Lineare Algebra

Vektorraum: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Dann besteht ein K-Vektorraum aus einer Menge V, einer additiven Abbildung „$+$": $V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$ und einer skalaren Multiplikation „$\cdot$": $K \times V \to V$, $(a, v) \mapsto av$.

- Elemente aus K heißen Skalare.
- Elemente aus V heißen Vektoren.
- Für $v \in V$ existiert ein negativer Vektor $-v$, sodass $(v) + (-v) = 0$ ist. Hier bezeichnet 0 den Nullvektor (Nullelement aus V).

! Vektorraum muss die Vektorraumaxiome erfüllen

- Assoziativ ggü. Addition: für $u, v, w \in V$ gilt: $u + (v + w) = (u + v) + w$
- Neutrales Element bzgl. Addition: $\exists 0 \in V: \forall v \in V: 0 + v = v + 0 = v$
- Inverses Element bzgl. Addition: $\forall v \in V \; \exists w \in V: v + w = w + v = 0$
- Kommutativ bzgl. Addition: für $v, w \in V$ gilt: $v + w = w + v$

$\Rightarrow (V, +)$ ist eine abelsche Gruppe

- Assoziativ bzgl. skalarer Multiplikation: für $a, b \in K, v \in V$ gilt: $a(bv) = (ab)v$
- Skalare Neutralität: für $v \in V$ gilt: $1 \cdot v = v$
- Distributiv für $a, b \in K, v, w \in V$ gilt
  - $(a + b)v = (av) + (bv)$
  - $a \cdot (v + w) = (av) + (aw)$

Beweise Vektorraum:

(1.1) ▷ für $v, w, x \in V$: $v + x = w \Rightarrow x = -v + w$

Beweis:

$v + x = w$ | $(-v)$ von links addieren

$\Rightarrow -v + v + x = -v + w$ | assoziativgesetz anwenden

$\Rightarrow \underbrace{(-v+v)}_{0} + x = -v + w$

$\Rightarrow 0 + x = -v + w$

$\Rightarrow x = -v + w$

$\square$

(1.2) ▷ für $a \in K^\times$, $v, x \in V$: $ax = v \Rightarrow x = a^{-1}v$

Beweis:

$ax = v$ | multipliziere von links mit Skalar a^{-1} (existiert, da $a \in K^\times$ ist und somit invertierbar ist)

$\Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}v$ | Assoziativgesetz anwenden

$\Rightarrow \underbrace{(a^{-1}a)}_{1} x = a^{-1}v$

$\Rightarrow 1 \cdot x = a^{-1}v$

$\Rightarrow x = a^{-1}v$

$\square$

(1.3) ▷ für $v, x, y \in V$: $v + x = v + y \Rightarrow x = y$

Beweis:

Aus (1.1): $v + x := w \Rightarrow x = -v + w$

$v + y := w \Rightarrow y = -v + w$

$\Rightarrow x = -v + w = y \Rightarrow x = y$ $\square$

(1.4) $\triangleright$ für $a \in K^\times, x, y \in V$: $ax = ay \Rightarrow x = y$

Beweis:

(Aus 1.2.) $ax := w \Rightarrow x = a^{-1}w$

$ay := w \Rightarrow y = a^{-1}w$

$\Rightarrow x = a^{-1}w = y \Rightarrow x = y$

$\square$

1.5) $\triangleright$ für $v \in V$: $0v = \vec{0}$

Beweis:

$0v = (0+0)v \overset{(1.1)}{=} 0v + 0v \Rightarrow 0v = 0v - 0v = \vec{0}$

$\square$

1.6.) $\triangleright$ für $a \in K$: $a \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Beweis:

Sei $v \in V$:

$a \cdot \vec{0} \overset{1.5}{=} a \cdot (0v) = (a \cdot 0) \cdot v = 0 \cdot v = \vec{0}$

$\square$

1.7. $\triangleright$ für $a \in K, v \in V$: $(-a)v = a \cdot (-v) = -av$

Beweis:

- $(-a)v + av = (-a+a)v = 0v = \vec{0}$

$\Rightarrow (-a)v = -av$

- $a \cdot (-v) + a \cdot v = a \cdot (-v+v) = a \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$\Rightarrow a \cdot (-v) = -av = (-a) \cdot v$

$\square$

1.8 für $v \in V$: $(-1)v = -v$

Beweis:
$$(-1)v \overset{(1.7)}{=} -(1v) = -v$$

1.9. für $a \in K$, $v \in V$: $(-a)(-v) = av$

Beweis:
$$(-a)(-v) \overset{(1.7)}{=} -(a \cdot (-v)) \overset{(1.7)}{=} -(-av) = av$$

1.10 Für $a \in K$, $v \in V$: $av = \vec{0} \Rightarrow a = 0 \vee v = 0$

Beweis:

- Für $a = 0 \overset{(1.5)}{\Rightarrow} av = \vec{0}$
- Für $a \neq 0$ folgt $a \in K^\times$
  $\Rightarrow av = \vec{0} \overset{(1.2)}{\Rightarrow} v = a^{-1} \cdot \vec{0} \overset{(1.6)}{=} \vec{0}$

$\square$

Untervektorraum: $U \subseteq V$ heißt K-Untervektorraum von V, falls U mit der Addition und der skalaren Multiplikation auf V ein Vektorraum ist.

Notation: $U \leq V \Leftrightarrow U$ ist K-Untervektorraum von V.

Untervektorraumkriterium:

Sei $U \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(1) $U \leq V$

(2) a) $\triangleright\ \vec{0} \in U$ oder a₂) $U \neq \emptyset$

b) $\triangleright\ u + u' \in U \ \forall u, u' \in U$

c) $\triangleright\ au \in U \ \forall a \in K, u \in U$

Beweis:

(1) ⇒ (2)

Sei (1) erfüllt. Daraus folgt:

a) Sei $u \in U$. Dann ist $-u = (-1) \cdot u \in U$.

$\Rightarrow u + (-u) = \vec{0} \in U$.

a_2) Nach (1) ist $(U, +)$ eine abelsche Gruppe und daher nichtleer.

$\Rightarrow U \neq \emptyset$

b), c) gilt, da U Untervektorraum ist.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Aus $U \neq \emptyset \overset{a)}{\Rightarrow} 0 \in U$. U ist zudem abgeschlossen bzgl. $+, \cdot$. Da V die Vektorraumaxiome erfüllt, so muss auch U diese erfüllen $\Rightarrow U \leq V$

Linearkombination: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ein n-Tupel in V. Eine Linearkombination von v ist ein $w \in V$ der Form $w = \sum_{i=1}^{n} (a_i v_i)$ mit $a_1, \ldots, a_n \in K$

$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle :=$ Menge der Linearkombinationen von V

$\Rightarrow$ Nicht eindeutig: (v, v): $0_v + 0_v = \vec{0} = 1v + (-1)v$

<u>Beispiel:</u> $\langle (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0) \rangle = \mathbb{R}^{1 \times 3}$

<u>Beweis:</u> $(a, b, c) = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (0,1,0) + c \cdot (0,0,1)$

$\Rightarrow$ Lösung durch lineares Gleichungssystem

Beispiel: $(-1, -4, -1) \in \langle (1,2,1), (1,3,1) \rangle$

$\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{Q}: (-1, -4, -1) = a \cdot (1,2,1) + b \cdot (1,3,1)$

$\Leftrightarrow (-1, -4, -1) = (a+b, 2a+3b, a+b)$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a + b = -1 \\ 2a + 3b = -4 \\ a + b = -1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß}} a = 1, \; b = -2$$

$\Rightarrow$ LGS hat mind. eine Lösung $\Leftrightarrow$ es ex. eine Linearkombination
$\Rightarrow$ LGS hat keine Lösung $\Leftrightarrow$ es ex. keine Linearkombination

Linearkombination als Abbildung:

$n \in \mathbb{N}$, $T = (v_1, \dots, v_n) \in V$

$$\lambda_T : K^n \to V, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} (a_i v_i)$$

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \lambda_T (K^n) = \text{Bild}(\lambda_T)$$

Wichtig: $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \leq V$

Beweis: Definiere $U := \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

1. $\vec{0} \in U$, denn $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} (0 \cdot v_i) \in U \quad (0 \in K)$

2. Definiere $u = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot v_i)$, $u' = \sum_{i=1}^{n} (a_i' v_i)$

$$\Rightarrow u + u' = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot v_i) + \sum_{i=1}^{n} (a_i' \cdot v_i) \overset{\text{kommutativ bzgl. +}}{=} \sum_{i=1}^{n} (a_i v_i + a_i' v_i)$$

$$\overset{\text{Distributiv-gesetz}}{=} \sum_{i=1}^{n} ((a_i + a_i') \cdot v_i) \in U$$

3. Definiere $u = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot v_i)$, $a \in K$

$$a \cdot u = a \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot v_i) \overset{\text{Distributiv-gesetz}}{=} \sum_{i=1}^{n} (a \cdot (a_i \cdot v_i)) \overset{\text{Assoziativ-gesetz}}{=} \sum_{i=1}^{n} ((a \cdot a_i) \cdot v_i) \in U$$

$\square$

Sei $n \in \mathbb{N}$ $(v_1, \ldots, v_n)$ Tupel in V, $v \in V$.

Dann ist äquivalent:

a) $\triangleright$ $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$
b) $\triangleright$ $\langle v_1, \ldots, v_n, v \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$
c) $\triangleright$ $\langle v_1, \ldots, v_n, v \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$

(2.1) **Beweis:** 1. a) $\Rightarrow$ b)

Sei $v = \sum_{i=1}^{n} (a_i v_i)$, sei $u \in \langle v_1, \ldots, v_n, v \rangle$, also $u = \sum_{i=1}^{n} (b_i \cdot v_i) + bv$

$\Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n} (b_i \cdot v_i) + b \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot v_i) = \sum_{i=1}^{n} ((b_i + b \cdot a_i) \cdot v_i) \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$

2. b) $\Rightarrow$ c)

$\Rightarrow$ $\langle v_1, \ldots v_n, v \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ ist Voraussetzung aus b)
$\Rightarrow$ Zeige $\langle v_1, \ldots, v_n, v \rangle \supseteq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, um Äquivalenz der Mengen zu zeigen

$\Rightarrow$ Sei $u \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ mit $u = \sum_{i=1}^{n} (a_i v_i)$

$u = \sum_{i=1}^{n} (a_i v_i) + 0 \cdot v \Rightarrow u \in \langle v_1, \ldots, v_n, v \rangle$

$\Rightarrow \langle v_1, \ldots, v_n, v \rangle \supseteq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \wedge \langle v_1, \ldots, v_n, v \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$
$\Rightarrow \langle v_1, \ldots, v_n, v \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$

c) $\Rightarrow$ a)

$v = 1 \cdot v \in \langle v_1, \dots, v_n, v \rangle \overset{c)}{=} \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$\Rightarrow v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$\square$

Sei $n \in \mathbb{N}$, $(v_1, \dots, v_n)$ Tupel in V.

1. Für $\pi \in S_n$: $\langle v_1, \dots v_n \rangle = \langle v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)} \rangle$
2. Für $1 \neq k \in \underline{n}$ und $a \in K$: $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1 + a v_k, v_2, \dots, v_n \rangle$
3. Für $a \in K^\times$: $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle a v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$

2.2 <u>Beweis</u>:

1. $\sum_{i=1}^{n} (a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_{\pi(i)} \cdot v_{\pi(i)})$
(2.1.c))

2. $v_1 + a v_k \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n, v_1 + a v_k \rangle$

$v_1 = (v_1 + a v_k) - a v_k \in \langle v_1 + a v_k, \dots, v_n \rangle$

$\overset{(2.1.c)}{\Rightarrow} \langle v_1 + a v_k, v_2, \dots, v_n, v_1 \rangle = \langle v_1 + a v_k, v_2, \dots, v_n \rangle$

$\Rightarrow \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n, v_1 + a v_k \rangle$
$\overset{(1.)}{=} (v_1 + a v_k, v_2, \dots, v_n, v_1)$
$= \langle v_1 + a v_k, v_2, \dots, v_n \rangle$

3. $a v_1 \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \overset{(2.1.c)}{=} \langle v_1, \dots, v_n, a v_1 \rangle$

$v_1 = a^{-1} \cdot (a v_1) \in \langle a v_1, \dots, v_n \rangle$

$\overset{(2.1.c)}{\Rightarrow} \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n, a v_1 \rangle$
$\overset{(1.)}{=} \langle a v_1, \dots, v_n, v_1 \rangle$
$= \langle a v_1, \dots, v_n \rangle$

$\square$

Linearkombination von Mengen

Sei K-Körper, V ein K-Vektorraum, $M \subseteq V$

Linearkombination aus M $:\Leftrightarrow$ Linearkombination von $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ mit $v_1, v_2, \dots, v_n \in M$.

$\langle M \rangle$: Menge aller Linearkombinationen aus M, heißt:

- Lineare Hülle von M
- Erzeugnis von M
- Der von M aufgespannte/erzeugte Unterraum

Konventionen

▷ $(v_1, \dots, v_n)$ für $n=0$ leerer Tupel $()$ $\Leftrightarrow$ $M = \emptyset$
▷ $\langle () \rangle = \{0\} \leq V$

Regeln mit Linearkombinationen:

a) $M \subseteq \langle M \rangle$.
b) $\langle M \rangle \leq V$
c) $M \subseteq U \leq V \Rightarrow \langle M \rangle \subseteq U$
d) $M \leq V \Leftrightarrow M = \langle M \rangle$
e) $\langle \langle M \rangle \rangle = \langle M \rangle$

2.3 **Beweis:**

a) Jeder Vektor $v_k \in M$ kann als $1 \cdot v_k \in \langle v_1, \dots v_k, v_n \rangle$ mit $1 \leq k \leq n$ mit $|M| = n$ dargestellt werden.

b) Sei $U := \langle M \rangle$
$\Rightarrow$ Zeige $U \leq V$

1. $0 \in \langle () \rangle \subseteq \langle M \rangle = U$
2. Sei $u, v \in U$: $u \in \langle u_1, \dots, u_n \rangle$, $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$; $u_i, v_j \in M$
$\Rightarrow u + v \in \langle u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq \langle M \rangle = U$
3. $a \cdot u \in \langle au_1, \dots, au_n \rangle \overset{(2.2.3)}{=} \langle u_1, au_2, \dots, au_n \rangle$
$= \dots = \langle u_1, \dots, u_n \rangle \in U$

c) Folgt aus Untervektorkriterium
$\Rightarrow \langle M \rangle$ ist der kleinste Untervektorraum, der M enthält

d) "$\Leftarrow$" ist trivial, $\langle M \rangle$ ist ein UVR, falls $\langle M \rangle = M$,
so folgt dass M auch ein UVR von V ist

"$\Rightarrow$" Sei $M \leq V$, aus 2.3. c) folgt mit $U = M$
$M \subseteq M \leq V \Rightarrow \langle M \rangle \subseteq M \overset{2.3.a)}{\subseteq} \langle M \rangle \Rightarrow M = \langle M \rangle$

e) Sei $U := \langle M \rangle$, daraus folgt $\langle U \rangle = \langle\langle M \rangle\rangle$.
Aus 2.3. d) folgt $U \leq V \Leftrightarrow U = \langle U \rangle$.
Da $U = \langle M \rangle \leq V$ gilt, so gilt obige Behauptung
$U = \langle U \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle = \langle\langle M \rangle\rangle$

$\square$

Erzeugendensysteme

Definition: Sei K Körper, V ein K-Vektorraum. $M \subseteq V$ heißt Erzeugendensystem von V, falls $\langle M \rangle = V$.

$\Rightarrow$ Abbildung $\lambda_T : K^n \to V$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} (a_i v_i)$

$\Rightarrow$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist Erzeugendensystem von $V \Leftrightarrow \lambda_T$ surjektiv

Sei $m, n \in \mathbb{N}$, $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$, $\{w_1, \dots, w_m\}$ ist Erzeugendensystem von V. Dann: $\{v_1, \dots, v_n\}$ Erzeugendensystem $\Leftrightarrow w_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ für alle $1 \leq i \leq m$.

2.4 __Beweis:__

"$\Rightarrow$" ist klar. Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ Erzeugendensystem von V, lässt sich für alle w_i mit $1 \leq i \leq m$ eine Linearkombination aus $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ finden, also $w_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

"$\Leftarrow$" $w_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \; \forall i \in \{1, \dots, m\} \overset{(2.1.c))}{\Rightarrow} \langle v_1, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_m \rangle = V$

$\square$

V endlich erzeugt $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \{v_1, \dots, v_n\}$ Erzeugendensystem von V

Beispiel: $K[x]$ ist nicht endlich erzeugt.

(2.6) **Beweis:**

Sei $(f_1, \dots, f_n)$ ein Tupel in $K[x]$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $f_i \neq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

▷ $d := \max \{ \text{grad}(f_i) \mid 1 \leq i \leq n \}$

Sei $f \in \langle f_1, \dots, f_n \rangle \Rightarrow \text{grad}(f) \leq d$

$\Rightarrow \langle f_1, \dots, f_n \rangle \neq K[x]$

$\square$

Kommentar: Wenn $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ endlich ist, so kann der Grad der aus $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ erzeugten Polynome niemals größer als d sein, da Addition und skalare Multiplikation nichts am Grad des Polynoms ändert. Folglich liegen Polynome vom Grad größer d nicht im Erzeugendensystem $\Rightarrow \langle f_1, \dots, f_n \rangle \neq K[x]$

(3.0) Lineare Unabhängigkeit

Sei $n \in \mathbb{N}$, $T = (v_1, \dots, v_n)$ Tupel in V, $M \subseteq V$

▷ Eine lineare Abhängigkeit von T ist ein Element $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n \setminus \{0\}$ mit $\sum_{i=1}^{n} (a_i v_i) = 0$

▷ T heißt linear abhängig, falls eine lineare Abhängigkeit von T ex. ansonsten heißt T linear unabhängig

▷ M heißt linear abhängig, falls ein Tupel $(w_1, \dots, w_m)$ mit $w_1, \dots, w_m \in M$ paarweise verschieden existiert, sodass $(w_1, \dots, w_m)$ linear abhängig ist, ansonsten heißt M linear unabhängig

▷ Per Konvention ist der leere Tupel und die leere Menge linear unabhängig.

Kriterium für lineare Unabhängigkeit

Äquivalent sind:

a) $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig
b) $\forall a_1, \dots, a_n \in K$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} (a_i v_i) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$
c) $\forall a_1, \dots, a_n \in K$ und $\forall b_1, \dots, b_n \in K$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} (a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} (b_i v_i) \Rightarrow a_i = b_i$ für alle i.

(3.1) **Beweis:**

▷ a) $\Leftrightarrow$ b) ist die Definition von linearer Unabhängigkeit
▷ b) $\Rightarrow$ c): $\sum_{i=1}^{n} (a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} (b_i v_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} ((a_i - b_i) \cdot v_i) = 0$
$\overset{b)}{\Rightarrow} a_i - b_i = 0 \ \forall i \Rightarrow a_i = b_i \ \forall i$
▷ c) $\Rightarrow$ b): $\sum_{i=1}^{n} (a_i v_i) = 0 = \sum_{i=1}^{n} (0 \cdot v_i) \overset{c)}{\Rightarrow} a_i = 0 \ \forall i$

$\square$

Kleinere Bemerkungen:

▷ M linear unabhängig, $M' \subseteq M \Rightarrow M'$ linear unabhängig
▷ $0 \in M \Rightarrow M$ linear abhängig
▷ $(\dots, 0, \dots) \Rightarrow M$ linear abhängig
▷ $(\dots, v, \dots, v, \dots) \Rightarrow M$ linear abhängig
▷ $v \neq 0 \Rightarrow \{v\}$ linear unabhängig, da $a \cdot v = 0 \overset{v \neq 0}{\Rightarrow} a = 0$

Beweis von linearer Unabhängigkeit

Sei $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ein Tupel im $\mathbb{R}^m$, dann gilt:

$(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \dots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & v_{n3} & \dots & v_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (a, b, \dots m) = 0$

Zeilenstufenform einer Matrix:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & & k_1 & & & & k_2 \cdots & k_r & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cccccccc} 0 & \cdots & 0 & \square & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \square & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \square & * \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$\square \in K \setminus \{0\}$
$* \in K$
$k_1 = \square$ in der iten Zeile

▷ Seien $z_1, \ldots, z_r$ Spalten von A ungleich 0.
Dann ist $(z_1, \ldots, z_r)$ linear unabhängig.

(3.2) <u>Beweis</u>:

Sei x_i der Eintrag in z_i der Spalte k_i.
Seien $a_1, \ldots, a_r \in K$ mit $\sum_{i=1}^{r} (a_i z_i) = 0 \in K^{1 \times n}$
Da $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, gilt: $a_i x_i = 0 \overset{x_i \neq 0}{\Rightarrow} a_1 = 0$.
$\Rightarrow \sum_{i=2}^{r} (a_i z_i) = 0$

Da $(z_2, \ldots, z_r)$ wieder Zeilenstufenform hat, so ist der obere Teil wieder anwendbar, und es folgt $\sum_{i=1}^{r} (a_i z_i) = 0 \Rightarrow (a_1, \ldots, a_r) = 0$
$\Rightarrow (z_1, \ldots, z_r)$ linear unabhängig

$\square$

Basis

Sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$.

M heißt **Basis** von V, falls M ein **linear unabhängiges Erzeugendensystem** von V ist, also gilt:
(i) M ist linear unabhängig, (ii) $\langle M \rangle = V$

Beispiele:

▷ $\{1, i\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$
$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ d.h. $\langle 1, i\rangle = \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\{1,i\}$ ist linear unabhängig: Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a+bi = 0 \Rightarrow bi = -a \in \mathbb{R} \Rightarrow b = 0$ (sonst ist $i = -\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ ↯)
$\Rightarrow 0 \cdot i = -a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \{1,i\}$ linear unabhängig

▷ Der Vektorraum $K[x]$ hat die unendliche Basis $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$
$\langle 1, x, x^2, x^3, \dots\rangle = K[x]$ (Polynome sind Linearkombinationen von x^n)
$(1, x, x^2, x^3, \dots)$ ist linear unabhängig
Es genügt zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ist $(1, x, \dots x^n)$ linear unabhängig
(Kompaktheitssatz + Lemma von Zorn, jede Teilmenge von $K[x]$ linear unabhängig $\Rightarrow K[x]$ linear unabhängig)
Dazu $\sum_{i=0}^{n} (a_i x^i) = 0$ (Nullpolynom) $\Rightarrow a_i = 0 \ \forall 0 \le i \le n$ (Def von $K[x]$)

Einheitsvektor

Sei $V = K^n$. Für $1 \le i \le n$ sei $e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ der i-te Einheitsvektor (1 an der i-ten Stelle).
Dann ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von K^n, die Standardbasis.

▷ Sei $V = K^{m\times n}$. Für $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ sei $E_{ij} \in K^{m\times n}$ die Matrix mit einer 1 an Position (i,j) und sonst 0.
Dann ist $\{E_{11}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots E_{2n}, E_{31}, \dots, E_{n1}, \dots E_{nm}\}$ eine Basis von V, genannt die Standardbasis.

Geordnete Basen

Sei V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$ sowie $T = (v_1, \dots, v_n)$ ein Tupel in V.

Ist T linear unabhängig und $(v_1, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V, dann ist T eine **geordnete Basis** von V.

$$\lambda_T : K^n \to V, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} (a_i v_i)$$

T geordnete Basis von $V \Leftrightarrow \lambda_T$ bijektiv

(3.3) <u>Beweis</u>:

(1) $\Rightarrow \lambda_T$ surjektiv $\Leftrightarrow T$ Erzeugendensystem von V

(2) $\Rightarrow \lambda_T$ injektiv $\Leftrightarrow T$ ist linear unabhängig

$\Rightarrow T$ geordnete Basis $\Leftrightarrow T$ Erzeugendensystem von V und T liner unabhängig $\overset{(1) \text{ und } (2)}{\Leftrightarrow} \lambda_T$ surjektiv und λ_T injektiv $\Leftrightarrow \lambda_T$ bijektiv

$\square$

Lemma

Es sei $M \subseteq V$ und $v \in V$ mit $v \notin M$. Dann gelten:

(a) ist $v \in \langle M \rangle$, dann ist $M \cup \{v\}$ linear abhängig

(b) Ist M linear unabhängig und $M \cup \{v\}$ linear abhängig, dann ist $v \in \langle M \rangle$.

(3.4) **Beweis:**

a) $v \in \langle M \rangle \Rightarrow \exists\, v_1, \dots, v_n \in M$ paarweise verschiedene $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} (a_i v_i)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i v_i) - 1v = 0$

$\Rightarrow M \cup \{v\}$ ist linear abhängig, denn $(v_1, \dots, v_n, v)$ ist ein linear abhängiges Tupel in $M \cup \{v\}$ mit paarweise verschiedenen Einträgen (da $v \notin M$)

b) $M \cup \{v\}$ linear abhängig $\Rightarrow \exists\, (v_1, \dots, v_m)$ ein linear abhängiges Tupel in $M \cup \{v\}$ mit paarweise verschiedenen Einträgen $\Rightarrow \exists\, a_1, \dots, a_m \in K$, $(a_1, \dots, a_m) \neq 0$ mit $\sum_{i=1}^{m} (a_i v_i) = 0$. Da M linear unabhängig ist, muss eines der $v_i = v$ sein (sonst M linear abhängig $\lightning$). Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v_m = v$.
Dann ist $a_m \neq 0$, sonst wäre $\sum_{i=1}^{m-1} (a_i v_i) = 0$ eine lineare Abhängigkeit von $(v_1, \dots, v_{m-1})$ und alle $v_i \in M$, $1 \leq i \leq m-1 \Rightarrow v_m = \sum_{i=1}^{m-1} (-(a_m)^{-1} \cdot a_i v_i) \in \langle M \rangle$

$\square$

Satz

Sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(a) M ist Basis von V
(b) M ist ein minimales Erzeugendensystem von V
(c) M ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V

(3.5) **Beweis:**

(a) $\Rightarrow$ (b) $\quad M$ ist Basis $\Rightarrow$ M ist Erzeugendensystem

Angenommen M nicht minimal.
$\Rightarrow \exists v \in M$ mit $M \setminus \{v\}$ Erzeugendensystem
$\overset{(3.4(a))}{\Rightarrow} M = M \setminus \{v\} \cup \{v\}$ linear abhängig $\lightning$, da M linear unabhängig, da M Basis von V ist

(b) $\Rightarrow$ (a) $\quad M$ ist Erzeugendensystem.

Angenommen M ist nicht linear unabhängig
$\Rightarrow$ es existiert ein linear abhängiges Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ aus M mit paarweise verschiedenen Einträgen, aus allen solchen wähle man eines, welches minimal ist. $\Rightarrow \{v_1, \dots v_{n-1}\}$ linear unabhängig, $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear abhängig $\overset{(3.4.(b))}{\Rightarrow} v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ $\subseteq \langle M \rangle \Rightarrow V = \langle M \setminus \{v_n\} \rangle \Rightarrow$ Nicht minimal $\lightning$

(a) $\Rightarrow$ (c) $\quad M$ ist linear unabhängig

Angenommen M sei nicht maximal linear unabhängig.
$\exists v \in V$ mit $M \cup \{v\}$ linear unabhängig
$\overset{(3.4.(a))}{\Rightarrow} v \notin \langle M \rangle \Rightarrow v$ liegt nicht im Erzeugnis von M
$\Rightarrow \langle M \rangle \neq V$ $\lightning$, da M Basis von V ist.

(c) $\Rightarrow$ (a) $\quad$ Sei M Linear unabhängig

Sei $v \in V \setminus M \overset{(3.4(a))}{\Rightarrow} M \cup \{v\}$ linear abhängig
$\overset{(3.4(b))}{\Rightarrow} v \in \langle M \rangle$, für $v \in M \Rightarrow v \in \langle M \rangle$, also $V = \langle M \rangle$

$\square$

Existenz von Basen - Basisauswahlergänzungssatz

Sei V K-Vektorraum, sei $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ linear unabhängig und $\{t_1, \dots, t_p\} \subseteq V$ Erzeugendensystem von V.
Dann existieren $i_1, \dots, i_n \in \underline{p}$ mit $\{v_1, \dots, v_m, t_{i_1}, \dots, t_{i_n}\}$ ist Basis von V

(3.6) **Beweis:**

Sei $M := \{v_1, \dots, v_m\}$, $T := \{t_1, \dots, t_p\}$
$\Rightarrow \langle M \cup T \rangle = V$
Wähle $T' \subset T$ von maximaler Kardinalität, sodass $M \cup T'$ linear unabhängig ist.

Algorithmus zur Bestimmung von T':
1. Nimm $t_i \in T$ hinzu
2. Ist $M \cup \{T'\}$ linear unabhängig?
   $\Rightarrow$ Falls ja behalte t_i, sonst verwirf t_i.

$\Rightarrow (M \cup T') \cup \{t_i\}$ ist linear abhängig $\forall i$ mit $t_i \notin T'$
$\overset{3.4(b)}{\Longrightarrow} t_i \in \langle M \cup T' \rangle \; \forall i \in \{1, \dots, p\}$
$\overset{2.4}{\Longrightarrow} \langle M \cup T' \rangle = V$

$\square$

$\Rightarrow$ Falls $\{v_1, \dots, v_m\} = \emptyset \Rightarrow$ Aus einem Erzeugendensystem kann eine Basis gewählt werden. (Wichtige Erkenntnis, wird im Beweis (4.2) benutzt

Korollar

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann existiert eine endliche Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V.

Basisergänzungssatz

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, und $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann existieren $t_1, \dots, t_n \in V$, sodass $\{v_1, \dots, v_m, t_1, \dots, t_m\}$ eine Basis von V ist.

Basisergänzungssatz $\hat{=}$ Basisauswahlergänzungssatz für ein beliebiges, endliches Erzeugendensystem von V.

Basis bei Untervektorräumen

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, $U \subseteq V$ und $\{u_1, \dots, u_m\}$ Basis von U. Dann existieren $\{v_1, \dots, v_n\} \in V$, sodass $\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

Kardinalität von Basen

Sei V ein K-Vektorraum. Sei $\{v_1 \dots v_m\}$ eine Basis von V mit m Elementen und sei $(w_1 \dots w_n)$ ein Tupel in V. Dann gilt:

Ist $n > m$, dann ist $(w_1 \dots w_n)$ linear abhängig

(4.1) **Beweis:**

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \quad , j = 1,..,n \quad \text{mit } a_{ij} \in K$$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$

Das lineare Gleichungsystem $A \cdot x = 0$ hat eine nicht-triviale Lösung $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^x$ ($n > m \Rightarrow$ Freie Unbekannte).

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j w_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} (a_{ij} \cdot c_j \cdot v_i) \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot c_j) \cdot v_i \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (0 \cdot v_i) = 0$$

$\square$

Korollar

Sei $(v_1 .. v_n)$ ein linear unabhängiger Tupel in V, und $\{w_1, .., w_m\}$ Erzeugendensystem von V. Dann ist $n \leq m$.

(4.2) **Beweis:**

Wähle Basis B mithilfe (3.6) aus dem Erzeugendensystem $B \subseteq \{w_1 .. w_m\}$ und damit $|B| \leq m$. Wäre nun $n > |B|$, dann folgt aus (4.1), dass $(v_1 .. v_n)$ ein linear abhängiges Tupel ist, was aber unserer Annahme widerspricht. Also muss $n \leq |B|$ gelten, und es folgt $n \leq |B| \leq m \Rightarrow n \leq m$

$\square$

Korollar

Seien M und M' Basen von V mit $|M|$ endlich.
Dann folgt M' endlich und $|M| = |M'|$

(4.3) <u>Beweis</u>: Sei $|M| = n$

Angenommen M' nicht endlich, also $|M'| = \infty$.
Wähle man paarweise verschiedene Elemente $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ aus M', muss $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ linear unabhängig sein, da M' eine Basis ist. Aus $|(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})| = n+1$ folgt $n+1 > n = |M|$. Da M eine Basis ist, folgt aus (4.1), dass $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ linear abhängig sein muss, was der Annahme widerspricht.

Sei $M' = \{w_1, \dots, w_m\}$, also $|M'| = m$

1. Man nehme den Tupel $(v_1, \dots, v_n) \in M$ mit paarweise verschiedenen Einträgen. Damit ist $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig. Da M' ein Erzeugendensystem ist, so folgt aus (4.2): $n \leq m$

2. Man nehme den Tupel $(w_1, \dots, w_m) \in M'$ mit paarweise verschiedenen Einträgen. Damit ist $(w_1, \dots, w_m)$ linear unabhängig. Da M ein Erzeugendensystem ist, so folgt aus (4.2): $m \leq n$

Aus $n \leq m$ und $m \leq n$ folgt $m = n$, also $|M| = |M'|$

$\square$

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $M \subseteq V$.
Dann sind äquivalent:

(1.) M Basis von V

(2.) M bzgl. Kardinalität minimales Erzeugendensystem von V

▷ M ist Erzeugendensystem von V

▷ Ist $M' \subseteq V$ und M' Erzeugendensystem von V, dann $|M| \leq |M'|$

↳ Folgt aus (4.1)

(3). M bzgl. Kardinalität maximale Lineare unabhängige Teilmenge

▷ M linear unabhängig

▷ Ist $M' \subseteq V$ linear unabhängig, dann $|M'| \leq |M|$

↳ Folgt aus (4.2)

Siehe (3.5) für die restliche Beweisrichtung

Dimension

Sei V ein K-Vektorraum. Dann definieren wir

V endlichdimensional $:\Leftrightarrow$ es existiert eine endliche Basis von V

$\Leftrightarrow$ V endlich erzeugt

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Dann definieren wir die Dimension von V über K also:

$\dim V = \dim_K V := n$, falls eine endliche Basis mit n Elementen existiert

Beispiele:

▷ $\dim_K(K^n) = n$ mit $n \in \mathbb{N}$

▷ $\dim_K(K^{m \times n}) = m \cdot n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$