Leandro Marín	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
Facultad Informática Universidad Murcia	**Álgebra y Matemática Discreta**	Previo: 30 min.
	Producto Escalar y Espacio Ortogonal	Clase: 60 min.

1. Resumen

Vídeo : `https://youtu.be/U12NROXuCo0`

1.1. Producto Escalar

Nota 1. *A lo largo de este tema y en todos aquellos que tratemos el producto escalar o los conceptos asociados, trabajaremos exclusivamente sobre el cuerpo de los números reales.*

Definición 2. *Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos* **producto escalar** *de u y v y lo denotaremos $u \cdot v$ ó $\langle u, v\rangle$ al número real $u^\top v$.*

Es decir, si $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, entonces $u \cdot v = u^\top v = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$.

Proposición 3. *El producto escalar cumple las siguientes propiedades*

1. $(au + bv) \cdot w = a(u \cdot w) + b(v \cdot w)$ *para todo* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $w \cdot (au + bv) = a(w \cdot u) + b(w \cdot v)$ *para todo* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$.
3. $u \cdot v = v \cdot u$ *para todo* $u, v \in \mathbb{R}^n$.
4. $u \cdot u \geq 0$ *para todo* $u \in \mathbb{R}^n$.
5. $u \cdot u = 0$ *si y solo si* $u = 0$.

Demostración. Las propiedades (1) y (2) son consecuencia de las propiedades del producto de matrices. Para ver la propiedad (3), únicamente tenemos que poner la definición y notar que el producto de números reales es conmutativo:

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n = v \cdot u.$$

La propiedad (4) es consecuencia de que el cuadrado de un número real siempre es positivo o 0, por lo tanto, $u_1^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0$. Para que ese valor sea 0, la única posibilidad es que u_i^2 sea 0 para todo i, porque si para alguno de los índices fuera positivo, la suma nunca podría ser 0 ya que los otros términos no podrían nunca restar valor a la suma total. □

Definición 4. *Vamos a definir el concepto de vectores y espacios ortogonales del siguiente modo:*

1. *Dados dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$, diremos que son* **vectores ortogonales** *y lo denotaremos $u \perp v$, si $u \cdot v = 0$.*
2. *Un vector $u \in \mathbb{R}^n$ diremos que es* **ortogonal a un espacio** *$V \leq \mathbb{R}^n$, y lo denotaremos $u \perp V$, si $u \cdot v = 0$ para todo $v \in V$.*
3. *Dos espacios $U, V \leq \mathbb{R}^n$ diremos que son* **espacios ortogonales** *y lo denotaremos $U \perp V$, si $u \cdot v = 0$ para todo $u \in U$ y $v \in V$.*

Proposición 5. *Sean $U = C(B)$ y $V = C(B')$ dos espacios vectoriales dados en términos de conjuntos generadores B y B'. Entonces U y V son espacios ortogonales si y solo si $B^\top B' = 0$.*

Demostración. Las columnas de B son vectores de U y las de B' son vectores de V, por lo tanto $u^\top v = u \cdot v = 0$ para toda columna u de B y toda columna v de B', eso prueba que $B^\top B' = 0$.
Recíprocamente, supongamos que $B^\top B' = 0$, y tomemos vectores $u \in U = C(B)$ y $v \in V = C(B')$. El vector u lo podremos escribir como combinación lineal de las columnas de B, es decir, $u = Bx$ y el vector v como $B'y$ para ciertos vectores de parámetros x e y. Entonces $u \cdot v = (Bx)^\top B'y = x^\top B^\top B'y = 0$ porque $B^\top B' = 0$. □

Proposición 6. *Sean U y V dos espacios ortogonales, entonces $U \cap V = 0$.*

Demostración. Sea $u \in U \cap V$. Como $u \in U$ y $u \in V$, el vector u tiene que ser ortogonal a sí mismo, es decir, $u \cdot u = 0$, pero entonces $u = 0$ por la Proposición 3. □

Definición 7. *Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos* **complemento ortogonal de** U *al conjunto*

$$U^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid u \cdot v = 0 \textit{ para todo } u \in U\}.$$

Proposición 8. *El complemento ortogonal tiene las siguientes propiedades:*

1. $0^{\perp} = \mathbb{R}^n$.
2. $\mathbb{R}^{n\perp} = 0$.
3. $U \cap U^{\perp} = 0$.
4. *Si $U = C(B)$, entonces $U^{\perp} = N(B^{\top})$.*
5. $\mathsf{dim}(U) + \mathsf{dim}(U^{\perp}) = n$.
6. $U \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^n$.
7. *Si $V = N(H)$, entonces $V^{\perp} = C(H^{\top})$.*
8. $(U^{\perp})^{\perp} = U$.
9. *$U \leq V$ si y solo si $V^{\perp} \leq U^{\perp}$.*
10. $(U \cap V)^{\perp} = U^{\perp} + V^{\perp}$.
11. $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$.

Demostración.

1. Todos los vectores multiplicados por 0 dan 0 por lo que $0^{\perp} = \mathbb{R}^n$.
2. Sea $u \in (\mathbb{R}^n)^{\perp}$, entonces en particular $u \cdot u = 0$ y por lo tanto $u = 0$.
3. Esto es porque son espacios ortogonales.
4. Para que un vector v sea ortogonal a todos los vectores de U, basta con que lo sea a los vectores de un conjunto generador, o lo que es lo mismo $B^{\top}v = 0$, pero esa es precisamente la definición de que v esté en $N(B^{\top})$.
5. Pongamos U en forma paramétrica, $U = C(B)$, entonces $\mathsf{dim}(U) = \mathsf{rango}(B)$, pero $\mathsf{dim}(U^{\perp}) = \mathsf{dim}(N(B^{\top})) = n - \mathsf{rango}(B^{\top}) = n - \mathsf{rango}(n)$, por lo tanto, $\mathsf{dim}(U + U^{\perp}) = \mathsf{dim}(U) + \mathsf{dim}(U^{\perp}) - \mathsf{dim}(U \cap U^{\perp}) = r + (n - r) - 0 = n$.
6. $U + U^{\perp}$ es un subespacio de dimensión n contenido en $\mathbb{R}^n$, por lo que tiene que ser todo $\mathbb{R}^n$.
7. Supongamos que $u \in C(H^{\top})$, entonces $u = H^{\top}x$ para algún vector de parámetros x y tomando traspuestas, $u^{\top} = x^{\top}H$. En estas condiciones, para cualquier $v \in N(H)$ se tendrá que $u \cdot v = u^{\top}v = x^{\top}Hv0$ porque $Hv = 0$. Esto prueba que $u \in V^{\perp}$ y por lo tanto $C(H^{\top}) \leq V^{\perp}$. Para demostrar que ambos espacios son iguales, vamos a ver que su dimensión es la misma: Por un lado, la dimensión de $C(H^{\top})$ sabemos que es igual al rango de H, por otro lado, la dimensión de $V = N(H)$ es igual a n menos el rango de H por lo que $\mathsf{dim}(V^{\perp})$ es de nuevo el rango de H.
8. Tomando $U = C(B)$, $(U^{\perp})^{\perp} = N(B^{\top})^{\perp} = C((B^{\top})^{\top}) = C(B) = U$.

9. Las siguientes condiciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} U \leq V &\Leftrightarrow C(B) \leq N(H) \\ &\Leftrightarrow HB = 0 \\ &\Leftrightarrow B^\top H^\top = 0 \\ &\Leftrightarrow C(H^\top) \leq N(B^\top) \\ &\Leftrightarrow V^\perp \leq U^\perp \end{aligned}$$

10. Como $U \cap V \leq U$ tenemos que $U^\perp \leq (U \cap V)^\perp$ y por el mismo motivo, $V^\perp \leq (U \cap V)^\perp$. Esto prueba que $U^\perp + V^\perp \leq (U \cap V)^\perp$. Para completar la demostración, vamos a ver que $(U \cap V)^\perp$ es el espacio más pequeño con esta propiedad. Supongamos que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ tal que $U^\perp + V^\perp \leq W$, entonces $U^\perp \leq W$ y por lo tanto $W^\perp \leq U$. Lo mismo pasa con V, es decir, $W^\perp \leq V$, pero entonces $W^\perp \leq U \cap V$ y por lo tanto $(U \cap V)^\perp \leq W$.

11. La demostración es dual de la del apartado anterior.

□

Definición 9. *Sea $U \leq \mathbb{R}^n$ y v un vector de $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$, el vector v se descompone de forma única como suma de un vector u de U y un u' de $U^\perp$. Llamaremos proyección de v en el espacio U, y la denotaremos, $\mathsf{proy}_U(v)$, al vector u y $\mathsf{proy}_{U^\perp}(v) = u'$.*

Proposición 10. *Sea $U = C(B)$ y $v \in \mathbb{R}^n$, entonces*

1. *La matriz $A = (B^\top B)^{-1} B^\top$ es una matriz inversa por la izquierda de B.*

2. *$\mathsf{proy}_U(v) = BAv$.*

Demostración. 1. $AB = (B^\top B)^{-1} B^\top B = I$.

2. El vector BAv está claramente en U porque es de la forma Bx para el vector de parámetros $x = Av$. Tenemos que probar que $v - \mathsf{proy}_U(v)$ está en $U^\perp$, es decir, que $B^\top(v - \mathsf{proy}_U(v)) = 0$, pero eso es cierto porque $B^\top(v - B(B^\top B)^{-1} B^\top v) = B^\top v - \underbrace{B^\top B(B^\top B)^{-1}}_{=I} B^\top v = B^\top v - B^\top v = 0$.

□

Definición 11. *Dada una base B de un espacio vectorial V, diremos que es una* **base ortogonal** *si dados dos vectores distintos de la base, siempre son ortogonales. Si B es la matriz de la base, eso es equivalente a decir que $B^\top B$ es una matriz diagonal.*

Teorema 12 (Método de Gram-Schmidt)**.** *Todo espacio $V \leq \mathbb{R}^n$ tiene una base ortogonal.*

Demostración. Partimos de una base cualquiera del espacio V, por ejemplo, $v_1, v_2, \cdots, v_k$. El método de Gram-Schmidt nos permite obtener a partir de esta una base ortogonal haciendo las correcciones necesarias en los vectores de forma que obtengamos una nueva base en la cual todos los vectores sean ortogonales entre sí.

1. El primer vector w_1 será v_1.

2. El segundo vector será $w_2 = v_2 - \alpha w_1$ donde buscaremos el valor de α para conseguir la ortogonalidad. Entonces $w_1 \cdot w_2 = 0$ implica que $w_1 \cdot v_2 - \alpha w_1 \cdot w_1 = 0$ y por lo tanto $\alpha = \frac{w_1 \cdot v_2}{w_1 \cdot w_1}$. Sustituyendo obtenemos que

$$w_2 = v_2 - \frac{w_1 \cdot v_2}{w_1 \cdot w_1} w_1.$$

3. El tercer vector será $w_3 = v_3 - \lambda w_2 - \mu w_2$. Imponiendo las condiciones $w_3 \cdot w_1 = 0$ y $w_2 \cdot w_2 = 0$ obtenemos los valores de λ y μ que nos dan

$$w_3 = v_3 - \frac{w_2 \cdot v_3}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{w_3 \cdot v_3}{w_3 \cdot w_3} w_3.$$

4. Procediendo de esa forma, podemos obtener todos los vectores de la base de forma recursiva.

$\square$

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios