Раскраска графов и покрытия

Лабораторная работа №2

Осенний семестр, 2024 г.

Хроматиическое число графа — минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета.

Хроматический класс графа — это максимальное число рёбер, инцидентных одной вершине, которое можно использовать при раскраске рёбер графа. Другими словами, это минимальное количество цветов, которое нужно, чтобы раскрасить рёбра графа так, чтобы никакие два рёбра, имеющие общую вершину, не были одного цвета.

Совершенным графом называется граф, в котором хроматическое число любого порождённого подграфа равно размеру максимальной клики этого подграфа. Кликой неориентированного графа называется подмножество его вершин, в котором все вершины соединены ребром между собой.

Множество $V' \subseteq VG$ называется вершинным покрытием графа G, если каждое ребро из EG инцидентно хотя бы одной вершине из V'.

Граф, изображенный на плоскости, называется плоским, если его ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин графа. Граф называется планарным, если он изоморфен плоскому графу.

1. Постройте и изобразите помеченный граф CompleteGraph[4]:
   - найдите хроматическое число и хроматический многочлен графа;
     https://reference.wolfram.com/language/ref/VertexChromaticNumber.html
     https://reference.wolfram.com/language/ref/ChromaticPolynomial.html
   - найдите хроматический класс графа;
     https://reference.wolfram.com/language/ref/EdgeChromaticNumber.html
   - проверьте, является ли данный граф совершенным, планарным.
     https://resources.wolframcloud.com/FunctionRepository/resources/PerfectGraphQ
     https://reference.wolfram.com/language/ref/PlanarGraphQ.html
2. Постройте и изобразите реберный граф для CompleteGraph[4].
   - Найдите хроматический класс графа и сравните с результатом предыдущего пункта.
     https://reference.wolfram.com/language/ref/LineGraph.html
3. Проведите раскраску ребер графа CompleteGraph[4], изобразите граф на экране.
   https://reference.wolfram.com/language/ref/FindEdgeColoring.html
4. Проведите раскраску вершин графа CompleteGraph[4], изобразите граф на экране.
   https://reference.wolfram.com/language/ref/FindVertexColoring.htmll
5. Определите, является ли 1,3 покрытием вершин графа CompleteGraph[4]:
   https://reference.wolfram.com/language/ref/VertexCoverQ.html

- Найдите вершинное покрытие этого графа.
  https://reference.wolfram.com/language/ref/FindVertexCover.html

6. Дан ориентированный граф, возможно, с петлями и кратными ребрами. Необходимо найти все вершины, из которых достижима первая вершина.

   Формат ввода

   В первой строке записаны два целых числа n и m — количество вершин и ребер в графе.

   В последующих m строках перечислены ребра — пары чисел, определяющие номера вершин, которые соединяют ребра (в порядке "откуда"и "куда"ведет ребро).

   Формат вывода

   Выведите все вершины, из которых достижима первая, в порядке возрастания их номеров.

   Ввод

   4 5

   2 2

   4 3

   2 3

   3 1

   2 4

   Вывод

   1 2 3 4

7. Фуд-стилист и художник Оранж создал картину, используя фрукты разных цветов. Картина создана в виде квадрата NN. С помощью нейросети художник сгенерировал палитру из N^2 цветов в формате OKLCH и присвоил каждому цвету порядковый номер. Полученная палитра обладает следующим свойством: пара цветов с порядковыми номерами i, j считается красивой, если $i < j$. Путь из фруктов в квадрате считается красивым, если цвета всех соседних пар фруктов красивы, а последний фрукт находится на краю квадрата. В качестве соседей фрукта учитываются только вертикальные и горизонтальные фрукты, но не диагональные.

   Необходимо написать программу, которая в заданной случайной расстановке найдёт количество фруктов в самом длинном красивом пути, а также количество таких путей.

   Формат ввода

   В первой строке вводится число N — размер матрицы. В следующих N строках находится N чисел $A_{i,j}$, разделённых пробелом, — порядковые номера цветов фруктов.

   Гарантируется, что все порядковые номера различны.

   Формат вывода

   В ответе выведите два числа через пробел: количество фруктов в самом длинном красивом пути и количество таких путей.

   Пример 1

   Ввод

3

1 2 7

3 4 6

8 5 9

Вывод

5 8

Примечание

В условии из Примера 1 существует 8 красивых путей длины 5:

1 2 4 5 9

1 3 4 5 9

1 2 4 6 9

1 3 4 6 9

1 2 4 6 7

1 3 4 6 7

1 2 4 5 8

1 3 4 5 8