UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SEM0172 - Vibrações Mecânicas

Projeto 2

Data: 26/06/2024

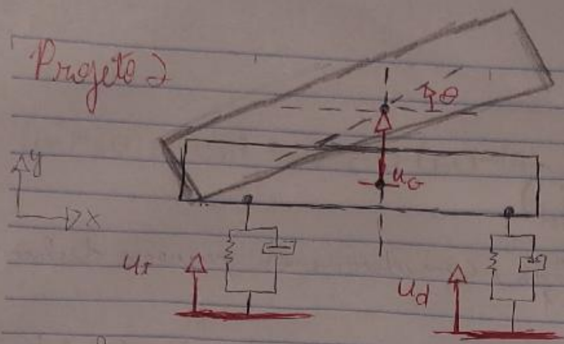
João Vítor de Oliveira - 12611734

Seções

Projeto - Simulação de resposta de sistemas de 1 GDL

Equação do movimento para o sistema

Projeto 2



• Peso desconsiderado, já que consideramos o sistema a partir do equilíbrio, portanto em $u_G = 0$, as molas estão indeformados

- Soma de forças na vertical

$$\sum F_y = M\ddot{u}_G$$

mola dianteira — mola traseira

$$M\ddot{u}_G = -K_2(u_G + l_d\,sen(\theta) - u_d) - K_2(u_G - l_t\,sen(\theta) - u_t)$$
$$-c_2(\dot{u}_G + l_d\dot{\theta}\cos(\theta) - \dot{u}_d) - c_2(\dot{u}_G - l_t\dot{\theta}\cos(\theta) - \dot{u}_t)$$

amortecedor dianteiro — amortecedor traseiro

- Soma de momentos

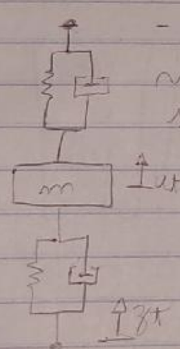
$$\sum M = I_G\ddot{\theta}$$

mola dianteira — mola traseira

$$I_G\ddot{\theta} = -K_2 l_d(u_G + l_d\,sen(\theta) - u_d) + K_2 l_t(u_G - l_t\,sen(\theta) - u_t)$$
$$-c_2 l_d(\dot{u}_G + l_d\dot{\theta}\cos(\theta) - \dot{u}_d) + c_2 l_t(\dot{u}_G - l_t\dot{\theta}\cos\theta - \dot{u}_t)$$

amortecedor dianteiro — amortecedor traseiro

- Agora para as massas m, o sistema fica como abaixo, vale lembrar que para a massa m dianteira é o mesmo sistema:



$$\sum F = m\ddot{u}_t$$

mola traseira — amortecedor traseiro

$$m\ddot{u}_t = K_2(u_G - l_t\,sen(\theta) - u_t) + c_2(\dot{u}_G - l_t\dot{\theta}\cos(\theta) - \dot{u}_t)$$
$$-K_1(u_t - z_t) - c_1(\dot{u}_t - \dot{z}_t)$$

rigidez do pneu, amortecimento do pneu

$$\sum F = m\ddot{u}_d$$

$$m\ddot{u}_d = K_2(u_G + l_d\,sen(\theta) - u_d) + c_2(\dot{u}_G + l_d\dot{\theta}\cos(\theta) - \dot{u}_d) - K_1(u_d - z_d) - c_1(\dot{u}_d - \dot{z}_d)$$

- Agora, para o sistema, consideraremos pequenos deslocamentos: $sen(\theta) = \theta$; $\cos(\theta) = 1$

$$\begin{cases} M\ddot{u}_G = -K_2(u_G + l_d\theta - u_d) - K_2(u_G - l_t\theta - u_t) - c_2(\dot{u}_G + l_d\dot{\theta} - \dot{u}_d) - c_2(\dot{u}_G - l_t\dot{\theta} - \dot{u}_t) \\ I_G\ddot{\theta} = -K_2 l_d(u_G + l_d\theta - u_d) + K_2 l_t(u_G - l_t\theta - u_t) - c_2 l_d(\dot{u}_G + l_d\dot{\theta} - \dot{u}_d) + c_2 l_t(\dot{u}_G - l_t\dot{\theta} - \dot{u}_t) \\ m\ddot{u}_d = K_2(u_G + l_d\theta - u_d) + c_2(\dot{u}_G + l_d\dot{\theta} - \dot{u}_d) - K_1(u_d - z_d) - c_1(\dot{u}_d - \dot{z}_d) \\ m\ddot{u}_t = K_2(u_G - l_t\theta - u_t) + c_2(\dot{u}_G - l_t\dot{\theta} - \dot{u}_t) - K_1(u_t - z_t) - c_1(\dot{u}_t - \dot{z}_t) \end{cases}$$

- Reescrevendo na forma $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$:

$$M\ddot{x} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_G \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{u}_d \\ \ddot{u}_t \end{bmatrix}$$

$$C\dot{x} = \begin{bmatrix} 2c_2 & c_2(l_d - l_t) & -c_2 & -c_2 \\ c_2(l_d - l_t) & c_2(l_d^2 + l_t^2) & -c_2 l_d & c_2 l_t \\ -c_2 & -c_2 l_d & c_1 + c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 l_t & 0 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_G \\ \dot{\theta} \\ \dot{u}_d \\ \dot{u}_t \end{bmatrix}$$

$$Kx = \begin{bmatrix} 2K_2 & K_2(l_d - l_t) & -K_2 & -K_2 \\ K_2(l_d - l_t) & K_2(l_d^2 + l_t^2) & -K_2 l_d & K_2 l_t \\ -K_2 & -K_2 l_d & K_1 + K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 l_t & 0 & K_1 + K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_G \\ \theta \\ u_d \\ u_t \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ c_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_D(t) \\ \dot{z}_T(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ K_1 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_D(t) \\ z_T(t) \end{bmatrix}.$$

Frequências naturais e modos de vibração

Tendo a modelagem do sistema e os parâmetros, a determinação das frequências naturais podem ser feita de forma fácil, utilizando a função `eig` no MATLAB para resolver o problema simplificado de autovalores (C ≈ 0, de modo que det(ω^2**M**+**K**)=0, obtêm-se as frequências naturais aproximadas e os modos de vibração correspondentes do sistema:

```
%% Parâmetros do modelo
L_d = 1.2; %dist. CG ao eixo dianteiro [m]
L_t = 0.8; %dist. CG ao eixo traseiro [m]
k_1 = 20000; %rigidez do pneu [N/m]
k_2 = 40000; %rigidez da suspensão [N/m]
c_1 = 5000; %amortecimento do pneu [Ns/m]
c_2 = 2000; %amortecimento da suspensão [Ns/m]
M = 1000; %massa do corpo do veículo [kg]
Ig = 200; %momento de inércia do corpo do veículo em rel. ao CG [kg m²]
m = 2; %massa não-suspensa [kg]
%% Matrizes do sist
%massa
M = [ M 0 0 0;
 0 Ig 0 0;
 0 0 m 0;
 0 0 0 m];

%amortecimento
C = [ 2*c_2 c_2*(L_d-L_t) -c_2 -c_2 ;
 c_2*(L_d-L_t) c_2*(L_d^2+L_t^2) -c_2*L_d c_2*L_t;
 -c_2 -c_2*L_d c_1+c_2 0 ;
 -c_2 c_2*L_t 0 c_1+c_2];

%rigidez
K = [ 2*k_2 k_2*(L_d-L_t) -k_2 -k_2 ;
 k_2*(L_d-L_t) k_2*(L_d^2+L_t^2) -k_2*L_d k_2*L_t;
 -k_2 -k_2*L_d k_1+k_2 0 ;
 -k_2 k_2*L_t 0 k_1+k_2];

%forçamento
F2= [ 0 0;
 0 0;
 c_1 0;
 0 c_1];

F1= [ 0 0;
 0 0;
 k_1 0;
 0 k_1];

%% Frequências naturais e respectivos modos de vibrar
[v,d]=eig(K,M); d=sqrt(diag(d));
```

```
omega=(d'); disp(omega)
```

```
    5.0367   11.7738  173.3519  174.0148
```

E os modos de vibração podem ser encontrados da seguinte maneira:

Normalização com base na massa:

```
disp(v)
```

```
    0.0314   -0.0033    0.0013   -0.0003
   -0.0074   -0.0700   -0.0003   -0.0068
    0.0150   -0.0585   -0.3652    0.6025
    0.0249    0.0353   -0.6048   -0.3638
```

```
vn1=diag(max(abs(v)))\v;
```

Normalização com base no máximo:

```
disp(vn1)
```

```
    1.0000   -0.1049    0.0412   -0.0102
   -0.1057   -1.0000   -0.0044   -0.0970
    0.0249   -0.0967   -0.6037    0.9962
    0.0414    0.0586   -1.0038   -0.6037
```

A matriz é exibida de forma que a primeira coluna corresponde ao ϕ1, a segunda ao ϕ2 e assim sucessivamente. Algumas análises podem ser feitas com esses valores:ϕ1 tem o efeito de que o GDL é excitado fora de fase com o GDL . Os GDLs e são pouco excitados, em fase. ϕ2 tem o efeito de o GDL é excitado em fase com o GDL . Os GDLs e são pouco excitados, fora de fase. ϕ3 tem o efeito de o GDL é excitado em fase com o GDL . Os GDLs e são pouco excitados, fora de fase. ϕ4 tem o efeito de o GDL é excitado fora de fase com o GDL . Os GDLs e são pouco excitados, em fase.

E a matriz modal de amortecimento é dada por:

```
%% Matriz de amortecimento modal
D=2*0.2*(M*v*diag(d)*v'*M);
Lambda=v'*D*v; zeta=(1/2)*diag(Lambda)./d;
disp(Lambda)
```

```
    2.0147   -0.0000    0.0000    0.0000
   -0.0000    4.7095   -0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000   69.3407   -0.0000
    0.0000    0.0000   -0.0000   69.6059
```

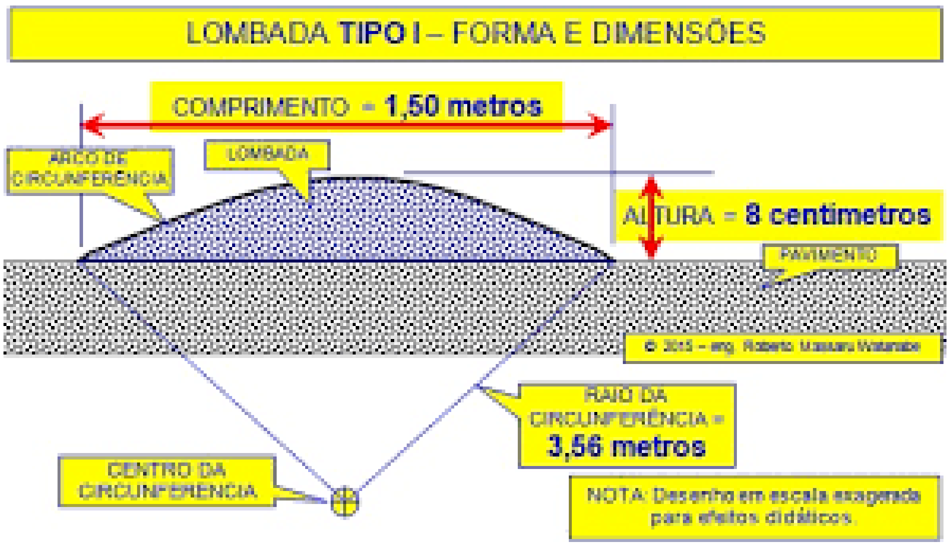
```
%% Espaço de estados
c=eye(size(M));

damping = D;
A_ss1 = [zeros(size(M)) eye(size(M));
 -M\K -M\damping ];
B_ss1 = [zeros(size(F1));
 M\F1 ];
C_ss1 = [c zeros(size(c));
 zeros(size(c)) zeros(size(c))];
```

```
D_ss1 = [zeros(size(F2));
 M\F2 ];
sys=ss(A_ss1,B_ss1,C_ss1,D_ss1);
```

Resposta transitória (impulsiva) e em frequência (FRF) com excitação nas bases traseira ou dianteira

Para essa etapa será necessário modelar a pista e o movimento do veículo. A lombada foi modelada como no projeto anterior:

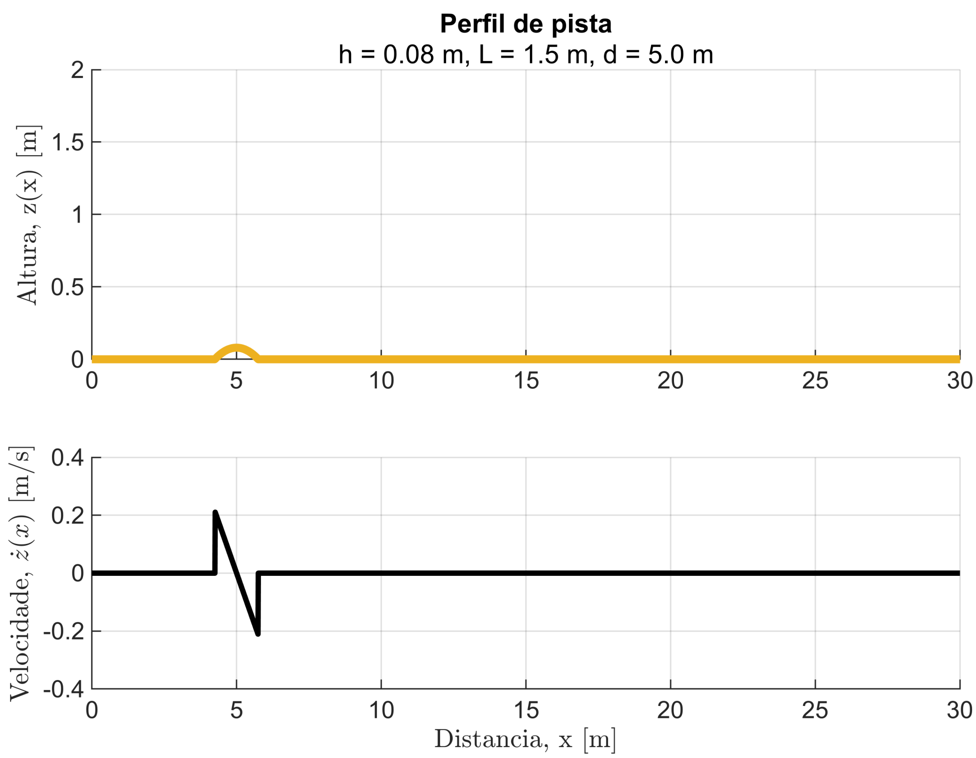
foi proposta uma amplitude de 0.08 metros e um comprimento de 1.5 m, conforme a imagem abaixo:



Já a pista, terá 100 metros de comprimento e o centro da lombada se encontrará em 5 metros da origem. Vale ressaltar que consideramos o veículo à 72km/h.

```
%% Vetor tempo
ts = 4; %tempo  [s]
dt = 0.001; %resol temporal [s]
time = linspace(0,ts,ts/dt); %vetor tempo [s]

%% Perfil de pista
res_espacial = 0.01; %resol espacial [m]
L_pista = 100; %comprimento da pista [m]
h_lombada = 0.08; %h da lombada [m]
L_lombada = 1.5; %comprimento da lombada [m]
dc = 5; %posição do centro da lombada na pista [m]
x_pista = 0:res_espacial:L_pista;
z_ref = zeros(1,length(x_pista));
vel_ref = zeros(1,length(x_pista));
for i=1:length(x_pista)
z_lombada(i) = (4*h_lombada/L_lombada^2)*(-(x_pista(i)-dc)^2+(L_lombada/2)^2);
vel_lombada(i) = -(8*h_lombada/L_lombada^2)*(x_pista(i)-dc);
z_pista(i) = max([z_ref(i) z_lombada(i)]);
 if (x_pista(i) > (dc-0.5*L_lombada)) && (x_pista(i) < (dc+0.5*L_lombada))
 vel_pista(i) = vel_lombada(i);
```

```
    else
    vel_pista(i) = vel_ref(i);
    end
end

%plotar pista
figure ()
t = tiledlayout(2,1,'tilespacing','compact');
nexttile
daspect([5 1 1])
hold on ; grid on
title('Perfil de pista',sprintf('h = %.2f m, L = %.1f m, d = %.1f m',h_lombada,L_lombada,dc));
ylabel('Altura, z(x) [m]','interpreter','latex')
plot(x_pista,z_pista,'linewidth',3,'color','#EDB120')
xlim([0 30])
ylim([0 2])
nexttile
daspect([10 1 1])
hold on ; grid on
ylabel('Velocidade, $\dot{z}(x)$ [m/s]','interpreter','latex')
xlabel('Distancia, x [m]','interpreter','latex')
plot(x_pista,vel_pista,'linewidth',2,'color','k')
xlim([0 30])
ylim([-0.4 0.4])
```

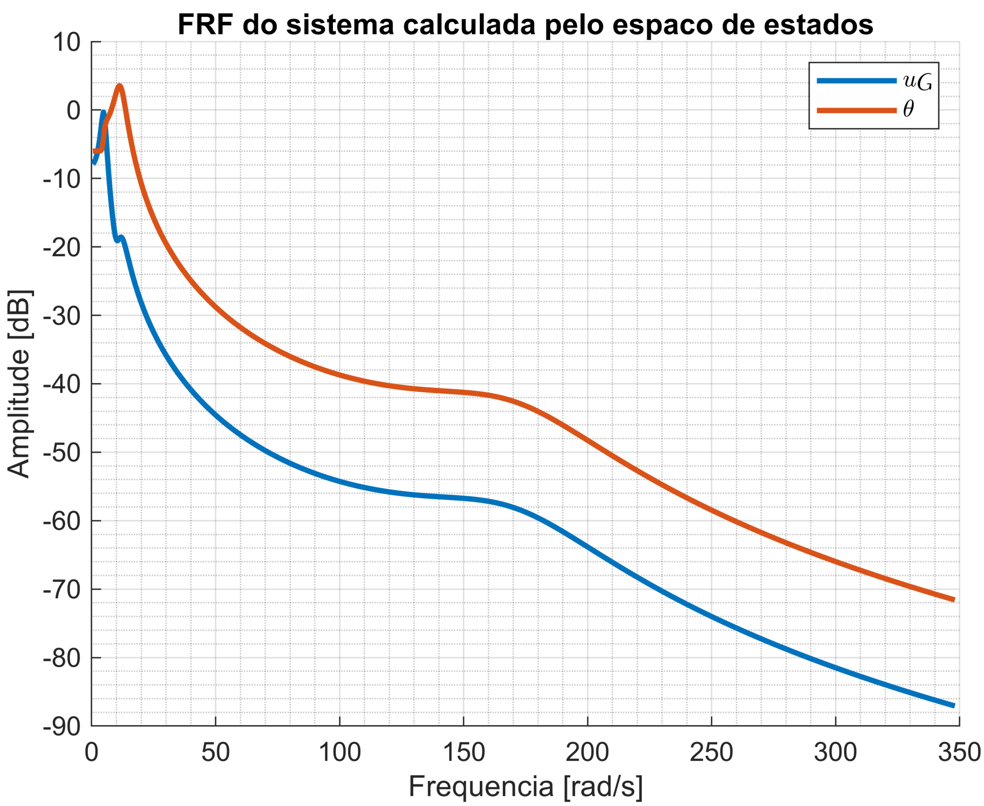



```
%% Definição de inputs da lombada
v = 20; %velocidade do carro [m/s]
```

```
lon_pos_1 = v*time + L_t+L_d; %posição do eixo dianteiro [m]
lon_pos_2 = v*time; %posição do eixo traseiro [m]
u1 = interp1(x_pista,z_pista,lon_pos_1);
u2 = interp1(x_pista,z_pista,lon_pos_2);
u_vet = [u1' u2']; %input [m]
```

Encontraremos FRF, através do espaço de estados utilizando a função bode do Matlab:

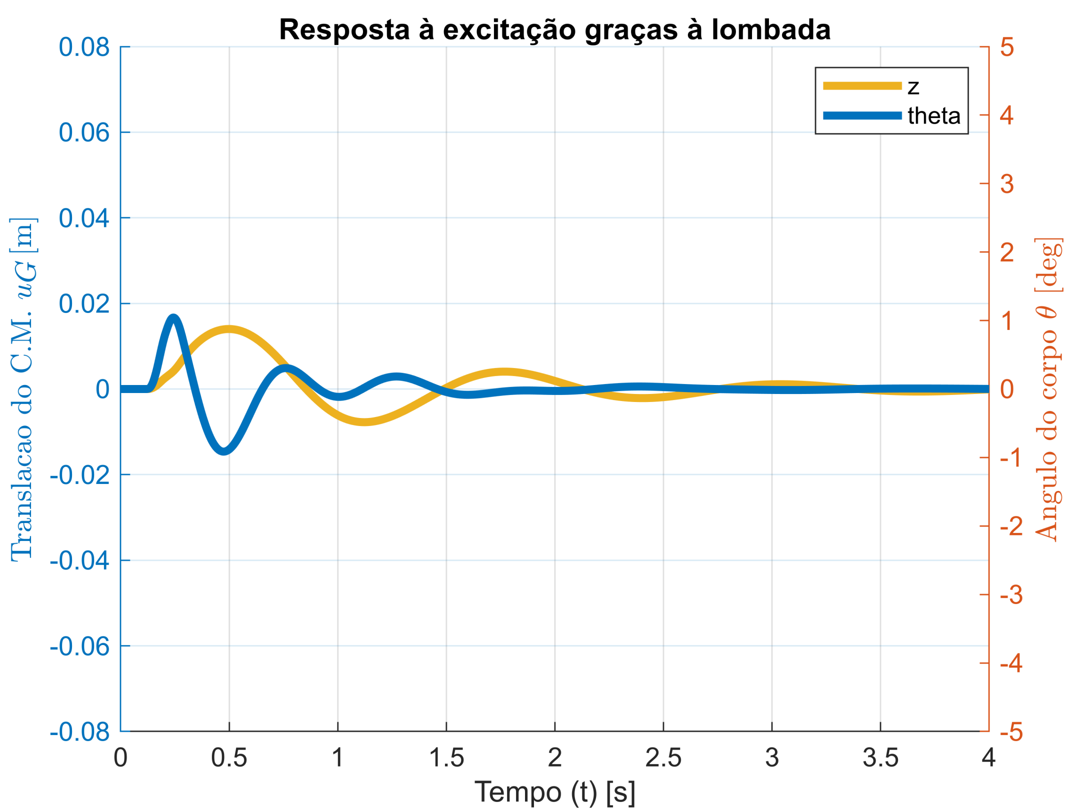
```
%% FRF de uG e theta usando espaço de estados
om=[min(d)/10:.001:max(d)*2];
aH1=bode(sys(1,1),om); aH1=aH1(:);
aH2=bode(sys(2,1),om); aH2=aH2(:);
figure()
hold on ; grid on; grid minor
h1c=plot(om,db(aH1),'linewidth',2);
h2c=plot(om,db(aH2),'linewidth',2);
xlim([0 350.00])
ylim([-90 10])
xlabel('Frequencia [rad/s]'), ylabel('Amplitude [dB]'),
title('FRF do sistema calculada pelo espaco de estados')
legend('$u_G$','$\theta$','interpreter','latex')
```



Respostas quando o veículo passa pela lombada

Agora a resposta à lombada no domínio do tempo para o u_g e θ pode ser calculada usando a função lsim do Matlab:

```
%% Resposta à lombada no domínio do tempo
[y,time,x] = lsim(sys,u_vet,time);
uG = y(:,1); %translação vertical do CG [m]
theta = y(:,2); %inclinação do carro [rad]
ud = y(:,3); %deslocamento vertical da massa não-suspensa da dianteira [m]
ut = y(:,4); %deslocamento vertical da massa não-suspensa da traseira [m]
figure ()
title('Resposta à excitação graças à lombada')
hold on ; grid on
xlabel('Tempo (t) [s]')
yyaxis left
plot(time,uG,'linewidth',3,'Color','#EDB120')
ylabel('Translacao do C.M. $u_G$ [m]','interpreter','latex')
xlim([0 ts])
ylim([-h_lombada h_lombada])
yyaxis right
plot(time,theta*(180/pi),'linewidth',3,'color','#0072BD')
ylabel('Angulo do corpo $\theta$ [deg]','interpreter','latex')
legend('z','theta')
xlim([0 ts])
ylim([-5 5])
```



Nesse gráfico é interessante notar a defasagem entre a entrada de cada eixo na lombada (eixo dianteiro chegando na lombada em mais ou menos 0.25 segundos e o eixo traseiro mais ou menos em 0.45 segundos).

Conclusão

Após os estudos utilizando o Matlab é notável que as simulações são imprescindíveis para um melhor estudo, entendimento e visualização do problema e da resposta do sistema ao distúrbio da pista. Vale notar que com a análise do último gráfico, é possível perceber que o sistema de suspensão deste veículo é bem efetivo, uma vez que a entrada tinha 8 centímetros e altura e a resposta do sistema foi abaixo dos 2 centímetros, mostrando sua capacidade de "absorver" essa entrada.