

## Задачи и упражнения к дисциплине

### «Основы теории вероятностей и математической статистики»

#### РАЗДЕЛ 1. Основные формулы теории вероятностей

##### Литература \*\*

1. **Феллер, В.** Введение в теорию вероятностей и ее применение. В 2-х томах. М.: Мир, 1984. Т.1, 528 с., т.2 752 с.
2. **Вентцель, Е.С., Овчаров, А.А.** Теория вероятностей и ее инженерное приложение. М.: Наука, 1988 г. 480с.
3. **Вентцель, Е.С., Овчаров, А.А.** Прикладная теория вероятностей. М.: Радио и связь, 1983, 416с.
4. **Гмурман, В.С.** Теория вероятностей и математическая статистика. М., Наука, 1972.
5. **Ефимова, А.В.** Сборник задач по математике. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Наука, 1990.
6. **Севостьянов, П.А.** Методическая разработка для самостоятельной работы по курсу "Вероятностные процессы в АСУ". Часть 1. М., РИО МТИ, 1991.
7. **Севостьянов, П.А.** Математические методы обработки данных. Учебное пособие для вузов. – М.:МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2004. – 256 с.

*\*\* Перечисленные издания могут быть бесплатно скачаны из Интернет.*

#### Список сокращений

**СВ** – случайная величина

**НСВ** – непрерывная СВ

**ДСВ** – дискретная СВ

**ФР** – функция распределения

**ФПВ** – функция плотности вероятностей

**МО** – математическое ожидание

**Mod** – модальное значение СВ

**Me** – медиана СВ

**СКО** – среднеквадратическое отклонение

**МП-оценка** – оценка методом максимального правдоподобия

**ММ-оценка** – оценка методом моментов

#### Задачи и упражнения к разделу 1

**1.** Приведите формулу полной вероятности и формулу Бейеса. Дайте определение полной группы случайных событий, априорной и апостериорной вероятностей.

2. Два случайных события совместны. Могут ли они образовывать полную группу ?
3. Среди дружинников 3 девушки и 7 юношей. Требуется путем жеребьевки избрать на дежурство трех дружинников. Чему равна вероятность того, что при извлечении одного за другим трех жребиев окажутся избранными три юноши?
4. Бросается игральная кость. Определить вероятность того, что при этом выпадает три очка.
5. Из косточек домино берется наудачу одна. Определить, что эта косточка окажется "шесть-шесть".
6. В урне  $a$  белых и  $b$  черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.
7. Лотерея выпущена на общую сумму  $S$  руб. Цена одного билета  $t$  руб. Выигрыши попадают на  $K$  билетов. Определить вероятность выигрыша на один билет.
8. В урне  $a$  белых и  $b$  черных шаров. Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.
9. В урне  $a$  белых и  $b$  черных шаров. Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.
10. В партии, состоящей из  $K$  изделий, имеется  $l$  дефектных. Из партии выбирается для контроля  $r$  изделий. Найти вероятность того, что из них ровно  $S$  изделий будут дефектными.
11. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстра - класса. Найти вероятность того, что все команды экстра - класса попадут в одну и ту же группу.
12. Найти вероятность угадать в лотерее 6 номеров из 49?
13. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово "книга". Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Какова вероятности того, что снова получилось слово "книга".
14.  $N$  человек случайным образом рассаживаются за круглым столом ( $N > 2$ ). Найти вероятность того, что два фиксированных лица  $A$  и  $B$  окажутся рядом.
15. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, и помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.
16. В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей будет 4 стандартных.
17. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.
18. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

- 19.** Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона, не содержит цифры 5.
- 20.** В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, л, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных "в одну линию" кубиках можно будет прочесть слово "спорт".
- 21.** На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на 4-х вынутых по одной и расположенных "в одну линию" карточках можно будет прочесть слово "трос".
- 22.** Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенную грань.
- 23.** 8 различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги оказались поставленными рядом.
- 24.** Библиотечка состоит из 10 различных книг, причем пять книг стоят по 4 руб., 3 книги – по 1 руб. и 2 книги – по 3 руб. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 руб.
- 25.** Вероятность сдать экзамен с одной попытки равна  $p$ . Определить вероятность того, что студент сдаст экзамен, если допускается только две попытки.
- 26.** Бросается игральная кость. Определить вероятность того, что при этом выпадет одно очко.
- 27.** В партии из 8 деталей имеется 5 стандартных. Найти вероятность того, что среди трех взятых наудачу деталей будет одна стандартная.
- 28.** Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет нечетное число очков.
- 29.** 10 различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что 3 определенные книги оказались поставленными рядом.
- 30.** Студент знает 20 из 25 вопросов. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.
- 31.** Опыт – выстрел по мишени. События:  $A_1 = \{\text{попадание}\}$ ,  $A_2 = \{\text{промах}\}$ . Являются ли эти события равновероятными?
- 32.** Опыт – эксплуатируются два прибора в течение определенного времени. События:  $A_1 = \{\text{ни один прибор не вышел из строя}\}$ ;  $A_2 = \{\text{один прибор вышел из строя, другой – нет}\}$ ,  $A_3 = \{\text{оба прибора вышли из строя}\}$ . Образуют ли эти события полную группу?

- 33.** Опыт - выстрел по мишени. События:  $A_1 = \{\text{попадание}\}$ ,  $A_2 = \{\text{промах}\}$ . Являются ли события  $A_1$  и  $A_2$  равновероятными в данном опыте?
- 34.** Опыт - эксплуатируются два прибора в течение определенного времени. События:  $C_1 = \{\text{ни один прибор не вышел из строя}\}$ ,  $C_2 = \{\text{один прибор вышел из строя, а другой - нет}\}$ ,  $C_3 = \{\text{оба прибора вышли из строя}\}$ . Являются ли эти события равновероятными?
- 35.** Опыт - выстрел по мишени. События:  $E_1 = \{\text{попадание}\}$ ,  $E_2 = \{\text{промах}\}$ . Образуют ли эти события полную группу событий?
- 36.** Опыт - бросание двух игральных костей. События:  $C_1 = \{\text{на обеих костях шестерки}\}$ ,  $C_2 = \{\text{ни на одной кости нет шестерки}\}$ ,  $C_3 = \{\text{на одной кости шестерки, на другой - нет}\}$ . Образуют ли события  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  полную группу событий?
- 37.** Опыт - передача двух сигналов по каналу связи. События:  $D_1 = \{\text{хотя бы один сигнал не искажен}\}$ ,  $D_2 = \{\text{хотя бы один сигнал искажен}\}$ . Образуют ли события  $D_1$  и  $D_2$  полную группу событий в данном опыте?
- 38.** Опыт - два выстрела по цели. События:  $A_1 = \{\text{одно попадание}\}$ ,  $A_2 = \{\text{один промах}\}$ . Являются ли события  $A_1$  и  $A_2$  в данном опыте несовместными?
- 39.** Опыт - бросание монеты. События:  $A_1 = \{\text{герб}\}$ ,  $A_2 = \{\text{решка}\}$ . Образуют ли данные события в данном опыте полную группу событий?
- 40.** Опыт - бросание монеты; события:  $A_1 = \{\text{орел}\}$ ,  $A_2 = \{\text{решка}\}$ . Образуют ли события  $A_1$ ,  $A_2$  полную группу?
- 41.** Опыт - вынимание двух карт из колоды. События:  $A_1 = \{\text{обе карты черной масти}\}$ ,  $A_2 = \{\text{среди вынутых карт есть дама пик}\}$ ,  $A_3 = \{\text{среди вынутых карт есть туз треф}\}$ . Являются ли события  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  в данном опыте несовместными?
- 42.** Монету бросают до тех пор, пока не появятся подряд два герба и две решки. Найти вероятность события  $A = \{\text{понадобится не более трёх бросаний}\}$ .
- 43.** При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, он обнаруживается с вероятностью  $P$ . Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других циклов. Найти вероятность того, что при  $n$  циклах объект будет обнаружен.
- 44.** Над изготовлением изделия работают последовательно  $K$  рабочих. Качество изделий при передаче следующему рабочему не проверяется. Первый рабочий допускает брак с вероятностью  $P_1$ , второй - с вероятностью  $P_2$  и т.д. Найти вероятность того, что при изготовлении изделия будет допущен брак.
- 45.** При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью  $P$ . Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания.

**46.** При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью  $P$ . Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придётся включить зажигание не более двух раз.

**47.** В трёх ящиках находятся детали, из них часть бракованных.

В первом ящике  $N_1$  деталей, из них  $K_1$  годных, во втором  $N_2$ , из них  $K_2$  годных, в третьем  $N_3$  и  $K_3$  годные. Найти вероятность того, что наудачу извлечённая деталь из наудачу взятого ящика – годная.

**48.** Вероятность изделий удовлетворять стандарту равна  $P$ . Предполагаемая процедура проверки на стандартность даёт положительный результат с вероятностью  $P_1$  для изделий, удовлетворяющих стандарту, и с вероятностью  $P_2$  для изделий, не удовлетворяющих стандарту. Какова вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно является таковым?

**49.** Вероятность того, что изделие соответствует стандарту, равна 0,96. Предлагается упрощённая процедура проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, не удовлетворяющих стандарту – с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно соответствует стандарту.

**50.** Производится один выстрел по плоскости, на которой расположены две цели: 1 и 2. Вероятность попадания в цель 1 равна  $P_1$ , в цель 2 –  $P_2$ . После выстрела получено известие, что попадания в цель 1 не произошло. Какова вероятность того, что произошло попадание в цель 2?

**51.** Опыт – передача трёх сообщений равной длины; события:  $\Gamma_1 = \{\text{искажено первое сообщение}\}$ ,  $\Gamma_2 = \{\text{искажено второе сообщение}\}$ ,  $\Gamma_3 = \{\text{искажено третье сообщение}\}$ . Являются ли эти события равновероятными?

**52.** Опыт – бросание монеты; события:  $A_1 = \{\text{орёл}\}$ ,  $A_2 = \{\text{решка}\}$ . Являются ли события  $A_1$  и  $A_2$  в данном опыте несовместными?

**53.** Для участия в отборочных соревнованиях из разных команд выделены участники: из первого –  $N_1$ , из второго –  $N_2$ , из третьего –  $N_3$ . Вероятности того, что спортсмен каждой из команд попадёт в сборную, равно соответственно  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ . Наудачу выбранный участник попал в сборную. Какова вероятность того, что он из первой команды?

**54.** Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, а вторым – 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

**55.** В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника 0,9, для велосипедиста 0,8 и для бегуна 0,75. Найти вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен выполнит норму.

- 56.** Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлечённую кость можно приставить к первой.
- 57.** При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор  $S_1$  с вероятностью 0,8, а сигнализатор  $S_2$  с вероятностью 1. Вероятность того, что автомат снабжён сигнализатором  $S_1$  или  $S_2$ , равны соответственно 0,6 и 0,4. Получен сигнал о разладке автомата. Что вероятнее: автомат снабжён сигнализатором  $S_1$  или  $S_2$ ?
- 58.** В ящик, содержащий  $N$  одинаковых деталей, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна из них. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновоятны все возможные предложения о числе стандартных деталей, первоначально находившиеся в ящике.
- 59.** Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него наименьшей: когда он берёт билет первым или последним?
- 60.** Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлечённую кость можно приставить к первой.
- 61.** В двух ящиках находятся радиолампы. В первом содержится  $N_1$  ламп, из них 1 нестандартная, во втором –  $N_2$  ламп, из них 1 нестандартная. Из первого ящика наугад взята лампа и переложена во второй. Какова вероятность того, что наудачу извлечённая из второго ящика лампа будет нестандартной.
- 62.** Производится однократное извлечение шара из ящика, в котором находятся белые, чёрные и синие шары. Вероятность извлечь белый шар  $P_1$ , чёрный шар  $P_2$ . После извлечения шара оказалось, что он не белый. Какова вероятность того, что извлечён чёрный шар?
- 63.** В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлечённая деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.
- 64.** Для участия в отборочных соревнованиях выделено из первой группы 4, из второй – 6, из третьей 5 спортсменов. Вероятность того, что спортсмен каждой из групп попадёт в сборную, равна соответственно 0,9, 0,7, 0,8. Наудачу выбранный участник попал в сборную. К какой из групп он вероятнее всего принадлежал?
- 65.** В ящик, содержащий 3 одинаковых детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновоятны все возможные предложения о числе стандартных деталей, первоначально находившихся в ящике.
- 66.** В телеателее имеется 4 кинескопа. Вероятность того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно рав-



на 0,8, 0,85, 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

**67.** В группе студентов  $N_1$  отличников,  $N_2$  слабоуспевающих студентов. Вероятность сдать экзамен с первого раза: для отличника  $P_1$ , для отстающего  $P_2$ . Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент сдаёт экзамен с первого захода.

**68.** У сборщика имеются 16 деталей, изготовленных заводом №1, 4 детали, изготовленные заводом №2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них изготовлена заводом №1.

**69.** Сборщик получил  $N_1$  коробок деталей с завода №1,  $N_2$  с завода №2. Вероятность того, что детали стандартны равны: с завода №1 –  $P_1$ , с завода №2 –  $P_2$ . Сборщик извлёк деталь из наугад взятой коробки. Найти вероятность того, что он извлёк стандартную деталь.

**70.** Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна  $P_1$ , вторым –  $P_2$ . Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

**71.** У сборщика имеются  $N_1$  деталей с завода №1, и  $N_2$  с завода №2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них изготовлена заводом №1.

**72.** Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом №1 и 2 коробки – заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна, равна 0,8, а заводом №2 – 0,9. Сборщик наудачу извлёк деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

**73.** Высота листа бумаги распределена равномерно в диапазоне от 285 до 295 мм, а ширина в диапазоне от 205 до 215 мм. Найти дисперсию площади листа бумаги, считая, что высота и ширина независимы.

**74.** В массиве из 10 чисел наибольшее число может находиться с одинаковой вероятностью в любом месте массива. Найти среднее число и дисперсию числа итераций при поиске максимального значения, если поиск выполняется методом последовательно перебора и сравнения элементов массива.

**75.** В 1-й урне 20 шаров: 5 белых и 15 черных. Во 2-й урне 30 шаров: 10 белых и 20 черных. Из 1-й урны наугад извлекают 4 шара, из 2-й – 3 шара. Найти вероятность того, что из извлеченных 7 шаров – 5 черных.

**76.** В урне 6 шаров – 2 черных и 4 белых. Из урны 5 раз извлекают наугад по одному шару, записывают его цвет и возвращают в урну. Какова вероятность того, что запись имеет вид: "черный", "черный", "белый", "черный", "белый".

**77.** Шар радиусом  $R$  летит перпендикулярно плоскости забора, состоящего из параллельных прутьев бесконечной длины. Толщина прутьев  $B$ , зазор между прутьями  $A$ . Найти вероятность того, что шар пролетит сквозь забор, не коснувшись прутьев.

**78.** Шар радиусом  $R$  летит перпендикулярно плоскости забора, состоящего из параллельных прутьев бесконечной длины. Толщина прутьев  $B$ , зазор между прутьями  $A$ . Найти вероятность того, что шар не пролетит сквозь забор, не коснувшись прутьев.

**79.** Шар радиусом  $R$  летит перпендикулярно плоскости прямоугольной решетки, состоящей из 2 систем параллельных прутьев бесконечной длины. Толщина прутьев  $B$ , зазор между прутьями  $A$ . Найти вероятность того, что шар пролетит сквозь решетку, не коснувшись прутьев.

**80.** Шар радиусом  $R$  летит перпендикулярно плоскости прямоугольной решетки, состоящей из 2 систем параллельных прутьев бесконечной длины. Толщина прутьев  $B$ , зазор между прутьями  $A$ . Найти вероятность того, что шар не пролетит сквозь решетку, не коснувшись прутьев.

**81.** В 1-м компьютерном классе 20 компьютеров, во 2-м – 30. Вероятность выхода из строя компьютера в 1-м классе равна 0.2, во 2-м – 0.4. Найти вероятность того, что все компьютеры в обоих классах работают.

**82.** В 1-м компьютерном классе 20 компьютеров, во 2-м – 30. Вероятность выхода из строя компьютера в 1-м классе равна 0.2, во 2-м – 0.4. Найти вероятность того, что в двух классах не работают 3 компьютера.

**83.** Два события независимы. Что можно сказать об их совместности ?