Le Cnam
Institut Polytechnique de Paris

Projet ECMA

Auteurs :
Justine De Sousa
Natalia Jorquera

Superviseur :
Zachari Ales

2 janvier 2022

Table des matières

1 Partie théorique **1**
1.1 Modélisation statique 1
1.2 Modélisation robuste 1
1.3 Plans coupants et LazyCallback 2
1.3.1 Robustesse dans les contraintes 2
1.3.2 Problème maître 2
1.3.3 Sous-problèmes 3
1.3.4 Solution optimale 3
1.3.5 Coupes à ajouter 3
1.4 Dualisation 4
1.4.1 Reformulation de la fonction objectif 4
1.4.2 Problème interne lié aux variables δ_{ij}^1 5
1.4.3 Problème Dual 5
1.4.4 Reformulation des contraintes robustes 5
1.4.5 Problème interne lié aux variables δ_j^2 5
1.4.6 Problème Dual 5
1.4.7 PLNE du problème robuste 6

1 Partie théorique

1.1 Modélisation statique

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté, un sommet origine $s \in V$ et un sommet destination $t \in V$, chaque arc $(ij) \in A$ a une durée de trajet d_{ij}, de plus, chaque sommet a un poids p_i. Le problème statique consiste à trouver un plus court chemin d'un sommet s à un sommet t, où la somme pondérée des sommets appartenant au chemin est inférieure ou égale à un nombre entier S.

On utilise les variables suivantes :

$$x_{ij} = 1 \text{ ssi l'arc (ij) est emprunté}$$

$$y_i = 1 \text{ ssi le sommet i est emprunté}$$

$$\begin{cases} \min\limits_{x} \sum\limits_{ij \in A} d_{ij} \cdot x_{ij} & \\ \quad s.c. : & \\ \qquad \sum\limits_{i \in V} p_i \cdot y_i \leqslant S & \text{(contrainte de sac à dos)} \\ \qquad \sum\limits_{i:ij \in A} x_{ij} = \sum\limits_{i:ji \in A} x_{ji} \ \forall\, j \in V \backslash \{s,t\} & \text{(autant d'arcs entrants que d'arcs sortants)} \\ \qquad \sum\limits_{j:sj \in A} x_{s,j} = 1 & \text{(un arc sortant de s)} \\ \qquad \sum\limits_{i:it \in A} x_{i,t} = 1 & \text{(un arc entrant en t)} \\ \qquad \sum\limits_{j:ij \in A} x_{ij} = y_i \ \forall\, i \in V \backslash \{s\} & \text{(chaque sommet appartenant au chemin est passé une seule fois)} \\ \qquad \sum\limits_{j:ji \in A} x_{ji} = y_i \ \forall\, i \in V \backslash \{t\} & \text{(chaque sommet appartenant au chemin est passé une seule fois)} \\ \qquad x_{ij} \in \{0,1\} \ \forall\, ij \in A & \\ \qquad y_i \in \{0,1\} \ \forall\, i \in V & \end{cases}$$

1.2 Modélisation robuste

La version robuste de ce problème considère différents scénarios étant donné l'incertitude de certains de ses paramètres :

Incertitude sur les durées : $d^1_{ij} \in \mathcal{U}^1$

$$\mathcal{U}^1 = \left\{ \{d^1_{ij} = d_{ij} \cdot (1 + \delta^1_{ij})\}_{ij \in A} \,\middle|\, \sum_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leqslant d_1,\ \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}] \ \forall\, ij \in A \right\}$$

Incertitude sur les poids : $p^2_i \in \mathcal{U}^2$

$$\mathcal{U}^2 = \left\{ \{p^2_i = p_i + \delta^2_i \cdot \hat{p}_i\}_{i \in V} \,\middle|\, \sum_{i \in V} \delta^2_i \leqslant d_2,\ \delta^2_i \in [0, 2] \ \forall\, i \in V \right\}$$

Le problème robuste s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \min\limits_{(x,y)} \max\limits_{\delta^1_{ij}} \sum\limits_{ij \in A} d_{ij} \cdot (1+\delta^1_{ij}) \cdot x_{ij} \\ \quad s.c. : \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i:ij \in A} x_{ij} = \sum\limits_{i:ji \in A} x_{ji} \; \forall \; j \in V \backslash \{s,t\}, \\ \sum\limits_{j \in V} x_{sj} = 1, \\ \sum\limits_{i \in V} x_{it} = 1, \\ \sum\limits_{j:ij \in A} x_{ij} = y_i \; \forall \; i \in V \backslash \{s\}, \\ \sum\limits_{j:ji \in A} x_{ji} = y_i \; \forall \; i \in V \backslash \{t\}, \\ x_{ij} \in \{0,1\} \; \forall \; (ij) \in A, \; y_i \in \{0,1\} \; \forall \; i \in V, \end{array}\right\} \mathcal{X}^{comb} \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leqslant d_1, \\ \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}] \; \forall \; (i,j) \in A, \end{array}\right\} \mathcal{U}^1 \\ \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i \in V} (p_i + \delta^2_i \cdot \hat{p}_i) \cdot y_i \leqslant S, \\ \sum\limits_{i \in V} \delta^2_i \leqslant d_2, \\ \delta^2_i \in [0,2] \; \forall \; i \in V, \end{array}\right\} \mathcal{U}^2 \end{array}\right\} \mathcal{X}^{num} \end{cases}$$

1.3 Plans coupants et LazyCallback

1.3.1 Robustesse dans les contraintes

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y,z} \quad z \\ \quad s.c. : \\ \qquad \sum\limits_{ij \in A} d_{ij} \cdot (1+\delta^1_{ij}) \cdot x_{ij} \leqslant z, \\ \qquad (x,y) \in \mathcal{X}^{comb}, \\ \qquad (x,y) \in \mathcal{X}^{num} \end{cases}$$

1.3.2 Problème maître

A la première itération, on fixe

$$\mathcal{U}^{1*} = \varnothing \qquad \mathcal{U}^{2*} = \varnothing$$

On résoudra donc le problème maître suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y,z} \quad z \\ \quad s.c. : \\ \qquad (x,y) \in \mathcal{X}^{comb} \end{cases} \tag{MP}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y,z} \quad z \\ \quad s.c. : \\ \quad\quad \sum\limits_{i:ij \in A} x_{ij} = \sum\limits_{i:ji \in A} x_{ji} \ \forall \ j \in V \backslash \{s,t\}, \\ \quad\quad \sum\limits_{j \in V} x_{sj} = 1, \\ \quad\quad \sum\limits_{i \in V} x_{it} = 1, \\ \quad\quad \sum\limits_{j:ij \in A} x_{ij} = y_i \ \forall \ i \in V \backslash \{s\}, \\ \quad\quad \sum\limits_{j:ji \in A} x_{ji} = y_i \ \forall \ i \in V \backslash \{t\}, \\ \quad\quad x \in \{0,1\}^{n^2}, y \in \{0,1\}^n \end{cases} \tag{MP}$$

1.3.3 Sous-problèmes

On résout le problème maître et on obtient une solution $(x^\star, y^\star), z^\star$. Les sous-problèmes nécessaires à la résolution du problème robuste par plans coupants sont les suivants :

$$\begin{cases} \max\limits_{\delta^1_{ij}} \quad \sum\limits_{(ij) \in A} d_{ij} \cdot (1 + \delta^1_{ij}) \cdot x^\star_{ij} \\ \quad s.c. : \\ \quad\quad \sum\limits_{(ij) \in A} \delta^1_{ij} \leqslant d_1 \\ \quad\quad \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}], \ \forall (ij) \in A \end{cases} \tag{SPo}$$

$$\begin{cases} \max\limits_{\delta^2_i} \quad \sum\limits_{i \in V} (p_i + \delta^2_i \cdot \hat{p}_i) \cdot y^\star_i \\ \quad s.c. : \\ \quad\quad \sum\limits_{i \in V} \delta^2_i \leqslant d_2 \\ \quad\quad \delta^2_i \in [0, 2], \ \forall i \in V \end{cases} \tag{SP2}$$

1.3.4 Solution optimale

On résout SPo et SP2 et on obtient des solutions $\delta^{1\star}$ et $\delta^{2\star}$.
Une solution $(x^\star, y^\star), z^\star$ du problème maître est optimale si

$$\begin{cases} \sum\limits_{(ij) \in A} d_{ij} \cdot (1 + \delta^{1\star}_{ij}) \cdot x^\star_{ij} \leqslant z^\star \\ \sum\limits_{i \in V} (p_i + \delta^{2\star}_i \cdot \hat{p}_i) \cdot y^\star_i \leqslant S \end{cases}$$

1.3.5 Coupes à ajouter

Si l'une des conditions ci-dessus n'est pas respectées, il faudra alors ajouter l'une ou deux des coupes ci-dessous (en fonction desquelles ne sont pas respectées) :

$$\begin{cases} \sum\limits_{(ij) \in A} d_{ij} \cdot (1 + \delta^{1\star}_{ij}) \cdot x_{ij} \leqslant z \\ \sum\limits_{i \in V} (p_i + \delta^{2\star}_i \cdot \hat{p}_i) \cdot y_i \leqslant S \end{cases}$$

On itère ce processus jusqu'à obtenir une solution réalisable. Celle-ci sera alors optimale.

Une façon d'améliorer l'algorithme consiste à utiliser des callbacks afin d'ajouter les coupes au fur et à mesure plutôt que de démarrer à zéro à chaque ajout de coupe.

1.4 Dualisation

Rappelons la formulation du problème robuste :

$$\begin{cases} \min\limits_{(x,y)} \max\limits_{\delta^1_{ij}} \sum\limits_{ij \in A} d_{ij} \cdot (1 + \delta^1_{ij}) \cdot x_{ij} \\ \quad s.c. : \\ \quad\quad \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i:ij \in A} x_{ij} = \sum\limits_{i:ji \in A} x_{ji} \ \forall\, j \in V \backslash \{s,t\}, \\ \sum\limits_{j \in V} x_{sj} = 1, \\ \sum\limits_{i \in V} x_{it} = 1, \\ \sum\limits_{j:ij \in A} x_{ij} = y_i \ \forall\, i \in V \backslash \{s\}, \\ \sum\limits_{j:ji \in A} x_{ji} = y_i \ \forall\, i \in V \backslash \{t\}, \\ x_{ij} \in \{0,1\} \ \forall\, (ij) \in A,\ y_i \in \{0,1\} \ \forall\, i \in V, \end{array}\right\} \mathcal{X}^{comb} \\ \quad\quad \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leqslant d_1, \\ \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}] \ \forall\, (i,j) \in A, \end{array}\right\} \mathcal{U}^1 \\ \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i \in V} (p_i + \delta^2_i \cdot \hat{p}_i) \cdot y_i \leqslant S, \\ \sum\limits_{i \in V} \delta^2_i \leqslant d_2, \\ \delta^2_i \in [0,2] \ \forall\, i \in V, \end{array}\right\} \mathcal{U}^2 \end{array}\right\} \mathcal{X}^{num} \end{cases}$$

1.4.1 Reformulation de la fonction objectif

$$\begin{aligned} & \min_{(x,y)} \max_{\delta^1_{ij}} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot (1 + \delta^1_{ij}) \cdot x_{ij} \\ = & \min_{(x,y)} \max_{\delta^1_{ij}} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot \delta^1_{ij} \cdot x_{ij} \\ = & \min_{(x,y)} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot x_{ij} + \max_{\delta^1_{ij}} \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot \delta^1_{ij} \cdot x_{ij} \end{aligned}$$

Le problème devient alors :

$$\begin{cases} \min\limits_{(x,y)} \sum\limits_{ij \in A} d_{ij} \cdot x_{ij} + \max\limits_{\delta^1_{ij} \in \mathcal{U}^1} \sum\limits_{ij \in A} d_{ij} \cdot \delta^1_{ij} \cdot x_{ij} \\ \quad s.c. : \\ \quad\quad x \in \mathcal{X}^{comb}, \\ \quad\quad x \in \mathcal{X}^{num} \end{cases}$$

1.4.2 Problème interne lié aux variables δ^1_{ij}

$$\begin{cases} \max_{\delta^1_{ij}} \sum_{ij\in A} d_{ij} \cdot \delta^1_{ij} \cdot x_{ij} \\ \quad s.c. : \\ \qquad \sum_{ij\in A} \delta^1_{ij} \leqslant d_1 \\ \qquad \delta^1_{ij} \leqslant D_{ij} \qquad \forall ij \in A \\ \qquad \delta^1_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

Remarque : x est considéré constant ici.

1.4.3 Problème Dual

Le problème dual du problème interne est le suivant :

$$\begin{cases} \min_{\alpha,\beta} \sum_{ij\in A} D_{ij} \cdot \beta_{ij} + d_1 \cdot \alpha \\ \quad s.c. : \\ \qquad \alpha + \beta_{ij} \geqslant d_{ij} \cdot x_{ij} \qquad \forall ij \in A \\ \qquad \alpha \geqslant 0 \\ \qquad \beta_{ij} \geqslant 0 \qquad \forall ij \in A \end{cases}$$

1.4.4 Reformulation des contraintes robustes

La contrainte robuste se réécrit :

$$\sum_{i\in V} (p_i + \delta^2_i \cdot \hat{p}_i) \cdot y_i \leqslant S \ \forall \delta^2 \in \mathcal{U}^2$$

$$= \begin{cases} \sum_{i\in V} p_i \cdot y_i + \max_{\delta^2} \sum_{i\in V} \delta^2_i \cdot \hat{p}_i \cdot y_i \leqslant S \\ \quad s.c. : \\ \qquad \sum_{i\in V} \delta^2_i \leqslant d_2 \\ \qquad \delta^2_i \leqslant 2 \ \forall i \in V \\ \qquad \delta^2_i \geqslant 0 \ \forall i \in V \end{cases}$$

1.4.5 Problème interne lié aux variables δ^2_j

Il s'agit alors de résoudre le problème interne suivant :

$$\begin{cases} \max_{\delta^2_i} \sum_{i\in V} \delta^2_i \cdot \hat{p}_i \cdot y_i \\ \quad s.c. : \\ \qquad \sum_{i\in V} \delta^2_i \leqslant d_2 \\ \qquad \delta^2_i \leqslant 2 \qquad \forall i \in V \\ \qquad \delta^2_i \geqslant 0 \qquad \forall i \in V \end{cases}$$

1.4.6 Problème Dual

Son dual s'écrit :

$$\begin{cases} \min\limits_{\gamma,\varepsilon} \sum\limits_{i\in V} 2\cdot\varepsilon_i + d_2\cdot\gamma \\ \quad s.c.: \\ \qquad \gamma+\varepsilon_i \geqslant \hat{p}_i\cdot y_i \qquad \forall i\in V \\ \qquad \gamma\geqslant 0 \\ \qquad \varepsilon_i \geqslant 0 \qquad \forall i\in V \end{cases}$$

Remarque : y est considéré constant ici.

1.4.7 PLNE du problème robuste

On remplace l'objectif par la nouvelle expression trouvée en 1.4.1. Par dualité forte et 1.4.3, on a :

$$\begin{cases} \max\limits_{\delta^1_{ij}} \sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\cdot\delta^1_{ij}\cdot x_{ij} \\ \quad s.c.: \\ \qquad \sum\limits_{ij\in A}\delta^1_{ij}\leqslant d_1 \\ \qquad \delta^1_{ij}\leqslant D_{ij} \qquad \forall ij\in A \\ \qquad \delta^1_{ij}\geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} \min\limits_{\alpha,\beta} \sum\limits_{ij\in A} D_{ij}\cdot\beta_{ij} + d_1\cdot\alpha \\ \quad s.c.: \\ \qquad \alpha+\beta_{ij}\geqslant d_{ij}\cdot x_{ij} \qquad \forall ij\in A \\ \qquad \alpha\geqslant 0 \\ \qquad \beta_{ij}\geqslant 0 \qquad \forall ij\in A \end{cases}$$

De même, par dualité forte et 1.4.6, on a :

$$\begin{cases} \max\limits_{\delta^2_{i}} \sum\limits_{i\in V} \delta^2_i\cdot\hat{p}_i\cdot y_i \\ \quad s.c.: \\ \qquad \sum\limits_{i\in V}\delta^2_i\leqslant d_2 \\ \qquad \delta^2_i\leqslant 2 \qquad \forall i\in V \\ \qquad \delta^2_i\geqslant 0 \qquad \forall i\in V \end{cases} = \begin{cases} \min\limits_{\gamma,\varepsilon} \sum\limits_{i\in V} 2\cdot\varepsilon_i + d_2\cdot\gamma \\ \quad s.c.: \\ \qquad \gamma+\varepsilon_i \geqslant \hat{p}_i\cdot y_i \qquad \forall i\in V \\ \qquad \gamma\geqslant 0 \\ \qquad \varepsilon_i \geqslant 0 \qquad \forall i\in V \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min\limits_{(x,y),(\alpha,\beta)} \sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\cdot x_{ij} + \sum\limits_{ij\in A} D_{ij}\cdot\beta_{ij} + d_1\cdot\alpha \\ \quad s.c.: \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i:ij\in A} x_{ij} = \sum\limits_{i:ji\in A} x_{ji}\ \forall\, j\in V\backslash\{s,t\}, \\ \sum\limits_{j\in V} x_{sj} = 1, \\ \sum\limits_{i\in V} x_{it} = 1, \\ \sum\limits_{j:ij\in A} x_{ij} = y_i\ \forall\, i\in V\backslash\{s\}, \\ \sum\limits_{j:ji\in A} x_{ji} = y_i\ \forall\, i\in V\backslash\{t\}, \\ x_{ij}\in\{0,1\}\ \forall\,(ij)\in A, y_i\in\{0,1\}\ \forall\, i\in V, \end{array}\right\}\mathcal{X}^{comb} \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \alpha+\beta_{ij}\geqslant d_{ij}\cdot x_{ij}\ \forall\, ij\in A \\ \alpha\geqslant 0,\ \beta_{ij}\geqslant 0\ \forall\, ij\in A \end{array}\right\}\mathcal{U}^1 \\ \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i\in V} p_i\cdot y_i + \sum\limits_{i\in V} 2\varepsilon_i + d_2\cdot\gamma\leqslant S, \\ \gamma+\varepsilon_i\geqslant \hat{p}_i\cdot y_i\ \forall\, i\in V \\ \gamma\geqslant 0,\ \varepsilon_i\geqslant 0\ \forall\, i\in V \end{array}\right\}\mathcal{U}^2 \end{array}\right\}\mathcal{X}^{num} \end{cases}$$