Графы: основные определения и обозначения

Определение

Графом называется упорядоченная пара $G = (V, E)$, где

- V — произвольное множество (*множество вершин* графа G);
- E — множество, состоящее из двухэлементных подмножеств множества V (*множество рёбер* графа G).
- Также для этих множеств используют обозначения $V(G)$ и $E(G)$ соответственно.

Элементы множества V называют *вершинами*, а элементы множества E — *рёбрами* графа G.

- Вершины принято обозначать точками на диаграмме, а рёбра — соединяющими эти точки линиями.

Графы: основные определения и обозначения

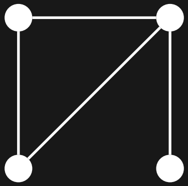
Определение

- Запись $e = uv$ (где $e \in E$ и $u, v \in V$) означает, что ребро e соединяет вершины u и v.
- Количество вершин и ребер графа G мы будем обозначать через $v(G)$ и $e(G)$ соответственно.
- Вершины $u, v \in V$ называются *смежными*, если они соединены ребром (т. е. если $uv \in E$).
- Вершина $u \in V$ и ребро $e \in E$ *инцидентны*, если u является одним из концов e (т. е. если $\exists v \in V\ (e = uv)$).

Графы: варианты определения и примеры

- В приведенном выше определении каждое ребро соединяет две различные вершины и каждую пару вершин соединяет не более одного ребра. Однако, возможны варианты.

Пример

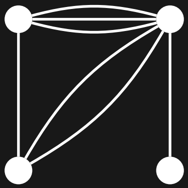


— граф

Графы: варианты определения и примеры

- В приведенном выше определении каждое ребро соединяет две различные вершины и каждую пару вершин соединяет не более одного ребра. Однако, возможны варианты.
  - Мультиграф: допускаются *кратные ребра* (несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин).

Пример

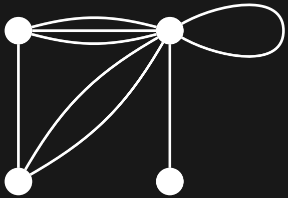


— мультиграф

Графы: варианты определения и примеры

- В приведенном выше определении каждое ребро соединяет две различные вершины и каждую пару вершин соединяет не более одного ребра. Однако, возможны варианты.
  - Мультиграф: допускаются *кратные ребра* (несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин).
  - Псевдограф: допускаются кратные ребра и *петли* (ребра вида uu, у которых оба конца совпадают).

Пример

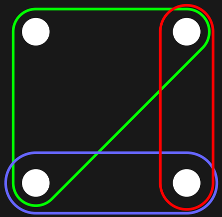


— псевдограф

Графы: варианты определения и примеры

- В приведенном выше определении каждое ребро соединяет две различные вершины и каждую пару вершин соединяет не более одного ребра. Однако, возможны варианты.
  - Мультиграф: допускаются *кратные ребра* (несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин).
  - Псевдограф: допускаются кратные ребра и *петли* (ребра вида uu, у которых оба конца совпадают).
  - Гиперграф: ребро может соединять более двух вершин (*гиперребро*).

Пример



— гиперграф

Ориентированные графы

Определение

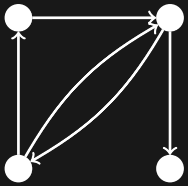
Ориентированным графом (или *орграфом*) называется упорядоченная пара множеств $D = (V, A)$, где элементами множества A являются упорядоченные пары элементов V.

- Элементы множества V называют *вершинами* или *узлами*, а элементы A — *ориентированными рёбрами*, *дугами* или *стрелками* орграфа D.
- Запись $e = uv$ (где $e \in A$ и $u, v \in V$) означает, что стрелка e имеет начало в u и конец в v.
- Также для стрелки с началом в u и концом в v используют обозначение (u, v).

Ориентированные графы: замечания и примеры

- Как правило, в орграфе допускаются противоположно направленные стрелки, соединяющие одну и ту же пару вершин (т. е. стрелки вида uv и vu).

Пример

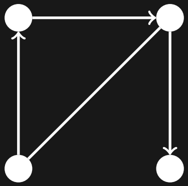


— орграф

Ориентированные графы: замечания и примеры

- Как правило, в орграфе допускаются противоположно направленные стрелки, соединяющие одну и ту же пару вершин (т. е. стрелки вида uv и vu).
  - Можно считать, что пара стрелок uv и vu соответствует одному неориентированному ребру *смешанный граф*.

Пример

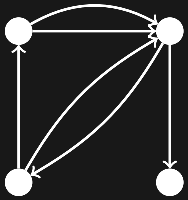


— смешанный граф

Ориентированные графы: замечания и примеры

- Как правило, в орграфе допускаются противоположно направленные стрелки, соединяющие одну и ту же пару вершин (т. е. стрелки вида uv и vu).
  - Можно считать, что пара стрелок uv и vu соответствует одному неориентированному ребру *смешанный граф*.
- Кратные стрелки одного направления и петли, как правило, не допускаются.

Пример

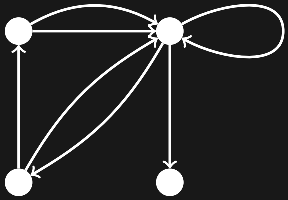


— ориентированный мультиграф

Ориентированные графы: замечания и примеры

- Как правило, в орграфе допускаются противоположно направленные стрелки, соединяющие одну и ту же пару вершин (т. е. стрелки вида uv и vu).
  - Можно считать, что пара стрелок uv и vu соответствует одному неориентированному ребру *смешанный граф*.
- Кратные стрелки одного направления и петли, как правило, не допускаются.

Пример



— ориентированный псевдограф

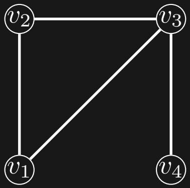
Матрица смежности графа

Определение

Пусть $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. *Матрицей смежности* графа G называется квадратная матрица $A_G = (a_{ij})$ размера $n \times n$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E(G) \\ 0, & v_i v_j \notin E(G). \end{cases}$$

Пример



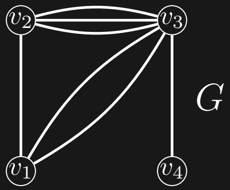
G

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица смежности графа

- В мультиграфе a_{ij} — количество ребер из v_i в v_j (*кратность* ребра v_iv_j).

Пример

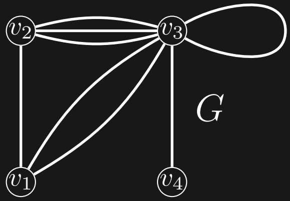


$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица смежности графа

- В мультиграфе a_{ij} — количество ребер из v_i в v_j (*кратность* ребра v_iv_j).
- В псевдографе петля считается как два ребра. Т. е. a_{ii} — удвоенное количество петель на вершине v_i.

Пример

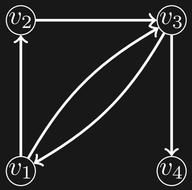


$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица смежности графа

- В мультиграфе a_{ij} — количество ребер из v_i в v_j (*кратность* ребра v_iv_j).
- В псевдографе петля считается как два ребра.
  Т. е. a_{ii} — удвоенное количество петель на вершине v_i.
- В ориентированном графе матрица не симметрична.

Пример



D

$$A_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

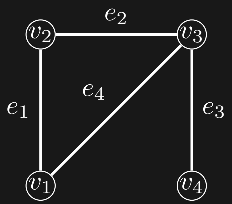
Матрица инцидентности (инциденций)

Определение

Пусть $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.
Матрицей инцидентности (или *матрицей инциденций*) графа G называется прямоугольная матрица $B_G = (b_{ij})$ размера $n \times m$,

где $$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример



G

$$B_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

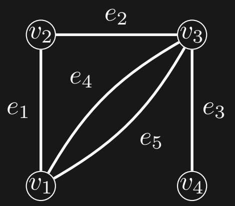
Матрица инцидентности (инциденций)

Определение

Пусть $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.
Матрицей инцидентности (или *матрицей инциденций*) графа G называется прямоугольная матрица $B_G = (b_{ij})$ размера $n \times m$,

где $$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример



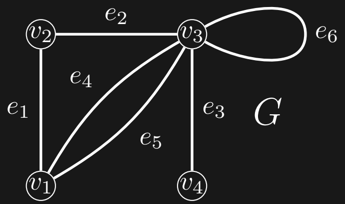
G

$$B_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица инцидентности (инциденций)

- Если e_j — петля, инцидентная v_i, то $b_{ij} = 2$.

Пример



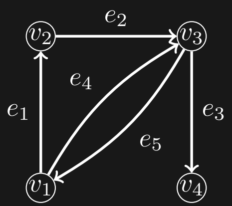
$$B_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица инцидентности (инциденций)

- Если e_j — петля, инцидентная v_i, то $b_{ij} = 2$.
- В ориентированном графе

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{вершина } v_i \text{ является началом стрелки } e_j \\ -1, & \text{вершина } v_i \text{ является концом стрелки } e_j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример



D

$$B_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Степени вершин графа

Определение

- *Степенью* вершины v в графе G называется число инцидентных ей ребер (обозначение: $d_G(v)$).
  - Часто вместо $d_G(v)$ пишут просто $d(v)$.
- $\delta(G)$ — минимальная степень вершины графа G.
- $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины графа G.
- В орграфах различают *исходящие* и *входящие* степени вершин. Пусть D — орграф и $v \in V(D)$. Тогда
  - $d^+_D(v)$ — количество стрелок орграфа D, выходящих из вершины v (*исходящая степень* вершины v);
  - $d^-_D(v)$ — количество стрелок орграфа D, входящих в вершину v (*входящая степень* вершины v);
  - иногда эти величины называют исходящая и входящая *полустепень*, соответственно.

Степени вершин графа

Теорема

В любом графе G выполнено равенство

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2e(G).$$

Доказательство.

Каждое ребро посчитано два раза. $\square$

Следствие

В любом графе количество вершин нечетной степени — четно.

Регулярные графы

Определение

- Граф G называется *регулярным*, если степени всех его вершин одинаковы.
- Если все эти степени равны k, мы также будем называть G *регулярным графом степени k*, или *k-регулярным* графом.
- 3-регулярный граф также принято называть *кубическим*.

Подграфы

Определение

Граф H называется *подграфом* графа G, если $V(H) \subset V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$.

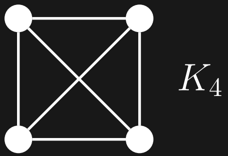
- Подграф H называется *остовным*, если $V(H) = V(G)$.
  - То есть остовный подграф получается из G удалением некоторых ребер, но все вершины при этом сохраняются.
- Пусть $U \subset V(G)$. *Индуцированным подграфом* графа G на множестве вершин U называется подграф $G(U)$ с множеством вершин U и множеством ребер, состоящим из всех рёбер графа G, оба конца которых принадлежат U.
  - То есть индуцированный подграф получается из G удалением некоторых вершин и всех инцидентных им ребер. Ребра, которые не были инцидентны ни одной удаленной вершине, при этом сохраняются.

Полные графы и дополнение графа

Определение

- Граф G называется *полным*, если любые две различные вершины G смежны.
  - Полный граф на n вершинах обозначается K_n.

Пример

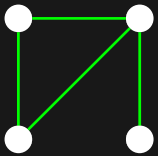


Полные графы и дополнение графа

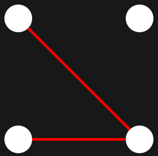
Определение

- Граф G называется *полным*, если любые две различные вершины G смежны.
  - Полный граф на n вершинах обозначается K_n.
- *Дополнением* графа G называется граф $\overline{G}$, для которого $V(\overline{G}) = V(G)$ и $E(\overline{G}) = \overline{E(G)}$.
  - То есть в $\overline{G}$ смежны те и только те пары вершин, которые не смежны в G.

Пример



G



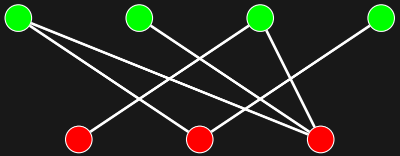
$\overline{G}$

Двудольные графы

Определение

Граф G называется *двудольным*, если его множество вершин можно разбить на две доли A и B (т. е. $A \cup B = V(G)$ и $A \cap B = \varnothing$) так, что смежными будут только вершины из разных долей.

Пример



— двудольный граф

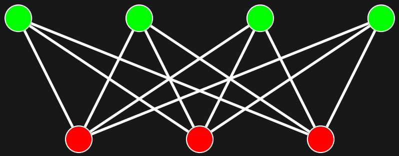
Двудольные графы

Определение

Полный двудольный граф — это такой двудольный граф, в котором смежны все пары вершин из разных долей.

- $K_{m,n}$ — полный двудольный граф, в долях которого m и n вершин.

Пример



— полный двудольный граф $K_{4,3}$

Маршруты, пути и циклы

Определение

- *Маршрутом* в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$, где $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V(G)$, $e_1, \ldots, e_k \in E(G)$ и $\forall i\,(e_i = v_{i-1}v_i)$.
  - Маршрут называется *замкнутым*, если $v_0 = v_k$.
  - *Длина маршрута* — количество входящих в него ребер (каждое ребро учитывается столько раз, сколько раз оно встречается в маршруте).
  - *Расстояние* между вершинами u и v — длина кратчайшего соединяющего их маршрута. Обозначение: $d(u, v)$.
- *Путь* (или *цепь*) — это маршрут, не проходящий ни по какому ребру дважды.
- Замкнутый путь называется *циклом*.

Простые пути и циклы

Определение

- *Простой путь* (или *простая цепь*) — это путь, не проходящий дважды ни через какую вершину.
- *Простой цикл* — это цикл, не проходящий дважды ни через какую вершину.

Простые пути и циклы

Определение

- *Простой путь* (или *простая цепь*) — это путь, не проходящий дважды ни через какую вершину.
- *Простой цикл* — это цикл, не проходящий дважды ни через какую вершину.

Утверждение

Если в графе G есть маршрут, ведущий из вершины u в вершину v, то есть и простой путь, ведущий из u в v.

Доказательство.

Кратчайший маршрут из u в v является простым путем. $\square$

Связность

Определение

- Вершины $u, v \in V(G)$ называются *связанными*, если существует маршрут, ведущий из u в v. (Легко видеть, что это отношение эквивалентности.)
- Граф G называется *связным*, если любые две его вершины связанны.
- *Компонентой связности* графа называется класс эквивалентности по отношению связанности (или подграф графа G, индуцированный таким классом эквивалентности).

k-связные графы

Определение

- *Вершинной связностью* графа G называется наименьшее число вершин, которые нужно удалить из G, чтобы получить несвязный или тривиальный (т. е. состоящий из одной вершины) граф. Обозначение: $\kappa(G)$.
- *Рёберной связностью* графа G называется наименьшее число ребер, которые нужно удалить из G, чтобы получить несвязный граф. Обозначение: $\lambda(G)$.
- Граф G называется *k-связным*, если $\kappa(G) \geqslant k$, и *рёберно k-связным*, если $\lambda(G) \geqslant k$.

Деревья

Определение

- *Деревом* называется связный граф без циклов.
- Произвольный (не обязательно связный) граф без циклов называется *лесом*.
- *Висячей вершиной* (или *листом*) графа называется вершина степени 1.

Деревья

Теорема

1. *В дереве, содержащем хотя бы две вершины, есть хотя бы две висячих вершины.*
2. *В дереве на n вершинах число ребер равно $n-1$.*
3. *В любом связном графе можно выделить остовное дерево (т. е. остовный подграф, являющийся деревом).*

Следствие

Если граф G связен и $v(G) \geqslant 2$, то в G есть хотя бы две такие вершины, удаление любой из которых не нарушает связность.