

Планарные и плоские графы, карты и формула Эйлера

Инструкции

Везде предполагается простой (без кратных рёбер и петель) неориентированный граф, если не оговорено иное.

1 Планарные графы

- П1.** Дано простой неориентированный граф с $V = 8$ вершинами и $E = 15$ рёбрами. Можно ли утверждать, что этот граф планарен? Обоснуйте ответ.
- П2.** Докажите, что если граф содержит K_5 как подграф (не обязательно индуцированный), то граф не планарен.
- П3.** Постройте простой планарный граф на 7 вершинах с максимально возможным числом рёбер; укажите число рёбер и приведите список рёбер.
- П4.** Докажите, что в любом простом планарном графе при $V \geq 3$ выполняется неравенство

$$E \leq 3V - 6.$$

2 Плоские (plane) графы

- Пл1.** Объясните разницу между *планарным* графом и *плоским* (plane) графом и приведите по одному примеру каждого типа.
- Пл2.** Дано плоское (уже нарисованное) представление связного графа с $V = 6$, $E = 9$. Найдите число граней F и проверьте формулу Эйлера для этого представления.
- Пл3.** Для данного плоского представления графа постройте дуальный график: опишите его вершины и рёбра и докажите, что дуал дуала изоморфен исходному графу при условии связности.
- Пл4.** Приведите пример плоского представления, где одна грань является внешней (неограниченной). Объясните, как учитывать внешнюю грань в подсчёте F и в формуле Эйлера.

3 Карты (разбиения плоскости на регионы)

- K1.** На карте нарисовано 10 стран так, что каждая граница между странами — простая линия без самопересечений, и в каждой точке стыка сходятся ровно три границы. Какое минимальное число границ (рёбер карты) возможно? Формализуйте модель с помощью плоского графа и решите задачу.
- K2.** Докажите, что если каждая страна на карте граничит хотя бы с k другими странами, то существует ограничение на общее число стран F в терминах суммарного числа границ. Сформулируйте и докажите соответствующее неравенство.
- K3.** Постройте пример карты с 6 странами, где граф смежности стран содержит цикл длины 5 (опишите расположение стран или приведите рисунок).
- K4.** (Практическая) Дан плоский граф, моделирующий карту с несколькими несвязными компонентами (островками). Опишите, как учесть несвязность при подсчёте V, E, F и как изменяется формула Эйлера для такого случая.

4 Формула Эйлера для графов

- Э1.** Для связного плоского графа докажите формулу Эйлера

$$V - E + F = 2.$$

Предложите индуктивное доказательство по числу рёбер или вершин.

- Э2.** Обобщите формулу Эйлера для несвязного плоского графа с c компонентами: запишите и обоснуйте формулу.
- Э3.** Приведите конкретный пример связного плоского графа, вычислите вручную V, E, F и проверьте формулу Эйлера (не забывайте про внешнюю грань).
- Э4.** Покажите, как из формулы Эйлера и оценки на число рёбер вытекает, что полный граф K_5 не планарен.

5 Следствия из формулы Эйлера

- C1.** Докажите, что в простом планарном графе существует вершина степени не более 5. Используйте сумму степеней вершин и оценку $E \leq 3V - 6$.
- C2.** Покажите, что для простого планарного двудольного графа при $V \geq 3$ выполняется

$$E \leq 2V - 4.$$

Приведите пример двудольного планарного графа, достигающего этой оценки.

- C3.** Используя следствие $E \leq 3V - 6$, докажите, что $K_{3,3}$ не планарен.
- C4.** Приведите и докажите одно дополнительное следствие на выбор (например, ограничение на число рёбер у мультиграфов с петлями и кратными рёбрами, либо неравенство для графов, у которых все грани имеют размер не менее g , например при $g \geq 4$ вывести $E \leq \frac{g}{g-2}(V - 2)$).