Fundamentos Lógicos de la Informática

Lógica Categórica

Grupo docente FLI

Dpto. Ingeniería de al Información y las Comunicaciones
Facultad de Informática
Universidad de Murcia

Desarrollo

Lógica Categórica

- Las oraciones lógicas reciben el nombre de Proposiciones Categóricas.
- Una proposición categórica relaciona los miembros de dos categorías por inclusión.

"Todos los perros son tontos"

- Símbolos similares al álgebra

Álgebra	Lógica Categórica
$f(x) \bigcirc (-g(x))$	$P(x) \rightarrow (\neg Q(x))$

Además se da información sobre cuántos x están relacionados.

$$\forall, \exists$$

- Los esquemas lógicos son los Silogismos Categóricos.
  - Dos proposiciones categóricas concluyen una tercera proposición categórica.
  - Son deductivos formalmente válidos 19 de los 64 modos posibles.

Desarrollo

Categorías

Los conjuntos de toda la vida

Definición (Categoría o Conjunto)

*Cualquier colección no ordenada de individuos forma un **conjunto**.*

Definición (Elemento)

*Un individuo que se encuentra en esa colección C se llama **elemento del conjunto** C, en cuyo caso se dice que **el elemento pertenece al conjunto** C.*

Notación

- $NombreDelConjunto = \{\text{elementos que componen el conjunto}\}$
- $x \in NombreDelConjunto$, $x \notin NombreDelConjunto$

Definición de conjuntos

Notación

- **Extensional.** Enumerando (nombrar) **cada uno** de sus elementos una sola vez.
  - $NombreDelConjunto = \{elem_1, elem_2, \ldots, elem_n, \ldots, \}$
- **Intensional.** A partir de una o varias **propiedades** que permitan caracterizar los elementos que lo componen.
  - $NombreDelConjunto = \{x|\ x \text{ cumple algunas propiedades.}\}$
  - $NombreDelConjunto = \{x|\ \ P(x)\}$
    - Recibe el nombre de **notación de constructor de conjuntos** (set builder notation).
    - Si P es un propiedad, $P(x)$ indica que un individuo x cumple la propiedad P.
    - La propiedad P recibe el nombre de **propiedad característica**, **contenido** o **intensión** del conjunto que define.
- **Por recursión.** Utilizando una **definición recursiva**.
  - $NombreDelConjunto = \{x|\ \ R(x)\}$ donde $R(x)$ indica si x cumple o no una regla recursiva R. Es un caso particular de definición por intensión.

Principio de Extensionalidad

Principio de Extensionalidad

- Dos conjuntos, A y B, son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos (y se nota por $A = B$).
- Alternativamente: $(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} (A = B)$

Ojo con el significado de los símbolos. No confundir:

	Sintaxis	Sobre las expresiones
L0	$p \to \leftrightarrow \dots$	$\equiv \not\equiv$
Conjuntos	$x\ A \in \notin$	$= \neq$
En general		$\Rightarrow \Leftarrow \Leftrightarrow \stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$

Conjuntos Especiales

- **Inclusión** de conjuntos: subconjunto, superconjunto.
  $A \subseteq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x \in A \Rightarrow x \in B)$. La negación es $A \not\subseteq B$.
- **Inclusión estricta** de conjuntos.
  $(A \subset B) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (A \subseteq B \text{ y } A \neq B)$. La negación es $A \not\subset B$.
- **Conjunto Total** (conjunto universal o universo de discurso).
  El mayor conjunto posible que pueda considerar para un estudio. $\mathcal{U}$
- **Conjunto vacío**. El conjunto sin elementos. $\emptyset$, $\{\}$.
  ¡ $\{\emptyset\}$ NO es el conjunto vacío !
- **Partes de un conjunto**.
  El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto.
  $\mathcal{P}(X) = \{A | \ A \subseteq X\}$

Operaciones de conjuntos

Diagramas de Venn

Unión. $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$

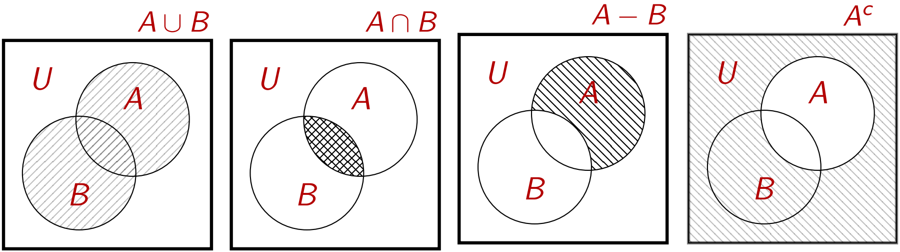
Intersección. $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$

Si $A \cap B = \emptyset$ se dice que A y B son **conjuntos disjuntos**.

Diferencia. $A - B = A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Complemento. $\bar{A} = A^c = U - A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in U | x \notin A\}$

Representación gráfica de 2 conjuntos por Diagramas de Venn

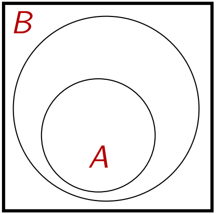


Diagramas de Euler vs Diagramas de Venn

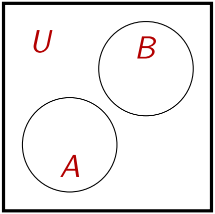
Para 2 conjuntos

- Diagramas de Euler

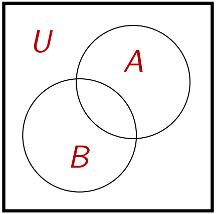
$A \subseteq B$



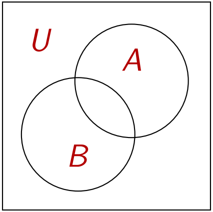
$A \cap B = \emptyset$



$A \cap B \neq \emptyset; A \not\subseteq B$



- Diagrama de Venn (sombreando adecuadamente)



Desarrollo

Operaciones de conjuntos vs Conectivos lógicos

- La lógica categórica establece relaciones entre categorías.
- Su patrón base es: *objeto* es (está/pertenece a) *Categoria*.

$P(x)$:"x es P", $R(x)$:"x es R", $C(x)$:"x es C", ...

- Lógica proposicional vs Lógica Categórica

Expresión natural	Se formaliza		
	En conjuntos	En lógica	
		Proposicional	Sujeto/Categoría
"x es P"	$x \in A$	p	$P(x)$
"x no es P"	$x \notin A$, $x \in A^c$	$\neg p$	$\neg P(x)$
"x es P o x es Q"	$x \in A \cup B$	$p \vee q$	$P(x) \vee Q(x)$
"x es P y x es Q"	$x \in A \cap B$	$p \wedge q$	$P(x) \wedge Q(x)$
"Si x es P, x es Q"	$x \in A$ y $A \subseteq B$	$p \rightarrow q$	$P(x) \rightarrow Q(x)$
"x es P sii x es Q"	$x \in A$ y $A = B$	$p \leftrightarrow q$	$P(x) \leftrightarrow Q(x)$

donde: p :"x es P", q :"x es Q",

$P(x)$:"x es P", $Q(x)$:"x es Q", $A = \{x|\ P(x)\}$, $B = \{x|\ Q(x)\}$

Sintaxis de la Lógica Categórica

Alfabeto o vocabulario

Constantes. Son los símbolos reservados *verdadero* (V) y *falso* (F).
$\mathbb{B} = \{V, F\}$.

Variables. Secuencia de letras (normalmente una, suele ser minúscula).
Representan objetos del universo: x, y, ...

Categorias. Secuencia de letras (normalmente una, suele ser mayúscula).

Conectivos u operadores booleanos.

- $\wedge$ Conjunción (y)
- $\vee$ Disyunción (o)
- $\neg$ Negación (no)
- $\rightarrow$ Implicación (entonces)

Cuantificadores. $\forall$, $\exists$. Siempre irán con una variable:

- $\forall x$ Para cada/todos los objetos x ...
- $\neg\forall x$ No para cada/todos los objetos x ...
- $\exists x$ Existe/Hay [algún / al menos] objeto x ...
- $\neg\exists x$ Ningún/No existe/No hay objeto x ...

Otros símbolos. paréntesis '( )', corchetes '[]', etc.

Sintaxis de la Lógica Categórica

Gramática o Sintaxis

Definición (Términos)

Cualquier símbolo variable es un término.

Definición (Categoría)

Una categoría es una expresión que consta de un símbolo categoría seguido de un término entre paréntesis.

$$P(x),\ Alto(y),\ bajo(x),\ T(z), \ldots$$

Definición (Elemento Atómico)

Una expresión se dice que es un átomo si es un símbolo constante o es una categoría.

Formas Normales Categóricas

Definición (Construcción de Proposiciones Categóricas en forma normal)

Es el menor conjunto de fórmulas, denotado por $\mathcal{F}_C$, que responden a los siguientes patrones:

- *Proposición universal afirmativa. Todo S* **es** *P.* $\forall x(S(x) \to P(x))$
- *Proposición universal negativa. Ningún S* **es** *P.* $\forall x(S(x) \to \neg P(x))$
- *Proposición particular afirmativa. Algún S* **es** *P.* $\exists x(S(x) \land P(x))$
- *Proposición particular negativa. Algún S no* **es** *P.* $\exists x(S(x) \land \neg P(x))$

- Siempre con el verbo **ser**/**estar**.
- Una categoría puede ser el resultado de combinar varias categorías. Si $A(x)$ y $B(x)$ son categorías con la misma variable, se pueden construir las categorías $\neg A(x)$, $(A(x) \land B(x))$, $(A(x) \lor B(x))$.

Desarrollo

De lo natural a lo formal

- Considerara todas las orientaciones indicadas en la lógica proposicional.

- Expresar la oración con los verbos ser/estar (si es posible) y usar "la construcción de proposiciones categóricas en forma normal" más adecuada, teniendo en cuenta que:

$\forall x P(x)$ puede representar

- Todo objeto cumple la propiedad P.
- Cualquier individuo verifica P.
- Cada ente cumple P.

$\exists x P(x)$ puede representar

- Hay un objeto que cumple la propiedad P.
- Al menos un individuo verifica P.
- Existe un objeto cumpliendo P.

Desarrollo

Evaluación I

Aproximación Intuitiva (No es una definición formal)

La evaluación de una proposición categórica α interpretada en un mundo $\mathcal{M}$ viene dado por el siguiente procedimiento:

- Identificar cada categoría de α, $P_\alpha(x)$, con un conjunto de $\mathcal{M}$, $P_\mathcal{M}$.
- Lee $P_\alpha(d)$ como $d_\mathcal{M} \in P_\mathcal{M}$, y si es cierto establece $v_I(P_\alpha(d)) = V$.

Que la fórmula $P(d)$ sea verdadera en un modelo **no significa**

- ni que el símbolo d pertenezca al símbolo P,
- ni que el símbolo d pertenezca al conjunto que representa a P,
- ni que el objeto que representa al símbolo d pertenezca al símbolo P.

Que la fórmula $P(d)$ sea verdadera en un modelo **sí significa** que el objeto que representa al símbolo d pertenezca al conjunto que representa a P.

Evaluación II

Aproximación Intuitiva (No es una definición formal)

- Si α es una expresión ...
  - ... con cuantificador universal $\forall x\ \beta(x)$, su evaluación viene dada así:

$$v(\alpha) = v(\forall x\ \beta(x)) = \begin{cases} V & \text{si } v(\beta(d)) = V \text{ para todo } d_{\mathcal{M}} \in \mathbb{D}_{\mathcal{M}} \\ F & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  - ... con cuantificador existencial $\exists x\ \beta(x)$, su evaluación viene dada así:

$$v(\alpha) = v(\exists x\ \beta(x)) = \begin{cases} V & \text{si } v(\beta(d)) = V \text{ para algún } d_{\mathcal{M}} \in \mathbb{D}_{\mathcal{M}} \\ F & \text{en otro caso} \end{cases}$$

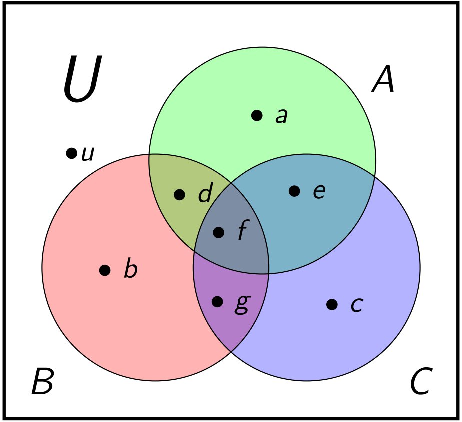
  - ... de otro tipo, aplicar la tabla de verdad de los conectivos de L0.

Ojo. Esto no es una definición formal. La definición formal está en L1.

Desarrollo

Diagramas de Venn vs Diagramas de Euler

Representación de todos los conjuntos con 3 categorías



Región 1: $u \in U - (A \cup B \cup C) = \neg(A \cup B \cup C)$

Región 2: $a \in A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

Región 3: $b \in B - (A \cup C) = (B - A) \cap (B - C)$.

Región 4: $c \in C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$.

Región 5: $d \in (A \cap B) - C$.

Región 6: $e \in (A \cap C) - B$.

Región 7: $f \in (A \cap B \cap C)$.

Región 8: $g \in (B \cap C) - A$.

Los diagramas de Euler no tienen que mostrar todas las intersecciones.

Familia de Conjuntos

Definición (Familia de Conjuntos)

Una familia de conjuntos es un conjunto $\mathcal{A}$ en el que todos sus elementos son conjuntos.

Ejemplo: Partes de un conjunto (o conjunto potencia). $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Definición (Partición de un conjunto)

Dado un conjunto $A \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(A)$ es una partición de A si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

- $\bigcup \mathcal{A} = A$.
- *Si* $B, C \in \mathcal{A}$ *y* $B \neq C$, *entonces* $B \cap C = \emptyset$.

Propiedades con operaciones de conjuntos I

¡Memoriza!

- Asociativa.

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)
\end{aligned}
$$

- Conmutativa.

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A \\
A \cap B &= B \cap A
\end{aligned}
$$

- Distributiva.

$$
\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

Propiedades con operaciones de conjuntos II

¡Memoriza!

- Absorción.

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap A) &= A \\ A \cap (B \cup A) &= A \end{aligned}$$

- Idempotencia.

$$\begin{aligned} A \cup A &= A \\ A \cap A &= A \end{aligned}$$

Además, si se fija un dominio U pueden comprobarse las siguientes propiedades para subconjuntos dados A y B de U:

Propiedades con operaciones de conjuntos III

¡Memoriza!

- Leyes de De Morgan.

$$\begin{aligned}(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c\end{aligned}$$

- Complementación.

$$\begin{aligned}A \cup (A^c) &= U \\ A \cap (A^c) &= \emptyset\end{aligned}$$

- Doble Negación.

$$(A^c)^c = A$$

A esta propiedad también se le conoce como doble complementación.

Propiedades con operaciones de conjuntos IV

¡Memoriza!

- $\emptyset$ (conjunto vacío) y U (conjunto total). $A \subseteq U$.

$$
\begin{aligned}
A \cup U &= U \\
A \cup \emptyset &= A \\
A \cap U &= A \\
A \cap \emptyset &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Estas propiedades también se conocen como las propiedades del cero ($\emptyset$) y uno (U).