

Отчет по первому заданию курса "Современные вычислительные технологии"

Балашов Георгий, 303

28 февраля 2024 г.

1 Описание задачи

Методом прогонки требуется решить следующую систему:

$$\begin{cases} -u'' = f, x \in (0,1), \\ u(0) = a, u(1) = b \end{cases}$$

Точное решение $u = \sin(x) \Rightarrow \begin{cases} -u'' = \sin(x), x \in (0,1), \\ u(0) = 0 = a, \\ u(1) = \sin(1) = b \end{cases}$

Вводятся дискретные переменные $y_i \approx u(x_i)$ на сетке $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, где $x_i = i * h$, $h = 1/n$ - шаг сетки.

Дискретная аппроксимация уравнения:

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f(x_i) = \sin(i * h)$$

Общая система:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \dots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \dots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + \sin(1)/h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x_1) \\ F(x_2) \\ F(x_3) \\ \dots \\ F(x_{n-2}) \\ F(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

2 Метод прогонки

Общая система представляет собой трехдиагональную матрицу, поэтому возможно решение методом прогонки. Этот метод основывается на предположении, что неизвестные связаны рекуррентным соотношением: $x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}$.

Используя это соотношение выражаются коэффициенты α , β :

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \frac{-C_i}{A_i\alpha_i + B_i}, & \forall i = 1, \dots, n \\ \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i\beta_i}{A_i\alpha_i + B_i}, & \forall i = 1, \dots, n \\ \alpha_1 = -C_1/B_1, \\ \beta_1 = F_1/B_1 \end{cases}$$

,

где $A = A_i = C = C_i = -1, B = B_i = 2$ - элементы матрицы системы

После нахождения прогоночных коэффициентов α , β , получим решение системы:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, & \forall i = 1, \dots, n-2, \\ y_{n-1} = \frac{F_{n-1} - A_{n-1}\beta_{n-1}}{A_{n-1}\alpha_{n-1} + B_{n-1}} \\ y_n = \sin(1) \end{cases}$$

3 Результаты численных экспериментов

