Blatt 0 - Angewandte Stochastik - Justin Korte

Aufgabe W 1

(a) Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Aussagen. Zeigen Sie die folgende Behauptung mittels einer Wahrheitstafel:

$$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A} \Longleftrightarrow \neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}.$$

(b) Gegeben seien Teilmengen A, B der Grundmenge Ω, also $A \subseteq \Omega$ und $B \subseteq \Omega$. Dann bezeichnen

$$A\backslash B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \text{ und } \omega \notin B\}$$

das *Differenzereignis* von A und B und

$$B^c = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \notin B\} = \Omega\backslash B$$

das *Komplementärereignis* von B *(in Ω)*. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Mengen - Gleichungen:

(1) $A\backslash B = A \cap B^c$

(2) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$,

a)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B) \wedge A$	$\neg B$	$\neg B \wedge A$	$\neg(A \wedge B) \wedge A \Leftrightarrow \neg B \wedge A$
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Also $(\neg(A \wedge B) \wedge A \Leftrightarrow \neg B \wedge A) \equiv 1 \Rightarrow \neg(A \wedge B) \wedge A \Leftrightarrow \neg B \wedge A$

b) (1) Sei $x \in A \setminus B$, dann folgt:

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ und $x \notin B$

$\Leftrightarrow (x \in A)$ und $(x \in B^c)$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B^c$

(2) Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$. Daraus folgt:

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \Leftrightarrow x \in (A \cap B)$ oder $x \in (A \cap B^c)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B^c)$

Wir betrachten 2 Fälle:

1. Fall: $x \in B$: Dann ist $x \in B$ wahr und $x \in B^c$ falsch.

$\Rightarrow (x \in A \wedge 1) \vee (x \in A \wedge 0) \Leftrightarrow x \in A$

2. Fall: $x \in B^c$: Dann ist $x \in B$ falsch und $x \in B^c$ wahr.

$\Rightarrow (x \in A \wedge 0) \vee (x \in A \wedge 1) \Leftrightarrow x \in A$

Daraus folgt $x \in (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \Leftrightarrow x \in A$, also $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$

Aufgabe W 2

Entscheiden und begründen Sie, welche der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt bzw. (streng) monoton ist. Untersuchen Sie die Folgen ebenfalls auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{-1}$

(b) $a_n = \frac{9+n}{n^2+1}$

(a) $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}\right) = \lim_{n\to\infty}(n) = \infty$, also divergent.

$\Rightarrow a_n$ ist unbeschränkt, da $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$ und $\lim_{n\to-\infty}(a_n) = -\infty$ ist. a_n ist streng monoton steigend, da $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ mit $x_2 > x_1 \Rightarrow a_{x_2} = x_2 > x_1 = a_{x_1}$, also $a_{x_2} > a_{x_1}$ gilt.

(b) $a_n = \frac{9+n}{n^2+1} = \frac{n^2\left(\frac{9}{n^2} + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\frac{9}{n^2} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{\text{GWS}} \frac{0}{1} = 1$

a_n besitzt Grenzwert $\Leftrightarrow$ a_n von oben beschränkt und monoton steigend oder a_n von unten beschränkt und monoton fallend.

a_n von unten durch 0 und oben durch 9 $(0 \in \mathbb{N})$ beschränkt. a_n ist nicht streng monoton steigend:

Für $n = 0$ gilt: $a_0 = 9 > 5 = a_{n+1}$

Aufgabe W 3

(a) Untersuchen Sie die nachstehend definierte Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad n \in \mathbb{N}$$

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k - 2}{5^k} \right).$$

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2} - 1$$

$$\overset{n\to\infty}{=} \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} - 1$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3^k - 2}{5^k} \right) \right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3^k}{5^k} \right) \right) - 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5^k} \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{5}\right)^k \right) - 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k \right)$$

$$= -1 + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{5}\right)^k \right)} + 2 - 2 \cdot \lim \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} + 2 - 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}}$$

$$= -1 + \frac{5}{2} + 2 - \frac{10}{4} = -1 + \frac{50}{20} + 2 - \frac{50}{20}$$

$$= 1$$

Aufgabe W 4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_1^{e^2} x^4 \ln(x)\, dx$$

(b)

$$\int_{-2}^{2} x^2 e^{x^3}\, dx$$

(c)

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}\, dx, \quad k > 0$$

(a) $\int_1^{e^2} x^4 \cdot \ln(x)\, dx = \left[\frac{1}{5}x^5 \cdot \ln(x)\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{5}x^5 \cdot \frac{1}{x}\right) dx$

$= \left(\frac{1}{5}e^{10} \cdot \ln(e^2)\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \ln(1)\right) - \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{5}x^4\right) dx$

$= \frac{1}{5} \cdot e^{10} \cdot \underbrace{\ln(e^2)}_{2} - \left(\frac{1}{5} \cdot \underbrace{\ln(1)}_{0}\right) - \left[\frac{1}{25}x^5\right]_1^{e^2}$

$= \frac{2}{5}e^{10} - \left(\frac{1}{25}e^{10} - \frac{1}{25} \cdot 1\right)$

$= \frac{10}{25}e^{10} - \frac{1}{25}e^{10} + \frac{1}{25}$

$= \frac{9}{25}e^{10} + \frac{1}{25} = \frac{1}{25}\left(9e^{10} + 1\right) \approx 7929{,}568$

$\int_{-2}^{2} \left(x^2 \cdot e^{x^3}\right) dx \overset{*}{=} \int_{-8}^{8} e^u \cdot x^2 \cdot \frac{1}{3x^2}\, du$

$* \;$ Sei $u := x^3$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$

$\Rightarrow \frac{1}{3x^2}\, du = dx$

$= \frac{1}{3} \cdot \int_{-8}^{8} e^u\, du$

$= \frac{1}{3}\left[e^u\right]_{-8}^{8}$

$= \frac{1}{3}\left(e^8 - e^{-8}\right) \approx 993{,}65$

c) $\int_0^{\infty} \left(e^{-kx}\right) dx$ mit $k > 0$

$= \lim_{b \to \infty} \int_0^b \left(e^{-kx}\right) dx$

$= \left[-\frac{1}{k} \cdot e^{-kx}\right]_0^b$

$= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{k} \cdot e^{-bx}\right) - \left(-\frac{1}{k} \cdot e^{-0}\right)$

$= -\frac{1}{k} \cdot \lim_{b \to \infty} \left(e^{-bx}\right) + \frac{1}{k}$

$\overset{b \to \infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{k} \cdot 0 + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$