Afi Zusammenfassung

Justin Korte

November 2022

1 Mengen-Algebra

Vereinigung: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Durchschnitt: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Differenz: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Teilmenge: $A \subset B = \{x \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}$
Äquivalenz : $A = B = \{x \mid A \subset B \wedge B \subset A\}$

Definition:

- Die Mengen A und B heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt (Haben keine gemeinsamen Elemente)
- Für $A \subset B$ ist das Komplement definiert durch $A^C = B \setminus A$
- Die Mächtigkeit einer Menge A bezeichnet die Anzahl der Elemente in A. Man schreibt $|A|$.

2 Kartesisches Produkt

Für zwei Mengen A,B heißt die Menge $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ (Paar) das kartesische Produkt.

-Die Reihenfolge ist hierbei wichtig: (a,b) $\neq$ (b,a).
-Analog heißt (a,b,c) Tripel oder (a,b,..,n) ein n-Tupel.

3 Relation

Eine beliebige Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$ heißt Relation zwischen A und B.
Für $R \subset A \times B$ schreibt man xRy , d.h x steht in Relation zu y.
Für A = B ist R eine Relation in A.

4 Abbildungen

Für zwei Mengen A,B heißt die Relation $f \subset A \times B$ Abbildung oder Funktion von A nach B, falls gilt: Jedem $x \in A$ wird genau ein $y \in B$ zugeordnet.
A heißt Definitionsbereich und B heißt Bildbereich/Zielbereich

- In jeder Zeile des kartesischen Produkts muss also mindestens ein Pärchen markiert werden (sonst wird nicht jedes x abgebildet)
- Die Funktion wird geschrieben als $f : A \to B, x \to f(x)$
-Im Gegensatz zum Bildbereich ist der Wertebereich $W_f \subset B$ gegeben durch $W_f = \{y \in B \mid$ es existiert ein $x \in A$ mit $f(x) = y\} =:$ Image(f).
- Die Paare $\{x, f(x) \in A \times B \mid x \in A\}$ (also die Relation) heißt Graph von f.
-f bezeichnet die Operation bzw. den Vorgang/Prozess der Abbildung, nicht den Wert/Resultat.
- Die Identität $f : A \to A, x \to f(x) = x$ bezeichnet man als $f = id$.
- Für $f : A \to B$ und $M \subset A$ heißt die Menge $f(M) := \{y \in B \mid \exists x \in M$ mit $f(x) = y\}$ das Bild von f.
- Für $N \subset B$ heißt die Menge $f^{-1}(N) = \{x \in A \mid f(x) \in N\}$ das Urbild von N /Umkehrfunktion von f.

5 Surjektivität, Injektivität, Bijektivität

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann heißt f:

1.) surjektiv, falls für alle $y \in B \quad f^{-1}(y)$ mind. ein Element enthält (Jedes y hat mindestens ein Element aus A als Ursprungsbild)
2.) injektiv, falls für alle $y \in B \quad f^{-1}(y)$ höchstens ein Element enthält (Jedes y hat höchstens ein Element aus A als Ursprungsbild)
3.) bijektiv, falls für alle $y \in B \quad f^{-1}(y)$ genau ein Element enthält (Jedes y hat genau ein Element aus A als Ursprungsbild)

- 1.) $\Leftrightarrow Bild(f) = B$
- 2.) $\Leftrightarrow$ Aus $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$
- 3.) $\Leftrightarrow$ injektiv $\wedge$ surjektiv

6 Komposition

Für $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ heißt die Abbildung $h := g \circ f : X \to Z, x \to h(x) = g(f(x))$ die Komposition, Hintereinanderausführung oder Verknüpfung von f und g.

-Die Verknüpfung ist nicht kommutativ, aber assoziativ. $((f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3))$

7 Umkehrfunktionen

Eine bijektive Funktion $f : X \to Y$ lässt sich umkehren, d.h es existiert eine Funktion $f^{-1} : Y \to X$ (auch bijektiv), sodass gilt:
$f \circ f^{-1} = id_y$ bzw. $f^{-1} \circ f = id_x$

Beweisformen

7.1 Direkter Beweis

Beim direkten Beweis wird aus den Satzvoraussetzungen die Satzaussage direkt hergeleitet.

7.2 Indirekter Beweis

Auch Beweis durch Widerspruch/Kontraposition genannt, zeigt man, dass wenn man das Gegenteil der Aussage A(n), also $\neg A(n)$ annimmt, und man durch diese Gegenaussage einen Widerspruch kreieren kann, dass dann die Aussage falsch ist, also das Gegenteil wahr sein muss, also $\neg(\neg A(n)) = A(n)$ wahr ist.

7.3 Beweis durch vollständige Induktion

Allgemeines Vorgehen bei vollständiger Induktion:

- Zu beweisen: Aussage A(n) für alle $n \in \mathbb{N}$ - Induktionsanfang: Zeige, dass A(n) für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt - Induktionsvoraussetzung: Es gilt A(n) - Induktionsschritt Folgerung durch Umformung, dass auch A(n+1) gilt.

8 Zahlenmengen

8.1 Überblick

Idee:

Man hat eine Anfangsmenge N. Diese bildet gegenüber bestimmten Operationen keine Gruppe (Natürliche Zahlen beispielsweise besitzen kein Inverses, da diese negativ sind und somit außerhalb von N liegen). Somit definiert man eine Menge M, sodass M einen Körper bezüglich dieser Operationen bildet (Ganze Zahlen besitzen ein Inverses, was in den ganzen Zahlen liegt). Jedoch gehen hierbei Eigenschaften der Gruppe verloren (Bei N ist es die Eigenschaft der "kleinsten Zahl" 1, die durch die Erweiterung auf Z beispielsweise verloren geht, somit gilt auf Z keine vollständige Induktion).

$$\underset{NatrlicheZahlen}{\mathbb{N}} \underset{+/-}{\to} \underset{GanzeZahlen}{\mathbb{Z}} \underset{\cdot/\boldsymbol{\nabla}\cdot}{\to} \underset{RationaleZahlen}{\mathbb{Q}} \underset{Vollstndigkeit}{\to} \underset{ReelleZahlen}{\mathbb{R}}$$

8.2 Die natürlichen Zahlen

Die wichtigste Menge der Mathematik ist die Menge der natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$).

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

- Für $\mathbb{N} \cup \{0\}$ schreiben wir $\mathbb{N}_0$.
- $\mathbb{N}$ lässt sich axiomatisch definieren oder aus den reellen Zahlen herleiten.
- Die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ ist $|\mathbb{N}| = \infty$
- Die natürliche Zahlen erlauben Beweise durch Induktion

8.3 Die reellen Zahlen

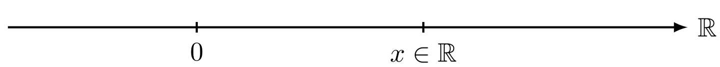
Für eine Menge R seien folgende Mengen erfüllt:

- Es gibt zwei Verknüpfungen $(+, \cdot\,)$ und R bildet bezüglich dieser einen Körper
- Es gibt eine Ordnungsrelation "$\leq$" ist auf R verträglich mit $+$ und $\cdot$, d.h für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:
1.) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
2.) $0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ (Ordnungsaxiom)
- Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset R$ besitzt eine kleinste obere Schranke $s \in R$ (Vollständigkeitsaxiom).

Dann heißt R reeller Zahlenkörper.

Daraus ergeben sich folgende Tatsachen:

a) $\mathbb{R}$ ist durch die Axiome eindeutig definiert.
b) Wegen der Ordnungsrelation ist $\mathbb{R}$ als Zahlengerade vorstellbar



c) aus $\leq$ leiten wir $<, \geq, >$ her

d) aus c) können nun offene und geschlossene Intervalle definiert werden:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}$$
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \subset \mathbb{R}$$

8.4 Komplexe Zahlen

8.4.1 Idee

Die Gleichung $x^2 = -1$ enthält keine Lösung für ein $x \in \mathbb{R}$, da die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ keine negativen Zahlen als Ergebnis enthält. Nun überlegt man sich, ob ein Körper existiert, der trotzdem diese Gleichung lösen kann. Die Idee baut darauf auf, dass man auch einen Tupel definieren kann mit einer multiplikativen Verknüpfung, sodass diese doch auch negative Zahlen abbilden kann.

8.4.2 Definition

Für die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiere man die Verknüpfungen

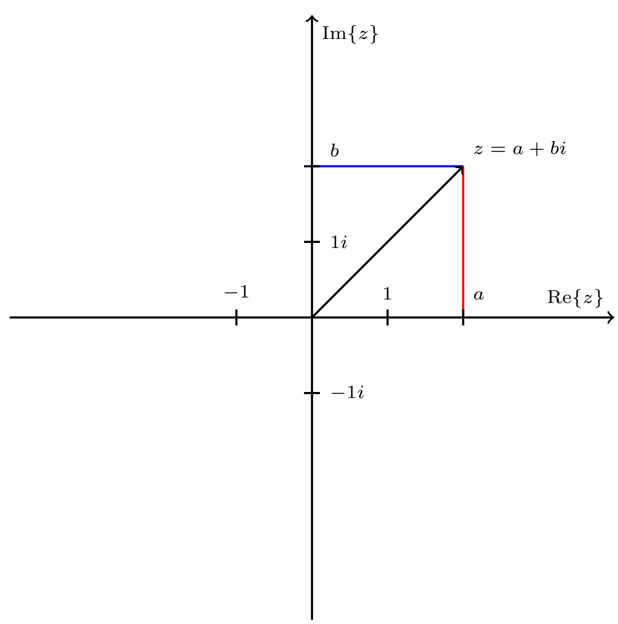
$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Damit existieren inverse Elemente zu $+$ und $\cdot$.

- Diese Menge wird als die Mengen alle komplexe Zahlen bezeichnet ($\mathbb{C}$).
- Für ein $a \in \mathbb{R}$ existiert der Tupel $(a, 0) \in \mathbb{C}$, somit liegt jede reelle Zahl auch in den komplexen Zahlen.
-Mit (0,1) gilt : $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0, 1)^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$
Also existiert eine komplexe Zahl z, sodass $z^2 = -1$ gilt.
$(0, 1) := i \in \mathbb{C}$ heißt dann imaginäre Einheit und es gilt $i^2 = -1$.

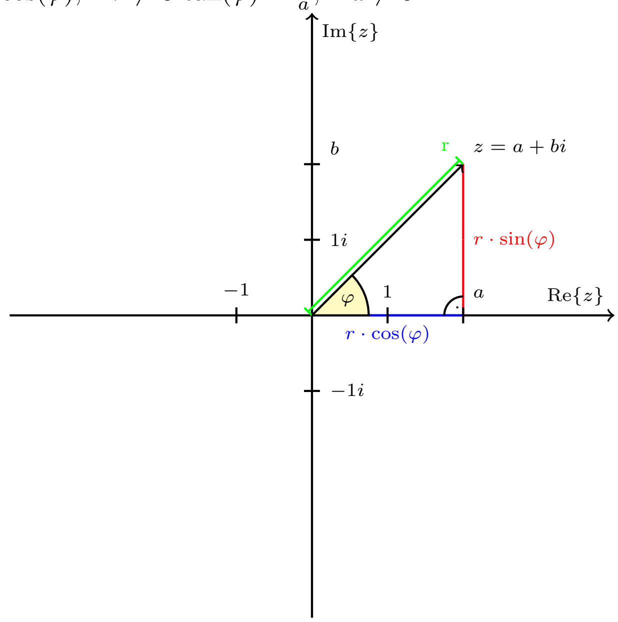
8.4.3 Darstellung

Man definiert für das Tupel $(a, b) \in \mathbb{C} \quad (a, b) := a + b \cdot i, \quad a, b \in \mathbb{R}$.
a heißt dann Realteil, b Imaginärteil der komplexen Zahl. $(Re(z) = a, \quad Im(z) = b)$ Dieser lässt sich als Punkt in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



8.4.4 Polarkoordinatenform

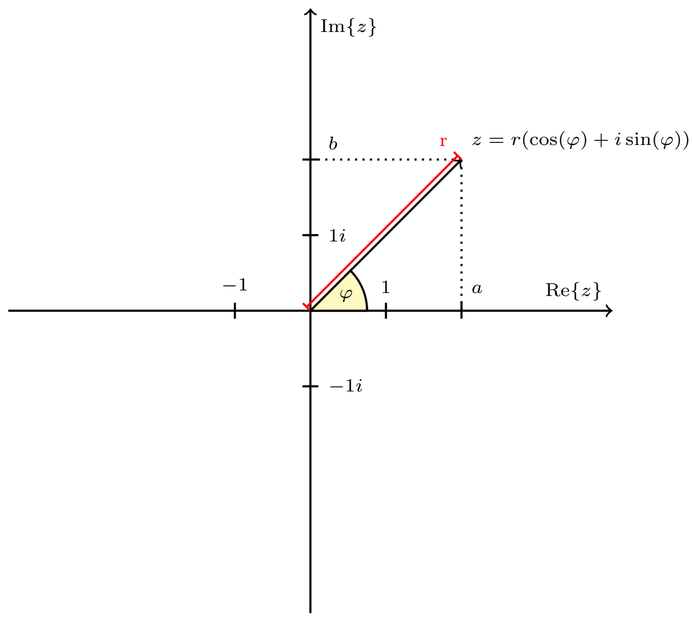
Da wir in der komplexen Zahlenebene ein rechtwinkliges Dreieck aufspannen, kann der Betrag auch mithilfe des Satzes von Pythagoras geometrisch verstanden werden. Es gilt $r^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$. In einem rechtwinkligen Dreieck gelten auch die trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus und Tangens wie folgt: $\sin(\varphi) = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r \cdot \sin(\varphi), \quad r \neq 0$ $\cos(\varphi) = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r \cdot \cos(\varphi), \quad r \neq 0$ $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0$



Dadurch können wir eine komplexe Zahl nur mit ihrem Betrag und Winkel anstatt ihrem Real- und Imaginärteil darstellen. Es gilt:

$$z = a + bi = r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi)i = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Diese Darstellung heißt Polarkoordinatenform



8.4.5 Komplexe Exponentialfunktion:

Es gilt:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Mit

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}), \quad \cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

8.4.6 Satz von Moivre

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

8.4.7 Eigenschaften

- Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a+bi$ ist ihre komplexe Konjugante $\bar{z} = a-bi$ definiert. - Für $z \in \mathbb{C}$ ist der Absolutbetrag definiert durch $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$ - Es gilt die Dreiecksungleichung $|z+w| \leq |z| + |w| \quad z, w \in \mathbb{C}$ - $Re(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \quad Im(z) = \frac{1}{2}(z-\bar{z})$

8.5 Abzählbarkeit

Aus der Mächtigkeit von Mengen mit Anwendung auf Zahlenmengen wird wiefolgt definiert:

- Zwei Mengen A, B heißen gleichmächtig, falls es eine bijektive Abbildung gibt mit $f : A \rightarrow B$.
- Eine Menge heßt abzählbar unendlich, falls sie gleichmächtug zu $\mathbb{N}$ ist.

1.) $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich
2.) $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar unendlich, sie ist überabzählbar unendlich

9 Polynome

9.1 Definition

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ ist p : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \rightarrow p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ ein Polynom, n heißt Grad des Polynoms für $a_n \neq 0$. Ein $x_0 \in \mathbb{C}$ mit p(x_0) = 0 heißt Nullstelle des Polynoms an der Stelle $x = x_0$

9.2 Linearfaktordarstellung

Sei p ein Polynom vom Grad n und k Nullstellen $x_1, x_2, ..., x_n (k \leq n)$. Dann kann p als Produkt von Linearfaktoren dargestellt werden:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)q(x)$$

wobei q(x) ein Polynom mit Grad n-k ist.

9.3 Fundamentalsatz der Algebra

Für jedes nichtkonstante Polynom p (mindestens von Grad 1) existiert mindestens eine komplexe Nullstelle.. Jedes Polynom vom Grad n enthält genau n komplexe Nullstellen. Falls p nur reelle Koeffizienten hat, dann treten Nullstellen in komplex konjugierten Paaren auf, d.h für die Nullstelle z = a+bi existiert das Paar z = a-bi, dass auch eine Nullstelle des Polynoms ist.

10 Folgen und Reihen

10.1 Folgen

10.1.1 Definition

Folgen sind Abbildungen der Form $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Statt a(n) notiert man a_n , statt n dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Alle $a_n, n \in \mathbb{N}$ werden als Folgeglieder bezeichnet.

10.1.2 Grenzwert

Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ besitzt den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, falls $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ (Also dass wir eine beliebige Eingrenzung/ Genauigkeit erreichen können für jede Folgenglied).

Man schreibt dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und die Folge heißt konvergent. Existiert kein reeller Grenzwert, so ist die Folge divergent.

10.1.3 Monotonie

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{R}$.
Analog heißt eine reelle Folge monoton fallend, falls $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{R}$

10.1.4 Beschränktheit

Eine Folge $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls ein Supremum S $\in \mathbb{R}$ existiert mit S ≥ 0 gibt mit $|a_n| \leq S \quad \forall n \in \mathbb{R}$.

Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.Aber Beschränktheit ist nicht hinreichend für Konvergenz. Falls aber eine reelle Folge monoton wachsend als auch beschränkt ist, so ist diese konvergent.

10.1.5 Cauchy-Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \leq n_\varepsilon, m > n$$

Daraus folgt, dass a_n genau dann konvergent ist, wenn a_n eine Cauchy-Folge ist. Über Cauchy-Folgen können die reellen Zahlen definiert werden, da jede reelle Zahl durch eine Cauchy-Folge darstellbar ist.

10.1.6 Operation auf Folgen

Für 2 konvergente Folgen $(a_n), (b_n)$ mit Grenzwert a,b und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$- \lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) + \lim_{n\to\infty} (\beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} (a_n) + \beta \lim_{n\to\infty} (b_n) = \alpha a + \beta b$$

$$- \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} (b_n) = a \cdot b$$

$$- \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$$

10.2 Reihen

10.2.1 Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Die zugeordnete Reihe ist durch die Folge der Partialsummen S_n mit $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ definiert. Der Grenzwert dieser Reihe ist somit $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

10.2.2 Konvergenz von Reihen

Für Konvergenz gelten folgende Punkte:

1,) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ muss eine Nullfolge sein, also $\lim_{n\to\infty} a_k = 0$.
2.) Ist für $a_k > 0$ $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ monoton wachsend, dann gilt $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (S_n)$ konvergiert.

10.2.3 Operation auf Reihen

Aus $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ mit Grenzwert a,b und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$-\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_n) + \sum_{k=1}^{\infty}(\beta b_n) = \alpha\sum_{k=1}^{\infty}(a_n) + \beta\sum_{k=1}^{\infty}(b_n) = \alpha a + \beta b$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cdot b_n) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_n) \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(b_n) = a \cdot b$$

10.2.4 Summationsreihenfolge von Reihen

Allgemein spielt sie Summationsreihenfolge eine Rolle bei Reihen. Ein Vertauschen von Summanden kann zu Widersprüchen führen. Daraus leitet sich die absolute Konvergenz ab, sodass die Summationsreihenfolge keine Rolle spielt.

10.2.5 Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent , falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Für absolute Konvergenz gilt:

- Es ex. eine konvergente Folge $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k \geq 0$ und $|a_k| \leq c_k$ (Majorantenkriterium)
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q < 1$ (Wurzelkriterium)
- $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q < 1$ (Quotientenkriterium)

Für Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ zeigt man:
- Es ex. eine divergente Folge $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k \geq 0$ und $|a_k| \geq c_k$ (Minorantenkriterium)

10.2.6 Wichtige Reihen

- Arithmetische Reihe

- Geometrische Reihe

- Harmonische Reihe

- Exponentialreihe

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ Exponentialreihe. Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut.

11 Exponentialfunktion und Logarithmus

11.1 Exponentialfunktion

Wir definieren aus der Exponentialreihe mit einem $x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ die Exponentialfunktion exp(x) : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit exp(x) := $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

11.2 Logarithmus

Die Umkehrfunktion $\exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ heißt natürlicher Logarithmus (ln).

Es gilt: $ln(e^x) = e^{ln(x)} = x$
Desweiteren gilt auch $ln(x \cdot y) = ln(x) + ln(y)$.

11.3 Allgemeine Exponentialfunktion

Die allgemeine Exponentialfunktion zur Basis a, also a^x ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert als:

$$a^x := \left(e^{ln(a)}\right)^x = e^{x \cdot ln(a)}$$

12 Reelle Funktionen

Eine Funktion ist eine Abbildung f: $\mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to f(x)$

Eine Funktion kann folgende Eigenschaften haben:
- f ist beschränkt, falls $|f(x)| \subseteq M_{\geq 0} \quad \forall x \in \mathbb{D}$

$$\text{- f ist} \begin{cases} \text{achsensymmetrisch, falls } f(-x) = f(x) \\ \text{spiegelsymmetrisch, falls } f(-x) = -f(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{D}$$

$$\text{- f ist} \begin{cases} \text{monoton steigend, falls } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ \text{monoton fallend, falls } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{cases} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}$$

- f ist periodisch mit Periode L, falls $f(x+L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{D}$

12.1 Grenzwerte von Funktionen

Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von f bei $a \in \mathbb{D}$, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Dabei muss b nicht Funktionswert sein $\pm\infty$ ist als "uneigentlicher Grenzwert" erlaubt.

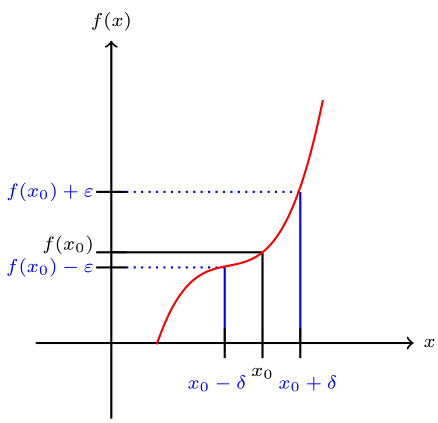
Werden nur Folgen mit $x_n < a$ betrachtet, heißt der Grenzwert linksseitig, andersherum heißt der Grenzwert rechtsseitig, wenn nur Folgen mit $x_n > a$ betrachtet werden.

13 Stetigkeit

13.1 Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in \mathbb{D}$ wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{D}$$



13.2 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion f heißt gleichmäßig stetig, falls für alle $y \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) : \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{D}$$

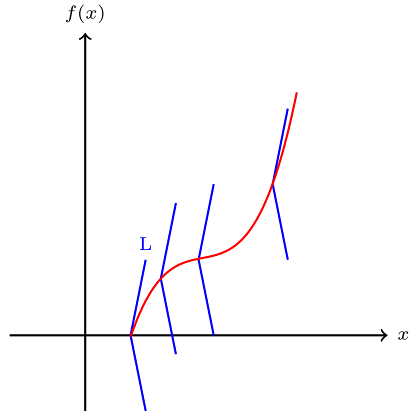
Interpretierbar bedeutet dass, dass die ganze Funktion stetig sein muss, um gleichmäßig stetig zu sein. Die erlaubte Abweichung ist aber nicht proportional zur Genauigkeit.

13.3 Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion f heißt Lipschitz-stetg, falls für alle $x, y \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\exists L > 0 \text{ mit } |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

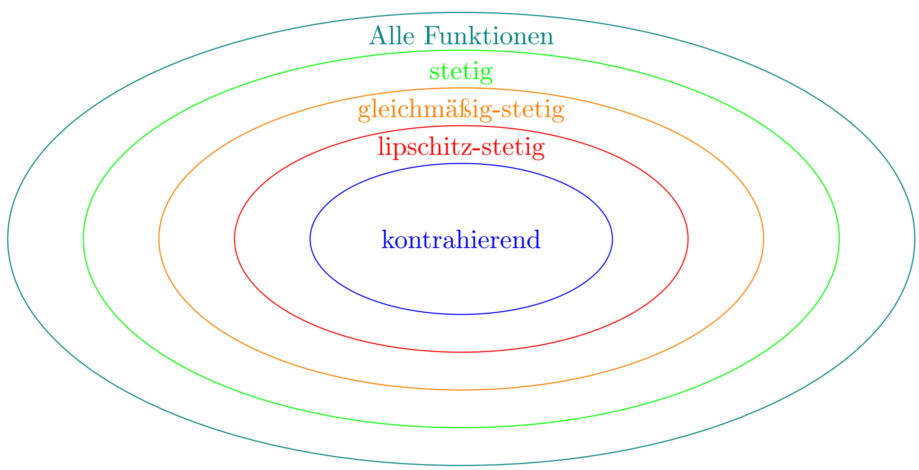
Damit hängt die Genauigkeit proportional zur erlaubten Abweichung ab. Visuell kann man eine "Klammer" anlegen, die die Steigung ± L hat, und die Funktion einklammert, also dass die Funktion nie schneller wächst als L. Dies gilt in jedem Punkt in $\mathbb{D}$.



13.4 Kontraktion

Eine Funktion f heißt kontrahierend, falls sie Lipschitz-stetig mit $L < 1$. Damit ist die Genauigkeit kleiner als die erlaubte Abweichung.

Somit ergeben sich folgende Mengenbeziehungen:



14 Differentialrechnung

Idee: Ableitung als lineare Approximation (Änderungsrate innerhalb eines kleinen Zeitpunktes)

14.1 Definition

Eine Funktion f heißt differenzierbar bei x_0 falls eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass gilt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + r(h) \text{ mit } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Somit ist die Ableitung definiert als:

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

Eine differenzierbare Funktion ist hierbei stets stetig.

Notation:

-Nach Lagrange $f'(x)$
-Nach Leibniz $\frac{df}{dx}(x)$
-Nach Newton $\dot{f}(x)$

15 Integration

15.1 Riemann-Integral

Obersumme = Untersumme im Grenzwert Z_n

15.2 Rechenregeln für Integrale

$$(i) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad c \in (a, b)$$

$$(ii) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

$$(iii)\ f(x) \leq g(x) \text{ auf } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$(iv)\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq |f|_\infty(b-a)$$

$$(v) g \geq 0, m \leq f(x) \leq M \quad m, M \in \mathbb{R} \Rightarrow m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b f(x)dx$$

15.3 Mittelwertssatz für Integrale

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

15.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

1. Sei $f[a, b] \to \mathbb{R} \quad x, x_0 \in [a, b]$
$F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ Dann ist F differenzierbar und es gilt:
$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^x f(t)dt\right)$

2. Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $F \in C^1([a, b])$ mit $F'(x) = f(x)$
Dann ist $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_b^a := F(a) - F(b)$

15.5 Partielle Integration

Aus $\int(f(x)g(x))'dx = f(x)g(x) = \int(f'(x)g(x)+g'(x)f(x))dx = \int(f'(x)g(x))dx + \int(g'(x)f(x))dx$ folgt:

$$\int(f'(x)g(x))dx = f(x)g(x) - \int(g'(x)f(x))dx$$

15.6 Substitution bei Integralen

Für eine verkettete Funktion $F(\varphi(t))$ gilt:
$\frac{d}{dx}(F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$
Also $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=\varphi(t)}$ Und $\int \frac{d}{dt}F(\varphi(t))dt = F(\varphi(t)) = F(x)$

15.7 Uneigentliche Integrale

Für uneigentliche Grenzen ($\pm\infty$) gilt:

$$\int_a^\infty (f(x))dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b (f(x))dx$$

Ist F die Stammfunktion von f, so gilt:

$$\int_a^\infty (f(x))dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b (f(x))dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

Für $f : [a,b] \setminus \{x_0\}$ und $x_0 \in [a,b]$ gilt:

$$\int_a^b (f(x))dx = \lim_{t \to x_0 -} \int_a^t (f(x))dx + \lim_{t \to x_0 +} \int_t^b (f(x))dx$$

15.8 Parameter-Integrale

Sei $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,t) \to f(x,t)$ eine Funktion in x mit Parameter t. Das Integral

$$g(t) = \int_a^b (f(x,t))dx$$

heisst Parameter-Integral und ist eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

15.9 Partialbruchzerlegung

Idee: Für das gebrochenrationale Polynom $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ existiert eine Schreibweise als Menge von einfacher Brüche mit Linearfaktoren von h(x).

Seien $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ die Linearfaktoren von h(x). Dann gilt:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A}{\lambda_1} + \frac{B}{\lambda_2} + ... + \frac{N}{\lambda_n}, \quad A, B, ..., N \in \mathbb{C} \; (\mathbb{R} \text{ falls Nst } (\lambda) \in \mathbb{R})$$

Diese Schreibweise empfiehlt sich bei der Integration von gebrochenrationalen Polynomen

16 Wichtige mathematische Sätze/Definitionen

16.1 Absolutbetrag

Für ein $x \in \mathbb{R}$ ist der Absolutbetrag definiert durch:

$$|x| := \begin{cases} +x & \geq 0 \\ -x & < 0 \end{cases}$$

16.2 Dreiecksumgleichungen

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
1.) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung) 2.) $||x| - |y|| \leq |x \; - y|$ (Umgekehrte Dreiecksungleichung)

16.3 Sinus Hyperbolicus/Cosinus Hyperbolicus

Sinus hyperbolicus (sinh) ist definiert durch:

$$\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

Cosinus hyperbolicus (cosh) ist definiert durch:

$$\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

Außerdem gilt: $\sinh(t)^2 - \cosh(t)^2 = 1$

16.4 Gamma-Funktion

Die Gammafunktion ist definiert als:

$$\Gamma(n+1) := \int_0^\infty (x^n \cdot e^{-x})dx$$

Durch partielle Integration kann man zeigen, dass die Gamma-Funktion folgende Eigenschaft besitzt:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$$

Mit $\Gamma(1) = 1$ gilt dann:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

17 Lineare Algebra

17.1 Vektorraum

Eine Menge V heisst Vektorraum über $\mathbb{R}$, wenn gilt:
(i) Für die Elemente aus V existiert eine Addition
(ii) Es existiert eine skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V, \quad (\alpha, x) \to \alpha \cdot x$ mit Assoziativität und Distributivität.
Ein Element x aus dem Vektorraum V ($x \in V$) heisst Vektor.

17.2 Norm

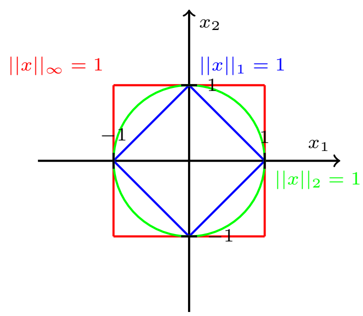
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}^+, \quad \underline{x} \to ||\underline{x}||$ heisst Norm, falls gilt:
(i) $||\underline{x}|| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0$
(ii) $||\alpha\underline{x}|| = |\alpha| \cdot ||\underline{x}||, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
(iii) $||$ $\underline{\mathrm{x}}$ + $\underline{\mathrm{y}}$ $|| \leq ||\underline{x}|| + ||\underline{y}||$

17.2.1 Arten von Normen

1.) Einsernorm : $||x||_1 := \sum_{k=1}^{n}(|x_k|)$
2.) Zweiernorm/Euklidische Norm : $||x||_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(|x_k|)^2}$
3.) p-Norm: $||x||_p := (\sum_{k=1}^{n}(|x_k|)^p)^{\frac{1}{p}}$
4.) Maximumsnorm: $||x||_\infty := \max_{1\leq k\leq n}(|x_k|)$

17.2.2 Aussehen der Normen am Einheitskreis

Darstellung der Gleichungen $||x||_p = 1$ am Einheitskreis mit ausgewählten p's:



17.2.3 Eigenschaften von Normen

b) Im Vektorraum sind die Normen äquivalent, das heisst es gilt mit konstanten c_1, c_2 : $\quad c_1||x||_p \leq ||x||_q \leq c_2||x||_p$
Daraus folgt, dass sich jede Abschätzung einer Norm durch eine andere Norm ersetzen lässt.

17.3 Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst linear, falls gilt:

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

17.4 Matrizen

Ein Zahlenschema der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heisst Matrix. Man schreibt $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, wobei m die Anzahl der Zeilen und n die Anzahl der Spalten darstellt.

17.4.1 Matrix-Vektor-Produkt

Das Matrix-Vektor-Produkt Ax ist definiert als:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^{n}(a_{1p} \cdot x_p) \\ \sum_{p=1}^{n}(a_{2p} \cdot x_p) \\ \\ .... \\ \sum_{p=1}^{n}(a_{mp} \cdot x_p) \end{pmatrix}$$

Formal also $Ax = y, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$

17.4.2 Matrixmultiplikation

Die Matrixmultiplikation ist definiert als:
$" \cdot " : \mathbb{R}^{m\times p} \times \mathbb{R}^{p\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}, \quad (A, B) \to C = A \cdot B$ mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(a_{ik} \cdot b_{kj})$

17.4.3 Einheitsmatrix

Die Einheitsmatrix I ist definiert als:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 \end{pmatrix}$$

17.4.4 Invertierbarkeit

Eine Matrix A heisst invertierbar, falls eine Matrix B existiert, sodass gilt:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Wir schreiben dann $B = A^{-1}$.

18 Multifunktionale Analysis

18.1 Multifunktionale Stetigkeit

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in D$. f heisst stetig in x_0, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad ||x - x_0|| \leq \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| \leq \varepsilon$$

f heisst stetig in D, falls f stetig $\forall x_0 \in D$.
Mit m=n=1 erhalten wir die normale Stetigkeitsbedingung in $\mathbb{R}$

18.2 Multifunktionales Folgenkriterium für Stetigkeit

f ist genau dann stetig, wenn für eine Folge $\left\{x^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ gilt :

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x^{(k)}\right) = f\left(\lim_{k\to\infty} x^{(k)}\right)$$

18.3 Lineare Abbildung im Mehrdimensionalen

Für eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt:

$$||\varphi(x)|| \leq c||x||, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, c > 0$$

und
φ ist stetig

18.4 Totale Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^\ltimes \to \mathbb{R}^\ltimes$ heisst in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (total) differenzierbar, falls $\forall \xi \in \mathbb{R}^\ltimes$ eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert mit:

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + \varphi(\xi) + r(\xi)$$

mit

$$\lim_{||\xi||\to 0} \frac{||r(\xi)||}{||\xi||} = 0$$

Wir bezeichnen mit $\varphi = Df(x_0)$ die Ableitung von f bei x_0.

Dabei entspricht $Df(x_0)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, also $\varphi(\xi) = Df(x_0)(\xi) = A\xi$

18.5 Partielle Differenzierbarkeit

Sei $f : R^n \to R^n$, der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{f_i(x_0+he_j)-f_i)x_0)}{h} := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ heisst partielle Ableitung. Falls der Grenzwert existiert heisst f partiell differenzierbar.

Falls für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $x_0 \in U$ die partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, so ist f in x_0 total differenzierbar und Df ist stetig bei x_0.

18.6 Jacobi-Matrix

Für $m > 1, n > 1$ heisst die Matrix
$A = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $i = \{1, .., m\}, \quad j = \{1, .., n\}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & ... & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{heisst Jacobi-Matrix von f bzw. Df}$$

18.7 Gradient, Divergenz und Rotation

Für ein Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \to \begin{pmatrix} V_x(x, y, z) \\ V_y(x, y, z) \\ V_z(x, y, z) \end{pmatrix}$
gilt folgendes:

$$\text{Gradient : grad(V)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z V_y} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergenz: $div(V) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ (Summe der Diagonaleinträge)

$$\text{Rotation: } rot(V) = \nabla \times V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y \\ \frac{\partial}{\partial z} V_x - \frac{\partial}{\partial x} V_z \\ \frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x \end{pmatrix}$$

18.8 Kettenregel auf mehrdimensionalen Abbildungen

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^e$ differenzierbar in $f(x_0) \in \mathbb{R}^m$.
Dann ist $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^e$ differenzierbar in x_0 mit

$$\underbrace{D(g \circ f)(x_0}_{\in \mathbb{R}^{e \times n}} = \underbrace{Dg(f(x_0))}_{\in \mathbb{R}^{e \times m}} \cdot \underbrace{Df(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

Damit ist die Matrix $D(g \circ f)$ das Produkt von Dg und Df

18.9 Richtungsableitungen

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $||\nu|| = 1$ eine Richtung.
Wir nennen $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ die Richtungsableitung von f mit

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h\nu) - f(x_0)}{h}$$

18.10 Extrema im Mehrdimensionalen

Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heisst $x_0 \in \mathbb{R}^n$ lokales Minimum, falls in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 gilt $f(x) > f(x_0), \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$

Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heisst $x_0 \in \mathbb{R}^n$ lokales Maximum, falls in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 gilt $f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$

Das heisst, die Funktion $h(t) = f(x_0 + t\nu)$ mit einer Richtung ν hat bei $t = 0$ ein Extremum. Daraus folgt, dass $h'(0) = 0$ und damit, dass $grad(f \cdot \nu) = 0$ sein.

$grad(x_E) = 0$ liefert n Gleichungen mit den Komponenten von

$$x_E = \begin{pmatrix} x_{E,1} \\ x_{E,2} \\ ... \\ x_{E,n} \end{pmatrix}$$

$grad(f) = 0$ ist damit ein notwendige, aber keine hinreichende Bedingung

19 Implizite Funktionen

19.1 Fixpunkte

Für $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst x^* ein Fixpunkt, falls gilt: $\Phi(x^*) = x^*$

19.2 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Sei $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$

Gelten nun folgende Bedingungen:

1. $x \in E \Rightarrow \Phi(x) \in E$ (Selbstabbildung)
2. $||\Phi(x) - \Phi(y)|| \leq K||x - y|| \quad x, y \in E, 0 < K < 1$ (Kontraktion)

Dann existiert ein Fixpunkt $x^* \in E$ mit $x^* = \Phi(x^*)$ eindeutig.

19.3 Implizite Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ und $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.
Die Funktion $T : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definiert durch $x \to y = T(x)$ mit $F(x, y) = F(x, T(x)) = 0$ heisst implizit definiert. Umkehrfunktionen von impliziten Funktionen sind ebenfalls implizit definiert

19.4 Existenz von impliziten Funktionen

Sei $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gilt $F(x_0, y_0) = 0$ und $D_yF(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ invertierbar.

Dann existieren Umgebungen $B_r \subset \mathbb{R}^m$ von x_0 und $B_\rho \subset \mathbb{R}^n$ von y_0 mit Radien r, ρ, sodass die implizite Funktion $T : B_r \to B_\rho, \quad x \to y = T(x)$ mit $F(x, T(x)) = 0$ existiert, sowie eindeutig und stetig differenzierbar ist. Die Funktion $T : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definiert durch $x \to y = T(x)$ mit $F(x, y) = F(x, T(x)) = 0$ heisst implizit definiert.

20 Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion y(x), in der:
1. die unabhängige Variable $x \in \mathbb{R}$
2. der Funktionswert y(x) sowie deren Ableitungen y'(x),y"(x),...
vorkommen.

20.1 Klassifikation von Differentialgleichungen

- Differentialgleichung: Eine Gleichung für $y(x) \in \mathbb{R}$
- Differentialgleichungssystem: Ein Gleichungssystem für $y(x) \in \mathbb{R}^n$
- Gewöhnliche Differentialgleichung: Nur eine abhängige Variable $x \in \mathbb{R}$
- Partielle Differentialgleichung:$x \in \mathbb{R}^n$
- Ordnung: Ein Differentialgleichungssysten p.ter Ordnung enthält Ableitungen bis $y^{(p)}(x)$
- Lineare Differentialgleichung: $y, y', ..., y^{(p)}$ treten in linearer Form auf.

20.2 Anfangswertproblem

Sei $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n, \quad t \to y(t)$ und die gewöhnliche Differentialgleichung p.ter Ordnung $F(t, y(t), y'(t), ..., y^{(p)}(t)) = 0$ gegeben.

Ein Anfangswertproblem betrachtet die gewöhnliche Differentialgleichung mit den Bedingungen $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, y''(0) = y_2, ..., y^{(p)}(0) = y_p$. $y_{0,1,...,p}$ heissen Anfangswerte.

20.3 Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Die gewhöhnliche Differentialgleichung $y'(x) = g(x) \cdot f(y(x))$ für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein Spezialfall einer skalaren, gewöhnlichen DFG 1. Ordnung und heisst Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Für die Lösung gilt: $\int \frac{1}{f(y)} dy = \int g(x) dx$

20.4 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung hat die Form:
$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$

20.4.1 Homogenität

Eine lineare DGL 1. Ordnung heisst homogen, falls f = 0, ansonsten ist diese inhomogen.

20.4.2 Lösung eines linearen Gleichungssystems 1. Ordnung

Ist das lineare LGS homogen, so gilt:

$$y_{hom}(t) = c \cdot e^{-A(t)} \text{ mit } A(t) = \int a(t)dt$$

Ist das lineare LGS inhomogen, so gilt:

$$y_{inhom}(t) = c(t) \cdot e^{-A(t)} \text{ mit } A(t) = \int a(t)dt, \quad c(t) = \int f(t) \cdot e^{A(t)} dt$$