Sei $L = \ln p$. Jede echte Teilmenge aus L ist linear unabhängig in der Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \ln(p_1) + \lambda_2 \cdot \ln(p_2) + ... + \lambda_r \cdot \ln(p_r) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot \ln(p_k) = 0$$

$$mit \quad r \in \mathbb{N}, \quad \lambda_k \in \mathbb{Q}, \quad \ln(p_k) \in L, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq k \leq r \quad und \quad \ln(p_i) \neq \ln(p_j) \quad fuer \quad 1 \leq j < i \leq r$$

$gilt\ \lambda_k \in \mathbb{Q}$ und somit $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{\nu_k}$ wobei ohne Einschränkung gelte $\mu_k \in \mathbb{Z}, \quad \nu_k \in \mathbb{N}$.

Durch Multiplizieren mit dem Produkt aller Nenner der auftauchenden rationalen Zahlen λ, also mit $\prod_{j=1}^{r} \mu_j$ folgt:

$$\sum_{k=1}^{r} \tilde{\lambda}_k \cdot \ln(p_k) = 0 \quad mit \quad \tilde{\lambda} \in \mathbb{Z}$$

.

Durch anwenden der Logarithmusregel $z \cdot \ln u = \ln n^z$ folgt:

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{r} p_k^{\tilde{\lambda}_k}\right) = 0$$

Daraus folgt nun durch exponieren auf beiden Seiten:

$$\prod_{k=1}^{r} p_k^{\tilde{\lambda}_k} = 1$$

Nun multiplizieren wir mit allen $p_k^{\tilde{\lambda}_k}$, für die $\tilde{\lambda}_k$ negativ ist und erhalten:

$$\prod_{k\ mit\ \tilde{\lambda}_k \geq 0} p_k^{\tilde{\lambda}_k} = \prod_{k\ mit\ \tilde{\lambda}_k < 0} p_k^{\tilde{\lambda}_k}$$

Angenommen, nicht alle λ sind gleich 0. Da dann alle p_k der linken Seite ingleich denen auf der rechten Seite sind, das linke Produkt also gänzlich aus anderen Primnfaktoren als das auf der rechten Seite besteht, kann die Gleichung nur aufgehen, wenn alle λ gleich 0, und damit alle Faktoren gleich 1 sind.