Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Praca licencjacka

Ultrafiltry i uzwarcenie Čecha-Stone'a przestrzeni dyskretnych

Justyna Porzycka

Kierunek: Matematyka

Nr albumu: 302753

Promotor
Prof. dr hab. Piotr Oprocha

Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2021

Oświadczenie autora

Ja, niżej podpisana Justyna Porzycka oświadczam, że praca ta została napisana samodzielnie i wykorzystywała (poza zdobytą na studiach wiedzą) jedynie wyniki prac zamieszczonych w spisie literatury.

....
(Podpis autora)

Oświadczenie promotora

Oświadczam, że praca spełnia wymogi stawiane pracom licencjackim.

....
(Podpis promotora)

[subsection] [subsection] [subsection] [subsection]

Akademia Górniczo–Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Matematyki Stosowanej

FORMULARZ OCENY PRACY LICENCJACKIEJ

Imię i nazwisko: Justyna Porzycka
Nr albumu: 302753
Temat pracy: pffff

prof. dr hab. Piotr Oprocha

(opiekun)

Kryterium	Waga	Ocena
(M) Merytoryczna ocena pracy	0,7	
(F) Ocena formalnej strony pracy	0,3	
(O) Ocena końcowa (0,7 M+0,3 F)		

Uzasadnienie oceny skrajnej (2,0, 5,0):

Ocena za prezentację pracy licencjackiej	....

Podpis opiekuna:..

(recenzent)

Kryterium	Waga	Ocena
(M) Merytoryczna ocena pracy	0,7	
(F) Ocena formalnej strony pracy	0,3	
(R) Ocena końcowa (0,7 M+0,3 F)		

Uzasadnienie oceny skrajnej (2,0, 5,0):

Podpis recenzenta:..

Ocena pracy (0,5 O + 0,5 R): ....

Spis treści

1 Wstęp

1.1 Oznaczenia

W poniższym tekście wymagana jest znajomość podstawowych definicji związanych z topologią ogólną, takich jak zbiór otwarty, zbiór domknięty, topologia. Zakładana jest również znajomość takich twierdzeń jak twierdzenie Tichonowa o produkcie przestrzeni zwartych czy twierdzenie Cantora-Bernsteina, które często będą obecne w tle definiowanych w tekście pojęć. Wszystkie wymienione wyżej definicje i twierdzenia można znaleźć w podręczniku *Topologia ogólna* Ryszarda Engelkinga.

W poniższym tekście będą obowiązywały również następujące oznaczenia:

1. clA - domknięcie zbioru ($cl_X A$ - domknięcie zbioru w sensie topologii na X)
2. $dom(f)$ - dziedzina funkcji f
3. $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$ - obraz zbioru A
4. $f^{-1}[B] = \{x \in dom(f) : f(x) \in B\}$ - przeciwobraz zbioru B

1.2 Motywacja

Celem poniższej pracy jest zdefiniowanie pojęcia ultrafiltrów oraz zbadanie niektórych własności pewnej szczególnej przestrzeni topologicznej, silnie związanej ze zbiorem liczb naturalnych, w kontekście ogólnego pojęcia uzwarcenia Čecha-Stone'a. Okazuje się bowiem, że w rodzinie wszystkich ultrafiltrów podzbiorów zbioru liczb naturalnych można wprowadzić topologię w taki sposób, że powstała przestrzeń będzie równoważna uzwarceniu Čecha-Stone'a wyjściowego zbioru $\mathbb{N}$. Otrzymana przestrzeń jest o tyle ciekawa, że badanie jej prowadzi do wielu wyników niekoniecznie związanych bezpośrednio z samą topologią ogólną.

Przestrzeń ta stanowi również swego rodzaju prototyp do badań nad uzwarceniem Čecha-Stone'a, bowiem dzięki niektórym elementarnym własnościom liczb naturalnych pewne twierdzenia łatwiej jest udowodnić najpierw w tym konkretnym przypadku, a później rozszerzyć do ogólniejszych wyników.

Rozdział drugi poświęcony został ogólnemu przedstawieniu uzwarceń, w tym uzwarceniu Čecha-Stone'a. Rozdział trzeci przedstawia definicję filtru i ultrafiltru. W rodzinie wszystkich ultrafiltrów danego zbioru wprowadzona zostaje pewna szczególna topologia, wyjaśnione zostaje jak w przypadku przestrzeni dyskretnych można połączyć pojęcia ultrafiltru i uzwarcenia Čecha-Stone'a. Tematem głównym rozdziału czwartego są własności pewnej przestrzeni, będącej szczególnym przypadkiem tych opisywanych w rozdziale trzecim.

W poniższej pracy udało mi się scalić podejście z kilku ogólnych prac wymienionych w bibliografii oraz przedstawić niektóre dowody, które w tych pracach przedstawione zostały skrótowo bądź były pominięte.

2 Uzwarcenia przestrzeni topologicznej

Rozdział ten poświęcony będzie pojęciu *uzwarcenia* przestrzeni X. Zdefiniowanie zostanie *uzwarcenie Čecha-Stone'a*, będące elementem największym w rodzinie wszystkich uzwarceń przestrzeni X z wprowadzonym porządkiem. Owe uzwarcenie Čecha-Stone'a będzie tematem głównym całej pracy.

2.1 Wstęp z topologii ogólnej - przestrzenie zwarte i związane z nimi pojęcia

Przedstawione niżej definicje i twierdzenia stanowią w większości krótkie przypomnienie. Część z nich będzie wykorzystywana już w bieżącym rozdziale, znajomość pozostałych będzie niezbędna do zrozumienia ostatniego rozdziału.

Pierwsze definicje dotyczą tak zwanych aksjomatów oddzielania.

Definicja 2.1.1. *Przestrzeń topologiczna X jest przestrzenią T_1, jeśli dla dowolnej pary różnych od siebie punktów $x,\ y \in X$ istnieje zbiór otwarty U, taki że $x \in U$ oraz $y \notin U$.*

Definicja 2.1.2. *Przestrzeń topologiczna X jest przestrzenią T_2, tak zwaną przestrzenią Hausdorffa, jeśli dla dowolnej pary różnych od siebie punktów $x,\ y \in X$ istnieją rozłączne zbiory otwarte $U_1,\ U_2$, takie że $x \in U_1$ oraz $y \in U_2$.*

Definicja 2.1.3. *Przestrzeń topologiczna X jest przestrzenią T_3, tak zwaną przestrzenią regularną, jeśli jest przestrzenią T_1 oraz dla dowolnego zbioru domkniętego F oraz dowolnego puntu $x \notin F$ istnieją rozłączne zbiory otwarte U, V, takie że $F \subset U$ oraz $x \in V$.*

Definicja 2.1.4. *Przestrzeń topologiczna X jest przestrzenią $T_{3\frac{1}{2}}$, tak zwaną przestrzenią Tichonowa (lub inaczej, przestrzenią całkowicie regularną), jeśli jest przestrzenią T_1 oraz dla dowolnego zbioru domkniętego F oraz dowolnego puntu $x \notin F$ istnieje ciągła funkcja $f : X \to [0,1]$, taka że $f(x) = 0$ oraz $f[F] = 1$.*

Definicja 2.1.5. *Przestrzeń topologiczna X jest przestrzenią T_4, tak zwaną przestrzenią normalną, jeśli jest przestrzenią T_1 oraz dla dowolnych dwóch rozłącznych zbiorów domkniętych F, Q istnieją rozłączne zbiory otwarte U, V, takie że $F \subset U$ oraz $Q \subset V$.*

Kolejne pojęcia będą dotyczyć podobnych w pewnym sensie własności. Tym co je łączy jest własność zwartości:

Definicja 2.1.6. *Pokryciem otwartym przestrzeni topologicznej X nazywana jest rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{O}$, których suma mnogościowa równa jest całej przestrzeni, a przez podpokrycie rozumiana jest podrodzina $\mathcal{O}'$ zawarta w $\mathcal{O}$, której suma mnogościowa nadal jest równa przestrzeni X.*

Definicja 2.1.7. *Przestrzeń topologiczna X jest zwarta, jeśli jest przestrzenią Hausdorffa oraz z każdego jej pokrycia można wybrać podpokrycie składające się ze skończonej liczby zbiorów.*

Definicja 2.1.8. *Przestrzeń X jest zanurzalna w przestrzeni Y, jeśli istnieje homeomorfizm między przestrzenią X, a podprzestrzenią Z przestrzeni Y. Taki homeomorfizm nazywany jest zanurzeniem homeomorficznym.*

Definicja 2.1.9. *Uzwarceniem (rozszerzeniem zwartym) przestrzeni X nazywana jest para (Y, h), gdzie Y jest przestrzenią zwartą, h jest homeomorficznym zanurzeniem X w Y, a $h[X]$ jest gęstym podzbiorem Y.*

W dalszej części, jeśli h jest zanurzeniem homeomorficznym X w Y to uzwarceniem przestrzeni X będzie nazywana sama przestrzeń zwarta Y, która będzie oznaczana symbolem hX.

W [3, str. 196] można znaleźć twierdzenie, które często będzie przemycane, gdy będzie mowa o przestrzeniach zwartych.

Twierdzenie 2.1.10. *Przestrzeń topologiczna X ma rozszerzenie zwarte (uzwarcenie) wtedy i tylko wtedy, gdy jest przestrzenią Tichonowa (jest przestrzenią całkowicie regularną).*

2.2 Uzwarcenie Čecha-Stone'a

Ten podrozdział będzie traktował o *największym* w pewnym sensie uzwarceniu. By móc mówić o elementach większych lub mniejszych, potrzebne będzie wprowadzenie do rodziny wszystkich uzwarceń relacji porządku. Jeśli dla uzwarceń h_1X, h_2X istnieje homeomorfizm $f : h_1X \to h_2X$, przeprowadzający jedno w drugie, oraz $f \circ h_1 = h_2$, to uzwarcenia te nazywane będą *równoważnymi.* Innymi słowy, h_1X, h_2X są równoważne, gdy są homeomorficzne, a przestrzeń X jest w nie zanurzona *tak samo.*

Przez $\mathcal{Z}(X)$ oznaczany będzie zbiór wszystkich uzwarceń X z dokładnością do równoważnych. Dodatkowo, w zbiorze $\mathcal{Z}(X)$ można wprowadzić porządek - dla h_1X, h_2X należących do $\mathcal{Z}(X)$, $h_2X \leqslant h_1X$, to znaczy h_2X jest nie większe od h_1X, jeśli istnieje ciągłe przekształcenie $f : h_1X \to h_2X$, dla którego zachodzi $f \circ h_1 = h_2$. Zamieniając w definicji równoważności homeomorfizm na odwzorowanie ciągłe, otrzymujemy definicję porządku.

Jak się okaże, w zbiorze $\mathcal{Z}(X)$ istnieje element największy. Żeby to pokazać, konieczne będzie przytoczenie dwóch twierdzeń. Pierwsze stanowi szczególny przypadek *twierdzenia o przekątnej*, którego dowód można znaleźć w [3, str. 104] i dotyczy stricte przestrzeni topologicznych, drugie zaś będzie równoważne pewnikowi wyboru.

Dla rodziny rozszerzeń zwartych $\{ h_iX, i \in I \}$, gdzie I jest dowolnym zbiorem indeksów będą obowiązywać następujące oznaczenia:

1. Przekątna produktu $\prod_{i\in I} h_iX$ to zbiór $\triangle_{i\in I} h_iX = \{\prod_{i\in I} h_i(x) : x \in X\}$.

2. $\triangle_{i\in I} h_i : X \to \triangle_{i\in I} h_iX \subset \prod_{i\in I} h_iX$ to takie odwzorowanie, że obrazem elementu $x \in X$ jest element $\prod_{i\in I} h_i(x) \in \triangle_{i\in I} h_iX$.

Twierdzenie 2.2.1. *Niech $\{ h_i X, i \in I \}$, gdzie I jest dowolnym zbiorem indeksów, będzie rodziną rozszerzeń zwartych danej przestrzeni X. Wtedy przekształcenie $h = \triangle_{i \in I} h_i : X \to \prod_{i \in I} h_i X$ jest zanurzeniem homeomorficznym.*

Twierdzenie 2.2.2 (Lemat Kuratowskiego-Zorna)**.** *Jeżeli w niepustym zbiorze częściowo uporządkowanym każdy niepusty łańcuch ma majorantę, to w zbiorze tym istnieje element maksymalny.*

Wszystko powyższe prowadziło do ostatniego twierdzenia tego rozdziału i do wniosku z niego, który będzie kluczowy do dalszych rozważań.

Twierdzenie 2.2.3. *Każda niepusta podrodzina $\mathcal{Z}'$ zawarta w $\mathcal{Z}(X)$ ma kres górny względem porządku $\leqslant$ zadanego w $\mathcal{Z}(X)$.*

Dowód. Najpierw należy pokazać istnienie ograniczenia górnego dowolnej podrodziny. Niech $\mathcal{Z}' = \{h_i X\}_{i \in I}$ będzie dowolną podrodziną $\mathcal{Z}(X)$.
Odwzorowanie $h = \triangle_{i \in I} h_i : X \to \prod_{i \in I} h_i X$ jest na mocy twierdzenia 2.2.1 zanurzeniem homeomorficznym.
Niech $hX = \overline{h(X)} \subset \prod_{i \in I} h_i X$. To, że dla wszystkich indeksów $i \in I$, $h_i X$ jest nie większe od hX, wynika z obserwacji, że dla rzutowania p_i na i-tą oś, $\mathrm{p}_i \circ h = h_i$.

Żeby pokazać, że hX jest *najmniejszym* takim ograniczeniem załóżmy, że dla pewnego uzwarcenia eX zachodzi $h_i X \leqslant eX$ dla wszystkich $i \in I$. To znaczy, że istnieją takie przekształcenia $f_i : eX \to h_i X$, że $f_i \circ e = h_i$. Jednak dla $H = \triangle_{i \in I} f_i$ zachodzi $H \circ e = h$. Stąd wynika, że $hX \leqslant eX$. □

Wniosek 2.2.4. *W rodzinie $\mathcal{Z}(X)$ istnieje element największy.*

Definicja 2.2.5. *Uzwarceniem Čecha-Stone'a przestrzeni X nazywany jest największy element w zbiorze wszystkich uzwarceń tej przestrzeni. Uzwarcenie to oznaczane będzie symbolem βX.*

2.3 Liczność βX

W tym podrozdziale konieczna będzie podstawowa znajomość liczb kardynalnych i wykonywanych na nich operacji. Dokładnej definicji tych liczb poświęcony jest cały rozdział drugi w [3], a notacja użyta w bieżącym i w następnych rozdziałach będzie taka sama jak w podanej literaturze.

Dość interesującą kwestią w kontekście rozszerzeń zwartych jest ich moc. W tym podrozdziale stanie się jasne, jaką moc ma omawiane rozszerzenie Čecha-Stone'a danej przestrzeni dyskretnej. Będzie to stanowiło treść pewnego twierdzenia, przed którym jednak konieczne jest przytoczenie potrzebnych definicji i innego, dość znanego faktu:

Definicja 2.3.1. *Gęstością przestrzeni topologicznej X nazywana jest najmniejsza wśród liczb kardynalnych będących mocami podzbiorów gęstych przestrzeni X. Oznaczana będzie przez $d(X)$.*

Twierdzenie 2.3.2 (Hewitta-Marczewskiego-Pondiczery'ego)**.** *Niech $m \geqslant \aleph_0$ oraz niech S będzie pewnym zbiorem indeksów, takim że $|S| \leqslant 2^m$. Wtedy, jeśli dla każdego $s \in S$ gęstość przestrzeni X_s jest nie większa od m, to $d(\prod_{s\in S} X_s) \leqslant m$.*

Dowód. Dowód tego faktu można znaleźć w [3, str. 102]. □

Dla nieskończonych, dyskretnych przestrzeni topologicznych można teraz udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.3.3. *Niech D będzie dyskretną przestrzenią topologiczną o mocy $m \geqslant \aleph_0$. Wtedy moc uzwarcenia βD wynosi 2^{2^m}.*

Dowód. Z twierdzenia 2.3.2 i tego że gęstość odcinka $[0, 1]$ wynosi $\aleph_0$ wiadomo, że gęstość przestrzeni I^{2^m} wynosi $\aleph_0$. Moc zbioru D wynosi $m \geqslant \aleph_0$, zatem zbiór ten możemy odwzorować na gęsty podzbiór przestrzeni I^{2^m}. Z własności uzwarcenia Čecha-Stone'a wiadomo, że odwzorowanie to można przedłużyć na βD. Ponieważ przestrzeń I^{2^m} jest zwarta, obraz przestrzeni βD w przestrzeni I^{2^m} przez to odwzorowanie będzie zwarty. Jako, że w przestrzeniach Hausdorffa podzbiór zwarty jest także domknięty, a sam obraz zawiera podzbiór gęsty, to obraz βD jest całą przestrzenią I^{2^m}.
Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika natychmiast:

$$|\beta D| \geqslant |I^{2^m}| = \mathfrak{c}^{2^m} = 2^{2^m}$$

Dowód nierówności w drugą stronę można znaleźć w [3, str. 205, str. 197]. Wynika on również z interpretacji uzwarcenia Čecha-Stone'a, która jest tematem następnego rozdziału. □

3 Uzwarcenie Čecha-Stone'a przestrzeni dyskretnych

Celem poniższego rozdziału będzie interpretacja uzwarcenia Čecha-Stone'a przestrzeni dyskretnych (jaką jest na przykład zbiór liczb naturalnych z topologią naturalną) w kontekście pojęcia tak zwanych ultrafiltrów podzbiorów danego zbioru.

3.1 Filtry i ultrafiltry

Definicja 3.1.1. *Niech D będzie dowolnym zbiorem. Filtrem na zbiorze D nazywamy niepustą rodzinę $\mathcal{G}$ złożoną z podzbiorów D, która spełnia następujące warunki:*

1. *$\varnothing \notin \mathcal{G}$*
2. *Jeśli A, $B \in \mathcal{G}$ to $A \cap B \in \mathcal{G}$*
3. *Jeśli $A \in \mathcal{G}$ i $A \subseteq B \subseteq D$ to $B \in \mathcal{G}$*

Stąd, że filtr $\mathcal{G}$ jest niepusty i z warunku trzeciego wynika, że $D \in \mathcal{G}$ (ponieważ dowolny zbiór należący do $\mathcal{G}$ jest podzbiorem D). Z warunku drugiego wynika, że przecięcie dowolnej skończonej liczby elementów rodziny $\mathcal{G}$ należy do $\mathcal{G}$.

Niech D będzie dowolnym zbiorem nieskończonym. Sztandarowym przykładem filtru jest zbiór złożony z podzbiorów zbioru D, których dopełnienia są skończone. Filtr ten nazywamy **filtrem Frécheta**.

$$\mathcal{F} = \{ A \subseteq D : |D \setminus A| < \aleph_0 \}$$

Definicja 3.1.2. *Ultrafiltrem nazywamy każdy filtr który nie jest podzbiorem właściwym innego filtru.*

Twierdzenie 3.1.3. *Niech $a \in D$. Wtedy $\mathcal{F}(a) = \{ A \subseteq D : a \in A \}$ jest ultrafiltrem.*

Dowód. Zbiór pusty do zbioru $\mathcal{F}(a)$ nie należy, ponieważ nie zawiera elementu a. Do przecięcia dwóch zbiorów należących do $\mathcal{F}(a)$ należy element a, skąd wynika, że przecięcie również należy do $\mathcal{F}(a)$. Do nadzbioru zbioru należącego do $\mathcal{F}(a)$ w szczególności należy element a, zatem warunek 3. definicji filtru również jest spełniony. $\mathcal{F}(a)$ nie jest również podzbiorem właściwym innego filtru. W istocie, niech $\mathcal{F}'$ będzie filtrem zawierającym $\mathcal{F}(a)$. Z tego, że $\{a\} \in \mathcal{F}'$ oraz tego, że przecięcie dwóch dowolnych zbiorów należących do filtru też do niego należy wynika, że dla dowolnego $A \in \mathcal{F}'$ element a należy do A. Zatem $\mathcal{F}' = \mathcal{F}(a)$. □

Ultrafiltry określone w taki sposób stanowią ważną podrodzinę wszystkich ultrafiltrów i nazywane są *ultrafiltrami głównymi.*

Z tego, że ultrafiltry są elementami maksymalnymi względem relacji zawierania wynika prosty i użyteczny fakt:

Wniosek 3.1.4. *Niech $\mathcal{G}$ i $\mathcal{U}$ będą ultrafiltrami. $\mathcal{G} = \mathcal{U}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}$.*

Okazuje się, że definicję ultrafiltrów można podać w alternatywny sposób. Rodzina $\mathcal{G}$ podzbiorów D jest ultrafiltrem, jeśli spełnia 1. i 2. warunek z definicji filtru, oraz:

3. Dla każdego $A \subseteq D$ albo $A \in \mathcal{G}$ albo $D \setminus A \in \mathcal{G}$

Aby to udowodnić, potrzebnych będzie kilka lematów i definicji, które przybliżą naturę opisywanych obiektów.

Definicja 3.1.5. *Rodziną scentrowaną nazywamy taką rodzinę $\mathcal{R}$ podzbiorów D, dla której zachodzi implikacja: $A_1, ..., A_n \in \mathcal{R} \Rightarrow A_1 \cap ... \cap A_n \neq \varnothing$.*

Dla rodziny scentrowanej podzbiorów D zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1.6. *Każda rodzina scentrowana $\mathcal{R}$ podzbiorów D jest zawarta w pewnym ultrafiltrze $\mathcal{G}$ na D.*

Szkic dowodu. W zbiorze wszystkich scentrowanych rodzin $\mathcal{C}$ zawartych w zbiorze potęgowym zbioru D i zawierających rodzinę $\mathcal{R}$ relacja inkluzji wprowadza częściowy porządek. Dla każdego łańcucha istnieje ograniczenie górne, będące sumą mnogościową wszystkich rodzin tworzących łańcuch. Zatem, co wynika z lematu Kuratowskiego-Zorna, w zbiorze scentrowanych rodzin istnieje element maksymalny $\mathcal{G}$. Można wykazać, że $\mathcal{G}$ jest filtrem, a z tego, że jest elementem maksymalnym wynika, że jest ultrafiltrem. □

Inną ważną własnością ultrafiltru będzie to, że zawiera on zbiory będące w pewnym sensie *blisko*, to znaczy zbiory, które mają niepuste przecięcia ze wszystkimi innymi elementami ultrafiltru.

Twierdzenie 3.1.7. *Niech $\mathcal{G}$ będzie filtrem na zbiorze D. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathcal{G}$ jest ultrafiltrem.

(2) Jeśli $A \subset D$ i dla każdego B należącego do $\mathcal{G}$ przecięcie $A \cap B$ jest niepuste, to A należy do $\mathcal{G}$.

Dowód. (1)⇒(2)
Niech $\mathcal{C} = \{ A \cap B : B \in \mathcal{G} \}$. Rodzina $\mathcal{C}$ jest scentrowana i z twierdzenia 3.1.6 jest zawarta w pewnym ultrafiltrze $\mathcal{G}'$. Wiadomo, że $A \in \mathcal{G}'$, ponieważ $\mathcal{G}'$ jest ultrafiltrem, $A \cap B \in \mathcal{G}'$ i $A \cap B \subseteq A$. Wystarczy pokazać, że $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$. Zatem niech $B \in \mathcal{G}$. Znów zachodzi $A \cap B \in \mathcal{G}'$ i $A \cap B \subseteq B$, więc $B \in \mathcal{G}'$. Z tego, że $\mathcal{G}$ jest ultrafiltrem i z wniosku 3.1.4 wynika, że $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$, a z równości wynika, że również $A \in \mathcal{G}$.

(2)⇒(1)
Załóżmy nie wprost, że $\mathcal{G}$ nie jest ultrafiltrem. Wynika stąd, że istnieje ultrafiltr $\mathcal{F}$, taki że $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, gdzie zawieranie jest silne. To znaczy, że istnieje pewien zbiór $B \in \mathcal{F}$, taki że $B \notin \mathcal{G}$. Skoro $B \in \mathcal{F}$, to z własności 2. definicji 3.1.1 wynika, że B ma niepuste przecięcie z dowolnym innym zbiorem należącym do $\mathcal{F}$, czyli także z każdym należącym do $\mathcal{G}$. Stąd jednak wynika, że $B \in \mathcal{G}$, co oznacza sprzeczność. □

Powyższe twierdzenie będzie wykorzystane w dowodzie kolejnego, potrzebnego do dowodu głównej tezy.

Twierdzenie 3.1.8. *Niech $\mathcal{G}$ będzie ultrafiltrem. Jeśli $A \cup B \in \mathcal{G}$, to $A \in \mathcal{G}$ lub $B \in \mathcal{G}$.*

Dowód. Przypuszczając, że ani A, ani B nie należą do $\mathcal{G}$, można skorzystać z twierdzenia 3.1.7 Dokładniej, na podstawie tego twierdzenia wiadomo, że istnieją takie A_1, B_1 należące do $\mathcal{G}$, że $A \cap A_1 = \varnothing$ oraz $B \cap B_1 = \varnothing$. $\mathcal{G}$ jest ultrafiltrem, zatem $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{G}$. Teraz, z tego że: $(A_1 \cap B_1) \cap (A \cup B) = (A_1 \cap B_1 \cap A) \cup (A_1 \cap B_1 \cap B) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, wynika że $A \cup B \notin \mathcal{G}$, co daje sprzeczność z założeniem. □

Teraz można przejść do formalnego sformułowania wymienionego wyżej twierdzenia.

Twierdzenie 3.1.9. *Niech D będzie dowolnym zbiorem. Niepusta rodzina $\mathcal{G}$ jest ultrafiltrem na zbiorze D wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:*

1. $\varnothing \notin \mathcal{G}$
2. *Jeśli A, $B \in \mathcal{G}$ to $A \cap B \in \mathcal{G}$*
3. *Dla każdego zbioru A zawartego w D albo $A \in \mathcal{G}$ albo $D \setminus A \in \mathcal{G}$.*

Dowód. Warunki 1. i 2. wynikają z definicji ultrafiltru.
Jeśli $\mathcal{G}$ jest ultrafiltrem, to $D \in \mathcal{G}$ i dla dowolnego zbioru A zawartego w D zachodzi $D = A \cup (D \setminus A)$ oraz $A \cap (D \setminus A) = \varnothing$. Zatem, z twierdzenia 3.1.8 oraz warunków 1. i 2. definicji filtru wynika, że albo $A \in \mathcal{G}$ albo $D \setminus A \in \mathcal{G}$.

Z drugiej strony, niech $A \in \mathcal{G}$, $A \subset B$ i $B \notin \mathcal{G}$. Z założenia warunku 3. wynika, że $(D \setminus B) \in \mathcal{G}$. Ale wtedy z warunku 2. wynika, że $(D \setminus B) \cap A \in \mathcal{G}$, a to daje sprzeczność z warunkiem 1. ponieważ $A \subset B$ i stąd $(D \setminus B) \cap A = \varnothing$. Zatem $\mathcal{G}$ jest filtrem. Wystarczy pokazać jego maksymalność. Niech $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$. Wtedy istnieje pewien zbiór A, który należy do $\mathcal{G}'$, ale nie należy do $\mathcal{G}$. Z założonego warunku 3. wynika, że $(D \setminus A)$ należy do $\mathcal{G}$. Ale wtedy też $(D \setminus A)$ należy do $\mathcal{G}'$, a $(D \setminus A) \cap A = \varnothing$, co daje sprzeczność. Zatem $\mathcal{G}$ nie może być podzbiorem właściwym innego filtru, jest więc filtrem maksymalnym. □

Na koniec rozdziału zdefiniowane zostaną *ultrafiltry wolne*. Przed tym jednak, podana zostanie własność ultrafiltrów głównych, wynikająca między innymi z twierdzenia 3.1.8.

Wniosek 3.1.10. *Jeśli ultrafiltr $\mathcal{U}$ zawiera pewien skończony zbiór F, to jest ultrafiltrem głównym.*

Dowód. Niech $F \in \mathcal{U}$ będzie skończonym zbiorem. Zbiór F można przedstawić jako sumę dwóch rozłącznych zbiorów $F_1 = \{a_1\}$ oraz F_2, gdzie a_1 jest dowolnie wybranym elementem z F. Z twierdzenia 3.1.8 wynika, że $F_1 \in \mathcal{U}$ lub $F_2 \in \mathcal{U}$. Z tego, że są to zbiory rozłączne wynika, że do $\mathcal{U}$ należy tylko jeden z nich. Jeśli $F_1 \in \mathcal{U}$, to $\mathcal{U} = \mathcal{F}(a_1)$ ($\mathcal{U}$ jest ultrafilterm głównym generowanym przez element a_1). Jeśli $F_2 \in \mathcal{U}$, to także zbiór F_2 można przedstawić jako sumę dwóch rozłącznych zbiorów, gdzie do jednego należy wyłącznie wybrany singleton. Dzięki skończoności zbioru F, procedurę można powtórzyć do momentu w którym znajdziemy zbiór $\{a_i\} \in \mathcal{U}$ (czyli $\mathcal{U} = \mathcal{F}(a_i)$). □

Definicja 3.1.11. *Ultrafiltrem wolnym nazywamy każdy ultrafiltr, który nie jest ultrafiltrem głównym.*

Warto zauważyć, że aby udowodnić istnienie ultrafiltrów wolnych potrzebne jest zaakceptowanie pewnika wyboru. Ultrafiltry te mogą być lepiej zrozumiane dzięki poniższemu twierdzeniu.

Twierdzenie 3.1.12. *Ultrafiltr $\mathcal{G}$ jest ultrafiltrem wolnym wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera filtr Frécheta $\mathcal{F}$.*

Dowód. Niech $\mathcal{G}$ będzie ultrafiltrem wolnym. Załóżmy nie wprost, że filtr Frécheta nie jest zawarty w $\mathcal{G}$. Wynika stąd, że istnieje pewien zbiór A, taki że $|D \setminus A| < \aleph_0$ i $A \notin \mathcal{G}$. Ale z twierdzenia 3.1.9 wynika, że w takim razie $D \setminus A \in \mathcal{G}$, a to z wniosku 3.1.10 oznacza sprzeczność.

Z drugiej strony, niech ultrafiltr $\mathcal{G}$ zawiera filtr Frécheta. Gdyby $\mathcal{G}$ był ultrafiltrem głównym, to istniałby element $a \in D$, taki że $\mathcal{G} = \{ A \subseteq D : a \in A \}$, czyli $\{a\} \in \mathcal{G}$. To oznacza, że $D \setminus \{a\} \notin \mathcal{G}$, a to daje sprzeczność z zawieraniem filtru Frécheta, bo dopełnienie zbioru $D \setminus \{a\}$ jest skończone. □

3.2 Topologia w zbiorze wszystkich ultrafiltrów na zbiorze D

W tym rozdziale, zamiast dowolnego zbioru, rozważania będą dotyczyć dyskretnej przestrzeni topologicznej D. Okaże się, że w zbiorze wszystkich ultrafiltrów na zbiorze D można wprowadzić pewną ciekawą topologię.

Definicja 3.2.1. *Niech D będzie dyskretną przestrzenią topologiczną. Obowiązywać będą następujące oznaczenia:*

1. $\beta D = \{\ p : p$ *jest ultrafiltrem na* $D\ \}$.
2. *Dla* $A \subseteq D$ *oznaczany będzie zbiór* $\widehat{A} = \{\ p \in \beta D : A \in p\ \}$.

Notacja βD stanie się jasna w następnym rozdziale. Od tej pory ultrafiltry oznaczane będą małymi literami, ponieważ dobrze będzie o nich myśleć jak o punktach w przestrzeni topologicznej. Okaże się bowiem, że zbiory typu $\widehat{A}$ tworzą bazę pewnej topologii na βD. Od teraz również ultrafiltry główne odpowiadające elementowi $a \in D$ będą oznaczane jako $\beta(a)$.

Definicja 3.2.2. *Bazą przestrzeni topologicznej X nazywamy rodzinę zbiorów otwartych $\mathcal{B}$, jeśli dowolny, niepusty zbiór otwarty w X można przedstawić jako sumę pewnej liczby zbiorów z $\mathcal{B}$.*

Uwaga 3.2.3. *$\mathcal{B}$ jest bazą, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia poniższe warunki:*

1. *Dla każdego $x \in X$ istnieje $U \in \mathcal{B}$ takie, że $x \in U$.*
2. *Dla dowolnych $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ oraz punktu $x \in U_1 \cap U_2$ istnieje $U_3 \in \mathcal{B}$, takie że $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$*

Twierdzenie 3.2.4. *Zbiór $\mathcal{B} = \{\ \widehat{A} \subseteq \beta D : A \subseteq D\ \}$ jest bazą pewnej topologii.*

Dowód. Dowolny punkt p przestrzeni βD należy do co najmniej jednego zbioru z $\mathcal{B}$, ponieważ $\widehat{D} = \beta D$. Pierwszy warunek z uwagi 3.2.3 jest więc spełniony. Spełnianie drugiego warunku wynika z tego, że dla dowolnych zbiorów $\widehat{A_1}$, $\widehat{A_2}$ należących do $\mathcal{B}$ zachodzi $\widehat{A_1} \cap \widehat{A_2} = \widehat{A_1 \cap A_2}$. W istocie:

$$p \in \widehat{A_1} \cap \widehat{A_2} \Leftrightarrow p \in \widehat{A_1} \text{ i } p \in \widehat{A_2} \Leftrightarrow A_1 \in p \text{ oraz } A_2 \in p \Leftrightarrow A_1 \cap A_2 \in p \Leftrightarrow p \in \widehat{A_1 \cap A_2}$$

□

Podobnym sposobem łatwo można wykazać inne przydatne własności.

Twierdzenie 3.2.5. *Dla zbiorów postaci $\widehat{A} = \{\ p \in \beta D : A \in p\ \}$ zachodzi:*

1. $\widehat{D \backslash A} = \beta D \backslash \widehat{A}$
2. $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$

. *Dowód.*

1. Korzystając z punktu 3. twierdzenia 3.1.9:

$$p \in \widehat{D \backslash A} \Leftrightarrow D \backslash A \in p \Leftrightarrow A \notin p \Leftrightarrow p \notin \widehat{A} \Leftrightarrow p \in \beta D \backslash \widehat{A}$$

2. Korzystając z twierdzenia 3.1.8:

$$p \in \widehat{A \cup B} \Leftrightarrow A \cup B \in p \Leftrightarrow A \in p \text{ lub } B \in p \Leftrightarrow p \in \widehat{A} \text{ lub } p \in \widehat{B} \Leftrightarrow p \in \widehat{A} \cup \widehat{B}.$$

□

Poniższe twierdzenie przedstawia pewne podstawowe własności topologiczne przestrzeni βD, które okażą się niezbędne do zrozumienia ostatniego rozdziału.

Twierdzenie 3.2.6. *Niech D będzie dowolnym zbiorem. Zachodzą następujące własności:*

(a) Przestrzeń topologiczna βD jest zwartą przestrzenią Hausdorffa.

(b) Zbiory $\widehat{A}$ są jedynymi zbiorami otwarto-domkniętymi w βD.

(c) Odwzorowanie $\beta : D \longrightarrow \beta D$ przyporządkowujące elementowi $a \in D$ ultrafiltr główny $\beta(a)$ jest iniektywne, a $\beta[D]$ jest gęstym podzbiorem βD. Punkty należące do $\beta[D]$ są jedynymi punktami izolowanymi w βD.

(d) Dla każdego zbioru $A \subseteq D$, $\widehat{A} = cl_{\beta D}\beta[A]$ (to znaczy $\widehat{A}$ jest domknięciem zbioru $\beta[A]$ w sensie topologii na βD).

(e) Jeśli U jest zbiorem otwartym w βD, to jego domknięcie $cl_{\beta D}U$ również jest zbiorem otwartym.

Dowód.

. (a) Ustalmy dwa dowolne, różne punkty $p, q \in \beta D$. Skoro $p \neq q$, to istnieje pewien zbiór A, taki że $A \in p$ oraz $A \notin q$. Z podpunktu 3. twierdzenia 3.1.9 wynika, że $D \backslash A \in q$. Zatem $p \in \widehat{A}$, a $q \in \widehat{D \backslash A}$. Stąd, że $\widehat{D \backslash A} = \beta D \backslash \widehat{A}$ wynika, że zbiory $\widehat{A}$ i $\widehat{D \backslash A}$ są szukanymi rozłącznymi zbiorami otwartymi.

Do wykazania zostało, że przestrzeń βD jest przestrzenią zwartą. Niech $\mathcal{B}$ będzie dowolnym pokryciem zbiorami bazowymi przestrzeni βD oraz niech

$$\mathcal{A} \;=\; \{A \subseteq D : \; \widehat{A} \in \mathcal{B}\}.$$

Jeśli istnieją $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$, takie że $A_1 \cup ... \cup A_n = D$, to $\beta D = \widehat{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \widehat{A_i}$ i zbiory $\widehat{A_1}, ..., \widehat{A_n} \in \mathcal{B}$ tworzą podpokrycie skończone. Ustalmy $\mathcal{C} = \{C \subseteq D : C = D \backslash A, \text{ gdzie } A \in \mathcal{A}\}$ i załóżmy nie wprost, że dla dowolnych $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ zachodzi $A_1 \cup ... \cup A_n \neq D$. Z powyższego założenia wynika, że $D \backslash (A_1 \cup ... \cup A_n) = (D \backslash A_1) \cap ... \cap (D \backslash A_n) \neq \varnothing$. Skoro tak, to rodzina $\mathcal{C}$

jest scentrowana. Na mocy twierdzenia 3.1.6, rodzina $\mathcal{C}$ jest zawarta w pewnym ultrafiltrze $\mathcal{G}$ na D. Z definicji pokrycia musi istnieć pewne $\widehat{A} \in \mathcal{B}$, takie że $\mathcal{G} \in \widehat{A}$. Ale $\mathcal{G}$ należy do $\widehat{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \mathcal{G}$, a to jest na podstawie twierdzenia 3.1.9 niemożliwe, ponieważ $D \backslash A$ należy do $\mathcal{G}$. Zatem z dowolnego pokrycia $\mathcal{B}$ zbiorami bazowymi można wybrać zbiory $\widehat{A_1}, ..., \widehat{A_n}$, które tworzą podpokrycie skończone.

(b) Zbiory $\widehat{A} = \{p \in \beta D : A \in p\}$ są zbiorami otwartymi, ponieważ stanowią bazę topologii, a domkniętymi dlatego, że $\beta D \backslash \widehat{A} = \widehat{D \backslash A}$. Niech U będzie dowolnym zbiorem otwarto-domkniętym. Ponieważ U jest otwarty, istnieje rodzina zbiorów bazowych $\mathcal{B}$, taka że $U = \bigcup \mathcal{B}$. Ponieważ U jest także zbiorem domkniętym, jest zwarty, zatem z $\mathcal{B}$ można wybrać zbiory $\widehat{A_1}, ..., \widehat{A_n}$, takie że $U = \bigcup_{i=1}^{n} \widehat{A} = \widehat{\bigcup_{i=1}^{n} A}$.

(c) Niech $a \in D$. Z definicji ultrafiltru głównego wiadomo, że $D \backslash \{a\}$ nie należy do $\beta(a)$. Jeśli element $b \in D$ jest różny od a, to $D \backslash \{a\}$ należy do $\beta(b)$, ponieważ b należy do $D \backslash \{a\}$. Zatem $\beta(a) \neq \beta(b)$.

Niech $\widehat{A} = \{p \in \beta D : A \in p\}$ będzie dowolnym, niepustym zbiorem bazowym. Zbiór A także jest niepusty oraz jeśli a jest elementem A to $\{a\} \subseteq A$. Dlatego $A \in \beta(a)$. Stąd wynika, że $\beta(a)$ należy do $\widehat{A}$. Z dowolności zbioru bazowego wynika, że dla każdego zbioru otwartego U w βD istnieje element $\beta(a)$ zbioru $\beta[D]$, taki że $\beta(a)$ należy do U. Stąd $\beta[D]$ jest gęsty w βD.

By wykazać, że elementy $\beta[D]$ są jedynymi punktami izolowanymi zauważmy, że dla każdego $a \in D$ zbiór $\widehat{\{a\}}$ jest zbiorem otwartym zawierającym jeden element którym jest $\beta(a)$. Z drugiej strony, jeśli q jest punktem izolowanym, to musi istnieć takie jego otoczenie, w którym jest punktem jedynym. Taki zbiór musi być postaci $\widehat{A} = \{p \in \beta D : A \in p\}$. Jeśli $|A| \geqslant 2$, to istnieją elementy $a, b \in A$, takie że $a \neq b$. To znaczy, że $\beta(a)$ oraz $\beta(b)$ należą do $\widehat{A}$. Wynika stąd, że $|A| = 1$, czyli $p \in \beta[D]$.

(d) Zawieranie w jedną stronę jest oczywiste, ponieważ dla każdego $a \in A$ zachodzi $\beta(a) \in \widehat{A}$, a stąd wynika, że $cl_{\beta D}\beta[A] \subseteq \widehat{A}$. Z drugiej strony, niech $p \in \widehat{A}$ i niech $\widehat{B}$ będzie dowolnym otoczeniem bazowym ultrafiltru p. Z tego, że $p \in \widehat{A}$ oraz $p \in \widehat{B}$ wynika, że $A, B \in p$, czyli $A \cap B \neq \varnothing$. Niech $a \in A \cap B$. To oznacza, że $\beta(a) \in \beta[A] \cap \widehat{B}$, czyli $\beta[A] \cap \widehat{B} \neq \varnothing$. Dlatego ultrafiltr p należy do $cl_{\beta D}\beta[A]$, czyli $\widehat{A} \subseteq cl_{\beta D}\beta[A]$.

(e) Jeśli zbiór U jest pusty, to $cl_{\beta D}U = \varnothing$. Niech więc $U \neq \varnothing$ oraz niech $A = \beta^{-1}[U]$. Następnie niech $p \in U$ i niech $\widehat{B}$ będzie dowolnym otoczeniem punktu p. Wynika z tego, że $U \cap \widehat{B} \neq \varnothing$ oraz wiadomo, że $U \cap \widehat{B}$ jest zbiorem otwartym. Dzięki temu, że $\beta[D]$ jest zbiorem gęstym w βD, zachodzi $U \cap \widehat{B} \cap \beta[D] \neq \varnothing$. Niech b będzie takim elementem D, że $\beta(b) \in U$. Przez to jak zdefiniowany został zbiór A oraz przez to, że $b \in B$ wiadomo, że $\beta(b) \in \widehat{B} \cap \beta[A]$, czyli $\widehat{B} \cap \beta[A] \neq \varnothing$. Z dowolności $\widehat{B}$ wynika, że $p \in cl_{\beta D}\beta[A]$, a z dowolności wyboru p wiemy, że $U \subseteq cl_{\beta D}\beta[A]$. Z definicji zbioru A wynika, że $\beta[A] \subseteq U$, co z kolei implikuje, że $cl_{\beta D}\beta[A] \subseteq cl_{\beta D}U$. Zachodzi:

$$U \subseteq cl_{\beta D}\beta[A] \subseteq cl_{\beta D}U \Rightarrow cl_{\beta D}U \subseteq cl_{\beta D}\beta[A] \subseteq cl_{\beta D}U.$$

Z tego i z podpunktu *(d)* wynika, że $cl_{\beta D}U = cl_{\beta D}\beta[A] = \widehat{A}$, a zbiór $\widehat{A}$ jest otwarty.

□

W późniejszym rozdziale przydatne będzie dokładne opisanie, jak w omawianej topologii wyglądają zbiory domknięte. W tym celu wprowadzona zostanie jeszcze jedna definicja:

Definicja 3.2.7. *Niech $\mathcal{F}$ będzie filtrem na zbiorze D. Definiujemy $\widehat{\mathcal{F}} = \{p \in \beta D : \mathcal{F} \subseteq p\}$.*

Twierdzenie 3.2.8. *Niech D będzie zbiorem. Zachodzą poniższe własności:*

1. *Jeśli $\mathcal{F}$ jest filtrem na D, to $\widehat{\mathcal{F}}$ jest zbiorem domkniętym w βD.*

2. *Jeśli F jest niepustym podzbiorem βD to $\bigcap F$ (to znaczy część wspólna wszystkich ultrafiltrów należących do F) jest filtrem na D, a $\widehat{\bigcap F}$ jest domknięciem zbioru F.*

Dowód.

. 1. Niech q będzie dowolnym ultrafiltrem w zbiorze $\beta D \backslash \widehat{\mathcal{F}}$. Zbiór $\mathcal{F}\backslash q$ jest niepusty, ponieważ w przeciwnym przypadku $\mathcal{F}$ zawierałby się w q, co oznaczałoby, że q należy do $\widehat{\mathcal{F}}$. Niech zatem $B \in \mathcal{F}\backslash p$ i rozważmy zbiór $\widehat{D\backslash B}$.

   Zbiór $B \in \mathcal{F}$ nie należy do ultrafiltrów z $\widehat{D\backslash B}$, co oznacza, że sam filtr $\mathcal{F}$ również się w nich nie zawiera. Dlatego $\widehat{D\backslash B}$ jest rozłączny z $\widehat{\mathcal{F}}$. Skoro $B \notin q$, to na podstawie twierdzenia 3.2.5 zachodzi ciąg równoważności:

$$q \notin \widehat{B} \Leftrightarrow q \in \beta D \backslash \widehat{B} \Leftrightarrow q \in \widehat{D\backslash B}.$$

   Dlatego $\widehat{D\backslash B}$ jest również otoczeniem punktu q. Z dowolności q wynika, że $\beta D\backslash\widehat{\mathcal{F}}$ jest zbiorem otwartym, co oznacza, że $\widehat{\mathcal{F}}$ jest zbiorem domkniętym w βD.

2. Stąd, że $\bigcap F$ jest przecięciem zbioru ultrafiltrów wynikają następujące fakty:

   (a) Zbiór pusty nie należy do $\bigcap F$, ponieważ nie należy do żadnego z elementów F.

   (b) Jeśli A, B należą do $\bigcap F$ to należą do każdego ultrafiltru należącego do F. Z definicji ultrafiltru, do każdego z nich należy również $A \cap B$ i dlatego $A \cap B \in \bigcap F$.

   (c) Jeśli A należy do $\bigcap F$ to należy również do każdego ultrafiltru w F. Stąd dowolny nadzbiór B zbioru A również należy do wszystkich ultrafiltrów w F, a stąd również do $\bigcap F$.

Dlatego $\bigcap F$ jest filtrem.

Dla dowodu równości $\widehat{\bigcap F} = clF$ udowodnione zostanie zawieranie w dwie strony. Ponieważ dla wszystkich $q \in F$ zachodzi $\bigcap F = \bigcap_{p \in F} p \subseteq q$, to $F \subseteq \widehat{\bigcap F}$. Z poprzedniego podpunktu tego twierdzenia wiadomo, że $\widehat{\bigcap F}$ jest zbiorem domkniętym, więc również $clF \subseteq \widehat{\bigcap F}$. W drugą stronę, niech $p \in \widehat{\bigcap F}$. Jeśli dla dowolnego $A \in p$ zbiór $\widehat{A} \cap F$ jest niepusty, to p należy do clF. Niech zatem $A \in p$ oraz załóżmy nie wprost, że $\widehat{A} \cap F = \varnothing$. Zachodzi ciąg implikacji:

$$\widehat{A} \cap F = \varnothing \Longrightarrow \forall_{q \in F}\ A \notin q \Longrightarrow \forall_{q \in F}\ D \backslash A \in q \Longrightarrow D \backslash A \in \bigcap F.$$

Wiadomo, że $p \in \widehat{\bigcap F}$, więc $\bigcap F \subseteq p$, czyli $D \backslash A \in p$ co daje sprzeczność, ponieważ $A \in p$.

□

3.3 βD

Dla przypomnienia, z twierdzenia 3.2.6 wiadomo, że odwzorowanie $\beta : D \longrightarrow \beta D$ przyporządkowujące elementowi $a \in D$ ultrafiltr główny $\beta(a)$ jest iniektywne, a $\beta[D]$ jest gęstym podzbiorem βD. Okaże się, że dla dyskretnej przestrzeni D para $(\beta, \beta D)$, jest uzwarceniem Čecha-Stone'a. Przed dowodem tego stwierdzenia, przypomniana zostanie formalna definicja wspomnianego uzwarcenia:

Definicja 3.3.1. *Uzwarceniem Čecha-Stone'a danej przestrzeni topologicznej X nazywamy parę (h,Z), która spełnia następujące warunki:*

1. *Z jest przestrzenią zwartą,*
2. *Odwzorowanie h jest homeomorficznym zanurzeniem X w Z,*
3. *h[X] jest gęstym podzbiorem Z,*
4. *dla każdej przestrzeni zwartej Y i ciągłego odwzorowania $f : X \to Y$ istnieje ciągłe odwzorowanie $g : Z \to Y$ spełniające $g \circ h = f$.*

Twierdzenie 3.3.2. *Niech D będzie dyskretną przestrzenią topologiczną. Wtedy $(\beta, \beta D)$ jest uzwarceniem Čecha-Stone'a przestrzeni D.*

Dowód. Warunki *1.* i *3.* z definicji 3.3.1 wynikają z twierdzenia 3.2.6

Również z twierdzenia 3.2.6 wynika to, że odwzorowanie $\beta : D \longrightarrow \beta D$ jest iniektywne. Jest także suriektywne na swój obraz, którym jest zbiór ultrafiltrów głównych. Ciągłość β wynika z tego, że przestrzeń D jest przestrzenią dyskretną. Zbiór ultrafiltrów głównych z topologią indukowaną będzie stanowił dyskretną podprzestrzeń przestrzeni βD, skąd wynika ciągłość β^{-1}. Zatem β homeomorficznie przekształca D na podprzestrzeń ultrafiltrów głównych.

Do wykazania został warunek *4.* Niech Y będzie przestrzenią zwartą i niech $f : D \to Y$ będzie ciągłe. Dla każdego $p \in \beta D$ definiujemy rodzinę $\mathcal{A}_p = \{cl_Y f[A] : A \in p\}$. Dla każdego ultrafiltru $p \in \beta D$ rodzina $\mathscr{A}_p$ jest rodziną scentrowaną. Wynika to z prostego ciągu zależności - dla dowolnych $A', B' \in \mathscr{A}_p$, takich że $A' = cl_Y f[A]$ i $B' = cl_Y f[B]$, gdzie $A, B \in D$ zachodzi:

$$f[A] \subseteq cl_Y f[A] \text{ oraz } f[B] \subseteq cl_Y f[B], \text{ zatem } f[A] \cap f[B] \subseteq cl_Y f[A] \cap cl_Y f[B].$$

Ponieważ $A, B \in p$ i z własności ultrafiltrów $A \cap B \neq \varnothing$, to istnieje pewien element a, taki że $a \in A$ oraz $a \in B$. Niech $y = f(a)$. Element y należy do $f[A]$ oraz do $f[B]$, czyli $y \in f[A] \cap f[B]$, a stąd $y \in cl_Y f[A] \cap cl_Y f[B]$.

Wiadomo także, że dla dowolnej rodziny scentrowanej $\mathscr{R}$ w przestrzeni zwartej zachodzi $\bigcap \mathscr{R} \neq \varnothing$, ponieważ gdyby $\bigcap \mathscr{R} = \varnothing$ to wybierając z pokrycia $\{X \backslash R : R \in \mathscr{R}\}$ podpokrycie skończone $X \backslash R_1, ..., X \backslash R_n$ zachodzi:

$$X = (X \backslash R_1) \cup ... \cup (X \backslash R_n) = X \backslash (R_1 \cap ... \cap R_n),$$

a stąd wynika, że $R_1 \cap ... \cap R_n = \varnothing$, co daje sprzeczność ze scentrowaniem.

Dlatego dla dowolnego $p \in \beta D$ zachodzi $\bigcap \mathscr{A}_p \neq \varnothing$ (to znaczy, dla ustalonego $p \in \beta D$ zapis $\bigcap \mathscr{A}_p$ oznacza $\bigcap_{A \in p} cl_Y f[A]$). Niech $g(p) \in \bigcap \mathscr{A}_p$, gdzie $g : \beta D \to Y$. Trzeba wykazać, że $g \circ \beta = f$ oraz że odwzorowanie g jest ciągłe. Zatem niech $a \in D$. Z definicji ultrafiltru głównego wiadomo, że $\{a\} \in \beta(a)$. Złożenie odwzorowań $g \circ \beta$ jest równe odwzorowaniu f, ponieważ zachodzi:

$$g(\beta(a)) \in cl_Y f[\{a\}] = cl_Y[\{f(a)\}] = \{f(a)\}.$$

By dowieść ciągłości odwzorowania g, wykorzystany będzie następujący warunek: *odwzorowanie $g : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $x \in X$ i dowolnego otwartego otoczenia U_Y punktu $g(x)$ istnieje otwarte otoczenie U_X punktu x, takie że $g(U_X)$ zawiera się w U_Y.* Innymi słowy, obraz pewnego otoczenia x zawiera się w U_Y.

Zatem niech $p \in \beta D$ oraz niech U_Y będzie otwartym otoczeniem $g(p)$ w Y. Przestrzeń Y jest regularna, więc można wybrać otwarte otoczenie V_Y punktu $g(p)$, takie że $clV_Y \subseteq U_Y$. Niech $A = f^{-1}[V_Y] \in D$. Celem będzie pokazanie, że $\widehat{A}$ jest szukanym otoczeniem $U_{\beta D}$, takim że $g[U_{\beta D}] \subseteq U_Y$. Jako pierwsze trzeba wykazać, że $A \in p$, bo wtedy $p \in \widehat{A}$. Niech więc $A \notin p$, czyli $D \backslash A \in p$. Wynika z tego, że $p \in \widehat{D \backslash A}$, a co za tym idzie, $g(p) \in cl_Y f[D \backslash A]$. Z tego oraz z tego, że V_Y jest otoczeniem $g(p)$ wynika, że $V_Y \cap f[D \backslash A] \neq \varnothing$, a to jest sprzeczne z założeniem, że $A = f^{-1}[V_Y]$. Do wykazania zostało, że $g[\widehat{A}] \subseteq U_Y$. Załóżmy więc nie wprost, że $q \in \widehat{A}$, ale $g(q) \notin U_Y$. Wynika stąd, że $Y \backslash cl_Y[V_Y]$ jest otoczeniem $g(q)$. Wiadomo także, że $g(q) \in cl_Y f[A]$, więc $Y \backslash cl_Y[V_Y] \cap f[A] \neq \varnothing$, a to ponownie jest sprzeczne z tym, że $A = f^{-1}[V_Y]$. $\square$

Zatem dla dowolnej przestrzeni dyskretnej D opisana para $(\beta, \beta D)$ jest jest uzwarceniem Čecha-Stone'a. Gdy mamy do czynienia z przestrzeniami całkowicie regularnymi (Tichonowa), standardowym oznaczeniem uzwarcenia Čecha-Stone'a jest symbol βD, co wyjaśnia notację z poprzednich podrozdziałów. Samą przestrzeń D dobrze jest utożsamiać z jej obrazem $\beta[D]$ w przestrzeni βD.

4 Przestrzenie $\beta\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}^*$

4.1 Wstęp

Zanim przejdziemy do faktycznego tematu rozdziału czwartego, konieczne będzie przytoczenie kilku powszechnie znanych wyników topologii ogólnej oraz jednego faktu związanego z pojęciem uzwarcenia Čecha-Stone'a dowolnej przestrzeni.

Twierdzenie 4.1.1. *Każda nieskończona przestrzeń Hausdorffa zawiera nieskończoną podprzestrzeń dyskretną.*

Dowód. Niech X będzie dowolną nieskończoną przestrzenią Hausdorffa. W dalszej części dowodu pokażemy, że indukcyjnie można wybrać niepuste, otwarte zbiory $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$, takie że $X \setminus \bigcup_{i=0}^{n} cl_X U_i$ jest nieskończone oraz $U_{n+1} \subseteq X \setminus \bigcup_{i=0}^{n} cl_X U_i$. Wtedy wybierając $x_i \in U_i$ otrzymamy dyskretną, nieskończoną podprzestrzeń.

Zauważmy, że wystarczy pokazać, że istnieje jeden niepusty zbiór otwarty U, taki że $X \setminus cl_X U$ jest nieskończone, ponieważ następnie możemy rozważać podprzestrzeń $Y = X \setminus cl_X U$. W istocie, jeśli V jest otwarty w Y, to dzięki otwartości Y, V jest otwarty również w X. Jeśli $Y \setminus cl_Y V$ jest nieskończone oraz wiadomo, że $cl_Y V = cl_X V \cap Y$, to $X \setminus (cl_X U \cup cl_X V)$ także jest nieskończone.

Załóżmy nie wprost, że opisany wyżej zbiór U nie istnieje. Dzięki założeniu, że przestrzeń jest Hausdorffa, możemy wybrać pewien niepusty, otwarty zbiór $U \subset X$, taki że $cl_X U \neq X$. Wynika z tego, że podprzestrzeń $X \setminus cl_X U$ jest skończona, wiadomo także, że jest T_1, więc jest dyskretna. Wybierzmy dowolny $x \in X \setminus cl_X U$. Skoro $X \setminus cl_X U$ jest dyskretna, to $\{x\}$ jest otwarty, a skoro $X \setminus cl_X U$ jest otwarta w X, to $\{x\}$ również jest otwarty w przestrzeni X. Przestrzeń X jest T_1, zatem $\{x\}$ jest także domknięty, a stąd wynika, że $X \setminus \{x\}$ jest nieskończony, co oznacza sprzeczność. □

Następujące definicje i twierdzenia łączy pojęcie parazwartości:

Definicja 4.1.2. *Przestrzeń topologiczna X jest parazwarta jeśli jest przestrzenią Hausdorffa oraz w każde jej pokrycie otwarte można wpisać podpokrycie lokalnie skończone, to znaczy takie, że dla dowolnego punktu $x \in X$ istnieje otwarte otoczenie U_x które ma niepuste przecięcie ze skończoną liczbą elementów tego pokrycia.*

Definicja 4.1.3. *Przestrzeń topologiczna X jest przestrzenią Lindelöfa jeśli z każdego jej pokrycia można wybrać podpokrycie przeliczalne.*

Twierdzenie 4.1.4. *Regularna przestrzeń Lindelöfa jest parazwarta.*

Dowód. Dowód tego faktu można znaleźć w [3, str. 225]. □

Twierdzenie 4.1.5 (Dieudonnego)**.** *Każda parazwarta przestrzeń Hausdorffa jest normalna.*

Dowód. Dowód tego faktu można znaleźć w [3, str. 347]. □

Ostatnie dwa twierdzenia korzystają z definicji C-zanurzalności.

Definicja 4.1.6. *Niech $C(X)$ oznacza pierścień wszystkich funkcji ciągłych, o wartościach rzeczywistych określonych na przestrzeni topologicznej X, a $C^*(X) \subset C(X)$ będzie podpierścieniem funkcji ograniczonych. Mówimy, że podprzestrzeń $S \subset X$ jest C-zanurzalna (odpowiednio C^*-zanurzalna) w X, jeśli każdą funkcję $f \in C(S)$ (odpowiednio $f \in C^*(S)$) można rozszerzyć do funkcji $g \in C(X)$ (odpowiednio $g \in C^*(S)$).*

Kolejne twierdzenie traktuje o tym, że każda domknięta podprzestrzeń przestrzeni normalnej jest w niej C-zanurzalna oraz C^*-zanurzalna.

Twierdzenie 4.1.7 (Tietzego)**.** *Każdą funkcję ciągłą o wartościach rzeczywistych, która jest określona na domkniętej podprzestrzeni przestrzeni normalnej można przedłużyć do funkcji ciągłej określonej na całej przestrzeni (jeżeli funkcja ta jest ponadto ograniczona, to można znaleźć rozszerzenie ograniczone).*

Dowód. Dowód tego faktu można znaleźć w [4, str. 103]. □

Ostatnie twierdzenie związane jest z pojęciem uzwarcenia Čecha-Stone'a i będzie regularnie wykorzystywane w późniejszych dowodach.

Twierdzenie 4.1.8. *Podprzestrzeń $S \subset X$ jest C^*-zanurzalna w X wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta S = cl_{\beta X} S$.*

Dowód. Dowód tego faktu można znaleźć w [1, str. 49] w przykładzie 1.48. □

4.2 Definicja $\mathbb{N}^*$ i niektóre własności $\beta\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}^*$

Uzwarcenie Čecha-Stone'a dyskretnej przestrzeni liczb naturalnych stało się swego czasu jednym z najchętniej badanych obiektów topologicznych. Wynikało to głównie z faktu, że zarówno $\beta\mathbb{N}$ jak i $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ zdają się zawierać cały ogrom interesujących podprzestrzeni i mieć wiele zaskakujących własności. Kilka z nich zostanie przedstawionych w tym podrozdziale w celu przybliżenia natury omawianych przestrzeni.

Definicja 4.2.1. *Narostem uzwarcenia Čecha-Stone'a przestrzeni $\mathbb{N}$ nazywamy przestrzeń $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, gdzie $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ rozumiemy jako $\beta\mathbb{N}$ bez $\beta[\mathbb{N}]$.*

Twierdzenie 4.2.2. *Liczność $\beta\mathbb{N}$ wynosi $2^{\mathfrak{c}}$.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia 2.3.3. zachodzi $|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}}$. □

Uwaga 4.2.3. *Znając interpretację uzwarcenia Čecha-Stone'a przedstawioną w rozdziale trzecim, można w twierdzeniu 2.3.3. udowodnić nierówność w drugą stronę. Mianowicie, w $\mathbb{N}$ jest co najwyżej $2^{2^{\aleph_0}}$ ultrafiltrów, stąd $|\beta\mathbb{N}| \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$.*

Znajomość liczności $\beta\mathbb{N}$ konieczna będzie do wykazania następującego faktu:

Twierdzenie 4.2.4. *Liczność każdego nieskończonego i domkniętego podzbioru $\beta\mathbb{N}$ wynosi $2^{\mathfrak{c}}$.*

Dowód. Niech F będzie nieskończoną, domkniętą podprzestrzenią $\beta\mathbb{N}$. Ponieważ F jest Hausdorffa, to na podstawie twierdzenia 4.1.1 zawiera przeliczalną, nieskończoną podprzestrzeń dyskretną E. Podprzestrzeń $\mathbb{N} \cup E$ jest przeliczalna więc jest Lindelöfa, jest też całkowicie regularna, więc jest regularna. Z twierdzenia 4.1.4 wynika, że regularna przestrzeń Lindelöfa jest parazwarta, a z twierdzenia 4.1.5 wynika, że jest również normalna. Zbiór E jest w $\mathbb{N} \cup E$ domknięty, ponieważ w $\mathbb{N}$ każdy punkt jest izolowany, zatem wszystkie punkty skupienia zbioru E należą do E. Skoro tak, to z twierdzenia 4.1.7 wynika, że E jest C^*-zanurzalna w $\mathbb{N} \cup E$. Zatem dowolną ciągłą, ograniczoną funkcję o wartościach rzeczywistych można rozszerzyć z E na $\mathbb{N} \cup E$, a stąd na $\beta\mathbb{N}$. Z twierdzenia 4.1.8 wynika więc, że $cl_{\beta\mathbb{N}}E = \beta E$. Podprzestrzeń F jest domknięta, więc $cl_{\beta\mathbb{N}}E \subseteq F$. Skoro E jest przeliczalnie nieskończona i dyskretna, to jest homeomorficzna z $\mathbb{N}$, a stąd βE jest homeomorficzne z $\beta\mathbb{N}$. Podprzestrzeń F zawiera zatem kopię $\beta\mathbb{N}$, a stąd $|F| = 2^{\mathfrak{c}}$. □

Dowód twierdzenia 4.2.4 zawiera w sobie dowód następującego ważnego faktu:

Wniosek 4.2.5. *Każda przeliczalna podprzestrzeń w $\beta\mathbb{N}$ jest C^*-zanurzalna.*

Zauważmy, że stąd oraz z twierdzenia 4.1.8 wynika, że domknięcie dowolnej dyskretnej, przeliczalnie nieskończonej podprzestrzeni w $\beta\mathbb{N}$ jest homeomorficzne z $\beta\mathbb{N}$.

Twierdzenie 4.2.6. *$\beta\mathbb{N}$ nie zawiera nietrywialnych ciągów zbieżnych.*

Dowód. Załóżmy, że $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ jest nietrywialnym ciągiem, zbieżnym do $p \in \beta\mathbb{N}$. Wtedy D byłoby przeliczalnie nieskończoną podprzestrzenią, której domknięcie to $D \cup \{p\}$, co jest sprzeczne z faktem, że $cl_{\beta\mathbb{N}}D = \beta D$. □

Definicja 4.2.7. *Przestrzeń topologiczna jest zerowymiarowa, jeśli ma bazę złożoną ze zbiorów otwarto-domkniętych.*

Definicja 4.2.8. *Przestrzeń jest ekstremalnie niespójna, jeśli domknięcia jej zbiorów otwartych nadal są zbiorami otwartymi.*

Twierdzenie 4.2.9. *$\beta\mathbb{N}$ jest przestrzenią ekstremalnie niespójną oraz zerowymiarową.*

Dowód. Z twierdzenia 3.2.6. podpunktu (b) wynika, że $\beta\mathbb{N}$ ma bazę złożoną ze zbiorów otwarto-domkniętych, jest więc zatem przestrzenią zerowymiarową. Z podpunktu (e) tego samego twierdzenia wynika, że domknięcie dowolnego zbioru otwartego jest zbiorem otwartym, zatem $\beta\mathbb{N}$ jest przestrzenią ekstremalnie niespójną. □

Uwaga 4.2.10. *Ponieważ każdy podzbiór $\mathbb{N}$ jest domknięty oraz C^*-zanurzalny, to z twierdzenia 4.1.8 wynika, że jeśli $A \subseteq \mathbb{N}$ jest nieskończony (oraz jak wiadomo, homeomorficzny z $\mathbb{N}$), to $cl_{\beta\mathbb{N}}A$ jest homeomorficzny z $\beta\mathbb{N}$, a $A^* = cl_{\beta\mathbb{N}}A \backslash A$ jest homeomorficzny z $\mathbb{N}^*$.*

Twierdzenie 4.2.11. *Każda podprzestrzeń w $\beta\mathbb{N}$ składająca się ze zbiorów otwarto-domkniętych jest postaci $cl_{\beta\mathbb{N}}A$ dla pewnego $A \subseteq \mathbb{N}$.*

Dowód. Niech U będzie otwarto-domknięty. Z twierdzenia 3.2.6. podpunktu (b) wynika, że U jest postaci $\widehat{A} = \{p \in \beta\mathbb{N} : A \in p\}$ dla pewnego $A \subseteq \mathbb{N}$. Z podpunktu (d) tego samego twierdzenia wynika, że $\widehat{A} = cl_{\beta\mathbb{N}}A$. □

Wniosek 4.2.12. *Każda nieskończona, otwarto-domknięta podprzestrzeń w $\beta\mathbb{N}$ jest homeomorficzna z $\beta\mathbb{N}$.*

Twierdzenie 4.2.13. *Jeśli A i B są nieskończonymi podzbiorami $\mathbb{N}$, to B^* jest zawarte w A^* wtedy i tylko wtedy, gdy $B\backslash A$ jest skończone.*

Dowód. Możemy zapisać $B = (B \cap A) \cup (B\backslash A)$. By pokazać, że warunek jest wystarczający przypuśćmy, że $B\backslash A$ jest skończony. Wtedy, jeśli zbiór $B \cap A$ jest skończony, to B jest skończony i B^* jest pusty. Niech zatem $B \cap A$ będzie nieskończony. Zachodzi:

$$B^* = cl_{\beta\mathbb{N}}B\backslash B = cl_{\beta\mathbb{N}}((B \cap A) \cup (B\backslash A))\backslash B = (cl_{\beta\mathbb{N}}(B \cap A) \cup cl_{\beta\mathbb{N}}(B\backslash A))\backslash B \subseteq (B \cap A)^* \cup (B\backslash A)^* = (B \cap A)^* \subseteq A^*.$$

By pokazać, że warunek jest konieczny, załóżmy że $B\backslash A$ jest nieskończony. Skoro $B\backslash A$ jest nieskończony i rozłączny z A, to należy do pewnego ultrafiltru wolnego p do którego A nie należy. Wtedy p należy do B^* i nie należy do A^*. □

Wniosek 4.2.14. *Jeśli A i B są nieskończonymi podzbiorami $\mathbb{N}$, to $A^* = B^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ jest skończone. B^* jest właściwym podzbiorem A^* wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $A\backslash B$ jest nieskończony oraz $B\backslash A$ jest skończony. A^* i B^* mają niepuste przecięcie wtedy, gdy przecięcie $A \cap B$ jest nieskończone.*

Twierdzenie 4.2.15. *Każda otwarto-domknięta podprzestrzeń w $\mathbb{N}^*$ jest postaci A^* dla pewnego nieskończonego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$. Zbiory postaci A^* tworzą w $\mathbb{N}^*$ bazę zarówno dla zbiorów otwartych jak i domkniętych.*

Dowód. Niech U będzie otwarto-domkniętą podprzestrzenią w $\mathbb{N}^*$. Ponieważ $\mathbb{N}^*$ jest C^*-zanurzalna w $\beta\mathbb{N}$, to funkcja charakterystyczna od U jako podprzestrzeni $\mathbb{N}^*$ jest restrykcją pewnej mapy f w $C^*(\beta\mathbb{N})$. Niech $A = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \geqslant \frac{1}{2}\}$. Wtedy U jest zawarte w A^*, a $\mathbb{N}^*\backslash U$ jest zawarte w $(\mathbb{N}\backslash A)^*$. Ponieważ $\mathbb{N}^*$ jest rozłączną sumą A^* oraz $(\mathbb{N}\backslash A)^*$, to U jest równe A^*.

Z twierdzenia 4.2.9 wynika, że $\beta\mathbb{N}$ jest zerowymiarowa, a stąd, że $\mathbb{N}^*$ również. Stąd i z pierwszej części twierdzenia wynika, że każdy otwarty zbiór w $\mathbb{N}^*$ jest sumą zbiorów postaci A^*. Niech Q będzie domknięty. Zbiór $\mathbb{N}^*\backslash Q$ jest otwarty, więc można go zapisać jako sumę $\mathbb{N}^*\backslash Q = \bigcup_{A^* \in \mathcal{A}} A^*$ dla pewnego $\mathcal{A}$. Zatem:

$$Q = \mathbb{N}^*\backslash(\mathbb{N}^*\backslash Q) = \mathbb{N}^*\backslash \bigcup_{A^* \in \mathcal{A}} A^* = \bigcap_{A^* \in \mathcal{A}} \mathbb{N}^*\backslash A^*.$$

Zbiory $\mathbb{N}^*\backslash A^*$ są postaci A^* dla innego zbioru $A \in \mathbb{N}$, stąd każdy zbiór domknięty w $\mathbb{N}^*$ jest przecięciem zbiorów postaci A^*. □

Wniosek 4.2.16. *Stąd, że $\mathbb{N}$ ma tylko $\mathfrak{c}$ nieskończonych podzbiorów i $\mathfrak{c}$ wszystkich podzbiorów oraz z twierdzenia powyżej wynika, że zarówno $\beta\mathbb{N}$, jak i $\mathbb{N}^*$ mają bazy składające się z $\mathfrak{c}$ otwarto-domkniętych zbiorów.*

Zbiór automorfizmów $\beta\mathbb{N}$ z działaniem składania odwzorowań tworzy grupę. Orbitą punktu p w $\beta\mathbb{N}$ nazywamy zbiór tych punktów, które są obrazami punktu p poprzez automorfizmy $\beta\mathbb{N}$. Wiadomo, że dowolny automorfizm musi przeprowadzać punkty izolowane w punkty izolowane (a w $\beta\mathbb{N}$ jak wiadomo z twierdzenia 3.2.6 jedynymi punktami izolowanymi są punkty należące do $\beta[\mathbb{N}]$) oraz zbiór $\beta[\mathbb{N}]$ jest w $\beta\mathbb{N}$ podzbiorem gęstym, a funkcja ciągła zadana na podzbiorze gęstym jest wyznaczona jednoznacznie. Wynika stąd, że dowolny automorfizm w $\beta\mathbb{N}$ będzie przedłużeniem pewnej bijekcji ze zbioru $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$. W $\mathbb{N}$ jest $\mathfrak{c}$ bijekcji, dlatego istnieje $\mathfrak{c}$ automorfizmów $\beta\mathbb{N}$.

Definicja 4.2.17. *Przestrzeń jest homogeniczna, jeśli dla dowolnej pary punktów istnieje automorfizm tej przestrzeni, który przeprowadza jeden punkt w drugi.*

Wniosek 4.2.18. *Ponieważ w $\beta\mathbb{N}$ istnieją zarówno punkty izolowane i nieizolowane, przestrzeń $\beta\mathbb{N}$ nie jest homogeniczna. Wynika to również z tego, że istnieje tylko $\mathfrak{c}$ automorfizmów $\beta\mathbb{N}$, a samo $\beta\mathbb{N}$ zawiera $2^{\mathfrak{c}}$ punktów.*

Zauważmy, że powyższe rozważania nie implikują niehomogeniczności $\mathbb{N}^*$, ponieważ w tym przypadku automorfizmy nie pochodzą od bijekcji ze zbioru $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$. Okazuje się jednak, że przestrzeń $\mathbb{N}^*$ również nie jest homogeniczna. Dowód tego faktu można znaleźć w [1], temu zagadnieniu poświęcony został cały rozdział czwarty.

Ponieważ orbita dowolnego punktu w $\mathbb{N}^*$ poprzez automorfizm $\beta\mathbb{N}$ zawiera co najwyżej $\mathfrak{c}$ punktów można pokazać, że orbita ta jest gęsta w $\mathbb{N}^*$.

Twierdzenie 4.2.19. *Jeśli A^* i B^* są właściwymi otwarto-domkniętymi podprzestrzeniami w $\mathbb{N}^*$, to istnieje automorfizm w $\beta\mathbb{N}$ (a zatem również w $\mathbb{N}^*$) który przekształca A^* w B^*.*

Dowód. Ponieważ A^* i B^* są właściwymi podzbiorami $\mathbb{N}^*$, to dopełnienia w $\mathbb{N}$ powiązanych zbiorów A i B są nieskończone (wniosek 4.2.14). Niech σ będzie permutacją przekształcającą A w B oraz $\mathbb{N}\backslash A$ w $\mathbb{N}\backslash B$. Wtedy rozszerzenie $\beta(\sigma)$ permutacji σ jest automorfizmem przekształcającym A^* w B^*. □

Zbiory postaci A^* tworzą bazę dla zbiorów otwartych, zatem natychmiastowy jest następujący wniosek:

Wniosek 4.2.20. *Orbita dowolnego punktu $p \in \mathbb{N}^*$, to znaczy $orb(p) = \{q \in \mathbb{N}^* : \ q = \sigma(p)$ dla pewnego automorfizmu $\sigma : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}\}$ jest gęstym podzbiorem $\mathbb{N}^*$.*

Definicja 4.2.21. *Dwa zbiory są prawie rozłączne, jeśli ich przecięcie jest skończone.*

Mówimy, że rodzina składa się z prawie rozłącznych zbiorów, jeśli prawie rozłączne są każde dwa jej elementy.

Twierdzenie 4.2.22. *Istnieje rodzina prawie rozłącznych, nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$, której moc wynosi $\mathfrak{c}$.*

Dowód. Rozważmy bijekcję $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Dla każdej liczby niewymiernej wybierzmy rosnący, zbieżny do niej ciąg liczb wymiernych $\{q_n\}$. Dowolne dwa ciągi tej postaci mają skończenie wiele takich samych wyrazów (w przeciwnym wypadku albo byłyby zbieżne do tej samej liczby niewymiernej, albo przynajmniej jeden z nich nie byłby zbieżny). Dla każdego takiego ciągu rozważmy zbiór $E = \phi^{-1}[\{q_n\}]$. Niech ϵ będzie rodziną wszystkich zbiorów tej postaci. Moc tej rodziny wynosi $\mathfrak{c}$ oraz przecięcie dowolnych dwóch jej elementów jest skończone. □

Definicja 4.2.23. *Ze zbioru wszystkich możliwych rodzin parami rozłącznych zbiorów otwartych pewnej przestrzeni topologicznej X wybieramy rodzinę o największej mocy. Liczbę kardynalną będącą mocą takiej rodziny nazywamy komórkowością przestrzeni X.*

Twierdzenie 4.2.24. *Komórkowość $\mathbb{N}^*$ wynosi $\mathfrak{c}$.*

Dowód. Rozważmy rodzinę ϵ jak z twierdzenia 4.2.22 oraz niech E i F będą różnymi elementami rodziny ϵ. Przecięcie $cl_{\beta\mathbb{N}}E \cap cl_{\beta\mathbb{N}}F = \widehat{E} \cap \widehat{F} = \{p \in \beta\mathbb{N} : E \in p \text{ oraz } F \in p\}$ zawiera jedynie ultrafiltry główne, ponieważ zachodzi:

$$p \in cl_{\beta\mathbb{N}}E \cap cl_{\beta\mathbb{N}}F \Rightarrow E \in p \text{ oraz } F \in p \Rightarrow E \cap F \in p$$

a przecięcie $E \cap F$ jest skończone. Z wniosku 3.1.10. wynika, że p jest ultrafiltrem głównym. Zatem przecięcie $cl_{\beta\mathbb{N}}E \cap cl_{\beta\mathbb{N}}F \cap \mathbb{N}^*$ jest puste. Rodzina $\{E^* : E \in \epsilon\}$, gdzie $E^* = cl_{\beta\mathbb{N}}E \backslash E$ jest zatem szukaną rodziną otwartych, niepustych zbiorów parami rozłącznych.

Z drugiej strony, zbiór potęgowy zbioru liczb naturalnych ma moc równą $\mathfrak{c}$, zatem komórkowość $\mathbb{N}^*$ wynosi dokładnie $\mathfrak{c}$. □

Wynika stąd również, że każdy gęsty podzbiór $\mathbb{N}^*$ zawiera co najmniej $\mathfrak{c}$ punktów.

Twierdzenie 4.2.25. $\mathbb{N}^*$ *zawiera kopię* $\mathbb{N}$ *oraz* $\beta\mathbb{N}$.

Dowód. Z twierdzenia numer 4.2.24 wynika, że $\mathbb{N}^*$ zawiera $\mathfrak{c}$ parami rozłącznych zbiorów otwarto-domkniętych. Wybierając z przeliczalnie nieskończenie wielu takich zbiorów po jednym elemencie uzyskujemy kopię $\mathbb{N}$. Z wniosku 4.2.5 wynika, że kopia ta jest C^*-zanurzalna w $\mathbb{N}^*$, a skoro tak, to z twierdzenia 4.1.8 wynika, że jej domknięcie jest homeomorficzne z $\beta\mathbb{N}$. □

4.3 Podsumowanie

Przedstawiony w pracy konstrukt stanowi podstawę do dalszych rozważań nad teorią ultrafiltrów. Dzięki temu, że $\mathbb{N}$ może być traktowana jako dyskretna półgrupa, badanie przestrzeni $\beta\mathbb{N}$ z wprowadzoną operacją dodawania ultrafiltrów ma wiele zastosowań w algebrze czy teorii Ramseya - jednym z bardziej znanych twierdzeń które w stosunkowo łatwy sposób można udowodnić z wykorzystaniem teorii ultrafiltrów jest tak zwane twierdzenie Hindmana. W książce Ethana Akina pod tytułem *Recurrence in topological dynamics* możemy przeczytać, że teoria przestrzeni βD ma zastosowanie również w teorii układów dynamicznych i teorii ergodycznej.

5 Bibliografia

Literatura

[1] Walker R. C.: *The Stone-Čech compactification*, Pittsburgh: Carnegie Mellon University, 1972

[2] Hindman N.,Strauss D: *Algebra in the Stone-Čech compactification: Theory and applications*, wyd. 2, Berlin: Deutsche Nationalbibliothek, 2012, ISBN: 978-3-11-025623-9

[3] Engelking R.: *Topologia Ogólna*, wyd. 2, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1989

[4] Willard S.: *General Topology*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1970