29 СЕМ Обобщение

4) ако $f|g$, то $af|ag$ за $a\in F^*$

5) ако $f|h_1+h_2$ и $f|h_1$, то $f|h_2$ $h_1,h_2,f\in F[x]$

6) ако $f|h_i$ $i=\overline{1,k}$, то $f|t_1h_1+t_2h_2+\dots+t_kh_k$ $t_i\in F[x]$

– НОД – $f,g\in F[x]$, поне единия е ненулев. $d\in F[x]$ е НОД на f и g, ако:

1) $d|f$, $d|g$
2) ако $d_1|f$, $d_1|g$, то $d_1|d$ Бележим $d=(f,g)$

– НОД на к полинома – $f_1,f_2,\dots f_k\in F[x]$ и поне един е ненулев, то $(f_1,\dots f_k)=((f_1,\dots,f_{k-1}),f_k)$

– $f,g\in F[x]$ са взаимно прости, ако $(f,g)=const$ $const\in F^*$ (т.е. е ненулева)

Th| За $\forall f,g\in F[x]$, поне единия ненулев, съществува НОД $d=(f,g)$

Док:| Деф:(идеал)

Д-во:| Нека I е идеал на $F[x]$, пораден от f и g $I\neq\{0\}$ $I=\{uf+vg \mid u,v\in F[x]\}$
В пръстена $F[x]$ всеки идеал е главен. Нека $I=(d)$.
От $f,g\in(d) \Rightarrow f=df_1$ и $g=dg_1$ $f_1,g_1\in F[x] \Rightarrow d|f$ и $d|g$.
От $d\in I \Rightarrow \exists u,v\in F[x]$ $d=uf+v.g$. ако $d_1|f$ и $d_1|g$, то $d_1|d \Rightarrow d=(f,g)$

$\exists$ на НОД (Евклид) – правило за намиране на НОД
Нека $f,g\in F[x]$
– ако $g=0$ и $f\neq0$, $(f,g)=f$. Нека $g\neq0 \Rightarrow f=g.q_1+r_1$ $\deg r_1<\deg g$
– ако $r_1\neq0$ то $g=r_1q_2+r_2$, $\deg r_2<\deg r_1$, ако $r_2\neq0$, то $r_1=r_2.q_3+r_3$ ....
Всеки остатък делим на ~~следв~~ следващия:
Степените на остатъците намалява => след краен брой стъпки – нулев остатък
Последният ненулев остатък е НОД на f и g.
– Ако $r_1=0$ то $g|f$ и $(g,f)=g$ ↳ тва може би се философства още

Тъждество на Безу – ако $(f,g)=d$, то $\exists$ полиноми $u,v\in F[x]$ т.ч.
$u.f+v.g=d$

Док:| $d=r_k$ (~~пред~~ последния ненулев остатък)
$d=r_k=r_{k-2}-r_{k-1}q_k=\frac{r_{k-3}-r_{k-1}}{q_{k-1}}-r_{k-1}q_k$ връщайки се нагоре получаваме, че $(\dots).f+(\dots).g=r_k=d$, т.е. е доказано

– Забележка u и v са взаимно прости

F - поле, $f(x) \in F[x]$ и $F[x]$ е област.

Деф.: Нека K е разширение на полето F и $\alpha \in K$. α е корен на f, ако
$f = (x-\alpha)\cdot g$, $g \in K[x]$ т.е. $f(\alpha)=0$

Th: $f \in F[x]$ и $\deg f > 0 \Rightarrow \exists$ разширение K на полето F, в което полиномът f има корен.

Следствие: $\exists$ разширение K на полето F, където f се разлага на линейни множители т.е. всичките корени на f са в това разширение

$$f = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) \in K[x]$$

Най-малкото такова разширение наричаме поле на разлагане на полином f над полето F.

Следствие: ако $\deg f \leq n$, то f има най-мн n два по два $\neq$ корена

Формули на Виет

Нека $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in F[x]$, $a_0 \neq 0$ и L е полето на разлагане на f над F

$\Rightarrow f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) \in L[x]$ $\alpha_i \in L$, $i=\overline{1,n}$ са корени на f

Тогава са в сила следните формули:

$$\sigma_1 = \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n = (-1)^1\frac{a_1}{a_0}$$

$$\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\dots+\alpha_{n-1}\alpha_n = (-1)^2\frac{a_2}{a_0}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

Общ вид $\sigma_i = \sum_i \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_i = (-1)^i\frac{a_i}{a_0}$

Броят изрази в сумата е $\binom{n}{i}$ за σ_i

Пример

$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ $a \neq 0$, $f \in F[x]$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in L[x]$

$$\sigma_1 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -\frac{b}{a}$$

$$\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a}$$

$$\sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a}$$

Използвани деф: пръстен, комут. пр. с 1, област, поле, идеал

29 СЕМ Обобщение

→ Вероятност

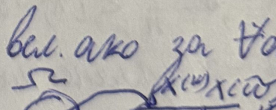
- случаен експеримент
- елементарно събитие
- Ω
- събитие $A \subseteq \Omega$
- сигма алгебра – $\mathcal{A}$ колекция от подмн-ва на Ω. $\mathcal{A}$ е σ-алгебра, когато: 1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
  2) ако $A \in \mathcal{A}$, то $A^c \in \mathcal{A}$
  3) $A_i \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

  Следствие: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

- Вероятност: Имаме Ω, $\mathcal{A}$ σ-ал. над Ω. Изображението $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$ се нарича вероятност ако:
  1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ – нормираност
  2) ако $A \in \mathcal{A}$, то $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
  3) Ако $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i,j$ $i \neq j$, то $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ – адитивност

Св-ва: 1) за $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$ и ≤ 1 – неотрицателност
2) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
3) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ – монотонност
4) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
5) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

- вероятностно пространство – $V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- случайна величина. – Имаме V. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ е сл. вел. ако за $\forall a<b, \in \mathbb{R}$ ~~a, b ∈ ℝ~~ $X^{-1}(a,b) = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < b\} \in \mathcal{A}$



- пълна група от събития $H = (H_1 \dots H_n)^{\text{или } \infty}$ $H_i \cap H_j = \emptyset$ и $\bigcup_j H_j = \Omega$ $H_j \in \mathcal{A}$
- индикаторна ф-я: $H \subseteq \Omega$ $1\!\!1_H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \omega \in H \\ 0 \end{cases}$
- дискретна сл. вел. – Имаме V и $H = \begin{cases} H_1 \dots H_n \\ H_1 \dots \end{cases}$ е пълна група от съб. $X = \begin{cases} x_1 \dots x_n \\ x_1 \dots \end{cases}$ – редица от числа съответстващи на H. Тогава $X: \Omega \to \mathbb{R}$ зададено чрез $X(\omega) = \sum_{j=1}^{n \text{ или } \infty} x_j 1\!\!1_{H_j}(\omega)$ се нарича ... за кратко $X = \sum_j x_j 1\!\!1_{H_j}$

- Таблица на разпределение

X	x_1	x_2	x_3	...
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	p_3	...

$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ $p_i \geq 0$

- Функ на разпределение – Имаме V и X във $V \Rightarrow F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
- независимост – X и Y във V. $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$ за $\forall x_i, x_j$
- Математическо очакване – X дискр. във V. Тогава $\mathbb{E}X = \sum_i x_i p_i$, ако $\mathbb{E}X < \infty$

Някои свойства:
1) $\mathbb{E}\,const = const$
2) ако $Y = 1_A$, то $\mathbb{E}Y = \mathbb{P}(A)$
3) $\mathbb{E}[X \pm Y] = \mathbb{E}X \pm \mathbb{E}Y$
4) Ако $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$

} X и Y дискр. сл. вел. във едно V и $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y < \infty$

- Дисперсия – Имаме X дискр. сл. и $\sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_i < \infty$. Тогава дисперсия е

$$DX = \sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_i = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$ следствие $DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

Някои свойства:
1) $DX \geq 0$
2) $D\,const = 0$
3) $DcX = c^2 DX$
4) Ако $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $D(X \pm Y) = DX \pm DY$

- Пораждаща функ. – X е целочислена, неотр. сл. вел.

$$g_X(s) = \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k)$$ за $|s| \leq 1$

Свойства:
1) $\mathbb{E}X = g'_X(1)$
2) $DX = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$
3) $n!\,p_n = g_n^{(n)}(0) \Rightarrow p_n = \frac{g_n^{(n)}(0)}{n!}$

Следствие: Ако $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, то $g_Y(s) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(s)$

Разпределения

1) Равномерно дискр. – дискр. сл. вел. X приема краен брой стойности $X = \{x_1 \dots x_n\}$ и вероятността за всяка от тях е равна (и са на еднакво разстояние)
   - ако $|X| = n$ $p_i = \frac{1}{n}$ за $\forall i$
   - $\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = p_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \dots$ $\bar{X}$ – средно аритметично
   - $DX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}X)^2$

Задачи – хвърляне на зар, хазартни честни игри + пример?

! За всичко останало е нужна Бернули (без Поасон)!

Схема на Бернули – бинарен експеримент с два изхода 0 и 1

Разпределение на Бернули $\rightarrow X \sim Ber(p)$, ако

X	0	1
$\mathbb{P}$	$1-p$	p

$q = 1 - p$

$\mathbb{E}X = 0.(1-p) + 1p = p$

$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = p - p^2 = pq$

$g_X(s) = (1-p).s^0 + p.s^1 = q + ps$

Статистика обобщени

2) Биномно – $X \sim Bin(n,p)$ X – брой успехи в първите n опита в схема на Бе.

$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_i \sim Be(p)$ и X_i са независими в съвкупност

$\Rightarrow g_X(s) = \prod_{i=1}^{n}(q+ps) = (q+ps)^n$

$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} X_i = n.\mathbb{E}X_i = np$

$DX = D\sum_{i=1}^{n} X_i = n.p.q$

Задачи – хвърляне на зар 5 пъти, $\mathbb{P}$(два пъти 6)?

3) Геометрично – брой неуспехи до 1 успех

само брой неуспехи $X = \min\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} X_i = 1\} - 1 \Rightarrow X \sim Ge^-(p)$ вер. за успех в 1 опит на Бернули

$\mathbb{P}(X=k) = q^k . p$ геометрична прогресия

$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k . \mathbb{P}(X=k) = p.\sum_{k=0}^{\infty} s^k . q^k = \frac{p}{1-qs}$

$\mathbb{E}X = g_X'(1) = \frac{(-p).(-q)}{(1-q.1)^2} = \frac{p.q}{p^2} = \frac{q}{p}$

$DX = \frac{q}{p^2}$

Ако брои и първи успех $\Rightarrow X' \sim Ge^+(p)$

$\Rightarrow \mathbb{E}X' = \mathbb{E}[X+1] = \mathbb{E}X + 1 = \frac{q}{p} + 1 = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow DX' = D[X+1] = DX + D1 = DX = \frac{q}{p}$

Задача – Баскетболист хвърля, докато не вкара

бонус: безпаметност: $X \sim Ge(p)$, то $\mathbb{P}(X \geq m+k \mid X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq m)$

4) Поасоново λ – интензитет

$X \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$, ако $\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $k \geq 0$

$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k . \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!} = e^{\lambda s} . e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$

$\mathbb{E}X = g_X'(1) = \lambda . e^{\lambda(s-1)}\Big|_1 = \lambda$

$DX = \lambda$

Задачи: – брой катастрофи за единица време