最小生成树

问题的提出

假设在n个城市之间建立通信联络网，则连通n个城市只需要n-1条线路；如何在最节省经费的前提下建立整个通信网

问题的解决

可以用连通网来表示n个城市以及n个城市间可能设置的通信线路；

其中网的顶点表示城市，边表示两城市之间的线路，赋于边的权值表示相应的代价

对于n个顶点可以建立许多不同的生成树，每一颗生成树都可以是一个通信网；

现在我们选择一颗生成树，使总的耗费最少，这个问题就是构造连通网的最小代价生成树；

一颗生成树的代价就是树上各边的代价之和

最小生成树的MST性质

构造最小生成树有多种算法；其中多数算法利用了最小生成树的下列一种简称为MST的性质

假设N=(v,{e})是一个连通网，U是顶点集V的一个非空子集；若(u,v)是一条具有最小权值（代价）的边，其中u∈V，v∈V-U，则必存在一颗包含边(u,v)的最小生成树

普里姆（Prim）算法

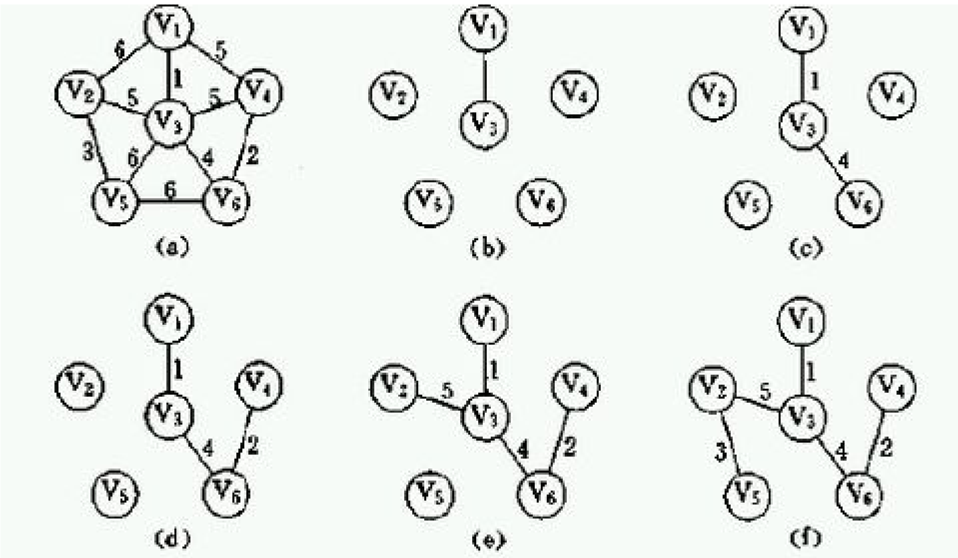
假设N=(V,{E})是连通网，TE是N上最小生成树中边的集合；

算法从U={u0}（u0∈V），TE={}开始

重复执行以下操作：

- 在所有u∈V，v∈V-U的边(u,v)∈E中找一条代价最小的边(u0,v0)
- 代价最小的边(u0,v0)并入集合TE，同时v0并入U
- 直至U=V为止

此时TE中必有n-1条边，则T=(V,{TE})为N的最小生成树



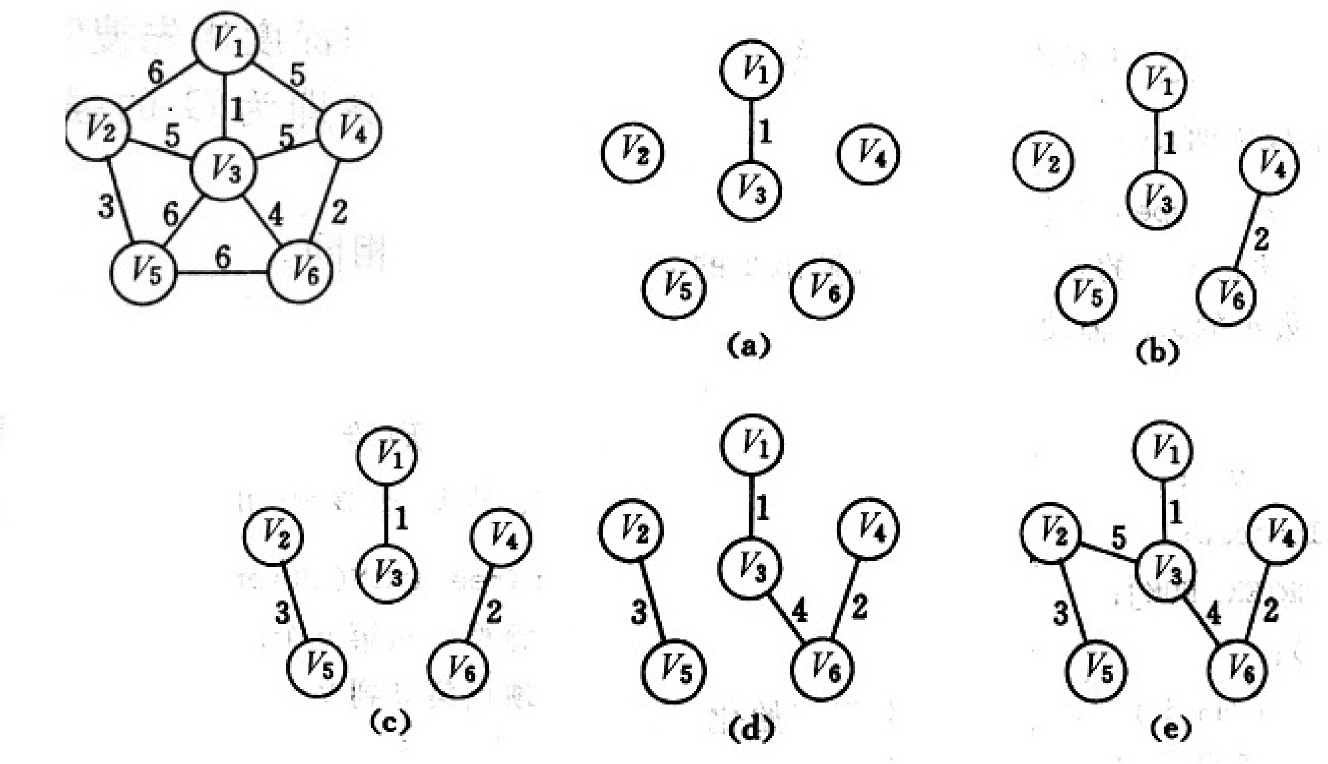
时间复杂度为O(n^2) 与网中的边数无关，因此适用于求边稠密的网的最小生成树

克鲁斯卡尔（Kruskal）算法

假设连通网N=(V,{E})

则令最小生成树的初始状态为只有n个顶点而无边的非连通图T=(V,{})，图中每个顶点自成一个连通分量

- 在E中选择一个代价最小的边
- 若该边依附的顶点落在T中不同的连通分量上，则将此边加入到T
- 否则舍去此边而选择下一条代价最小的边
- 依次类推，直至T中所有顶点都在同一连通份量上为止



时间复杂度为O(eloge)（e为网中边的数目），因此相对于普里姆算法而言，适合于求边稀疏的网的最小生成树