Formale Systeme, Automaten und Prozesse Beweise

Justin Korte

Februar 2023

1 Beweise

1.1 Sprachbeweise

Für alle Sprachen K, L, M gilt (Beweise 1.1)

- Assoziativgesetz
  - $(KL)M = K(LM)$
  - $L\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}L = L$
  - $L\emptyset = \emptyset L = \emptyset$
- Distributivgesetz
  - $K(L \cup M) = KL \cup KM$
  - $(K \cup L)M = KM \cup LM$

1.2 Hilfsbeweise

1.2.1 Darstellung eines Wortes im b-adischen System

Sei $w \in \{0, \dots, b\}^*$ und $a \in \{0, \dots, b\}$ Zahlendarstellungen zur Basis b.
Dann gilt $k(wa) = b \cdot k(w) + a$ mit $k(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot b^{n-i}$

Beweis :

Sei $z = z_1 \dots z_{n+1}$ mit $w = z_1 \dots z_n$ und $a = z_{n+1}$.
Daraus folgt:

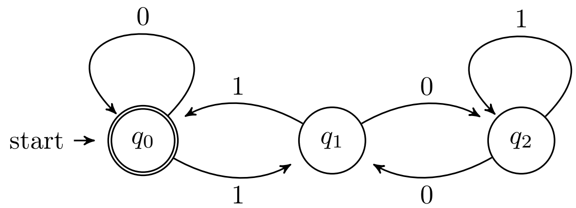
$$\begin{aligned} k(z) &= \sum_{i=1}^{n+1} z_i \cdot b^{n+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (z_i \cdot b^{n+1-i}) + z_{n+1} \cdot b^0 \\ &= b \cdot \sum_{i=1}^{n} (z_i \cdot b^{n-i}) + z_{n+1} \\ &= b \cdot k(z_1 \dots z_n) + z_{n+1} \\ &= b \cdot k(w) + a \end{aligned}$$

□

1.3 Automatenbeweise

1.3.1 Binärautomat mit Teilbarkeit 3

Sei A_2 der folgende Automat:



Dann gilt A_2 akzeptiert $w \in \{0,1\}^* \Leftrightarrow b(w) \equiv 0 \, mod \, 3$

Beweis :

Wir zeigen per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, dass für alle Wörter $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ gilt:
Ist $(r_0, r_1, \dots, r_n)$ ein Lauf von A_2 auf $w \Rightarrow r_n \equiv bin(w) \, mod \, 3$

Induktionsanfang :

Sei n $=$ 0. Dann ist der Lauf von A_2 auf $w = \varepsilon$ demnach (0), und $bin(\varepsilon) = 0 \Rightarrow r_0 \equiv bin(\varepsilon) \, mod \, 3$.

Induktionsvoraussetzung :

Für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $r_n \equiv bin(a_1 \dots a_n) \, mod \, 3$

Induktionsvoraussetzung :

Sei $(r_0, \dots, r_{n+1})$ der Lauf von A_2 auf $w = a_1 \dots a_{n+1}$.
Aus (1.2.1) gilt : $bin(w) = bin(a_1 \dots a_n a_{n+1}) = 2 \cdot bin(a_1 \dots a_n) + a_{n+1}$
Nun gilt mithilfe der Voraussetzung $b(w) = 2 \cdot bin(a_1 \dots a_n) + a_{n+1} \overset{IV}{\equiv} 2 \cdot r_n + a_{n+1} \, mod \, 3$

Nun betrachten wir alle Belegungen von r_n und a_{n+1} :

Fall 1: $r_n = 0, a_{n+1} = 0$

Dann gilt $bin(w) \equiv 2 \cdot r_n + a_{n+1} \, mod \, 3 \equiv 0 \, mod \, 3$ und $\delta(r_n, a_{n+1}) = r_{n+1} \Rightarrow \delta(0,0) = 0$

Fall 2: $r_n = 0, a_{n+1} = 1$

Dann gilt $bin(w) \equiv 2 \cdot r_n + a_{n+1} \, mod \, 3 \equiv 1 \, mod \, 3$ und $\delta(r_n, a_{n+1}) = r_{n+1} \Rightarrow \delta(0,1) = 1$

Fall 3: $r_n = 1, a_{n+1} = 0$

Dann gilt $bin(w) \equiv 2 \cdot r_n + a_{n+1} \, mod \, 3 \equiv 2 \, mod \, 3$ und $\delta(r_n, a_{n+1}) = r_{n+1} \Rightarrow \delta(1,0) = 2$

Fall 4: $r_n = 1, a_{n+1} = 1$

Dann gilt $bin(w) \equiv 2 \cdot r_n + a_{n+1} \, mod \, 3 \equiv 0 \, mod \, 3$ und $\delta(r_n, a_{n+1}) = r_{n+1} \Rightarrow \delta(1,1) = 0$

Fall 5: $r_n = 2, a_{n+1} = 0$

Dann gilt $bin(w) \equiv 2 \cdot r_n + a_{n+1} \, mod \, 3 \equiv 1 \, mod \, 3$ und $\delta(r_n, a_{n+1}) = r_{n+1} \Rightarrow \delta(2,0) = 1$

<u>Fall 6:</u> $r_n = 2, a_{n+1} = 1$

Dann gilt $bin(w) \equiv 2 \cdot r_n + a_{n+1}\, mod\, 3 \equiv 2\, mod\, 3$ und $\delta(r_n, a_{n+1}) = r_{n+1} \Rightarrow \delta(2, 1) = 2$

Damit wurde die Behauptung der Induktion bewiesen. Wenn nun $r_n = 0$ gilt, so befindet sich der Automat in q_0 und akzeptiert. Aus der bewiesenen Induktion folgt nun:

$$A_2 \text{ akzeptiert } w \in \{0,1\}^* \Leftrightarrow r_n = 0 \overset{Ind.}{\Leftrightarrow} bin(w) \equiv 0\, mod\, 3$$

Damit wurde die Behauptung bewiesen.

$\square$