Циклы в сильных турнирах

Теорема (J. W. Moon, 1966)

Пусть D *— сильно связный турнир,* $k \in \mathbb{N}$, $3 \leqslant k \leqslant v(D)$. *Тогда*

1. *для любой вершины* $v \in V(D)$ *существует простой цикл длины* k*, проходящий через* v*;*
2. *в орграфе* D *существует хотя бы* $v(D) - k + 1$ *простых циклов длины* k*.*

Циклы в сильных турнирах

Теорема (J. W. Moon, 1966)

Пусть D *— сильно связный турнир,* $k \in \mathbb{N}$, $3 \leqslant k \leqslant v(D)$. *Тогда*

1. *для любой вершины* $v \in V(D)$ *существует простой цикл длины* k, *проходящий через* v;
2. *в орграфе* D *существует хотя бы* $v(D) - k + 1$ *простых циклов длины* k.

Доказательство.

1. Индукция по k.

Доказательство теоремы Муна

$k = 3$:

- $A \overset{\text{def}}{=} \{x \in V(D) \mid xv \in E(D)\}$;
- $B \overset{\text{def}}{=} \{y \in V(D) \mid vy \in E(D)\}$;
- $A, B \neq \varnothing$, поскольку у v есть как входящие, так и исходящие стрелки.
- D — сильно связен, следовательно, есть стрелка, выходящая из B.
- Она не может вести в v, т. е. имеет вид ba, где $a \in A, b \in B$.
- Но тогда вершины v, b, a образуют цикл длины 3.

Доказательство теоремы Муна

$k \to k+1$: пусть в D есть цикл длины k, проходящий через v.

- Его множество вершин — $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.
    - Вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k$ занумерованы в порядке обхода по циклу;
    - нумерация циклическая, т. е. $v_{k+1} = v_1$.

Доказательство теоремы Муна

$k \to k+1$: пусть в D есть цикл длины k, проходящий через v.

- Его множество вершин — $C = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.
  - Вершины $v_1, v_2, \dots, v_k$ занумерованы в порядке обхода по циклу;
  - нумерация циклическая, т. е. $v_{k+1} = v_1$.
- Рассмотрим два случая.

  1° *Существует вершина $u \in V(D) \setminus C$, соединенная с C как входящей, так и исходящей стрелкой.*
  - Тогда найдется такое i, что $v_i u \in E(D)$ и $uv_{i+1} \in E(D)$;
  - следовательно, u можно вставить в цикл между v_i и v_{i+1}.

Доказательство теоремы Муна

$k \to k+1$: пусть в D есть цикл длины k, проходящий через v.

- Его множество вершин — $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.
  - Вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k$ занумерованы в порядке обхода по циклу;
  - нумерация циклическая, т. е. $v_{k+1} = v_1$.
- Рассмотрим два случая.

  1° *Существует вершина $u \in V(D) \setminus C$, соединенная с C как входящей, так и исходящей стрелкой.*
  - Тогда найдется такое i, что $v_i u \in E(D)$ и $u v_{i+1} \in E(D)$;
  - следовательно, u можно вставить в цикл между v_i и v_{i+1}.

  2° *Такой вершины нет.*
  - Тогда вершины из $V(D) \setminus C$ делятся на два класса:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V(D) \mid \forall u \in C\,(xu \in E(D))\};$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in V(D) \mid \forall u \in C\,(uy \in E(D))\}.$$

  - Аналогично базе, $A, B \neq \varnothing$ и $\exists a \in A\, \exists b \in B\,(ba \in E(D))$.
  - Тогда заменив вершину $v_i \neq v$ на путь v_{i-1}, b, a, v_{i+1} получим искомый цикл.

Доказательство теоремы Муна

2. Индукция по n.

   $n = k$: тогда $n - k + 1 = n - n + 1 = 1$;

   - по первой части, в D есть цикл длины n.

Доказательство теоремы Муна

2. Индукция по n.

   $n = k$: тогда $n - k + 1 = n - n + 1 = 1$;

   - по первой части, в D есть цикл длины n.

   $n \to n + 1$: пусть $v(D) = n + 1$.

   - По первой части, в D есть цикл длины n.
   - Он содержит все вершины D, кроме одной. Обозначим ее через v.
   - Тогда $D - v$ — сильно связный турнир.
   - По индукционному предположению, в $D - v$ есть $n - k + 1$ циклов длины k.
   - И по пункту 1 есть цикл длины k, проходящий через v.
   - Очевидно, что он не совпадает с циклами из $D - v$. $\square$

Гамильтоновы циклы в сильных турнирах

Следствие 1 (P. Camion, 1959)

В любом сильно связном турнире существует гамильтонов цикл.

Гамильтоновы циклы в сильных турнирах

Следствие 1 (P. Camion, 1959)

В любом сильно связном турнире существует гамильтонов цикл.

Следствие 2

В сильно связном турнире D с четырьмя и более вершинами существуют две такие вершины $a, b \in V(D)$, что турниры $G - a$ и $G - b$ — сильно связные.

Раскраски вершин

Определение

- *Раскраской вершин* графа G в k цветов называется отображение $c\colon V(G) \to M$, где $|M| = k$.
  - Множество M называется *множеством цветов* раскраски c.
  - Как правило, мы будем считать, что $M = [1..k]$.
- Раскраска c называется *правильной*, если $c(u) \neq c(v)$ для любой пары смежных вершин u и v.
- *Хроматическим числом* графа G называется наименьшее натуральное число k, для которого существует правильная раскраска вершин графа G в k цветов.
- Хроматическое число графа G обозначается через $\chi(G)$.

Раскраски рёбер

Определение

- *Раскраской рёбер* графа G в k цветов называется отображение $\rho\colon E(G) \to M$, где $|M| = k$.
  - Множество M называется *множеством цветов* раскраски ρ.
  - Как правило, мы будем считать, что $M = [1..k]$.
- Раскраска ρ называется *правильной*, если $\rho(e) \neq \rho(f)$ для любой пары ребер e и f, имеющих общий конец.
- *Рёберным хроматическим числом* или *хроматическим индексом* графа G называется наименьшее натуральное число k, для которого существует правильная раскраска рёбер графа G в k цветов.
- Хроматический индекс графа G обозначается через $\chi'(G)$.

Раскраски вершин и рёбер: замечания

Замечание

1. Правильные раскраски вершин и ребер возможны только в графах без петель. Кратные ребра при этом допустимы.
2. При рассмотрении правильных раскрасок вершин кратность ребер несущественна.
3. Напротив, при рассмотрении правильных раскрасок рёбер, кратность рёбер играет существенную роль.
4. $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow$ в G нет ни одного ребра.
5. $\chi'(G) = 1 \Leftrightarrow$ любая компонента связности G является либо изолированной вершиной, либо парой смежных вершин.

Критерий двудольности

Замечание

1. $\chi(G) \leqslant 2 \Leftrightarrow G$ — двудолен.
2. $\chi'(G) \leqslant 2 \Leftrightarrow$ любая компонента связности G является либо простым путём, либо простым циклом чётной длины.

Критерий двудольности

Замечание

1. $\chi(G) \leqslant 2 \Leftrightarrow G$ — двудолен.
2. $\chi'(G) \leqslant 2 \Leftrightarrow$ любая компонента связности G является либо простым путём, либо простым циклом чётной длины.

Теорема

$\chi(G) \leqslant 2 \Leftrightarrow$ *в* G *нет нечетных циклов.*

Критерий двудольности

Замечание

1. $\chi(G) \leqslant 2 \Leftrightarrow G$ — двудолен.
2. $\chi'(G) \leqslant 2 \Leftrightarrow$ любая компонента связности G является либо простым путём, либо простым циклом чётной длины.

Теорема

$\chi(G) \leqslant 2 \Leftrightarrow$ *в* G *нет нечетных циклов.*

Доказательство.

"$\Rightarrow$": Нечетный цикл нельзя правильно раскрасить в 2 цвета.

Критерий двудольности

Замечание

1. $\chi(G) \leqslant 2 \Leftrightarrow G$ — двудолен.
2. $\chi'(G) \leqslant 2 \Leftrightarrow$ любая компонента связности G является либо простым путём, либо простым циклом чётной длины.

Теорема

$\chi(G) \leqslant 2 \Leftrightarrow$ в G нет нечетных циклов.

Доказательство.

"$\Rightarrow$": Нечетный цикл нельзя правильно раскрасить в 2 цвета.

"$\Leftarrow$": Можно считать, что, граф G — связен (иначе красим его компоненты связности по-отдельности).

Критерий двудольности: доказательство

Будем последовательно красить вершины G в два цвета (1 и 2).

- Сначала выбираем вершину $v_1 \in V(G)$ и красим ее в цвет 1.
- На i-м шаге выбираем непокрашенную вершину v_i, смежную хотя бы с одной из покрашенных ранее вершин $v_1, \ldots, v_{i-1}$.
  - Такая вершина найдется, поскольку граф связный.
  - Если v_i смежна с вершинами обоих цветов, то в G есть нечетный цикл.
- Красим v_i в цвет, отличный от цвета её покрашенных соседей.

$\square$

Критерий двудольности: доказательство

Будем последовательно красить вершины G в два цвета (1 и 2).

- Сначала выбираем вершину $v_1 \in V(G)$ и красим ее в цвет 1.
- На i-м шаге выбираем непокрашенную вершину v_i, смежную хотя бы с одной из покрашенных ранее вершин $v_1, \ldots, v_{i-1}$.
  - Такая вершина найдется, поскольку граф связный.
  - Если v_i смежна с вершинами обоих цветов, то в G есть нечетный цикл.
- Красим v_i в цвет, отличный от цвета её покрашенных соседей. $\square$

Замечание

При $k > 2$ нет никакого простого критерия существования правильных раскрасок вершин и ребер графа в k цветов. Более того, эти задачи NP-полны.

Раскраски вершин и клики

Определение

- Множество $W \subset V(G)$ называется *кликой*, если любые две вершины $u, v \in W$ — смежны.
- $\omega(G)$ — размер максимальной клики в графе G (*кликовое число* графа G).

Раскраски вершин и клики

Определение

- Множество $W \subset V(G)$ называется *кликой*, если любые две вершины $u, v \in W$ — смежны.
- $\omega(G)$ — размер максимальной клики в графе G (*кликовое число* графа G).

Утверждение

$\chi(G) \geqslant \omega(G)$.

Раскраски вершин и клики

Определение

- Множество $W \subset V(G)$ называется *кликой*, если любые две вершины $u, v \in W$ — смежны.
- $\omega(G)$ — размер максимальной клики в графе G (*кликовое число* графа G).

Утверждение

$\chi(G) \geqslant \omega(G)$.

Доказательство.

Все вершины клики должны быть покрашены в разные цвета. $\square$

Раскраски вершин и независимые множества

Определение

- Множество $W \subset V(G)$ называется *независимым*, если никакие две вершины $u, v \in W$ не смежны.
- $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в G (*число незваисимости* графа G).

Раскраски вершин и независимые множества

Определение

- Множество $W \subset V(G)$ называется *независимым*, если никакие две вершины $u, v \in W$ не смежны.
- $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в G (*число незваисимости* графа G).

Утверждение

$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geqslant v(G)$.

Раскраски вершин и независимые множества

Определение

- Множество $W \subset V(G)$ называется *независимым*, если никакие две вершины $u, v \in W$ не смежны.
- $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в G (*число незваисимости* графа G).

Утверждение

$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geqslant v(G)$.

Доказательство.

В графе G не более $\alpha(G)$ вершин каждого из цветов. $\square$

Раскраски вершин и степени вершин

Напомним, что $\Delta(G)$ — это максимальная степень вершины графа G.

Утверждение

$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$

Раскраски вершин и степени вершин

Напомним, что $\Delta(G)$ — это максимальная степень вершины графа G.

Утверждение

$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$

Доказательство.

- Красим вершины в произвольном порядке.
- При покраске очередной вершины есть не более $\Delta(G)$ запрещенных цветов.
  - Это цвета её ранее покрашенных соседей.
- Следовательно, для любой вершины найдется цвет, в который её можно покрасить.

$\square$