# Hausaufgabe 1

Justus Weyers

2022-11-03

## Aufgabe 1

**Die Periodendauer eines Pendels wird gemessen. Ihr Wert wird mit $(10,0 \pm 0,1)s$ angegeben. Wie groß ist die relative Messunsicherheit?**

$$
\begin{aligned}
u_{rel} &= \frac{u_x}{x} \\
\Rightarrow |\frac{\pm 0,1s}{10,0s}| &= 0,01 = 1\%.
\end{aligned} \tag{1}
$$

- $u_{rel}$: Relative Messunsicherheit
- $u_x$: Absolute Messunsicherheit
- $x$: Bestwert

## Aufgabe 2:

**Es wurde eine Geschwindigkeit von $6\frac{km}{h}$ mit einer relativen Unsicherheit von $1\%$ gemessen. Wie groß ist die absolute Messunsicherheit?**

Aus Gleichung 1 folgt durch Umstellen:

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_{rel} * x \\
\Rightarrow &= \pm 0,01 * 6\frac{km}{h} \\
&= \pm 0,06\frac{km}{h}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

## Aufgabe 3

**Ein analoger Spannungsmesser hat die Güteklasse 2 (d.h. die Messunsicherheit beträgt $2\%$ des Messbereichs-Endwertes). Wie groß ist die relative Messunsicherheit der Anzeige, wenn im $10V$-Messbereich $2,00V$ abgelesen werden?**

Das Gerät entspricht der Güteklasse 2. Daraus folgt, dass die Messunsicherheit bei einem Vollausschlag von $10V$ bei $\pm 0,2V$ liegt. Mit Gleichung1 ergibt sich:

$$|\tfrac{\pm 0,2V}{2V}| = 0,01 = 1\%.$$

## Aufgabe 4:

**Sie wiegen in der Küche mit einer digitalen elektronischen Waage dessen kleinste Schrittweite (auch Auflösung genannt) $0,1g$ beträgt einen Apfel. Der Apfel wiegt laut Anzeige $120,0g$. Wie groß ist die gesamte Messunsicherheit der Messung, wenn der Gerätehersteller eine Gerätemessunsicherheit von $1\%$ v. Messwert + $2[dgt.]$ angibt?**

Berechnung der Skalenungenauigkeit $u_{Skala}$. Der tatsächliche Wert kann zwischen $119,95g$ und $120,05g$ liegen ($\rightarrow a = 0,1g$). Daraus folgt für $u_{Skala}$ (digitale Waage):

$$\begin{aligned} u_{Skala} &= \frac{a}{2\sqrt{3}} \\ \Rightarrow &= \frac{0,1g}{2\sqrt{3}} \\ &= \pm 0,058g. \end{aligned} \tag{3}$$

- $u_{Skala}$: Messunsicherheit Skala
- $a$: Fehlerintervall

Aus der Aufgabenstellung folgt für die Messungenauigkeit der Waage $u_{Gerät}$:

$$u_{Gerät} = 0,01 * 120g + 2[dgt.] = \pm 1,4g.$$

Die Gesamtunsicherheit berechnet sich dann als:

$$\begin{aligned} u_{Gesamt} &= \sqrt{u_{Skala}^2 + u_{Gerät}^2} \\ \Rightarrow &= \sqrt{(\pm 0,058g)^2 \pm (1,4g)^2} \\ &= \pm 1,4g. \end{aligned} \tag{4}$$

## Aufgabe 5:

**Eine Spannung wurde gleichzeitig mit zwei baugleichen Analog-Multimetern (AMM) genau einmal gemessen: Messbereich: $200mV$, Garantiefehlergrenze: $\pm(0,5\% v.Messwert. + 0,1\% v.Messbereich)$; Messwert 1 (AMM1): $22,0mV$, Messwert 2 (AMM2): $22,5mV$ ($\rightarrow a = 0,1g$). Geben Sie die beiden Messergebnisse zusammen mit der Standardmessunsicherheit in korrekter Schreibweise an.**

AMM1:

Fehler $0,5\%$ vom Messwert: $u_{Messwert} = 0,005 * 22,0mV = \pm 0,11mV$.

Fehler $0,1\%$ vom Messbereich: $u_{Messbereich} = 0,001 * 200mV = \pm 0,20mV$.

Fehler der analogen Skala: $u_{Skala} = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{0,1mV}{2\sqrt{6}} = \pm 0,020mV$.

Gesamtfehler errechnet sich als:

$$\begin{aligned} u_{Gesamt} &= \sqrt{u_{Skala}^2 + u_{Messwert}^2 + u_{Messbereich}^2} \\ &= \sqrt{(\pm 0,020)^2 + (\pm 0,11)^2 + (\pm 0,20)^2} mV \\ &= \pm 0,23mV \end{aligned} \tag{5}$$

Gerätunsicherheit: $u_{AMM1} = \sqrt{u^2_{Messwert} + u^2_{Messbereich}} = \pm 0,23mV$.

AMM2:

Fehler $0,5\%$ vom Messwert: $u_{Messwert} = 0,005 * 22,5mV \approx \pm 0,11mV$.

Fehler $0,1\%$ vom Messbereich: $u_{Messbereich} = 0,001 * 200mV = \pm 0,20mV$.

Fehler der analogen Skala: $u_{Skala} = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{0,1mV}{2\sqrt{6}} = \pm 0,020mV$.

Gesamtfehler errechnet sich als analog zu Gleichung 5:

$$\begin{aligned} u_{Gesamt} &= \sqrt{(\pm 0,020)^2 + (\pm 0,11)^2 + (\pm 0,20)^2} mV \\ &= \pm 0,23mV \end{aligned}$$

Gerätunsicherheit: $u_{AMM2} = \sqrt{u^2_{Messwert} + u^2_{Messbereich}} = \pm 0,23mV$.

## Aufgabe 6:

**Nehmen Sie nun an, Sie ändern den Messbereich des Multimeters und damit die Garantiefehlergrenze des Multimeters auf $\pm(0,2\% v.Messwert. + 0,02\% vomMessbereich)$ für den Messbereich von $2V$. Es wird erneut gemessen - neuer Wert: $20mV$ (wobei im $2V$ Messbereich, die kleinste ablesebare Skalenstrich ist $10mV$). Ändert sich die Messunsicherheit des Messgerätes? Wie ändert sich die Messunsicherheit der Ableseskala?**

Fehler $0,2\%$ vom Messwert: $u_{Messwert} = 0,002 * 20mV = \pm 0,04mV$.

Fehler $0,02\%$ vom Messbereich: $u_{Messbereich} = 0,0002 * 2000mV = \pm 0,4mV$.

Fehler der analogen Skala: $u_{Skala} = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{10mV}{2\sqrt{6}} = \pm 2,0mV$.

Messunsicherheit des Multimeters:

$$\begin{aligned} u_{Gerät} &= \sqrt{u^2_{Messwert} + u^2_{Messbereich}} \\ \Rightarrow &= \sqrt{(\pm 0,04)^2 + (\pm 0,4)^2} \\ &= \pm 0,4mV. \end{aligned}$$

Der Betrag der Messunsicherheit des Multimeters verdoppelt sich mit $\pm 0,4mV$ im Vergleich zu den Gerätmessunsicherheiten aus Aufgabe 5, welche für beide Geräte $\pm 0,23mV$ betrug.

Der Fehler der Ableseskala steigt in diesem Vergleich hingegen um zwei Größenordnungen von $\pm 0,020mV$ in Aufgabe 5 auf $\pm 2,0mV$ in Aufgabe 6.

## Aufgabe 7:

**Die Temperatur eines Kühlschranks wurde mehrmals gemessen. Es wurde diese Messreihe aufgenommen:**

| T (°C) | 7,6 | 7,8 | 8,2 | 7,7 | 7,8 | 8,3 | 8,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

**Geben Sie den Bestwert für T zusammen mit der Messunsicherheit (Typ A) in korrekter Schreibweise an.**

Es finden folgende Formeln für die Berechnung von Statistik- und Fehlerkenngrößen Verwendung:

- Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} x_i$
- Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i}^{n} (x_i - \bar{x})^2)}$
- Standardabweichung des Mittelwertes $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Vertrauensabweichung $\varepsilon = t * \sigma_{\bar{x}}$

Mit $n$: Anzahl der (Mess)Werte, $x_i$: $i$-ter Messwert, $t$: Student Faktor, hier $1,08$. Die Berechnung erfolgt durch Einabe in R:

```r
# Eingabe der Messwerte
temp_messwerte <- c(7.6,7.8,8.2,7.7,7.8,8.3,8.0)

# Berechnung Mittelwert
Mittelwert <- mean(temp_messwerte)

# Berechnung Standardabweichung (SD)
SD = sd(temp_messwerte)

# Berechnung Standardabweichung des Mittelwertes (SDM)
SDM = SD/sqrt(length(temp_messwerte))

# Student T- Faktor für n = 7
t = 1.08

# Berechnung Vertrauensabweichung (VAB)
VAB = t*SDM

# Ausgabe der errechneten Werte als Dataframe
data.frame(Maßzahl = c('Mittelwert', 'Standardabweichung',
                       'Standardabweichung des Mittelwertes',
                       't-Faktor', 'Vertrauensabweichung'),
           Werte = round(c(Mittelwert, SD, SDM, t, VAB), 4))
```

```
##                               Maßzahl  Werte
## 1                          Mittelwert 7.9143
## 2                  Standardabweichung 0.2610
## 3 Standardabweichung des Mittelwertes 0.0986
## 4                            t-Faktor 1.0800
## 5                Vertrauensabweichung 0.1065
```

Für die Messunsicherheit ergibt sich daraus: $u = (7,91 \pm 0,11)°C$.

# Aufgabe 8:

**Geben Sie die folgenden Messergebnisse korrekt an:**

| Inkorrekt | Hoffentlich korrekt |
|---|---|
| $a = (9,82 \pm 0,02385)\frac{m}{s^2}$ | $a = (9,820 \pm 0,024)\frac{m}{s^2}$ |
| $Q = (0,1562 * 10^{-15} \pm 689,76 * 10^{-19})C$ | $Q = (0,1560 * 10^{-15} \pm 690 * 10^{-19})C$ |

| Inkorrekt | Hoffentlich korrekt |
| --- | --- |
| $v = (199798673,67 \pm 7245,98132)\frac{m}{s}$ | $v = (199798700 \pm 7200)\frac{m}{s}$ |
| $\lambda = (885,589 * 10^{-11} \pm 0,004985 * 10^{-8})m$ | $\lambda = (0,8856 * 10^{-8} \pm 0,0050 * 10^{-8})m$ |
| $U = 1,81kV, u(U) = 1693mV$ | $U = (1810,0 \pm 1,7)V$ |