

Hausaufgabe 1

Justus Weyers

2022-11-03

Aufgabe 1

Die Periodendauer eines Pendels wird gemessen. Ihr Wert wird mit $(10,0 \pm 0,1)s$ angegeben. Wie groß ist die relative Messunsicherheit?

$$\begin{aligned} u_{rel} &= \frac{u_x}{x} \\ \Rightarrow \left| \frac{\pm 0,1s}{10,0s} \right| &= 0,01 = 1\%. \end{aligned} \tag{1}$$

- u_{rel} : Relative Messunsicherheit
- u_x : Absolute Messunsicherheit
- x : Bestwert

Aufgabe 2:

Es wurde eine Geschwindigkeit von $6 \frac{km}{h}$ mit einer relativen Unsicherheit von 1% gemessen. Wie groß ist die absolute Messunsicherheit?

Aus Gleichung 1 folgt durch Umstellen:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{rel} * x \\ \Rightarrow &= \pm 0,01 * 6 \frac{km}{h} \\ &= \pm 0,06 \frac{km}{h}. \end{aligned} \tag{2}$$

Aufgabe 3

Ein analoger Spannungsmesser hat die Güteklasse 2 (d.h. die Messunsicherheit beträgt 2% des Messbereichs-Endwertes). Wie groß ist die relative Messunsicherheit der Anzeige, wenn im 10V-Messbereich 2,00V abgelesen werden?

Das Gerät entspricht der Güteklasse 2. Daraus folgt, dass die Messunsicherheit bei einem Vollausschlag von 10V bei $\pm 0,2V$ liegt. Mit Gleichung 1 ergibt sich:

$$\left| \frac{\pm 0,2V}{2V} \right| = 0,01 = 1\%.$$

Aufgabe 4:

Sie wiegen in der Küche mit einer digitalen elektronischen Waage dessen kleinste Schrittweite (auch Auflösung genannt) $0,1g$ beträgt einen Apfel. Der Apfel wiegt laut Anzeige $120,0g$. Wie groß ist die gesamte Messunsicherheit der Messung, wenn der Gerätehersteller eine Gerätemessunsicherheit von 1% v. Messwert $+ 2[*dg*t.]$ angibt?

Berechnung der Skalenungenauigkeit u_{Skala} . Der tatsächliche Wert kann zwischen $119,95g$ und $120,05g$ liegen ($\rightarrow a = 0,1g$). Daraus folgt für u_{Skala} (digitale Waage):

$$\begin{aligned} u_{Skala} &= \frac{a}{2\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow = \frac{0,1g}{2\sqrt{3}} \\ &= \pm 0,058g. \end{aligned} \tag{3}$$

- u_{Skala} : Messunsicherheit Skala
- a : Fehlerintervall

Aus der Aufgabenstellung folgt für die Messungenauigkeit der Waage $u_{Gerät}$:

$$u_{Gerät} = 0,01 * 120g + 2[*dg*t.] = \pm 1,4g.$$

Die Gesamtunsicherheit berechnet sich dann als:

$$\begin{aligned} u_{Gesamt} &= \sqrt{u_{Skala}^2 + u_{Gerät}^2} \\ &\Rightarrow = \sqrt{(\pm 0,058g)^2 + (1,4g)^2} \\ &= \pm 1,4g. \end{aligned} \tag{4}$$

Aufgabe 5:

Eine Spannung wurde gleichzeitig mit zwei baugleichen Analog-Multimetern (AMM) genau einmal gemessen: Messbereich: $200mV$, Garantiefehlergrenze: $\pm(0,5\%v.Messwert. + 0,1\%v.Messbereich)$; Messwert 1 (AMM1): $22,0mV$, Messwert 2 (AMM2): $22,5mV$ ($\rightarrow a = 0,1g$). Geben Sie die beiden Messergebnisse zusammen mit der Standardmessunsicherheit in korrekter Schreibweise an.

AMM1:

Fehler $0,5\%$ vom Messwert: $u_{Messwert} = 0,005 * 22,0mV = \pm 0,11mV$.

Fehler $0,1\%$ vom Messbereich: $u_{Messbereich} = 0,001 * 200mV = \pm 0,20mV$.

Fehler der analogen Skala: $u_{Skala} = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{0,1mV}{2\sqrt{6}} = \pm 0,020mV$.

Gesamtfehler errechnet sich als:

$$\begin{aligned} u_{Gesamt} &= \sqrt{u_{Skala}^2 + u_{Messwert}^2 + u_{Messbereich}^2} \\ &= \sqrt{(\pm 0,020)^2 + (\pm 0,11)^2 + (\pm 0,20)^2}mV \\ &= \pm 0,23mV \end{aligned} \tag{5}$$

Gerätunsicherheit: $u_{AMM1} = \sqrt{u_{Messwert}^2 + u_{Messbereich}^2} = \pm 0,23mV$.

AMM2:

Fehler 0,5% vom Messwert: $u_{Messwert} = 0,005 * 22,5mV \approx \pm 0,11mV$.

Fehler 0,1% vom Messbereich: $u_{Messbereich} = 0,001 * 200mV = \pm 0,20mV$.

Fehler der analogen Skala: $u_{Skala} = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{0,1mV}{2\sqrt{6}} = \pm 0,020mV$.

Gesamtfehler errechnet sich analog zu Gleichung 5:

$$\begin{aligned} u_{Gesamt} &= \sqrt{(\pm 0,020)^2 + (\pm 0,11)^2 + (\pm 0,20)^2}mV \\ &= \pm 0,23mV \end{aligned}$$

Gerätunsicherheit: $u_{AMM2} = \sqrt{u_{Messwert}^2 + u_{Messbereich}^2} = \pm 0,23mV$.

Aufgabe 6:

Nehmen Sie nun an, Sie ändern den Messbereich des Multimeters und damit die Garantiefehlergrenze des Multimeters auf $\pm(0,2\%v.Messwert. + 0,02\%vomMessbereich)$ für den Messbereich von 2V. Es wird erneut gemessen - neuer Wert: 20mV (wobei im 2V Messbereich, die kleinste ablesbare Skalenstrich ist 10mV). Ändert sich die Messunsicherheit des Messgerätes? Wie ändert sich die Messunsicherheit der Ableseskala?

Fehler 0,2% vom Messwert: $u_{Messwert} = 0,002 * 20mV = \pm 0,04mV$.

Fehler 0,02% vom Messbereich: $u_{Messbereich} = 0,0002 * 2000mV = \pm 0,4mV$.

Fehler der analogen Skala: $u_{Skala} = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{10mV}{2\sqrt{6}} = \pm 2,0mV$.

Messunsicherheit des Multimeters:

$$\begin{aligned} u_{Gerät} &= \sqrt{u_{Messwert}^2 + u_{Messbereich}^2} \\ &\Rightarrow = \sqrt{(\pm 0,04)^2 + (\pm 0,4)^2} \\ &= \pm 0,4mV. \end{aligned}$$

Der Betrag der Messunsicherheit des Multimeters verdoppelt sich mit $\pm 0,4mV$ im Vergleich zu den Gerätmessunsicherheiten aus Aufgabe 5, welche für beide Geräte $\pm 0,23mV$ betrug.

Der Fehler der Ableseskala steigt in diesem Vergleich hingegen um zwei Größenordnungen von $\pm 0,020mV$ in Aufgabe 5 auf $\pm 2,0mV$ in Aufgabe 6.

Aufgabe 7:

Die Temperatur eines Kühlschranks wurde mehrmals gemessen. Es wurde diese Messreihe aufgenommen:

T (°C)	7,6	7,8	8,2	7,7	7,8	8,3	8,0
--------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Geben Sie den Bestwert für T zusammen mit der Messunsicherheit (Typ A) in korrekter Schreibweise an.

Es finden folgende Formeln für die Berechnung von Statistik- und Fehlerkenngrößen Verwendung:

- Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i^n x_i$
- Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i^n (x_i - \bar{x})^2}$
- Standardabweichung des Mittelwertes $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Vertrauensabweichung $\varepsilon = t * \sigma_{\bar{x}}$

Mit n : Anzahl der (Mess)Werte, x_i : i -ter Messwert, t : Student Faktor, hier 1,08. Die Berechnung erfolgt durch Einabe in R:

```
# Eingabe der Messwerte
temp_messwerte <- c(7.6,7.8,8.2,7.7,7.8,8.3,8.0)

# Berechnung Mittelwert
Mittelwert <- mean(temp_messwerte)

# Berechnung Standardabweichung (SD)
SD = sd(temp_messwerte)

# Berechnung Standardabweichung des Mittelwertes (SDM)
SDM = SD/sqrt(length(temp_messwerte))

# Student T-Faktor für n = 7
t = 1.08

# Berechnung Vertrauensabweichung (VAB)
VAB = t*SDM

# Ausgabe der errechneten Werte als Dataframe
data.frame(Maßzahl = c('Mittelwert', 'Standardabweichung',
                       'Standardabweichung des Mittelwertes',
                       't-Faktor', 'Vertrauensabweichung'),
           Werte = round(c(Mittelwert, SD, SDM, t, VAB), 4))
```

```
##               Maßzahl  Werte
## 1               Mittelwert 7.9143
## 2           Standardabweichung 0.2610
## 3 Standardabweichung des Mittelwertes 0.0986
## 4                 t-Faktor 1.0800
## 5           Vertrauensabweichung 0.1065
```

Für die Messunsicherheit ergibt sich daraus: $u = (7,91 \pm 0,11)^\circ C$.

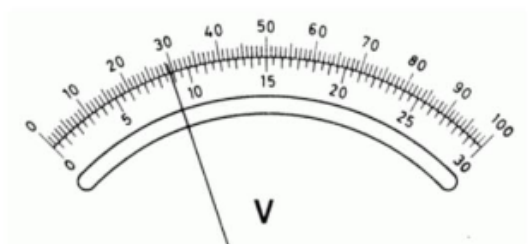
Aufgabe 8:

Geben Sie die folgenden Messergebnisse korrekt an:

Inkorrekt	Hoffentlich korrekt
$a = (9,82 \pm 0,02385) \frac{m}{s^2}$	$a = (9,820 \pm 0,024) \frac{m}{s^2}$
$Q = (0,1562 * 10^{-15} \pm 689,76 * 10^{-19}) C$	$Q = (0,1560 * 10^{-15} \pm 690 * 10^{-19}) C$
$v = (199798673,67 \pm 7245,98132) \frac{m}{s}$	$v = (199798700 \pm 7200) \frac{m}{s}$
$\lambda = (885,589 * 10^{-11} \pm 0,004985 * 10^{-8}) m$	$\lambda = (0,8856 * 10^{-8} \pm 0,0050 * 10^{-8}) m$
$U = 1,81 kV, u(U) = 1693 mV$	$U = (1810,0 \pm 1,7) V$

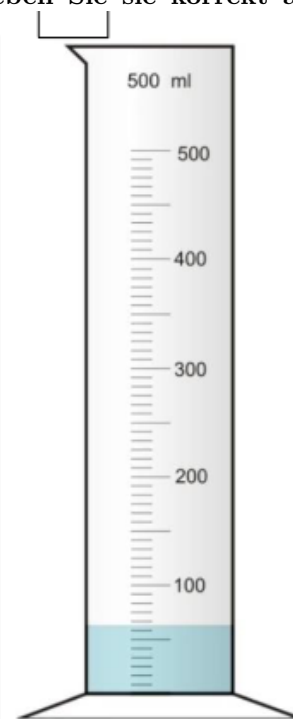
Aufgabe 9:

Lesen Sie die folgenden Messgrößen so gut wie möglich ab und geben Sie sie korrekt an!



[1]

Eingestellter Messbereich 10 V



a) Voltmeter

Skalenart: Analog

Abgelesener Bestwert: 8,9V

Kleinstes ablesbare Intervall a : 0,5V

Da es sich bei der Anzeige des Voltmeters um eine analoge Anzeige handelt wird für die Berechnung der Messunsicherheit der Ableseskala u_{skala} die Formel $u_{skala} = \frac{a}{2\sqrt{6}}$ verwendet:

$$\Rightarrow u_{skala} = \pm \frac{0,5V}{2\sqrt{6}} = \pm 0,10V$$

Damit ergibt sich das Messergebnis zu: $(8,9 \pm 0,10)V$.

b) Thermometer

Skalenart: Analog

Abgelesener Bestwert: 41°C

Kleinstes ablesbares Intervall a : 1°C

Da es sich bei der Anzeige des Thermometers um eine analoge Anzeige handelt wird für die Berechnung der Messunsicherheit der Ableseskala u_{skala} die Formel $u_{skala} = \frac{a}{2\sqrt{6}}$ verwendet:

$$\Rightarrow u_{skala} = \pm \frac{1^\circ\text{C}}{2\sqrt{6}} = \pm 0,20^\circ\text{C}$$

Damit ergibt sich das Messergebnis zu: $(41,00 \pm 0,20)^\circ\text{C}$.

c) Standzylinder

Skalenart: Analog

Abgelesener Bestwert: $(\frac{1}{2} + \frac{3}{24}) * 100\text{ml} = \frac{15}{24} * 100\text{ml} = 62,5\text{ml}$

Kleinstes ablesbares Intervall a : $\frac{1}{12} * 100\text{ml}$

Der Standzylinder besitzt eine analoge Skala. Für die Berechnung der Messunsicherheit der Ableseskala u_{skala} findet die Formel $u_{skala} = \frac{a}{2\sqrt{6}}$ verwendung:

$$\Rightarrow u_{skala} = \pm \frac{\frac{1}{12} * 100\text{ml}}{2\sqrt{6}} = \pm 1,7\text{ml}$$

Damit ergibt sich das Messergebnis zu: $(62,5 \pm 1,7)\text{ml}$.