Dehnbare Stoffe

Justus Weyers & Milena Mensching, Team 4

2022-11-20

Versuch 1

Ziel

Überprüfung der Anwendbarkeit des Hookeschen Modells auf ein Gummiband durch Bestimmung der Federkonstante

Materialien

- Stativ
- Gummiband
- Gewichte
- Maßband
- Haken
- Klebeband

Versuchsaufbau

- Aufstellung des Stativs, Befestigung am Tisch
- Befestigung des Hakens am Stativ
- Befestigung des Maßbandes am Stativ mit Hilfe von Klebeband
- Aufhängung des Gummibandes am Haken
- In das Gummiband werden die Gewichte gehängt

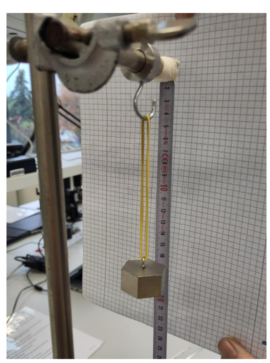


Abbildung 1: Versuchsaufbau 1

Abbildung 2: Versuchsaufbau 1, Nahansicht

Durchführung

Die Gewichte werden gewogen und die Messunsicherheiten berechnet. Die 10g und die 100g Gewichte lagen doppelt vor und waren jeweils gleich schwer. Die Gewichte stellten sich generell als zu leicht heraus. Nur die zwei 10g Gewichte wogen nach einer Beschriftung mit Klebeband $10,0g$. Gewichte:

```
Gewichte <- read.csv("Daten/Gewichte.csv",
                     col.names = c("Name", "Einzelmasse",
                                   "n_Gewichte", "Sollwert", "Gewicht_g"),
                     sep=";", dec=",")
Gewichte[1:6,1:2]
```

```
##         Name Einzelmasse
## 1         5g         4.8
## 2  10g (2x)        10.0
## 3        20g        19.8
## 4        50g        49.9
## 5 100g (2x)        99.5
## 6       200g       198.5
```

Die Gesamtmasse m_{ges} einer Gewichtskombination wird durch Addition der Teilmassen berechnet.

Die Geräteungenauigkeit berechnet sich zu: $u_{Gerät} = \sqrt{u_{Skala}^2 + u_{Waage}^2}$. Dabei ist u_{Skala} konstant bei $u_{Skala} = \frac{0{,}0001kg}{2\sqrt{3}} = 2,9 * 10^{-5}kg$. Für u_{Waage} wurde eine Messunsicherheit von ... am Gerät abgelesen. Damit errechnet sich eine Geräteungenauigkeit von $u_{Gerät} = \dots$.

Für die Unsicherheit der aus n Gewichten kombinierten Masse M u_m gilt, da für alle Messungen die gleiche Waage benutzt wurde, der Zusammenhang:

$$u_m = \sum_{i=1}^{n} u_{m,i} = n * u_{Gerät}$$

Mit n: Anzahl der kombinierten Gewichte

```
# Skalenunsicherheit
u_Skala = (1*10**(-4))/(2*sqrt(3)) #kg
# BAUSTELLE: Hier fehlt noch die Geräteungenauigkeit der Waage (Waagenunsicherheit)
u_Waage = 0.05*10**(-3) #Geschätzt in kg
# Geräteunsicherheit
```

```
u_Gerät = sqrt((u_Skala)^2+(u_Waage)^2)
# Massenunsicherheit
u_m = Gewichte$n_Gewichte*u_Gerät #kg
```

Zunächst wird die Länge des Gummibandes ohne zusätzliches Gewicht gemessen. Die Länge betrug 11,2 cm. Diese Länge muss später von allen Messwerten abgezogen werden, um nur die Auslenkung aus dem Nullzustand als Datensatz aufzunehmen.

Danach werden nacheinander verschiedene Gewichte an das Gummiband gehängt und die entsprechende Elongation gemessen. Diese wird an der Unterkante des Gummibandes, sobald dieses nach dem Anbringen der Gewichte nicht mehr schwingt, abgelesen. Unsere Gruppe entschied sich zunächst dafür, eine Messreihe mit Intervallen von $5g$ durchzuführen. Nach den ersten 20 Messungen ($100g$) entschieden wir uns dafür, die Intervalle auf $10g$ zu erhöhen, da wir zunächst den Aufwand unterschätzten und Daten mit einem Abstand von 10g immer noch zur Beurteilung der Federkonstante ausreichen.

Die Auslenkung wird am Maßband abgelesen (Messskala in mm). Dies bedeutet eine Ungenauigket der Elongation von:

$$u_x = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{0,001m}{2\sqrt{6}} = 2,0 * 10^{-4}m$$

```
# Auslenkungsungenauigkeit
u_x = 2.0*10**(-4) #m
```

Fehlerquellen

Bei den Fehlerquellen ist zunächst der **personenbezogene Ablesefehler** zu erwähnen. Diesen versuchten wir weitestgehend zu eliminieren, indem nur eine Person eine vollständige Datenreihe aufnahm.

Eine weitere Fehlerquelle kann die **Zeitabhängigkeit der Auslenkung** sein. Ein Gummiband kann nach einer gewissen Zeit mehr nachgeben, als bei der direkten Messung. Wir haben uns bemüht, die Messungen sehr direkt und ohne Verzug vorzunehmen. Die Zeitanghängigkeit haben wir jedoch nicht näher untersucht.

Besonders wichtig ist zu erwähnen, dass die Länge x_0 am Anfang und am Ende nicht übereinstimmten (11,2cm am Anfang zu 11,6cm am Ende). Dies ist auf die **konstante Dehnung des Gummibandes** zurückzuführen und wurde ebenfalls bei der Messung vernachlässigt.

Neben diesen Versuchsbezogenen Fehlerquellen sind Annahmen zu nennen, die das Hooksche Gesetz trifft. Diese können sich aber in der Realität anders darstellen. Dabei sind zu nennen:

- Vernachlässigung von Energieumwandlung (z.B.: durch Reibung, $W = F_s * s$)
- Lineare Kraft-Auslenkungs-Beziehung (Speziell im Falle des Gummibandes nur eingeschränkt anwendbar)
- Der Stoff soll dehnbar sein, die Elastizitätsgrenze darf jedoch nicht überschritten werden.
- Gleiches Verhalten bei und Dehnung und Entspannung der Feder/des Gummibandes

Messung

Mittels Excel werden die Daten aufgenommen und als csv-Datei exportiert. An dieser Stelle können die erhobenen Messwerte zum Zwecke der Interpretation aus dieser csv-Datei eingelesen werden. Die Werte sind auf der letzten Seite aufgeführt, zusammen mit errechneten Größen und zugehörigen Unsicherheiten.

```
Messreihe <- read.csv("Daten/Messreihe.csv", sep=";", dec = ",")

# Anbindung der bereits errechneten Unsicherheit der Masse
Messreihe <- cbind(Messreihe, u_m)

colnames(Messreihe) <- c("n_Gewichte", "Sollwert_g", "Gewicht_g", "Auslenkung1_cm",  "Auslenkung2", "x_
```

Interpretation

Berechnung der Gewichts- und Zugkraft

Zur Interpretation der Messergebnisse wird die Elongation x_i normiert, indem die Nullauslenkung, diese beträgt $11,2cm$ auf dem Maßband, von den anderen Messwerten subtrahiert wird, siehe entsprechenden Messwert für ein Gewicht von $0g$.

Zudem wird, wie bei allen anderen Messgrößen auch, die Einheit in eine SI-Einheit umgerechnet, um den Einheitenbezug korrekt zu halten. In diesem Falle also in Meter.

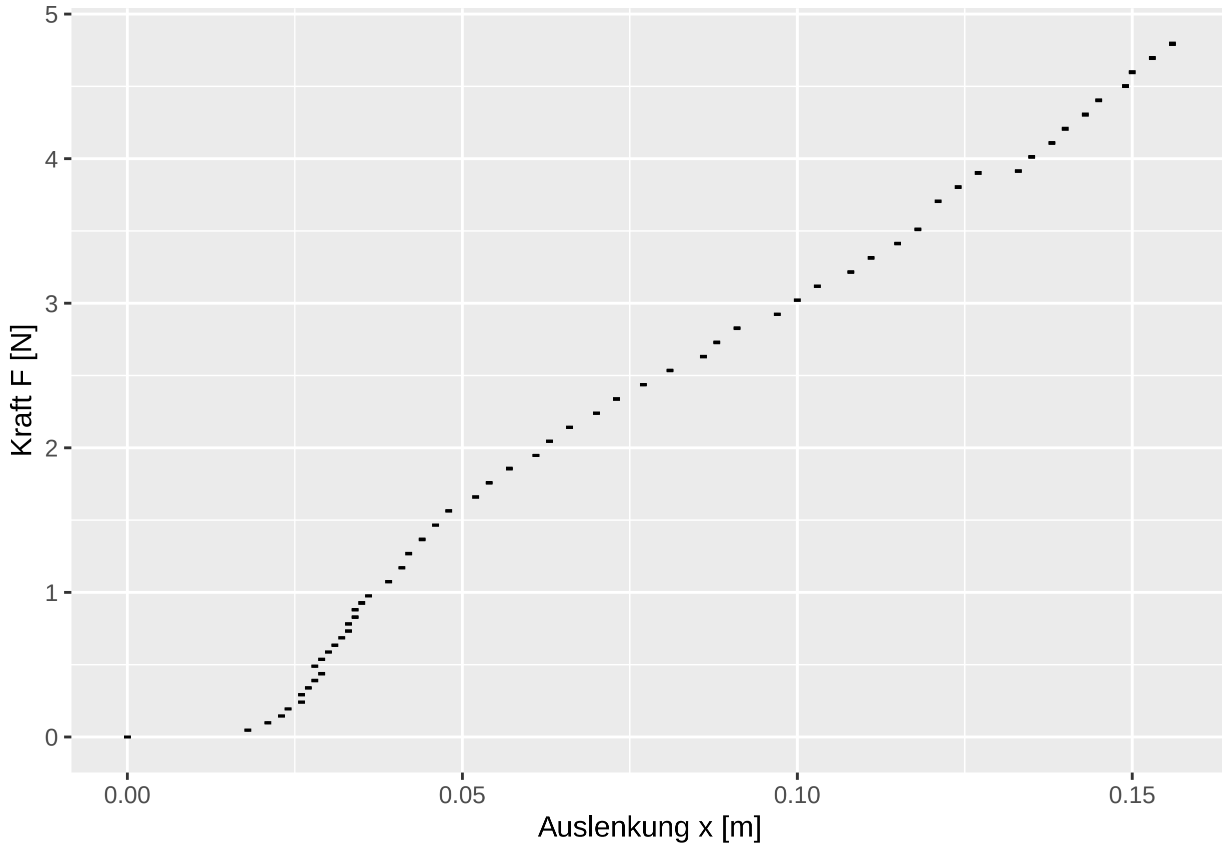
Im Anschluss wird die Kraft $F_{G,i} = m_i * g$ in Newton berechnet, die für das Gewicht m_i auf das Gummiband wirkt. Die Erdbeschleunigung g wird auf $9,81\frac{m}{s^2}$ festgesetzt. Im Folgenden wird, wenn die Unterscheidung zwischen Gewichts- und Zugkraft aufgrund der Betragsgleichheit im zu untersuchenden Ruhezustand unsinnig ist, von einer sematischen Unterscheidung von F_G und F_{Zug} abgesehen und stattdessen verallgemeinernd von der wirkenden Kraft F gesprochen. Neben der Kraft F wird auch die Unsicherheit der Kraft berechnet. Diese berechnet sich als:

$$\begin{aligned} u_F &= \frac{\partial F}{\partial m} * u_m \\ &= g * u_m \end{aligned} \tag{1}$$

Nach der Rechnung wird ein Kraft-Auslenkung Schaubild erstellt.

```
# Nullwerte(x_0 = 11,2cm) abziehen
Messreihe$Auslenkung1_x0 <- Messreihe$Auslenkung1_cm - 11.2

# Einheitenbezug
Messreihe$Gewicht_kg <- Messreihe$Gewicht_g/1000 #g -> kg
Messreihe$Auslenkung1_x0_m <-  Messreihe$Auslenkung1_x0/100 #cm -> m

# ERDBESCHLEUNIGUNG
g = 9.81 #m/s^2

# Berechnung von Kraft und u_Kraft
Messreihe$Kraft <- Messreihe$Gewicht_kg * g #N
Messreihe$u_Kraft <- g*u_m

# Plotten
library(ggplot2)
ggplot(Messreihe, aes(x = Auslenkung1_x0_m, y = Kraft,
                      ymin = Kraft-u_Kraft, ymax = Kraft+u_Kraft)) +
  #geom_point(size=0.1) +
  geom_errorbar(width = 0.001) +
  geom_errorbar(width = 0.001) +
  xlab("Auslenkung x [m]") + ylab("Kraft F [N]") +
```

```
  geom_errorbarh(aes(xmin = Auslenkung1_x0_m-u_x,
                     xmax = Auslenkung1_x0_m+u_x))
```



Wird F gegen x_i aufgetragen, ergibt sich optisch ab einer Auslenkung von $5cm$ ein etwa linearer Zusammenhang. Im Bereich zwischen einer Elongation von $0cm$ und $5cm$ kann das Ausdehnungsverhalten des Gummibandes unter einer Gewichtsbelastung nicht als linear betrachtet und nicht durch eine Federkonstante beschrieben werden. Für die Berechnung der Federkonstanten haben wir uns daher entschieden, die Werte für $x_i < 0,05m$ auszuschließen. Zugleich müssen wir dann allerdings feststellen, dass die errechnete Federkonstante nur im Intervall $x \in (0,05m,\ x_{max}]$ gilt.

Berechnung der Federkonstanten

Da die Gewichtskraft $F_G = m * g$ und die Zugkraft des Gummibandes $F_{Zug} = x * D$ im Ruhezustand im Gleichgewicht zueinander stehen, gilt folgende Formel:

$$F_G = m * g = D * x = F_{Zug}$$

Mit:

- D: Federkonstante
- m: Masse des Gewichtes,
- x: Auslenkung,
- g: Erdbeschleunigung $(9,81 \frac{m}{s^2})$.

Daraus ergibt sich für die Federkonstante D:

$$D = \frac{m * g}{x}$$

Diese wird für jede Auslenkung x_i berechnet.

```
Messreihe$Federkonstante <- Messreihe$Gewicht_kg*g/Messreihe$Auslenkung1_x0_m
```

Die Unsicherheit der einzelnen Werte der Federkonstanten u_D ergibt sich gemäß der Gaussschen-Fehlerfortpflanzung aus folgender Formel:

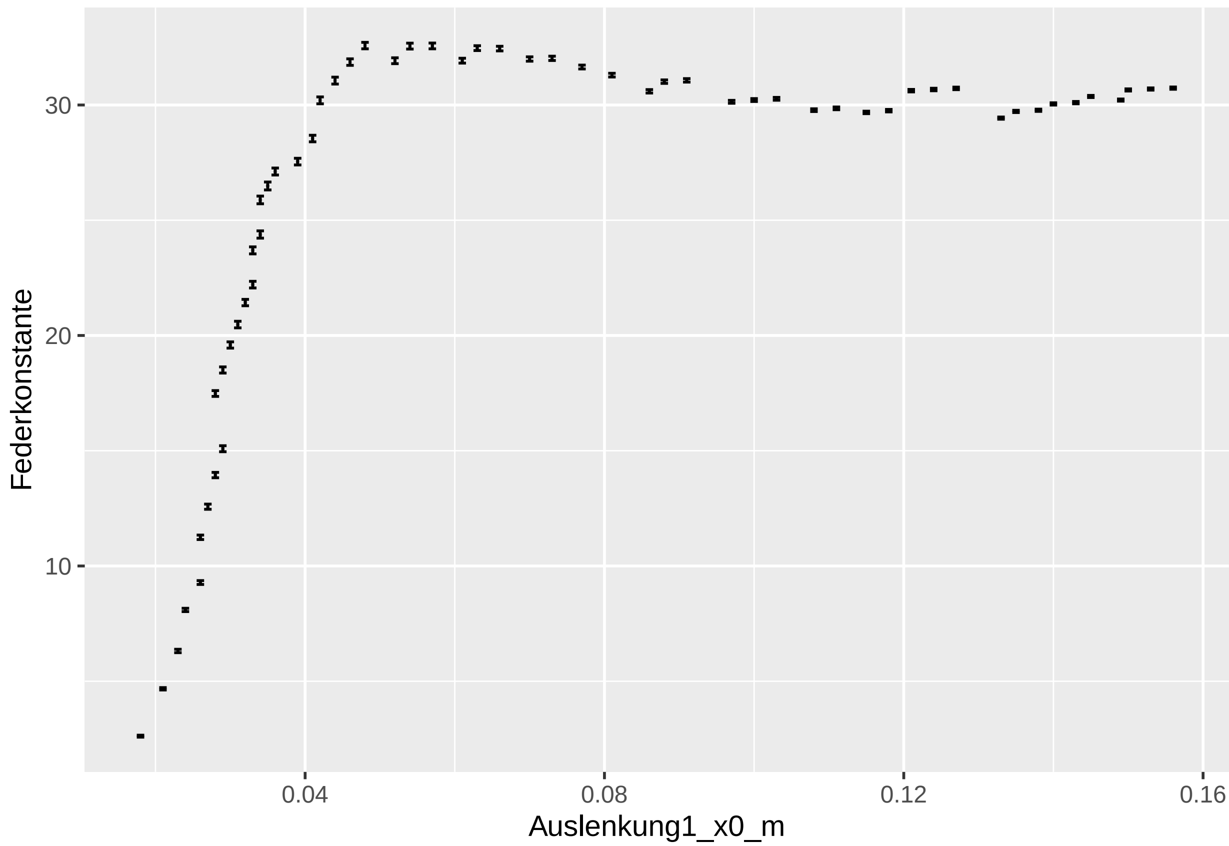
$$\begin{aligned} u_D &= \sqrt{(\frac{\partial D}{\partial m} * u_m)^2 + (\frac{\partial D}{\partial x} * u_x)^2} \\ u_D &= \sqrt{(\frac{g}{x} * u_m)^2 + (-\frac{m * g}{x^2} * u_x)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

Berechnung in R:

```
# Funktion zur Berechnung der Messunsicherheit der Federkonstanten
# INPUT: x, m, u_m, u_x (glob)
# OUTPUT: u_D
u_D_funktion <- function(x,m, UM){
  sqrt(((g/x)*UM)**2+((-m*g/x**2)*u_x)**2)
}

Messreihe$u_Federkonstante <- u_D_funktion(x=Messreihe$Auslenkung1_x0_m,
                                           m=Messreihe$Gewicht_kg,
                                           UM=Messreihe$u_m)
```

Wird die Federkonstante über die Elongation geplottet, zeigt sich wieder, dass diese erst ab einer Auslenkung von etwa 5 cm einen vergleichsweise Stabilen Wert annimmt.

```
# Plotten
ggplot(subset(Messreihe, !is.na(Federkonstante)), aes(x = Auslenkung1_x0_m,
                                                      y = Federkonstante,
                                                      ymin = Federkonstante-u_Federkonstante,
                                                      ymax = Federkonstante+u_Federkonstante)) +
  #geom_point() +
  geom_errorbar(width = 0.001) +
  geom_errorbarh(aes(xmin = Auslenkung1_x0_m-u_x,
                     xmax = Auslenkung1_x0_m+u_x))
```



Daher haben wir uns entschiden, nur in dem beschriebenen Intervall $x \in (0,05m,\ x_{max}]$ zu mitteln. Dort wird nach GUM der Mittelwert und die Standardabweichung des Mittelwertes berechnet, um ein Messergebnis und dessen Unsicherheit zu erhalten.

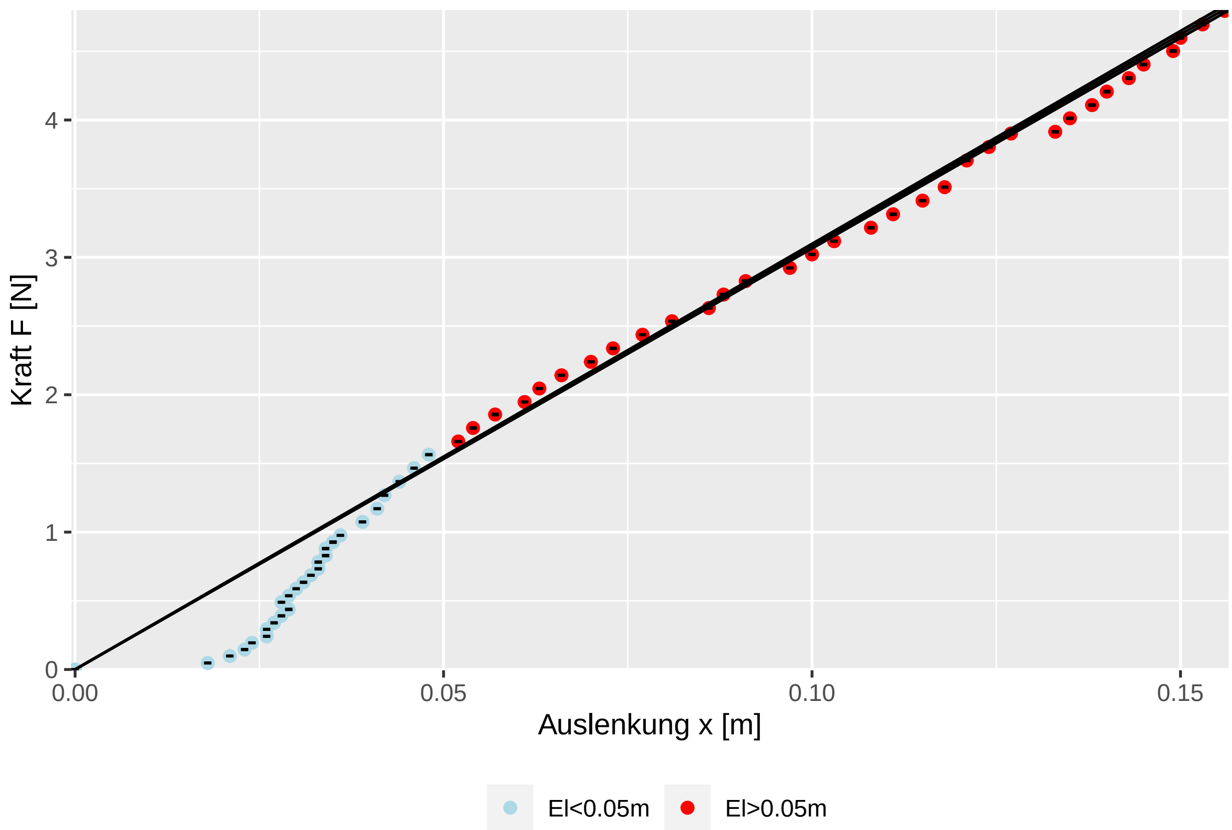
- Mittelwert: $\overline{D} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$
- Standardabweichung: $\sigma_D = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (D_i - \overline{D})^2}$
- Standardabweichung des Mittelwertes: $\sigma_{\overline{D}} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}$

```r
# Ausschließen der Werte der Federkonstante mit x<=0,05
D <- Messreihe$Federkonstante[Messreihe$Auslenkung1_x0_m>0.05]

# Ausgabe als Dataframe
d <- data.frame(Werte=c(mean(D), sd(D), sd(D)/sqrt(length(D))))
rownames(d) <- c("Mittelwert_MW", "Standardabweichung_SD", "SD_von_MW")
d
```

```
##                           Werte
## Mittelwert_MW         30.8162757
## Standardabweichung_SD  0.9579652
## SD_von_MW              0.1667603
```

Die bestimmte Federkonstante, für eine Auslenkung des Gummibandes im Bereich von $5,0$ bis $26.8cm$, beträgt also $D = (30,91 \pm 0,17)\frac{N}{m}$

Hire wird die Federkonstante als Gerade im Kraft-Auslenkungsschaubild dargestellt. Die blau eingefärbten Punkte sind diejenigen Punkte, die in die Berechnung mit eingingen.



Angemerkt sei, dass für die Steigung der Federkonstanten der Mittelwert und die Mittelwerte ab- bzw. zuzüglich der Standardabweichung des Mittelwertes angenommen wurden. Die Drei Geraden überlagern sich sehr stark. Ebenso sei angemerkt, dass die Fehlerbalken vorhanden sind, wie auch in den Diagrammen zuvor, nur dass diee ehr klein ausfallen, vergleiche entsprechend errechnete Werte im Abschnitt *Messwerte und errechnete Größen.*

Messwerte und errechnete Größen

Im Folgenden eine Auflistung der in diesem Versuch erhobenen Messwerte und der daraus errechneten Größen:

```
##     n_m  m[kg]   u_m[kg] L[cm] El[m]   F[N]     u_F  D[N/m]    u_D
## 1     0 0.0000 0.0000000  11.2 0.000 0.0000 0.00000     NaN    NaN
## 2     1 0.0048 0.0000577  13.0 0.018 0.0471 0.00057  2.6160 0.0428
## 3     1 0.0100 0.0000577  13.3 0.021 0.0981 0.00057  4.6714 0.0520
## 4     2 0.0148 0.0001155  13.5 0.023 0.1452 0.00113  6.3125 0.0737
## 5     1 0.0198 0.0000577  13.6 0.024 0.1942 0.00057  8.0932 0.0715
## 6     2 0.0246 0.0001155  13.8 0.026 0.2413 0.00113  9.2818 0.0836
## 7     2 0.0298 0.0001155  13.8 0.026 0.2923 0.00113 11.2438 0.0968
## 8     3 0.0346 0.0001732  13.9 0.027 0.3394 0.00170 12.5713 0.1124
## 9     3 0.0398 0.0001732  14.0 0.028 0.3904 0.00170 13.9442 0.1166
## 10    4 0.0446 0.0002309  14.1 0.029 0.4375 0.00227 15.0871 0.1301
## 11    1 0.0499 0.0000577  14.0 0.028 0.4895 0.00057 17.4828 0.1265
## 12    2 0.0547 0.0001155  14.1 0.029 0.5366 0.00113 18.5037 0.1335
## 13    2 0.0599 0.0001155  14.2 0.030 0.5876 0.00113 19.5873 0.1359
## 14    3 0.0647 0.0001732  14.3 0.031 0.6347 0.00170 20.4744 0.1430
## 15    2 0.0699 0.0001155  14.4 0.032 0.6857 0.00113 21.4287 0.1385
```

```
## 16    3 0.0747 0.0001732  14.5 0.033 0.7328 0.00170 22.2063 0.1441
## 17    3 0.0797 0.0001732  14.5 0.033 0.7819 0.00170 23.6926 0.1525
## 18    4 0.0845 0.0002309  14.6 0.034 0.8289 0.00227 24.3807 0.1581
## 19    4 0.0897 0.0002309  14.6 0.034 0.8800 0.00227 25.8811 0.1662
## 20    5 0.0945 0.0002887  14.7 0.035 0.9270 0.00283 26.4870 0.1716
## 21    1 0.0995 0.0000577  14.8 0.036 0.9761 0.00057 27.1137 0.1515
## 22    2 0.1095 0.0001155  15.1 0.039 1.0742 0.00113 27.5435 0.1442
## 23    2 0.1193 0.0001155  15.3 0.041 1.1703 0.00113 28.5447 0.1420
## 24    3 0.1293 0.0001732  15.4 0.042 1.2684 0.00170 30.2008 0.1494
## 25    4 0.1393 0.0002309  15.6 0.044 1.3665 0.00227 31.0576 0.1503
## 26    2 0.1494 0.0001155  15.8 0.046 1.4656 0.00113 31.8612 0.1407
## 27    3 0.1594 0.0001732  16.0 0.048 1.5637 0.00170 32.5774 0.1403
## 28    3 0.1692 0.0001732  16.4 0.052 1.6599 0.00170 31.9202 0.1270
## 29    4 0.1792 0.0002309  16.6 0.054 1.7580 0.00227 32.5547 0.1277
## 30    5 0.1892 0.0002887  16.9 0.057 1.8561 0.00283 32.5623 0.1246
## 31    1 0.1985 0.0000577  17.3 0.061 1.9473 0.00057 31.9227 0.1051
## 32    2 0.2085 0.0001155  17.5 0.063 2.0454 0.00113 32.4664 0.1046
## 33    2 0.2183 0.0001155  17.8 0.066 2.1415 0.00113 32.4473 0.0998
## 34    3 0.2283 0.0001732  18.2 0.070 2.2396 0.00170 31.9946 0.0946
## 35    4 0.2383 0.0002309  18.5 0.073 2.3377 0.00227 32.0236 0.0931
## 36    2 0.2484 0.0001155  18.9 0.077 2.4368 0.00113 31.6468 0.0835
## 37    3 0.2584 0.0001732  19.3 0.081 2.5349 0.00170 31.2951 0.0801
## 38    3 0.2682 0.0001732  19.8 0.086 2.6310 0.00170 30.5935 0.0738
## 39    4 0.2782 0.0002309  20.0 0.088 2.7291 0.00227 31.0130 0.0750
## 40    5 0.2882 0.0002887  20.3 0.091 2.8272 0.00283 31.0686 0.0750
## 41    2 0.2980 0.0001155  20.9 0.097 2.9234 0.00113 30.1379 0.0632
## 42    3 0.3080 0.0001732  21.2 0.100 3.0215 0.00170 30.2148 0.0628
## 43    3 0.3178 0.0001732  21.5 0.103 3.1176 0.00170 30.2681 0.0610
## 44    4 0.3278 0.0002309  22.0 0.108 3.2157 0.00227 29.7752 0.0590
## 45    5 0.3378 0.0002887  22.3 0.111 3.3138 0.00283 29.8542 0.0595
## 46    3 0.3479 0.0001732  22.7 0.115 3.4129 0.00170 29.6774 0.0537
## 47    4 0.3579 0.0002309  23.0 0.118 3.5110 0.00227 29.7542 0.0540
## 48    4 0.3777 0.0002309  23.3 0.121 3.7052 0.00227 30.6218 0.0540
## 49    5 0.3877 0.0002887  23.6 0.124 3.8033 0.00283 30.6721 0.0545
## 50    6 0.3977 0.0003464  23.9 0.127 3.9014 0.00340 30.7200 0.0553
## 51    4 0.3990 0.0002309  24.5 0.133 3.9142 0.00227 29.4300 0.0474
## 52    5 0.4090 0.0002887  24.7 0.135 4.0123 0.00283 29.7207 0.0488
## 53    5 0.4188 0.0002887  25.0 0.138 4.1084 0.00283 29.7712 0.0478
## 54    6 0.4288 0.0003464  25.2 0.140 4.2065 0.00340 30.0466 0.0493
## 55    7 0.4388 0.0004041  25.5 0.143 4.3046 0.00396 30.1023 0.0504
## 56    5 0.4489 0.0002887  25.7 0.145 4.4037 0.00283 30.3704 0.0462
## 57    6 0.4589 0.0003464  26.1 0.149 4.5018 0.00340 30.2135 0.0465
## 58    6 0.4687 0.0003464  26.2 0.150 4.5979 0.00340 30.6530 0.0467
## 59    7 0.4787 0.0004041  26.5 0.153 4.6960 0.00396 30.6931 0.0478
## 60    8 0.4887 0.0004619  26.8 0.156 4.7941 0.00453 30.7317 0.0489
```

Versuch 2

Ziel

Untersuchung der Fragestellung, ob sich der Zusammenhang zwischen Kraft und Elongation verändert, wenn man die Angrifffskraft auf einen Strang des Gummibandes anstatt auf zwei verteilt.

Eine Hypothese ist, dass die Auslenkung bei gleicher Gewichtskraft doppelt so hoch ist, weil die Kraft auf nur einen Strang wirkt.

Materialien

- Stativ
- Gummiband
- Gewichte
- Maßband
- Haken
- Klebeband
- Schere

Versuchsaufbau

- Analog zu Versuch 1, aber das Gummiband wurde vorher mit einer Schere zerschnitten und durch geknotete Schlaufen an Haken und Gewicht befestigt.

Durchführung

Analog zu Versuch 1. Wir haben uns dafür entschieden bis zur Marke von 100g in 5g - Intervallen und danach in 10g- Schriiten zu messen, um die Daten mit den Daten aus der ersten Versuchsreihe gut vergleichen können. Da das Band allerdings viel stärker durch das Anbringen von Gewicht gedehnt wurde, konnten wir ab 360g keine Messungewn mehr durchführen, da die Gewichte durch ihre Länge anfingen am Tisch aufzuliegen und so die Normalkraft die Gewichtskraft verfälscht hätte. Stattdessen haben wir den aus platztechnisch noch gut messbaren Wert für 400g genommen und den Rest der Tabelle nicht ausgefüllt. x_0 lag bei uns in diesem Fall bei 15,8cm.

Messung

Auswertung

Interpretation

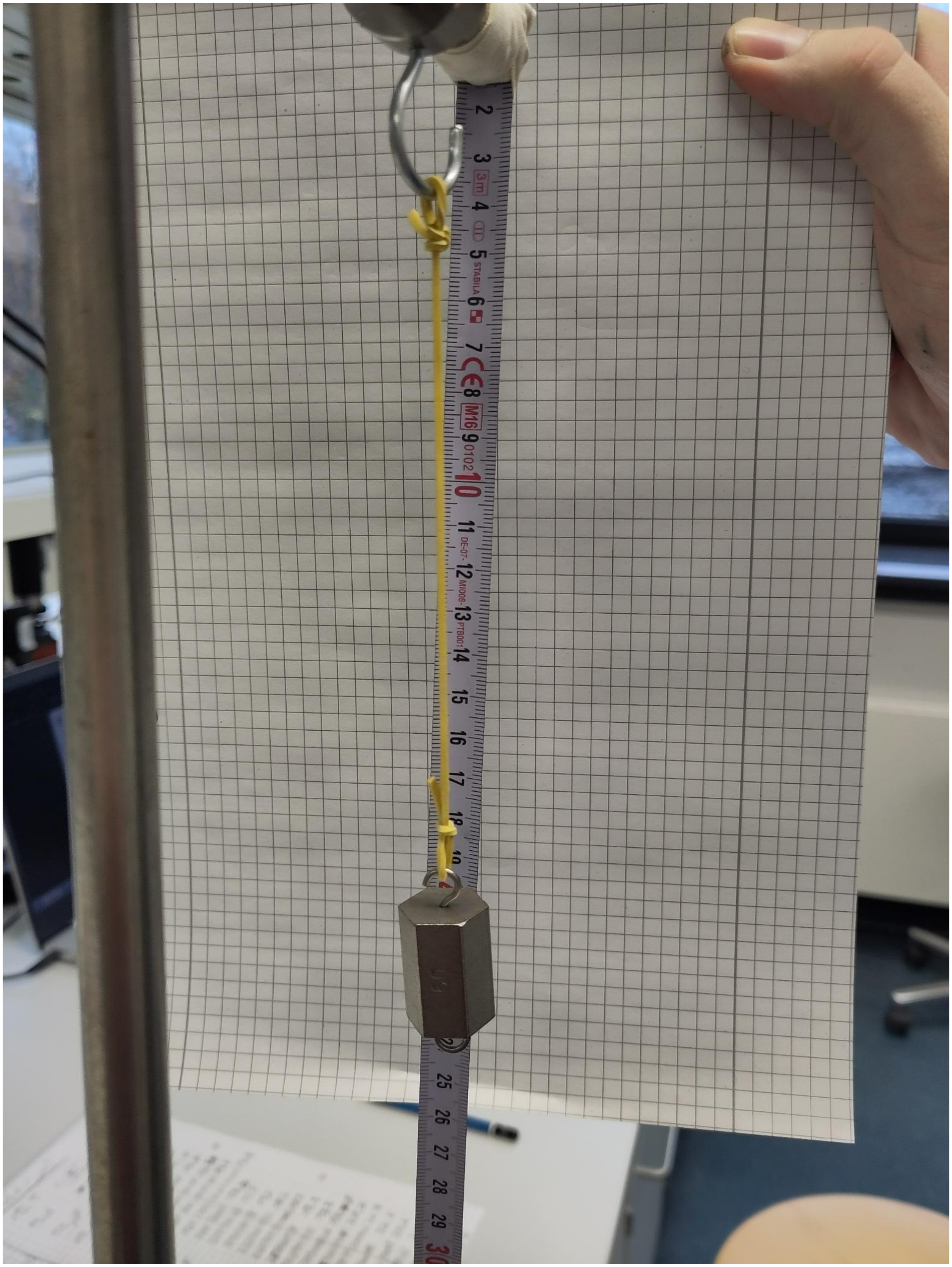


Abbildung 3: Versuchsaufbau 2

Abbildung 4: Versuchsaufbau 2, Nahansicht