(29) Дискретни разпределения. Равномерно, биномно, геометрично и Поасоново разпределение. Задачи, в които възникват. Моменти – математическо очакване и дисперсия.

→ Вероятност

Преди да дадем деф. за вероятност трябва да дефинираме:

– (Елементарно събитие и случаен експеримент) – експеримент, чиито изходи не са предопределени се нарича случаен, а всеки възможен изход от него се нарича елементарно събитие.

Деф:/ Мн-во от всички ел. събития на случаен експеримент се означава с $\Omega$.

Деф:/ (събитие) Нека $\Omega$ е мн-во от елементарни събития и нека $A \subseteq \Omega$. Тогава $A$ се нарича събитие.

Деф:/ (сигма алгебра) Нека $\Omega$ е мн-во от всички ел. събития на експеримент и $\mathcal{A}$ е колекция от подмножества на $\Omega$. Тогава $\mathcal{A}$ е $\sigma$-алгебра, ако:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
2) ако $A \in \mathcal{A}$, то $A^c \in \mathcal{A}$
3) ако $A_i$, $i \geq 1$ са такива, че $A_i \in \mathcal{A}$, за $\forall i \geq 1$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

(в частност, ако $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$)

Следствие: Ако $\mathcal{A}$ е $\sigma$-алгебра над $\Omega$, то $\Omega \in \mathcal{A}$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, ако $A_i \in \mathcal{A}$ за $\forall i \geq 1$

Деф:/ (Вероятност) Нека $\Omega$ е мн-во от елементарни събития и $\mathcal{A}$ е $\sigma$-алгебра над $\Omega$. Тогава изображението $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0, 1]$ се нарича вероятност, ако удовлетворя:

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ – нормираност
2) ако $A \in \mathcal{A}$, то $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3) ако $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ са събития от $\mathcal{A}$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $\forall i, j$ $i \neq j$, то

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$ – адитивност

Свойства:/

а) за $A \in \mathcal{A}$, то $\mathbb{P}(A) \geq 0$ и $\mathbb{P}(A) \leq 1$ – неотрицателност
б) $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$
в) ако $A \subseteq B$ и $A, B \in \mathcal{A}$, то $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ – монотонност

г) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ за $\forall A, B \in \mathcal{A}$

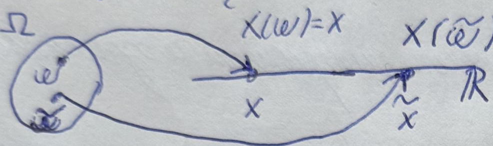
д) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ за $A_i \in \mathcal{A}$, $\forall i \geq 1$

Деф:/ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ се нарича вероятностно пространство

→ Случайна величина

Деф:/ Нека $V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство. Тогава $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е случайна величина, ако за $\forall\, a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ е вярно, че

$$X^{-1}(a,b) = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < b\} \in \mathcal{A}$$




Преди да дефинираме дискретна сл. величина, ще зададем следните деф:

Деф:/ (Пълна група от събития)

- Нека $V = (\Omega, \mathcal{A}, P)$ е в.п. Казваме, че $H = (H_1, \dots, H_n)$ или $H = (H_1, H_2 \dots)$ дефинира пълна група от събития, ако $H_i \cap H_j = \emptyset$ $\forall i, j$ $i \neq j$ и $\bigcup_i H_i = \Omega$ (Може да бъде $\bigcup_i^n H_i$ или $\bigcup_i^\infty H_i$), ако $H_i \in \mathcal{A}$ за $\forall i$

Деф:/ (Индикаторна ф-я):

Ако $\Omega$ е мн-во от елем. събития и $H \subseteq \Omega$ е събитие, то

$$\mathbb{1}_H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \omega \in H \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$ наричаме индикаторна функция

Деф:/ (Дискретна сл. вел.)

Означаваме $\overline{X} = \begin{cases} (x_1, \dots x_n) \\ (x_1, \dots x_n \dots) \end{cases}$ и $H = \begin{cases} (H_1, H_2 \dots H_n) \\ (H_1 \dots H_n \dots) \end{cases}$

→ вектори с краен брой или изброимо безкраен брой елементи

Нека $V$ е вер. пр. и $H$ е пълна група от събития в него.

Нека $\overline{X}$ е вектор или редица от числа, съответстващи на елементите в $H$.

Тогава $X : \Omega \to \mathbb{R}$, зададено чрез:

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{H_i}(\omega) \text{ или } X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{1}_{H_i}(\omega)$$ за краткост

$X = \sum_i x_i \mathbb{1}_{H_i}$ се нарича дискретна сл. вел.

Таблицата

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ | ... |

където $p_i \geq 0$ и $\sum_i p_i = 1$

се нарича таблица на разпределение на сл. вел. $X$.

$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$

**Деф:** (ф-я на разпределение)

Нека $X$ е сл. вел. във вер. пр-во $V$. Тогава $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ за $\forall x \in \mathbb{R}$ се нарича функция на разпределението

**Деф:** (независимост)

Нека $X$ и $Y$ са 2 дискр. сл. вел. дефинирани във $V$.
Тогава $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_i) = \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_i)$ за всички възможни стойности на $x_i$ и $y_i$

## → Математическо очакване и дисперсия

**Деф:** (мат. очакване)

Нека $V$ е вер. пр-во и $X$ е дискр. сл. вел. във $V$. Тогава $\mathbb{E}X := \sum_i x_i p_i$, ако $\sum_i x_i p_i < \infty$ се нарича математическо очакване на $X$.

— ако $X$ приема краен брой стойности, то $\mathbb{E}X$ е винаги добре дефинирано.

Очакването е тази величина, която най-добре характеризира задена сл. вел. $X$.

Някои Свойства:

1) $\mathbb{E}\,const = const$
2) ако $Y = \mathbb{1}_A$, то $\mathbb{E}Y = \mathbb{P}(A)$
3) $\mathbb{E}(X \pm Y) = \mathbb{E}X \pm \mathbb{E}Y$
4) ако $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

} ако $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$ съществуват и $X$ и $Y$ са дискр. сл. вел. в едно вер. пр-во

**Деф:** (дисперсия)

Нека $X$ е дискр. сл. вел. т.ч. $\sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_i < \infty$. Тогава под дисперсия се разбира $DX = \sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_i = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$

Някои свойства:

1) $DX \geq 0$
2) $D\,const = 0$
3) $DcX = c^2 DX$
4) $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $D(X \pm Y) = DX \pm DY$

## → Пораждащи функции

Нека $X$ е целочислена, неотрицателна сл. вел. Тогава функ. $g_X(s) = \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X=k)$ за $|s| \leq 1$ се нарича пораждаща функция.

Свойства:

1) $\mathbb{E}X = g'_X(1)$

2) $DX = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$

3) $n!\,p_n = g_X^{(n)}(0) \Rightarrow p_n = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$

Твърдение: Нека $X_1, \dots X_n$ са целочислени, неотр. сл. вел., които са независими в съвкупност. Тогава, ако $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ то $g_Y(s) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(s)$

## → Разпределения

### 1) Равномерно дискретно разпределение

– $X$ – д. сл. вел. казваме, че е равномерно разпределена, ако приема краен брой стойности – $\mathbb{X} = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ и вероятността за всяка от тях е равна

– ако $|\mathbb{X}| = n$, то $p_i = \frac{1}{n}$ за $\forall i \in \{1, 2 \dots n\}$

– $\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$ – средно аритметично

– $DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}X)^2$

Задачи, в които възниква:

– единично хвърляне на зар

– печелене от фиш от тотото и др. честни хазартни игри

Пример: (Аз дали има нужда)

Хвърля се зар. Намерете $\mathbb{P}$(да се падне 3), $\mathbb{E}X, DX$ на падналите се точки

$\mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{E}X = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$

$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{91}{6} - (3,5)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \dots$

$\mathbb{E}X^2 = \cancel{1^2 \cdot \frac{1}{6}}\ \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = \frac{91}{6}$

## 2) Биномно разпределение

Преди това:

- Схема на Бернули - бинарен експеримент, има само два възможни изхода - 0 и 1 (неуспех и успех)

- Разпределение на Бернули $\rightarrow X \sim Be(p)$, ако

| $X$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $1-p$ | $p$ |

и $q = 1-p$

$\Rightarrow \mathbb{E}X = 0.(\overset{q}{1-p}) + 1.p = p$

$DX = p.q$

$g_X(s) = (1-p).s^0 + p.s^1 = q + ps$

**Деф:** (Биномно разпределение)

$X \sim Bin(n,p)$, ако $X$ е брой успехи между първите $n$ опита в схема на Бернули.

$X = \sum_{j=1}^{n} X_j$, където $X_j \sim Be(p)$ и $X_j$ са независими в съвкупност

$g_X(s) = \prod_{j=1}^{n} (q+ps) = (q+ps)^n$

$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = n.\mathbb{E}X_1 = n.p$ (чрез свойствата)

или

$= g'_X(1) = n.(q+ps)^{n-1}.p = n.(1-p+p)^{n-1}.p = np$ (чрез пораждаща)

$DX = D(\sum_{j=1}^{n} X_j) = \sum_{j=1}^{n} DX_j = npq$ (чрез свойствата)

или

$g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = \ldots$ (чрез пораждаща)

Пример:

При 5 хвърляния на зар, каква е вероятността да се паднат 2 пъти 6-ца.

$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k} = \binom{5}{2}.\left(\frac{1}{6}\right)^2.\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10.\frac{1}{36}.\frac{125}{216} = \ldots$

(извежда се през пораждаща)

## 3) Геометрично разпределение

$X$ - д. сл. вел., която брои брой неуспехи до първи успех.

Ако $X$ брои само неуспехите, т.е. $X = \min\{n \geq 1 : \sum_{j=1}^{n} X_j = 1\} - 1$, то казваме $X \sim Ge(p)$, където $p$ е вероятността за успех при един опит в схема на Бернули.

Тогава

$\mathbb{P}(X=k) = q^k.p, \; k \geq 0$

геометрична прогресия

$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} p.q^k.s^k = p\sum_{k=0}^{\infty} q^k.s^k = \frac{p}{1-qs}$

Тогава $\mathbb{E}X = g'_X(s)\Big|_{s=1} = \frac{(-p)\cdot(-q)}{(1-qs)^2}\Big|_{s=1} = \frac{p\cdot q}{(1-q)^2} = \frac{p\cdot q}{p^2} = \frac{q}{p}$

$DX = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$

$g''_X(1) = \left(\frac{pq}{(1-qs)^2}\right)'\Big|_{s=1} = \frac{-pq\cdot 2(1-qs)(-q)}{(1-qs)^4}\Big|_{s=1} = \frac{2p\cdot q^2}{(1-qs)^3}\Big|_{s=1} = \frac{2q^2}{p^2}$

$DX = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{q^2+pq}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}$

Ако $X'$ брой неуспехите и успеха включително, то

$X' = \min\{n\geq 1 : \sum_{j=1}^{n} X_j = 1\}$ и $X' = X+1$ то $X' \sim Ge^{+}(p)$,

тогава $\mathbb{E}X' = \mathbb{E}[X+1] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}1 = \frac{q}{p} + 1 = \frac{q+p}{p} = \frac{1}{p}$

$DX' = D[X+1] = DX = \frac{q}{p^2}$

Пример: Баскетболист стреля, докато не вкара кош

?? безпаметност – $X \sim Ge(p)$, то $\mathbb{P}(X \geq m+k \mid X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq m)$ $\forall m$ и $k \geq 0$

4) Поасоново разпределение   $\lambda$ – се нарича интензитет

Деф.: $X \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$, ако $\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, за $k \geq 0$

$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)\cdot s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot s^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda s}\cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$

$\mathbb{E}X = g'_X(1) = \lambda\cdot e^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} = \lambda$

$g''_X(1) = \lambda\cdot\lambda\cdot e^{\lambda(s-1)} = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} = \lambda^2$

$DX = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Употреба: – брой катастрофи за единица време
- брой клиенти —||—
- брой голове за 1 мач
- брой насекоми за площ

Като цяло брои неща, случващи се за някаква единица време/площ.