Lineare Algebra - Blatt 1

VR = Vektorraum, K-VR = K-Vektorraum
UVR = Untervektorraum, EZS = Erzeugendensystem
l.a = linear abhängig, l.u = linear unabhängig
Abb(M,K) = Abbildung $M \to K$

1.) a) $U := \{ (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 4} \mid a_{22} + a_{32} = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 4}$?

Nein, denn sei $u, v \in U$ mit

$$u := \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \end{pmatrix}$$

mit $u_{22} + u_{32} = v_{22} + v_{32} = 1$

Falls U ein UVR von V ist, so gilt: $u+v \in V$.

$$\Rightarrow u+v = \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} & u_{13}+v_{13} & u_{14}+v_{14} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} & u_{23}+v_{23} & u_{24}+v_{24} \\ u_{31}+v_{31} & u_{32}+v_{32} & u_{33}+v_{33} & u_{34}+v_{34} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \end{pmatrix} := w$$

Ist $w \in U$, so muss $w_{22} + w_{32} = 1$ gelten, es folgt aber:

$$\begin{aligned} w_{22} + w_{32} &= u_{22} + v_{22} + u_{32} + v_{32} \\ &= (u_{22} + u_{32}) + (v_{22} + v_{32}) \\ &= 1 + 1 = 2 \neq 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow w \notin U \Leftrightarrow u+v \notin U \Rightarrow U$ kein UVR von V

b) $U := \{ f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) < 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \} \subseteq Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Nein, sei $g, h \in U$ mit $g(x) = \frac{1}{2}$ und $h(x) = \frac{2}{3}$.
Wenn U UVR von V ist, so muss $g+h \in U$ sein, jedoch gilt:
$g+h = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} = \frac{1}{6} + 1 > 1$
$\Rightarrow g+h \notin U \Rightarrow U$ kein UVR von V

c) $U := \{f \in Abb(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(-1) - f(0) = 0\} \subseteq Abb(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Ja! Aus $f \in U \Rightarrow f \in V$, da $f \in Abb(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Sei $g, h \in U$. Dann gilt zu zeigen $g+h \in U$

Sei $f(x) := g(x) + h(x)$

$$\Rightarrow f(-1) - f(0) = (g(-1) + h(-1)) - (g(0) + h(0)) \overset{AG}{=} \underbrace{(g(-1) - g(0))}_{0} + \underbrace{(h(-1) - h(0))}_{0} = 0 + 0 = 0$$

Damit ist $g+h \in U$

Nun gilt zu zeigen: Sei $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $g \in U$ mit

$a \cdot g \in U$

$\Rightarrow f(x) := a \cdot g(x)$

$$\Rightarrow f(-1) - f(0) = a \cdot g(-1) - a \cdot g(0) \overset{DG}{=} a \cdot \underbrace{(g(-1) - g(0))}_{0} = a \cdot 0 = 0$$

Damit ist $a \cdot g \in U$

$\Rightarrow$ U ist UVR von V

d) $U = \{f \in Abb(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ ist monoton wachsend}\} \subseteq Abb(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Nein! Sei $g \in U$, $a \in K$. Wenn U UVR von V wäre, dann gelte $a \cdot g \in U$.
Für g gelte strenge Monotonie: Sei x_1, x_2 beliebig gilt: mit $x_1 < x_2$, dann gilt $g(x_1) < g(x_2)$.

Sei $f := (-1) \cdot g$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow (-1) g(x_1) < (-1) \cdot g(x_2)$$
$$\Leftrightarrow -g(x_1) < -g(x_2) \quad | + g(x_1) + g(x_2)$$

$\iff g(x_2) < g(x_1)$

$\iff f$ ist streng monoton fallend

$\Rightarrow (-1)g \notin V.$

$\Rightarrow U$ ist kein UVR von V.

e) $U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 3} \mid a_{12}^2 - a_{21}^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 3}$? Nein!

Sei $u := \begin{pmatrix} u_{11} & -2 & u_{13} \\ 2 & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} v_{11} & 1 & v_{13} \\ 1 & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} \end{pmatrix}$

Da $u_{12}^2 - u_{21}^2 = (-2)^2 - 2^2 = 0$ und $v_{12}^2 - v_{21}^2 = 1^2 - 1^2 = 0$

$\Rightarrow u, v \in U$

Dann sei $w := u + v = \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & -2+1 & u_{13}+v_{13} \\ 2+1 & u_{22}+v_{22} & u_{23}+v_{23} \\ u_{31}+v_{31} & u_{32}+v_{32} & u_{33}+v_{33} \\ u_{41}+v_{41} & u_{42}+v_{42} & u_{43}+v_{43} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w_{11} & -1 & w_{13} \\ 3 & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} \end{pmatrix}$

Dann ist: $w_{12}^2 - w_{21}^2 = (-1)^2 - (3)^2 = 1 - 9 = -8 \neq 0$

$\Rightarrow u + v \notin U \Rightarrow U$ kein UVR von V

2. $v_1 = (2,-1)$, $v_2 = (1, \frac{3}{2})$, $v_3 = (-2,1)$, $v_4 = (0,2)$

a) $v_3 = \langle v_2 \rangle$?

$v_3 = a \cdot v_2$, $a \in \mathbb{R}$

$(-2, 1) = a \cdot (1, \frac{3}{2})$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 = a \\ 1 = \frac{3}{2}a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a = -2 \\ a = \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ↯ $\Rightarrow v_3 \neq \langle v_2 \rangle$

b) $\mathbb{R}^{1\times 2} = \langle v_1, v_3 \rangle$

$\Rightarrow \begin{matrix} a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = (0,1) \\ c \cdot v_1 + d \cdot v_2 = (1,0) \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2a - 2b = 0 \\ -a + b = 1 \end{vmatrix}$ ↯

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2c - 2d = 1 \\ -c + d = 0 \end{vmatrix}$ ↯

$\Rightarrow \mathbb{R}^{1\times 2} \neq \langle v_1, v_3 \rangle$

c) $V = \{0\}$ kein Erzeugnis einer Menge ? Nein. $M = \{\emptyset\}$

d) $K[x] = \langle M \rangle$ unendlich viele Elemente ?
Ja, Beweis VL (endlich viele Elemente aus $K[x]$ haben einen maximalen Grad n. $\Rightarrow x^{n+1}$ kann nicht dargestellt werden $\Rightarrow \langle M \rangle \neq K[x]$)

e) Ist M eine Teilmenge von V mit $V = \langle M \rangle$. Ist $v \in M$, ist dann $V = \langle M \setminus \{v\} \rangle$? Nein!

Sei $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. $\Rightarrow \langle M \rangle$ minimales Erzeugendensystem $\Rightarrow \langle M \setminus \{v\} \rangle$ kein EZS $\Rightarrow \langle M \setminus \{v\} \rangle \neq V$.

3. a) $\{(0,0,0), (1,-1,1)\}$ l.u ? Nein.

Sei $a \neq 0 \Rightarrow a \cdot (0,0,0) = 0$

$\overset{a \neq 0}{\Rightarrow} (0,0,0)$ linear abhängig

b) $\{g\} \cup \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (mit $g(n) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$, $f_i(i) = 1$, $f_i(n) = 0$ für $i, n \in \mathbb{N}$, $i \neq n$) l.u. ?

Ja. Wir beschränken i, n auf ein Intervall $[1, m]$, $m \in \mathbb{N}$. $g_m^* := \begin{pmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(m) \end{pmatrix}$, $f_{im}^* := \begin{pmatrix} f_i(1) \\ \vdots \\ f_i(m) \end{pmatrix} \Rightarrow g_m^*, f_{im}^* \in \mathbb{R}^m$

$\{g\} \cup \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ l.u. gdw. $\lim_{m \to \infty} (g_m^* \cup f_{im}^*)$ l.u.

Beobachtung: $f_{im}^* \Leftrightarrow$ i-te Einheitsvektor von $\mathbb{R}$

$\Rightarrow g_m^* - \sum_{i=1}^{m} ((-1) f_m^*(i)) = 0$

Auf jedem endlichen Intervall ist $\{g_m^*\} \cup \{f_{im}^*\}$ l.a.

$\Rightarrow \lim_{m \to \infty} \left(g_m^* + \sum_{i=1}^{m} ((-1) \cdot f_m^*(i)) \right) = g^* + \sum_{i=1}^{\infty} ((-1) \cdot f_i(i))$

$\lightning$ Linearkombination von f_i muss endlich sein

$\Rightarrow a \cdot g^* + \sum_{i=1}^{m} ((a_i) \cdot f_i(i)) = 0 \Rightarrow a = a_1 = \dots = a_m = 0$

$\Rightarrow \{g^*\} \cup \{f_i^*\}$ l.u. $\Rightarrow \{g\} \cup \{f_i\}$ l.u.

c) $\{1, \pi^2\}$ l.u. ? Nein, denn $\overset{a}{\overbrace{(\pi^2)}} \cdot 1 + \overset{b}{\overbrace{(-1)}} \cdot \pi^2 = 0$

$\Rightarrow a, b \neq 0 \Rightarrow$ l.a.

d) $\{(1,2,1), (0,-2,-1), (-3,0,0)\}$ l.u. ?

$\Rightarrow (1,2,1) = (-1) \cdot (0,-2,1) - (\frac{1}{3}) \cdot (-3,0,0)$

e) $\{x \to \sin(2x), x \to \sin(4x), x \to \sin(8x)\}$ l.u. ? Ja.

$\Rightarrow a \cdot \sin(2x) + b \cdot \sin(4x) + c \cdot \sin(8x) = 0$

1. Wähle $x = \frac{\pi}{4}$, $\Rightarrow a \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + b \cdot \sin(\pi) + c \cdot \sin(2\pi) = a = 0$
2. Wähle $x = \frac{\pi}{8}$, $\Rightarrow a \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) + b \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + c \cdot \sin(\pi) \overset{(1.)}{=} b = 0$
3. Wähle $x = \frac{\pi}{16} \Rightarrow a \cdot \sin(\frac{\pi}{8}) + b \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) + c \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) \overset{(1.)(2.)}{=} c = 0$

$\Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow$ l.u.

4.) Zeige $\mathrm{Abb}(M,K) := \{ f: M \to K \} =: V$, K-Vektorraum

i) $(V,+)$ assoziativ:

Sei $f, g, h \in V$, dann gilt:

$$(f(m) + g(m)) + h(m) \overset{\substack{AG \\ \text{in } K}}{=} f(m) + g(m) + h(m) \overset{AG}{=} f(m) + (g(m) + h(m))$$

ii) $(V,+)$ kommutativ:

Sei $f, g \in V$, dann gilt:

$$f(m) + g(m) \overset{\substack{KG \\ \text{in } K}}{=} g(m) + f(m)$$

iii) NE in $(V,+)$:

Sei $e: e(m) = 0$.

$\Rightarrow e + f = e(m) + f(m) = 0 + f(m) = f(m) = f$

$\Rightarrow f + e = f(m) + e(m) = f(m) + 0 = f(m) = f$

$\Rightarrow e + f = f = f + e$

iv) IE in $(V,+)$:

Sei $g: m \mapsto -f(m)$

$\Rightarrow f + g = f(m) - f(m) = 0$

$\Rightarrow g + f = -f(m) + f(m) = 0$

$\Rightarrow f + g = 0 = g + f$

(v) Zeige $a(bf) = (ab)f$

$a\cdot(bf) = a\cdot(b\cdot(f(m))) \overset{AG}{\underset{in K}{=}} a\cdot b\cdot f(m)$

$\overset{AG}{=} (a\cdot b)\cdot f(m) = (ab)f$

(vi) Zeige $1\cdot f = f$

$1\cdot f = 1\cdot f(m) = f(m) = f$

(vii) Zeige $a(f+g) = af + ag$

$a(f+g) = a\cdot(f(m) + g(m)) \overset{DG}{\underset{in K}{=}} a\cdot f(m) + a\cdot g(m) = af + a\cdot g$

viii) Zeige $(a+b)\cdot f = af + bf$

$(a+b)\cdot f = (a+b)\cdot f(m) \overset{DG}{\underset{in K}{=}} a\cdot f(m) + b\cdot f(m) = af + bf.$