ДСТР 2 Обобщение

– Функциите $F_2 = \{ f : \{0,1\}^n \to \{0,1\},\ n = 1, 2 \ldots \}$ се наричат булеви ф.

– F_2^n – множеството от всички n-местни булеви функк

– Броят на булевите функции на k променливи е 2^{2^k}

– БФ с 1 променлива $\to |F_2^1| = 2^{2^1} = 4$ функк

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

f_0 – Константата $0 - \tilde{0}$

f_1 – идентитет $x :\doteq I(x) = x$

f_2 – отрицание $\overline{x}$

f_3 – константа $1 - \tilde{1}$

– БФ с 2 променливи $\to |F_2^2| = 2^{2^2} = 16$ функк

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

– нарастват в двоичен запис

f_0 – константата $\tilde{0}$ е фун на x, y макар да не зависи от тях

f_1 – $x \wedge y$ – конюнкция

f_2 – $\overline{x \to y}$

f_3 – $I_1^2(x,y) = x$ – проектирация на x

f_4 – $\overline{y \to x}$

f_5 – $I_2^2(x,y) = y$ – проект на y

f_6 – $x \oplus y$ – изкл. дизюнкция

f_7 – дизюнкция $x \vee y$

f_8 – $\overline{x \vee y}$ – стрелка на Пирс $x \downarrow y$

f_9 – $x \Leftrightarrow y$ еквивалентност

f_{10} – $\overline{y}$

f_{11} – $y \to x$ обратна импликация

f_{12} – $\overline{x}$ – отрицание на x

f_{13} – $x \to y$ импликация

f_{14} – $\overline{x \wedge y}$ – черта на Шефер

$f_{15} = \tilde{1}$

– Свойства: (гледам от таблицата)

– комутативност: $x \wedge y = y \wedge x$ $\quad x \vee y = x \vee y$ $\quad x \oplus y = x \oplus y$

– асоциативност: $(x \wedge y) \wedge z = \cancel{(x \vee z) \wedge (x \vee z)}\ x \wedge (y \wedge z)$; $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

– дистрибутивност: $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

– Де Морган $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ $\quad \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$

– св-ва на const: $x \wedge \tilde{1} = x$ $\quad x \wedge \tilde{0} = \tilde{0}$ $\quad x \vee \tilde{0} = x$

– св-ва на отрицанието: $\overline{\overline{x}} = x$

- Формула над БФ (трябва да е по-рано)
- Проектираща функ – $I_i^n(x_1, \dots x_n) = x_i \in F_2^n$
- суперпозиция – $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

$g_1 \dots g_n : \{0,1\}^k \to \{0,1\}$

$h: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ $h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots x_n))$

Суперпозиция h на $g_1 \dots g_n$

пример $\overline{x \to y}$, $\overline{x \wedge y}$

- Формула над мн-во БФ: Нека $F \subseteq F_2$. Формула над мн-во бул функ F са всички функ., получени от функциите във F чрез операциите проекция, суперпозиция и самите функции от F

- Пълно мн-во: ~~[F]~~ мн-во $F \subseteq F_2$ е пълно, ~~т.т.к. $[F] = F_2$~~, ~~ако всяка булева функция може да се изрази чрез проекция и суперпозиция на ел. от F~~

~~$[F]$ – мн-вото от всички булеви функ., които могат да се изразят чрез функции от F~~

- Теорема на Бул – мн-вото $\{\wedge, \vee, \neg\}$ е пълно

Док: (Скица)

Всяка функция има съвършена дизюнктивна нормална форма (Изреждаме случаите, в които функцията връща единица)

- Разбиване на БФ по част от променливите ???

Скица: $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$???

~~Y – подбрани променливи~~ $|Y| = k$

~~X – които не взимаме~~

a – конкретно мн-во от стойности

$F(x_1, \dots x_n) = \bigvee\limits_{a \in \{0,1\}^k} (m_a(Y) \wedge F(X, Y = a))$

$m(Y) = \wedge\, Y(a_1 \dots a_k) \to m(Y) = \bigwedge\limits_{i=1}^{k} y^{a_i} \to$ всички възможни вект.

$f(\cancel{x_1, x_2, x_3, \dots x_n}) = \vee\, x_1$

- Теорема на Пост-Яблонски

Мн-вото $F \subseteq F_2$ е пълно т.с.т.к. F не е подмн-во на нито едно от: T_0, T_1, S, M, L

T_0 – булеви функции запазващи нулата $f(0, 0, 0 \dots 0) = 0$

Пример $(\vee, \wedge, XOR)$

T_1 – булеви функ запазващи единицата $f(1, 1, 1 \dots 1) = 1$

$(\wedge, \vee)$

2

M - монотонни функции (ако парам. се увеличи, то result не се намалява)

Дефинираме релация $a_1 .. a_n \geq b_1 ... b_n$, ако $\underbrace{a_1 \geq b_1 \text{ и } a_n \geq b_n}_{\text{и} \dots \text{и}}$ $101 \geq 100$

Това е частична наредба - пример 101 vs 110 не влиза $\longrightarrow$ Несравними вектори

f е монотонна $\Leftrightarrow \alpha \geq \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$

S - самодвойнствени функции т.е. f е двойствена функ. на f

Нека $f(x_1, \dots x_n)$

f^* - двойнствена $f^* = !f(!x_1, \dots, !x_n)$

f е самодвойствена ако съвпада със своята двойствена

L - линейни функции - функ. които имат полином на Жегалкин

Пример $f(x, y, z)$ може да се представи като $a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_4$

$a_i \in \{0, 1\}$