Übungsblatt 1

Abgabe bis 12.04.2023, 12 Uhr (via Moodle von einem Gruppenmitglied).

Theorieaufgabe 1 [Eigenschaften des Spektrums]

Für eine quadratische Matrix A bezeichne $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ \det(A - \lambda I) = 0\}$ das Spektrum, also die Menge der Eigenwerte, von A. Zeigen Sie die folgenden Aussagen für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Falls $\det(A) \neq 0$, dann gilt $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$,

(b) $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(A)$,

(c) $\sigma(A) = \sigma(A^\top)$,

(d) $\sigma(AB) = \sigma(BA)$,

(e) Für jedes $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $M := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ ist $\sigma(M) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$.

1+1+1+2+2 = 7 Punkte

Theorieaufgabe 2 [Störungssätze]

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar mit Eigenwerten λ_i, $i = 1, \ldots, n$, und Eigenvektoren $V = (v_1, \ldots, v_n)$, d.h.

$$V^{-1}AV = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Sei μ ein Eigenwert der gestörten Matrix $\widetilde{A} = A + E$. Dann gilt

$$\min_{1\le i\le n} |\lambda_i - \mu| \le \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 \|E\|_2.$$

5 Punkte

Theorieaufgabe 3 [Eigenvektoren, Eigenwerte und Kondition]

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Geben Sie eine Matrix V an, sodass

$$A = V\ \mathsf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\ V^{-1}$$

gilt, wobei λ_1, λ_2 und λ_3 die Eigenwerte von A sind.

(c) Berechnen Sie die Konditionszahl κ_2 der Matrix A.

(d) Berechnen Sie die Konditionszahl κ_2, die die Kondition des Eigenwertproblems: „Finde $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{C}^3$ mit $v \neq 0$, sodass $Av = \lambda v$“ beschreibt.

Hinweis: Verwenden Sie einen der Sätze aus Kapitel 7.3 des Buches.

3+1+2+1 = 7 Punkte

Theorieaufgabe 4 [Gerschgorin-Kreise]

Schätzen Sie mit Hilfe der Gerschgorin-Kreise möglichst genau ab, wo sich die Eigenwerte der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

befinden können. Machen Sie bei Bedarf eine Skizze. $3+3=6$ Punkte

Gesamt: 7+5+7+6 = 25 Punkte