К лекции №3

17 сентября 2025 г.

1 Циклы в сильных турнирах

1. Постройте сильный турнир на 5 вершинах. Найдите в нём направленный цикл длины 3 и направленный цикл длины 4.

   - *Подсказка: в сильном турнире из каждой вершины должен существовать путь в любую другую.*

2. Докажите утверждение: *в любой сильно связном ориентированном графе есть направленный цикл.*

   - *Короткая подсказка: рассмотрите максимальный ориентированный путь и исходящие из последней вершины ребра.*

3. Для небольшого турнира (4–6 вершин) найдите все простые ориентированные циклы и покажите, какие длины циклов встречаются.

2 Гамильтоновы циклы в сильных турнирах

1. Возьмите конкретный сильный турнир на 5 вершинах. Найдите гамильтонов цикл (цикл, проходящий через все вершины ровно по одному разу) и запишите порядок вершин.

2. Исследуйте утверждение: *в каждом сильном турнире на n вершинах существует гамильтонов цикл.* Проверьте на примерах $n = 4, 5, 6$.

3. Придумайте жадный алгоритм (правило) поиска гамильтонова цикла в турнире и примените его к примеру на 6 вершинах: опишите шаги алгоритма и результат.

3 Критерий двудольности

1. Для трёх заданных графов (а) граф с треугольником, (б) граф с циклом чётной длины, (в) лес – определите, являются ли они двудольными. Объясните выбор.

2. Докажите критерий: *граф двудольный тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.*

    - *Подсказка: в двудольном графе любой цикл имеет чётную длину; обратную часть можно доказать раскраской в два цвета уровнями обхода в ширину.*

3. Постройте двудольный граф на 6 вершинах с максимальным числом рёбер. Сколько рёбер можно получить (подумайте о полном двудольном графе $K_{a,b}$ с $a + b = 6$)?

4 Раскраски вершин и клики

1. Для каждого из трёх небольших графов: (i) треугольник K_3, (ii) путь из 4 вершин, (iii) полный граф K_4 с удалённым ребром — найдите размеры максимальной клики $\omega(G)$ и минимальной правильной раскраски $\chi(G)$. Сравните полученные значения.

2. Обоснуйте неравенство $\chi(G) \geq \omega(G)$ (почему хроматическое число не меньше размера максимальной клики?).

3. Приведите пример графа, где строгое неравенство $\chi(G) > \omega(G)$ выполняется (например, нечётный цикл C_5).

5 Раскраски вершин и независимые множества

1. Покажите, что каждый цвет в любой правильной раскраске образует независимое множество. Приведите пример раскраски и соответствующих независимых множеств.

2. Докажите оценку $\chi(G) \geq \lceil n/\alpha(G) \rceil$, где n — число вершин, а $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества. Проиллюстрируйте примером при $n = 10,\ \alpha = 4$.

3. Для небольшого графа (6–8 вершин) найдите максимальное независимое множество и минимальную раскраску; сравните полученные числа на практике.

6 Раскраски вершин и степени вершин

1. Докажите верхнюю оценку для жадной раскраски: любая последовательная жадная раскраска использует не более $\Delta(G) + 1$ цвета, где $\Delta(G)$ — максимальная степень графа.

2. Приведите примеры графов, для которых $\chi(G) = \Delta(G)+1$ (например, полный граф K_m и нечётный цикл) и контрпримеры (графы, где $\chi(G) \leq \Delta(G)$).