se fera d'une part sur la justification et l'analyse des méthodes de résolution proposées pour le problème étudié, et d'autre part sur la qualité effective de ces algorithmes de résolution.