# Независимые множества и паросочетания

## Определение

- Множество вершин $U \subset V(G)$ называется *независимым*, если никакие две его вершины не смежны.
  - $\alpha(G)$ — количество вершин в максимальном независимом множестве графа $G$.

# Независимые множества и паросочетания

## Определение

- Множество вершин $U \subset V(G)$ называется *независимым*, если никакие две его вершины не смежны.
  - $\alpha(G)$ — количество вершин в максимальном независимом множестве графа $G$.
- Множество рёбер $M \subset E(G)$ называется *паросочетанием*, если никакие два его ребра не инцидентны общей вершине.
  - $\alpha'(G)$ — количество рёбер в максимальном паросочетании графа $G$.

# Вершинные покрытия

## Определение

- Будем говорить, что множество вершин $W \subset V(G)$ *покрывает* ребро $e \in V(G)$, если существует вершина $w \in W$, инцидентная $e$.
- Множество вершин $W \subset V(G)$ называется *вершинным покрытием* (или *контролирующим множеством*), если оно покрывает все рёбра графа.
  - $\beta(G)$ — количество вершин в минимальном вершинном покрытии графа $G$.

# Реберные покрытия

## Определение

- Будем говорить, что множество рёбер $F \subset E(G)$ *покрывает* вершину $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное $v$.
- Множество рёбер $F \subset E(G)$ называется *рёберным покрытием*, если оно покрывает все вершины графа.
  - $\beta'(G)$ — количество рёбер в минимальном реберном покрытии графа $G$.

# Реберные покрытия

## Определение

- Будем говорить, что множество рёбер $F \subset E(G)$ *покрывает* вершину $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное $v$.
- Множество рёбер $F \subset E(G)$ называется *рёберным покрытием*, если оно покрывает все вершины графа.
  - $\beta'(G)$ — количество рёбер в минимальном реберном покрытии графа $G$.
- Паросочетание называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины графа.

# Чередующиеся и дополняющие пути

## Определение

Пусть $M$ — паросочетание в графе $G$.

- Путь $P$ называется *$M$-чередующимся*, если в нем чередуются ребра из $M$ и ребра, не входящие в $M$.

# Чередующиеся и дополняющие пути

## Определение

Пусть $M$ — паросочетание в графе $G$.

- Путь $P$ называется *$M$-чередующимся*, если в нем чередуются ребра из $M$ и ребра, не входящие в $M$.
- Путь $P$ называется *$M$-дополняющим*, если он $M$-чередующийся, а его начало и конец не покрыты $M$.

# Чередующиеся и дополняющие пути

## Определение

Пусть $M$ — паросочетание в графе $G$.

- Путь $P$ называется *$M$-чередующимся*, если в нем чередуются ребра из $M$ и ребра, не входящие в $M$.
- Путь $P$ называется *$M$-дополняющим*, если он $M$-чередующийся, а его начало и конец не покрыты $M$.

## Замечание

1. $M$-дополняющий путь всегда простой.

# Чередующиеся и дополняющие пути

## Определение

Пусть $M$ — паросочетание в графе $G$.

- Путь $P$ называется *$M$-чередующимся*, если в нем чередуются ребра из $M$ и ребра, не входящие в $M$.
- Путь $P$ называется *$M$-дополняющим*, если он $M$-чередующийся, а его начало и конец не покрыты $M$.

## Замечание

1. $M$-дополняющий путь всегда простой.
2. В $M$-дополняющем пути нечетное число ребер. Паросочетанию $M$ принадлежат его ребра с четными (в порядке обхода) номерами.

# Теорема Бержа о дополняющем пути

**Теорема (C. Berge, 1957)**

*Паросочетание $M$ в графе $G$ является максимальным тогда и только тогда, когда нет $M$-дополняющих путей.*

# Теорема Бержа о дополняющем пути

## Теорема (C. Berge, 1957)

*Паросочетание $M$ в графе $G$ является максимальным тогда и только тогда, когда нет $M$-дополняющих путей.*

## Доказательство.

“$\Rightarrow$”: Пусть в $G$ есть $M$-дополняющий путь $P$.

- “Сменим статус” всех ребер пути $P$.
  - Т. е. удалим из $M$ все рёбра пути $P$, входящие в $M$, и заменим их на рёбра пути $P$, не входящие в $M$.
- Получим паросочетание $M'$, где $|M'| = |M| + 1$.

# Доказательство теоремы Бержа

"$\Leftarrow$": Пусть в $G$ есть паросочетание $M'$, где $|M'| > |M|$.

- Рассмотрим граф $G'$, где
  $V(G') = V(G)$ и $E(G') = M \bigtriangleup M'$.
  - Т. е. рёбрами $G'$ являются те и только те рёбра, которые входят ровно в одно из двух паросочетаний: в $M$ или в $M'$.
- Все компоненты связности $G'$ — пути и циклы.
  Ребра $M$ и $M'$ в них чередуются.
- Поскольку $|M'| > |M|$, найдется компонента,
  в которой рёбер $M'$ больше, чем рёбер $M$.
- Эта компонента и будет $M$-дополняющим путём. $\square$

# Теорема Холла

## Определение

Пусть $X \subset V(G)$. Тогда *окрестностью* множества $X$ будем называть множество $N_G(X)$, состоящее из всех вершин графа $G$, которые смежны хотя бы с одной из вершин множества $X$ и не лежат в $X$.

# Теорема Холла

## Определение

Пусть $X \subset V(G)$. Тогда *окрестностью* множества $X$ будем называть множество $N_G(X)$, состоящее из всех вершин графа $G$, которые смежны хотя бы с одной из вершин множества $X$ и не лежат в $X$.

## Теорема (P. Hall, 1935)

*Пусть $G$ — двудольный граф с долями $A$ и $B$.*
*Тогда следующие два условия равносильны:*

1. *в $G$ есть паросочетание, покрывающее все вершины доли $A$;*
2. *для любого подмножества $X \subset A$ его окрестность не меньше этого подмножества (т. е. $|N_G(X)| \geqslant |X|$).*

# Доказательство теоремы Холла

“$1. \Rightarrow 2.$”: Очевидно.

# Доказательство теоремы Холла

"1. $\Rightarrow$ 2.": Очевидно.

"2. $\Rightarrow$ 1.": Рассмотрим максимальное паросочетание $M$ в графе $G$.

- Пусть вершина $a \in A$ не покрыта $M$.
- Рассмотрим множество $Z$ всех вершин $G$, в которые ведут $M$-чередующиеся пути из $a$ (в частности, $a \in Z$).
- Пусть $X = Z \cap A$; $Y = Z \cap B$. Заметим, что
  - $Y = N_G(X)$;
  - если $xy \in M$ и $y \in Y$, то $x \in X$.
- Тогда $|Y| \geqslant |X|$, но в $X$ и $Y$ поровну вершин, покрытых $M$.
- То есть найдется вершина $b \in Y$, не покрытая $M$.
- Но тогда из $a$ в $b$ ведет $M$-дополняющий путь. Противоречие. $\square$

# Следствия теоремы Холла

## Замечание

Условие $|N_G(X)| \geqslant |X|$ для всех $X \subset A$ мы далее будем называть *условием Холла* для доли $A$.

# Следствия теоремы Холла

## Замечание

Условие $|N_G(X)| \geqslant |X|$ для всех $X \subset A$ мы далее будем называть *условием Холла* для доли $A$.

## Следствие 1

*В регулярном двудольном графе есть совершенное паросочетание.*

# Следствия теоремы Холла

## Замечание

Условие $|N_G(X)| \geqslant |X|$ для всех $X \subset A$ мы далее будем называть *условием Холла* для доли $A$.

## Следствие 1

*В регулярном двудольном графе есть совершенное паросочетание.*

## Доказательство.

- Пусть $G$ — $k$-регулярный двудольный граф, $A, B$ — доли $G$.
  - Тогда $k|A| = e(G) = k|B|$, откуда $|A| = |B|$.
- Пусть $X \subset A$; $Y = N_G(X)$; $e$ — количество ребер из $X$ в $Y$.
  - Тогда $k|Y| \geqslant e = k|X|$, откуда $|Y| \geqslant |X|$.
- То есть выполнено условие Холла для доли $A$. □

# Следствия теоремы Холла и теорема Кёнига

## Следствие 2

*Пусть* $G$ *—* $k$*-регулярный двудольный граф. Тогда рёбра* $G$ *можно раскрасить в* $k$ *цветов так, чтобы рёбра каждого цвета образовывали совершенное паросочетание.*

# Следствия теоремы Холла и теорема Кёнига

## Следствие 2

*Пусть $G$ — $k$-регулярный двудольный граф. Тогда рёбра $G$ можно раскрасить в $k$ цветов так, чтобы рёбра каждого цвета образовывали совершенное паросочетание.*

## Доказательство.

Легко доказывается индукцией по $k$ при помощи следствия 1. $\square$

# Следствия теоремы Холла и теорема Кёнига

## Следствие 2

*Пусть $G$ — $k$-регулярный двудольный граф. Тогда рёбра $G$ можно раскрасить в $k$ цветов так, чтобы рёбра каждого цвета образовывали совершенное паросочетание.*

## Доказательство.

Легко доказывается индукцией по $k$ при помощи следствия 1. $\square$

## Теорема Кёнига

## Теорема (D. König, 1931)

*Пусть $G$ — двудольный граф. Тогда $\alpha'(G) = \beta(G)$.*

# Доказательство теоремы Кёнига

"$\alpha'(G) \leqslant \beta(G)$": Очевидно.

# Доказательство теоремы Кёнига

"$\alpha'(G) \leqslant \beta(G)$": Очевидно.
"$\alpha'(G) \geqslant \beta(G)$": Пусть $A, B$ — доли $G$.

- Рассмотрим минимальное вершинное покрытие $W$ графа $G$.
- Пусть $W = A_1 \cup B_1$, где $A_1 \subset A$ и $B_1 \subset B$.
- Введем обозначения $A_2 = A \setminus A_1$, $B_2 = B \setminus B_1$, $G_1 = G(A_1 \cup B_2)$, $G_2 = G(B_1 \cup A_2)$.

# Доказательство теоремы Кёнига

"$\alpha'(G) \leqslant \beta(G)$": Очевидно.
"$\alpha'(G) \geqslant \beta(G)$": Пусть $A, B$ — доли $G$.

- Рассмотрим минимальное вершинное покрытие $W$ графа $G$.
- Пусть $W = A_1 \cup B_1$, где $A_1 \subset A$ и $B_1 \subset B$.
- Введем обозначения $A_2 = A \setminus A_1$, $B_2 = B \setminus B_1$, $G_1 = G(A_1 \cup B_2)$, $G_2 = G(B_1 \cup A_2)$.
- Докажем, что в $G_1$ выполнено условие Холла для доли $A_1$.
    - Действительно, если $|X| > |N_{G_1}(X)|$ для $X \subset A_1$, то $W' = (W \setminus X) \cup N_{G_1}(X)$ — вершинное покрытие в $G$, меньшее, чем $W$. Противоречие.
- Итого, в $G_1$ есть паросочетание, покрывающее $A_1$.
- Аналогично, в $G_2$ есть паросочетание, покрывающее $B_1$.
- Вместе они образуют паросочетание в $G$, размера $\beta(G)$. $\square$