ДСТР 1 Обобщение

- Обикновен (не мулти) неориентиран граф.

$G = \langle V, E \rangle$ V - върхове (крайно мн-во)

E - ребра $E \subseteq V_2$

$V_2 = \{ \{ v_i, v_j \} \mid v_i, v_j \in V \}$ (всички възможни ребра

$V_1 = \{\{v, v\} \mid v \in V\}$

Забележка: В тази дефиниция не се позволяват примки (За да има тр. $E \subseteq V_2 \cup V_1$)

Обикновен - нито с примки, нито мулти

- Обикновен (не мулти) ориентиран граф

$G = \langle V, E \rangle$ V - кр. мн-во от върхове

$E \subseteq V \times V$ - кр. мн-во от наредени двойки

- Мултиграф неориентиран

$G = \langle V, E, f \rangle$ V - кр. мн-во от върхове

E - кр. мн-во от ребра

$f: E \to V_2$

- Мултиграф ориентиран

$G = \langle V, E, f \rangle$ V - кр. мн-во от върхове

E - // -

$f: E \to V \times V$

- Неор. граф
  - път
  - цикъл
- Ориентиран граф
  - маршрут
  - контур

Б.О.О ще говорим в контекста на неор. граф

Път в неориентиран граф е редицата

$v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots v_k$

където $v_i \in V$, $e_i \in V$.

По избраната дефиниция за граф:

e_i е ребро м/у v_i и v_{i+1}

Казваме, че е цикъл, ако $v_1 = v_k$

- Един път е прост, ако няма повтарящи се компоненти.
- Прост цикъл: Път, който е цикъл и няма повтарящи се елементи освен първия и последния

Свързаност и свързани компоненти на граф: (в контекст на неор.)
$G=\langle V, E\rangle$ неор. граф (Б.О.О. говорим за обикновен граф)
Дефинирали релация на свързаност:
$P_G \subseteq V\times V$: $(v_i, v_j)\in P_G \Leftrightarrow$ има път от v_i до v_j.

P_G има 3 свойства:
- рефлексивност: за $\forall v\in V$, $\langle v,v\rangle \in P_G$ - всеки връх има път към себе си
- симетричност: ~~Ако~~ за $\forall v_i, v_j$ $\langle v_i, v_j\rangle \in P_G \Rightarrow \langle v_j, v_i\rangle \in P_G$ - понеже е неор.
- транзитивност $\langle v_i, v_j\rangle \in P_G$, $\langle v_j, v_k\rangle \in P_G \Rightarrow \langle v_i, v_k\rangle \in P_G$
  - аргументация, ако конкатенирали двата пътя получаваме $v_i \ldots v_k$

От тези свойства $\Rightarrow P_G$ е рел. на еквивалентност $\Rightarrow P_G$ и разбива на класове на екв. $\Rightarrow$ класовете на екв. са свързаните комп. в графа.
- Свързан граф $\Leftrightarrow$ граф с точно 1 свързана компонента
- деф. на дърво - свързан неор. граф без цикли
- деф кореново дърво: Индуктивно
  - база: Нека $T=\langle\{v\}, \emptyset\rangle$ е кореново дърво
  - ~~ИС~~: нека $T=\langle V, E\rangle$ е дърво.
  Тогава $T'=\langle V\cup\{x\}, E\cup\{\{x,v\}\}\rangle$ където $x\notin V$, $v\in V$
- деф 1 и деф 2 са еквивалентни
- тв: Ако $T=\langle V, E\rangle$ то $|V|=|E|+1$

Доказателство и на двете:
Трябва да докажем, че $\forall$ кор. дърво е свързано, няма цикли и $|V|=|E|+1$

Структурна индукция по построението на кореново дърво.
База: $T=\langle\{v\}, \emptyset\rangle$
- свързано (един връх)
- няма цикли (няма ребра)
- $|V|=1$, $|E|=0 \Rightarrow |V|=|E|+1$

ИП: Нека $T=\langle V, E\rangle$ е кореново дърво и за него са изпълнени горните твърдения

Разглеждаме $T' = \langle V \cup \{x\}, E \cup \{\{x, v\}\}\rangle$ $x \notin V$ и $v \in V$

Твърдя, че T' е:

- свързан: от и.п. T е свързан => от v са достижими всички върхове в T. v е свързан с x => x е свързан с всички върхове
- няма цикли: от и.п. няма цикли. x не участва в цикъл, понеже е свързан само с едно ребро.
- $|V \cup \{x\}| = |E \cup \{\{x, v\}\}| + 1$, от и.п. $|V| = |E| + 1$

$$|V \cup \{x\}| = |V| + 1 = |E| + 1 + 1 = |E \cup \{\{x, v\}\}| + 1$$

- Покриващо дърво

Нека $G = \langle V, E\rangle$ неор. граф. Нека $T = \langle V, E'\rangle$, където $E' \subseteq E$ такова, че T е дърво. => T е покриващо дърво на G.

- Обхождане на граф
  - разглеждане на върхове/ребра в определен ред/правила

```
BFS: G-граф, v-начален връх
  Q-queue
  visited
  q.enqueue(v)
  visited[v] ← true
  while q is not empty
     curr ← q.dequeue();
     //handle curr
     for u in adj[u]
        if not visited[u]
           q.enqueue(u)
           visited[u] ← true
   }
}
```

```
DFS: G-граф, v-нач. връх
DFS_rec: G, v, visited
   visited[v] ← true
   //handle v
   for u in adj[v]
      if not visited[v]
         DFS_rec(u);
```

```
DFS: G
   visited
   for v from G
      DFS_rec(v, visited)
```

— Ойлерови обхождания на <u>неор.</u> мултиграф

Ойлеров път - път, в който се обхождат всички ребра точно веднъж

Ойлеров цикъл - цикъл — // —

в G има Ойлеров път $\iff$ 1. G е свързан. в G има точно 2 върха от нечетна степен

в G има Ойлеров цикъл $\iff$ 1. G е свързан. в G ~~има~~ всички върхове са от четна степен