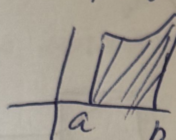
26. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснати функции. Теорема на Нютон-Лайбниц

Увод: [28] ~~Основната~~ идеята за въвеждането на понятието определен интеграл е свързана с понятието лице на фигура и по-точно свеждането на лице на произволна фигура към сума от лица на подходящи правоъгълници.

Нека R е неотрицателна функция, дефинирана в интервала $[a,b]$ и искаме да намерим лице на фигурата м/у абсцисата, $f(x)$, вертикалните прави през т. a и т. b.



$\Gamma \to \tau$ за цялата тема

Нека $f(x)$ е функция дефинирана в $[a,b]$

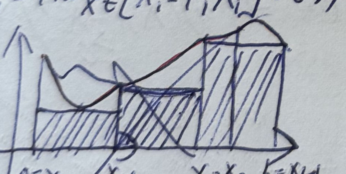
→ Разбиване на интервал

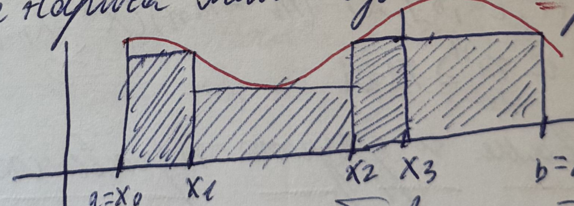
Разбиване Γ на интервала $[a,b]$ се нарича системата от точки $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ т.ч. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Това означава да разделим интервала на n подинтервала, като дължината на интервала i е $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

→ Малки и Големи суми на Дарбу

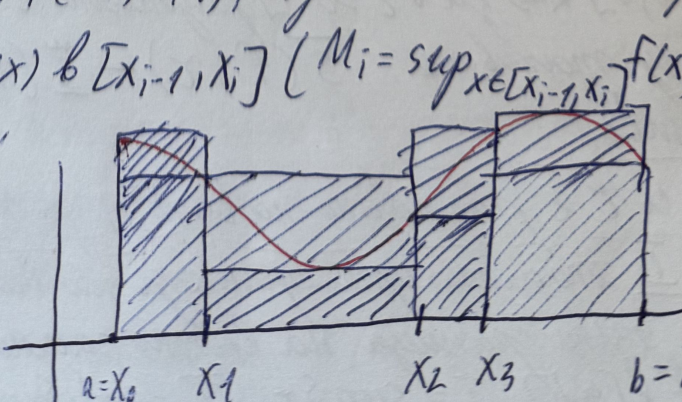
Нека $f(x)$ е ограничена в интервала $[a,b]$ и τ е разбиване на $[a,b]$ на система от точки $\{x_i\}_{i=0}^{n}$. Сумата $\underline{S}(f,[a,b],\tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$, където m_i е точната долна граница на стойностите на $f(x)$ в $[x_{i-1}, x_i]$ ($m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$) се нарича малка сума на Дарбу.





Нека $f(x)$ е ограничена в $[a,b]$ и τ е разбиване на $[a,b]$ на система от точки $\{x_i\}_{i=0}^{n}$. Сумата:

$\overline{S}(f,[a,b],\tau) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i, x_{i-1})$, където M_i е точната горна граница на стойностите на $f(x)$ в $[x_{i-1}, x_i]$ ($M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$), се нарича голяма сума на Дарбу.



За всяко разбиване τ съответства точно една голяма и точно една малка сума на Дарбу.

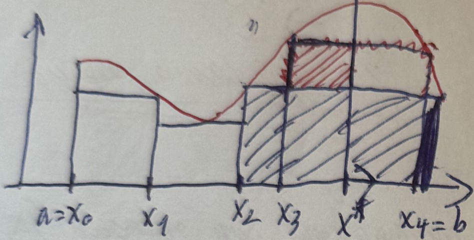
Свойства:

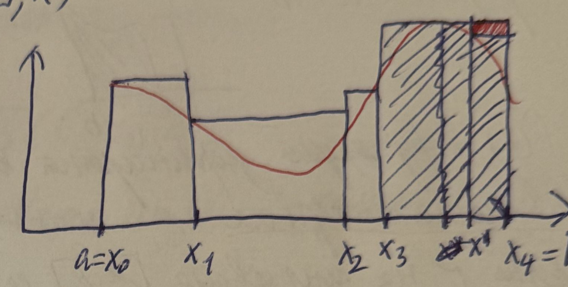
① Нека $\tilde{\tau}$ и $\tilde{y}$ са разбивания на интервала $[a,b]$. Ако $\tilde{y}$ строго съдържа в себе си $\tilde{\tau}$ $(\tilde{\tau} < \tilde{y})$ то:

$$\underline{s}(f,[a,b],\tilde{\tau}) \le \underline{s}(f,[a,b],\tilde{y})$$

② Нека $\tilde{\tau}$ и $\tilde{y}$ са разбивания на $[a,b]$. Ако $\tilde{\tau} < \tilde{y}$, то:

$$\overline{S}(f,[a,b],\tilde{y}) \le \overline{S}(f,[a,b],\tilde{\tau})$$





→ Доказателство:

Ще докажем неравенството за случая, в който $\tilde{y}$ има 1 допълнителен елемент x^* спрямо $\tilde{\tau}$. БОО приемаме, че $x^* \in (x_{n-1}, x_n)$ => на чертежите $x^* \in (x_3, x_4)$

$$\underline{s}(f,[a,b],\tilde{y}) - \underline{s}(f,[a,b],\tilde{y}) = m'(x^* - x_{n-1}) + m''(x_n - x^*) - m_n(x_n - x_{n-1}),$$

$$m_n((x_n - x^*) + (x^* - x_{n-1}))$$

където $m' = \inf_{x\in[x_{n-1}, x^*]} f(x)$, $m'' = \inf_{x\in[x^*, x_n]} f(x)$.

Тъй като $x_n - x_{n-1} = (x_n - x^*) + (x^* - x_{n-1})$, то:

$$\underline{s}(f,[a,b],\tilde{y}) - \underline{s}(f,[a,b],\tilde{\tau}) = (m' - m_n)\underbrace{(x^* - x_{n-1})}_{\ge 0} + (m'' - m_n)\underbrace{(x_n - x^*)}_{\ge 0} \ge 0$$

защото $m' \ge m_n$ и $m'' \ge m_n$

Аналогично доказваме и другото неравенство. трето свойство на от. 3 трябва да е тук

→ Риманов интеграл чрез подхода на Дарбу

Нека $f(x)$ е дефинирана и ограничена в $[a,b]$. $f(x)$ е интегруема по Риман в $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ разбиване τ с голяма и малка сума на Дарбу, такива че: $\overline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f,\tau) < \varepsilon$

→ Доказателство:

($\Leftarrow$) Нека $\varepsilon > 0$ и τ е разбиване на $[a,b]$, за което $\overline{S} - \underline{s} < \varepsilon$.

Да означим с $\underline{I}$ точната горна граница на всички малки суми на Дарбу, а с $\overline{I}$ точната долна граница на всички големи суми на Дарбу.

За функцията f в $[a,b]$ $\underline{I} = \sup_{\tau} \underline{s}_{\tau}$, $\overline{I} = \inf_{\tau} S_{\tau}$ за всяко възможно разбиване τ на $[a,b]$

Числата $\underline{I}$ и $\overline{I}$ се наричат съответно долен и горен интеграл от f в $[a,b]$ и $\underline{I} \le \overline{I}$. може би това една идея по-рано

Изпълнени са неравенствата: $\underline{s} \le \underline{I} \le \overline{\overline{I}} \le \overline{S} \Rightarrow \overline{I} - \underline{I} \le \overline{S} - s < \varepsilon$ — изпълнено за $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \underline{I} = \overline{\overline{I}} = I$ (можем да изберем безкр. малко ε) $\Rightarrow f$ е интегруема по Риман

$\Rightarrow$) Нека $f(x)$ е интегруема по Риман в $[a,b]$ и $\varepsilon > 0$, т.к. числото $\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} = I - \frac{\varepsilon}{2}$ не е горна граница на МСD, а $I + \frac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница на ГСД, то могат да се намерят разбивания τ_1 и τ_2, такива, че:

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{s}(f, \tau_1) \le I \quad \text{и} \quad I + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{S}(f, \tau_2) \ge I$$

Нека $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогава съгласно свойствата на СD и горните неравенства имаме:

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{s}(f, \tau_1) \le \underline{s}(f, \tau) \le I \le \overline{S}(f, \tau) \le \overline{S}(f, \tau_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{S}(f, \tau) - \underline{s}(f, \tau) < \varepsilon$$

може да се спомени подобното в Рим. интгр. док.

Свойство 3 на СД $\Rightarrow$

Всяка малка сума на Дарбу е по-малка или равна на всяка голяма. Нека $\underline{s} = \underline{s}(f, [a,b], \tilde{x})$ и $\overline{S} = \overline{S}(f, [a,b], \tilde{y})$. Нека $\tilde{z} = \tilde{x} \cup \tilde{y}$.

Д-во: ?? Тогава: $\underline{s} = \underline{s}(f, [a,b], \tilde{x}) \le s(f, [a,b], \tilde{z}) \le \overline{S}(f, [a,b], \tilde{z}) \le \overline{S}(f, [a,b], \tilde{y}) \le \overline{S}$

Следствие: От св-во 3 $\Rightarrow$ множеството на малките суми е ограничено отгоре, а мн-вото на големите - отдолу. Тогава $\underline{I} = \sup_\tau s_\tau$ и $\overline{I} = \inf_\tau S_\tau$ се наричат долен и горен интеграл на Дарбу. Ако $\underline{I} = \overline{I}$, то $f(x)$ е интегруема.

→ Теорема на Кантор

Всяка непрекъсната функция $f(x)$ в интервала $[a,b]$ е равномерно непрекъсната в $[a,b]$.

→ Теорема

Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в краен и затв. интервал $[a,b]$. Тогава f е интегруема и по Риман.

→ Доказателство + трябва Вайерщрас??? че функ. е огр. и има точни гр.

?? Съгласно Вайерщрас $f(x)$ е ограничена в $[a,b]$??. Съгласно Th Кантор — $f(x)$ е равномерно непрекъсната в $[a,b]$.

Нека $\varepsilon > 0$. Тогава от равномерната непрекъснатост на $f \Rightarrow \exists \delta > 0$ такова, че $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, когато $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in [a,b]$.
диаметър => трябва да се деф.
Нека разбиването τ е такова, че $d(\tau) < \delta$. Да разгледаме разликата

$$\overline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k$$

$f(x)$ - непрекъсната $\Rightarrow f(x)$ достига най-малката и най-голямата си стойност във $\forall$ интервал $[x_{k-1}, x_k]$ $k = \overline{1,n} \Rightarrow M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ и

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

Тогава $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\Rightarrow \overline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f,\tau) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} x_k = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) < \varepsilon \Rightarrow f \text{ е интегруема по Риман}$$

Диаметър на разбиването наричаме дължината на най-големия интервал: $d(\tau) = \max \Delta x_i = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$

→ Основни свойства на Риманов интеграл

① Стойността на определения интеграл не зависи от означението на променливата:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

② $\int_a^a f(x)dx = 0$

③ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Линейност

④ Ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в $[a,b]$ и λ - const, то $f(x)+g(x)$ и $\lambda f(x)$ също са интегруеми в $[a,b]$:

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

⑤ Ако $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$, то и $|f(x)|$ също е интегруема в $[a,b]$ и $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

⑥ Ако $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$ и $c \in (a,b)$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

⑦ Ако $f(x) \geq 0$ и $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, то $\int_a^b f(x) \geq 0$

⑧ Ако $f(x)$ и $g(x)$ - интегруеми в $[a,b]$ и $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

⑨ Ако $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$ и m, M са такива, че за $\forall x \in [a,b]$ $m \le f(x) \le M$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

→ Теорема за средните стойности

(Th на Болцано): Ако $f(x)$ е непрекъсната функция в $[a,b]$ и $f(a).f(b) < 0$, то $\exists c \in (a,b)$, за което $f(c)=0$.

Следствие: Всяка непрекъсната функция $f(x)$ в $[a,b]$ приема всички стойности между минимума m и максимума M.

(Th средни стойности): Нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$. Тогава съществува поне една точка $c \in [a,b]$, за която е изпълнено:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

→ Доказателство:

Съгласно Th на Вайерщрас $f(x)$ достига най-голямата си стойност M и най-малката си стойност m в $[a,b]$. Нека $m=f(x_1)$ и $M=f(x_2)$ $x_1, x_2 \in [a,b]$.

От свойство 9 $\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

или $m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$

Съгласно Th на Болцано $\exists$ поне една т. $c \in [x_1, x_2]$, а значи и от $[a,b]$ такава че: $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$

→ Теорема на Нютон-Лайбниц

Нека $f(t)$ е непр. в инт. $[a,b]$ и $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Тогава $F(x)$ е диференцируема в $[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$ за $\forall x \in [a,b]$.

→ Доказателство:

Тъй като $f(t)$ е непрекъсната в $[a,b]$ то $f(t)$ е непрекъсната в $[a,x] \subseteq [a,b]$, $x \in [a,b]$

$\Rightarrow f(t)$ е интегруема в $[a,x]$. Нека означим $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Дефинираме h такава, че $x+h \in [a,b]$. Разглеждаме диференчното частно

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

От Th на средните стойности:

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = ((x+h)-x)f(\xi) = h\cdot f(\xi) \quad \text{където } \xi \in [x, x+h]$$

$$\Rightarrow \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(\xi)h}{h} = f(\xi)$$

Нека $h \to 0$ т.к. $x \le \xi \le x+h$, то $\xi \to x$ и тогава:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$$

От дефиницията за производна $\Rightarrow F'(x) = f(x)$

→ Теорема за изчисляване на определен интеграл

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и $\varphi(x)$ е нейна примитивна, т.е. $\varphi'(x) = f(x)$ за $\forall x \in [a,b]$. Тогава: $\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(x)\Big|_a^b$

→ Доказателство:

Нека $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. От Th на Нютон-Лайбниц $\Rightarrow F(x)$ е примитивна на $f(x)$ т.е. $F'(x) = f(x)$. Така $\varphi'(x) = f(x) = F'(x)$, т.е. $F(x) = \varphi(x) + c$, $c = const$

При $x = a$ имаме $F(a) = \varphi(a) + c$. От деф. на $F(x) \Rightarrow F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$

откъдето $0 = \varphi(a) + c \Rightarrow c = -\varphi(a)$ т.е. $F(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$

При $x = b$ имаме $F(b) = \int_a^b f(t)dt$. Като заместим в

$F(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$ ~~имаме $F(b) = \int_a^b f(t)dt$. Като з~~.

$$\Rightarrow F(b) = \int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(x)\Big|_a^b$$