$+ \quad \times$

$- \quad \div$

1.3.5 $\mathbb{N}$
-1.-3.-5] $\mathbb{Z}$
0.5. $-\frac{1}{8}$. $\frac{1}{3}$] $\mathbb{R}$
$\sqrt{2}$. π. e. $\log_2$] $\mathbb{Q}$

有理數具有封閉性

$\frac{11}{40}=0.725$ ⇒ 有限循環小數
$\frac{2}{11}=0.\overline{18}$ ⇒ 無限循環小數
Note: 分母只有2 or 5 ⇒ 有限

小數 ⇒ 分數 SOP
- 設 x
- 循環節對齊小數點
- n位循環
- 相減

$\frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z} \wedge p \neq 0$

封閉性
一數在運算後仍在同一集合中

$pf: \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

pf $\sqrt{2} \in N$ ($\sqrt{2} \notin Q$)
$\sqrt{2}=\frac{q}{p} \wedge \gcd(p,q)=1$
$2=\frac{q^2}{p^2}$
$2p^2=q^2$
$q^2 \in 2n \Rightarrow q \in 2n$
$\Rightarrow 2p^2=4k^2$
同理 $p \in 2n$
$\Rightarrow \gcd(p,q)=2$
QED

稠密性
任兩相異有理數間
至少有一有理數

$a+b\sqrt{n}=0 \Rightarrow a=b=0$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$
Note $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$ ×2
$a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2ac-2bc$
$\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$
$\Rightarrow a=b=c$

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$
$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$
$=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$
$(a-b)^3=[a+(-b)]^3$

前後夾擊,中間噓爛
$\underline{x^3}-6x+12x-\underline{8}$
$\Rightarrow (x-2)^3$ (?)
↳ $x^3-6x+12x-8$ ✓

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)^3+3ab(a+b)$

巴斯卡△

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
etc

已知 $x-\frac{1}{x}=2$, 求
(1) $x^2-\frac{1}{x^2}$
(2) $x^3-\frac{1}{x^3}$

(1) $(x-\frac{1}{x})^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}=4$, $x^2-\frac{1}{x^2}=6$
(2) $(x-\frac{1}{x})^3+3\cdot x\cdot \frac{1}{x}(x-\frac{1}{x})=-8+3(-2)=-14$

算幾不等式

算術平均數A

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

幾何平均數G

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{-n}$$

A≥G

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $a,b \geq 0$

Proof

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

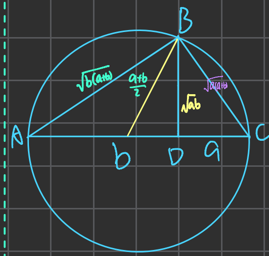
$\sqrt{a}^2 - 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}^2 \geq 0$

$a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Note
$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
$\forall a,b \geq 0$
when $a=b$ "=" correct



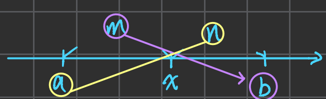
大　中　小
$\triangle ABC \sim \triangle ADB \sim \triangle BDC$

$\frac{斜}{長股}$　$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AC} \times \overline{AD}$
↳ $\overline{AB} = \sqrt{b(a+b)}$

$\frac{斜}{短股}$　$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{AC} \times \overline{CD}$
↳ $\overline{BC} = \sqrt{a(a+b)}$

$\frac{長}{短}$　$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD}^2 = \overline{AD} \times \overline{CD}$
↳ $\overline{BD} = \sqrt{ab}$

分點公式



$x = (b-a)\cdot\frac{m}{m+n} + a$

$= \frac{mb-ma}{m+n} + \frac{ma+na}{m+n}$

$= \frac{mb+na}{m+n}$

分母比例和
分子交叉相乘

$|ab| \equiv |a||b|$

min $(a+2b)$

$a>0, b>0, ab=8$

$\frac{a+2b}{2} \geq \sqrt{2ab} = 16$

$\frac{a+2b}{2} \geq 4$

$a+2b \geq 8$

$\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$

when $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$ $\min(a+2b)=8$

$\sqrt{x \pm 2\sqrt{y}} = k$
$y = m \times n$
↳ $m+n = x$
$(m>n \wedge m,n>0)$
$\sqrt{m} \pm \sqrt{n} = k_{fin}$

$\forall m,n \in \mathbb{Z}^+$
$\wedge \gcd(m,n)=1$
$a^m, a^n \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow a^n \in \mathbb{Q}$

區間表示法

$x \in [-2,6] \Rightarrow$ 閉區間
$-2 \leq x \leq 6$
$x \in (-\infty,-1) \cup (\frac{1}{3},\infty)$
$x<-1$ or $x>\frac{1}{3}$ ↳ 開區間

絕對值的算法 $|x+1|=3$

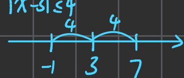
作圖:

平方 $(x+1)^2=9$　$x=\pm 3-1$

討論 if $x \leq 1$ … if $x>1$ …

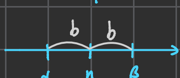
作圖+討論

$|x-3| \leq 4$



if $x-3 \geq 0$
$x \geq 3$
if $x-3<0$
$-(x-3) \leq 4$
$x-3 \geq 4$
$x \geq 7$

$\begin{cases} |mx+n| \gtreqless b \\ \alpha \lesseqgtr x \lesseqgtr \beta \end{cases}$, $m \in$ known const $\hat{m}$ α, β



∈ 屬於
[ ]: 有"="
( ): 沒有"="
∞: 無限大
∪: 聯集

指數

def $a \neq 0,\ m \in \{all\},\ a^m = \overbrace{a \times a \times a \cdots \times a}^{m}$

$a^m \times a^n = a^{(m+n)}$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = a^{(0-n)}$

$a^m \div a^n = a^{(m-n)}$

$(a^m)^n = a^{(mn)}$

$a^n \times b^n = (ab)^n$

pf $a^0 = 1$

$a^1 \div a^1 = a^{(1-1)} = a^0$

$\hookrightarrow \frac{a^1}{a^1} = 1$

QED

$$\begin{cases} 3^{-2/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2/3} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^2}} = \sqrt[3]{\frac{1\times3}{3^2\times3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \\ \left(\sqrt[5]{7^3}\right)^{10/3} = \left(7^{3/5}\right)^{10/3} = 7^{3/5 \times 10/3} = 7^2 \\ 6^{1/4} \times \left(\frac{16}{6}\right)^{1/4} = \left[6 \times \frac{16}{6}\right]^{1/4} = 16^{1/4} = 2 \end{cases}$$

指數律成立的條件

$a^{m/n}$

$\forall m,n \in R \wedge n \neq 0$

$\forall n \neq 1 \rightarrow a \in R^+ \rightarrow a^{m/n} \in R$

if $n=1 \rightarrow a \in R \rightarrow a^{m/n} \in R$

分數次方

$\forall x,y \in Q$

$a^{x/y} = (a^x)^{1/y} = (a^{1/y})^x$

$= \sqrt[y]{a^x} = (\sqrt[y]{a})^x$

指數模型

$f(t) = a \cdot k^{\frac{t}{T}}$

T:週期

k:變量

$10^{\log a} = a,\ a > 0$ （a：真數）

Proof $\log(10^n) = n$

$10^{\log n} = 10^n$

$\log n = n$ QED.

eg.

$\log \frac{\sqrt[3]{10}}{1000}$ $\quad \frac{10^{1/3}}{10^3} = 10^{(1/3-3)} = 10^{-8/3}$

$\log 10^{-8/3} = -8/3$

n位有效數字

只看前n位

其他4捨5入

科學記號

$a \times 10^n$

$1 \le a < 10$

$n \in \mathbb{Z}$

log定義

$a^n = b$

$\log_a n = b$

$\log n,\ a = 10$

$\log 2 \approx 0.301$	$\log 6 \approx 0.7781$
$\log 3 \approx 0.4771$	$\log 7 \approx 0.8451$
$\log 4 \approx 0.602$	$\log 8 \approx 0.903$
$\log 5 \approx 0.699$	$\log 9 = 0.9452$

$a^{1/2} - a^{-1/2} = 2$

$a + a^{-1}$

$(a^{1/2} - a^{-1/2}) = 4$

$= a + a^{-1} - 2$

$\overset{+}{n}\ \overset{-}{m} = 6$