

1 Empirical Simulation

1.1 상관계수 값의 추정과 신뢰구간(CI)의 추정

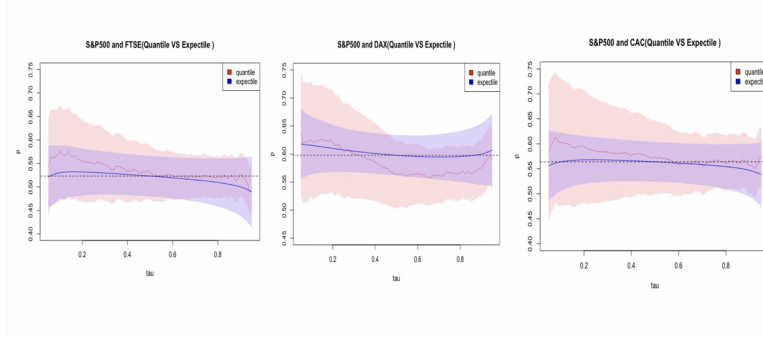


Figure 1: The sample quantile correlation coefficients $\rho_{\tau}^{(q)}$, 95% confidence interval (CI) for $\rho_{\tau}^{(q)}$

위 그림은 $\rho_{\tau}^{(q)}$ 과 $\rho_{\tau}^{(e)}$ 을 $\tau = 0.05, 0.06, \dots, 0.95$ 에 따라 추정한 값과 95%신뢰구간을 시각화 한 그림이다. $\rho_{\tau}^{(q)}$ 의 표준편차의 추정과정에서 조건부밀도함수의 추정방법은 f_{BH} 를 사용하였다. 그림을 살펴보면 우선 $\rho_{\tau}^{(q)}$ 의 τ 값이 낮을 때 상관계수 값이 크다는 것을 볼 수 있다. 이는 왼쪽꼬리 부분에서의 강한 상관성이 다른부분에서의 상관성보다 크다는 것을 의미한다. 우리의 $\rho_{\tau}^{(e)}$ 또한 $\rho_{\tau}^{(q)}$ 과 비슷한 양상을 보여주고 있고, 조금 더 부드러운 양상을 나타낸다. 그러나 신뢰구간의 길이는 확연히 차가나는 양상인데, $\rho_{\tau}^{(q)}$ 에 비해 신뢰구간의 길이가 짧다. 또한 $\rho_{\tau}^{(q)}$ 의 신뢰구간 추정과정에서는 조건부 밀도함수 추정과정이 필요하기 때문에 조금 더 까다롭고 시간이 오래 걸린다. 반면 $\rho_{\tau}^{(e)}$ 은 계산이 간편하고 신뢰구간의 길이가 짧다는 점이 장점이라고 볼 수 있다.

1.2 분위 상관계수의 해석

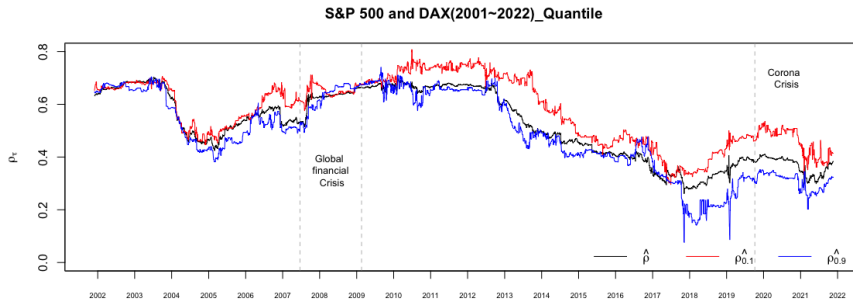


Figure 2: The sample quantile correlation coefficients $\rho_{0.1}^{(q)}$ and $\rho_{0.9}^{(q)}$ and the Pearson correlation ρ of the pairs of stock price returns based on 500 day rolling window samples

Choi and Shin (2022)의 논문에서는 01/03/2000 - 11/30/2017 기간동안 500-day rolling window 기법을 활용하여 두 주가지수(S&P 500, DAX)의 log return값의 분위 상관계수 값을 구한다. 또한 08/01/2007 - 03/31/2009을 글로벌 금융위기 기간으로 설정하였다. $\rho_{\tau}^{(q)}$ 의 값을 살펴보면, 금융위기

이전에는 $\rho_{0.1}^{(q)}$, $\rho_{0.9}^{(q)}$ 와 피어슨 상관관계수 모두 비슷한 양상을 보이고 있다. 그런데 금융위기 이후에는 $\rho_{0.1}^{(q)} > \rho_{0.9}^{(q)}$ 인 양상이 보여진다. 이는 분위수가 낮은 bad market에서는 상관관계가 높아지고 분위수가 높은 good market에서의 상관관계가 bad market보다는 낮다는 점을 시사한다. 즉 시장이 좋지 않을 때 두 주가지수의 상관관계가 좀 더 높다고 할 수 있다. 이와 같은 해석은 Choi and Shin (2022)의 논문에서 설명한 내용이고, 우리의 연구는 우선 이 설명이 맞는지 검토한 뒤 2022년까지 데이터를 확장하여 코로나로 인한 주가지수 상관관계의 영향을 살펴보았다. 논문에서의 상황을 똑같이 구현하여 그린 그림이 위의 그림이고, 우리는 글로벌 금융 위기부분에서 $\rho_{0.9}^{(q)}$ 이 $\rho_{0.1}^{(q)}$ 값을 중간에서 역전하였다는 점에 주목하였다. 이는 금융위기와 같이 시장에 큰 충격이 있는 상황에서는, 시장이 좋은 상황일 때(good market) 좋지 않은 상황(bad market)과 비슷하게 두 주가지수의 상관관계를 형성한다고 해석할 수 있었다. 우리의 연구에서는 데이터를 2022년 까지 확장하여 코로나바이러스가 발생한 11/17/2019 를 기준으로 두 주가지수의 상관관계를 살펴보았다. Rolling window 기법을 사용하였기 때문에 기준선 이전에서부터 분위 상관관계수의 값이 낮아지고 있는 양상이다. 코로나 상황에서는 이전 상황에서 보다 bad market인 경우의 분위 상관관계수의 값이 확연히 높고, 다른 상관관계수 값에 비해 격차가 나고 있는 모습을 보이는데, 이는 코로나로 인한 과도한 주가대폭락 상황을 고려하였을 때 badmarket인 경우 각 나라에서 주가지수들이 모두 내려가는 상황을 고려해 볼 수 있었다. 또한 주가대폭락 상태가 어느정도 진정이 된 이후로는 분위상관관계수 사이의 격차가 안정되는 양상이 보여진다.

1.3 분위 상관관계수와 평률상관관계수의 비교

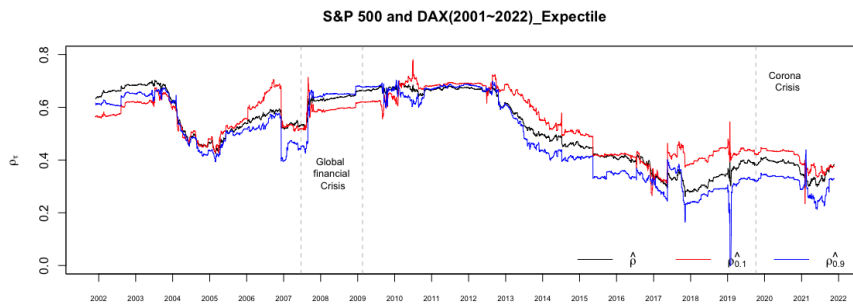


Figure 3: The sample Expectile correlation coefficients $\rho_{0.1}^{(e)}$ and $\rho_{0.9}^{(e)}$ and the Pearson correlation ρ of the pairs of stock price returns based on 500 day rolling window samples

앞선 상황과 같은 상황에서, $\rho_r^{(e)}$ 에 관한 그림을 그려보았다. 우선 두 상황에서의 공통점을 보자면 대체적으로 $\rho_r^{(e)}$ 가 $\rho_r^{(q)}$ 보다 전체적인 양상이 부드럽지만, $\rho_r^{(q)}$ 의 전체적인 양상과 매우 유사한 것을 볼 수 있다. 금융위기 전후 상황에서 격차가 비슷하게 나타나고 있다. 이는 우리의 $\rho_r^{(e)}$ 가 $\rho_r^{(q)}$ 의 해석을 그대로 이어받을 수 있고 성질 또한 유사할 것 이라는 해석을 가능하게 한다. 그런데 글로벌 금융위기 상황에서는 시간이 조금 흐른 뒤에 $\rho_r^{(e)}$ 가 $\rho_{0.9}^{(q)} > \rho > \rho_{0.1}^{(q)}$ 인 양상이 두드러지게 나타난다. 이는 글로벌 금융위기로 인한 지수의 하락세가 급격하게 커지면서 분위수가 0.9인 (good market)인 상황에서의 두 주가지수의 상관관계가 높음을 보여준다. 또한 Expectile의 loss함수의 형태를 고려해보면, loss함수가 평균에서 관측치가 떨어진 정도를 반영해주고 있기 때문에 분위수가 높은 (good market)인 상황에서 두 주가지수가 평균으로부터 관측치가 떨어진 정도가 유사할 것으로 해석해 볼 수 있다. 즉 bad market인 경우 두 주가지수의 하락세가 S&P는 과도하게 떨어지는 와중에 DAX는 조금 떨어지는 양상이 나타났던 것이고, good market인 경우 두 주가지수의 상승세가 S&P와 유사한정도로 DAX또한 올라갔던 것으로 해석할 수 있을 것이다. (간단히 말하자면 지수가 떨어지는

상황에서는 밑바닥을 모른 듯이 떨어지지만 지수가 올라가는 상황에서는 다른 나라의 지수를 보고 어느정도 맞춰 나가는 양상일 것으로 해석해 볼 수 있을 여지 있음)

1.4 분위 상관계수와 평균 상관계수의 신뢰구간 길이 비교

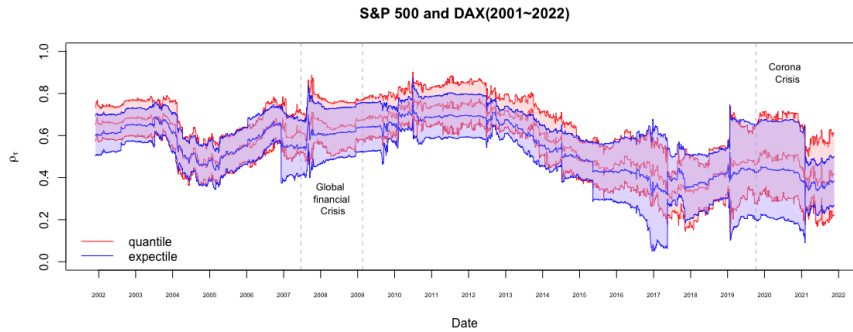


Figure 4: $\rho_{0.1}^{(e)}$ and $\rho_{0.1}^{(q)}$, 95% pointwise confidence interval(CI)

위 그림은 앞선 상황에서 500 day rolling window를 이용하여 각 구간에서의 표준편차 추정값을 구한 다음 95%신뢰구간을 시각화한 그림이다. $\tau = 0.1$ 인 경우의 상황을 그린 그림이고, Quantile의 조건부 밀도 추정과정에서 12시간 정도의 추정과정을 거쳐 분위상관계수의 표준편차 값을 구하였다. 이에 비해 $\rho_{\tau}^{(e)}$ 의 표준편차 값은 조건부 밀도함수 추정과정이 필요하지 않기 때문에 쉽게 계산이 가능하였고, 빠른 시간안에 신뢰구간을 시각화 할 수 있었다. 위 그림 또한 Expectile상관계수값이 Quantile상관계수 값보다 부드러운 양상이며, 신뢰구간의 길이는 두 상관계수 모두 비슷하게 나타난다. 상관계수 값이 quantile보다 expectile이 조금 더 작게 나타나고 있다.

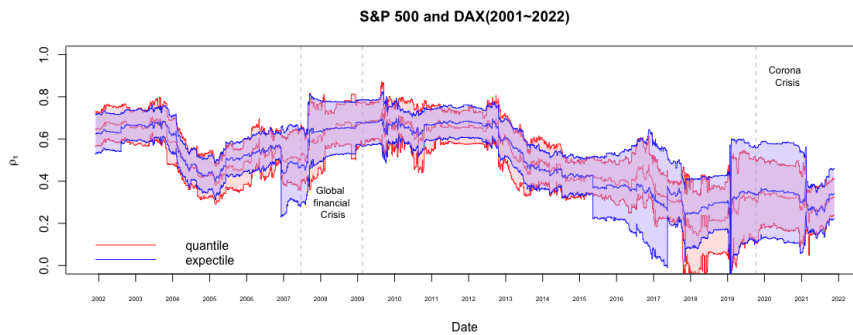


Figure 5: $\rho_{0.9}^{(e)}$ and $\rho_{0.9}^{(q)}$, 95% pointwise confidence interval(CI)

위 그림은 앞선 상황과 마찬가지로 $\tau = 0.9$ 인 경우의 상황을 그린 그림이고, Quantile의 조건부 밀도 추정과정에서 8.54시간의 추정과정을 거쳐 분위상관계수의 표준편차 값을 구하였다. 이에 비해 $\rho_{\tau}^{(e)}$ 의 표준편차 값은 조건부 밀도함수 추정과정이 필요하지 않기 때문에 쉽고 빠르게 계산이 가능하였고, 빠른 시간안에 신뢰구간을 시각화 할 수 있었다.

두 그림을 비교하자면 $\tau = 0.9$ 때는 $\tau = 0.1$ 일 때보다 $\rho_{\tau}^{(e)}$ 가 $\rho_{\tau}^{(q)}$ 보다 높은 양상을 보여주고 있다. 두 상황을 비교해보면 대체적으로 tau 값이 작은 시장이 나쁜 상황(bad market)에서는

$\rho_{\tau}^{(e)} < \rho_{\tau}^{(q)}$ 이고, 시장이 좋은 상황(good market)에서는 $\rho_{\tau}^{(e)} > \rho_{\tau}^{(q)}$ 인 양상이 드러난다.

1.5 다양한 주가지수와의 비교

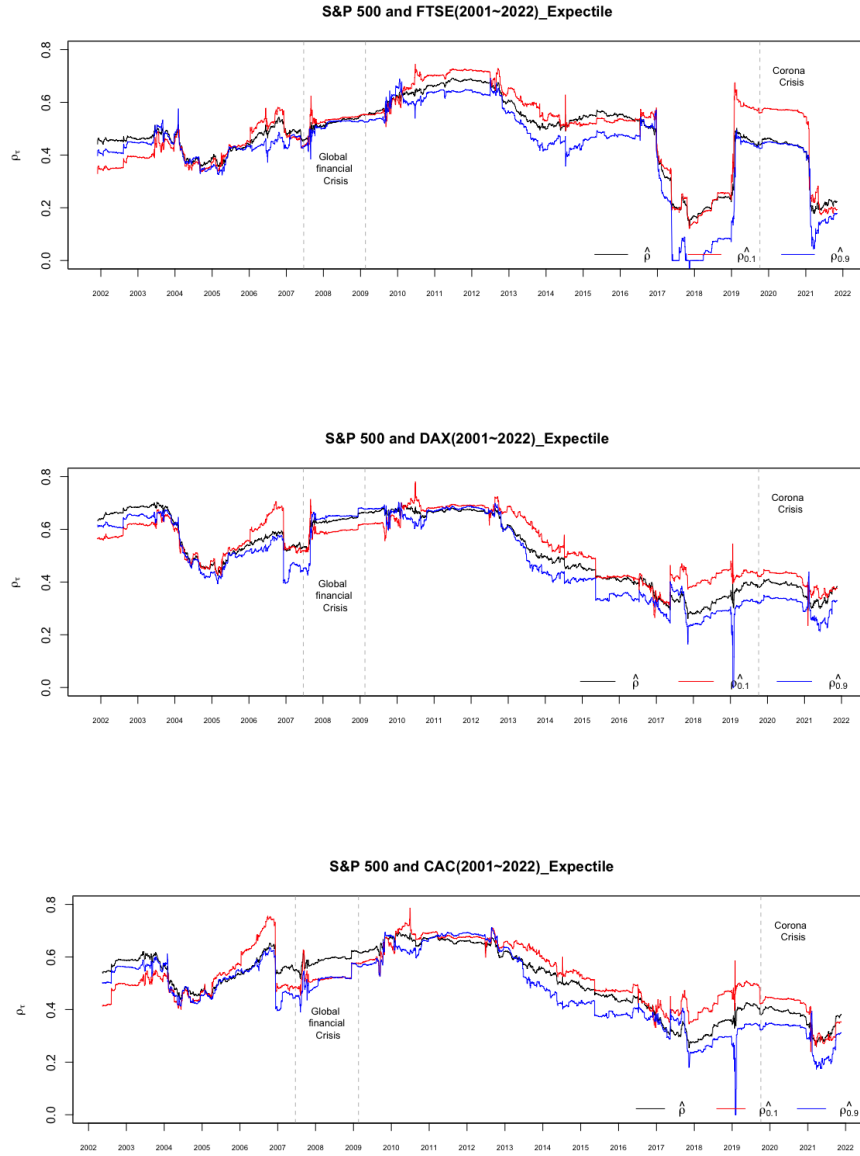


Figure 6: $\rho_{0.1}^{(e)}$ and $\rho_{0.1}^{(q)}$ and the Pearson correlation τ of pairs of stock price returns based on 500 day rolling window samples

미국의 S&P지수와 독일의 DAX지수를 비교한 것을 앞선 사례로 보았는데, 영국의 FTSE와 프랑스의 CAC40지수와와의 비교를 통하여 타당성을 검토하고자 하였다. 금융위기 상황에서 3가지 상황

모두 $\rho_{0.9}^{(e)}$ 가 $\rho_{0.1}^{(e)}$ 를 역전 한다는 점이 세 가지 상황 모두 유사하다는 점을 발견하였다. 또한 금융위기 전후 두 분위수의 격차가 전보다 후가 더 크게 난다는 점이 유사하다. 세 가지 상황 모두 코로나 상황에서 상관계수가 급격하게 낮아지는 양상 또한 유사하다.