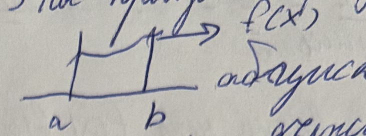
2б ДИС 2 Обобщение

Увод: Идея зад интеграл – представяне на S на произволна фигура като сума от подходящи правоъгълници.



– разбиване на интервал

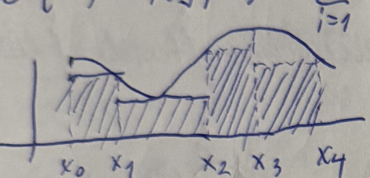
τ на $[a,b]$ се нарича $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ $a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$ дължина $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

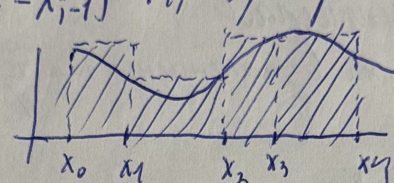
– диаметър $d(\tau) = \max \Delta x_i = \max\limits_{1\le i\le n} (x_i - x_{i-1})$

– суми на Дарбу – $f(x)$ в $[a,b]$, $\tilde{x}$ – разбиване

$\underline{s}(f,[a,b],\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ m_i – точна долна граница на $f(x)$ $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$\overline{S}(f,[a,b],\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ M_i – горна гр. на $f(x)$ $x \in [x_{i-1}, x_i]$



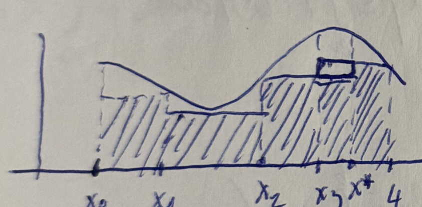


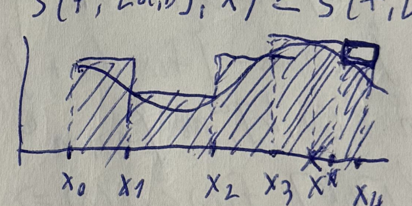
Свойства:

– на едно разбиване отг. т. една 1 г и 1 м суми на Дарбу

– $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ на $[a,b]$, ако $\tilde{x} < \tilde{y}$ то: $\underline{s}(f,[a,b],\tilde{x}) \le \underline{s}(f,[a,b],\tilde{y})$

$\overline{S}(f,[a,b],\tilde{x}) \ge \overline{S}(f,[a,b],\tilde{y})$





Док: $\tilde{y}$ има x^* спрямо $\tilde{x}$. Б.О.О. $x^* \in (x_{n-1}, x_n)$ $\quad x_n - x^* + x^* - x_{n-1}$

$\underline{s}(f,[a,b],\tilde{y}) - \underline{s}(f,[a,b]\tilde{x}) = m'(x^* - x_{n-1}) + m''(x_n - x^*) - m_n(x_n - x_{n-1})$

$m' = \inf\limits_{x\in[x_{n-1},x^*]} f(x) \quad m'' = \inf\limits_{x\in[x^*,x_n]} f(x)$

$\Rightarrow \underbrace{(m' - m_n)}_{m' \ge m_n} \underbrace{(x^* - x_{n-1})}_{\ge 0} + \underbrace{(m'' - m_n)}_{m' \ge m_n} \underbrace{(x_n - x^*)}_{\ge 0} \Rightarrow \ge 0$

Св-во: Всяка $\overline{S} \ge \underline{s}$ Док.?? $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ $\tilde{z} = \tilde{x} \cup \tilde{y}$ $\quad \underline{x} \le \underline{z} \le \overline{z} \le \overline{y}$

– Риманов интеграл чрез Дарбу

$f(x)$ е деф. и огр. в $[a,b]$. $f(x)$ е интегруема по Риман в $[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ разбиване τ и $\underline{s}$, $\overline{S}$ такива, че $\overline{S}(f,\tau) - \underline{s}(f,\tau) < \varepsilon$

$\underline{I}$ – точна долна граница на вс. малки с. на Д. долен интеграл

$\overline{I}$ – т. горна граница на вс. големи с. на Д. горен интеграл

(⇐) Има $\varepsilon > 0$ и τ, за което $\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$

$\underline{S} \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S} \Rightarrow \overline{I} - \underline{I} \le \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$ за $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$ е интегруема

(⇒) Отписват...

- Кантор – всяка непр. $f(x)$ в $[a, b]$ е равномерно непр.

- Th – $f(x)$ е деф. и непр. в $[a, b] \Rightarrow$ е интегруема по Риман

Доказателство: Отписват...

Свойства на Римановия интеграл

① Стойността не зависи от означението на променливата $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

② $\int_a^a f(x)dx = 0$

③ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ $\lambda \int_a^b f(x)dx$

④ $f(x)$ и $g(x)$ интегруеми в $[a, b] \Rightarrow f(x)+g(x)$ и $\lambda f(x)$ също са

⑤ Ако $f(x)$ е интгр. в $[a, b]$ то и $|f(x)|$ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

⑥ Ако $c \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

⑦ $f(x) \ge 0$ и $f(x)$ - непр. в $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) \ge 0$

⑧ $f(x)$ и $g(x)$ ~~непр.~~ интгр. в $[a, b]$ $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

⑨ m и M такива, че $\forall x \in [a, b]$ $m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

-Th Болцано – $f(x)$ непр. в $[a, b]$ и $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ $f(c) = 0$

- следствие $f(x)$ приема вс стойности м/у m и M (min и max за интервала)

Th Средни стойности: За поне една т. $c \in [a, b]$ е изпълнено $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Доказателство: От Вайерщрас f достига m и M. $m = f(x_1)$ $M = f(x_2)$

От св. 9 $\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$

$\Rightarrow \exists c : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \Rightarrow \int_a^b \frac{f(x)dx}{\cancel{b-a}} = f(c).(b-a)$

Нютон – Лайбн: $f(t)$ инт в $[a, b]$. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. $F(x)$ е диф. в $[a, b]$

и $F'(x) = f(x)$ за $\forall [a, b]$

ДИС 2 Обобщение

– Нютон-Лайбниц – $f(x)$ е непр. в $[a,b]$ и $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

$F(x)$ е диф. в $[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$ за $\forall x \in [a,b]$

Доказателство: / отписвай....

Th за изчисляване на определен интеграл – $f(x)$ непр. в $[a,b]$ и $\varphi(x)$ е нейна примитивна ($\varphi'(x) = f(x)$). Тогаз $\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(x)\Big|_a^b$

Док: / от Th Нютон-Лайбниц $\Rightarrow$ $F(x)$ също е примитивна на $f(x)$.

$\Rightarrow \varphi'(x) = f(x) = F'(x) \Rightarrow F'(x) = \varphi'(x) + c$

При $x = a \Rightarrow F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \Rightarrow F(a) = \varphi(a) + c = 0$

$\Rightarrow c = -\varphi(a)$

При $x = b \Rightarrow F(b) = \int_a^b f(t)dt \Rightarrow F(b) = \varphi(b) - \varphi(a)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(x)\Big|_a^b$