Montag, 24. April 2006

Mathe II

Weiterführende Literatur
M. Brill: Mathematik für Informatiker, Hauser
B. Pareigis: Lineare Algebra für Informatiker, Springer
A. Beutelspacher: Lineare Algebra, Vieweg
O. Forster: Analysis I, Vieweg
Fischer: Lineare Algebra, Vierweg
K. Königsberger: Analysis I, Springer

Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen.

5. Reelle Funktionen einer Veränderlichen

Wiederholung: Abbildungen (Def. 2.1)
Eine Abbildung $f: M \to N$ erhält man durch eine Zuordnung, die jedem Argument (Urbild) $x \in M$ eindeutig sein Bild $f(x)$ zuordnet.

Die Menge $G_f := \{(x,f(x)) | x \in M\} \subseteq M \times N$ Heißt Graph von f.

Spezialfall: $M = R^n$ (reelle Funktionen)
C^n (komplexe Funktionen)
für $n = 1$: Funktion in einer Veränderlichen

5.1 Stetigkeit

Motivation
“natura von facit saltos” (die Natur macht keine Sprünge)
auch in technischen Systemen erwartet man häufig, dass sich das Resultat nur wenig ändert, wenn man die Eingabegrößen nur gering variiert
Mathematik lässt sich dies durch das Konzept der Stetigkeit formulieren

Definition 5.1 (Grenzwert von Funktionswerten)
Sei $f: R \to R$ eine Funktion und $\xi \in R$. Wir sagen, f(x) konvergiert für $x \to \xi$ gegen einen Grenzwert η, falls für jede (!) Folge $(x_n)_{n \in N}$ mit $x_n = \xi$ für alle $n \in N$ gilt:

$\lim [n \to \infty\ x_n] = \xi \Rightarrow \lim n \to \infty\ f(x_n) = \eta$.

In diesem Fall schreiben wir
$\lim [x_n \to \xi]\ f(x_n) = \eta$

Beispiele
a) $f: R \to R$ mit $f(x) = x^2$ hat für jede $\xi \in R$ einen Grenzwert:

Sei (xn) eine beliebige Folge mit $\lim [n \to \infty]\ x_n = \xi$. Dann konvergiert die Folge (x_n^2) gegen ξ^2.

b) Definiere:

$f(x) := \begin{cases} 0 \text{ für } x<0 \\ 1 \text{ für } x\geq 0 \end{cases}$

f hat in 0 hinein GW: Sei (x_n) eine Folge mit $x_n<0$ für alle $n\in N$ und $\lim [x_n \to\infty]\ x_n = 0$

$\Rightarrow \lim [n\to\infty] \quad f(x_n)=0$.

Für eine Folge (x_n) mit $x_n\geq 0$ für alle $n\in N$ und $\lim [n\to\infty]\ x_n=0$ gilt jedoch: $\lim [n\to\infty]$

$f(x_n)=1$.

Die für Folgen bekannten Grenzwertsätze (Satz 4.30) lassen sich auf Funktionsgrenzwerte übertragen:

Satz 5.2 (Grenzwertsätze für Funktionen)

Existieren für die Funktionen $f,g:R\to R$ die Grenzwerte im Punkt $\xi\in R$, so gilt

a) $\lim [x\to\xi]\ (f(x)\pm g(x)) = f(\xi)\pm g(\xi)$

b) $\lim [x\to\xi]\ (f(x)*g(x)) = f(\xi)*g(\xi)$

c) $\lim [x\to\xi]\ (f(x)/g(x)) = f(\xi)/g(\xi)$ falls $g(\xi)\neq 0$

d) $\lim [x\to\xi]\ (c*f(x)) = c*f(\xi)$ $(c\in R)$

e) $\lim [x\to\xi]\ |x| = |\xi|$

Definition 5.3 (Stetigkeit)

Eine Funktion $f: R\to R$ heißt stetig in $\xi\in R$, wenn dort der Funktionswert und der Grenzwert übereinstimmen:

$\lim [x\to\xi]\ f(x) = f(\lim x\ [x\to\xi])=f(\xi)$.

Mittwoch, 26. April 2006

Ist f in allen Punkten stetig, so heißt f (überall) stetig. Der folgende Satz zeigt dass kleine Änderungen im Argument einer stetigen Funktion nur zu kleinen Änderungen der Funktionswerte führen:

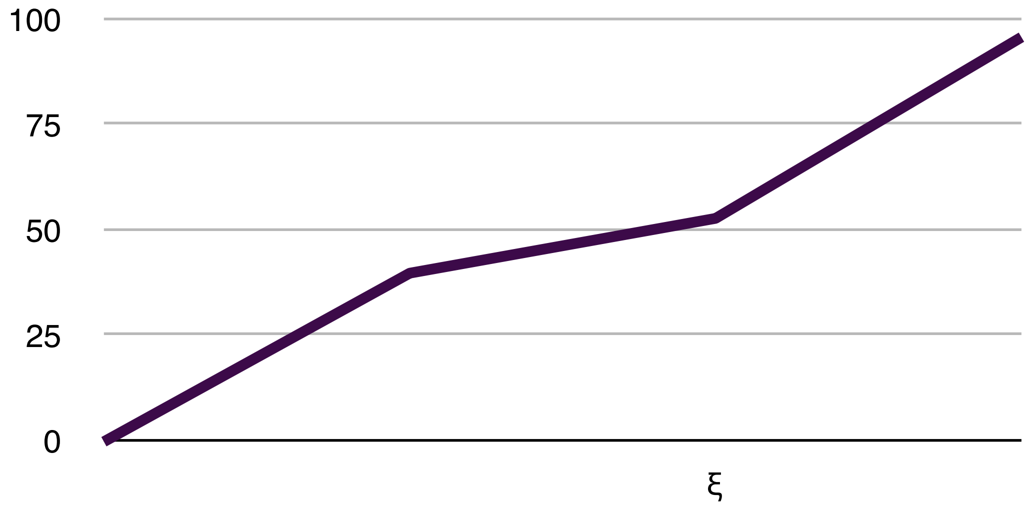
Satz 5.4 (ε-δ - Kriterium der Stetigkeit)

Für eine Funktion $f: R\to R$ sind äquivalent:

(i) f stetig in $\xi\in R$, d.h. $\lim [x\to\xi]\ f(x)=f(\xi)$

(ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta(\varepsilon) > 0$ mit $|x - \xi| > \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.

Illustration:



Man kann also erreichen,m dass die Funktionswerte beliebig nahe beieinander liegen, wenn sich die Argumente nur hinreichend wenig unterscheiden.
“Stetige Funktionen lassen sich zeichnen, ohne abzusetzen.”

Bemerkungen:

a) Satz 5.2 besagt, dass für in ξ stetige Funktionen f und g auch die Funktionen mit $f(x) \pm g(x)$, $f(x) * g(x)$, $f(x) \div g(x)$ (falls $g(\xi) \neq 0$), $c * f(x)$ stetig sind. Ebenso ist die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ stetig.

b) Die Komposition stetiger Funktionen ist wieder stetig.
Denn: Seien $f,g: R \rightarrow R$ stetige Funktionen und (x_n) eine beliebige Folge lim $[n \rightarrow \infty]$ $x_n = \xi$
$\Rightarrow \lim [x_n \rightarrow \xi] f(x_n) = f(\xi)$ (da f stetig)
$\Rightarrow \lim [x_n \rightarrow \xi] g(f(x_n)) = g(f(\xi))$ (da g stetig).

c) Die Grenzwert- und Stetigkeitsbegriffe sind sinngemäß auch auf Funktionen $f: D \rightarrow R$ übertragbar, deren Definitionsbereich D eine echte Teilmenge von R ist. In diesem Fall müssen die betrachteten Folgen (x_n) in D liegen.

Beispiel

$f(x) = 5x^3 - 7x + 12$ ist stetig, denn:
$g_1(x) := 12$ ist stetig
$g_2(x) := -7x$ ist stetig
$g_3(x) := 5x^3$ ist stetig, da Produkt stetiger Funktionen somit $f(x) := g1(x) + g2(x) + g3(x)$

Satz 5.5 (Eigenschaften stetiger Funktionen)
Sei $f: [a,b] \rightarrow R$ stetig.
beschränkt + abgeschlossen = kompakt

Dann gilt:
<u>a) Nullstellensatz</u>
Ist $f(a) * f(b) < 0$, so existiert ein $\xi \in (a,b)(=]a,b[)$ mit $f(\xi) = 0$.

<u>b) Zwischenwertsatz</u>
Zu jedem $c \in R$ mit $f(a) < c < f(b)$ existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = c$.

<u>c) Stetigkeit der Umkehrfunktion</u>
Ist f stetig und streng monoton wachsend auf [a,b] (d.h. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$), so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow R$ stetig und streng monoton wachsend.
<u>d) Maximum-Minimum-Eigenschaft:</u>
Es existieren x_1, $x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) = \max f(x)\ x \in [a,b]$ und $f(x_2) = \min f(x)\ x \in [a,b]$.

(d.h. f nimmt auf [a,b] stets sein Minimum und Maximum an.

<u>Beweis:</u>
Wir beschränken uns auf den Beweis von a) und b).
c) folgt mit b) und Satz 5.4
d) man gibt einen geeigneten Algorithmus an zur Bestimmung des Maximums bzw. Minimums.

(siehe HWK S. 202 f.)

<u>Beweis von a)</u>
Sei o.B.d.A.[1] $f(a) < f(b)$.
Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung (Folge von Intervallen $[a_n,b_n]$) mit folgenden Eigenschaften:
a) $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) \geq 0$
b) $a \leq a_n\text{-}1 \leq an < b_n \leq bn\text{-}1 \leq b$
c) $b_n\text{-}a_n = 1 \div 2^n (b\text{-}a)$
Initialisierung: $a_0 := a$, $b_0 := b$

<u>Annahme:</u> Die Intervallschachtelung sei bis zum Index n konstruiert und erfülle a) - c).
Sei $c := (a+b) \div 2$.
Ist $f(c) < 0$, setze: $an+1 := c$, $b_n+1 := b1$
$f(c) \geq 0$, $an+1 := an$, $b_n+1 := c$
$\Rightarrow$ a): $f(a_n+1) \leq 0$, $f(b_n) \geq 0$

b): $a_n \leq a_n+1 < b_n+1 \leq b_n$
c): $b_n+1 - a_n+1 = 1/2\ (b_n - a_n) = 1/2^{\wedge n}+1\ (b - a)$
Nach Konstruktion ist:
(a1) monoton wachsend, nach oben beschränkt durch b, und $f(a1) \leq 0$.

---
[1] ohne Beschränkung der Allgemeinheit

⇒ es existiert ã mit lim [n→∞] an = ã und f(ã) ≤ 0.

(b_n) monoton fallend, nach unten beschränkt durch a, und f(b_n) ≥ 0:
⇒ es existiert

da fehlt was

Mittwoch, 3. Mai 2006

Bemerkung:
Dieser konstruktive Beweis beschreibt ein numerisches Verfahren zur Nullstellenberechnung, das sogenannte Bisektionsverfahren (ÜA).

Beweis von b)
Wende a) an auf g(x) := f(x) - c .

□

Gleichmäßige Stetigkeit
Nach dem ε-δ-Kriterium der Stetigkeit (Satz 5.4) sind stetige Funktionen solche, deren Funktionswerte sich bei hinreichend kleinen Änderungen des Arguments nur beliebig wenig ändert; allerdings kann zu vorgegebenen ε > 0 (Funktionsänderung) das zugehörige δ(ε) (Argumentänderung) an jeder Stelle ξ anders sein. In manchen Zusammenhängen ist es wichtig, dass δ nur von ε abhängig ist und nicht von ξ, das heißt wir können auf dem ganzen Intervall zu einem vorgegebenen ε dasselbe δ(ε) wählen.

Definition 5.6 (gleichmäßige Stetigkeit)
Eine Funktion f : D → R (D⊆R Definitionsbereich) heißt gleichmäßig stetig auf D, wenn es zu jedem ε > 0 ein δ(ε) existiert mit $|x_1-x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ für alle $x_1, x_2 \in D$.

Beispiel
D = (0, +∞), y = f(x) = 1/x

zu jedem δ > 0 existiert n ∈ N: 1/n - 1/(n+1) = 1/(n(n+1)) < δ.

Aber |f(1/n) - f(1/(n+1))| = |n - (n+1)| = 1.
Damit gibt es zu ε ≤ 1 kein δ(ε) mit der geforderten Eigenschaft. Das heißt f ist nicht gleichmäßig stetig auf D (wohl aber stetig).

Bemerkung: Es gilt der Satz:
Jede stetige Funktion f : [a,b] → R ist gleichmäßig stetig auf [a,b].

5.2 Beispiele wichtiger stetiger Funktionen

Potenzfunktionen:
Haben die Struktur f: $R \rightarrow R$ mit $f(x) = x^n$ für ein $n \in N_0$

Für n = 0 definiert man $x^0 := 1$. Wie alle Polynomfunktionen sind Potenzfunktionen stetig. Es gelten die Rechenregeln (Potenzgesetze):
$(x*y)^n = x^n*y^n$
$x^n*x^m = x^{n+m}$ $\quad$ (x,y ∈ R; n,m ∈ N0)
$(x^n)^m = x^{n*m}$

Wurzelfunktion: Schränkt man Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit n∈N0 auf R+ := {x∈R I x ≥ 0} ein, so sind sie nicht nur stetig, sondern auch streng monoton wachsend. Nach Satz 5.5 c) existiert eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion zur n-ten Potenzfunktion

$$f: R^+ \rightarrow R^+, x \rightarrow x^n$$

nennt man n-te Wurzelfunktion

$$g: R^+ \rightarrow R^+, x \Rightarrow \sqrt[n]{x}$$

Setzt man: $x^{1/n} := \sqrt[n]{x}$, $x^{n/m} := \sqrt[m]{x^n}$,
$x^{-n/m} := 1/x^{n/m}$,
so gelten die selben Rechenregeln wie für Potenzfunktionen.

Exponentialfunktionen:
Sei a ∈ R, a > 0. Dann bezeichnet f $R \rightarrow R$, $f(x) = a^x$ die Exponentialfunktion zur Basis a. Exponentialfunktionen sind stetig.
Es gilt die Funktionalgleichung:

$$a^{x+y} = a^x*a^y \ (*).$$

Besonders wichtig ist die Exponentialfunktion mit der Euler'schen Zahl

$$e = \lim_{[n\rightarrow]} (1+1/n)^n \approx 2{,}7182...$$

als Basis (vgl. 4.21). Man bezeichnet sie auch als $\exp(x) := e^x$. Für alle z∈C hat exp(z) die Potenzreihendarstellung :

$$\exp(z) := {}^{\infty}\sum_{k=0} z^k/k! \ (=1+z+1/2z^2+1/6z^2+...)$$

[allgemein heißt für eine Zahlenfolge $(a_k)^k \in N_0$ die Reihe ${}^{\infty}\sum_{k=0} a_k\, x^k$ Potenzreihen]

Sie konvergiert absolut für alle z∈C. exp wächst schneller als jede Potenz:

$$\lim_{[x\rightarrow\infty]} e^x/x^n = \infty \text{ für alle } n \in N_0.$$

Sei z = x + iy mit x,y ∈R. Dann gilt

a) $e^z = e^x * e^{iy}$ [denn $e^z = e^{x+iy} = e^x*e^{iy}$]
b) $e^x > 0$ [denn: für x≥0 ist $e^x = {}^{\infty}\sum_{k=0} x^e/k! > 0$, für x < 0 ist $e^x = 1/e^{-x} > 0$]
c) $|e^{iy}| = 1$ [denn: $|e^{iy}|^2 = e^{iy} * e^{iy}$ (quer) $= e^{iy} * e^{-iy} = e^{\,iy-iy} = e^0 = 1$]
d) $|e^z| = e^x$ [denn: $|e^x| = |e^x*e^{iy}| = |e^x|*|e^{iy}| = |e^x| = e^x$.]

Montag, 8. Mai 2006

Logarithmusfunktionen

Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ (mit $a > 1$) ist stetig, streng monoton wachsend und bildet R bijektiv auf R^+ ab. Die Umkehrfunktion

$$\log_a: R^+ \rightarrow R$$

bezeichnet man als Logarithmusfunktion zur Basis a.

bildle

Für a = e ergibt sich der natürliche Logarithmus (logarithmus naturalis) ln. Es gelten die Rechenregeln (Logarithmusgesetze):

$\log_a(x*y) = \log_a x + \log_a y$
$\log_a(xp) = p*\log_a x$ $\qquad$ $(x,y \in R+, p \in N)$

Logarithmusfunktionen wachsen langsamer als Potenzfunktionen:

$$\lim_{[x\to\infty]} = \log_a x/x^n = 0$$

für $a > 1$, $n \in N$

Trigonometrische Funktionen

Die Koordinaten eines Punktes P auf dem Einheitskreis werden in Abhängigkeit vom Winkel ϕ mit

$y = \sin \phi$
$x = \cos \phi$

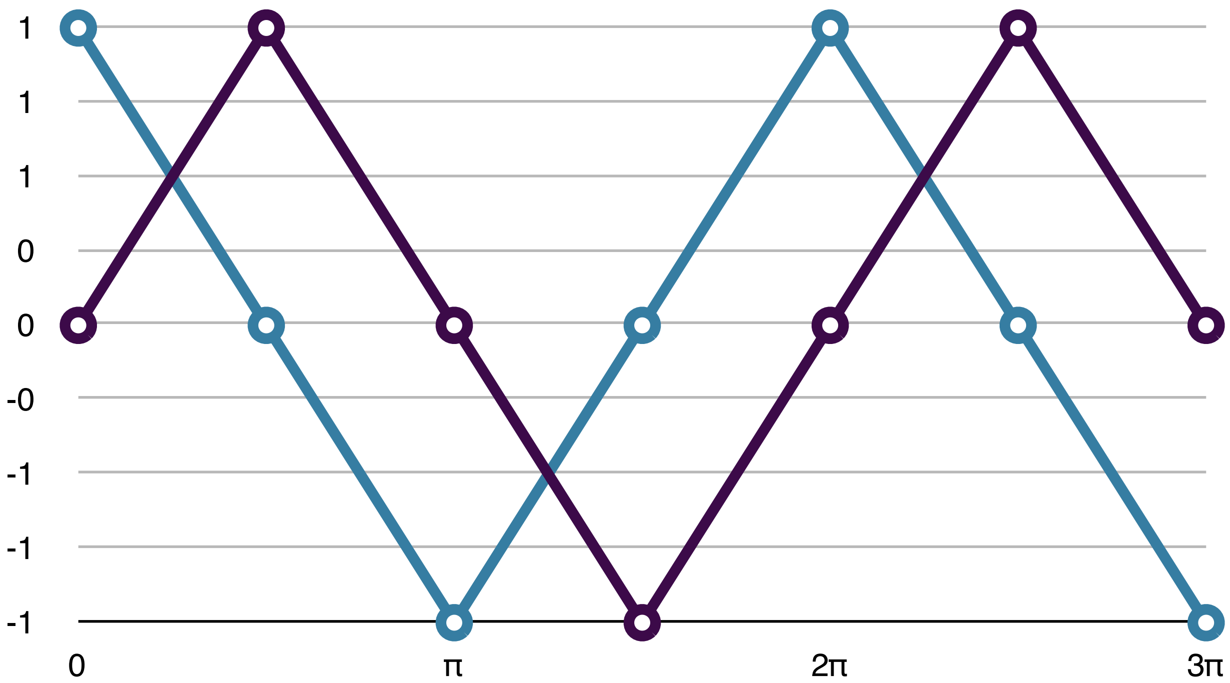
bezeichnet. Hierdurch wird die Sinusfunktion $\sin \phi$ und die Cosinusfunktion $\cos \phi$ definiert. Dabei misst man den Winkel ϕ im Bogenmaß: Länge des Kreissegments von (1,0) bis P.
Der Umfang des Einheitskreises beträgt 2π ; dabei beschreibt π die Kreiszahl

$$\pi \approx 3,14159...$$

Da deas Bogenmaß 2π einem Gradmaß von 360° entspricht, gilt:

Gradmaß	**Bogenmaß**
0°	0
45°	$\pi/4$
90°	$\pi/2$
α	$\pi/180° * \alpha$

Sinus- und Cosinusfunktion haben die Gestalt!!! Hamse nämlich!



Es gilt:

a) $\sin2\phi + \cos2\phi = 1$
   $[(\sin\phi)2 =: \sin2\phi]$

b) $\sin(-\phi) = -\sin\phi$ (ungerade Funktion)
   $\cos(-\phi) = \cos\phi$ (gerade Funktion)

c) 2π-Periodizität:
   $\sin(\phi+2\pi) = \sin\phi$
   $\cos(\phi+2\pi) = \cos\phi$

d) Additionstheoreme:
   $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha * \cos\beta - \sin\alpha * \sin\beta$
   $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha * \cos\beta + \cos\alpha * \sin\beta$

e) Potenzdarstellung
   $\sin x = {}^{\infty}\sum_{h=0} (-1)k\, x^{2k+1}/(2k+1)! = x-x^3/3! + x^5/5! - + ...$
   $\cos x = {}^{\infty}\sum_{h=0} (-1)k\, x^{2k}/(2k)! = 1-x^2/2! + x^4/4! - + ...$

Die reihen konvergieren absolut für alle $x \in R$. Sinus- und Cosinusfunktion sind stetig und es gelt die Enter-Moivre-Formel: $eix = \cos x + i * \sin x$ für alle $x \in R$ (UA).

Die Tangensfunktion $\tan\phi$ ist definiert durch $\tan\phi := \sin\phi/\cos\phi$

bildle

Tangensfunktion ist stetig auf $R \setminus \{2k+1/s * \pi \mid k \in Z\}$

Trigonometrische Umkehrfunktionen

Wenn wir die trigonometrische Funktionen auf ein Intervall einschränken, auf dem sie streng monoton sind, können wir dort Umkehrfunktionen definieren:

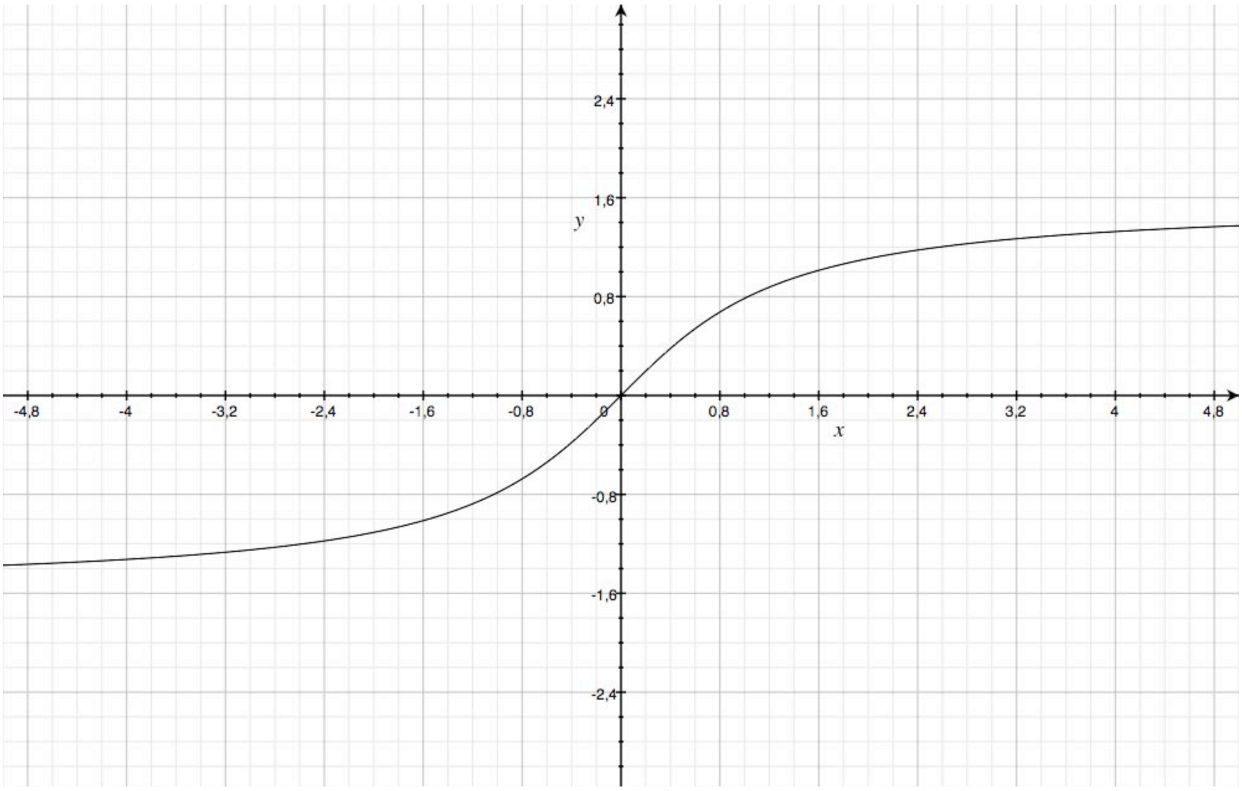
a) cos ist $[0,\pi]$ streng monoton fallend mit Wertebereich $[-1,1]$. Die Umkehrfunktion arc cos: $[-1,1] \to [0,\pi]$ heißt Arcus-Cosinus. Sie ist stetig.

b) Sinus ist $[-\pi/2,\pi/2]$ streng monoton wachsend mit Wertebereich $[-1,1]$.

Die Umkehrfunktion arc sin : [-1,1]→[-π/2,π/2]
heißt Arcus-Sinus. Sie ist stetig.

Mittwoch, 10. Mai 2006

c) tan ist in (-π/2, π/2) streng monoton wachsend mit Wertebereich R.
Die Umkehrfunktion
arc tan : R → (-π/2, π/2)
heißt Arcus Tangens. Er ist stetig.



5.2 Differenzierbarkeit
Motivation:

- Wird durch eine Funktion beschrieben, wie sich eine Größe abhängig von einer anderen verändert, so stellt sich die Frage "Wie schnell" sich die abhängige Größe ändert? Beschränkt die Funktion z.B. den Ort eines Massenpunkts abhängig von der Zeit (Bewegung entlang einer Geraden), so ist dies die Frage nach der Geschwindigkeit (zu jedem Zeitpunkt).
- Betrachtet man eine Funktion in der unmittelbar Nähe einer Stelle, dann möchte sie dort annähern (approximation) durch einer einfachere Funktion, z.B. f an der Stelle x durch t(x) = ax + b (a,b∈R).

Definition 5.7 (Differenzierbarkeit)
Sei eine Funktion f: R → R und ξ∈R gegeben. Dann heißt die Funktion f differenzierbar in ξ, falls der Grenzwert

$\lim_{[x\to\xi]} (f(x)-f(\xi))/x-\xi$

existiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert Ableitung (Differentialquotient) von f in ξ.
Notation: f'(ξ) oder df/dx (ξ) (sprich: "df nach dx") (oder auch d/dx f(ξ))
Ist f in allen ξ∈R differenzierbar, so heißt f differenzierbar (diff'bar).

Bemerkungen
a) Der Ausdruck $(f(x) - f(\xi))/x-\xi =: \Delta y/\Delta x$ heißt Differenzenquotient. Er gibt die Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(\xi,f(\xi))$ und $(x,f(x))$ des Graphen von f an:

Für $x \to \xi$ (also $\Delta x \to 0$) geht die Sekantensteigung in die Tangentensteigung im Punkt $(\xi,f(\xi))$ über: $f'(\xi) = df/dx\ (\xi) = \lim_{[x\to\xi]} \Delta y/\Delta x$

b) Gleichung der Tangente t an f in $(\xi,f(\xi))$: $t(x) = f(\xi) + f'(\xi)\ (x-\xi)$.

c) Schränkt man x bei der Grenzwertbildung ein auf Werte größer/kleiner ξ, so erhält man die einseitigen Grenzwerte:

$f'(\xi^{+}) := \lim_{[x\to\xi+]} (f(x)-f(\xi))/x-\xi$

$f'(\xi-) := \lim_{[x\to\xi-]} (f(x)-f(\xi))/x-\xi$

rechtsseitige Ableitung bzw. linksseitige Ableitung von f in ξ.

d) Wie im Fall der Stetigkeit übertragen sich die Begriffe sinngemäß auf Funktionen mit Definitionsbereich $D \subsetneq R$.

Beispiele:
Sei $f(x) = x^n$, $n \in N$, $x \in R$.

Für beliebige $\xi,x \in R$ gilt dann $f(x) = f(\xi) = x^n - \xi^n = (x - \xi)(x^{n-1} + x^{n-2} * \xi + ... + \xi^{n-1})$, für $x \neq \xi$

also : $(f(x) - f(\xi))/x-\xi = x^{n-1} + x^{n-2}*\xi + ... + \xi^{n-1}$, und daher $\lim_{[x\to\xi]} (f(x) - f(\xi))/x-\xi = n * \xi^{n-1}$.
Also ist $f(x) = x^n$ überall auf R differenzierbar mit $f'(x) = n * x^{n-1}$.

Ableitungen elementarer Funktionen	
f(x)	f'(x)
x^{α}, $\alpha \in R$ $(x>0)$	$\alpha * x^{\alpha}$-1
ex	ex
sin x	cos x
cos x	-sin x
tan x	$1/\cos^2 x$
ln x	1/x

Um aus diesen Ableitungen weitere Funktionen “zusammenzusetzen, benötigt man folgende Ableitungsregeln:

Satz 5.8 (Differentiationsregeln)
a) Ist f: R→R in ξ∈R differenzierbar, so ist f in ξ auch stetig.

Beweis ad a): Sei f: R→R im Punkt ξ∈R differenzierbar. Dann gilt: lim[x→ξ] f(x)-f(ξ) = lim[x] (f(x)-f(ξ))/x-ξ (x-ξ) = f'(ξ) * 0 = 0.

□

Bemerkung:
Während Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert, gilt die Umkehrung nicht:
f(x) = |x| ist in x = 0 stetig, aber nicht differenzierbar (denn: $f'(0^+) = 1 \neq -1 = f'(0^-)$)

Montag, 15. Mai 2006

b) Sind f: R → R und g: R → R in ξ∈R differenzierbar, α,β∈R, so ist auch α*f + β*g in ξ differenzierbar mit (α*f+β*g)'(ξ) = α*f'(ξ) + β*g'(ξ)

c) Sind f: R → R und g: R → R in ξ∈R differenzierbar, so ist auch f*g in ξ differenzierbar mit (f*g)'(ξ) = f'(ξ)*g(ξ)+f(ξ)*g'(ξ) (Produktregel)
d) Sind f: R → R in ξ differenzierbar und g(ξ)≠0, so ist auch f/g in ξ differenzierbar mit (f/g)'(ξ) = (f'(ξ)*g(ξ)-f(ξ)*g'(ξ))/$(g(ξ))^2$ (Quotientenregel)
e) Ist f: R→ R differenzierbar in ξ∈R sowie g: R → R differenzierbar in η := f(ξ)∈R, so ist auch ihre Komposition (f◦g)(x) = g(f(x)) in ξ differenzierbar mit (f◦g)'(ξ) = g'(f(ξ))*f'(ξ) (Kettenregel)
f) Ist f: [a,b] → R streng monoton wachsend und in ξ∈[a,b] differenzierbar mit f'(ξ)≠0 so ist auch die Umkehrfunktion f-1 : [f(a),f(b)] → R in η = f(ξ) differenzierbar mit (f-1)'(η) = 1/f'(ξ).

Bemerkung: Auch diese Aussagen übertragen sie sinngemäß, wenn D⊊R. f gilt auch für streng monoton fallende Funktionen.

Beweis a)

Beispiel haft zeigen c) (Produktregel):
Aufgrund der Grenzwertsätze (Satz 5.2) gilt:

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(\xi)\cdot g(\xi)}{x-\xi}$$
$$=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(\xi)\cdot g(\xi)+f(\xi)\cdot g(x)-f(\xi)\cdot g(\xi)}{x-\xi}$$
$$=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\cdot g(x)+f(\xi)\cdot\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$$
$$=f'(\xi)\cdot g(x)+f(\xi)\cdot g'(\xi)$$

□

Beispiele

a) Mit $\frac{d}{dx} \cdot \sin x = \cos x$ und

$\frac{d}{dx} \cdot \cos x = -\sin x$ folgt:

$$\frac{d}{dx} \cdot \tan x = \frac{d}{dx} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x))}{\cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$ für $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$

b) Mit y = tan x gilt mit Satz 5.8 (f):

$$\frac{d}{dy} \cdot \arctan y = \frac{1}{\frac{d}{dx} \cdot \tan x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\frac{1+sin^2 x}{cos^2 x}} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

Montag, 12. Juni 2006

Definition 5.25 (Unbestimmtes Integral)
Eine Stammfunktion F einer Funktion f wird auch als unbestimmtes Integral bezeichnet.Notation: $\int f(x)dx$ (ohne Integrationsgrenzen).

Beispiele:

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (fuer\ x \neq 0)$
- $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\ dx = \sin x + C$
- $\int \tan x\ dx = \ln|\cos x| + C \quad (\cos x \neq 0)$
- $\int e^{ax}\ dx = frac1ae^{ax} + C \quad (fuera \neq 0)$
- $\int \ln|x|\ dx = |x| \cdot (\ln|x| - 1) + C$

Alles weitere: Formelsammlungen
Bronsten: handbuch der Mathematik

Zur korrekten Berechnung von Integralen gibt es zwei Grundtechniken, die sich aus der Produktregel der Differentation bzw. aus der Kettenregel ergeben:

Satz 5.26 (Integrationsregeln)
a) Partielle Integration
Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\ g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx$$

(entsprechend für unbestimmte Integrale ohne Grenzen) b)

Berechne $\int_c^d f(x)dx$ mittels
$x := g(t)$ (g stetig differenzierbar)
$c := g(a), d =: g(b)$ und
formal: $dx = g'(t)dt$:

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)dx = \int_{t=a}^{t=b} f(g(t))g'(t)dt$$

<u>Beispiele:</u>
ad a)

- $\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$
- $\int \sin^2 x \ dx = \int \sin x \cdot \sin x \ dx$

$= \sin x \cdot (-\cos x) + \int \cos^2 x \ dx$

$= -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x)dx + \int \sin^2 x \ dx$

daher: $2 \cdot \int \sin^2 x \ dx = -\sin x \cdot \cos x + \int 1 \ dx$

und somit: $\int sin^2 x \ dx = -\frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x + \frac{x}{2} + C$

ad b)

- $\int e^{\sqrt{x}} dx$

Substitution: $z := \sqrt{x}$
$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot Z}$ Dann:

$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^Z \cdot 2Z \ dZ$
$= 2(Ze^Z - e^Z) + C$
$= 2(\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C$

- $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \ dx$

Somit: $\int_{x=-1}^{x=1} \sqrt{1 - x^2} \ dx = \int_{Z=\pi}^{Z=0} \sqrt{1 - \cos^2 Z} \cdot (-\sin)dz = \int_0^{\pi} \sin^2 z \ dz$
$= -\frac{1}{2} \sin z \cdot \cos z + \frac{1}{2} z = -0 + \frac{\pi}{2} - (-0 + 0) = \frac{\pi}{2}$

<u>Bemerkung:</u>
Es existieren (leider) auch Integrale, die sich nicht analytisch lösen lassen: z.B. “Dichte Funktionen”:

Mittwoch, 14. Juni 2006

5.7 Uneigntliche Integrale

Motivation:

Wie integriert man bei

- unendlichen Intervallen:

$$\int_a^\infty f(x)dx, \int_{-\infty}^b f(x)dx, \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

- unbeschränkte Funktionen?

z.B. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Diese Art von Integrale nennt man uneigentliche Integrale.

Definition 5.27

Sei $f \cdot [a,\infty) \to \mathbb{R}$ über jedem Intervall [a,N] mit $a < N < \infty$ integrierbar.

Falls $\lim\limits_{N\to\infty} \int_a^N f(x)dx$ existiert, dann heißt $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent, und wir definieren:

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)dx$$

Analog: $\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim\limits_{N\to\infty} \int_b^N f(x)dx$ für $f \cdot (-\infty, b] \to \mathbb{R}$.

Beispiel:

Das Intervall $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5}$ ist divergent für $s \leq 1$ und konvergent für s > 1:

$$\int_1^N \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{5-1}} = \frac{dx}{x+5}(1 - \frac{1}{N^{5-1}}).$$

Daher $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5} = \lim\limits_{N\to\infty} \int \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{s-1}$ (füt s > 1).

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \arctan x|_{-N}^0 + \lim_{N\to\infty} \arctan x|_0^N$$

$$= 0 - (-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

Skizze:

Definition 5.28
Sei $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ über $[a+\epsilon,b]$ mit $0<\epsilon<b-a$ jeden Teilintervall integrierbar und $a\notin D_f$.
Falls $\lim_{\epsilon\to0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ existiert, dann heißt $\int_a^b f(x)dx$ konvergent, und wir definieren
$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon\to0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$.
Analog: $\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon\to0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$

für $f:[a,)\to\mathbb{R}$ und $b\notin D_f$.
und $\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ für $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ mit $a,b\notin D_f \quad und \quad c\in(a,b)$.

Beispiel:
$\int_0^1 \frac{dx}{x^5}$ divergiert für $s\geq 1$ und konvergiert für 0 < s < 1:
$\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{1-s}x^{1-s}$
$= \frac{1}{1-s}(1-\epsilon^{1-s})$. Daher
$\int_0^1 \frac{dx}{x^5} = \lim_{\epsilon\to0}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}$

6. Lineare Algebra

6.1 Vektorräume

Definition 6.1 (Vektorraum)
Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum (Vektorraum über K; kurz: K-VR) ist eine Menge V, auf der eine additive Verknüpfung + und eine skalare Multiplikation definiert sind mit folgenden Eigenschaften:

(i) (V,+) ist eine kommutative Gruppe
(ii) Die Abbildung $\cdot : KxV\to V, (k,v)\Rightarrow k\cdot v$ erfüllt:
- (A1) $k\cdot(v+w)=k\cdot v+k\cdot w$
- (A2) $(k_1+k_2)\cdot = k_1\cdot v+k_2\cdot v$
- (A3) $(k_1k_2)\cdot v = k_1\cdot(k_2v)$
- (A4) $1\cdot v=v$

für alle $v,w\in V, k,k_1,k_2\in K$.
Die Elemente von V heißen Vektoren, die Elemente von K heißen Skalare.
Notation: $V=(V,+,\cdot)$

Definition 6.2 (Teilraum)
Ein Teilraum (auch: Unterraum) eines K-VRs V ist eine Untergruppe U von (V,+) mit $k\cdot u\in U$ für alle $k\in K, u\in U$, die Menge $(U,+,\cdot)$ ist ebenfalls ein K-VR.

Beispiele

a) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$. Definiere + und $\cdot$ komponentenweise:

$(x_i)_i + (y_i)_i =: (x_i + y_i)_i$

$k \cdot (x_i)_i =: (kx_i)_i$

für $x_i, y_i \in V, k \in K$

$(1 \leq i \leq n)$.

Dann ist $(K^n, +, \cdot)$ ein K-VR.

Spezialfälle: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{Q}^n, (GF(p))^n$

Bemerkung: Insbesondere ist K ein 1-dimensionaler VR über sich selbst $(K^1 = K)$

b) Jeder VR V besitzt die (trivialen) Unterräume {0} und V.

c) $(\mathbb{Z}, +)$ ist Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$, aber kein UR das $\mathbb{Q} - VRs\mathbb{Q}$.

d) Sei K ein Körper und M eine Menge. Dann ist die Menge K^M aller Abbildungen

$f : M \to K$ mit $(f + g)(x) := f(x) + f(x)$

$(k \cdot f)(x) := k \cdot f(x)$

für $f, g \in k^M, x \in M, k \in K$ ein K-VR (VR-Axiome nachrechnen)

zu d):

Spezialfälle:

- Funktionrsraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\mathbb{R} - VR$. Unterräume: z.B. stetige Funktionen, differenzierbare Funktionen, beschränkte Funktionen
- Folgeraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $\mathbb{R} - VR$. Unterräume: z.B. konvergente Folgen, Nullfolge, beschränkte Folgen, Menge der Polynome $\mathbb{R}[x]$

e) Ist R ein Ring und $K \subseteq R$ ein Teilkörper, so ist R ein K-VR. Insbesondere $\mathbb{R}$ ist

$\mathbb{R} - VR, \mathbb{Q} - VR$

$\mathbb{C}$ ist VR über $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

Satz 6.3 (Rechnenregeln für VR)

In jedem K-VR gilt für alle $v \in V, k \in K$:

(i) $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$

(ii) $0 \cdot v = \vec{0}$

(iii) $(-k) \cdot v = k \cdot (-v) = -(v \cdot k)$

(iv) $(-1) \cdot v = -v$

(v) $k \cdot v = \vec{0} \Rightarrow k = 0 oder v = \vec{0}$

Beweis

(i) - (iv) elementar, z.B. (i):

$k \cdot \vec{0} = k \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = k \cdot \vec{0} + k \cdot \vec{0}$.

(v): angenommen $k \neq 0$. Dann:

$\vec{0} = k^{-1} \cdot \vec{0} = k^{-1} \cdot (k \cdot v) = (k^{-1}k) \cdot v$

$= 1_k \cdot v$

$= v$

Lemma 6.4 (Durchschnitt von URen)
Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Familie von URen des K-VRs V. Denn ist auch $\cap_{i\in I}U_i$ ein Unterraum von V.

Beweis
Seien $v, w \in \cap_{i\in I}U_i$. Dann sicherlich $v, w \in U_i$ für alle $i \in I$ und $v \pm w \in U_i$, $k \cdot v \in U_i$ für alle $i \in I, k \in K.$ Somit $v \pm w \in \cap_{i\in I}U_i, k \cdot v \in \cap_{i\in I}U_i$. Da $0 \in \cap_{i\in I}U_i ist \cap_{i\in I} U_i$ eine Umkehrgruppe von (v,+) und ein Unterraum von V.

Definition 6.5 (Erzeugnis)
Sei V ein VR und $X \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Nach Lemma 6.4 ist $< x >:= \cap\{U|UvonVundX \subseteq U\}$ ein UR von V (d.h. <x> ist der kleinste UR, der X enthält). Man nennt <x> das Erzeugnis oder Aufspann von V.

Beispiel
Es gilt $< v >= V$ und

Montag, 26. Juni 2006

Satz 6.10
V K-VR, $E \subseteq V$ endl. Erzeugendensystem
$X \subseteq V$ linear unabhängig

$\Rightarrow$ Ex $F \subseteq E : F \cap X = \emptyset$
$F \cup X$ Basis von V

Beweis:
Die Menge $\{D \in P(E)|D \cap X = \emptyset$, $D \cup X$ linear unabhängig} ist endlich, nicht-leer (z.B. $D = \emptyset$) und enthält daher ein maximales Element F (bzgl. der Inklusion, Methematik I, Def 4.5) Somit $F \cap X = \emptyset$ und $F \cup X$ linear unabhängig.
Bleibt zu zeigen:
$F \cup X$ ist Erzeugendensystem von V.
Zeige zunächst: $E \subseteq< F \cup X >$ d.h. für alle $e \in E$ gilt: $e \in< F \cup X >$

Falls $e \in F$ oder $e \in X$, ist das klar. Für $e \notin F \cup X$ ist $F \subseteq\neq F \cup e$ und $(F \cup \{e\}) \cap X = \emptyset$. Da F maximal ist, muss $F \cup e \cup X$ linear abhängig sein, daher
$$\sum_{f\in F} k_f \cdot f + k \cdot e + \sum k_i \cdot x_i = 0$$
mit $k_f, k, k_i \in K$ geeignet, nicht alle 0, und $x_1' \in X$ geeignet.
Da $F \cup X$ linear unabhängig ist, muss $k \neq 0$ gelten, und folglich
$$e = k^{-1}(k \cdot e) = k^{-1}) - \sum_{f\in F} k_g \cdot f - \sum_{i\in I} k_i \cdot x_i)$$
Somit: $E \subseteq< F \cup X >$ und daher $V =< E >\subseteq<< F \cup X >>=< F \cup X >$.

Korollar 6.11
Sei V ein VR mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann:
a) Jedes Erzeugendensystem E von V enthält eine Basis. Insbesondere hat V eine (endliche) Basis.

b) Jede linear unabhängige Teilmenge von V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen ("Basisergänzungssatz"). Insbesondere besagt der Steinitz'sche Austauschsatz (in schwächerer Verblubb): Sei V ein ein VR mit einer endlichen Basis $B = \{b_1, ..., b_n\}$ und $0 \neq v \in V$. Dann existiert ein $b_j (1 \subseteq j \subseteq n)$, sondern $\{b_1, ..., b_{j-1}, v, b_{j+1}, ..., b_n\}$ eine Basis von V ist.

<u>Beweis:</u>
b) folgt direkt aus Satz 6.10
ad a) Sei $V =< v_1, ...v_n >$ mit $v_i \in V$

Da E endlich Erzeugendensystem, ist jedes $v_i \in V$ Linearkombination von endlich vielen Elementen aus E. Daher existiert $E' \subseteq E$ endliche Teilmenge mit $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq < E' >$

Dann $V =< v_1, ..., v_n > \subseteq < E' > \subseteq V$.
Wende nun Satz 6.10 an auf E' mit $X = \emptyset$, ergo ist E' Basis von V.

<u>Korollar 6.12</u>
Sei V VR mit einem endlichen Erzeugendensystem und $B \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) B ist Basis von V
(ii) B ist minimales Erzeugendensystem
(iii) B ist maximale, linear unabhängige Teilmenge

<u>Beweis:</u>
(i) ⇒ (ii): Ist $b \in B$, so gilt $b \notin$ <B\{b}> (da B linear unabhängig). Folglich kann eine echte Teilmenge von B nei ein Erzeugendensystem von V sein.
(ii) ⇒ (i): B ist Erzeugendensystem, enthält nach Korollar 6.11 a) eine Basis B'. Da B' auch Erzeugendensystem ist, gilt B=B' (da B minimal).
(i) ⇒ (iii): Jedes $v \in V \backslash B$ ist Linearkombination von Elementen aus B. Somit $B \cup \{v\}$ linear abhängig, und daher auch jede Obermenge von B.
(iii) ⇒ (i): B linear unabhängig, somit nach Korollar 6.11 b): B ist in einer Basis B' enthalten. Insbesondere ist B' linear unabhängig, folglich B = B' (da B maximal).

Induktiv lässt sich zeigen:

<u>Lemma 6.13</u>
Sei V ein VR mit endlichem Erzeugendensystem E.
Ist $X \subseteq V$ eine endliche, linear unabhängige Menge, so gilt:
$$|X| \leq |E|$$

<u>Korollar 6.14</u>
Sei V VR mit endlichem Erzeugendensystem E.
a) Jede linear unabhängige Teilmenge $X \subseteq V$ ist endlich.
b) Alle Basen sind endlich und gleich haben die selbe Länge.