Afi Tutorium 2022/23
Tutorium Justin Korte
28. Januar 2023

Probeklausur

Aufgabe 1 (Induktion)

Zeige per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$$

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen)

a) Bestimmen Sie die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen

i) $z^2 + 2z + 2 = 0$

ii) $z^4 - 2z^2 = -4$

b) Skizziere die Menge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

$$|z+2|^2 > |z-2i|^2 + 1$$

Aufgabe 3 (Folgen)

a) Untersuche folgende Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenfalls ihren Grenzwert:

i) $a_n - \frac{2n^3-n^2-n+1}{3n^3-1}$

ii) $b_n - \frac{2n^2-n}{3n^2}$

b) Bestimme den Grenzwert der folgenden Folge:

$$a_n = \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$$

Aufgabe 4 (Reihen)

a) Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und berechne gegebenfalls den Grenzwert:

i)$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{7^k}$

ii)$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k}$

iii)$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!}$

Aufgabe 5 (Stetigkeit)

a) Zeige, dass die Funktion $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$ in $x_0 = 0$ stetig ist. Gib den Grenzwert bei $x_0 = 0$ an.

b) Zeigen Sie mithilfe des $\varepsilon - \delta$-Kriteriums, dass die folgenden Funktionen stetig in den angegebenen Definitionsbereichen sind:

i) $f(x) = x, \quad x \in \mathbb{R},$

ii) $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty)$

Aufgabe 6 (Differentialrechnung)

Betrachte die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2$

a) Berechne die Nullstellen von f

b) Bestimme die erste und zweite Ableitung und diskutiere, ob diese stetig und damit f und f' total differenzierbar sind.

c) Bestimme die Extrema und gib an, ob es sich hierbei um ein Maxima oder ein Minima handelt.

Aufgabe 7 (Integralrechnung)

Berechne folgende Integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin(x))^3 \cdot cos(x)dx$

b) $\int_1^e x^2 \cdot \ln(x)dx$

c) $\int_0^1 x^2 \cdot sin(\pi \cdot x)dx$

Aufgabe 8 (Mehrdimensionale Analysis)

a) Bestimme die Jacobi-Matrix zu folgenden Funktionen:

i) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x+y \\ x^2 z \end{pmatrix}$

ii) $f(x, y) = x \cdot y^2 + y \cdot e^{-xy}$

b) Ermittele die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y) = x^2 y^3$ im Punkt $(1, -2)$ in Richtung r $= \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9 (Anfangswertproblem)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = e^y \cdot sin(x), \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$$