④ ДСТР 4

деф:/ Безконтекстна граматика

$G = \langle V, \Sigma, S, P \rangle$

V – кр. мн-во от променливи (нетерминали)

Σ – крайна азбука (терминали)

$S \in V$ – начална променлива

$P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ ($\langle \alpha, \beta \rangle \in P$ означаваме $\alpha \xrightarrow[G]{} \beta$) правило α да може да и замени с β

Пример $G = \langle \{S\}, \{a, b\}, S, S \to aSb$ и $S \to \varepsilon \rangle$

деф:/ Релация $\gamma \underset{G}{\Rightarrow} \gamma'$ (думата γ' се получава от γ, чрез прилагане на правило от граматиката)

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle \in P \quad \lambda, \mu \in (V \cup \Sigma)^*}{\lambda \alpha \mu \underset{G}{\Rightarrow} \lambda \beta \mu}$$

деф:/ $\alpha \overset{k}{\Rightarrow} \beta$ (β а получава за k стъпки от α)

$$\frac{\alpha \in (V \cup \Sigma)^*}{\alpha \underset{G}{\overset{0}{\Rightarrow}} \alpha} \qquad \frac{\alpha \underset{G}{\Rightarrow} \beta \quad \beta \overset{k}{\Rightarrow} \gamma}{\alpha \overset{k+1}{\Rightarrow} \gamma}$$

деф:/ $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta \iff (\exists k \in \mathbb{N})[\alpha \overset{k}{\Rightarrow} \beta]$

$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} w \}$

тв: L е безконтекстен $\iff \exists$ безконтекстна граматика $G: L(G) = L$

деф: Синтактично дърво на анализ (индуктивно по построяването)

Нека $G\langle N, \Sigma, S, P \rangle$ е КСГ. Дефинираме дърво за син. анализ

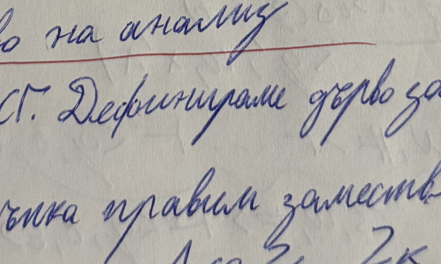
– корен: S

– Ако на i-тата стъпка правим заместването $A \to Z = Z_1 \ldots Z_k$, то върхите наследници на A са $Z_1, \ldots Z_k$

– Листата са буквите на изведната дума

Дърво с result $u_1 \ldots u_n$

$A \to A_1, \ldots A_n$



Нормална форма на Чомски

Една безконтекстна граматика е в НФЧ, ако всяко правило е във вида: $A \to BC$ или $A \to a$, където A, B, C са произволни променливи, а a е произволна буква

Th: $\forall$ безконтекстен език, който не съдържа ε, се поражда от безконтекстна граматика в НФЧ

Тв: Всеки регулярен език е безконтекстен.

Недетерминистичен стеков автомат:

$P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, s, \#, \Delta \rangle$

- Q - кр. мн-во от състояния
- Σ - кр. азбука (чете)
- Γ - кр. азбука на стека $(\Sigma \cup \{\#\} \subseteq \Gamma)$ какви символи може (съхранява)
- $s \in Q$ - начално състояние (притниз)
- $\# \notin \Sigma$ - дъно на стека
- $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ функ на преходи

Моментна конфигурация

$\langle q, w, x \rangle \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

q - текущо състояние; w - останала (непрочетена) част от думата; x - съдържание на стека

Преходи $\langle q, aw, bx \rangle \xmapsto{\langle q', x' \rangle \in \Delta(q, a, b)} \langle q', w, x'x \rangle$

(ε-преход) $\langle q, w, bx \rangle \xmapsto{\langle q', x' \rangle \in \Delta(q, \varepsilon, b)} \langle q', w, x'x \rangle$

$$L(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid \underbrace{\langle s, w, \# \rangle \vdash \dots \vdash \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle}_{\langle s, w, \# \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle} \ (q \in Q \text{ произволно}) \}$$

Th: L е контекстно-свободен $\iff \exists$ Н.С.А P: $L(P) = L$

25 ДИС Обобщение

– Pumping Lemma за К.С.Е.

Ако L е контекстно свободен, то $\exists p \in \mathbb{N}^+ \ \forall w \in L: |w| \geq p$

$\Rightarrow (\exists xyzuv \in \Sigma^*)$

$w = xyzuv$ и $|yu| \geq 1$ и $|yzu| \leq p$ и $\forall i \in \mathbb{N} \ xy^i z u^i v \in L$

– **Доказателство:** Нека $G = \langle V, \Sigma, S, P \rangle$ безконтекстна граматика

Нека Б.О.О. G е в НФЧ. Нека $k = |V|$, $p = 2^k$, $w \in L$ $(|w| = m \geq p)$.

Разглеждаме синтактично дърво за w:

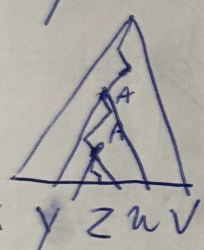
Максимален брой наследници – 2

Имаме $\geq n = 2^k$ листа

$\Rightarrow \exists$ път Path с дължина $|Path| > k$

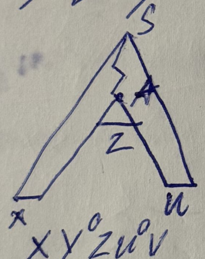
$\Rightarrow$ поне $k+1$ променливи в Path

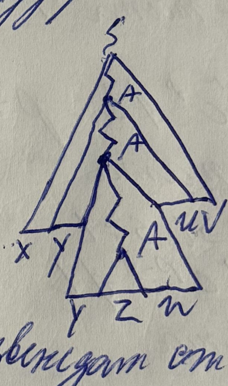
$\Rightarrow \exists$ променлива $A \in Path$ и A се появява ≥ 2 пъти $(|yu| \geq 1)$



Второто появяване на A отдолу нагоре е на разстояние $\leq k$

$\Rightarrow E$ корен на поддърво на поддумата yzu с дължина $\leq p$





xy^2zu^2v

Т.е. за $\forall i \in \mathbb{N}$ $xy^i z u^i v$ се извеждат от S

Пример:

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен

Свойства на затвореност

тв.| Безконтекстните езици са затворени относно операциите обединение, конкатенация, звезда на Клини

Нека L_1 и L_2 са КСЕ т.е. $\exists G_i = \langle N_i, \Sigma, S_i, P_i \rangle$ т.ч. $L(G_1) = L_1$, $L(G_2) = L_2$

Нека Б.О.О. $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ и S е нов нетерминал

1) За $L_1 \cup L_2$: $G \langle N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\} \rangle$

и $L(G) = L_1 \cup L_2$

2) за $L_1 \circ L_2$: $G = \langle N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\} \rangle$

$\Rightarrow L(G) = L_1 \circ L_2$

3) L_1^*: $G = \langle N_1 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup \{S \to \varepsilon \mid S_1 S\} \rangle$

$\Rightarrow L(G) = L_1^*$

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен доказателство

Допускаме, че е. $\Rightarrow$ е изпълнена Pumping

Нека $u = a^p b^p c^p$ $|u| = 3p > p$ и $u \in L$

1сл. y започва в a-тата

$\Rightarrow |yzu| \le p \Rightarrow$ имаме 2 подслучая

1.1. завършва в a-тата

$yu = a^r$ $(r \ge 1)$

$xy^2zu^2v = a^{p+r} b^p c^p \notin L$ $p + r \ne p$

1.2. завършва в b-тата

$yu = a^r b^s$ $r \ge 1, s \ge 1$

$xy^0zu^0v = xzv = a^{p-r} b^{p-s} c^p \notin L$ $p - r \ne p$, $p - s \ne p$

2сл. y започва в b-тата $\Rightarrow |yzu| \le p \Rightarrow$ 2 подслучая

2.1. завършва в b-тата

$yu = b^r$ $(r \ge 1)$

$xy^2uz^2v = a^p b^{p+r} c^p \notin L$ $p + r \ne p$

2.2. завършва в c-тата

$yu = b^r c^s$ $r \ge 1$ $s \ge 1$ $p \ne p - r$

$xy^0zu^0v = a^p b^{p-r} c^{p-s} \notin L$ $p \ne p - s$

3сл.) y започва в c-тата

$yu = c^r$ $r \ge 1$

$xy^2uz^2v = a^p b^p c^{p+r} \notin L$ $p \ne p + r$

$\Rightarrow$ pumping не е изпълнена

$\Rightarrow L$ не е безконтекстен

(Т) Безконтекстните езици не са затворени относно допълнение и сечение.

∘ $\{a^n b^k c^k \mid n, k \in \mathbb{N}\} \cap \{a^k b^k c^n \mid n, k \in \mathbb{N}\} = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен

безконтекстен безк...

$\to (\{a\}^* \cdot \{b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\})$