

Деревья

Теорема

1. В дереве, содержащем хотя бы две вершины, есть хотя бы две висячих вершины.
2. В дереве на n вершинах число ребер равно $n - 1$.
3. В любом связном графе можно выделить **остовное дерево** (т. е. остовный подграф, являющийся деревом).

Следствие

Если граф G связен и $v(G) \geq 2$, то в G есть хотя бы две такие вершины, удаление любой из которых не нарушает связность.

Связность орграфов

Определение

Пусть D — орграф и $u, v \in V(D)$.

1. Вершина v *достижима* из вершины u , если в D существует ориентированный маршрут с началом в u и концом в v .

Связность орграфов

Определение

Пусть D — орграф и $u, v \in V(D)$.

1. Вершина v **достижима** из вершины u , если в D существует ориентированный маршрут с началом в u и концом в v .
2. Вершины u и v **сильно связаны**, если u достижима из v и v достижима из u .

Связность орграфов

Определение

Пусть D — орграф и $u, v \in V(D)$.

1. Вершина v **достижима** из вершины u , если в D существует ориентированный маршрут с началом в u и концом в v .
2. Вершины u и v **сильно связаны**, если u достижима из v и v достижима из u .

Определение

Каждому орграфу D поставим в соответствие неориентированный граф \underline{D} , который получается из D , если забыть об ориентации всех его ребер.

Связность орграфов

Определение

1. Орграф D называется *слабо связным*, если граф \underline{D} связан.

Связность орграфов

Определение

1. Орграф D называется *слабо связным*, если граф \underline{D} связан.
2. Орграф D называется *сильно связным*, если любые две его вершины сильно связаны.

Связность орграфов

Определение

1. Орграф D называется *слабо связным*, если граф \underline{D} связан.
2. Орграф D называется *сильно связным*, если любые две его вершины сильно связаны.
3. Орграф D называется *односторонне связным*, если для любых двух его вершин хотя бы одна достижима из другой.

Связность орграфов

Определение

1. Орграф D называется *слабо связным*, если граф \underline{D} связан.
2. Орграф D называется *сильно связным*, если любые две его вершины сильно связаны.
3. Орграф D называется *односторонне связным*, если для любых двух его вершин хотя бы одна достижима из другой.

Замечание

Часто такие орграфы называют просто *слабыми*, *сильными* и *односторонними* соответственно.

Сильно связанные орграфы

Лемма

Орграф D сильно связан, если и только если для любого непустого множества $W \subsetneq V(D)$ существует стрелка из W в $V(D) \setminus W$.

Сильно связанные орграфы

Лемма

Орграф D сильно связан, если и только если для любого непустого множества $W \subsetneq V(D)$ существует стрелка из W в $V(D) \setminus W$.

Доказательство.

“ \Rightarrow ”: Пусть $u \in W$ и $v \in V(D) \setminus W$.

Тогда на маршруте из u в v найдется искомая стрелка.

Сильно связанные орграфы

Лемма

Орграф D сильно связан, если и только если для любого непустого множества $W \subsetneq V(D)$ существует стрелка из W в $V(D) \setminus W$.

Доказательство.

“ \Rightarrow ”: Пусть $u \in W$ и $v \in V(D) \setminus W$.

Тогда на маршруте из u в v найдется искомая стрелка.

“ \Leftarrow ”: Пусть v недостижима из u .

Обозначим через W множество всех вершин, достижимых из u (включая u). Тогда из W нет стрелок в $V(D) \setminus W$. \square

Компоненты сильной связности

Легко видеть, что отношение связности вершин орграфа D является отношением эквивалентности.

Компоненты сильной связности

Легко видеть, что отношение связности вершин орграфа D является отношением эквивалентности.

Определение

1. *Компонентой сильной связности* орграфа D называется класс эквивалентности по отношению сильной связности (или подграф орграфа D , индуцированный таким классом эквивалентности).

Компоненты сильной связности

Легко видеть, что отношение связности вершин орграфа D является отношением эквивалентности.

Определение

1. *Компонентой сильной связности* орграфа D называется класс эквивалентности по отношению сильной связности (или подграф орграфа D , индуцированный таким классом эквивалентности).
2. Определим для орграфа D *орграф компонент сильной связности* $\mathcal{C}(D)$ следующим образом. Вершинами $\mathcal{C}(D)$ будут компоненты сильной связности орграфа D ; из компоненты A ведет стрелка в компоненту B , если в D есть хотя бы одна стрелка, ведущая из A в B .

Орграф компонент сильной связности

Теорема

В орграфе $\mathcal{C}(D)$ нет ориентированных циклов.

Орграф компонент сильной связности

Теорема

В орграфе $\mathcal{C}(D)$ нет ориентированных циклов.

Доказательство.

- ▶ Пусть компоненты сильной связности V_1, \dots, V_k образуют ориентированный цикл в $\mathcal{C}(D)$.
- ▶ Тогда любые две вершины $u, v \in \bigcup_{i=1}^k V_i$ сильно связаны.
- ▶ Противоречие с предположением, что все V_i — классы эквивалентности по отношению сильной связности. □

Ациклические орграфы

Лемма

Пусть D — орграф, в котором нет ориентированных циклов.

Тогда найдутся вершины $s, t \in V(D)$, т. ч. $d^-(s) = d^+(t) = 0$.

Ациклические орграфы

Лемма

Пусть D — орграф, в котором нет ориентированных циклов.
Тогда найдутся вершины $s, t \in V(D)$, т. ч. $d^-(s) = d^+(t) = 0$.

Замечание

Такие вершины часто называют *истоком* и *стоком* орграфа D соответственно.

Ациклические орграфы

Лемма

Пусть D — орграф, в котором нет ориентированных циклов.
Тогда найдутся вершины $s, t \in V(D)$, т. ч. $d^-(s) = d^+(t) = 0$.

Замечание

Такие вершины часто называют **истоком** и **стоком** орграфа D соответственно.

Теорема

Пусть D — орграф, в котором нет ориентированных циклов и $n = v(D)$. Тогда его вершины можно обозначить v_1, v_2, \dots, v_n так, чтобы все стрелки вели только из вершин с меньшими номерами в вершины с большими.

Ациклические орграфы: доказательство теоремы

Доказательство.

$n = 1$: утверждение очевидно.

$n \rightarrow n + 1$: пусть $v(D) = n + 1$.

- ▶ Выберем вершину $t \in V(D)$ так, что $d^+(t) = 0$.
- ▶ Рассмотрим орграф $D - t$.
 - Через $D - t$ обозначается орграф, полученный из D удалением вершины t и всех инцидентных ей стрелок.
 - В нем n вершин и нет ориентированных циклов.
- ▶ Обозначим вершины орграфа $D - t$ через v_1, v_2, \dots, v_n так, чтобы выполнялось условие.
- ▶ После чего, положим $v_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} t$. □

Турниры

Определение

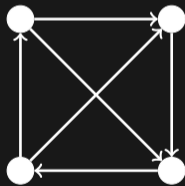
Турнирным графом (или просто *турниром*) называется орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой.

Турниры

Определение

Турнирным графом (или просто *турниром*) называется орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой.

Пример

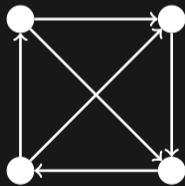


Турниры

Определение

Турнирным графом (или просто *турниром*) называется орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой.

Пример



Замечание

В таком виде удобно представлять результаты соревнований в один круг без ничьих.

Гамильтоновы пути в турнирах

Определение

- ▶ *Гамильтоновым путем* называется простой путь, проходящий по всем вершинам графа.
- ▶ *Гамильтоновым циклом* называется простой цикл, проходящий по всем вершинам графа.

Гамильтоновы пути в турнирах

Определение

- ▶ *Гамильтоновым путем* называется простой путь, проходящий по всем вершинам графа.
- ▶ *Гамильтоновым циклом* называется простой цикл, проходящий по всем вершинам графа.

Теорема

В любом турнире есть гамильтонов путь.

Гамильтоновы пути в турнирах

Определение

- ▶ *Гамильтоновым путем* называется простой путь, проходящий по всем вершинам графа.
- ▶ *Гамильтоновым циклом* называется простой цикл, проходящий по всем вершинам графа.

Теорема

В любом турнире есть гамильтонов путь.

Доказательство.

Индукция по $n = V(D)$, где D — произвольный турнир.

$n = 1$: утверждение очевидно.

Доказательство теоремы о гамильтоновом пути

$n \rightarrow n + 1$: пусть $v(D) = n + 1$.

- ▶ Удалим произвольную вершину $u \in V(D)$.
 - Орграф $D - u$ также является турниром.
- ▶ Построим в $D - u$ гамильтонов путь $P = v_1, v_2, \dots, v_n$.
 - Нужно добавить u к этому пути.
 - Если в D есть стрелка $v_n u$, то u можно добавить в конец пути.
 - Если в D есть стрелка $u v_1$, то u можно добавить в начало пути.
 - Пусть в D таких стрелок нет. Тогда там есть стрелки $v_1 u$ и $u v_n$.
- ▶ Рассмотрим $k = \max\{i \mid v_i u \in E(D)\}$.
 - Очевидно, что $k < n$, $v_k u \in E(D)$ и $u v_{k+1} \in E(D)$.
- ▶ Тогда u можно “вставить” в P между v_k и v_{k+1} . □

Доказательство теоремы о гамильтоновом пути

$n \rightarrow n + 1$: пусть $v(D) = n + 1$.

- ▶ Удалим произвольную вершину $u \in V(D)$.
 - Орграф $D - u$ также является турниром.
- ▶ Построим в $D - u$ гамильтонов путь $P = v_1, v_2, \dots, v_n$.
 - Нужно добавить u к этому пути.
 - Если в D есть стрелка $v_n u$, то u можно добавить в конец пути.
 - Если в D есть стрелка $u v_1$, то u можно добавить в начало пути.
 - Пусть в D таких стрелок нет. Тогда там есть стрелки $v_1 u$ и $u v_n$.
- ▶ Рассмотрим $k = \max\{i \mid v_i u \in E(D)\}$.
 - Очевидно, что $k < n$, $v_k u \in E(D)$ и $u v_{k+1} \in E(D)$.
- ▶ Тогда u можно “вставить” в P между v_k и v_{k+1} . □

Теорема (L. Redei, 1934)

В любом турнире количество гамильтоновых путей нечетно.
(б/д)