# Права в равнината

Яна Алексиева

2 септември 2025 г.

## 1 Параметрични уравнения на права в равнината

Нека е дадена афинна координатна система $K = Oxy$ в равнината.

Нека $M_0$ е фиксирана точка, а $\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0}$ е фиксиран вектор, тогава съществува единствена права $g$, която минава през точката $M_0$ и е колинеарна на вектора $\overrightarrow{p}$. Точка $M$ от равнината лежи върху правата $g$ точно тогава, когато $\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{p}$, което е еквивалентно на съществуването на единствено реално число $s$, за което:

$$\overrightarrow{M_0M} = s\overrightarrow{p}.$$

Ако обозначим радиус-векторите $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r_0}$ и $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$, то:

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}.$$

Следователно, векторно-параметричното уравнение на правата $g$ е:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + s\overrightarrow{p}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ако $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ и $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2)$, то координатните параметрични уравнения са:

$$\begin{cases} x = x_0 + sp_1 \\ y = y_0 + sp_2, \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}.$$

## 2 Общо уравнение на права в равнината

**Теорема:**

1. Всяка права в равнината има уравнение от вида:

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0).$$

2. Обратно, всяко такова уравнение определя точно една права в равнината.

**Доказателство:**

1. Нека правата $g$ минава през точката $M_0$ и е колинеарна на вектора $\overrightarrow{p}$. Точка $M$ от равнината лежи върху правата $g$ точно тогава, когато

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0) \parallel \overrightarrow{p}(p_1, p_2).$$

Координатното условие за колинеарност на два вектора в равнината е:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_2(x-x_0) - p_1(y-y_0) = 0.$$

След разкриване имаме уравнението:

$$p_2x - p_1y - p_2x_0 + p_1y_0 = 0.$$

Полагаме:

$$A = p_2, \quad B = -p_1, \quad C = -p_2x_0 + p_1y_0,$$

и получаваме:

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0).$$

Това уравнение наричаме общо уравнение на правата $g$ в равнината. От връзката $p_2 = A$, $-p_1 = B$ следва, че $g \parallel \overrightarrow{p}(-B, A) \neq \overrightarrow{0}$.

2. Обратно, ще докажем, че всяко уравнение от вида:

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0),$$

е уравнение на точно една права.

Нека $(x_0, y_0)$ е едно решение на горното уравнение, т.е. $Ax_0+By_0+C = 0$. Разглеждаме точката $M_0(x_0, y_0)$ и вектора $\overrightarrow{p}(-B, A)$. Съществува точно една права $g$, която минава през точката $M_0$ и е колинеарна на вектора $\overrightarrow{p}$. Координатните параметрични уравнения на тази права имат вида:

$$\begin{cases} x = x_0 + s(-B), \\ y = y_0 + sA, \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Това е еквивалентно на:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax+By+C = 0, \quad \text{понеже} \quad C = -Ax_0-By_0.$$

Окончателно, уравнението $Ax+By+C = 0$, при $(A, B) \neq (0, 0)$, е общо уравнение точно на разгледаната права $g$.

**Условие за колинеарност на права и вектор**

Нека правата $g$ е зададена с общо уравнение:

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0),$$

тогава направлението на $g$ е определено от вектора $\overrightarrow{p}(-B, A)$. При какво условие векторът $\overrightarrow{q}(q_1, q_2)$ е колинеарен на $g$?

Колинеарността е изпълнена, ако:

$$\overrightarrow{q}(q_1, q_2) \parallel g \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{q} \parallel \overrightarrow{p} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -B & A \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Това води до условието:

$$Aq_1 + Bq_2 = 0.$$

# 3 Взаимни положения на две прави в равнината

Разглеждаме две прави $g_1$ и $g_2$, зададени с техни общи уравнения:

$$g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

За да определим взаимните им положения, разглеждаме тяхното сечение като решение на системата:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

1. **Съвпадащи прави:** Ако редовете на матрицата от коефициентите имат ранг 1,

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 1,$$

тогава съществува константа $k \neq 0$, така че:

$$A_1 = kA_2, \quad B_1 = kB_2, \quad C_1 = kC_2.$$

В този случай $g_1 \equiv g_2$.

2. **Успоредни прави:** Ако редовете на матрицата от коефициентите имат ранг 2, но редуцираната матрица от коефициентите без свободните членове има ранг 1,

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} = 1, \quad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 2,$$

то двете прави са успоредни $g_1 \parallel g_2$ и нямат общи точки.

3. **Пресичащи се прави:** Ако редовете на матрицата от коефициентите пред променливите има ранг 2,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} = 2,$$

то системата има единствено решение и правите се пресичат в една точка $S$.

# 4 Декартово уравнение на права в равнината

Нека координатната система $K = Oxy$ е ортонормирана. Нека правата $g$ е зададена с общо уравнение:

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{при условие } B \neq 0.$$

От уравнението изразяваме $y$:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Полагаме $k = -\frac{A}{B}$ и $n = -\frac{C}{B}$. Тогава уравнението:

$$y = kx + n, \quad k, n \in \mathbb{R},$$

се нарича *декартово уравнение* на правата $g$.

Декартовото уравнение на права в равнината има следните характеристики:

- Правите в равнината, които са успоредни на координатната ос $Oy$, нямат декартови уравнения.
- Всяка права в равнината, която не е успоредна на $Oy$, има единствено декартово уравнение.
- Коефициентът $k$ се нарича *ъглов коефициент* на правата $g$. Ако ориентираният ъгъл $\angle(Ox^+, g) = \alpha$, то $k = \tan(\alpha)$.
- Пресечната точка $N = g \cap Ox$ има координати $(0, n)$.

# 5 Нормално уравнение на права в равнината. Разстояние от точка до права

Нека спрямо ортонормирана координатна система $K = Oxy$ е дадена правата $g$ с общо уравнение:

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0).$$

Колинеарният вектор на правата $g$ е $\overrightarrow{p}(-B, A)$. Вектор $\overrightarrow{n_g}$, който е с направление, перпендикулярно на $g$, наричаме *нормален вектор* на правата.

Тъй като $K$ е ортонормирана координатна система, можем да считаме, че координатите на $\overrightarrow{n_g}$ са $(A, B)$.

Дължината на този вектор е:

$$|\overrightarrow{n_g}| = \sqrt{A^2 + B^2},$$

следователно единичният нормален вектор на $g$ е:

$$\overrightarrow{n_1} = \frac{\overrightarrow{n_g}}{\sqrt{A^2+B^2}} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right).$$

Ще намерим такова общо уравнение на $g$, при което коефициентите пред $x$ и $y$ да са координатите на вектора $\overrightarrow{n_1}$. Всички общи уравнения на $g$ имат вида:

$$(kA)x + (kB)y + (kC) = 0, \quad (kA, kB) \neq (0, 0).$$

Търсим стойност на $k$, за която:

$$(kA)^2 + (kB)^2 = 1.$$

Получаваме $k = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Следователно уравненията:

$$\pm\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0,$$

се наричат *нормални уравнения* на правата $g$.

### Разстояние от точка до права

С помощта на вектора $\overrightarrow{n_1}$ ще получим формула за ориентирано разстояние от фиксирана точка $M_0$ до правата $g$. За удобство въвеждаме означенията:

$$A_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad B_1 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad C_1 = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Нека ортогоналната проекция на точката $M_0$ върху правата $g$ е точката $H$. Тогава векторът $\overrightarrow{HM_0}$ е колинеарен на $\overrightarrow{n_1}$, т.е.:

$$\overrightarrow{HM_0} = \delta\overrightarrow{n_1},$$

за точно една стойност на $\delta$.

За да пресметнем ориентираното разстояние $\delta(M_0, g)$, използваме координатите на участващите обекти:

$$M_0(x_0, y_0), H(x_H, y_H), \overrightarrow{n_1}(A_1, B_1),$$

$$\begin{cases} x_0 - x_H = \delta A_1 \\ y_0 - y_H = \delta B_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_H = x_0 - \delta A_1 \\ y_H = y_0 - \delta B_1. \end{cases}$$

Като заместим кооординатите на точката $H$ в нормалното уравнение на $g$:

$$A_1 x_H + B_1 y_H + C_1 = 0,$$

намираме ориентираното разстояние:

$$\delta(M_0, g) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

# 6 Полуравнини

Нека спрямо произволна афинна координатна система $K = Oxy$ е дадена правата $g$ с общо уравнение:

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0).$$

Само полинома отляво означаваме с $l(x, y)$, а именно $l(x, y) = Ax + By + C$. Разглеждаме две различни точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, които не лежат на правата $g$. В сила е следната теорема.

**Теорема:** Отсечката $M_1M_2$ пресича правата $g$ тогава и само тогава, когато $l(x_1, y_1)l(x_2, y_2) < 0$.

**Доказателство:**

1. ($\Rightarrow$) Нека отсечката $M_1M_2$ пресича правата $g$ в точката $M_0(x_0, y_0)$. Точката $M_0(x_0, y_0)$ е вътрешна за отсечката $M_1M_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M_1} = k\overrightarrow{M_0M_2}$ за $k < 0$.

$$\begin{cases} x_0 - x_1 = k(x_0 - x_2) \\ y_0 - y_1 = k(y_0 - y_2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 - k.x_2}{1 - k} \\ y_0 = \dfrac{y_1 - k.y_2}{1 - k} \end{cases}$$

$M_0(x_0, y_0) \in g \Leftrightarrow l(x_0, y_0) = 0$. След заместване получаваме $l(x_1, y_1) - kl(x_2, y_2) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{l(x_1, y_1)}{l(x_2, y_2)} < 0 \Rightarrow l(x_1, y_1)l(x_2, y_2) < 0$.

2. ($\Leftarrow$) Нека $l(x_1, y_1)l(x_2, y_2) < 0$. Означаваме $k = \frac{l(x_1,y_1)}{l(x_2,y_2)} < 0$ и разглеждаме точката $M_0(x_0, y_0)$, за която

$$x_0 = \frac{x_1 - kx_2}{1-k}, \quad y_0 = \frac{y_1 - ky_2}{1-k}.$$

Така имаме, че $l(x_0, y_0) = l(x_1, y_1) - kl(x_2, y_2) = 0 \Rightarrow M_0(x_0, y_0) \in g$.

За координатите на векторите $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ получаваме:

$$\begin{cases} x_0 - x_1 = k(x_0 - x_2) \\ y_0 - y_1 = k(y_0 - y_2) \end{cases}, k < 0.$$

Следователно $\overrightarrow{M_0M_1} = k.\overrightarrow{M_0M_2}$ за $k < 0 \Leftrightarrow$ векторите са противопосочни $\Rightarrow M_0(x_0, y_0)$ е вътрешна за отсечката $M_1M_2$, а точките $M_1$ и $M_2$ са от различни полуравнини спрямо правата $g$.

В следствие на горната теорема аналитично описваме двете полуравнини $\lambda$ и $\bar{\lambda}$ с контур правата $g$ по следния начин:

$$\lambda_g = \{M(x,y) : l(x,y) > 0\} \quad \bar{\lambda}_g = \{M(x,y) : l(x,y) < 0\}.$$