(27) Алгебра 1

I. Ранг на система вектори

— Нека F е числово поле и $A \in F_{m \times n}$ е матрица

Деф: (минор от ред k)

Ако фиксираме произволни k реда и произволни k стълба от матрицата A, елементите, които седят в пресечните им точки образуват квадратна матр. от ред k. Детерминантата на всяка такава матрица се нарича минор на A от ред k. $1 \le k \le \min(m,n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 \le i_1 < i_2 \dots < i_k \le m \\ 1 \le j_1 < j_2 \dots j_k \le n \end{matrix}$$

Деф: (ранг на матрица)

Една матрица $A \in F_{m \times n}$ има ранг r (и означаваме $r(A) = r$, $\operatorname{rank}(A) = r$), ако има минор от ред r различен от нула и всеки друг минор от по-голям ред е равен на 0.

Забележка: Ако всички минори от ред $r+1$ са нула, то и всички минори от ред по-голям от $r+1$ също са равни на 0

$\Rightarrow$ Ако $r(A) = r$, всички минори от $k > r$ са нулеви

Заб.: От теоремата за транспонирана детерминанта $\det A^t = \det A \Rightarrow r(A^t) = r(A)$

Деф: (ранг на система вектори)

Нека V е линейно пространство и $c_1, c_2 \dots c_k$ е система вектори от V. Казваме, че системата вектори $\{c_i\}_{i=1}^{t}$ има ранг r (и пишем $r(c_1, c_2 \dots c_t) = r$), ако съществуват r линейно независими вектора от тази система и всеки друг вектор в системата е тяхна линейна комбинация

т.е. рангът на система вектори е равен на максималния брой линейно независими вектори в тази система

— рангът $r(c_1, c_2, \dots c_k) = r(\underbrace{c_1', c_2', \dots c_k'}_{\text{базис}}) = \dim l(c_1, c_2, \dots, c_k)$

Теорема за равенство на ранг на матрица с ранг на система от вектор редове и ранг на система от вектор стълбове на матрицата

Нека F е числово поле и $A \in F_{m \times n}$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, като с $a_1, a_2 \dots a_m$ и $b_1 \dots b_n$ ще означим съответно вектор редовете и вектор стълбовете на A.

Тогава $r(A) = r(a_1, a_2 \dots a_m) = r(b_1, b_2, \dots b_n) = r$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to a_1 \\ \to a_2 \\ \vdots \\ \to a_m \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ b_1 & b_2 & & b_n \end{array} \end{array}$$

2-во: Нека $r(A) = r \Rightarrow r(A^t)$, т.е. е достатъчно да докажем, че $r(A) = r = r(b_1, b_2, \dots b_n)$

Ако $A = 0$ (нулевата матрица), то твърдението е очевидно.

Нека $r(A) = r \geq 1$. Б.О.О. можем да считаме, че минорът от ред r, стоящ в горния ляв ъгъл е различен от нула.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1\,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r\,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline a_{r+1\,1} & \dots & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & \dots & & & \dots & a_{mn} \end{array}\right) \quad \text{и} \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \det D \neq 0$$

Така първите r стълба на A са линейно независими. Ако има линейна зависимост между стълбовете $b_1, \dots b_r$, то същата зависимост ще я има и в матрицата D и $\det D = 0$.

Ще покажем, че всеки стълб b_l, $r < l \leq n$ е лин. комбинация на стълбовете $b_1, b_2, \dots b_r$ и теоремата ще бъде доказана.

Нека i е произволно ест. число $1 \leq i \leq m$ и да образуваме квадр. матр.

$$D_i = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ \vdots & & & \vdots & a_{2l} \\ a_{r1} & \dots & \dots & a_{rr} & a_{3l} \\ \hline a_{i1} & \dots & \dots & \dots & a_{il} \end{array}\right)_{(r+1)\times(r+1)}$$

D_i е от $r+1$ ред, образуван добавяйки l-тия вектор стълб на A и i-тия вектор ред на A

Ако $i \leq r$, то ще има два еднакви реда в D_i и $\det D_i = 0$

Ако $r+1 \leq i \leq m$, то $\det D_i = 0$, защото $r(A) = r$ и D_i е минор от $(r+1)$ ред на A $\Rightarrow \det D_i = 0$ (всеки минор от $r+1$ ред на $A = 0$)

– Нека $A_1, \dots A_r$ са адюнгираните количества на $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}$ и A_l е адюнгираното количество на a_{il} и $A_l = \det D = \Delta$

Развиваме детерминантата на D_i по ~~следния начин~~ последния ред

$a_{i1}A_1 + \dots + a_{ir}A_r + a_{il}\Delta = 0$ т.к. $\Delta \neq 0$, то

$$a_{il} = -\frac{A_1 . a_{i1}}{\Delta} - \dots - \frac{A_r . a_{ir}}{\Delta}$$

Всяко от адюнгираните количества A_{j}, $j = \overline{1,r}$ $= (-1)^{(r+1)+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \dots & a_{rl} \end{vmatrix}$

така за всяко едно от останалите уравнения се ...

Не зависи от избора на реда i, така:

- за всяко $i = 1, 2, \dots, m$ $\quad a_{il} = -\underbrace{\frac{A_1}{\Delta}}_{\lambda_1} a_{i1} - \underbrace{\frac{A_2}{\Delta}}_{\lambda_2} a_{i2} - \dots - \frac{A_r}{\Delta} a_{ir}$

всеки елемент a_{il} на l-тия стълб b_l е линейна комбинация на съответните елементи на стълбовете $b_1, \dots, b_r$ с едни и същи коефициенти за всяко $i = 1, 2, \dots, m$.

Следователно b_l е линейна комбинация на $b_1, \dots b_r$ със същите коефициенти

Следствие: Ако A е квадратна матрица от ред n, то $\det A = 0$, т.т.к. редовете (стълбовете) на A са линейно зависими.

V Системи ~~лин~~ линейни уравнения – СЛУ

СЛУ наричаме системи от уравнения от първа степен с няколко неизвестни

Нека е дадена системата (1) с m-уравнения, n-неизвестни

$$(1)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Коефициентите и свободните членове $\in$ числовото поле F

Матрица на системата се нарича

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Разширена матрица на системата наричаме

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad \bar{A} = (a_{ij} | b_i)$$

- Решение на СЛУ е всяка наредена n-торка от числа $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, за която всяко уравнение е тъждество след заместване
- Една система се нарича несъвместима – ако няма решение
  съвместима – ако има поне едно решение
- Една съвместима система наричаме определена – точно 1 решение
  неопределена – повече от 1 решение

Теорема на Руше (тогава и само тогава когато)

Една СЛУ е съвместима т.с.т.к. $r(A) = r(\bar{A})$, рангът на матрицата на системата съвпада с ранга на разширената матрица

Доказателство: Нека $b_1, b_2, \dots b_n$ са векторите стълбове на матр. A, а b е стълба от свободните членове в разширената матрица

$r(A) = r(b_1, b_2, \dots, b_n) \quad r(\bar{A}) = r(b_1, b_2, \dots, b_n, b) \geq r(A)$

Тогава $r(A)=r(\bar{A})$ т.с.т.к. b е линейна комбинация на $b_1, \dots, b_n$.
т.е. $b \in l(b_1, b_2, \dots, b_n)$ т.е. съществуват коеф. $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, т.ч.
$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n = b$, но това е еквивалентно на факта, че
n-торката $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ е решение на системата, т.е. тя е съвместима

Теоремата на Руше е критерий за съвместимост на дадена система, но не показва начин за намирането на решенията ѝ.

III ХСЛУ

-СЛУ, в която свободните членове са равни на 0 се нарича хомогенна СЛУ.

$$2)\ \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

} Тази система е винаги съвместима, защото притежава нулевото решение

Ако $m > n$, то тези уравнения са излишни (няма нужда от повече от n)
Ако $m < n$, то $r(A) \le m < n$ и тогава системата има безброй много решения, в частност и нулевото
Ако ~~m=n~~ $r(A)=n$ и системата е определена $\Rightarrow$ само нулево решение
Мн-вото от решенията на ХС е подпространство на лин. пр-во F^n
Ако $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ е решение на системата 2), т.е. на ХСЛУ и $\beta = (\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n)$ е решение на същата ~~хомогенна система~~ ХСЛУ, то и произволна лин. комбинация на тези решения е решение на ХСЛУ-то.

Тъй като имаме n неизвестни, то разглеждаме системата в лин. пр-во $V = F^n$ над F.

Ако α и β са решения на 2), то за $\forall \lambda, \mu \in F \Rightarrow \lambda.\alpha + \mu.\beta$ е решение на ХСЛУ
$\Rightarrow$ по критерия за подпространство
$\Rightarrow$ {мн-вото от решенията на ХСЛУ е подпространство на пространството от наредени n-торки числа. т.е. $\{$реш. на 2)$\} \le F^n = V$

Ще покажем, че $\lambda\alpha + \mu.\beta$ е решение на системата.
За всяко едно от уравненията се прави проверка:
т.к. α и β са решения, то
$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \quad \xrightarrow{\text{заместваме}}$$
$$a_{11}\beta_1 + \dots + a_{1n}\beta_n = 0$$

$$\Rightarrow a_{11}(\lambda.\alpha_1 + \mu.\beta_1) + a_{12}(\lambda\alpha_2 + \mu.\beta_2) + \dots + a_{1n}(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) =$$
$$= \lambda(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots) + \mu(a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \dots + a_{1n}\beta_n) = 0$$

така за всяко едно от останалите уравнения се получава, че всяко едно уравнение е тъждествено равно на 0 след заместване $\Rightarrow \lambda\alpha + \mu\beta$ е подпр-во

Фундаментална система от решения

Всеки базис на пространството от решенията (ако то е ненулево) на хомогенната система 2) се нарича фундаментална система решения на тази система.
Всяко ФСР се състои от линейно независими вектори от F^n, които са решения на Х и $\forall$ друго решение е тяхна лин. комбинация.

Заб. Ако U е ~~подмн-во~~ подпространство на F^n, за F - числово поле, то U може да се представи като

$$U = \{(a_1, a_2, \ldots a_k)\}_{a_i \in V} \text{ или } U: | \text{ХСЛУ} \rightarrow \text{т.е. да се представи като ХСЛУ}$$

Теорема: Нека U е пространства от решения на ХСЛУ (2). Тогава, ако $r(A) = r$, то $\dim U = n - r$
(т.е. всяка ФСР на системата има $n-r$ брой решения)

Деф: за ЛЗ, ЛНЗ, базиз?, лин. комбинация, адюнгирани количества??