

---

## 2. Teoría

### 1. Demuestre que Focal Search retorna una solución $w$ -óptima

Focal Search garantiza que la solución encontrada tendrá un costo total  $g(n) \leq w \cdot C^*$ , donde  $C^*$  es el costo de una solución óptima, y  $w \geq 1$  es un parámetro de peso. La demostración se basa en el siguiente lema:

**Lema:** Si la heurística  $h$  utilizada para calcular  $f(n) = g(n) + h(n)$  es admisible (es decir, nunca sobreestima el costo real restante), entonces Focal Search encuentra una solución  $w$ -óptima, incluso si se utiliza una heurística alternativa  $h_{\text{Focal}}$  no admisible para priorizar los nodos dentro de la *focal list*.

#### Demostración:

- En cada iteración, Focal Search considera un subconjunto de la *open list* llamado *focal list*, definido como:

$$\text{focal} = \{n \mid f(n) \leq w \cdot f_{\min}\}$$

donde  $f_{\min}$  es el menor valor de  $f(n)$  en la *open list*.

- Como  $h$  es admisible, se tiene que  $f(n) \leq C^*$  para algún nodo  $n$  en la *open list*, y por lo tanto:

$$f_{\min} \leq C^* \Rightarrow f(n) \leq w \cdot C^*$$

- El nodo meta  $n_{\text{goal}}$  cumple que  $h(n_{\text{goal}}) = 0$ , y por tanto  $f(n_{\text{goal}}) = g(n_{\text{goal}}) = c$ .
- Como  $f(n_{\text{goal}}) \leq w \cdot f_{\min} \leq w \cdot C^*$ , entonces:

$$c = g(n_{\text{goal}}) \leq w \cdot C^*$$

**Conclusión:** Focal Search garantiza encontrar una solución  $w$ -óptima, independiente de la calidad o naturaleza de  $h_{\text{Focal}}$ , siempre que se mantenga la condición  $f(n) \leq w \cdot f_{\min}$  en la *focal list*.

### 2. Interpretación de $\frac{c}{f_{\min}}$

Sea  $c$  el costo total de la solución encontrada por Focal Search, y  $f_{\min}$  el menor valor de  $f(n) = g(n) + h(n)$  observado en la *open list* al momento de encontrar la solución. Entonces:

$$\frac{c}{f_{\min}} = \frac{g(n_{\text{goal}})}{f_{\min}}$$

Como  $n_{\text{goal}}$  es el nodo solución y  $h(n_{\text{goal}}) = 0$ , se tiene que  $f(n_{\text{goal}}) = g(n_{\text{goal}}) = c$ , y como Focal Search garantiza que  $f(n_{\text{goal}}) \leq w \cdot f_{\min}$ , se deduce:

$$\frac{c}{f_{\min}} \leq w$$

---

**Interpretación:** El valor  $\frac{c}{f_{\min}}$  es una estimación empírica del *factor de suboptimalidad*. Este valor cuantifica cuán lejos estuvo la solución encontrada respecto del límite inferior estimado en la *open list*. Se interpreta como sigue:

- Si  $\frac{c}{f_{\min}} = 1$ , la solución es óptima.
- Si  $1 < \frac{c}{f_{\min}} \leq w$ , la solución es subóptima, pero dentro del margen garantizado.

**Conclusión:** El cociente  $\frac{c}{f_{\min}}$  actúa como una métrica útil para medir la eficiencia relativa de la solución hallada por Focal Search en función del parámetro  $w$ .