Mathematische Logik

1.1 Aussagenlogik (AL)

=> schwaches logisches System, aber fundamental wichtig (SAT-Solving)

=> Präzise definierte Syntax (Was ist eine/keine Formel?)
=> Präzise definierte Semantik (Bedeutung einer Formel)

Syntax der AL: Menge τ von Aussagenvariablen
z.B.: $\tau = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

atomare Formeln

Formeln:
- $0, 1 \in AL$
- $\tau \subseteq AL$, jede Aussagenvariable ist eine Formel
- $\psi, \varphi \in AL \Rightarrow \neg\psi, (\psi \vee \varphi), (\psi \wedge \varphi), (\psi \rightarrow \varphi) \in AL$

$\tau(\psi)$: Menge der tatsächlich in ψ vorkommenden Aussagenvariablen.

$\tau(\psi)$ ist endlich! $\Phi \subseteq AL$, $\tau(\Phi) = \bigcup_{\varphi \in \Phi} (\tau(\varphi))$

Semantik: Aussagenlogische Interpretation

$\mathfrak{I} : \sigma \rightarrow \{0,1\}$ für $\sigma \subseteq \tau$

$\mathfrak{I}$ ist passend für ψ wenn $\tau(\psi) \subseteq \sigma$
(also jede tatsächliche Aussagenvariable liegt in der Interpretation)

Wenn $\mathcal{J}$ passend für ψ ist, dann ordnet $\mathcal{J}$ der Formel ψ einen Wert $[\![\psi]\!]^{\mathcal{J}} \in \{0,1\}$

(Auswertung von ψ über Interpretation $\mathcal{J}$:= $[\![\psi]\!]^{\mathcal{J}}$)

Regeln:
- $[\![0]\!]^{\mathcal{J}} = 0$, $[\![1]\!]^{\mathcal{J}} = 1$
- $[\![x]\!]^{\mathcal{J}} = \mathcal{J}(x)$
- $[\![\neg\psi]\!]^{\mathcal{J}} = 1 - [\![\psi]\!]^{\mathcal{J}}$
- $[\![\varphi \vee \psi]\!]^{\mathcal{J}} = \max([\![\varphi]\!]^{\mathcal{J}}, [\![\psi]\!]^{\mathcal{J}})$
- $[\![\varphi \wedge \psi]\!]^{\mathcal{J}} = \min([\![\varphi]\!]^{\mathcal{J}}, [\![\psi]\!]^{\mathcal{J}})$
- $[\![\psi \rightarrow \varphi]\!]^{\mathcal{J}} = [\![\neg\psi \vee \varphi]\!]^{\mathcal{J}} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } [\![\psi]\!]^{\mathcal{J}} = 1 \text{ und } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{J}} = 0 \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$

Modell einer Formel ψ

Modell von einer Formel ψ ist eine Interpretation $\mathcal{J}$, sodass $[\![\psi]\!]^{\mathcal{J}} = 1$ ist.

- ▷ ψ heißt erfüllbar, wenn ein Modell von ψ existiert.
- ▷ ψ heißt Tautologie, wenn jede zu ψ passende Interpretation ein Modell von ψ ist.
- ▷ ψ und φ sind äquivalent ($\varphi \equiv \psi$), wenn $[\![\psi]\!]^{\mathcal{J}} = [\![\varphi]\!]$ für jede zu ψ und φ passende Interpretation $\mathcal{J}$.

Algorithmische Probleme

▷ Auswertung: Gegeben: ψ, $\mathcal{J}: \Upsilon(\psi) \rightarrow \{0,1\}$
Problem: Bestimme $[\![\psi]\!]^{\mathcal{J}}$

$\Rightarrow$ effizient algorithmisch lösbar

$\Rightarrow$ Linearer Aufwand, $O(|\Upsilon(\psi)|)$

▷ Erfüllbarkeit: Geg: $\psi \in AL$

Problem: Ist ψ erfüllbar?

Aufwand: $O(2^{|r(\psi)|})$, es gibt 2^n mögliche Interpretationen $J: \{x_1, .., x_n\} \to \{0,1\}$

$\Rightarrow$ NP-vollständig

▷ Gültigkeit: Geg: $\psi \in AL$

Problem: Ist ψ Tautologie?

<u>Lemma</u>: ψ Tautologie $\Leftrightarrow \neg\psi$ ist nicht erfüllbar

$\Rightarrow$ Aufwand: Co-NP-vollständig

▷ Äquivalenz: Geg: $\psi, \varphi \in AL$

Problem: $\psi \equiv \varphi$?

$\psi \equiv \varphi \Leftrightarrow (\neg\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \neg\varphi)$ nicht erfüllbar

$\Leftrightarrow (\psi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$ Tautologie

$\Rightarrow$ Aufwand: Co-NP-vollständig

Wichtige logische Äquivalenzen:

Doppelte Negation
- $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

De Morgan
- $\neg(\psi \wedge \varphi) = (\neg\psi \vee \neg\varphi)$
- $\neg(\psi \vee \varphi) = (\neg\psi \wedge \neg\varphi)$

} Und + Oder = Duale Konzepte
Beides redundant, ersetzbar

Komm. und Ass. von $\vee, \wedge$
- $\psi \wedge \varphi = \varphi \wedge \psi$, $\psi \vee \varphi = \varphi \vee \psi$,

$\psi \wedge (\varphi \wedge \delta) = (\psi \wedge \varphi) \wedge \delta$, $\psi \vee (\varphi \vee \delta) = (\psi \vee \varphi) \vee \delta$

Darstellung von Formeln durch Komm. und Ass. von $\wedge, \vee$

Sei $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.

▷ $\bigwedge \Phi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$

▷ $\bigvee \Phi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$

Frage: $\bigwedge \emptyset$ und $\bigvee \emptyset$ definiert?

▷ Disjunktion ist wann wahr? Mind. eine Formel muss wahr sein

$\Rightarrow \bigvee \emptyset = 0$

▷ Konjunktion ist wann falsch? Mind. eine Formel muss falsch sein

$\Rightarrow \bigwedge \emptyset = 1$

Idempotenz: • $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

Distributiv • $\varphi \vee (\psi \wedge \delta) = (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \delta)$, $\varphi \wedge (\psi \wedge \delta) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \delta)$

Kontraposition • $\psi \rightarrow \varphi \equiv \neg \varphi \rightarrow \neg \psi$

1.2. Boolsche Funktionen und Normalformen

n-Stellige boolsche Funktion: $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$
$B^n := \{f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}\}$, $B^0 := \{0,1\}$

$|B^n| = 2^{2^n}$

Betrachte $\psi(x_1, \dots, x_n)$. Definiere Boolsche Funktion
$h_\psi \in B^n$ mit $h_\psi(w_1, \dots, w_n) = [\![\psi(w_1, \dots, w_n)]\!]$.
$\Rightarrow$ Aussagenlogische Formel beschreibt eine Boolsche Funktion

Satz: Zu jeder Funktion $f \in B^n$ existiert eine Formel $\psi(x_1, \dots, x_n)$ mit $h_\psi = f$

Beweis: Funktionen in $B^0 := \{0,1\} \Leftrightarrow$ Konstanten $0, 1$
Sei $n > 0$ und $f \in B^n$
$\Rightarrow x^1 := x$, $x^0 := \neg x$
Tupel $v = (v_1, \dots, v_n) \in \{0,1\}^n$
$\varphi^v := x_1^{v_1} \wedge \dots \wedge x_n^{v_n}$

Für $v, w \{0,1\}^n$ ist $[\![\varphi^v(w)]\!] = 1 \Leftrightarrow v = w$

f wird dargestellt durch $\psi(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{v \in \{0,1\}^n \\ f(v)=1}} (\varphi^v)$ DNF

Zu zeigen ist: $f(w) = [\![\psi(w)]\!] \ \forall w$
- Sei $f(w) = 1$. Dann ist φ^w ein Disjunktionsglied von ψ. $[\![\varphi^w(w)]\!] = 1$. Also wird $[\![\psi(w)]\!] = 1$

- Sei $f(w) = 0$. Dann gilt $\forall \varphi^w$, die in ψ vorkommen, dass $v \neq w$ und damit $[\![\varphi^v(w)]\!] = 0$, also $[\![\psi(w)]\!] = 0$ $\square$

Disjunktive Normalform (DNF): $\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$
Konjunktive Normalform (KNF): $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$

Literal: Aussagenvariable X_i oder Negation $\neg X_i$

Folgerung: Jede Formel $\psi \in AL$ ist äquivalent zu einer Formel ψ_D in DNF und zu einer Formel ψ_K in KNF

DNF in KNF

$$\neg \psi = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} Y_{ij} \Leftrightarrow \psi = \neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} Y_{ij}\right)$$

$$\text{DeMorgan} \Leftrightarrow \psi = \bigwedge_{i=1}^{n} \neg \bigwedge_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$$
$$\Leftrightarrow \psi = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \neg Y_{ij}$$
$$\Leftrightarrow \psi = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \overline{Y_{ij}}$$

Erfüllbarkeitsproblem: Das Testen ist in DNF einfach, aber die DNF-Form von ψ ist im Worst-case auch exponentiell länger.

Tautologieproblem: Das Testen ist in KNF einfach, aber die KNF-Form von ψ ist im Worst-case auch exponentiell länger.

$\Rightarrow$ In der Formel welche eine boolsche Funktion darstellt, kommen nur $\wedge, \vee, \neg$ vor $(\psi \to \varphi \equiv \neg \psi \vee \varphi)$

$\Rightarrow$ $\{\wedge, \vee, \neg\}$ funktional vollständig, aber minimal?

De Morgan $\Rightarrow$ $\{\wedge, \neg\}$ funktional vollständig $(\psi \vee \varphi \equiv \neg(\neg \psi \wedge \neg \varphi))$

$\Rightarrow$ $\{\vee, \neg\}$ funktional vollständig $(\psi \wedge \varphi \equiv \neg(\neg \psi \vee \neg \varphi))$

Weitere Bsp: (1) $\{\to, \neg\}$ funktional vollständig $(\psi \vee \varphi \equiv \neg \psi \to \varphi)$

(2) $\{\to 0\}$ funktional vollständig $(\neg \psi \equiv \psi \to 0)$

$\oplus$ = xor (3) $\{\wedge, \oplus, 1\}$ funktional vollständig $(\neg \varphi \equiv \varphi \oplus 1)$

$\hookrightarrow$ Boolsche Funktionen $\hat{=}$ Polynome über $\mathbb{F}_2$

(4) $\{|\}$ $U|V = \begin{cases} 0 & U=V=1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ funktional vollständig

$(\neg \psi \equiv (\psi | \psi),\ \psi \wedge \varphi \equiv \neg(\psi | \varphi) \equiv \neg((\psi|\varphi)|(\psi|\varphi)))$

Nicht f.v. 5) $\{\wedge, \vee, \to\}$ nicht funktional vollständig

Betrachte $\psi(x_1, \dots, x_n)$ aus $\wedge, \vee, \to$

Dann gilt $\psi(1, \dots, 1) = 1$

$\Rightarrow$ kann nicht auf 0 abgebildet werden

$\Rightarrow$ Nicht funktional vollständig

1.3 Horn-Formeln

Definition Eine Horn-Formel ist eine Formel
$\psi = \bigwedge_i \bigvee_j Y_{ij}$ in KNF, sodass in jeder Disjunktion höchstens
positiv ist (x_i positiv, $\overline{x_i}$ negativ)

Horn-Formeln können als Konjugation von Implikationen geschrieben werden:

(1) $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \ldots \vee \neg x_k \vee x \equiv x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \to x$

(2) $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \ldots \vee \neg x_k \equiv x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \to 0$

Bei $k = 0$: $1 \to x$

▷ ψ Horn-Formel ohne Implikation $1 \to x$ ist erfüllbar durch J mit $J(x) = 0 \ \forall x$

▷ ψ Horn-Formel ohe Implikation 2 ist erfüllbar durch J mit $J(x) = 1 \ \forall x$

Bsp: $(x_1 \wedge x_2 \to x_3) \wedge (x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \to x_6)$
$\wedge (x_3 \to x_5) \wedge (x_6 \to 0) \wedge (1 \to x_1) \wedge (1 \to x_4)$

$\Rightarrow (1 \to x) \Rightarrow x$ ist wahr (Markierungsalgorithmus)

1. Iteration 2. Iteration 3. Iteration 4. Iteration
5. Iteration $\Rightarrow$ Widerspruch: x_6 muss wahr sein,
aber $x_6 \to 0$ impliziert falsch $\Rightarrow$ unerfüllbar

Bsp: $(X_1 \wedge X_2 \to X_3) \wedge (X_1 \to X_2) \wedge (X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \wedge X_5 \to X) \wedge (X_3 \to X_5) \wedge (X_6 \to 0) \wedge (1 \to X_1) \wedge (1 \to X_4)$

$\Rightarrow (1 \to X) \Rightarrow X$ ist wahr (Markierungsalgorithmus)

1. Iteration 2. Iteration 3. Iteration 4. Iteration 5. Iteration

$\Rightarrow$ Menge M an Variablen, die wahr sein müssen.

$\Rightarrow$ Interpretation $I_M(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in M \\ 0 & \text{wenn } x \notin M \end{cases}$ heißt

minimales Modell von φ.

▷ Minimales Modell: $\forall \mathcal{J}$ mit $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{J}}$ gilt: $\mathcal{J}_M(x) \leq \mathcal{J}(x)$

Folgerung: Jede erfüllbare Horn-Formel hat ein minimales Modell.

Bemerkung: $X_1 \vee X_2$ hat kein minimales Modell.

Wenn φ m Aussagenvariablen enthält, dann terminiert der Markierungsalgorithmus nach höchstens n+1 Iterationen der Schleife welche die rechten Seiten der Implikationen markiert.

$\Rightarrow$ linear lösbar, algorithmisch effizient (wichtig!) 1.4. Kompaktheitssatz der Aussagenlogik

Sei $\Phi \subseteq AL$ Formelmenge, $\mathfrak{I}$ ist Modell von Φ wenn $\mathfrak{I}$ Modell ist für alle $\varphi \in \Phi$

Folgerungsbeziehung: $\Phi \subseteq AL$, $\psi \in AL$

ψ folgt aus Φ ($\Phi \models \psi$) wenn jede zu $\Phi \cup \{\psi\}$ passende Interpretation welche Modell von Φ ist, auch Modell von ψ ist.

Bemerkung: $\Phi \models \psi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar

- $\{\psi, \psi \rightarrow \varphi\} \models \varphi$
- $\Phi \cup \{\psi\} \models \varphi$ und $\Phi \cup \{\neg\psi\} \models \varphi \Rightarrow \Phi \Rightarrow \varphi$
- $\emptyset \models \psi \Leftrightarrow \psi$ Tautologie
- $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \subseteq \Phi' \Rightarrow \Phi' \models \varphi$

Kompaktheitssatz: Sei $\Phi \subseteq AL$, $\psi \in AL$

(1) Φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar
(2) $\Phi \models \psi \Leftrightarrow$ es ex. eine Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \psi$

Beweis (1) "$\Rightarrow$" Folgt aus Definition
(2) "$\Leftarrow$" Folgt aus Definition

(2) folgt aus (1). Annahme: $\Phi \models \psi$ und für alle endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gilt $\Phi_0 \not\models \psi$.
$\Rightarrow \Phi_0 \cup \{\neg\psi\}$ erfüllbar

Also folgt, dass jede endliche Teilmenge von $\Phi \cup \{\neg \Psi\}$
Nach (1) folgt, dass $\Phi \cup \{\neg \Psi\}$ erfüllbar ist, also
$\Phi \nvDash \psi$ ↯
=> Annahme falsch => (2) folgt aus (1)

Beweisprinzip: __Lemma von Zorn__

Sei $(A, <)$ eine partielle Ordnung, in der jede Kette eine obere Schranke in A besitzt. Dann hat die Ordnung ein maximales Element.

Gegenbsp.: $(P_{fin}(\mathbb{N}), \subsetneq)$, $P_{fin}(\mathbb{N}) = \{a \subseteq \mathbb{N}, a \text{ endlich}\}$ hat kein maximales Element. Kette: $\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \ldots\}$ => keine obere Schranke.

Notiz: Beweisprinzip für LA: Jeder Vektorraum (auch unendlicher Dimension) besitzt eine Basis

Sei $A := \{\Psi \subseteq AL : \Psi \supseteq \Phi$, jede endliche Teilmenge von Ψ ist erfüllbar$\}$
Mit Ordnungsrelation $(\subsetneq)$, $\Phi \in A \neq \emptyset$

Z.z. Jede Kette $K \subseteq A$ hat eine obere Schranke, $\Gamma(K)$
K ist eine Menge von Teilmengen $\Psi \in A$, sodass für $\Psi_1, \Psi_2 \in K$ einsetze $\Psi_1 \subseteq \Psi_2$ oder $\Psi_2 \subseteq \Psi_1$ gilt:
$\Gamma(K) = \bigcup \{\Psi, \Psi \in K\}$ ist eine obere Schranke für K. Ist $\Gamma(K) \in A$? Ist jede endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma(K)$ erfüllbar?: $\Gamma_0 = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$. Zu jede $\gamma_i \in \Gamma_0$ ex. $\Psi_i \in K$, sodass $\gamma_i \in \Psi_i$.

Die Ψ_i kommen aus einer Kette, sind also lineargeordnet: $\Psi_{i_1} \subseteq \Psi_2 \subseteq \ldots \subseteq \Psi_{ik}$ mit $\gamma_{in} \in \Psi_{in}$. Daraus folgt, dass $\Gamma_0 \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \subseteq \Psi_{ik} \in A$. Also ist Γ_0 erfüllbar.
$\Rightarrow \Gamma(K) \in A$. Also sind die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas für $(A, \subsetneq)$ erfüllt. Daraus folgt, dass A ein maximales Element Ψ_{max} hat.

Beh: Für jede Formel $\varphi \in AL$ gilt: $\varphi \in \Psi_{max}$ oder $\neg\varphi \in \Psi_{max}$

Widerspruchsbeweis: Sei $\Psi_{max} \subsetneq \Psi_{max} \cup \{\varphi\}$ $\wedge$ $\Psi_{max} \subsetneq \Psi_{max} \cup \{\neg\varphi\}$
$\Psi_{max} \in A$, aber $\Psi_{max} \cup \{\varphi\} \notin A$ und $\Psi_{max} \cup \{\neg\varphi\} \notin A$.
$\Rightarrow$ Es existieren endliche, unerfüllbare Teilmengen $\Psi_1 \cup \{\varphi\}$ und $\Psi_2 \cup \{\neg\varphi\}$ mit $\Psi_1, \Psi_2 \subseteq \Psi_{max}$. Damit ist aber $\Psi_1 \cup \Psi_2$ unerfüllbare endliche Teilmenge von Ψ_{max}.
Da aber jede endliche Teilmenge von Ψ_{max} erfüllbar ist, folgt ein Widerspruch: $\lightning$

Interpretation $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{J}(X) \begin{cases} 1 & X \in \Psi_{max} \\ 0 & \neg X \in \Psi_{max} \end{cases}$

Beh. $\mathfrak{J}$ ist Modell von $\psi \in AL \Leftrightarrow \psi \in \Psi_{max}$.
Insbesondere ist $\mathfrak{J}$ Modell von Ψ_{max}

Beweis Induktion

- ψ atomar $\Rightarrow$ unmittelbar aus Definition von $\mathfrak{J}$
- $\psi := \neg\varphi$, $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{J}} = 1 \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{J}} = 0 \overset{IV}{\Leftrightarrow} \varphi \notin \Psi_{max}$ $\Leftrightarrow \psi \in \Psi_{max}$
- $\psi = \varphi \wedge \vartheta \overset{IV.}{\Rightarrow} [\![\psi]\!]^{\mathfrak{J}} = 1 \Leftrightarrow \varphi \in \Psi_{max}$ und $\vartheta \in \Psi_{max}$
  Das gilt genau dann wenn $\psi \in \Psi_{max}$. Wäre $\psi \notin \Psi_{max}$, dann ist $\neg\psi \in \Psi_{max}$. Wenn $\{\varphi, \vartheta\} \subseteq \Psi_{max}$, dann ist $\{\varphi, \vartheta, \neg\psi\}$ eine unerfüllbare Teilmenge von Ψ_{max} $\lightning$

Wenn aber $\psi \in \Psi_{max}$, dann müssen auch φ und ϑ in Ψ_{max} sein, denn sonst $\{\psi, \neg\varphi\}$ oder $\{\psi, \neg\vartheta\}$ endliche, unerfüllbare Teilmengen von Ψ_{max}. $\lightning$

Damit wurde gezeigt: $\mathfrak{J}$ ist Modell von $\Psi_{max} \supseteq \Phi$ und damit ist Φ erfüllbar

$\square$