29 CEM Обобщение

2) Нека deg f < deg g, то тогава $f = g.0 + \underbrace{f}_{r}$ $\deg r = \deg f < \deg g$

3) Нека $\deg f \geq \deg g$ и $g \neq 0$ ужас, по-добре не учи

Индукция по степента на f (с по-висока степен) $g = b_0x^m$

$$\begin{array}{l} f = a_0x^n + \dots \\ - b_0x^m + \dots \\ \hline f_1 \quad \deg f_1 < n \end{array}$$

$q_1 = b_0^{-1}.a_0x^{n-m}$

$f_1 = f - a_0b_0^{-1}x^{n-m}g$ $\deg f_1 < n$

И.П.: $\exists q_1, r_1 \in F[x]$ т.ч. $f_1 = g.q_1 + r_1$ и $\deg r_1 < \deg g$

Тогава $f = f_1 + a_0b_0^{-1}x^{n-m}.g = g.q_1 + r_1 + a_0b_0^{-1}x^{n-m}.g = g(q_1 + a_0b_0^{-1}x^{n-m}) + r_1$

Полагаме $q = q_1 + a_0b_0^{-1}x^{n-m}$ и $r = r_1$. Тогава $f = g.q + r$ $\deg r < \deg g$

Единственост: Нека допуснем, че има втора двойка, удовлетворяваща теоремата т.е. $f = g.q + r = g.q' + r'$ и $\deg r < \deg g$ и $\deg r' < \deg g$

$\Rightarrow g(q - q') = r' - r$. Ако $q \neq q' \Rightarrow \deg(g(q-q')) = \deg g + \deg(q - q') \geq \deg g$
$> \deg(r' - r)$ – противоречие понеже $\deg r < \deg g$ и $\deg r' < \deg g$

$\deg(g(q-q')) = \deg(r' - r) \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow q = q'$ и $r = r'$

– Схема на Хорнер: $f = a_0x^n + \dots + a_n$ $a_0 \neq 0 \in F[x]$ и $g(x) = x - \alpha \in F[x]$

от деление с частно и остатък $\Rightarrow f = g.q + r$ $\deg r < \deg g = 1$ т.е. $r \in F$, r е константа

и $q = b_0x^{n-1} + \dots + b_{n-1}$

Тогава е в сила

	a_0	a_1		a_{n-1}	a_n
α	b_0	b_1	...	b_{n-1}	r

$b_0 = a_0$
$b_1 = a_1 + \alpha.b_0$
$b_2 = a_2 + \alpha.b_1$
$r = a_n + \alpha.b_{n-1}$

Следствия:

1) Нека A е ком. пр. с 1 и $f \in A[x]$, $\alpha \in A$. $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f = (x - \alpha).q$ за някое $q \in A[x]$

2) Нека A е област $f \in A[x]$, $f \neq const$ и $\deg f \leq n$. Ако $\exists \beta_1, \dots \beta_{n+1} \in A$ $i = \overline{1, n+1}$ и $\beta_i \neq \beta_j$ за $i \neq j$ т.ч. $f(\beta_i) = 0$ за $\forall i = \overline{1, n+1}$. Тогава $f = 0$

3) (принцип за сравняване на коеф.) A област, $f, g \in A[x]$ $f, g \neq const$, $\deg f$ и $\deg g \leq n$. Ако ~~същ~~ $\exists$ две по две $\neq \alpha_1, \dots \alpha_{n+1}$, за които $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$ $i = \overline{1, n+1}$, то $f = g$

– Нод – Нека F е поле, $a \in F^* = F \setminus \{0\}$, т.е. $F[x]$ е област

Деф: Нека $f, g \in F[x]$, $g \neq 0$. Казваме, че "g дели f" и пишем $g \mid f$, ако $\exists h \in F[x]$ т.ч. $f = g.h$. В противен случай не го дели $\rightarrow g \nmid f$

Свойства: 1) $af \mid bf$ $a \in F^*$, $f \neq 0$, $b \in F$, $f \in F[x]$

някои са измислени

2) $f \mid g$ и $g \mid f$, то $f = c.g$ $c \in F^*$

3) ако $f \mid g$, ~~то $af \mid ag$~~ и $g \mid h$, то $f \mid h$

Алгебра 28 Обобщение

Деф: Нека A е ~~комутативен~~ поле пръстен с единица

$B = \{ f = (a_0, a_1, \dots a_n, 0, 0 \dots), a_i \in A \}$ безкрайна редица $a_i \neq 0$

Нека $f = (a_0, a_1, \dots a_n, 0, 0 \dots)$ и $g(b_0, b_1, \dots, b_m, 0, 0, \dots) \in B$ и $m \leq n$.

Въвеждаме в B "+" и "."

$f+g := (a_0+b_0, \dots a_m+b_m, a_{m+1}, \dots a_n, 0, 0 \dots) \in B$ – т.е. събираме по компоненти

$f.g := (c_0, c_1 \dots c_k, 0, 0 \dots) \in B$, където $c_n = \sum_{i+j=n} a_i . b_j$; $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$ и т.н.

С тези операции B е комутативен пръстен с единица

Означаваме: $0 = (0, 0, 0, \dots)$ нула в B

махат!

$1 = (1, 0, 0 \dots)$ единица в B

$x = (0, 1, 0, 0 \dots)$ $x^n = (0, 0 \dots 0, 1, 0, \dots)$ единица на $n+1$ позиция

ако $a \in A$, то $ax^n = (0, 0, \dots, 0, a, 0 \dots)$

с f бележим $f = (a_0, a_1, \dots a_n, \dots 0) = (a_0, 0, 0 \dots) + (0, a_1, 0 \dots) + \dots (0, 0, \dots a_n, 0, 0 0) =$

$= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$(-f) = (-a_0, -a_1, \dots -a_n, 0, 0, \dots)$

Елементите на B наричаме полиноми на една променлива с коеф. над A.

Ако F е поле, то B е област. $\boxed{B \text{ се означава с } A[x]}$ – пръстен на полиномите на 1 променлива x с коеф. от A

$f = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$ ~~старши~~ старши, свободен

коеф. на f – a_i за $i = \overline{1, n}$

Ще бележим вече f: $f = a_0 x^n + \dots + a_0$ старши, свободен

– степен на полином: $\deg f = n$ – най-високата степен на x

– $\deg (a, 0, 0 \dots) = 0$

– $\deg (0, 0, 0 \dots) = -\infty$

Твърдение: Нека A е комут. пр. с единица. За $\forall f, g \in A[x]$, т.ч. $\deg f = n$, $\deg g = m$

- $\deg (f+g) \leq \max(\deg f, \deg g)$
- Ако A е област, то $\deg (f.g) = \deg f + \deg g$

Д-во:

Теорема Нека F е поле и $f, g \in F[x]$, $g \neq 0$. Тогава $\exists$ единствена двойка полиноми $q, r \in F[x]$ т.ч. $f = g.q + r$ и $\deg r < \deg g$ (q - частно, r - остатък)

Доказателство:

Съществуване: Нека $f = a_0 x^n + \dots + a_n$ $a_0 \neq 0$
$g = b_0 x^m + \dots + b_m$ $b_0 \neq 0$

1) ако $g = b_0 \neq 0$, т.е. g е константа $\Rightarrow f = b_0 \underbrace{(b_0^{-1} . f)}_{q} + \underbrace{0}_{r}$

$\deg r = -\infty$ $\deg g = 0$ $\deg r < \deg g$