Einführung in die Technische Informatik

Prof. Dr.-Ing. Stefan Kowalewski

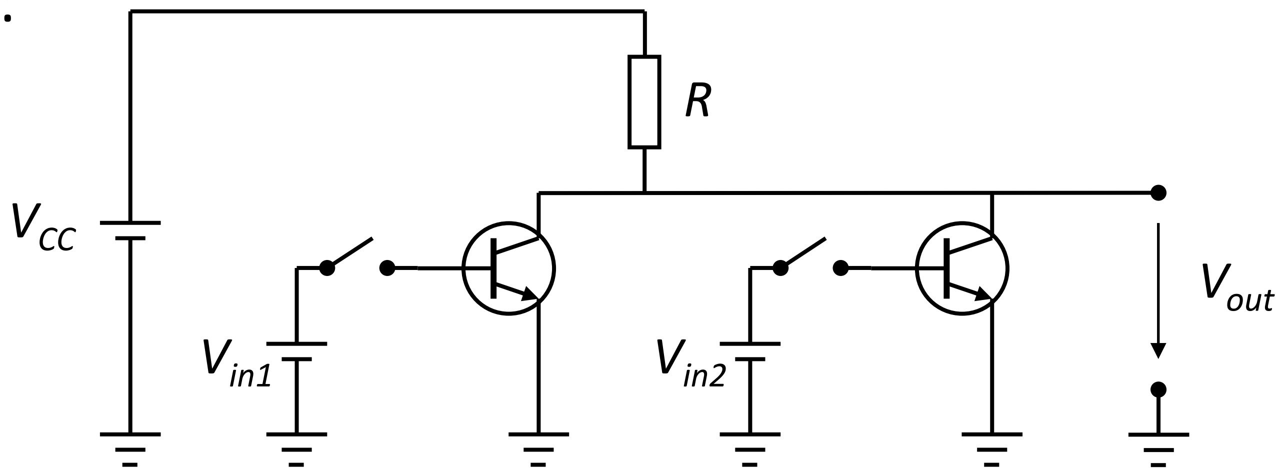
WS 22/23

# Kapitel 4: Elektrotechnische Grundlagen

Informatik 11
Embedded Software
RWTH AACHEN UNIVERSITY

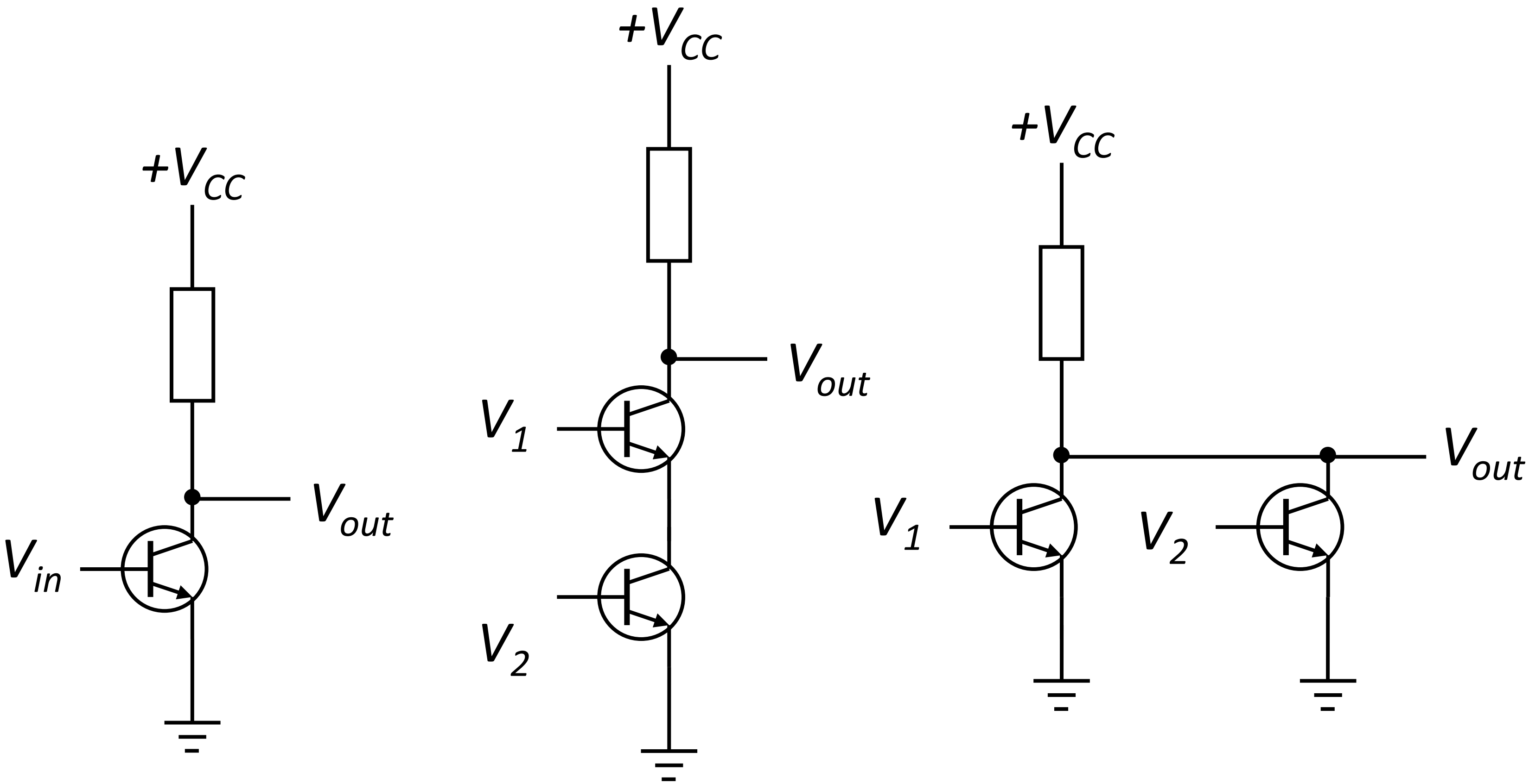
# Motivation

- Rechner bestehen (noch) aus elektronischen Schaltkreisen
- Beispiel:




- Was macht dieser Schaltkreis?
- Muss man das als Informatiker/-in herausfinden können?
- Antwort: Ja! Z.B. dann, wenn Sie beim Entwurf einer Mikrocontroller-Steuerung mit einem Elektrotechniker-Kollegen aus Ihrem Entwicklerteam notwendige Vorschaltkreise besprechen müssen.

# Einführendes Beispiel: Eine Möglichkeit zur Realisierung von NAND und NOR auf Transistorebene




**NICHT** **NAND** **NOR**

# Abschnitt 4.1

Physikalische Grundlagen

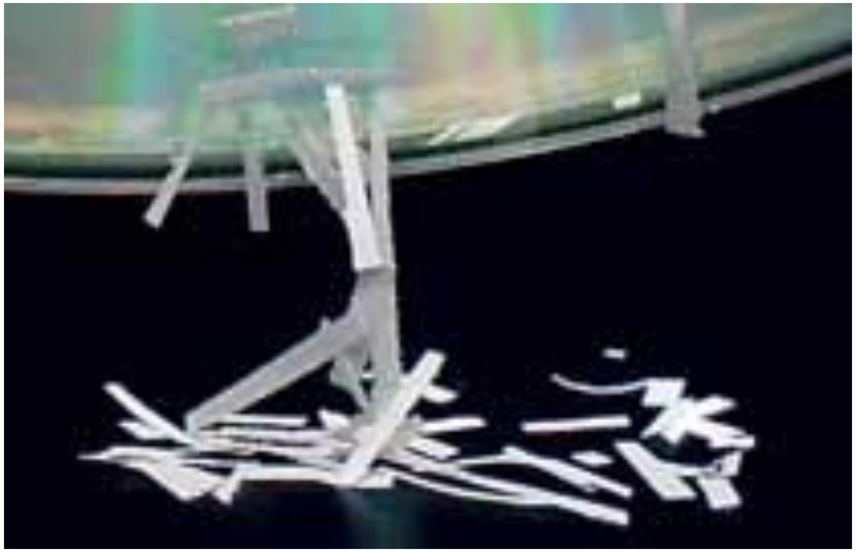
- Elektrische Ladung
- Elektrische Spannung
- Elektrischer Strom
- Elektrischer Widerstand
- Ohmsches Gesetz

# Physikalische Grundlagen

- Wichtige physikalische Größen für die Elektrotechnik:
  Ladung, Spannung, Strom, Widerstand, Kapazität, Induktivität, etc.
- **Physikalische Größe**:
  - kennzeichnet messbare Eigenschaften physikalischer Objekte
  - hat ein **Symbol** (z.B. *U* für elektrische Spannung)
  - hat einen **Wert**, der aus **Zahlenwert und Einheit** besteht (z.B. 3.5 V)
  - Man schreibt: [*U*] = V
- Es gibt **Einheitensysteme**
  - Festlegung von Basisgrößen, aus denen sich alle anderen Größen (und ihre Einheiten) ableiten lassen
  - Beispiel: **SI-System** mit 7 Basisgrößen. Für uns hier interessant:
    - *Länge* (m)
    - *Zeit* (s)
    - *Masse* (kg)
    - *elektrische Stromstärke* (A)

# Elektrische Ladung

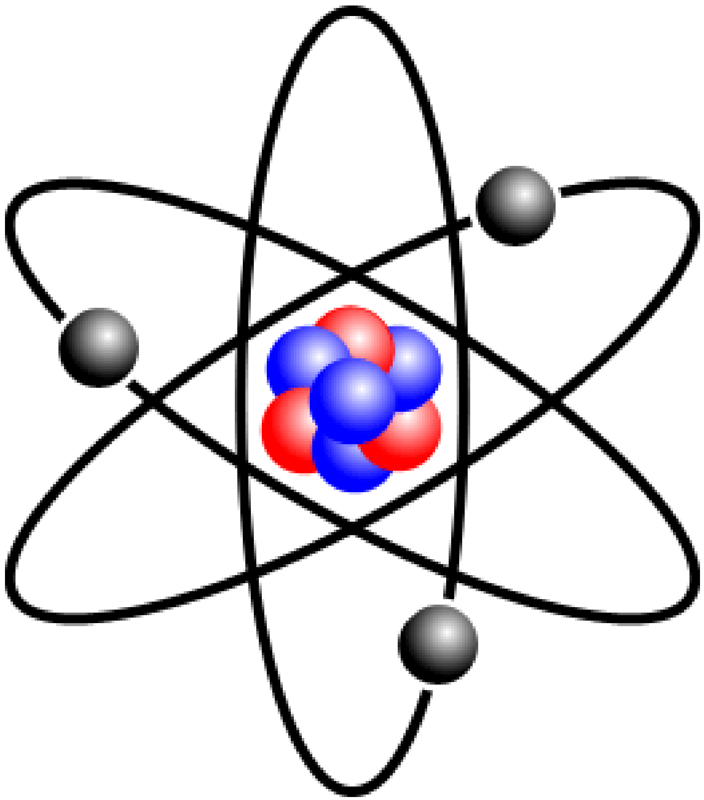
- Grundlegende Eigenschaft von Materie
- Symbol: $Q$
- Einheit: $[Q] = \mathrm{C}$
  für „Coulomb“ (Charles Augustin de Coulomb, 1736-1806)
- Ladung ist beobachtbar als (nicht mit der Gravitation erklärbare) Kraftwirkung zwischen Materie
- Beispiel:
  Papierstreifen werden von einer zuvor an einem Synthetikpullover geriebenen CD angezogen



Quelle: wikimedia.org September 2010

# Elektrische Ladung

- Das Phänomen geladener Materie lässt sich mit dem Atommodell erläutern:



Schwarz: Elektron
Rot: Proton
Blau: Neutron

Quelle: wikimedia.org Juli 2010

# Elektrische Ladung

- Elektronen und Protonen sind sogenannte **Ladungsträger.**
- Es gibt positive und negative Ladung
- Elektronen sind negativ geladen, Protonen positiv
- Kleinste frei existierende Ladung:

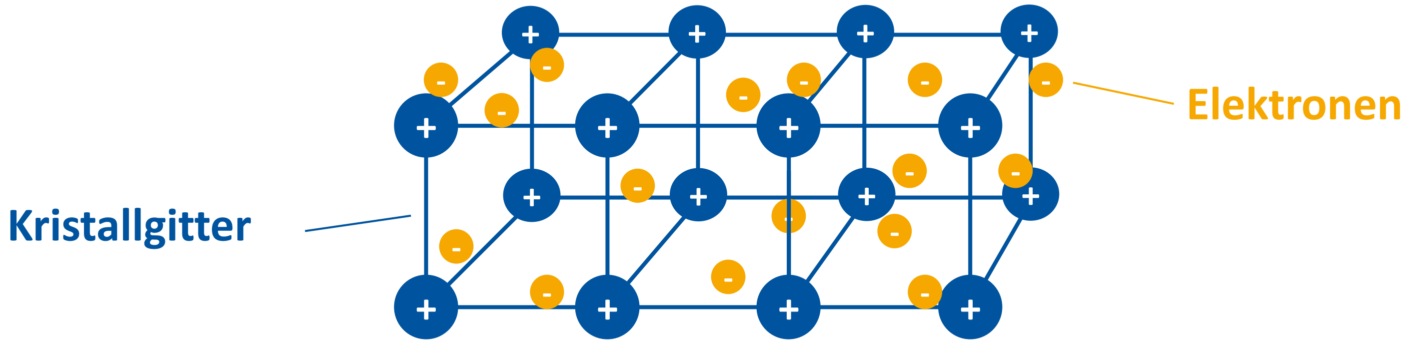
  **Elementarladung** $e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
- Ladung eines Elektrons: $-e$
- Ladung eines Protons: $e$

# Elektrische Ladung

- Elektronen und Protonen können weder erzeugt noch vernichtet werden

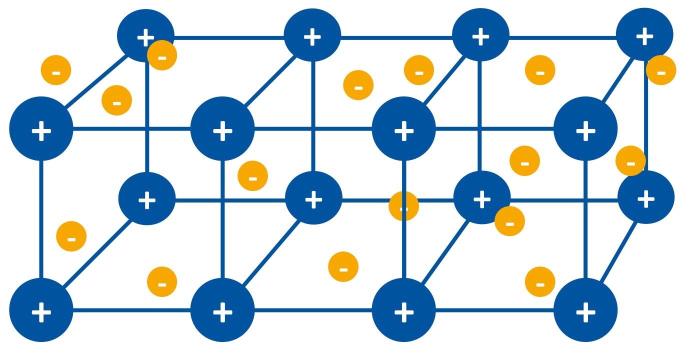
  $\rightarrow$ Ladung von Körpern entsteht durch Ortswechsel von Elementarladungen

- Es genügt hier, die Verschiebung von *Elektronen* zu betrachten, z.B. in *metallischen Leitern*, wo die Atome ein Kristallgitter bilden, in dem sich Elektronen frei bewegen können.

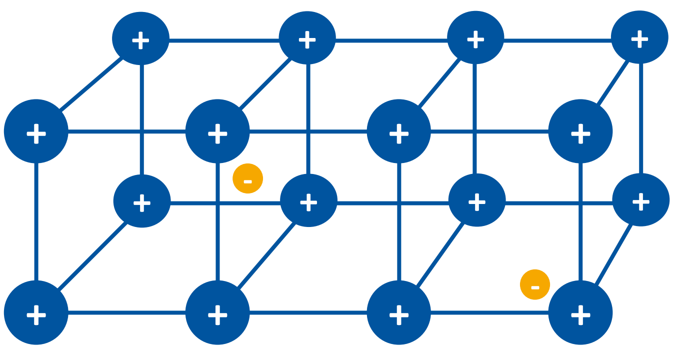


# Elektrische Ladung

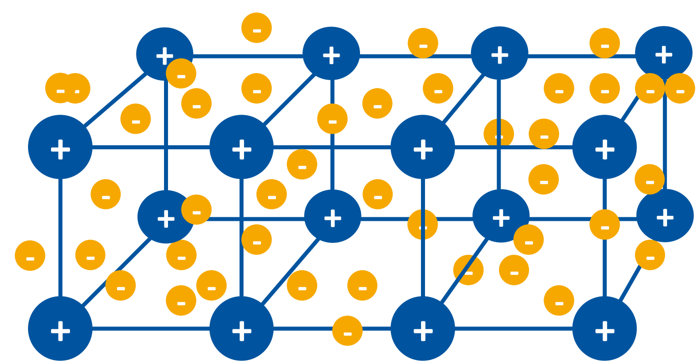
- Ladung von Materie entsteht durch Verschiebung von Elementarladungen



**nicht geladen (neutral)**



**Elektronenmangel = positive Ladung**



**Elektronenüberschuss = negative Ladung**

# Elektrische Ladung

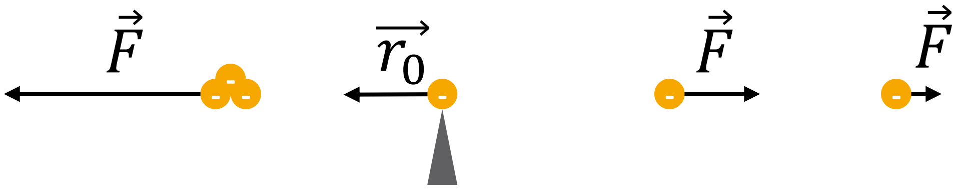
- Die elektrische Ladung Q eines Körpers ist quantisiert. Sie ist immer ein Vielfaches der Elementarladung *e*:

$$Q = n \cdot e, \;\; n \in \boldsymbol{N}$$

- Wie groß ist *n* für 1 C?

# Elektrische Ladung

- Kraftwirkung durch Ladung:
  - Körper mit gleicher Ladung stoßen sich ab
  - Ungleich geladene Körper ziehen sich an (vgl. CD-Experiment)
- Gedankenexperiment:




fest gehaltene Ladung

- F heißt Coulomb-Kraft
- Gesetz von Coulomb:

$$\vec{F} = K \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \overrightarrow{r_0}$$

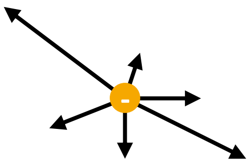
Charles Augustin de Coulomb, 1736-1806

Quelle: wikimedia.org September 2010

# Elektrische Ladung

- Aus dem Coulomb-Gesetz folgt:

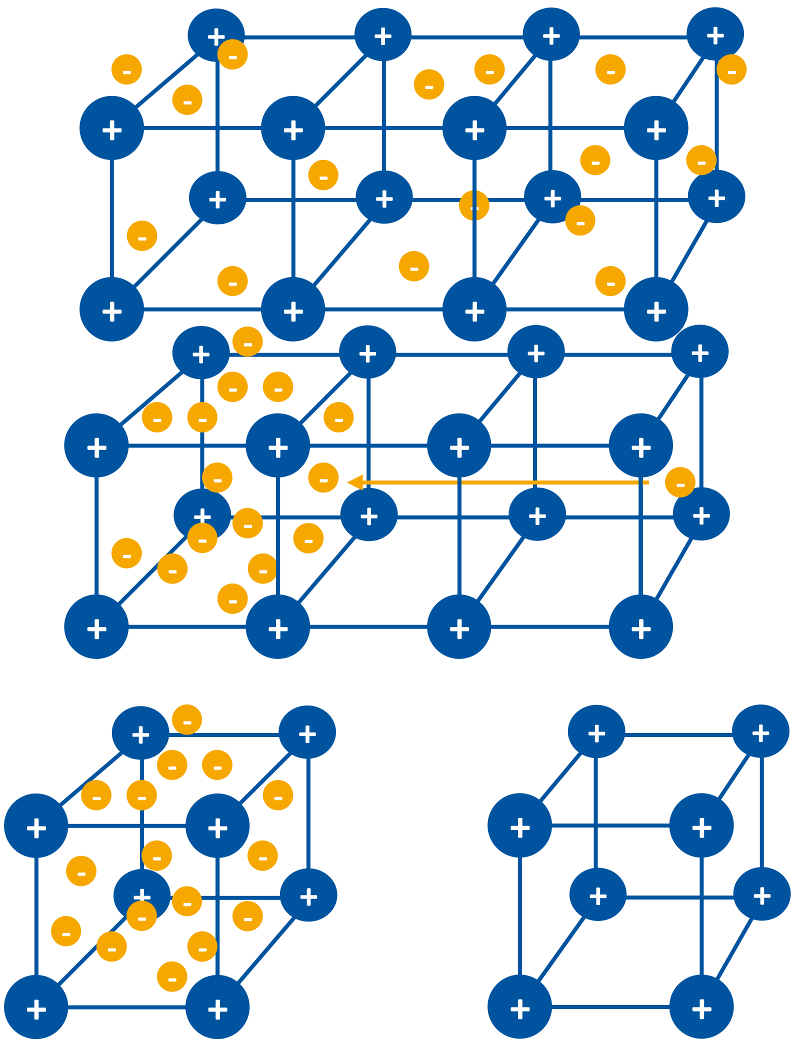
  Ungleichmäßig verteilte Ladungsträger suchen Ausgleich!




- Das Phänomen der elektrischen Spannung beruht auf dem Ausgleichbestreben der Ladungsträger.

# Elektrische Spannung

- Gedankenexperiment:
  - Verschieben von Elektronen in
  - Ungleichgewichtszustand
  - Unterbrechen des Leiters
- Zum Verschieben von Ladungsträgern aus einer ausgeglichenen Verteilung muss Arbeit *W* aufgebracht werden.
- *W* steht dann als potenzielle Energie (zum Ladungsträgerausgleich) zwischen zwei Punkten zur Verfügung
- $[W]$ = J für „Joule“ (nach James Prescott Joule, 1818-1889)



# Elektrische Spannung

- W ist proportional zur Größe der bewegten Ladung Q (W ~ Q).
- Energie, die als Ergebnis einer Ladungsträgerverschiebung bezogen auf die Ladungseinheit zur Verfügung steht:

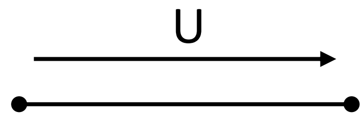
$$U = \frac{W}{Q}$$

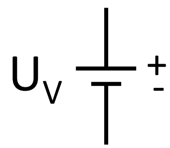
Quelle: wikimedia.org September 2010

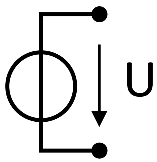
- $U$ steht für elektrische Spannung.
- $[U]$ = J/C = V   für „Volt“
  (nach Alessandro Volta, 1745-1827)

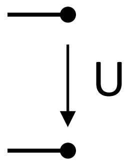
# Elektrische Spannung im Schaltkreis

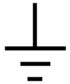
- Spannung wirkt zwischen zwei Punkten eines Schaltkreises




- Spannungsquellen im Schaltkreis: 

oder 

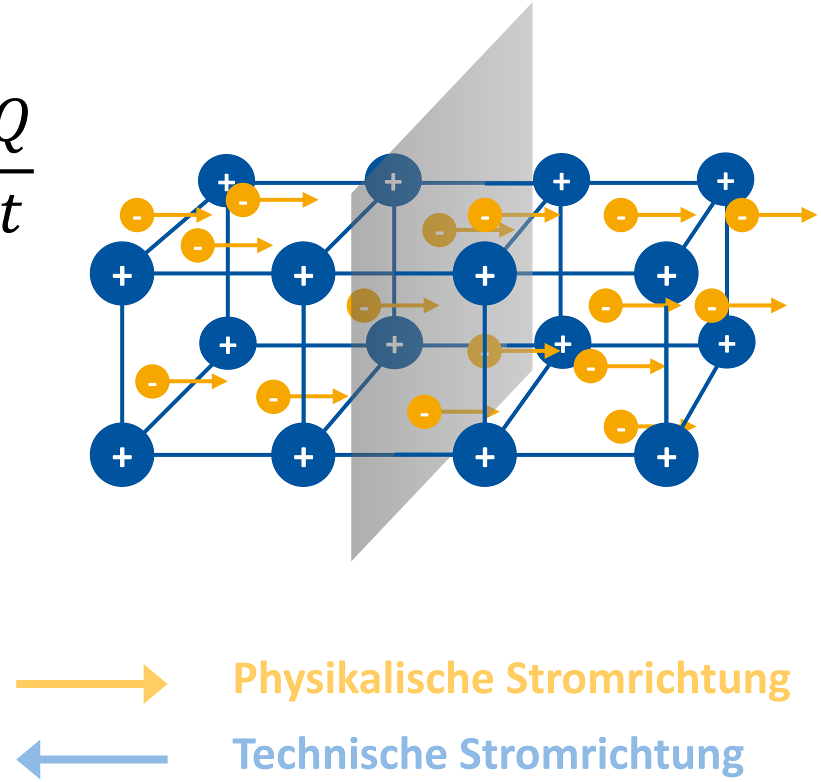
oder 


- In der Regel gibt man die Spannung eines Punktes *p* in einem Schaltkreis immer in Bezug auf einen **festen Nullpunkt** an
- Man spricht dann auch vom **Potenzial** des Punktes *p*
- Dieser Nullpunkt heißt in Schaltkreisen **Masse**. Symbol: 

# Elektrischer Strom

- Elektrischer Strom ist die gerichtete Bewegung von Ladungsträgern (d.h. in metallischen Leitern: Elektronen)
- Die Stromstärke I ist die Menge der bewegten Ladung pro Zeiteinheit:

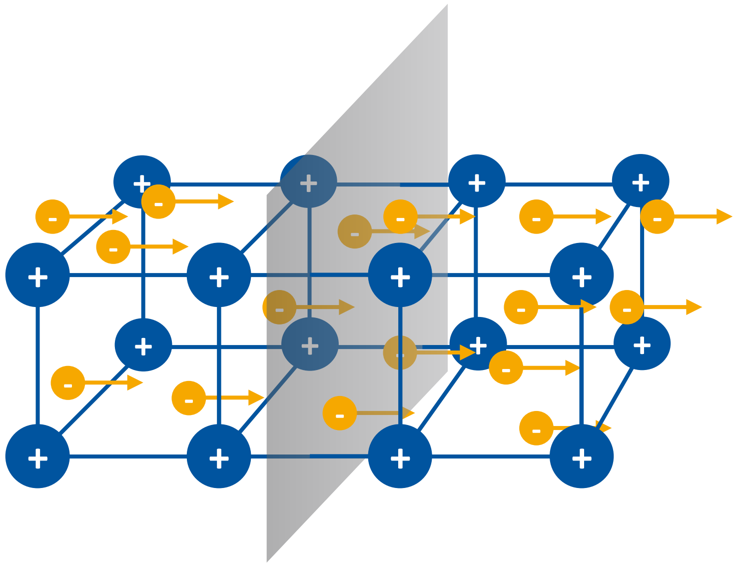
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$



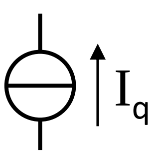
# Elektrischer Strom

- $[I]$ = A   für „Ampere“, nach André Maria Ampère, 1775-1836

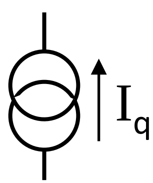
$$1\text{A} = \frac{1\text{C}}{1\text{s}}$$



- Stromquellen im Schaltkreis:



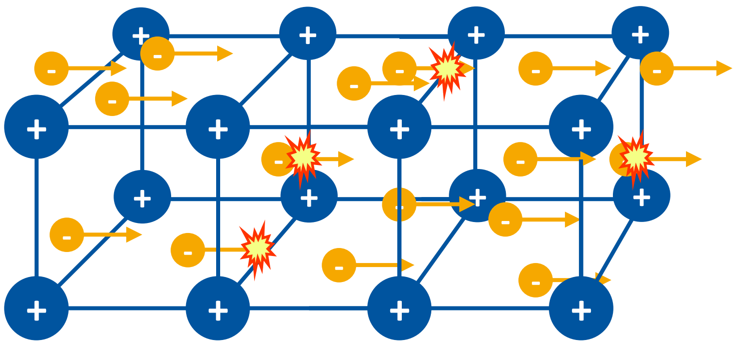

oder




Quelle: wikimedia.org September 2010

# Elektrischer Widerstand

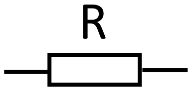
- Der elektrische Widerstand entsteht durch den Widerstand, der sich der Ausgleichsbewegung freier Ladungsträger entgegenstellt.
- Eine Ursache sind Zusammenstöße der Elektronen mit dem Kristallgitter:



- Einfluss auf den elektrischen Widerstand eines Leiters haben u.a.:
  - Dichte des Gitters
  - Temperatur

# Elektrischer Widerstand

- Symbol für Widerstand: *R*
- [*R*] = Ω für „Ohm“, nach Georg Simon Ohm, 1789-1854

- $1\Omega = \dfrac{1\mathrm{V}}{1\mathrm{A}}$
- ⇒ Wenn bei 1 V Spannung ein Strom mit 1 A Stromstärke fließt, dann hat der Leiter einen Widerstand von 1 Ω.
- Widerstand als Bauelement in Schaltkreisen: 

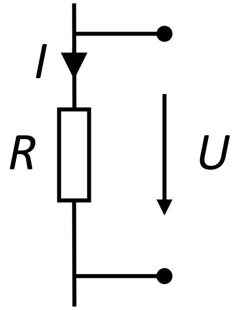
- Im Englischen wird zwischen dem physikalischen Phänomen Widerstand („resistance“) und dem Bauteil („resistor“) unterschieden.

Quelle: wikimedia.org September 2010

# Ohmsches Gesetz

- Der durch einen Widerstand *R* fließende Strom *I* wächst mit dem Wert der an dem Widerstand abfallenden Spannung *U*: $I \sim U$

- Ohmsches Gesetz: $\boldsymbol{U = R \cdot I}$



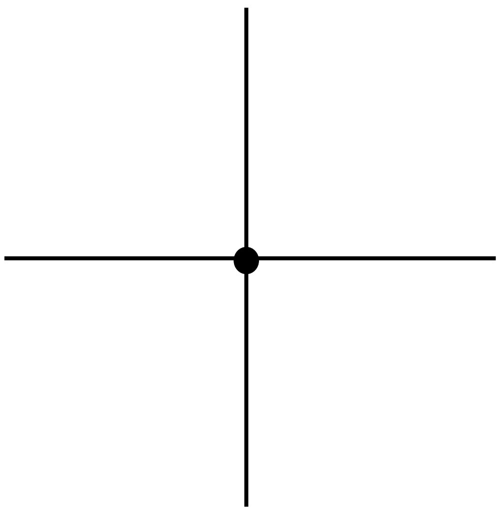
# Abschnitt 4.1.5

Exkurs: Verschiedene Notationen

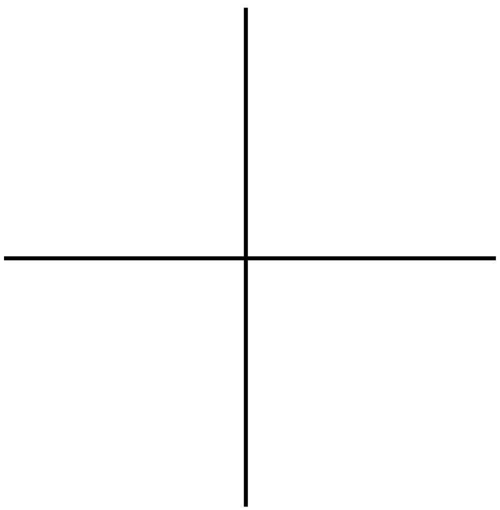
- … von Knoten
- … von Brücken
- Beispiel

# Verschiedene Notationen von Knoten

IEC 60617 (bevorzugt)

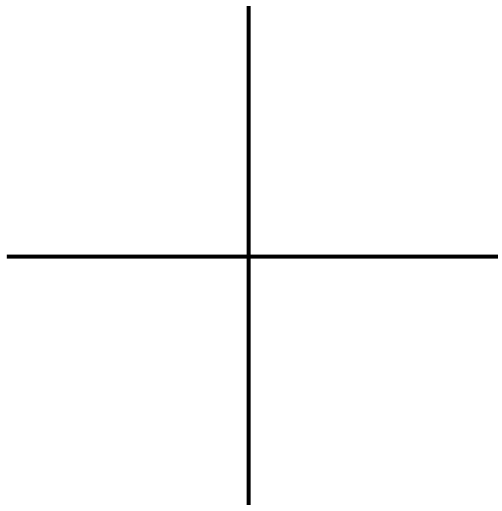


Vereinfacht

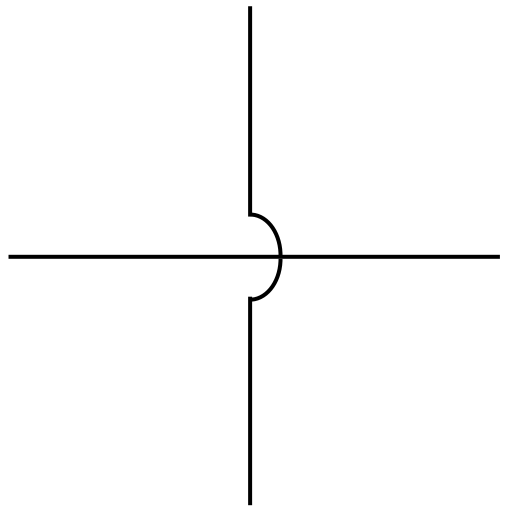


# Verschiedene Notationen von Brücken

IEC 60617 (bevorzugt)

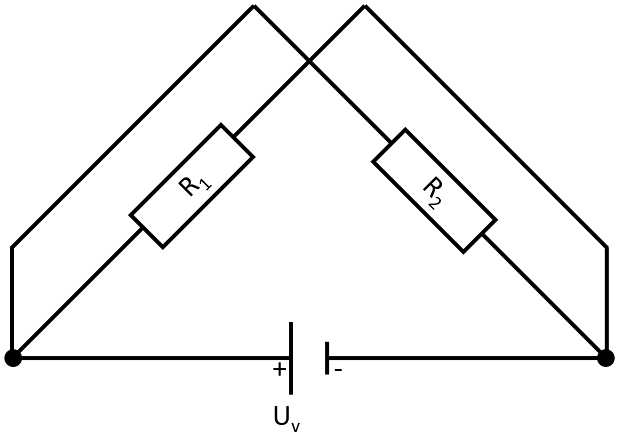


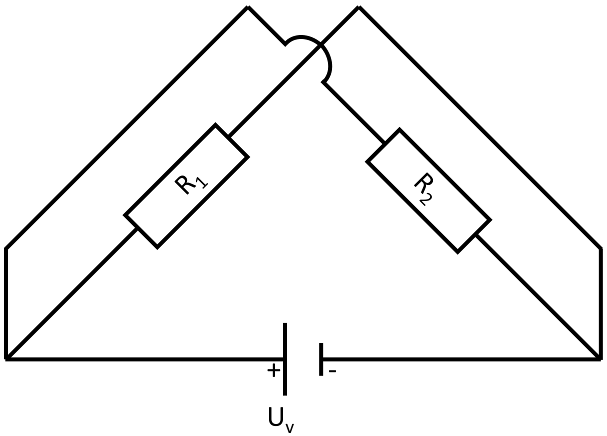
Veraltet

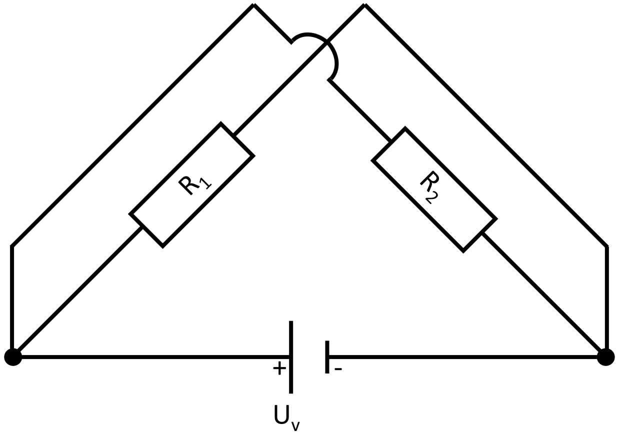


# Beispiel: Mögliche Kombinationen

## Bevorzugt:



# Abschnitt 4.2

Kirchhoffsche Regeln

- Knotenregel
- Maschenregel
- Anwendungen
  - Spannungsteiler

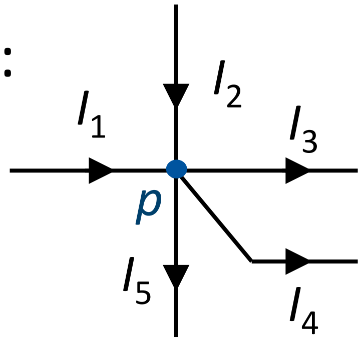
# Kirchhoffsche Regeln

- Benannt nach Gustav Robert Kirchhoff, deutscher Physiker, 1824-1887
- Zwei einfache Erhaltungssätze für Strom und Spannung in Schaltkreisen:
  - (Strom-)Knotenregel
  - (Spannungs-)Maschenregel
- Hilfreich zur Bestimmung von Teilspannungen und -strömen in nicht-trivialen Schaltkreisen

Quelle: wikimedia.org September 2010

# 1. Kirchhoffsches Gesetz: Die Knotenregel

- Die Summe aller einem Punkt *p* in einem Schaltkreis zufließenden Ströme ist gleich der Summe der von *p* abfließenden Ströme.
- Beispiel:




$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

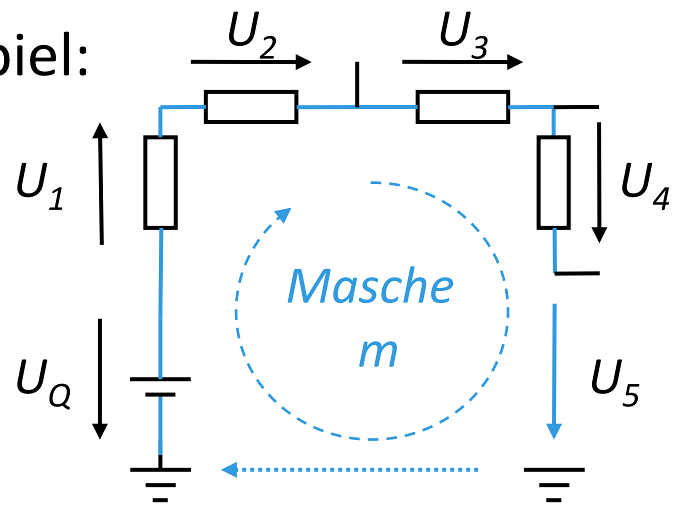
- Versieht man die zu *p* hin fließenden Ströme mit positivem Vorzeichen und die von *p* weg fließenden Ströme mit negativem Vorzeichen, so gilt für *n* in *p* zusammenkommende Leitungen:

$$\sum_{i \in \{1,\dots,n\}} I_i = 0$$

- Die Knotenregel drückt die Erhaltung von Ladung aus.

# 2. Kirchhoffsches Gesetz: Die Maschenregel

- Die Summe aller in einer Masche *m* eines Schaltkreises abfallenden Spannungen ist gleich Null.
- Beispiel:




$$-\boldsymbol{U_Q} + \boldsymbol{U_1} + \boldsymbol{U_2} + \boldsymbol{U_3} + \boldsymbol{U_4} + \boldsymbol{U_5} = \mathbf{0}$$

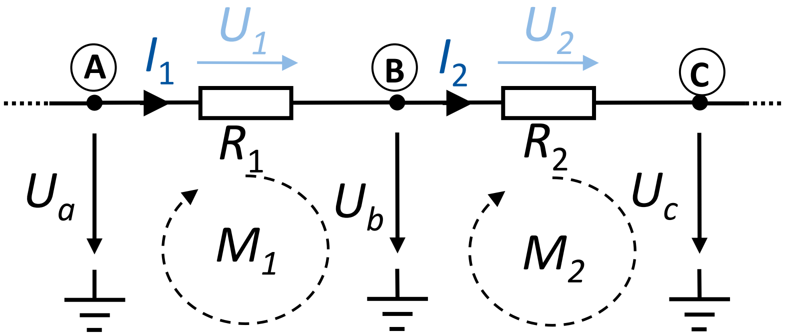
- Bei Berücksichtigung der Vorzeichen gilt für *n* in der Masche *m* abfallende Spannungen:

$$\sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} U_i = 0$$

- Die Maschenregel drückt die Erhaltung von Energie aus.

# Anwendungen von Ohmschem Gesetz und Kirchhoff-Regeln

- Beispiel 1:




**Gegeben:**

$U_a = 5$ V

$I_1 = 0.2$ A

$R_1 = 20\,\Omega$

$R_2 = 5\,\Omega$

**Gesucht:**

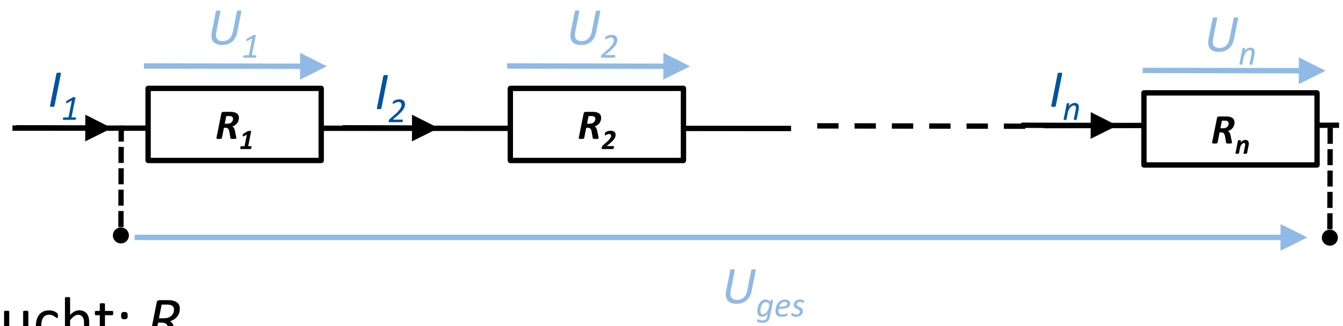
$U_b, I_2, U_c$

- Berechne $U_b$:
  - Masche $M_1$: $-U_a + U_1 + U_b = 0 \Rightarrow U_b = U_a - U_1$
  - Ohmsches Gesetz: $U_1 = R_1 \cdot I_1 \Rightarrow U_1 = 20\Omega \cdot 0.2\text{A} = 4\text{V}$

    $\Rightarrow U_b = U_a - U_1 = 5\text{V} - 4\text{V} = 1\text{V}$
- Berechne $I_2$:
  - Nach Knotenregel ist $I_2 = I_1 = 0.2\text{A}$
- Berechne $U_c$:
  - Masche $M_2$: $-U_b + U_2 + U_c = 0 \Rightarrow U_c = U_b - U_2 = U_b - R_2 I_2 = 1\text{V} - 5\Omega \cdot 0.2\text{A} = 0V$

# Anwendungen von Ohmschem Gesetz und Kirchhoff-Regeln

- Beispiel 2: Serienschaltung von Widerständen

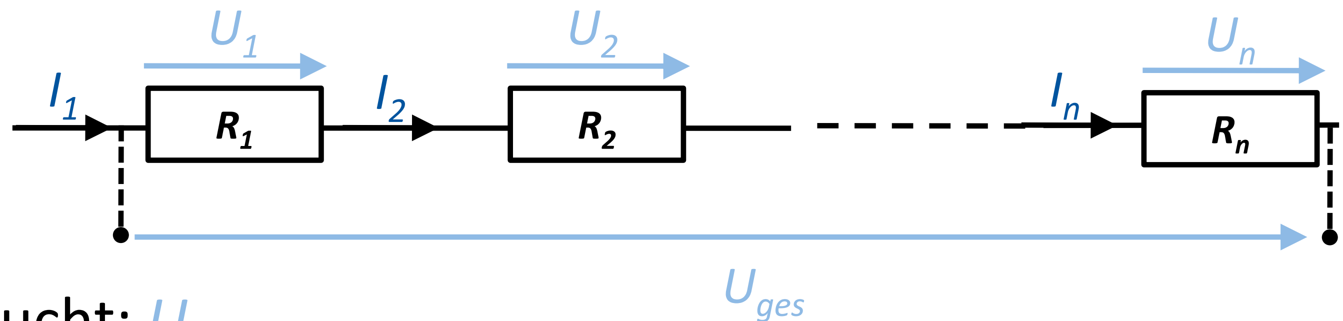



- Gesucht: $R_{ges}$
- Lösung:
  - Maschenregel: $U_{ges} = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
  - Knotenregel: $I_{ges} = I_1 = I_2 = \cdots = I_n$
  - Ohmsches Gesetz: $R_{ges} = \frac{U_{ges}}{I_{ges}} = \frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_n}{I_{ges}}$

$$\Rightarrow R_{ges} = \frac{R_1 I_1 + R_2 I_2 + \cdots + R_n I_n}{I_{ges}} = \frac{I_{ges}(R_1 + R_2 + \cdots + R_n)}{I_{ges}} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

# Anwendungen von Ohmschem Gesetz und Kirchhoff-Regeln - Spannungsteiler

- Beispiel 3: Serienschaltung von Widerständen

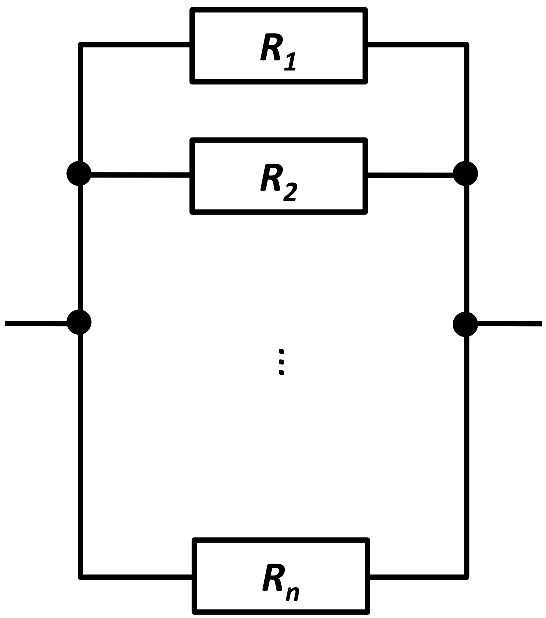



- Gesucht: $U_i$
- Lösung:
  - Maschenregel: $U_{ges} = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
  - Knotenregel: $I_{ges} = I_1 = I_2 = \cdots = I_n$
  - Ohmsches Gesetz: $U_{ges} = R_{ges} I_{ges} \Leftrightarrow I_{ges} = \frac{U_{ges}}{R_{ges}}$

$$\Rightarrow \; U_i = R_i I_i = R_i I_{ges} = R_i \frac{U_{ges}}{R_{ges}} = \frac{R_i}{R_{ges}} U_{ges}$$

# Anwendungen von Ohmschem Gesetz und Kirchhoff-Regeln

- Beispiel 4: Parallelschaltung von Widerständen




- Gesucht: $R_{ges}$
- Lösung: → Übungsaufgabe
- Ergebnis: $\frac{1}{R_{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

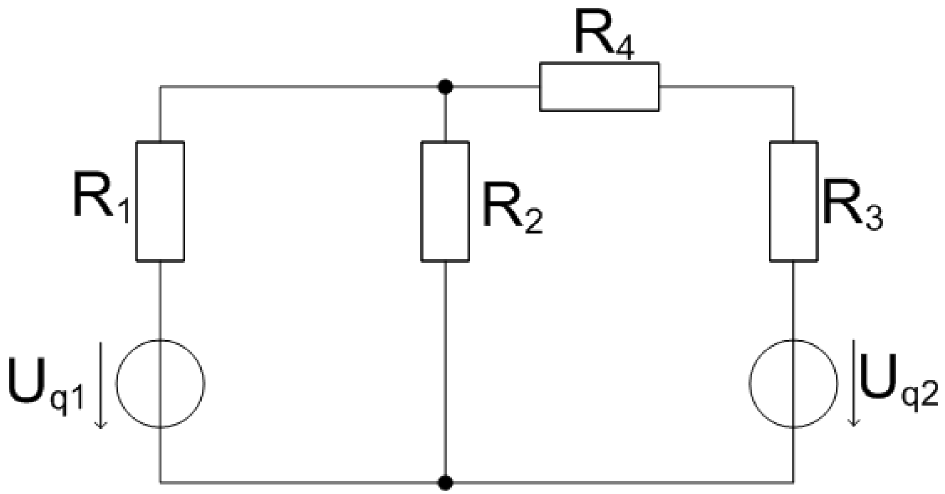
# Abschnitt 4.3

Netzwerkanalyse

- Vorbereitung
- Zweigstromanalyse (ZSA)
- Maschenstromanalyse (MSA)
- Knotenstromanalyse (KSA)

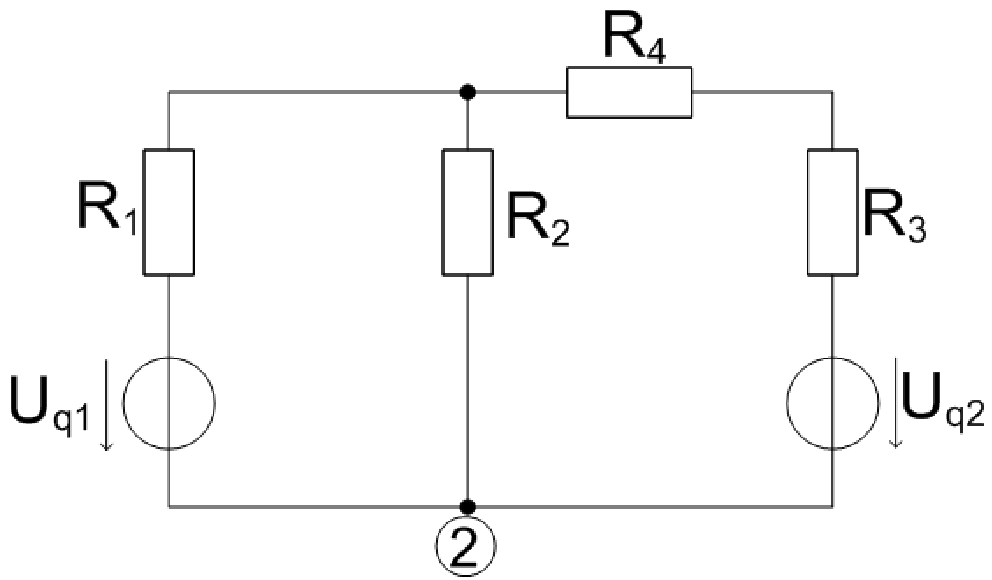
# Netzwerkanalyse - Vorbereitung

**Ziel: Bestimmung der Zweigströme in einem Netzwerk**



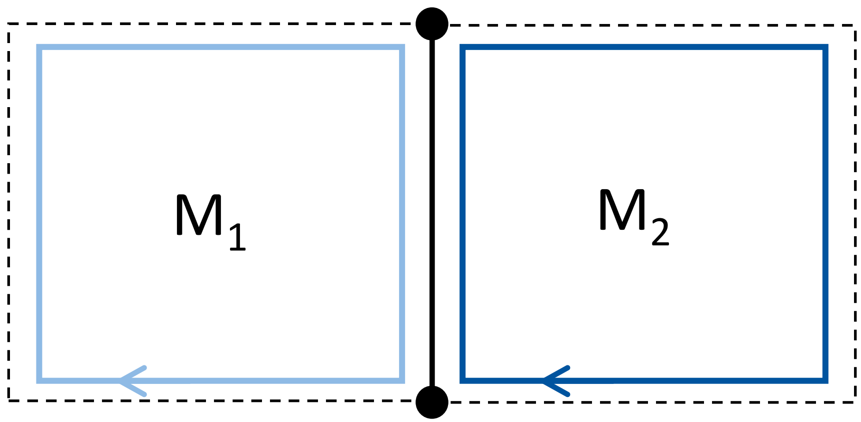

1. Bestimmung der Anzahl der Variablen
   - k = 2 Knoten => k-1=1 unabhängige Knotengleichung
   - z = 3 Zweige
   - m = z – (k – 1) = 2 Maschen

# Netzwerkanalyse - Vorbereitung



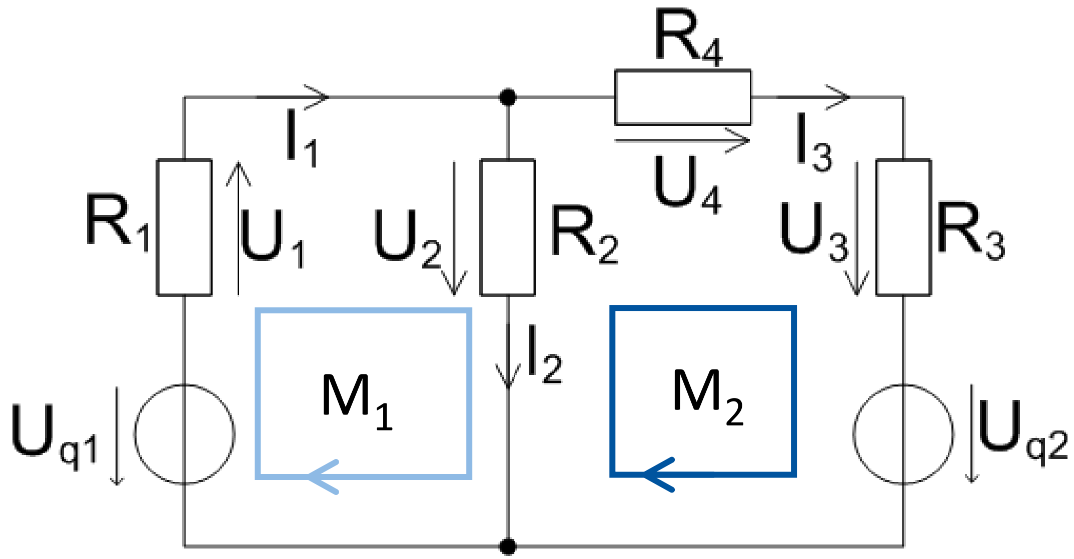

2. Einzeichnen der Zweigströme und Spannungen
3. Aufstellen der Knotengleichungen:
   - $K_1$: $I_1 – I_2 – I_3 = 0$
   - [$K_2$: $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$ (= (-1)*$K_1$, also linear abhängig)]

# Netzwerkanalyse - Vorbereitung



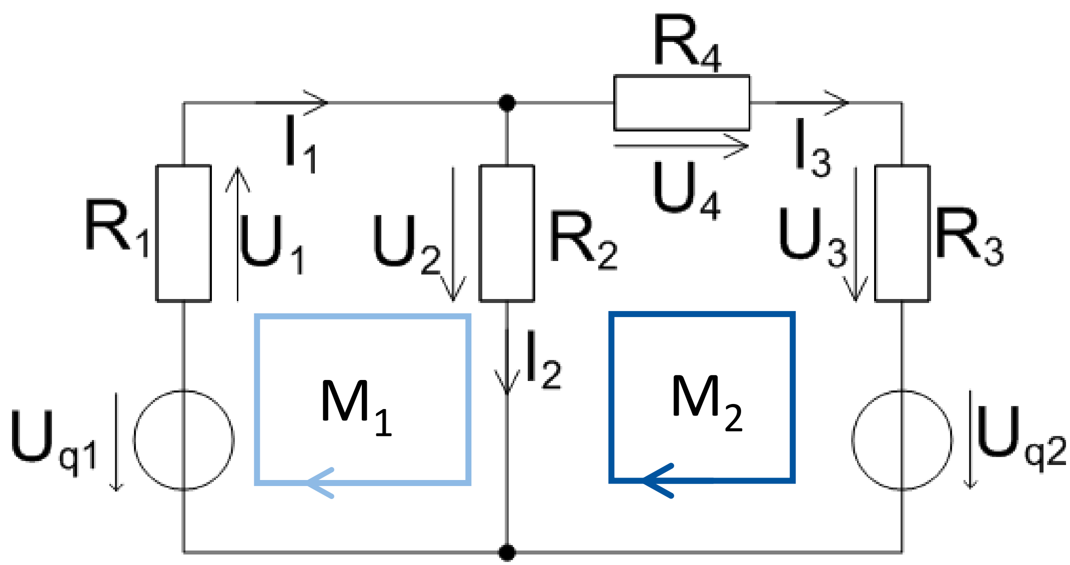

4. Bestimmen der Maschen → Methode des vollständigen Baumes:
   1. Erstelle zyklusfreien Pfad zwischen Knoten → Baumzweige (durchgezogen)
   2. Ergänze Verbindungszweige (gestrichelt)
   3. Festlegen der Maschen, sodass jede Masche einen Verbindungszweig enthält, der in keiner anderen Masche enthalten ist

# Netzwerkanalyse - Vorbereitung




5. Aufstellen der Maschengleichungen:
   - $M_1$: $-U_{q1} + U_1 + U_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U_1 + U_2 = U_{q1}$
   - $M_2$: $U_{q2} - U_2 + U_3 + U_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U_2 - U_3 - U_4 = U_{q2}$

# Netzwerkanalyse - Vorbereitung




6. Anwenden des Ohmschen Gesetzes auf Teilspannungen $U_i$:
   - $M_1$: $R_1 I_1 + R_2 I_2 = U_{q1}$
   - $M_2$: $R_2 I_2 - (R_3 + R_4) I_3 = U_{q2}$
7. Anwendung verschiedener Verfahren zur Bestimmung von Zweigströmen und –spannungen (ZSA, MSA, KSA)

# Zweigstromanalyse (ZSA)

- Lineares Gleichungssystem (LGS) folgt aus unabhängigen Knoten- und Maschengleichungen direkt:
- Knotengleichung:
  - $K_1$: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$
- Maschengleichungen
  - $M_1$: $R_1 I_1 + R_2 I_2 = U_{q1}$
  - $M_2$: $R_2 I_2 - (R_3 + R_4) I_3 = U_{q2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -(R_3 + R_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{q1} \\ U_{q2} \end{pmatrix}$$

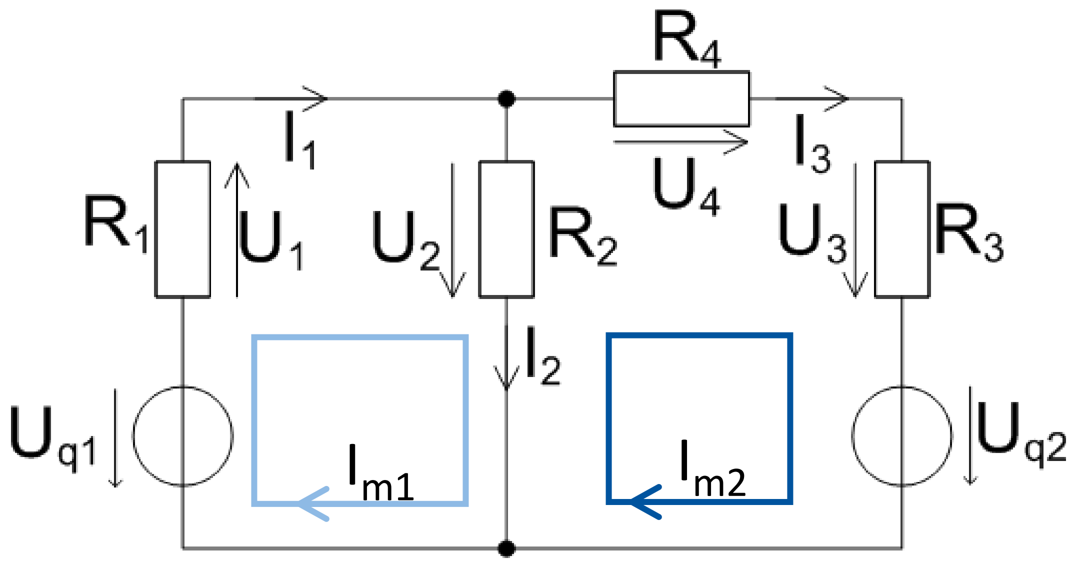
# Zweigstromanalyse (ZSA)

- Lösen des LGS (z.B. durch Gauß-Algorithmus, siehe Vorlesung Diskrete Strukturen)
- Für $R_i = 1\Omega$, $U_{q1} = 4V$, $U_{q2} = 2V$ ergeben sich folgende Werte für die Zweigströme: $I_1 = I_2 = 2A$, $I_3 = 0A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

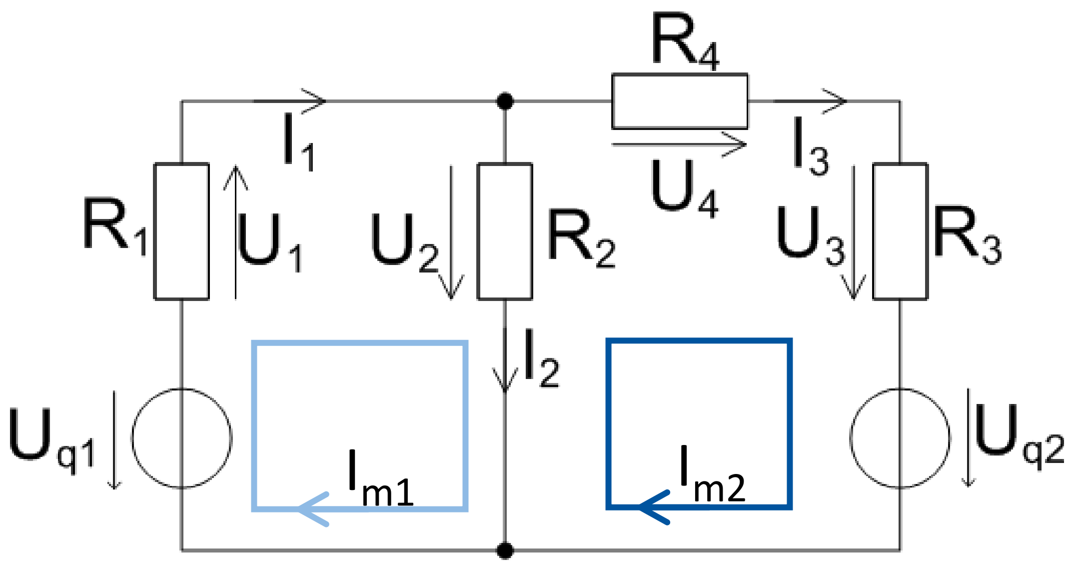
➔ z Gleichungen im LGS

# Maschenstromanalyse (MSA)




- Beschreiben der Zweigströme durch Maschenströme:
  - $I_1 = I_{m1}$
  - $I_3 = I_{m2}$
  - $I_2 = I_1 - I_3$ (wg. KG 1) $= I_{m1} - I_{m2}$

# Maschenstromanalyse (MSA)




- Einsetzen in Maschengleichungen und Umsortieren:
  - $M_1$: $R_1 I_{m1} + R_2 (I_{m1} - I_{m2}) = U_{q1}$
    $\Leftrightarrow (R_1 + R_2) I_{m1} - R_2 I_{m2} = U_{q1}$
  - $M_2$: $R_2 (I_{m1} - I_{m2}) - R_3 I_{m2} - R_4 I_{m2} = U_{q2}$
    $\Leftrightarrow R_2 I_{m1} - (R_2 + R_3 + R_4) I_{m2} = U_{q2}$

# Maschenstromanalyse (MSA)

- Aus den Maschengleichungen folgt nun ein LGS zur direkten Bestimmung der Maschenströme:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ R_2 & -(R_2 + R_3 + R_4) \end{pmatrix}}_{\textit{Maschenimpedanzmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Vektor der} \\ \textit{Maschenströme}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Vektor der} \\ \textit{Spannungsquellen}}}$$

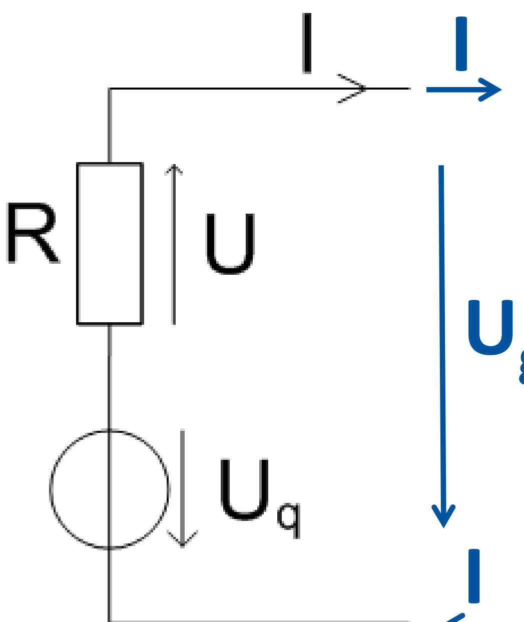
- Lösen des LGS (z.B. http://de.wikipedia.org/wiki/Gauß-Algorithmus) zur Ermittlung der *Maschen*ströme $I_{m1}$ und $I_{m2}$
- Berechnen der Zweigströme aus den berechneten Maschenströmen (s.o.)

➔ z – (k – 1) Gleichungen im LGS

# Knotenspannungsanalyse (KSA)

## Exkurs: Ersetzen von Spannungs- durch Stromquellen

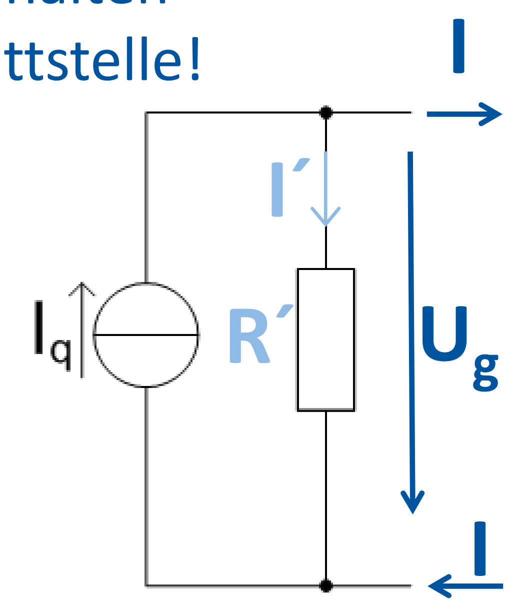
Vorher:




Gleiches Verhalten an der Schnittstelle!

$$U_g = U_q - U \rightarrow$$
$$= U_q - R \cdot I$$

Nachher:

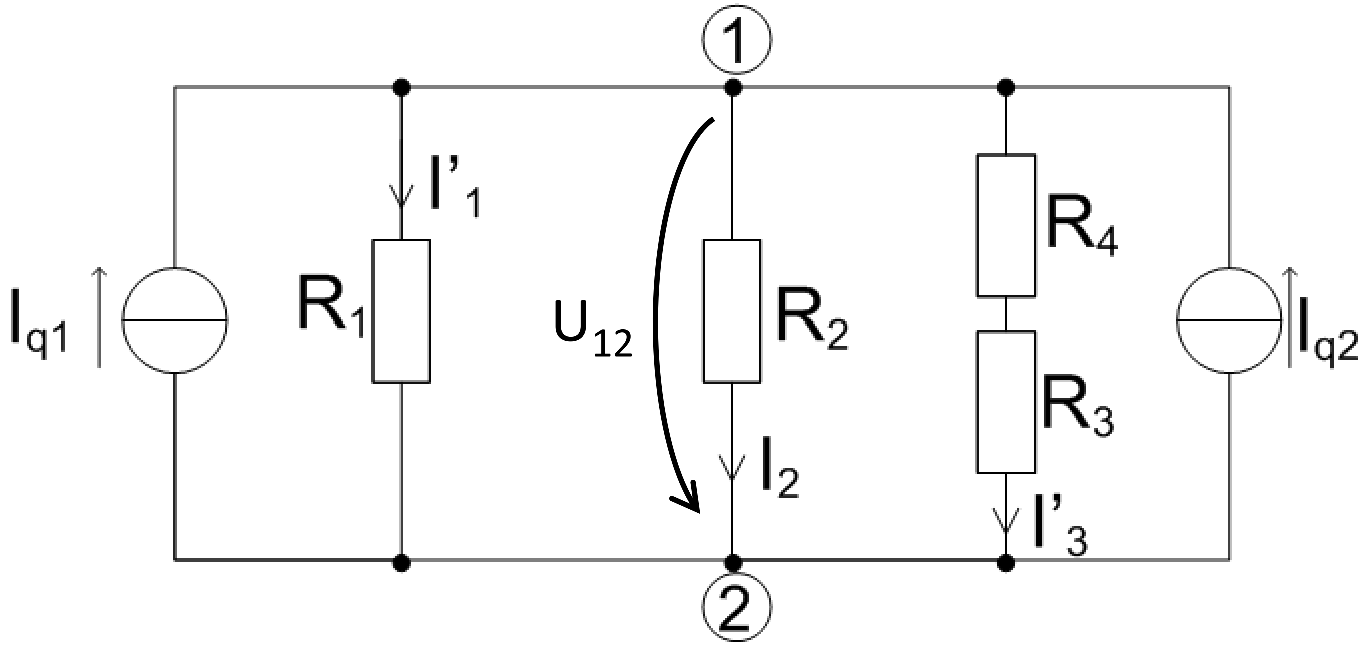



$$\begin{aligned} U_g &= R' \cdot I' \\ &= R' \cdot \left(I_q - I\right) \\ &= R' \cdot I_q - R' \cdot I \\ &= U_q - R \cdot I \end{aligned}$$

für $R' = R$

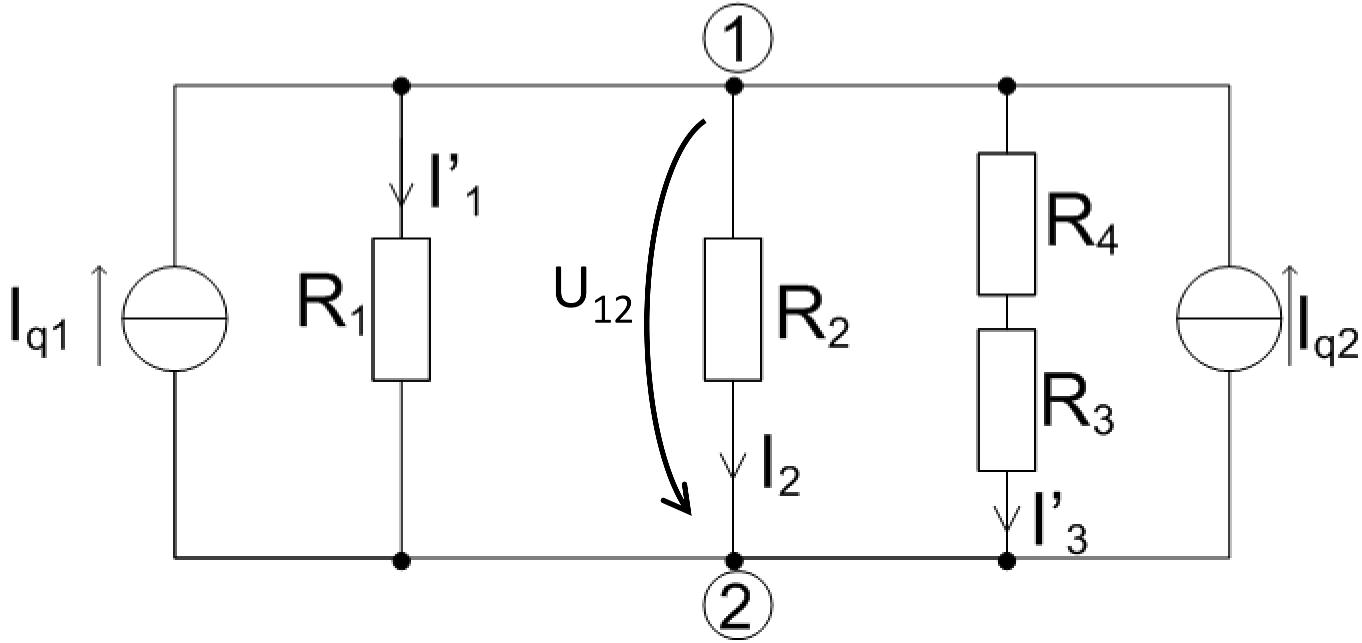
und $I_q = \frac{U_q}{R}$

# Knotenspannungsanalyse (KSA)




- Ersetzen von Spannungs- durch Stromquellen: Es gilt: $I_{q1} = U_{q1} / R_1$, $I_{q2} = U_{q2} / (R_3+R_4)$
- Bestimmen eines Bezugsknotens $K_b$: $K_b$:=2
- Einzeichnen der Knotenspannungen

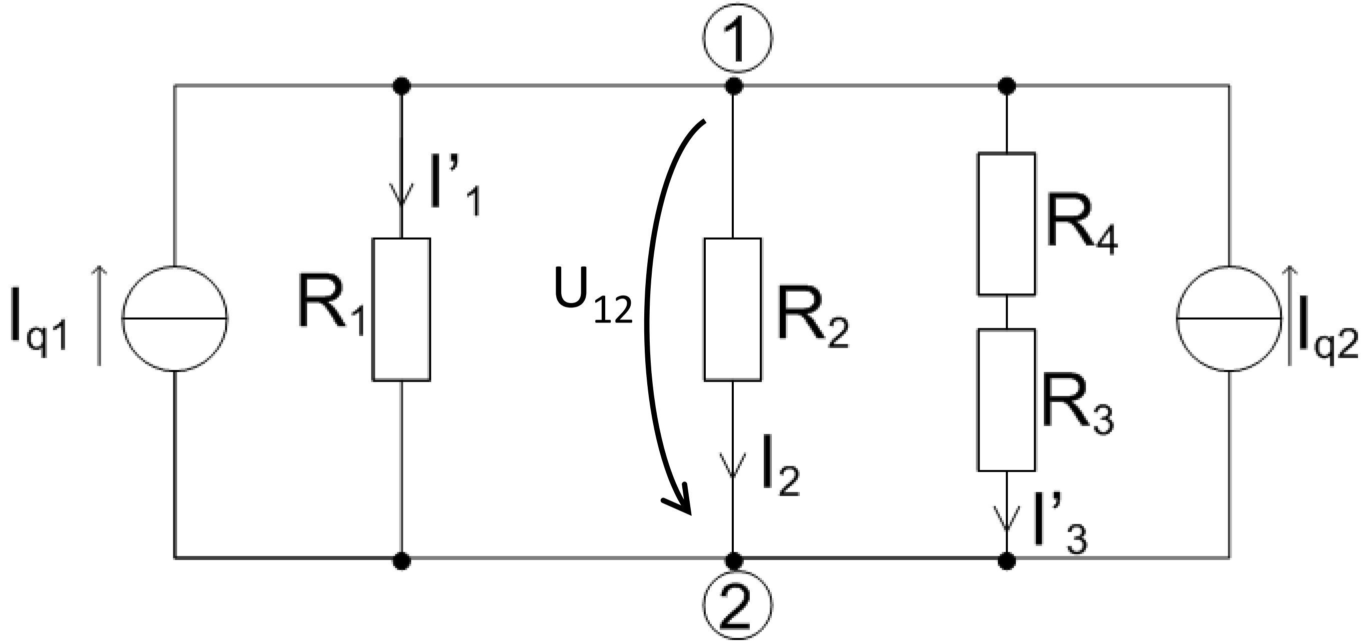
# Knotenspannungsanalyse (KSA)




- Ersetzen von $I_1 = I_{q1} - I_1'$ und $I_3 = I_3' - I_{q2}$ in Knotengleichung ($I_1 - I_2 - I_3 = 0$):
  - KG1: $I_{q1} - I_1' - I_2 - (I_3' - I_{q2}) = 0 \quad \Leftrightarrow -I_1' - I_2 - I_3' = -I_{q2} - I_{q1}$


Informatik 11 Embedded Software

# Knotenspannungsanalyse (KSA)




- Darstellen der Zweigströme $I_1'$, $I_2$, $I_3'$ durch Leitwerte $G_i$ und Knotenspannungen:
  - $I_1' = G_1 U_{12}$, $I_2 = G_2 U_{12}$, $I_3' = G_{34} U_{12}$, wobei
  - $G_1 = \frac{1}{R_1}$, $G_2 = \frac{1}{R_2}$, $G_{34} = \frac{1}{R_3 + R_4}$

# Knotenspannungsanalyse (KSA)

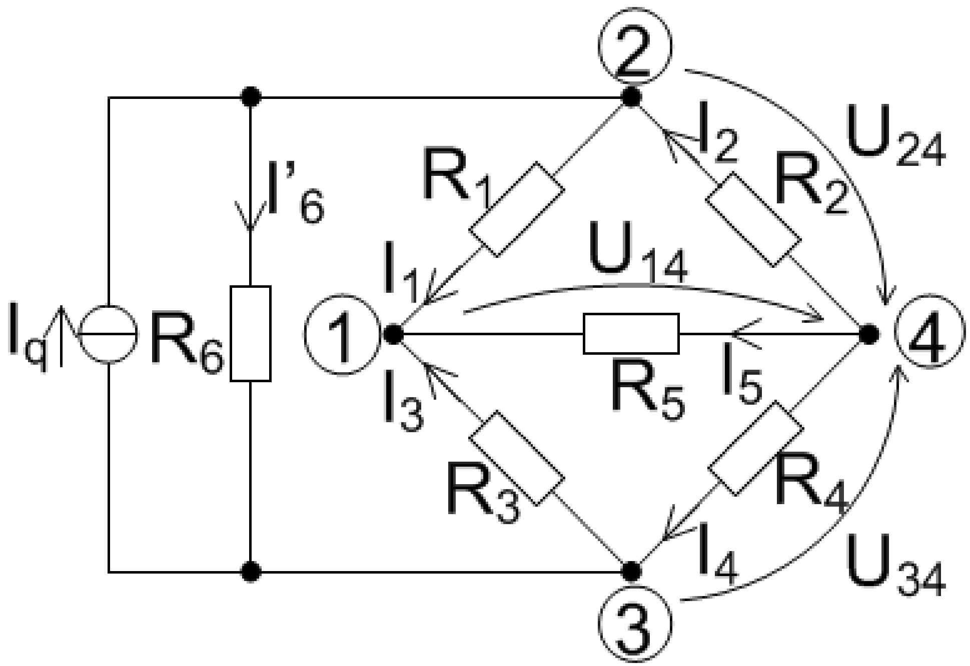
- Aus den Knotengleichungen folgt nun ein LGS zur direkten Bestimmung der Knotenspannungen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -G_1 & -G_2 & -G_{34} \end{pmatrix}}_{\textit{Knotenadmitanz matrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{12} \end{pmatrix}}_{\textit{Vektor der Zweigspannungen}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mathrm{I}_{q2} - \mathrm{I}_{q1} \end{pmatrix}}_{\textit{Vektor der Stromquellen}}$$

- Berechnen der Zweigströme aus den berechneten Zweigspannungen mithilfe der Leitwerte (s.o.)

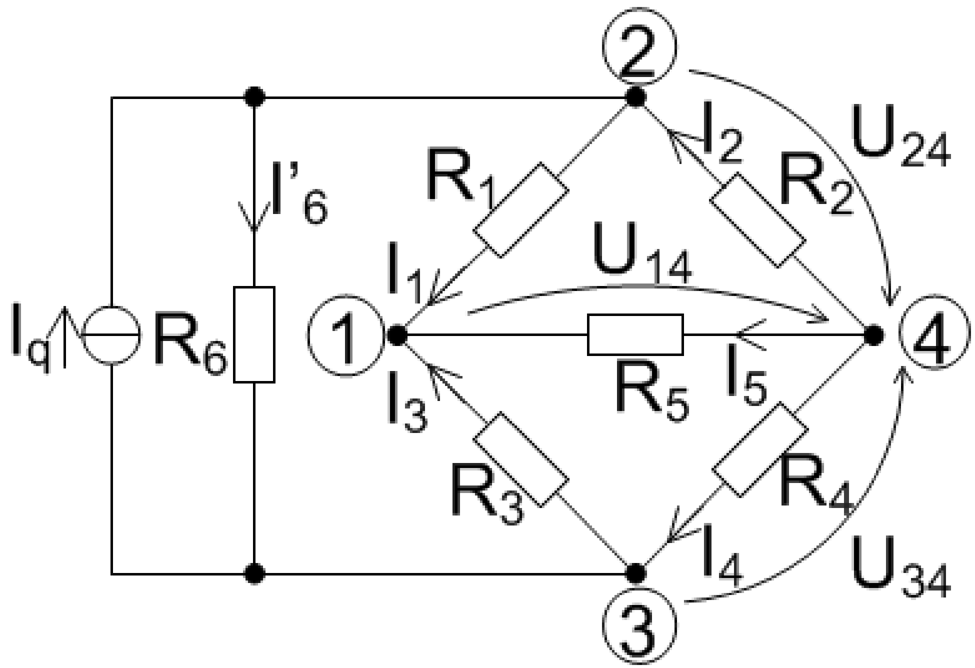
➔ (k – 1) Gleichungen im LGS

# Knotenspannungsanalyse (Bsp. 2)




- Ersetzen von Spannungs- durch Stromquellen
- Bezugsknoten festlegen: $K_b$ := 4
- Knotenspannungen einzeichnen

# Knotenspannungsanalyse (Bsp. 2)




- Aufstellen der Knotengleichungen:
  - $K_1$: $I_1 + I_3 + I_5 = 0$
  - $K_2$: $I_q - I_6' - I_1 + I_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_1 - I_2 + I_6' = I_q$
  - $K_3$: $-I_3 + I_4 + I_6' - I_q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_3 - I_4 - I_6' = -I_q$
  - ($K_4$: $-I_2 - I_4 - I_5 = 0$ linear abhängig, $-(K_1+K_2+K_3) = K_4$)

# Knotenspannungsanalyse (Bsp. 2)

- Darstellen der Zweigströme $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$ und $I_6'$ durch Leitwerte und Knotenspannungen:
  - $I_1 = G_1 U_{21} = G_1 (U_{24} - U_{14})$
  - $I_2 = G_2 U_{42} = -G_2 U_{24}$
  - $I_3 = G_3 U_{31} = G_3 (U_{34} - U_{14})$
  - $I_4 = G_4 U_{43} = -G_4 U_{34}$
  - $I_5 = G_5 U_{41} = -G_5 U_{14}$
  - $I_6' = G_6 U_{23} = G_6 (U_{24} - U_{34})$
  - $I_6 = I_q - G_6 (U_{24} - U_{34})$
- Einsetzen in die Knotengleichungen:
  - $K_1$: $G_1 (U_{24} - U_{14}) + G_3 (U_{34} - U_{14}) - G_5 U_{14} = 0$
  - $K_2$: $G_1 (U_{24} - U_{14}) + G_2 U_{24} + G_6 (U_{24} - U_{34}) = I_q$
  - $K_3$: $G_3 (U_{34} - U_{14}) + G_4 U_{34} - G_6 (U_{24} - U_{34}) = -I_q$

# Knotenspannungsanalyse (Bsp. 2)

- Sortieren nach $U_{ij}$ ergibt das zu lösende LGS:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -G_1 - G_3 - G_5 & G_1 & G_3 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_6 & -G_6 \\ -G_3 & -G_6 & G_3 + G_4 + G_6 \end{pmatrix}}_{\textit{Knotenadmittanzmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{14} \\ U_{24} \\ U_{34} \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Vektor der} \\ \textit{Zweigspannungen}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I_q \\ -I_q \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Vektor der} \\ \textit{Stromquellen}}}$$

- Einsetzen der Zweigspannungen in Zweigstromgleichungen ergibt die Zweigströme

# Netzwerkanalyse: Zusammenfassung

- Verschiedene Verfahren:
  - Zweigstromanalyse (ZSA) — z Gleichungen
  - Maschenstromanalyse (MSA) — $z - (k - 1)$ Gleichungen
  - Knotenspannungsanalyse (KSA) (auch: Knotenpotentialanalyse) — $(k - 1)$ Gleichungen

- Auswahlkriterien für MSA und KSA:

| | MSA | KSA |
|---|---|---|
| # Gleichungen im LGS | $z - (k - 1) < k - 1$ | $k - 1 < z - (k - 1)$ |
| Gesuchte Größen | Ströme | Spannungen |
| Vorhandene Quellen | Mehr Spannungsquellen | Mehr Stromquellen |

z = # Zweige, k = # Knoten