Numerische Analysis II

Arnold Reusken

Sophie Hörnschemeyer, Stephanie Schwab

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik, RWTH Aachen

Sommersemester 2023

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 7.1-7.4

- Einleitung und Problemstellung
- Theoretische Grundlagen
- Kondition des Eigenwertproblems
- Eigenwertabschätzungen

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 7.1-7.4

- Einleitung und Problemstellung
- Theoretische Grundlagen
- Kondition des Eigenwertproblems
- Eigenwertabschätzungen

Was Sie mitnehmen sollten:

- Weshalb sind Eigenwertprobleme relevant?
- Wie sehen die Schur-Faktorisierungen aus?
- Die Kondition des Eigenwertproblems hängt von der Konditionszahl der Eigenvektormatrix ab.
- Wie kann man Eigenwerte mit Gerschgorin-Kreisen abschätzen?

Problemstellung

Eigenwertgleichung

Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ eine reelle quadratische Matrix. Man suche eine Zahl $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ und einen Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, die der Eigenwertgleichung

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{v}$$

genügen.

Problemstellung

Eigenwertgleichung

Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle quadratische Matrix. Man suche eine Zahl $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ und einen Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^{n}$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, die der Eigenwertgleichung

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{v}$$

genügen.

Die Zahl $\boldsymbol{\lambda}$ heißt Eigenwert und der Vektor $\boldsymbol{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\boldsymbol{\lambda}$.

Das Eigenwertproblem ist nicht-linear in den Unbekannten $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{v})$.

Beispiel 7.1 (“Eigenschwingungen”)

Gesucht die Zahl λ und die Funktion $u(x)$, die die Differentialgleichung

$$-u''(x) - \lambda r(x) u(x) = 0, \quad x \in (0,1) \ ,$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0$$

erfüllen.

Hierbei ist r eine bekannte stetige Funktion, mit

$$r(x) > 0, \quad x \in (0,1).$$

Beispiel 7.1 (“Eigenschwingungen”)

Gesucht die Zahl λ und die Funktion $u(x)$, die die Differentialgleichung

$$-u''(x) - \lambda r(x) u(x) = 0, \quad x \in (0,1) \ ,$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0$$

erfüllen.

Hierbei ist r eine bekannte stetige Funktion, mit

$$r(x) > 0, \quad x \in (0,1).$$

Wir betrachten dazu Gitterpunkte

$$x_j = jh, \quad j = 0, \ldots, n, \quad h = \frac{1}{n}.$$

Beispiel 7.1

$u''(x_j)$ wird durch die Näherung

$$u_j = \frac{u(x_j+h)-2u(x_j)+u(x_j-h)}{h^2}, j=1,2,\ldots,n-1$$

ersetzt. Es ergibt sich ein Gleichungssystem

$$Au - \lambda Ru = 0$$

für die Unbekannten λ und u_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, wobei

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \emptyset \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \emptyset & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r(x_1) & & & & \\ & r(x_2) & & \emptyset & \\ \emptyset & & \ddots & & \\ & & & r(x_{n-2}) & \\ & & & & r(x_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 7.1

Sei

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R^{1/2}} &:= \operatorname{diag}\left(\sqrt{r(x_1)}, \dots, \sqrt{r(x_{n-1})}\right), \boldsymbol{R^{-1/2}} \quad := (\boldsymbol{R^{1/2}})^{-1}, \\ \boldsymbol{v} &:= \boldsymbol{R^{1/2} u}, \\ \boldsymbol{B} &:= \boldsymbol{R^{-1/2} A R^{-1/2}}. \end{aligned}$$

Man erhält die transformierte Gleichung

$$\boldsymbol{Bv = \lambda v},$$

also ein Eigenwertproblem.

Beispiel 7.3

Ein System linearer gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$z' = Az + b, \quad z(0) = z^0,$$

wobei $z = z(t),\ t \in [0, T]$.

Beispiel 7.3

Ein System linearer gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$z' = Az + b, \quad z(0) = z^0,$$

wobei $z = z(t),\ t \in [0, T]$.

Annahmen: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ hängen nicht von t ab und A ist diagonalisierbar:

$$Av^i = \lambda_i v^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sei

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \qquad V = (v^1\ v^2\ \ldots\ v^n),$$

und damit

$$AV = V\Lambda.$$

Beispiel 7.3

So erhält man aus

$$V^{-1}z' = V^{-1}AV\underbrace{V^{-1}z}_{=:\,y} + \underbrace{V^{-1}b}_{=:\,c},$$

das System $y' = \Lambda y + c$ von entkoppelten skalaren Gleichungen der Form

$$y_i' = \lambda_i y_i + c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Beispiel 7.3

So erhält man aus

$$V^{-1}z' = V^{-1}AV\underbrace{V^{-1}z}_{=:\,y} + \underbrace{V^{-1}b}_{=:\,c},$$

das System $y' = \Lambda y + c$ von entkoppelten skalaren Gleichungen der Form

$$y_i' = \lambda_i y_i + c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Hier ergibt sich einfach die Lösung

$$y_i(t) = \tilde{z}_i^0 e^{\lambda_i t} + \frac{c_i}{\lambda_i}\left(e^{\lambda_i t} - 1\right), \quad \text{falls } \lambda_i \neq 0,$$
$$y_i(t) = c_i t + \tilde{z}_i^0, \quad \text{falls } \lambda_i = 0,$$

wobei $\tilde{z}_i^0 := \left(V^{-1}z^0\right)_i$.

Charakterisierung von Eigenwerten

Lemma 7.4

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ genau dann, wenn

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{I}) = 0.$$

$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{I})$ wird das charakteristische Polynom genannt.

Charakterisierung von Eigenwerten

Lemma 7.4

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ genau dann, wenn

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})$ wird das charakteristische Polynom genannt.

Deshalb:

Berechnung der Eigenwerte

$$\Updownarrow$$

Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})$$

Charakterisierung von Eigenwerten

Lemma 7.4

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ genau dann, wenn

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}.$$

$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})$ wird das charakteristische Polynom genannt.

Deshalb:

Berechnung der Eigenwerte

$$\Updownarrow$$

Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})$$

Der Weg über die Nullstellen ist im allgemeinen ein untaugliches Vorgehen und nur für sehr kleine $\boldsymbol{n}$ akzeptabel.

Eigenschaften des Spektrums

Definitionen:

Die Menge aller paarweise verschiedenen Eigenwerte

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A}) = \{\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C} \mid \mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{I}) = \mathbf{0} \,\}$$

bezeichnet man als das Spektrum von $\boldsymbol{A}$.

Eigenschaften des Spektrums

Definitionen:

Die Menge aller paarweise verschiedenen Eigenwerte

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \det(A - \lambda I) = 0 \}$$

bezeichnet man als das Spektrum von A.

Matrizen A und B heißen ähnlich, falls es eine nichtsinguläre Matrix T gibt, so daß

$$B = T^{-1} A T$$

gilt.

Lemma 7.5

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt

(i) Falls A nichtsingulär ist: $\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$

(ii) $\lambda \in \sigma(A) \implies \bar{\lambda} \in \sigma(A)$.

(iii) $\sigma(A - \mu I) = \{ \lambda - \mu \mid \lambda \in \sigma(A) \}$ für jedes $\mu \in \mathbb{C}$.

(iv) $\sigma(A) = \sigma(A^T)$.

(v) $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

(vi) Falls A eine obere oder untere Dreiecksmatrix ist:

$$\sigma(A) = \{ a_{i,i} \mid 1 \leq i \leq n \}.$$

(vii) Es sei A eine obere oder untere Block-Dreiecksmatrix mit quadratischen Diagonalblöcken D_{ii}, $1 \leq i \leq m$.
Dann gilt: $\sigma(A) = \cup_{1 \leq i \leq m} \sigma(D_{ii})$.

Ähnliche Matrizen

Lemma 7.6

Ähnliche Matrizen haben das gleiche Spektrum:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})$$

für beliebiges nicht-singuläres $\boldsymbol{T}$.

Ähnliche Matrizen

Lemma 7.6

Ähnliche Matrizen haben das gleiche Spektrum:

$$\sigma(A) = \sigma(T^{-1}AT)$$

für beliebiges nicht-singuläres T.

Beweis

$$\begin{aligned} \det(T^{-1}AT - \lambda I) &= \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) \\ &= \det(T^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(T) \\ &= \det(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Schur-Faktorisierung

Satz 7.8 (Komplexe Schur-Faktorisierung)

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es eine unitäre Matrix $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so dass

$$Q^* A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & * & \\ & & \ddots & & \\ & \emptyset & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: R$$

gilt.

Dabei ist $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \sigma(A)$.

Schur-Faktorisierung

Satz 7.9 (Reelle Schur-Faktorisierung)

Zu jeder Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ gibt es eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, so dass

$$\boldsymbol{Q^T A Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R_{11}} & & & \\ & \boldsymbol{R_{22}} & & * \\ & & \ddots & \\ & \emptyset & & \boldsymbol{R_{mm}} \end{pmatrix} =: \boldsymbol{R}$$

gilt.

Dabei sind alle Matrizen $\boldsymbol{R_{ii}}$ $(\boldsymbol{i = 1, \ldots, m})$ reell und besitzen entweder die Ordnung eins $(\boldsymbol{R_{ii}} \in \mathbb{R})$ oder die Ordnung zwei $(\boldsymbol{R_{ii}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2\times 2}})$.

Im letzteren Fall hat $\boldsymbol{R_{ii}}$ ein Paar komplex konjugierter Eigenwerten.

Die Menge aller Eigenwerte der Matrizen $\boldsymbol{R_{ii}}$ $(\boldsymbol{i = 1, \ldots, m})$ ist gerade das Spektrum der Matrix $\boldsymbol{A}$.

Schur-Faktorisierung

Folgerung 7.11

Jede reelle symmetrische Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ läßt sich mittels einer orthogonalen Matrix $\boldsymbol{Q}$ ähnlich auf Diagonalgestalt bringen:

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D} = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_n).$$

$\boldsymbol{A}$ besitzt somit nur reelle Eigenwerte und $\boldsymbol{n}$ linear unabhängige zueinander orthogonale Eigenvektoren

Die Eigenvektoren sind die Spalten von $\boldsymbol{Q}$.

Kondition des Eigenwertproblems

Satz 7.12

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix:

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Sei μ ein Eigenwert der gestörten Matrix $A + E$, dann gilt

$$\min_{1\le i\le n} |\lambda_i - \mu| \le \|V\|_p \|V^{-1}\|_p \|E\|_p,$$

mit $p = 1, 2, \infty$.

Kondition des Eigenwertproblems

Satz 7.12

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix:

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Sei μ ein Eigenwert der gestörten Matrix $A + E$, dann gilt

$$\min_{1\le i\le n} |\lambda_i - \mu| \le \|V\|_p \|V^{-1}\|_p \|E\|_p,$$

mit $p = 1, 2, \infty$.

Beachte:

Die absolute Kondition der Eigenwerte hängt von der Konditionszahl der Eigenvektormatrix V und nicht von der Konditionszahl der Matrix A ab .

Kondition des Eigenwertproblems

Für eine symmetrische Matrix ist das Problem der Bestimmung der Eigenwerte immer gut konditioniert:

Satz 7.13

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $\boldsymbol{\mu}$ ein Eigenwert der gestörten Matrix $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$. Dann gilt

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\mu}| \leq \|\boldsymbol{E}\|_2.$$

Kondition des Eigenwertproblems

Für eine symmetrische Matrix ist das Problem der Bestimmung der Eigenwerte immer gut konditioniert:

Satz 7.13

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $\boldsymbol{\mu}$ ein Eigenwert der gestörten Matrix $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$. Dann gilt

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\mu}| \leq \|\boldsymbol{E}\|_2.$$

Für nicht-symmetrische Matrizen kann das Problem der Eigenwertbestimmung schlecht konditioniert sein, obgleich $\boldsymbol{A}$ selbst eine moderate Konditionszahl hat.

Beispiel 7.14

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha \le \frac{1}{2},$$

mit Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 1 - \alpha, \quad v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1 + \alpha, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Beispiel 7.14

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2},$$

mit Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 1 - \alpha, \quad v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1 + \alpha, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \leq \frac{4}{1-\alpha^2},$$

$$\kappa_2(V) = \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 = \frac{1}{\alpha}.$$

Beispiel 7.14

Sei $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha^3(2+\alpha) & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \|\boldsymbol{E}\|_2 = \alpha^3(2+\alpha)$.

Beispiel 7.14

Sei $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{3}}(\mathbf{2}+\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\quad \|\boldsymbol{E}\|_{\mathbf{2}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{3}}(\mathbf{2}+\boldsymbol{\alpha})$.

Die gestörte Matrix

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}(\mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{2}} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{1}} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}},$$
$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{2}} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}},$$

Beispiel 7.14

Sei $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha^3(2+\alpha) & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \|E\|_2 = \alpha^3(2+\alpha)$.

Die gestörte Matrix

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2(1+\alpha)^2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte

$$\mu_1 = 1 - \alpha(1+\alpha) = \lambda_1 - \alpha^2,$$
$$\mu_2 = 1 + \alpha(1+\alpha) = \lambda_2 + \alpha^2,$$

also gilt

$$|\mu_i - \lambda_i| = \alpha^2 = \frac{1}{2+\alpha}\frac{\alpha^3(2+\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{2+\alpha}\kappa_2(V)\|E\|_2.$$

Eigenwertabschätzungen

Satz 7.15

Für alle $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A})$ gilt

$$|\boldsymbol{\lambda}| \leq \|\boldsymbol{A}\|.$$

Eigenwertabschätzungen

Satz 7.15

Für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

Satz 7.16

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar: $V^{-1}AV = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Sei (μ, w) eine Approximation einer Lösung des Eigenwertproblems mit

$$\frac{\|Aw - \mu w\|_p}{\|w\|_p} \leq \varepsilon, \quad p = 1, 2, \text{ oder } \infty.$$

Dann gilt

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\mu - \lambda_i| \leq \|V\|_p \left\|V^{-1}\right\|_p \varepsilon.$$

Eigenwertabschätzungen

Satz 7.17

Seien

$$\boldsymbol{K_i} := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{i,i}| \le \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

die sogenannten Gerschgorin-Kreise.Dann gilt, dass alle Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ in der Vereinigung aller dieser Kreise liegen:

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_i.$$

Eigenwertabschätzungen

Folgerung 7.18

Seien K_i^T die Gerschgorin-Kreise für A^T:

$$K_i^T := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{j,i}| \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

dann gilt

$$\sigma(A) \subseteq \left(\Big(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \Big) \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} K_i^T \Big) \right).$$

Eigenwertabschätzungen

Folgerung 7.18

Seien K_i^T die Gerschgorin-Kreise für A^T:

$$K_i^T := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{j,i}| \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

dann gilt

$$\sigma(A) \subseteq \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i^T \right) \right).$$

Falls A symmetrisch ist, sind alle Eigenwerte reell, also gilt:

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (K_i \cap \mathbb{R}).$$

Beispiel 7.19

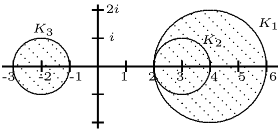
Die Matrix

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

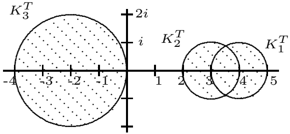
hat das Spektrum $\boldsymbol{\sigma(A_1) = \{3.43 \pm 0.14i, -1.86\}}$.

Gerschgorin-Kreise der Matrix A_1

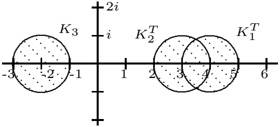
$$\sigma(A) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{3} K_i\right):$$



$$\sigma(A) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{3} K_i^T\right):$$



$$\sigma(A) \subseteq \left(\left(\bigcup_{i=1}^{3} K_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{3} K_i^T\right)\right):$$



Beispiel 7.19

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

hat das Spektrum $\sigma(A) = \{1.27, 3.00, 4.73\}$.

Beispiel 7.19

Die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

hat das Spektrum $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A}) = \{\mathbf{1.27}, \mathbf{3.00}, \mathbf{4.73}\}$.

Die Gerschgorin-Kreise liefern

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A}) \subset ([\mathbf{1}, \mathbf{3}] \cup [\mathbf{1}, \mathbf{5}] \cup [\mathbf{3}, \mathbf{5}]) \,,$$

also $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A}) \subset [\mathbf{1}, \mathbf{5}]$.

Rayleigh-Quotient

Sei $\tilde{v} \in \mathbb{R}^n$. Das eindeutige Minimum der Funktion

$$\xi \to \|A\tilde{v} - \xi\tilde{v}\|_2^2$$

ist

$$\xi_{\min} = r(\tilde{v}) := \frac{\tilde{v}^T A \tilde{v}}{\|\tilde{v}\|_2^2} \quad \text{(Rayleigh-Quotient)}$$

Rayleigh-Quotient

Sei $\tilde{v} \in \mathbb{R}^n$. Das eindeutige Minimum der Funktion

$$\xi \to \|A\tilde{v} - \xi\tilde{v}\|_2^2$$

ist

$$\xi_{\min} = r(\tilde{v}) := \frac{\tilde{v}^T A \tilde{v}}{\|\tilde{v}\|_2^2} \quad \text{(Rayleigh-Quotient)}$$

Abstand zu dem vom Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Unterraum $\langle v \rangle := \{ \alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$:

$$d(w, \langle v \rangle) := \frac{\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \|w - \alpha v\|_2}{\|w\|_2}$$

Rayleigh-Quotient

Lemma 7.20

Es seien (v, λ) ein Eigenpaar, $Av = \lambda v$, und $\tilde{v} \neq 0$ eine Approximation des Eigenvektors v, mit

$$d(\tilde{v}, \langle v \rangle) =: \delta < 1.$$

Für den Rayleigh-Quotienten gilt

$$|r(\tilde{v}) - \lambda| \leq \delta \|A\|_2 (1 + 2\delta),$$
$$|r(\tilde{v}) - \lambda| \leq 2\delta^2 \|A\|_2, \text{ falls } A \text{ symmetrisch ist.}$$

Rayleigh-Quotient

Lemma 7.20

Es seien (v, λ) ein Eigenpaar, $Av = \lambda v$, und $\tilde{v} \neq 0$ eine Approximation des Eigenvektors v, mit

$$d(\tilde{v}, \langle v \rangle) =: \delta < 1.$$

Für den Rayleigh-Quotienten gilt

$$|r(\tilde{v}) - \lambda| \leq \delta \|A\|_2 (1 + 2\delta),$$
$$|r(\tilde{v}) - \lambda| \leq 2\delta^2 \|A\|_2, \text{ falls } A \text{ symmetrisch ist.}$$

Sei $(\tilde{v}^k)_{k \geq 1}$ eine Folge von Annäherungen eines Eigenvektors v. Falls $d(\tilde{v}_k, \langle v \rangle) =: \delta_k \leq c\gamma^k$, mit $0 < \gamma < 1$ (lineare Konvergenz), gilt, erwartet man für die Folge $(r(\tilde{v}^k))_{k \geq 1}$ eine lineare Konvergenz mit demselben Faktor γ . Falls $A = A^T$ wird der Konvergenzfaktor quadriert.

Zusammenfassung

- In den Schur-Faktorisierungen spielen Eigenwerte eine zentrale Rolle.

Zusammenfassung

- In den Schur-Faktorisierungen spielen Eigenwerte eine zentrale Rolle.
- Für eine symmetrische Matrix ist das Problem der Eigenwertbestimmung gut konditioniert.

Zusammenfassung

- In den Schur-Faktorisierungen spielen Eigenwerte eine zentrale Rolle.
- Für eine symmetrische Matrix ist das Problem der Eigenwertbestimmung gut konditioniert.
- Die Gerschgorin-Kreise lassen sich einfach bestimmen und liefern eine Schätzung der Lage des Spektrums

Zusammenfassung

- In den Schur-Faktorisierungen spielen Eigenwerte eine zentrale Rolle.
- Für eine symmetrische Matrix ist das Problem der Eigenwertbestimmung gut konditioniert.
- Die Gerschgorin-Kreise lassen sich einfach bestimmen und liefern eine Schätzung der Lage des Spektrums
- Der Rayleigh-Quotient (zu $\tilde{v}$) ist Minimierer der Funktion $\xi \to \|A\tilde{v} - \xi\tilde{v}\|_2^2$.