

Плоские и планарные графы

Определение

- ▶ Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках.

Плоские и планарные графы

Определение

- ▶ Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках.
 - Вершины изображаются точками;
 - рёбра — соединяющими эти точки линиями.

Плоские и планарные графы

Определение

- ▶ Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках.
 - Вершины изображаются точками;
 - рёбра — соединяющими эти точки линиями.
 - Можно считать, что ребра изображаются ломаными.

Плоские и планарные графы

Определение

- ▶ Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках.
 - Вершины изображаются точками;
 - рёбра — соединяющими эти точки линиями.
 - Можно считать, что рёбра изображаются ломаными.
- ▶ *Плоским графом* называется конкретное изображение планарного графа на плоскости без пересечений и самопересечений рёбер.

Плоские и планарные графы

Определение

- ▶ Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках.
 - Вершины изображаются точками;
 - рёбра — соединяющими эти точки линиями.
 - Можно считать, что рёбра изображаются ломаными.
- ▶ *Плоским графом* называется конкретное изображение планарного графа на плоскости без пересечений и самопересечений рёбер.
- ▶ *Картой* называется связный плоский граф.

Теорема Жордана для замкнутой ломаной

Теорема (С. Jordan, 1887)

Замкнутая несамопересекающаяся ломаная P делит точки плоскости, не лежащие на P , на две такие части, что выполнены следующие условия:

- 1. любые две точки из одной части можно соединить ломаной, не пересекающей P ;*
- 2. любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей, пересекает P . (б/д)*

Теорема Жордана для замкнутой ломаной

Теорема (С. Jordan, 1887)

Замкнутая несамопересекающаяся ломаная P делит точки плоскости, не лежащие на P , на две такие части, что выполнены следующие условия:

- 1. любые две точки из одной части можно соединить ломаной, не пересекающей P ;*
- 2. любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей, пересекает P . (б/д)*

Из теоремы Жордана следует, что каждый плоский граф делит плоскость на несколько частей. Эти части называются **гранями** (или **странами**).

Изображения на плоскости и на сфере

Для каждого изображения графа на плоскости можно построить эквивалентное ему изображение того же графа на сфере.

Аналогично, для каждого изображения графа на сфере можно построить эквивалентное ему изображение того же графа на плоскости.

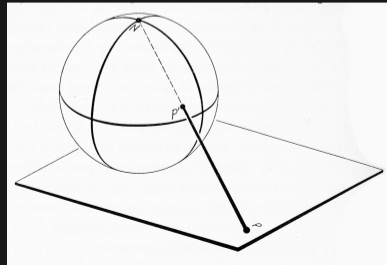
Изображения на плоскости и на сфере

Для каждого изображения графа на плоскости можно построить эквивалентное ему изображение того же графа на сфере.

Аналогично, для каждого изображения графа на сфере можно построить эквивалентное ему изображение того же графа на плоскости.

Стереографическая проекция

Рассмотрим сферу и касающуюся её плоскость. Пусть N — точка сферы, диаметрально противоположная точке касания (**северный полюс**). Каждая точка P плоскости переходит в точку $P' \neq N$ пересечения сферы и луча NP . Обратно, точка P' переходит в P .



Многогранники и карты

- ▶ Любому выпуклому многограннику соответствует карта на сфере (а, следовательно, и на плоскости).
 - Действительно, рассмотрим содержащую многогранник сферу, центр которой лежит внутри многогранника.
 - Проводим всевозможные лучи с началом в центре сферы.
 - Точки пересечения этих лучей со сферой и с поверхностью многогранника будут соответствовать друг другу.

Многогранники и карты

- ▶ Любому выпуклому многограннику соответствует карта на сфере (а, следовательно, и на плоскости).
 - Действительно, рассмотрим содержащую многогранник сферу, центр которой лежит внутри многогранника.
 - Проводим всевозможные лучи с началом в центре сферы.
 - Точки пересечения этих лучей со сферой и с поверхностью многогранника будут соответствовать друг другу.
- ▶ Тем самым, вершины и ребра выпуклого многогранника образуют планарный граф.

Многогранники и карты

- ▶ Любому выпуклому многограннику соответствует карта на сфере (а, следовательно, и на плоскости).
 - Действительно, рассмотрим содержащую многогранник сферу, центр которой лежит внутри многогранника.
 - Проводим всевозможные лучи с началом в центре сферы.
 - Точки пересечения этих лучей со сферой и с поверхностью многогранника будут соответствовать друг другу.
- ▶ Тем самым, вершины и ребра выпуклого многогранника образуют планарный граф.

Теорема (E. Steinitz, 1922)

Граф G является графом вершин и ребер некоторого выпуклого многогранника тогда и только тогда, когда он трехсвязен и планарен. (б.д)

Формула Эйлера

Теорема (L. Euler, 1752)

Пусть G — карта с v вершинами, e рёбрами и f гранями.

Тогда $v - e + f = 2$.

Формула Эйлера

Теорема (L. Euler, 1752)

Пусть G — карта с v вершинами, e рёбрами и f гранями.
Тогда $v - e + f = 2$.

Доказательство.

Индукция по e .

$e = v - 1$: тогда G — дерево и $f = 1$. Следовательно,
 $v - e + f = v - (v - 1) + 1 = 2$.

Формула Эйлера

Теорема (L. Euler, 1752)

Пусть G — карта с v вершинами, e рёбрами и f гранями.
Тогда $v - e + f = 2$.

Доказательство.

Индукция по e .

$e = v - 1$: тогда G — дерево и $f = 1$. Следовательно,
 $v - e + f = v - (v - 1) + 1 = 2$.

$e - 1 \rightarrow e$: Поскольку $e \geq v$, в G есть цикл C .

► Удалим ребро s , входящее в C . Получим карту $G' = G - s$.

• В G' имеем v вершин, $e' = e - 1$ ребер и $f' = f - 1$ граней.

► Тогда $2 = v - e' + f' = v - (e - 1) + (f - 1) = v - e + f$. □

Формула Эйлера: замечания

Замечание

1. Можно доказать, что для любой двумерной поверхности величина $v - e + f$ не зависит от того, какой именно граф на ней изображен. Эта величина называется *эйлеровой характеристикой* поверхности.
 - Например, эйлерова характеристика тора равна нулю.
 - На самом деле, изображение не совсем произвольное: грани должны быть “похожими на многоугольники” (гомеоморфными диску).

Формула Эйлера: замечания

Замечание

1. Можно доказать, что для любой двумерной поверхности величина $v - e + f$ не зависит от того, какой именно граф на ней изображен. Эта величина называется *эйлеровой характеристикой* поверхности.
 - Например, эйлерова характеристика тора равна нулю.
 - На самом деле, изображение не совсем произвольное: грани должны быть “похожими на многоугольники” (гомеоморфными диску).
2. Формула Эйлера верна также и для графов с кратными рёбрами и петлями.

Следствия формулы Эйлера

Следствие 1

*Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер и $v \geq 3$.
Тогда $e \leq 3v - 6$.*

Следствия формулы Эйлера

Следствие 1

*Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер и $v \geq 3$.
Тогда $e \leq 3v - 6$.*

Доказательство.

- ▶ Поскольку в G нет петель и кратных ребер, все циклы имеют длину хотя бы 3.
- ▶ Следовательно, каждая грань ограничена хотя бы тремя рёбрами.
- ▶ Тогда $f \leq \frac{2e}{3}$. Откуда $2 = v - e + f \leq v - e + \frac{2e}{3} = v - \frac{e}{3}$.
- ▶ Следовательно, $6 \leq 3v - e$. □

Следствия формулы Эйлера

Следствие 2

Пусть G — двудольный планарный граф без петель и кратных рёбер и $v \geq 3$. Тогда $e \leq 2v - 4$.

Следствия формулы Эйлера

Следствие 2

Пусть G — двудольный планарный граф без петель и кратных рёбер и $v \geq 3$. Тогда $e \leq 2v - 4$.

Доказательство.

Аналогично предыдущему, только каждая грань ограничена минимум четырьмя ребрами, откуда $f \leq \frac{e}{2}$. □

Следствия формулы Эйлера

Следствие 2

Пусть G — двудольный планарный граф без петель и кратных рёбер и $v \geq 3$. Тогда $e \leq 2v - 4$.

Доказательство.

Аналогично предыдущему, только каждая грань ограничена минимум четырьмя ребрами, откуда $f \leq \frac{e}{2}$. □

Следствие 3

Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

Следствия формулы Эйлера

Следствие 2

Пусть G — двудольный планарный граф без петель и кратных рёбер и $v \geq 3$. Тогда $e \leq 2v - 4$.

Доказательство.

Аналогично предыдущему, только каждая грань ограничена минимум четырьмя ребрами, откуда $f \leq \frac{e}{2}$. □

Следствие 3

Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

Доказательство.

У K_5 имеем $v = 5$ и $e = 10 > 3 \cdot 5 - 6$;

у $K_{3,3}$ имеем $v = 6$ и $e = 9 > 2 \cdot 6 - 4$.

Следствия формулы Эйлера

Следствие 4

*Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер.
Тогда $\delta(G) \leq 5$.*

Следствия формулы Эйлера

Следствие 4

Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер.
Тогда $\delta(G) \leq 5$.

Доказательство.

В противном случае, $6v \leq 2e \leq 2(3v - 6)$.



Следствия формулы Эйлера

Следствие 4

Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер.
Тогда $\delta(G) \leq 5$.

Доказательство.

В противном случае, $6v \leq 2e \leq 2(3v - 6)$.



Следствие 5

Пусть G — планарный граф. Тогда $\chi(G) \leq 6$.

Следствия формулы Эйлера

Следствие 4

Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер.
Тогда $\delta(G) \leq 5$.

Доказательство.

В противном случае, $6v \leq 2e \leq 2(3v - 6)$. □

Следствие 5

Пусть G — планарный граф. Тогда $\chi(G) \leq 6$.

Доказательство.

Убираем все кратные рёбра. Далее, удаляем вершину степени не более 5, красим оставшиеся вершины в 6 цветов по индукционному предположению, и докрашиваем удаленную. □

Двойственный граф

Определение

Пусть G — карта. Определим *двойственную* к G карту G^* следующим образом.

- ▶ Вершины G^* будут соответствовать граням карты G .
 - Внутри каждой грани a карты G отметим *двойственную* ей вершину a^* карты G^* .

Двойственный граф

Определение

Пусть G — карта. Определим *двойственную* к G карту G^* следующим образом.

- ▶ Вершины G^* будут соответствовать граням карты G .
 - Внутри каждой грани a карты G отметим *двойственную* ей вершину a^* карты G^* .
- ▶ Пусть $e \in E(G)$ — ребро, по которому граничат две грани a и b карты G . Ему будет соответствовать ребро e^* карты G^* , соединяющее двойственные граням a и b вершины a^* и b^* . Назовём ребро e^* *двойственным* к e .
 - Двойственное ребро e^* проводится так, чтобы оно ровно в одной точке пересекало e и не пересекалось ни с какими другими ребрами карт G и G^* .
 - Грани a и b могут совпадать. Это возможно в том случае, если e — мост (т. е. граф $G - e$ несвязен). В этом случае, двойственное ребро e^* будет петлёй.

Свойства двойственного графа

Соответствия между элементами G и G^*

границ $G \leftrightarrow$ вершины G^*

рёбра $G \leftrightarrow$ рёбра G^*

вершины $G \leftrightarrow$ грани G^*

Свойства двойственного графа

Соответствия между элементами G и G^*

грани $G \leftrightarrow$ вершины G^*

рёбра $G \leftrightarrow$ рёбра G^*

вершины $G \leftrightarrow$ грани G^*

Тем самым, двойственный граф G^* обладает следующими свойствами.

1. Если в G имеется v вершин, e рёбер и f граней, то в G^* будет f вершин, e рёбер и v граней.

Свойства двойственного графа

Соответствия между элементами G и G^*

грани $G \leftrightarrow$ вершины G^*

рёбра $G \leftrightarrow$ рёбра G^*

вершины $G \leftrightarrow$ грани G^*

Тем самым, двойственный граф G^* обладает следующими свойствами.

1. Если в G имеется v вершин, e рёбер и f граней, то в G^* будет f вершин, e рёбер и v граней.
2. $(G^*)^* = G$.

Раскраска граней карты

Определение

Раскраска граней карты G называется *правильной*, если любые две грани, имеющие общее ребро, окрашены в разные цвета.

Минимальное число цветов в правильной раскраске граней будем обозначать через $\chi^*(G)$.

Раскраска граней карты

Определение

Раскраска граней карты G называется *правильной*, если любые две грани, имеющие общее ребро, окрашены в разные цвета.

Минимальное число цветов в правильной раскраске граней будем обозначать через $\chi^*(G)$.

Замечание

1. Очевидно, что правильные раскраски граней карты G взаимно однозначно соответствуют правильным раскраскам вершин G^* .

Раскраска граней карты

Определение

Раскраска граней карты G называется *правильной*, если любые две грани, имеющие общее ребро, окрашены в разные цвета. Минимальное число цветов в правильной раскраске граней будем обозначать через $\chi^*(G)$.

Замечание

1. Очевидно, что правильные раскраски граней карты G взаимно однозначно соответствуют правильным раскраскам вершин G^* .
2. Следовательно, $\chi^*(G) = \chi(G^*)$ и $\chi(G) = \chi^*(G^*)$.

Критерий раскрашиваемости граней в 2 цвета

Теорема

$\chi^*(G) \leq 2 \Leftrightarrow$ все степени вершин G четны.

Критерий раскрашиваемости граней в 2 цвета

Теорема

$\chi^*(G) \leq 2 \Leftrightarrow$ все степени вершин G четны.

Доказательство.

“ \Rightarrow ”: Если в G есть вершина нечетной степени, то в G^* ей соответствует нечетный цикл. Тогда $\chi^*(G) = \chi(G^*) > 2$.

Критерий раскрашиваемости граней в 2 цвета

Теорема

$\chi^*(G) \leq 2 \Leftrightarrow$ все степени вершин G четны.

Доказательство.

“ \Rightarrow ”: Если в G есть вершина нечетной степени, то в G^* ей соответствует нечетный цикл. Тогда $\chi^*(G) = \chi(G^*) > 2$.

“ \Leftarrow ”: Нужно доказать, что в G^* нет нечетных циклов.

- ▶ Пусть C — простой цикл в G^* , m — его длина;
- ▶ A — множество вершин G , находящихся внутри C ;
- ▶ $G' = G(A)$.
- ▶ Тогда $\sum_{a \in A} d_G(a) = \sum_{a \in A} d_{G'}(a) + m = 2e(G') + m$, следовательно, $m = \sum_{a \in A} d_G(a) - \sum_{a \in A} d_{G'}(a) \div 2$.



Теорема о пяти красках

Теорема (Ф. Кетре, 1879)

Пусть G — планарный граф. Тогда $\chi(G) \leq 5$.

Теорема о пяти красках

Теорема (Ф. Кетре, 1879)

Пусть G — планарный граф. Тогда $\chi(G) \leq 5$.

Доказательство.

Индукция по $v(G)$. База при $v(G) \leq 5$ очевидна.

Теорема о пяти красках

Теорема (Ф. Кемпе, 1879)

Пусть G — планарный граф. Тогда $\chi(G) \leq 5$.

Доказательство.

Индукция по $v(G)$. База при $v(G) \leq 5$ очевидна.


Докажем переход.

- ▶ Удалим вершину $u \in V(G)$, такую, что $d_G(u) \leq 5$.
 - По индукционному предположению, для графа $G - u$ есть правильная раскраска вершин в 5 цветов.
 - Если не получилось покрасить u ни в один из цветов, то $d_G(u) = 5$ и все соседи u имеют разные цвета.
 - Пусть v_1, \dots, v_5 — соседи u цветов $1, \dots, 5$ соответственно;
 - рёбра uv_1, \dots, uv_5 выходят из u именно в таком порядке (по часовой стрелке).

Доказательство теоремы о пяти красках

- ▶ Обозначим через G_{ij} индуцированный подграф графа G на множестве вершин цветов i и j .
 - Если в G_{13} вершины v_1 и v_3 в разных компонентах связности, то перекрасим все вершины компоненты, содержащей v_1 . После чего покрасим u в цвет 1.
 - Иначе есть чередующийся 13-путь из v_1 в v_3 . Вместе с u он образует цикл, разделяющий v_2 и v_4 .
 - Тогда нет чередующегося 24-пути из v_2 в v_4 . Следовательно, v_2 и v_4 в разных компонентах связности графа G_{24} .
 - Перекрасим все вершины компоненты связности графа G_{24} , содержащей v_2 , и покрасим u в цвет 2. □

Доказательство теоремы о пяти красках

- Обозначим через G_{ij} индуцированный подграф графа G на множестве вершин цветов i и j .
- Если в G_{13} вершины v_1 и v_3 в разных компонентах связности, то перекрасим все вершины компоненты, содержащей v_1 . После чего покрасим u в цвет 1.
 - Иначе есть чередующийся 13-путь из v_1 в v_3 . Вместе с u он образует цикл, разделяющий v_2 и v_4 .
 - Тогда нет чередующегося 24-пути из v_2 в v_4 . Следовательно, v_2 и v_4 в разных компонентах связности графа G_{24} .
 - Перекрасим все вершины компоненты связности графа G_{24} , содержащей v_2 , и покрасим u в цвет 2. 

Следствие

Грани любой карты без мостов можно правильным образом покрасить в 5 цветов.

О проблеме четырёх красок

Гипотеза четырёх красок (4CC)

Грани любой карты без мостов можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

О проблеме четырёх красок

Гипотеза четырёх красок (4CC)

Грани любой карты без мостов можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

- ▶ Формулировка гипотезы: F. Guthrie, 1852.
- ▶ Первая попытка доказательства: F. Kempe, 1879
 - ошибку нашли в 1890 году, на самом деле методом Кемпе доказывалась лишь теорема о пяти красках.
- ▶ Компьютерное доказательство: K. Appel, W. Haken, J. Koch, 1977 (разбор 1834 конфигураций).
- ▶ Улучшенное компьютерное доказательство: N Robertson, D Sanders, P. Seymour, R Thomas, 1997 (всего 633 конфигурации).
- ▶ Не использующее компьютер доказательство не известно до сих пор.

Переформулировка Тэйта гипотезы четырёх красок

Очевидно, что 4СС эквивалентна тому, что для любого планарного графа G выполнено $\chi(G) \leq 4$.

Но есть и более важная переформулировка.

Переформулировка Тэйта гипотезы четырёх красок

Очевидно, что 4СС эквивалентна тому, что для любого планарного графа G выполнено $\chi(G) \leq 4$.

Но есть и более важная переформулировка.

Теорема (P. G. Tait, 1880)

4СС \Leftrightarrow для любой триангуляции сферы существует такая раскраска рёбер в три цвета, что все рёбра каждой грани разноцветны. (б/д)

Переформулировка Тэйта гипотезы четырёх красок

Очевидно, что 4СС эквивалентна тому, что для любого планарного графа G выполнено $\chi(G) \leq 4$.

Но есть и более важная переформулировка.

Теорема (P. G. Tait, 1880)

4СС \Leftrightarrow для любой триангуляции сферы существует такая раскраска рёбер в три цвета, что все рёбра каждой грани разноцветны. (б/д)

Определение

Такие раскраски рёбер называют **Тэйтовыми**.

Теорема Куратовского

Определение

Граф H' называется *подразбиением* графа H , если H' может быть получен из H заменой некоторых рёбер на простые пути. При этом, все добавляемые вершины различны и имеют степень 2.

Теорема Куратовского

Определение

Граф H' называется *подразбиением* графа H , если H' может быть получен из H заменой некоторых рёбер на простые пути. При этом, все добавляемые вершины различны и имеют степень 2.

Теорема (К. Kuratowski, 1930)

Граф G (возможно, содержащий кратные рёбра и петли) планарен если и только если G не содержит в качестве подграфа никакого подразделения графов K_5 и $K_{3,3}$. (б/д)

Теорема Куратовского

Определение

Граф H' называется *подразбиением* графа H , если H' может быть получен из H заменой некоторых рёбер на простые пути. При этом, все добавляемые вершины различны и имеют степень 2.

Теорема (К. Kuratowski, 1930)

Граф G (возможно, содержащий кратные рёбра и петли) планарен если и только если G не содержит в качестве подграфа никакого подразделения графов K_5 и $K_{3,3}$. (б/д)

Замечание

Есть также алгоритм укладки графа на плоскости, который либо дает способ укладки, либо указывает запрещенный подграф.