

# 最小生成树

---

## 问题的提出

假设在 $n$ 个城市之间建立通信联络网，则连通 $n$ 个城市只需要 $n-1$ 条线路；如何在最节省经费的前提下建立整个通信网

## 问题的解决

可以用连通网来表示 $n$ 个城市以及 $n$ 个城市间可能设置的通信线路；

其中网的顶点表示城市，边表示两城市之间的线路，赋予边的权值表示相应的代价

对于 $n$ 个顶点可以建立许多不同的生成树，每一颗生成树都可以是一个通信网；

现在我们选择一颗生成树，使总的耗费最少，这个问题就是构造连通网的最小代价生成树；

一颗生成树的代价就是树上各边的代价之和

## 最小生成树的MST性质

构造最小生成树有多种算法；其中多数算法利用了最小生成树的下列一种简称为MST的性质

假设 $N=(V, E)$ 是一个连通网， $U$ 是顶点集 $V$ 的一个非空子集；若 $(u, v)$ 是一条具有最小权值（代价）的边，其中 $u \in U$ ， $v \in V - U$ ，则必存在一颗包含边 $(u, v)$ 的最小生成树

## 普里姆（Prim）算法

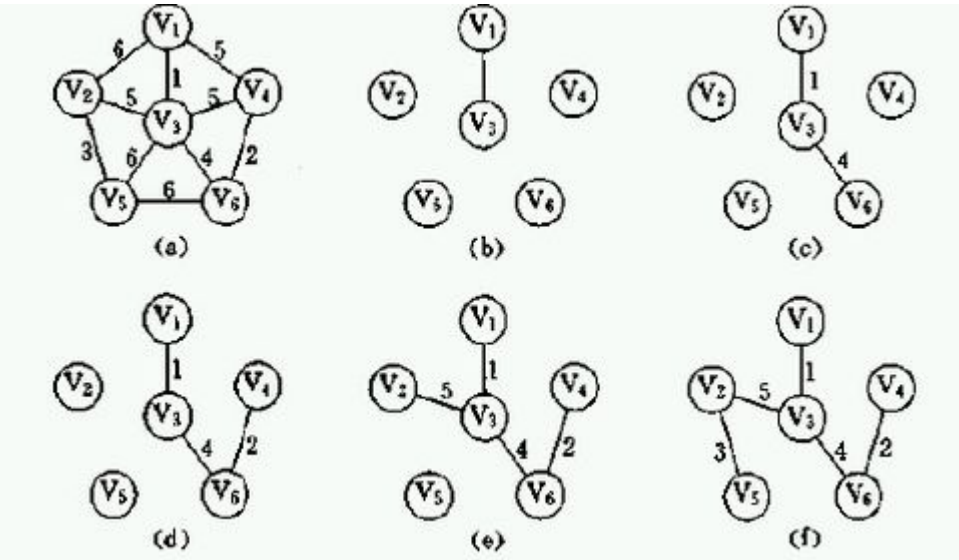
假设 $N=(V, E)$ 是连通网， $TE$ 是 $N$ 上最小生成树中边的集合；

算法从 $U=\{u_0\}$  ( $u_0 \in V$ )， $TE=\{\}$ 开始

重复执行以下操作：

- 在所有 $u \in U$ ， $v \in V - U$ 的边 $(u, v) \in E$ 中找一条代价最小的边 $(u_0, v_0)$
- 代价最小的边 $(u_0, v_0)$ 并入集合 $TE$ ，同时 $v_0$ 并入 $U$
- 直至 $U=V$ 为止

此时TE中必有n-1条边，则 $T=(V, \{TE\})$ 为N的最小生成树



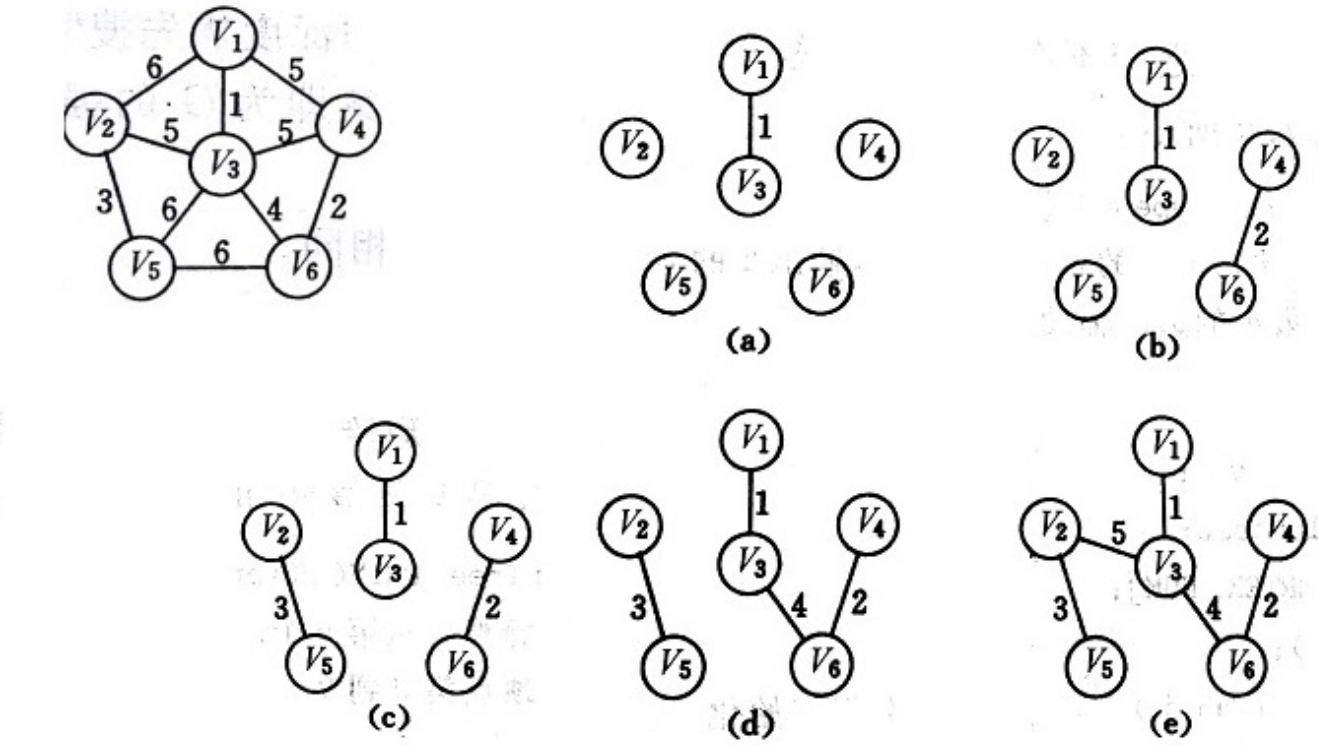
时间复杂度为 $O(n^2)$  与网中的边数无关，因此适用于求边稠密的网的最小生成树

克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法

假设连通网 $N=(V, \{E\})$

则令最小生成树的初始状态为只有n个顶点而无边的非连通图 $T=(V, \{\})$ ，图中每个顶点自成一个连通分量

- 在E中选择一个代价最小的边
- 若该边依附的顶点落在T中不同的连通分量上，则将此边加入到T
- 否则舍去此边而选择下一条代价最小的边
- 依次类推，直至T中所有顶点都在同一连通份量上为止



时间复杂度为 $O(e \log e)$  (e为网中边的数目)，因此相对于普里姆算法而言，适合于求边稀疏的网的最小生成树