Коши) f и g непр. в $[a,b]$, диф. в (a,b), $g'(x) \neq 0$ за $x \in (a,b)$

$\exists c \in (a,b)$ $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{f'(c)}$

Док:) Нека $g(a)=g(b)$ $\Rightarrow$ От Рол $\Rightarrow$ $\exists c \in (a,b) : g'(c)=0$ $\Rightarrow$ противоречие с Тh

$\nearrow$ const

$\Rightarrow g(a) \neq g(b)$

Помощна функк: $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x)-g(b))$

непр. в $[a,b]$ и диф в (a,b)

$F(a) = f(b)$ $\Rightarrow F(a)=F(b)$ $\Rightarrow$ от Рол $\exists c \in (a,b) : F'(c)=0$

$F(b) = f(b)$

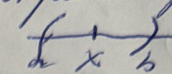
$\Rightarrow F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0 \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Тейлър)

25 ДИС Обобщение

— производна на $f(x)$ в т. x_0 $\quad f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

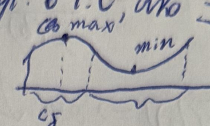
— околност на т. x — отворен интервал съдържащ т. x. x е вътрешна за (a,b), ако $\exists$ околност ξ на x и $(x-\xi, x+\xi)\subset(a,b)$ $\xi>0$



— локален екстремум — $f(x)$ има лок. екстр. в т. c, ако $\exists$ околност δ на c, за която:

① $f(x)\le f(c)$ $\forall x\in\delta$ лок. макс.

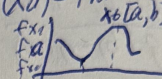
② $f(x)\ge f(c)$ $\forall x\in\delta$ лок. мин.



— Th Вайерщрас:

Нека $a<b$ и функцията $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава $f(x)$ има точна горна и долна граница в $[a,b]$ т.е. $\exists x_0,x_1\in[a,b]$ $f(x_0)=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ $f(x_1)=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

или $\exists c,d\in[a,b]$: $f(c)\le f(x)\le f(d)$ за $\forall x$



— Th Ферма:

Нека $f(x)$ е дефин. и диф. в $[a,b]$. т. $A\in[a,b]$ е локален екстремум, ако $f'(A)=0$

Док: Нека f има локален макс. в т. x_0. $\Rightarrow\exists$ околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $\delta>0$, където $f(x)\le f(x_0)$ $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Тогава за $0<h<\delta$ имаме

$$0\ge\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\to f'(x_0) \text{ за } h\to+0 \Rightarrow f'(x_0)\le 0$$

за $-\delta<h<0$ имаме $0\le\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\to f'(x_0)$ при $h\to-0\Rightarrow f'(x_0)\ge 0$

$\Rightarrow f'(x_0)=0$ за случая с лок. максимум

В случая с лок. минимум се свежда до разглеждания след умн. на функ с -1

Th Рол:

Ако $f(a)=f(b)$, то $\exists c\in(a,b)$ $f'(c)=0$

Док: от Вайерщрас $\Rightarrow$ функцията има точна горна S и точна долна I граница

① Ако $S=I\Rightarrow I\le f(x)\le S$ за $\forall x\in[a,b]\Rightarrow f$ е const $\Rightarrow f'(x)=0$ за $\forall x\in[a,b]$

② Според Вайерщрас f има НМС и НГС в $[a,b]\Rightarrow\exists$ т. z ~~в която~~ $\in(a,b)$, вътрешна за $[a,b]$ в която приема НГС, НМС

$\Rightarrow$ от Ферма $f'(z)=0$

Лагранж: $\exists c\in(a,b)$, и $f(b)-f(a)=f'(c).(b-a)$

Помощна функ. $F(x)=f(x)-\underbrace{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\to\text{const}}(x-b)$ — непрекъсната

$F(a)=f(b)$
$F(b)=f(b)$ $\Rightarrow F(a)=F(b)\xRightarrow{\text{Рол}}\exists c\in(a,b)$:

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c).(b-a)$$