Einführung in die Technische Informatik

Prof. Dr.-Ing. Stefan Kowalewski

WS 22/23

Kapitel 5: Kondensator und Spule

Informatik 11
Embedded Software
RWTH AACHEN UNIVERSITY

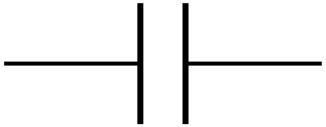
Abschnitt 5.1

Kondensatoren

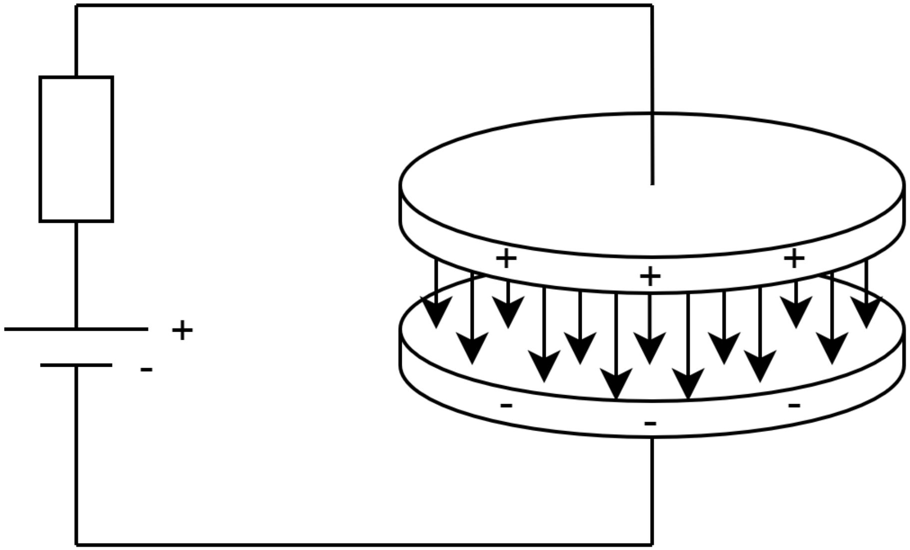
- Aufbau eines Kondensators
- Kapazität eines Kondensators
- Kondensatorschaltungen
- Strom und Spannung am Kondensator

Kondensator

- Kondensator:
  Bauteil, das Energie in einem **elektrischen** Feld speichern kann (durch Ladungsungleichverteilung).
- Symbol im Schaltkreis:



- Beispiel mit
  einfacher Geometrie:
  Plattenkondensator



Kondensator

- Welche Spannung herrscht bei welcher Ladungsungleichverteilung?
- Spannung am Kondensator hängt von Geometrie und Material ab.
- Ladung beim Plattenkondensator (ohne Herleitung):

$$\boxed{Q = \frac{\varepsilon \cdot A}{d} \cdot U}$$

  - ε ist materialabhängige Konstante
  - $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$
  - $\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$ (elektrische Feldkonstante)
  - ε_r (Vakuum) = 1.0
    ε_r (Glas) = $6 - 8$ (dimensionslose Größe)
    ε_r ($\mathrm{BaTiO_3}$) = $10^3 - 10^4$

Kapazität eines Kondensators

- Kapazität *C* ist geometrie- und materialabhängige Bauteileigenschaft eines Kondensators
- [*C*] = F , für „Farad“, nach Michael Faraday.

$$1\mathrm{F} = \frac{1\mathrm{C}}{1\mathrm{V}}$$

- Bei einer Ladung von 1C bzw. -1C auf den beiden Platten fällt an einem Kondensator mit 1F genau 1 V Spannung ab.

Kapazität eines Kondensators

- Wie viel Energie lässt sich in einem Kondensator mit der Kapazität C speichern?

$$U = \frac{W}{Q} \Rightarrow W = U \cdot Q \Rightarrow dw = U \cdot dq \qquad C = \frac{Q}{U} \Rightarrow U = \frac{Q}{C} \Rightarrow Q = C \cdot U$$

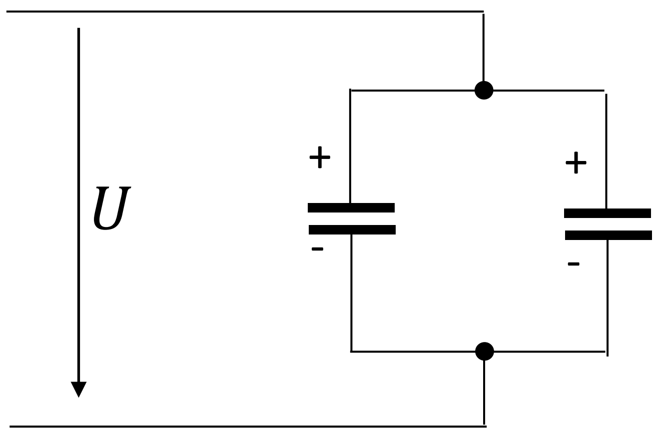
$$W = \int_0^W dw = \int_0^Q U \cdot dq = \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot dq = \frac{1}{C} \cdot \int_0^Q q \cdot dq$$

$$= \frac{1}{C} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot Q^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot Q^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot (C \cdot U)^2 \quad \boxed{= \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2}$$

Kondensatorschaltungen

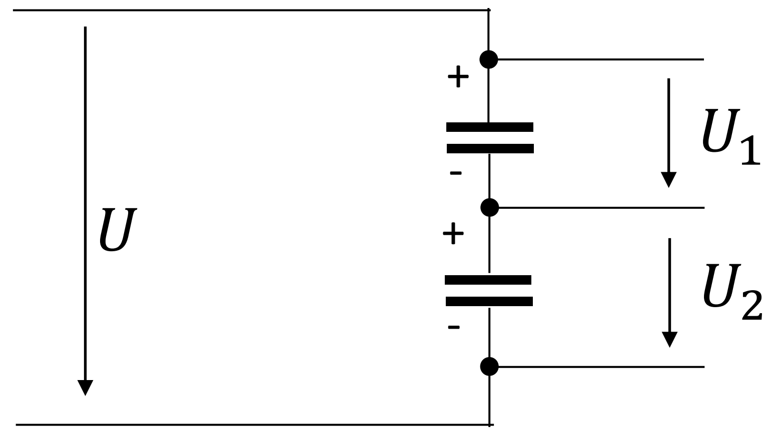
- **Kapazität** mehrerer (Platten-) Kondensatoren:



Parallelschaltung:

$$C_{ges} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

$$Q_{ges} = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$



Reihenschaltung:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

$$Q_{ges} = Q_1 = \cdots = Q_n$$

Strom und Spannung am Kondensator

- Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator

$$Q = C \cdot U$$

$$dq = C \cdot du$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

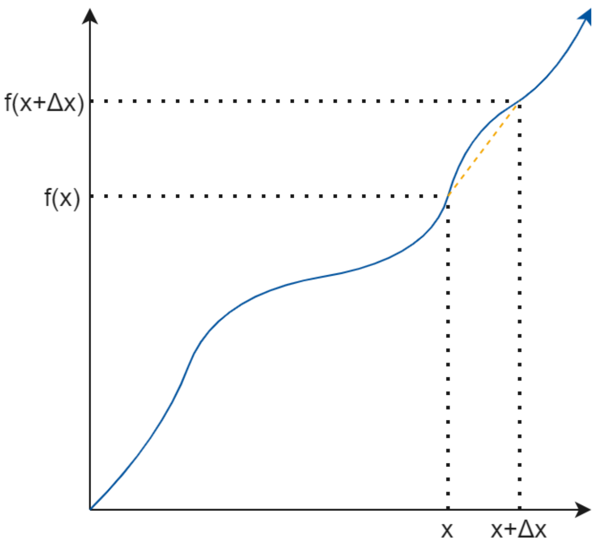
$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

(Lineare Differentialgleichung)

$$\int_0^T du(t) = \int_0^T \frac{1}{C} \cdot i(t)\, dt$$

$$U(T) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^T i(t)dt$$

Exkurs: Differentialquotient



Steigung: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Differentialquotient: $\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Abschnitt 5.2

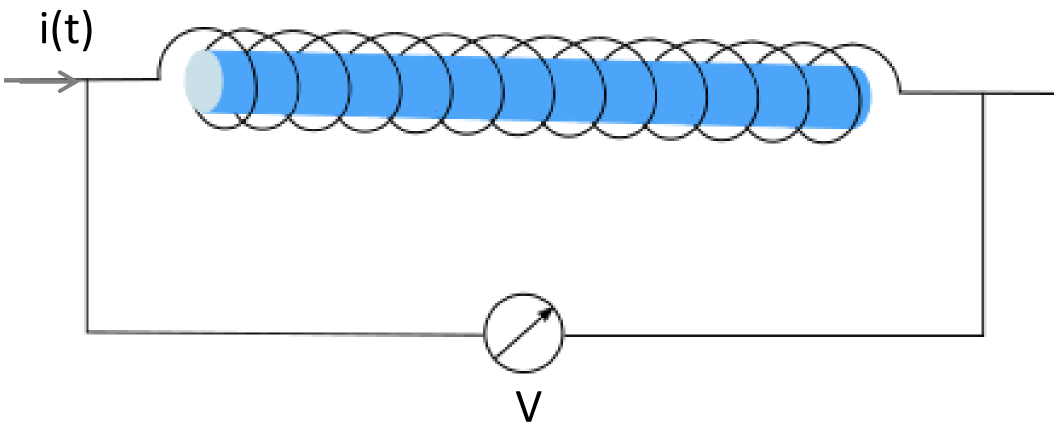
Spulen

- Aufbau einer Spule
- Induktivität einer Spule
- Spulenschaltungen
- Strom und Spannung an einer Spule

Spule

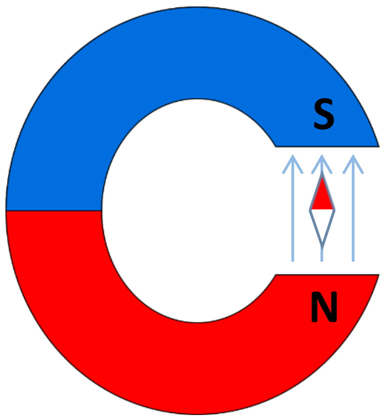
- Spule:
  Bauteil, das Energie in Form eines **magnetischen** Feldes speichern kann.
- Symbol im Schaltkreis: 

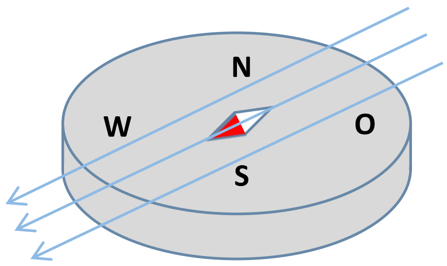
- Beispiel mit einfacher Geometrie: **Zylinderspule**

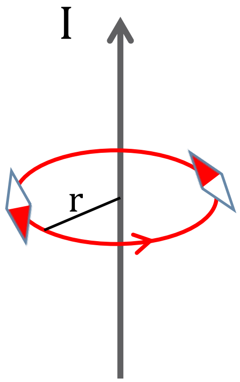


Magnetische Flussdichte und Feldstärke

- Magnetische Feldstärke H und magnetische Induktion/Flussdichte B







$\vec{H}$ ist die **Ursache** des magnetischen Feldes

$\vec{B}$ ist die **Wirkung** des magnetischen Feldes

$$\boxed{B = \frac{1}{\mu} \cdot H}$$

μ ist materialabhängig

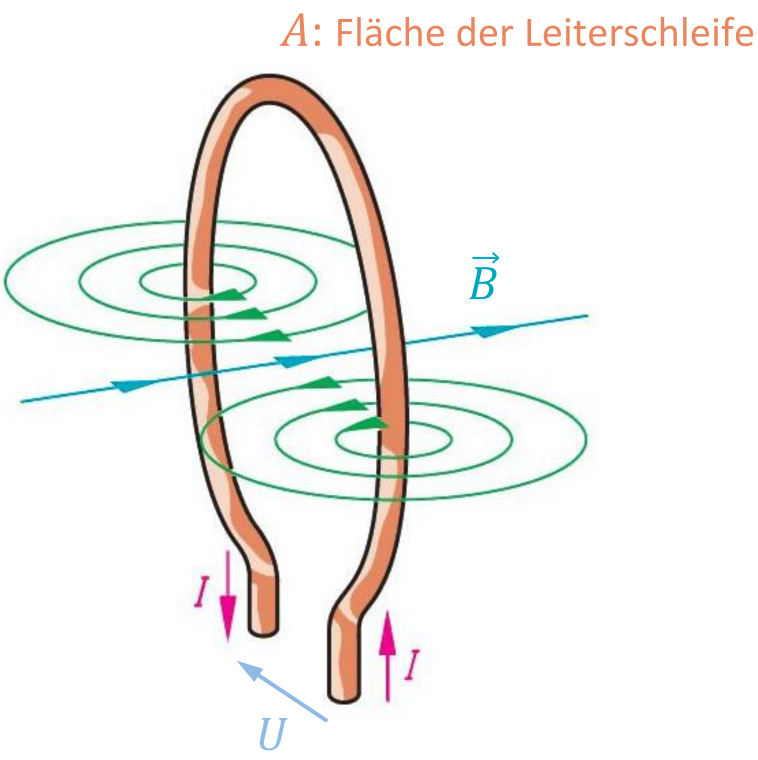
Elektromagnetische Induktion

- Magnetischer Fluss Φ (für diese Anordnung):

$$\Phi = \vec{B} \cdot A$$

- Faradaysches Gesetz:

$$U \sim -\frac{d\phi}{dt}$$

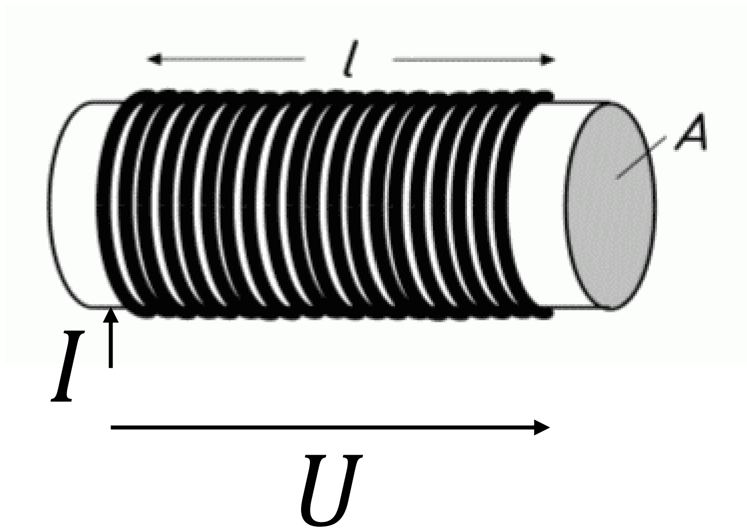


- Lenzsche Regel:
  Die induzierte Spannung erzeugt einen Induktionsstrom, der so gerichtet ist, dass sein magnetisches Feld der Flussänderung*, die ihn verursacht hat, entgegen wirkt.

*In diesem Beispiel Vergrößerung von $\vec{B}$

Spule

- Welche magnetische Flussdichte herrscht bei welchem Stromdurchfluss?
- Magnetische Flussdichte an der Spule hängt von Geometrie und Material des Kerns ab.
- Magnetischer Fluss (ohne Herleitung):



Induktivität Strom

$$\Phi = \frac{L \cdot I}{N}$$

Anzahl der Windungen

Quelle: http://www.amateurfunkpruefung.de/lehrg/a03/a03.html

Induktivität einer Spule

- Induktivität L ist geometrie- und materialabhängige Bauteileigenschaft einer Spule

$$L = N^2 \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{l}$$

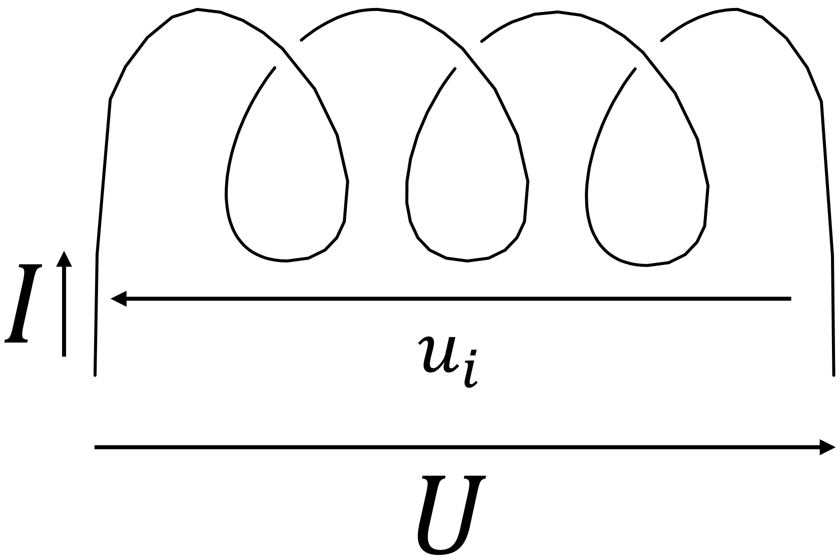
- μ_0 heißt magnetische Feldkonstante
  $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
- μ_r ist materialabhängige Konstante
  μ_r (Vakuum) = 1.0
  μ_r (Eisenkern) = $300 - 10^4$

- [L] = H , für „Henry“

$$1\mathrm{H} = \frac{1\mathrm{Vs}}{1\mathrm{A}}$$

- Bei einer Stromänderung von 1 Ampere in einer Sekunde fällt an einer Spule mit 1H genau 1V Selbstinduktionsspannung ab.

Strom und Spannung an der Spule



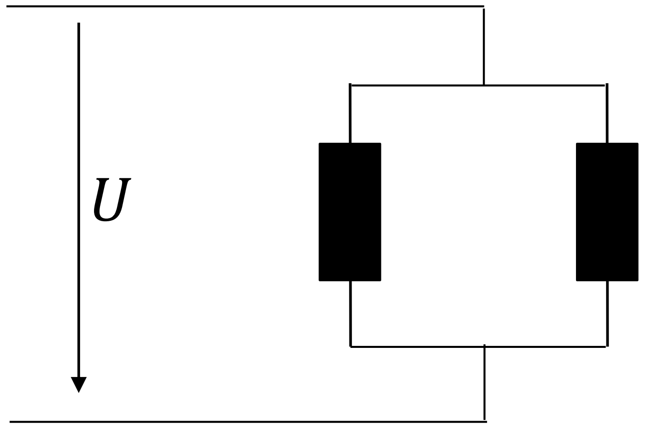
$$\frac{dI}{dt} \rightarrow \frac{dB}{dt} \rightarrow \frac{d\phi}{dt} \rightarrow u_i$$

$$\boxed{U(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}}$$

$$E = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

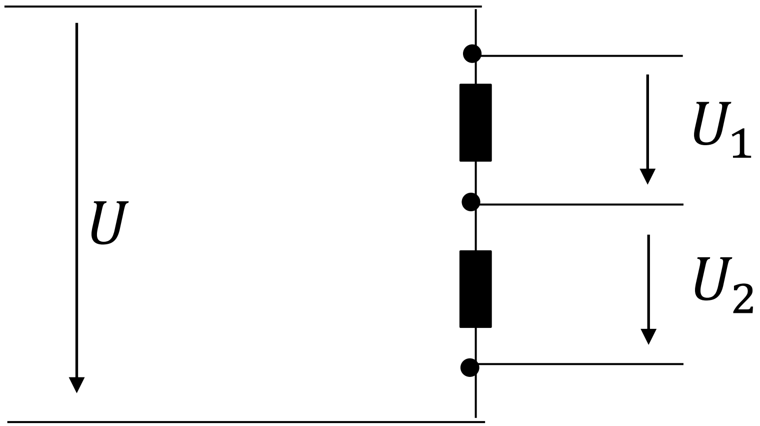
Spulenschaltungen

- **Induktivität** mehrerer Spulen:



Parallelschaltung:

$$\frac{1}{L_{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}$$



Reihenschaltung:

$$L_{ges} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Abschnitt 5.3

Schaltverhalten

- Schaltverhalten eines Widerstands
- Schaltverhalten eines Kondensators
- Schaltverhalten einer Spule
- Frequenzfilter
- Schwingkreis

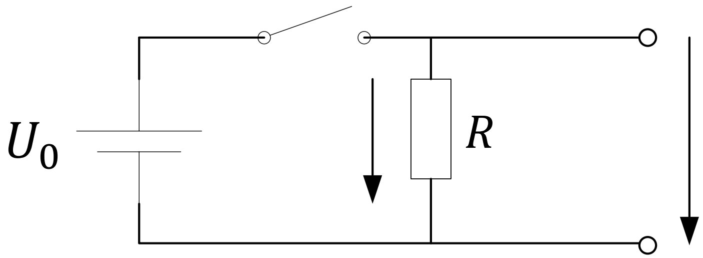
Zusammenfassung: Übertragungsverhalten der Bauteile

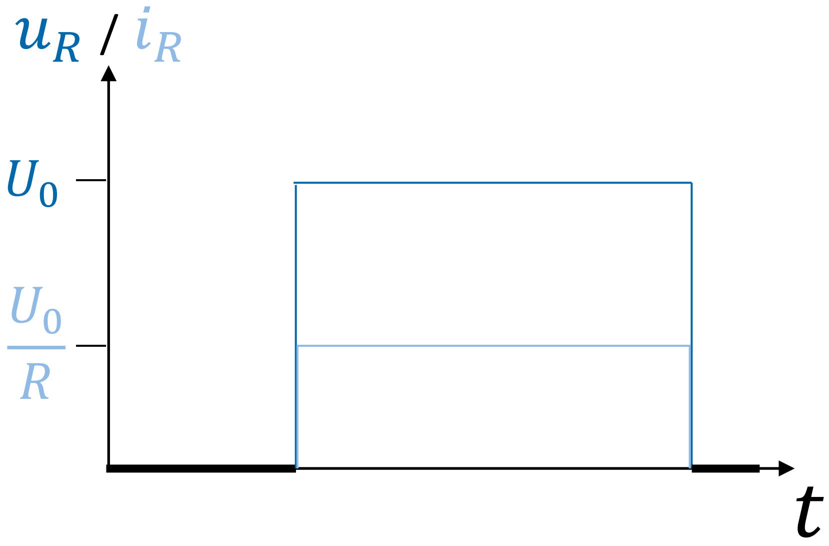
- Widerstand: $u(t) = R \cdot i(t)$ $\quad$ $i(t) = \frac{1}{R} \cdot u(t)$

- Spule: $u(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$ $\quad$ $i(T) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^T u(t)dt$

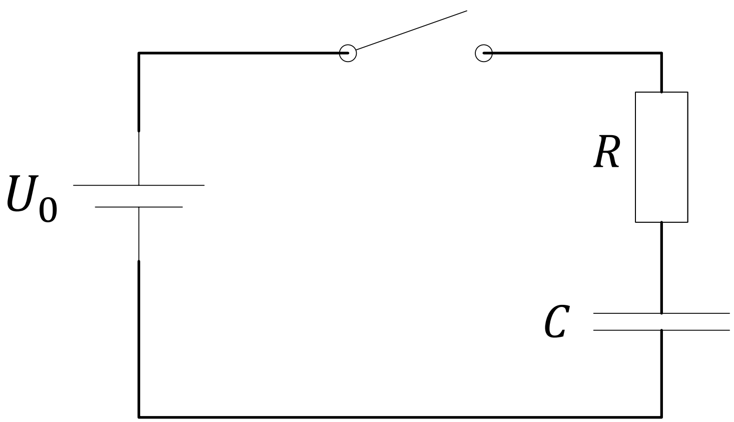
- Kondensator: $u(T) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^T i(t)dt$ $\quad$ $i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u(t)$

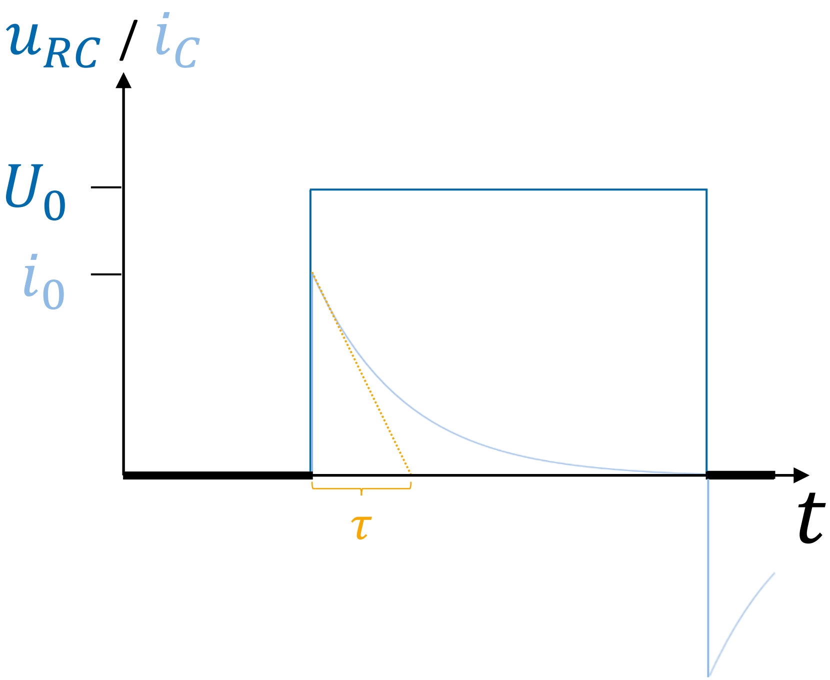
Schaltverhalten eines Widerstands





Schaltverhalten eines Kondensators





$$U_0 = U_R(t) + U_C(t)$$

$$U_0 = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^T i(t)dt$$

$$0 = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t) \;\Rightarrow\; \frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot i(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot i(t)$$

Schaltverhalten eines Kondensators

DGL: $\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot i(t)$ Ansatz: $i(t) = k_2 \cdot e^{k_1 \cdot t}$

$$\frac{di(t)}{dt} = k_2 \cdot k_1 \cdot e^{k_1 \cdot t}$$

$$k_2 \cdot k_1 \cdot e^{k_1 \cdot t} = -\frac{1}{\tau} \cdot k_2 \cdot e^{k_1 \cdot t} \qquad \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{\tau}$$

$$i_0 = i(t=0) = k_2 \cdot e^{k_1 \cdot 0} \qquad \Rightarrow k_2 = i_0$$

$$\boxed{i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Zeitkonstante τ (Tau)

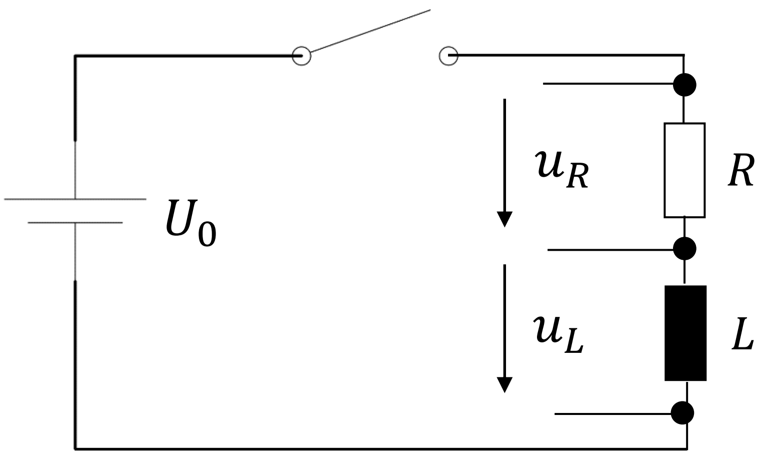
- Die Zeitkonstante τ gibt an, wie schnell ein Kondensator geladen oder entladen wird

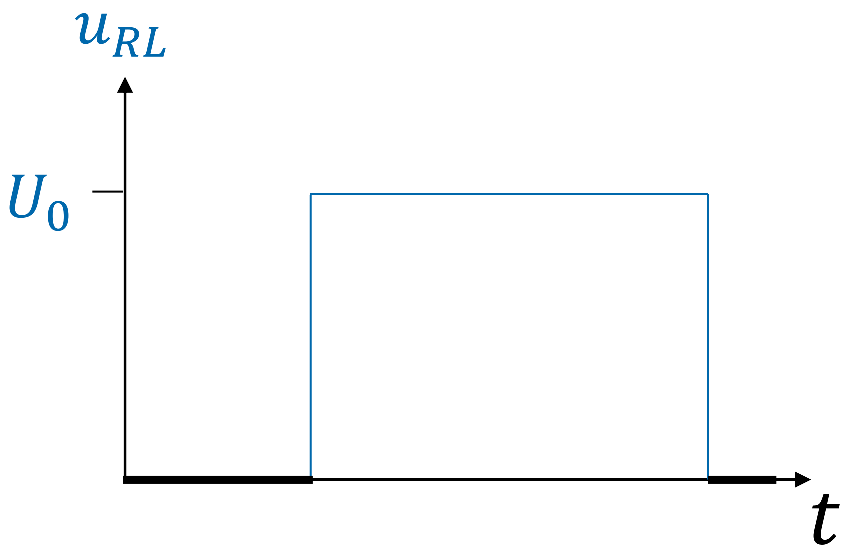
$$\tau = \mathrm{RC}$$

- Nach einer Zeit von τ Sekunden ist ein Kondensator zu 63% ge- oder entladen
- Nach einer Zeit von 5τ Sekunden ist ein Kondensator zu 99% ge- oder entladen

$$[\tau] = \Omega \cdot \mathrm{F} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \cdot \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{A}} = \mathrm{s}$$

Schaltverhalten einer Spule





Frage: Wie verändern sich Strom und Spannung über die Zeit?

Schaltverhalten einer Spule

$$U_0 = u_R + u_L = i \cdot R + u_L \quad \text{(Maschenregel)}$$

$$u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i \quad \Rightarrow i = \frac{1}{L} \int u_L \cdot dt$$

Einsetzen:

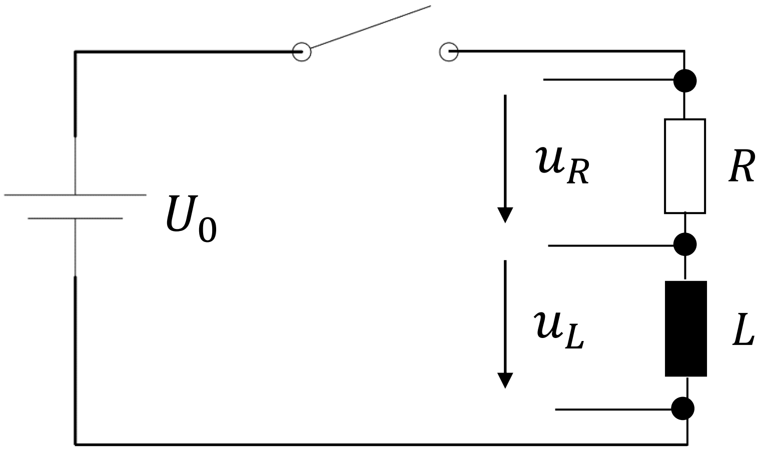
$$u_L = U_0 - \frac{R}{L} \int u_L \cdot dt$$

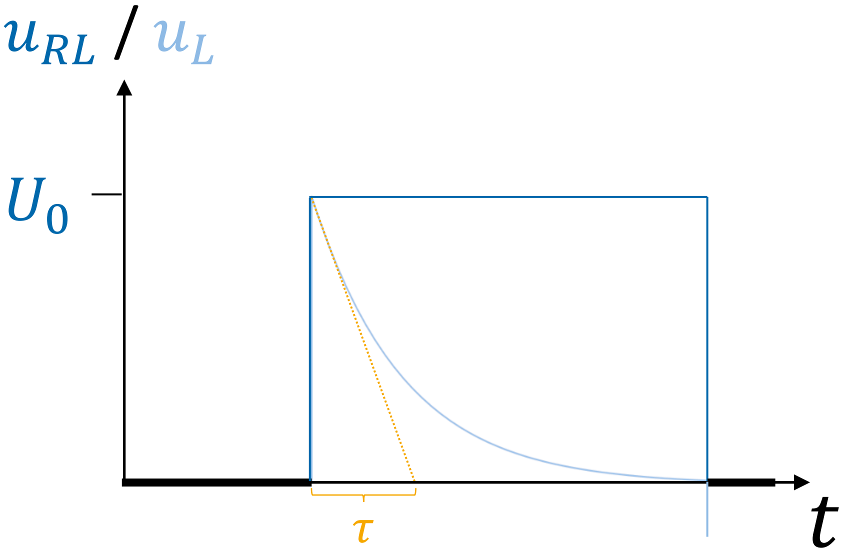
Differenzieren:

$$\frac{du_L}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot u_L$$

Mit Ansatz zur Lösung von Differentialgleichungen folgt:

$$u_L = U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \quad \text{dabei gilt: } \tau = \frac{L}{R}$$

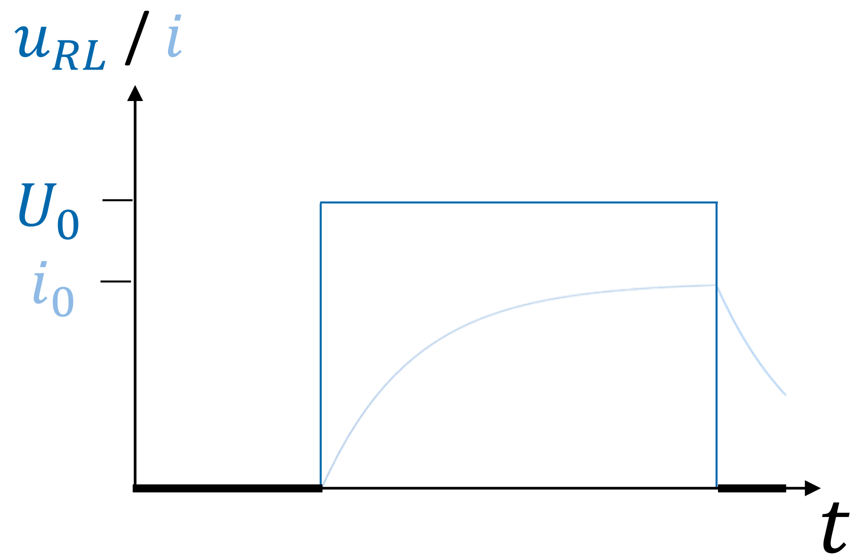




Schaltverhalten einer Spule

- Die gleiche Rechnung für den Stromverlauf ergibt:

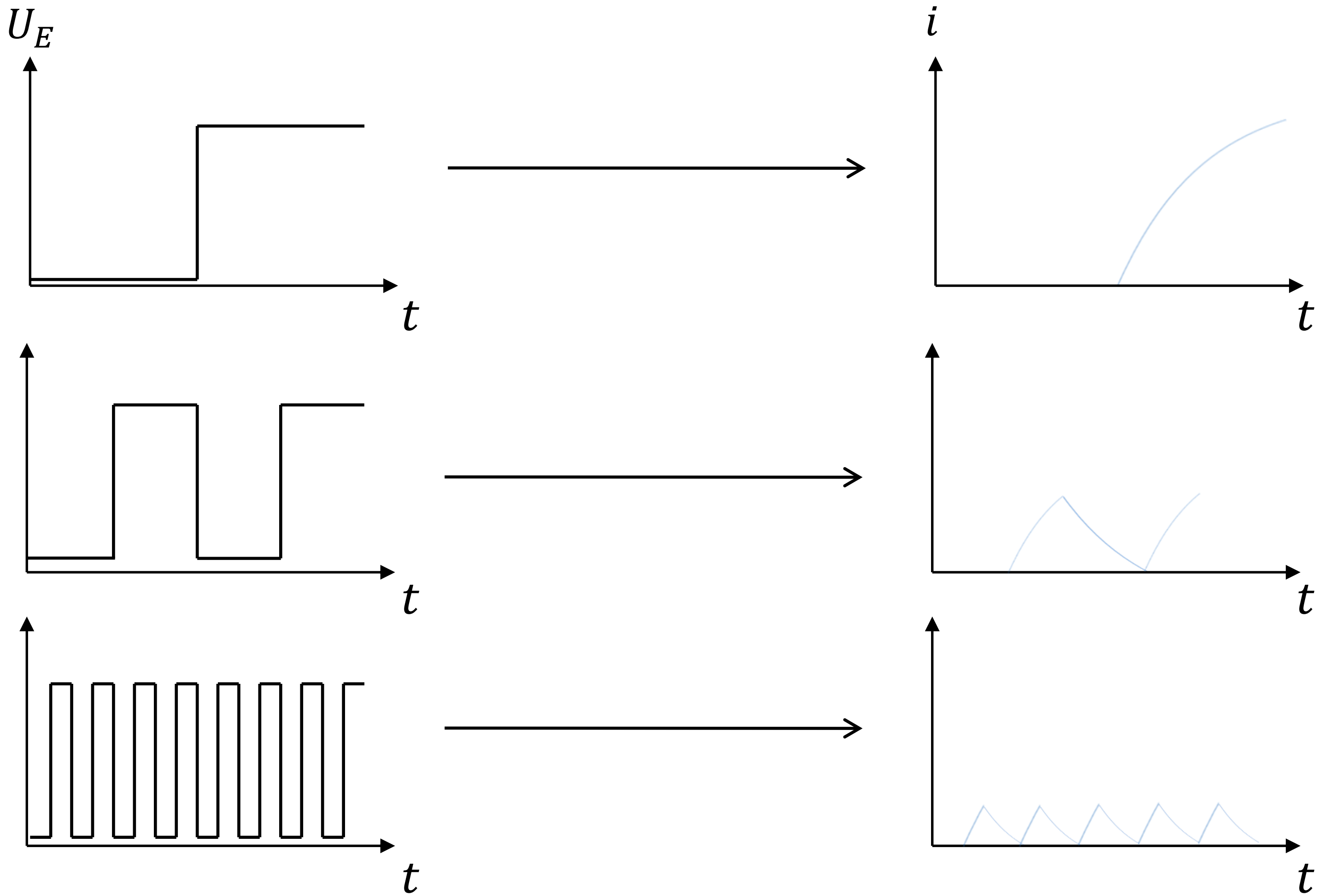
$$i = i_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



- Übung: Führen Sie die Berechnung für den Stromverlauf selber durch.

Zusammenspiel von Spule und Kondensator
- Frequenzfilter -

- Schaltverhalten einer Spule bei Wechselspannung

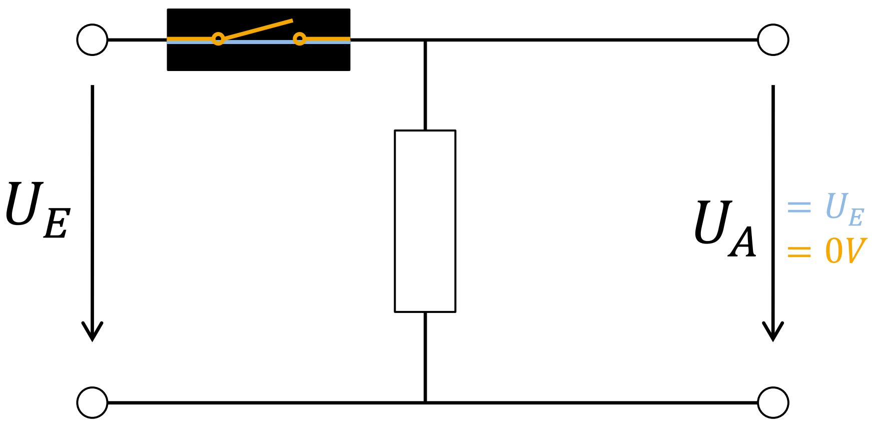


Zusammenspiel von Spule und Kondensator
- Frequenzfilter -

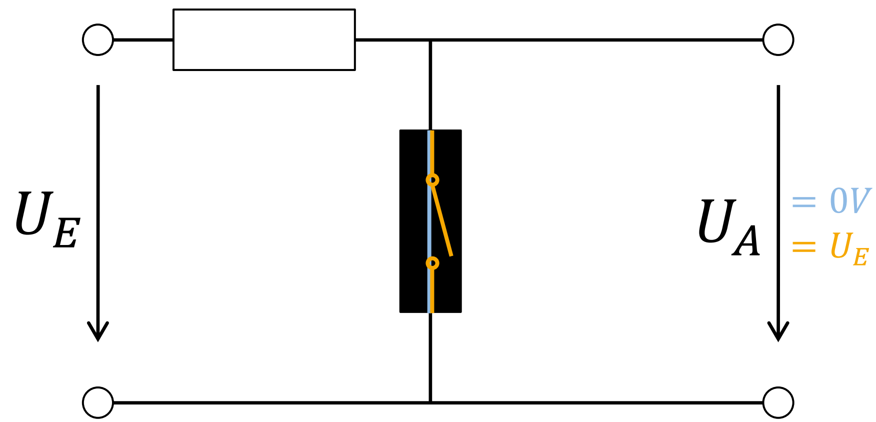
- Extremfälle:

	Spule	Kondensator
Gleichspannung:	Kurzschluss	offene Klemmen
Hochfrequenz:	offene Klemmen	Kurzschluss

- Konstruktion eines Frequenzfilters:



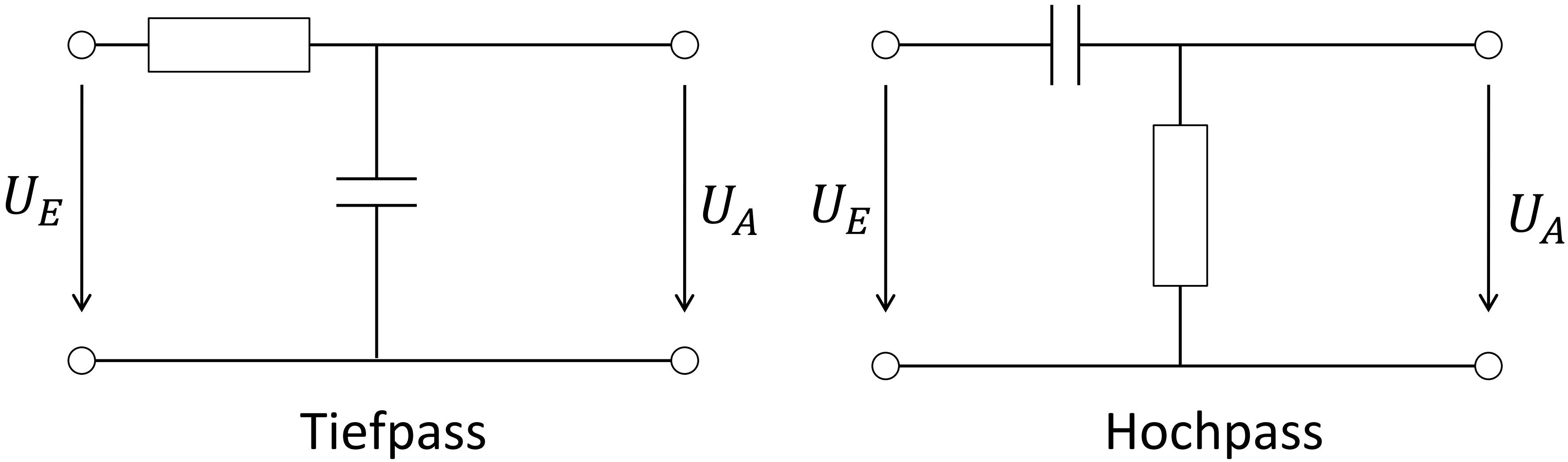
Tiefpass



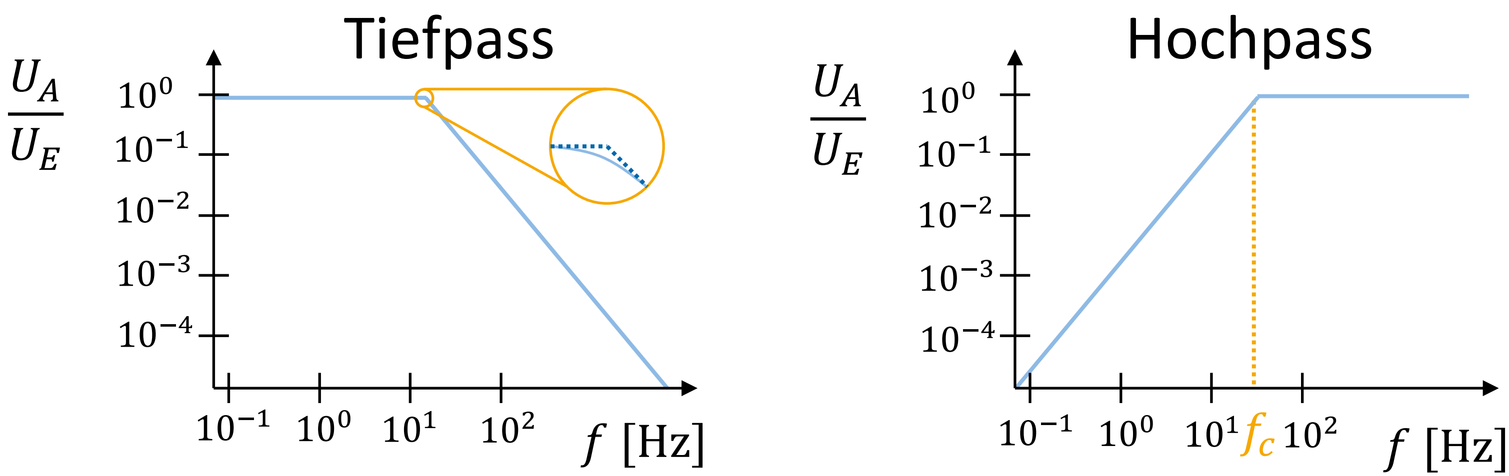
Hochpass

Zusammenspiel von Spule und Kondensator
- Frequenzfilter -

- Frequenzfilter lassen sich analog aus Kondensatoren konstruieren:



- In realen Anwendungen werden meist kapazitätsbasierte Schaltungen verwendet, da diese baulich kleiner sind



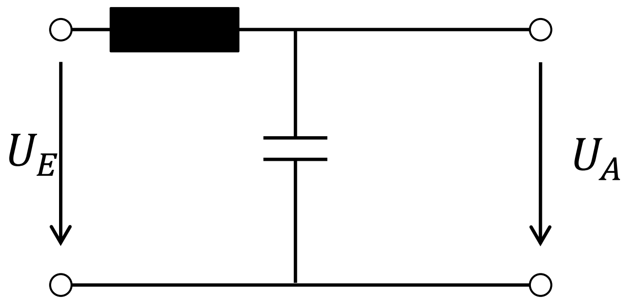
- Grenzfrequenz:

Die Amplitude des Ausgangssignals U_A ist auf den $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fachen Wert der Eingangsamplitude U_E abgesunken

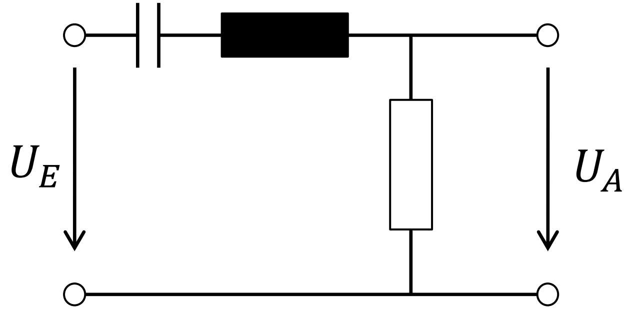
$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau} \text{ mit } \tau = RC \text{ bzw. } \tau = \frac{L}{R}$$

Zusammenspiel von Spule und Kondensator
- Frequenzfilter -

- Mit mehreren Energie speichernden Bauteilen kann ein Filter 2. Ordnung konstruiert werden.

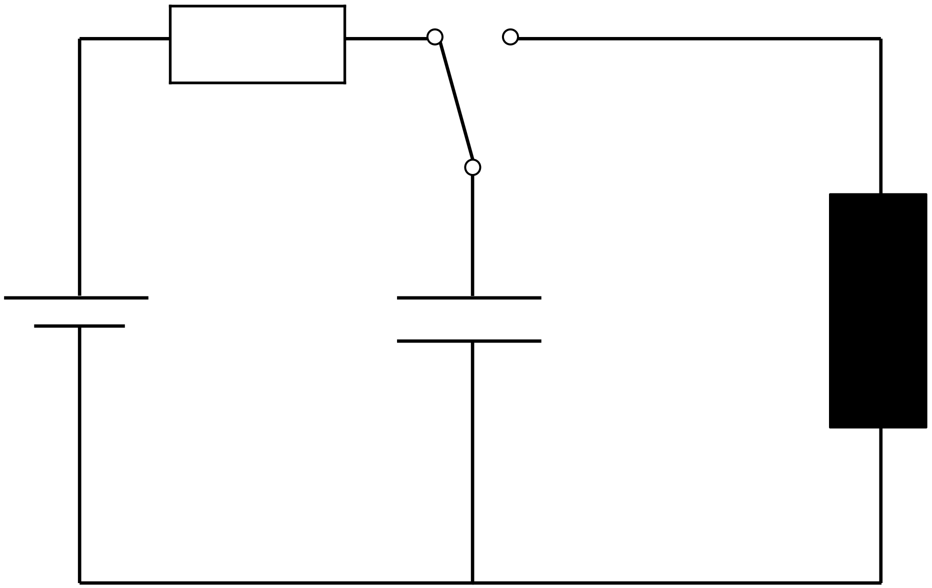


- Es sind auch Filter realisierbar, die bei hohen und tiefen Frequenzen abdämpfen: Bandpass



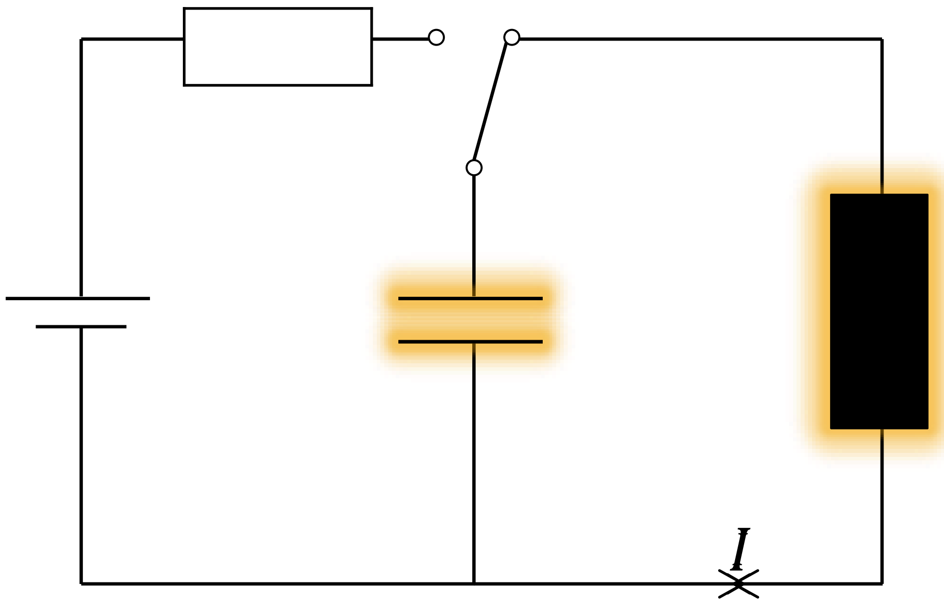
$$f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

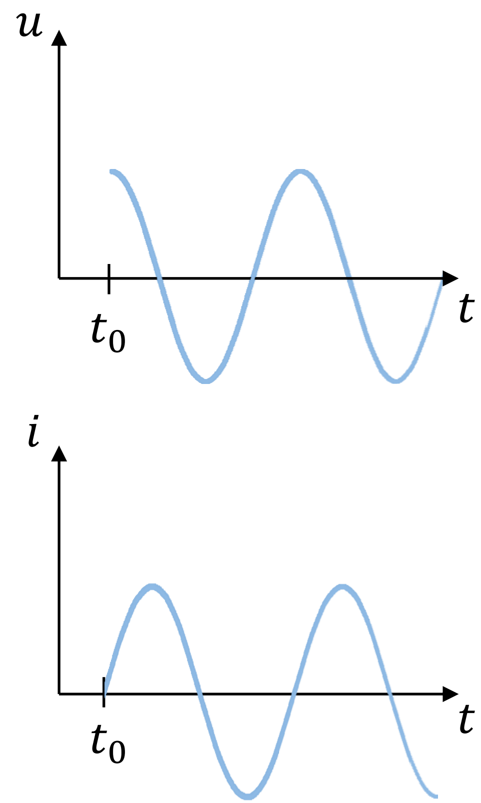
Zusammenspiel von Spule und Kondensator
- Schwingkreis -



- Zum Zeitpunkt t_0 sei der Kondensator voll geladen und der Schalter wird umgelegt
- Verhalten von Strom und Spannung an der Spule?

Zusammenspiel von Spule und Kondensator
- Schwingkreis -





$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- In der Realität klingt dieses Verhalten durch parasitäre Effekte ab

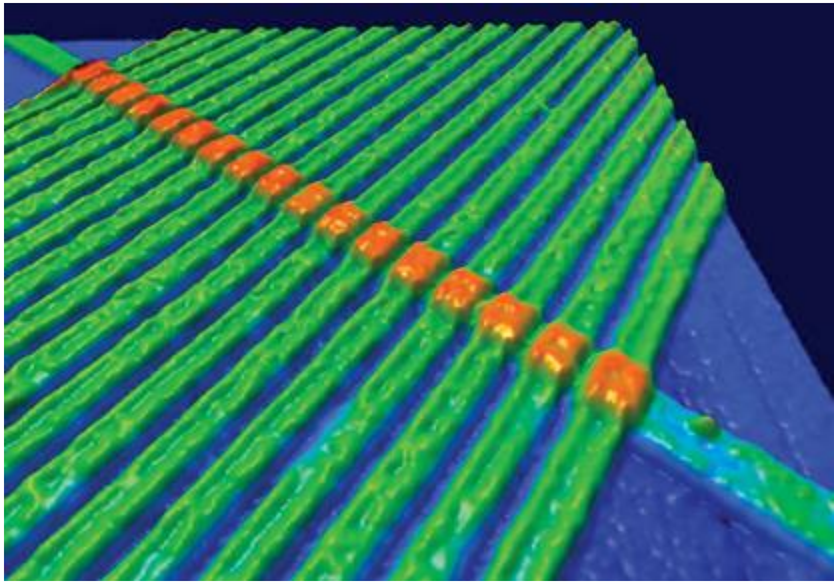
Elemente der passiven Schaltungstechnik

	Elektrischer Strom	Elektrische Ladung
Elektrische Spannung	Widerstand: $R \mathrel{\widehat{=}} \frac{U}{I} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\dot{\Phi}}{\dot{q}}$	Kondensator: $\frac{1}{C} \mathrel{\widehat{=}} \frac{U}{Q} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\dot{\Phi}}{q}$
Magnetischer Fluss	Spule: $L \mathrel{\widehat{=}} \frac{\Phi}{I} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\Phi}{\dot{q}}$	**?** : $? \mathrel{\widehat{=}} \frac{\Phi}{q}$

Memristor

- Bauteil, dessen Widerstand von seiner Vergangenheit abhängt
- Zusammengesetzt aus memory und resistor
- Erfunden von L. Chua 1971, erstmals „*konstruiert*“ 2008
- Viertes passives Bauelement
- Schaltzeichen noch nicht genormt

$$M = \frac{d\Phi}{dq} \qquad [M] = \frac{Wb}{C} = \Omega$$



http://www.maximumpc.com/files/u53951/Memristor1_0.jpg

Memristor - RRAM

- RRAM (Resistive random-access memory)
  - Lebensdauer: 10^{12} rewrites (Flash: 10^6)

	RRAM	DRAM	FLASH
Type	Non-volatile	Volatile	Non-volatile
Switching Time	< 0,3ns	~ 10ns	20-200µs
Endurance(rewrites)	10^{12}		10^6

Beispiel:

- Panasonic MN101L 8-bit Microcomputer – RRAM vs. Flash:
  - 50% weniger Energieverbrauch
  - Bis zu 10x schnelleres read/write

Memristor - RRAM

- RRAM $\sim$ Memristor?
  - Vongehr & Meng 2015:
    - Konzept des Memristors von 1971 nicht möglich ohne Elektromagnetische Induktion
      $\Rightarrow$ RRAM $\neq$ Memristor im Sinne von 1971

- Unklar, ob Memristor von L. Chua möglich

Memristor – Eigenschaften und Anwendungen

- Sehr geringe Stromaufnahme im vgl. zu RAM-Zellen
- Geringerer Halbleiterverbrauch als bisherige Speicherzellen
- Kann mehr als 1 oder 0 Speichern (analoge Zwischenwerte)
- Nicht flüchtiger Speicher

- Möglicher Ersatz für Transistoren
- Neue Speichertechnologie
- Halbleiterbasierte neuronale Netze