27 Алгебра 1 Обобщение

- ЛЗ -

- ЛНЗ -

- Базис -

- адюнгирани количества -

поле

$F_{m\times n}$

- минор от ред k - фиксираме произволни k реда и k стълба от A, елементите в пресечните точки образуват квадратна матрица. Нейната детерминанта - минор от ред k

- ранг на матрица - $r(A)=r$, ако има минор от ред r и всички по-големи с 0 т.е. ако всички минори от $r+1$ са нула, то и минори $> r+1$ са нула

- $\det A^t = \det A \Rightarrow r(A^t)=r(A)$

- ранг на система вектори - V е лин. пр-во и $c_1 \dots c_k$ е шт. вектори в V. $r(c_1, c_2 .. c_k)=r$, ако $\exists$ r ЛНЗ вектора в тази система и всеки друг е линейна комбинация на тях
  - $r(c_1, c_2, \dots c_k) = \underbrace{r(c_1', c_2', \dots, c_k')}_{\text{бази}} = \dim l(c_1, \dots c_k)$

- Теорема - F поле, $A \in F_{m\times n}$
  $a_1 \dots a_m$ - вектор редове
  $b_1 \dots b_n$ - вектор стълбове
  на A $\Rightarrow r(A) = r(a_1 \dots a_m) = r(b_1 \dots b_n) = r$

Д-во: $r(A)=r=r(A^t) \Rightarrow$ достатъчно да докажем, че $r(A)=r=r(b_1 \dots b_n)$

- $A=0$ (нулевата) $\Rightarrow$ е изпълнено
- $r(A)\geq 1$. Б.О.О считаме, че минорът от ред r е горе в ляво $\neq 0$.

(Insert картинка) D, $A=\left(\begin{array}{c|c} r\times r & \\ \hline & \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ първите r стълба са ЛНЗ, ако бяха ЛЗ, то $\det D=0$ - противоречие с минора.

Ще покажем, че $\forall$ стълб b_l $r < l \leq n$ е л.комб на $b_1 \dots b_r$. Нека i $1\leq i \leq m$

образуваме $D_i = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{r1} & & a_{rr} & \\ \hline a_{i1} & \dots & & a_{il} \end{array}\right)$ D_i е от $r+1$ ред, добавяйки i-тия вектор ред и l-тия вектор стълб на A

Ако $i \leq r \Rightarrow$ два еднакви реда в $D_i \Rightarrow \det D_i = 0$

Ако $r+1 \leq i \leq m$, то $\det D_i = 0$, защото $r(A)=r$ и D_i е минор от $r+1 \Rightarrow \det D_i = 0$

A_1 до A_r – адюнгирани количества на $a_{i1}, \dots a_{ir}$ и A_1 е ... на a_{i1} = det D = Δ ≠ 0

Развиваме det D_i по последния ред

$a_{i1}A_1 + \dots + a_{ir}A_r + a_{i1}\Delta = 0$ т.к. $\Delta \neq 0$, то $a_{i1} = -\frac{A_1 a_{i1}}{\Delta} \dots - \frac{A_r a_{ir}}{\Delta}$

Не зависи от избора на реда i, така:

– за всяко $i = 1, \dots, m$ $a_{i1} = -\frac{A_1}{\Delta} - \frac{A_2}{\Delta} a_{i2} - \dots - \frac{A_r}{\Delta} a_{ir}$

всеки елемент a_{i1} на b_1 е лин. комбинация на съответните $b_1, \dots b_r$ с едни и и същи коеф. за $\forall i \in \{1, m\}$ ⇒ b_1 е лин. комб. със същите коеф.

Следствие: A-кв. матрица от ред n, det A = 0 т.т.к. редовете (стълбовете) са ЛЗ.

– СЛУ – система от уравнения от първа степен с няколко неизвестни

1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ m – уравнения
n – неизвестни
коеф. на свободните членове ∈ ч. мн F

Матрица на системата уравнения
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $A = (a_{ij})_{m\times n}$

Разширена матрица на сист. уравнения
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ $\overline{A} = (a_{ij} | b_i)$

– решение на СЛУ – всяка n-торка $(s_1, \dots s_n)$, за която $\forall$ уравнение е тъждество след заместване

– несъвместима – решения = 0

– съвместима – решения ≥ 1

– определена – решения = 1

– неопределена – решения > 1

– Th Руше – СЛУ е съвместима т.с.т.к. $r(A) = r(\overline{A})$

– Док: b_1 до b_n – вектор стълбове на A, b – стълб със свободни членове
$r(A) = r(b_1, \dots, b_n)$ $r(\overline{A}) = (b_1, \dots b_n, b)$ $r(\overline{A}) \geq r(A)$
$r(A) = r(\overline{A})$ т.с.т.к. b е лин. комб. на b_1 до b_n т.е. $b \in l(b_1 \dots b_n)$
т.е. ∃ коеф. λ_1 до λ_n т.ч. $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots \lambda_n b_n = b$, но това е еквивалентно на факта, че n-торката $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ е решение, т.е. е съвместима

~~Твър~~ Th Руше показва съвместимост, а не намира решение

– ХСЛУ – СЛУ в която свободните членове са нули

– винаги е съвместима, защото притежава нулевото решение

– Ако m > n (повече редове от променливи), то има излишни уравнения

– Ако m < n, то $r(A) \leq m < n$ – безброй мн решения и нулевото

– $r(A) = n$ и системата е определена ⇒ само нулевото

– мн-вото от решения на ХСЛ е подпр-во на лин. пр-во F^n.

– ако $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ са решения на ХСЛУ, то и тяхна произволна ~~кол~~ лин. комбинация е решение

– n неизвестни → работим в лин. пр-во $V = F^n$ над F.

- Ако α и β са решения на ХСЛУ, то за $\forall \lambda, \mu \in F \Rightarrow \lambda . \alpha + \mu . \beta$ е решение
$\Rightarrow$ по критерия за подпространство $\Rightarrow$ мн-вото от решения на ХСЛУ е подпространство на пр-во от наредени n-торки т.е. $\{$решения$\} \leq F^n = V$
- Ще покажем, че $\lambda\alpha + \mu\beta$ е решение: За всяко едно уравнение α и β са решения

$a_{11}\alpha_1 + \dots a_{1n}\alpha_n = 0$ $\Rightarrow a_{11}(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1) + \dots + a_{1n}(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) =$
$a_{11}\beta_1 + \dots a_{1n}\beta_n = 0$ $= \lambda(\alpha_1 a_{11} + \dots + \alpha_n a_{1n}) + \mu(\beta_1 a_{11} + \dots + \beta_n a_{1n}) = 0$

аналогично за останалите уравнения $\Rightarrow \lambda\alpha + \mu\beta$ е подпр-во

- ФСР — всеки бази на пространството от решения на ХСЛУ
  - състои се от ЛНЗ вектори от F^n, които са решения и $\forall$ друго решение е тяхна лин. комбинация

Заб.| Ако U е подпространство на F^n (F числово поле) то U може да се представи
$U = l(a_1, a_2 \dots a_k)_{a_i \in V}$ или $U: |$ ХСЛУ $\rightarrow$ т.е. да се представи като ХСЛУ

Th| Нека U е подпр-во от решения на ХСЛУ. Ако $r(A) = r$, то $\dim U = n - r$ (всяко ФСР има $n-r$ брой решения)