25. Теорема на Ферма. Теореми за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър.

~~Деф~~. Производна

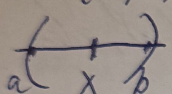
Производна на функцията $f(x)$ в точката x_0 наричаме границата $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Аналогично можем да запишем $f'(x)$ като $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, където сме положили $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

→ Околност

Всеки отворен интервал, съдържащ точката x ще наричаме околност на точката x. Ще казвамe, че точката x е вътрешна точка за интервала (a, b), ако съществува околност ξ на точката x и $\xi \subset (a, b)$

или

$(x - \xi, x + \xi) \subset (a, b)$ $\xi > 0$

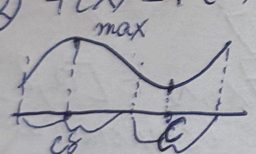


→ Локален екстремум

Казваме, че функцията $f(x)$ има локален екстремум в т. c от своята D, ако съществува околност δ на точката c, за която:

① $f(x) \le f(c)$ $\forall x \in \delta$ (локален максимум)

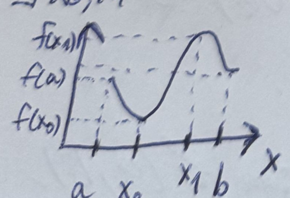
② $f(x) \ge f(c)$ $\forall x \in \delta$ (локален минимум)



→ Теорема на Вайерщрас

Всеки я пише различно?

Нека $a < b$ и функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава е изпълнено, че $f(x)$ има точна горна и долна граница в $[a, b]$, т.е. $\exists x_0, x_1 \in [a, b] : f(x_0) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$, $f(x_1) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$



→ Теорема на Ферма

Нека $f(x)$ е дефинирана в $[a, b]$ и е диференцируема в нея. Ако $f(x)$ има локален екстремум в т. A, вътрешна за $[a, b]$, то $f'(A) = 0$.

→Доказателство: Сакам на Анди е най-~~просто~~

→Теорема на Рол (Тази дефиниция я има в ~~а~~нотацията)

Нека f е непрекъсната в (крайния) затворен интервал $[a,b]$ и е диференцируема поне в ~~отвор~~ поне отворения интервал (a,b). Ако $f(a)=f(b)$, то съществува такава $c \in (a,b)$, че $f'(c)=0$

→Доказателство: (На някои места е доста кратко)

Функцията f е непрекъсната в $[a,b] \Rightarrow$ съгласно Th (теорема) на Вайерщрас тя е ограничена и $\exists\, S=\sup f(x)$ и $I=\inf f(x)$ S и I са просто нотация (вместо sup и inf може да се записва най-голяма и най-малка)

① Ако $S=I$, то от това, че $I \le f(x) \le S$, за $\forall x \in [a,b]$ следва, че f е константа в $[a,b] = f'(x)=0$ за $\forall x \in [a,b]$

② Ако $I \ne S$ т.е. $S > I$, то съгласно Th на Вайерщрас $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$, $f(x_1)=I$, $f(x_2)=S$. Поне едната от тези точки е вътрешна за $[a,b]$ $(\in (a,b))$, т.к. $f(a)=f(b)$ и ако допуснем, че $x_1=a$ и $x_2 \ne b$ (или обратното), то $I=S \Rightarrow$ противоречие.

~~S=0~~ Нека $x_1 \in (a,b)$. Така $I=f(x_1)$ то в т. x_1 f има локален екстремум $\Rightarrow$ съгласно Th на Ферма $\rightarrow f'(x_1)=0$.

Нека $x_2 \in (a,b)$ и аналогично $(S=f(x_2))$: $f'(x_2)=0$

Следователно винаги $\exists\, c \in (a,b): f'(c)=0$

→ Теорема на Лагранж

Нека f е непрекъсната в $[a,b]$ и диференцируема в (a,b). Тогава съществува такава $c \in (a,b)$, че $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

→ Доказателство:

Нека $F(x)$ е помощна функция такава че:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$$

$F(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и диференцуруема в (a,b), т.к. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = const$, а $x-b$ е непрекъсната:

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-b) = f(b)$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-b) = f(b)$$

Така $F(a)=F(b) \Rightarrow$ съгласно Th на Рол $\exists c \in (a,b)$:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f(b)-f(a) = f'(c).(b-a)$$

→ Теорема на Коши

Нека f и g са непрекъснати в $[a,b]$ и диференцуруеми в (a,b), $g'(x) \neq 0$ за $x \in (a,b)$. Тогава съществува такова $c \in (a,b)$, че:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

→ Доказателство:

Първо ще докажем, че $g(b) \neq g(a)$. Да допуснем, че $g(a)=g(b)$ - така от Th на Рол следва, че $\exists c \in (a,b) : g'(c)=0$, което е в противоречие с теоремата. Следователно $g(a) \neq g(b)$. Да разгледаме следната помощна функция $F(x)$:

$$F(x) = f(x) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}_{const}.(g(x)-g(b))$$

$F(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ (разлика от непр. функция) ??? и е диференцуруема в (a,b)

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.(g(a)-g(b)) = f(b)$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.(g(b)-g(b)) = f(b)$$

$\Rightarrow F(a)=F(b) \Rightarrow$ съгласно Th на Рол $\exists c \in (a,b)$: $F'(c)=0$

$$\Rightarrow F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

→ Теорема на Тейлър

Нека f е диференцируема от ред $n+1$ в някаква околност δ на точка a от нейното ДО. Тогава за $\forall x \in \delta$, съществува точка c между a и x, такава че:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underbrace{\left(\frac{x-a}{x-c}\right)^p \frac{(x-c)^{n+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(c)}_{R_n(x) \text{ - остатъчен член}}$$

При $p=n+1$ получаваме остатъчен член във формата на Лагранж:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Така: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$

→ Доказателство:

Ще изведем формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж. Разглеждаме помощните функции $g(t)$ и $h(t)$.

$$g(t) = f(t) + \frac{f'(t)(x-t)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)$$

$$h(t) = (x-t)^{n+1}$$

$$g'(t) = \cancel{f'(t)} + \cancel{\frac{f''(t)(x-t)}{1!}} - \cancel{\frac{f'(t)}{1!}} + \cancel{\frac{f'''(t)(x-t)^2}{2!}} - \cancel{\frac{f''(t)(x-t)}{1!}} + \dots + \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} - \cancel{\frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}$$

$$\Rightarrow g'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} \qquad h'(t) = -(n+1)(x-t)^n$$

За $h(t)$ и $g(t)$ прилагаме Th на Коши в (a,x) или (x,a): $h'(t) \neq 0$ за $\forall t \in (a,x)$ или (x,a) и $h(t)$ и $g(t)$ са непрекъснати и диференц. в $(a,x)/(x,a) \Rightarrow \exists c \in (a,x)$ или (x,a) такова че:

$$\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{g'(c)}{h'(c)}$$

① $g(x)-g(a) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)(x-a)}{1!} - \dots - \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$

$h(x)-h(a) = -h(a) = -(x-a)^{n+1}$

$$\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{g'(c)}{h'(c)} \Leftrightarrow g(x)-g(a) = \frac{g'(c)}{h'(c)}\left(h(x)-h(a)\right)$$

$$g(x)-g(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!\,(n+1)(x-c)^n} \cdot \left(\cancel{-}(x-a)^{n+1}\right)$$

② $g(x)-g(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

От ① и ② следва:

$$f(x) - f(a) - \frac{f'(a)(x-a)}{1!} - \dots - \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$