Fundamentos Lógicos de la Informática

Lógica de Predicados de Primer Orden

Grupo docente FLI

Dpto. Ingeniería de al Información y las Comunicaciones
Facultad de Informática
Universidad de Murcia

Desarrollo

Lógica de Predicados

- Lógica de Predicados trabaja con las “oraciones lógicas”.
    - De Orden Cero. Es la lógica proposicional.
      Oraciones lógicas formadas por proposiciones.
    - De Primer Orden.
      Considera la estructura interna de las proposiciones: los objetos y las relaciones entre ellos. Trabaja con **variables de individuo**.
        - Lógica categórica: Dado un objeto, expresa relaciones entre dos categorías por inclusión de dicho objeto.
        - Lógica de relaciones: Expresa relaciones binarias entre dos objetos por predicados.
        - Lógica de Predicados de Primer Orden: Expresa relaciones de cualquier orden.
    - De Segundo Orden: Extiende la de primer orden, y donde las propiedades, relaciones y funciones también puede ser cuantificadas.
- Símbolos similares al álgebra de conjuntos.
- Los esquemas lógicos que considera son los deductivos formalmente válidos

Predicados, una extensión natural de categorías

Recuerda: $P = \{x|\ P(x)\}$, es decir $Conj = \{x|x \text{ es Propiedad}\}$

Expresión natural	Se formaliza: En conjuntos	Se formaliza: En lógica	
"x es Q"	$x \in Q$	$Q(x)$	Ser alto
"x e y son R"	$(x, y) \in R$	$R(x, y)$	Ser hermanos
"x, y y z son S"	$(x, y, z) \in S$	$S(x, y, z)$	Alumno-Curso-Not
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
"Términos" son "Cualidad"	Relaciones ¡Conjuntos!	Predicados	

- En LC estudiamos conjuntos y después categorías.
- Ahora, en L1, estudiaremos relaciones y después predicados.

Desarrollo

Relaciones Binarias de Conjuntos son Conjuntos

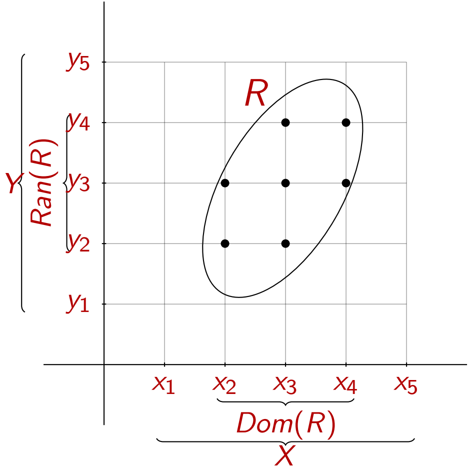
- Dados dos conjuntos A y B, se dice que R es una **relación binaria entre** A y B si $R \subseteq A \times B$.
- Si $B = A$, se dice que $R \subseteq A \times A = A^2$ es una *relación sobre* A.
- x está relacionado con y por la relación R:

  $$(x, y) \in R,\ xRy \text{ o } R(x, y).$$
- x **no** está relacionado con y por la relación R:

  $$(x, y) \notin R,\ x \not R y,\ \neg(xRy),\ \neg R(x, y).$$
- Dada una relación binaria R se define:
  - El dominio de la relación: $Dom(R) = \{x | x \in A,\ xRy \text{ para algún } y\}$
  - El rango de la relación: $Ran(R) = \{y | y \in B,\ xRy \text{ para algún } x\}$
  - El campo de la relación: $Campo(R) = Dom(R) \cup Ran(R)$

Relaciones Binarias

Representación cartesiana y por Diagramas de Venn



Relaciones Binarias

Representación tabular. Digrafos.

Ejemplo.

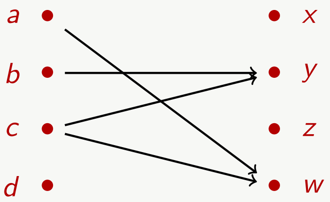
Se consideran $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{w, x, y, z\}$ y $R \subset A \times B$.

$$R = \{(a, w), (b, y), (c, w), (c, y)\}$$

Representación tabular

	w	x	y	z
a	1	0	0	0
b	0	0	1	0
c	1	0	1	0
d	0	0	0	0

Representación con digrafo



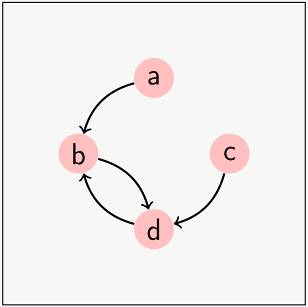
Relaciones Binarias

Grafo dirigido

Si la relación binaria R se define sobre **un único conjunto** A.

Ejemplo.

Dado $A = \{a, b, c, d\}$ se define $R = \{(a, b), (b, d), (c, d), (d, b)\} \subseteq A \times A$.



Relación n-aria son Conjuntos

Dada una familia de conjuntos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, se define:

- R es una *relación n-ária* entre $A_1, A_2 \ldots, A_n$ si $R \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i$.
- Si $\forall i\ A_i = A$, se dice que $R \subseteq \prod_{i=1}^{n} A = A^n$ es una *relación sobre A*.
- Si una tupla ordenada $\tilde{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} A_i$, se dice que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están relacionados por la relación R o que la tupla cumple la relación R. Otra forma de denotar este hecho es $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- En una relación n-aria se define:
  - El dominio de la relación como el conjunto:
    $$Dom(R) = \{\tilde{x}_{n-1} |\ \text{existe } x_n \in A_n \text{ verificando } (\tilde{x}_{n-1}, x_n) \in R\}$$
  - El rango de la relación como el conjunto:
    $$Ran(R) = \{x_n | x_n \in A_n,\ (\tilde{x}_{n-1}, x_n) \in R \text{ para algún } \tilde{x}_{n-1}\}$$
  - El campo de la relación como el conjunto: $Campo(R) = Dom(R) \cup Ran(R)$.

Nota: $(\tilde{x}_{n-1}, x_n) \overset{def}{=} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$

Funciones I

Unas relaciones muy especiales, pero conjuntos al fin y al cabo.

Definición (Función)

Una relación n-aria es una función si y sólo si para cada elemento $\tilde{x}_{n-1} \in Dom(R)$ existe un único elemento $y \in Ran(R)$ relacionado con $\tilde{x}_{n-1}$. Es decir, y es el único elemento que verifica $(\tilde{x}_{n-1}, y) \in R$.

- Se suelen reservar las letras minúsculas f, g y h para denotar la relaciones del tipo función.

¿Necesitamos indicar el último elemento? No, cambio de notación:

- En lugar de utilizar la notación $R(\tilde{x}_{n-1}, y)$ o $(\tilde{x}_{n-1}, y) \in R$, se suele utilizar la notación $f(\tilde{x}_{n-1}) = y$
- Igualmente, la forma más usual de denotar una función es mediante la notación $f : \prod_{i=1}^{n-1} A_i \longrightarrow A_n$, en vez de $f \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i$.

Funciones II

Unas relaciones muy especiales, pero conjuntos al fin y al cabo.

Definición (Función inyectiva)

Una función f es inyectiva si verifica que no existen dos elementos diferentes de su dominio que tengan la misma imagen.

$$f \text{ es inyectiva} \overset{def}{\iff} \left|\begin{array}{l} \text{No existen } x, x' \in Dom(f), \\ \text{verificando } x \neq x' \text{ y } f(x) = f(x') \end{array}\right.$$

Así, para demostrar si una función inyectiva, deberá considera dos elementos $x, x' \in Dom(f)$ y comprobar algunas de estas implicaciones:

- O bien, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
- O bien, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Observa: x puede ser un objeto, una pareja, una terna, ..., depende.

Funciones III

Unas relaciones muy especiales, pero conjuntos al fin y al cabo.

Definición (Función suprayectiva)

Una función f es suprayectiva si su rango coincide con todo el conjunto sobre el que se define. La función $f : A \longrightarrow B$ es suprayectiva si $Rang(f) = B$.

Definición (Función biyectiva)

Una función f es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.

Desarrollo

Sintaxis de la Lógica de Predicados

Alfabeto o vocabulario

Constantes. Son los símbolos reservados *verdadero* (V) y *falso* (F), y secuencia de letras que representan objetos Definidos.

Variables. Secuencia de letras que representan objetos Indefinidos. El conjunto de los posibles objetos que puede representar recibe el nombre de **dominio de la variable**.

Predicados. Secuencia de letras que representa una propiedad o relación.

Funciones. Secuencia de letras que representa una **relación-función**.

Conectivos u operadores booleanos.

- $\wedge$ Conjunción (y)
- $\vee$ Disyunción (o)
- $\neg$ Negación (no)
- $\rightarrow$ Implicación (entonces)
- $\leftrightarrow$ Doble implicación (sii)

Cuantificadores. Su usan solo dos.

- Cuantificador universal: $\forall$. Se lee *para cada*.
- Cuantificador existencial: $\exists$. Se lee *existe (al menos)*.

Otros símbolos. paréntesis '( )', corchetes '[]', llaves '{}'.

Sintaxis de la Lógica de Predicados I

Gramática o Sintaxis

Definición (Construcción de términos)

Un término es una expresión que se obtiene al aplicar la siguiente definición recursiva:

- **Regla Base:** *Cualquier símbolo constante que represente a un objeto definido o cualquier símbolo variable es un término.*
- **Regla Recursiva:** *Si* $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ *son términos, también lo son*
  - $f_1(\tau_i)$, *para cualquier función* f_1 *de un argumento.*
  - $f_2(\tau_i, \tau_j)$, *para cualquier* f_2, *función de dos argumentos.*
  - $\ldots$
  - $f_n(\overbrace{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \tau_n}^{n})$, *para cualquier función* f_n *de* n*-argumentos.*

Sintaxis de la Lógica de Predicados II

Gramática o Sintaxis

Definición (Predicado)

Un predicado es una expresión que consta de un símbolo predicado seguido de una serie de términos.

$$R(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$$

Definición (Elemento Atómico)

Una expresión se dice que es un átomo si es el símbolo constante V o el símbolo constante F o un predicado.

Sintaxis de la Lógica de Predicados III

Gramática o Sintaxis

Definición (Construcción de Fórmulas de Predicados)

El conjunto de fórmulas, denotado por $\mathcal{F}_1$, es el menor conjunto que se puede obtener al aplicar la siguiente definición recursiva:

- **Regla Base:** *Cualquier átomo $P \in \mathcal{P}$ (constante o predicado) es una fbf.*
- **Regla Recursiva:** *Si α y β son dos fbf también lo son:*
  - $\neg\alpha$, *la negación de la fbf.*
  - $(\alpha \wedge \beta)$, *la conjunción de las dos fbfs.*
  - $(\alpha \vee \beta)$, *la disyunción de las dos fbfs.*
  - $(\alpha \rightarrow \beta)$, *el condicionamiento de las dos fbfs.*
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, *las dos fbfs son equivalentes.*
  - $(\forall x\ \alpha)$, *para cada x (arbitrario, pero fijo) se cumple α.*
  - $(\exists x\ \alpha)$, *existe un x (concreto, fijado) para el que se cumple α.*

***Nota:** Por comodidad, el último paréntesis no suele ponerse.*

Algunas definiciones básicas

Definición (Tipos de variables)

- *Una variable está **ligada** si es una variable que está en un f.b.f. y está cuantificada.*
- *Una variable está **libre** si está en una f.b.f y no está cuatificada.*

Definición (Tipos de f.b.f.)

- *Una f.b.f. es **cerrada** (o es una sentencia) si todas los símbolos variables están ligados.*
- *Una f.b.f. es **abierta** si al menos un símbolo variable está libre.*
- *Un **literal** es una expresión atómica o su negación.*
- *Una **cláusula** es la dada por la disyunción de uno o más literales.*

f.b.f. y simplificación de paréntesis

- Una f.b.f. es la que responde a la definición de la transparencia anterior.
- Pero al igual que en L0, se pueden considerar otras expresiones con menos paréntesis que representen a una f.b.f..
- Usaremos este consenso sobre la precedencia de operadores:
  1. $\neg$, $\forall$, $\exists$ (con asociatividad por la derecha)
     $\neg\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \quad \rightsquigarrow \quad (\neg(\forall x P(x)) \rightarrow Q(x))$, segunda x libre.
     $\forall x \neg P(x) \rightarrow Q(x) \quad \rightsquigarrow \quad ((\forall x \neg P(x)) \rightarrow Q(x))$, segunda x libre.
  2. $\wedge$, $\vee$ (con asociatividad por la izquierda)
  3. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (con asociatividad por la izquierda)

Si apareciesen paréntesis se aplicará la asociatividad que indique.

Desarrollo

De lo natural a lo formal - I

Se utilizan las misma orientaciones que las indicadas en la lógica proposicional y en la lógica categórica. Añadir las siguientes:

Objetos concretos. Si se mencionan objetos con "nombres y apellidos" formalizarlos con una constante de objeto.

- Juan es amigo de María. Juan se puede formalizar por J y María por M.

Categorías. Las propiedades quedan formalizadas por un predicado monario (aridad uno), al igual que en la lógica categórica.

- Son listos: $L(x)$:"x es listo".

Relaciones. Las relaciones entre objetos se formaliza con predicados de aridad mayor o igual a 2. P.e. los verbos transitivos.

- Juan compra comida: $C(x, y)$:"x compra y".

De lo natural a lo formal - II

Se utilizan las misma orientaciones que las indicadas en la lógica proposicional y en la lógica categórica. Añadir las siguientes:

Variables Libres. Para hacer referencia a un objeto que puede tomar diferentes valores (es variable), y la fórmula dice algo concerniente a esos valores de la variable sin informar sobre su cantidad (es desconocida).

- Algunas personas se relacionan (con desconocido): $\exists x(P(x) \wedge R(x, y))$
- Todos son mas bajos que él (desconocido): $\forall x B(x, y)$
- El cuadrado del número (desconocido) es 4: $I(f(x), 4)$ ($x^2 = 4$)

Variables Ligadas. Si hay indicios de cuántos objetos cumplen un predicado. Introducir palabras como "cada", "todo", "alguno", "hay", ...

- Todas son figuras cuadradas: $\forall x(P(x) \wedge C(x))$
- Si x es un elemento del conjunto lo es de un conjunto mayor: $\forall x(P(x, y) \rightarrow \forall z(P(x, z) \wedge M(z, x)))$ (conjuntos x desconocidos)

Si hay ambigüedad sobre la cuantificación, dejar la variable libre (si no crea una ambigüedad mayor). Ejemplo: Todos aman: $\forall x A(x, y)$. ¿a todos o a algunos? y la dejo libre. Ejemplo: Son figuras cuadradas: $P(x) \wedge C(x)$. ¿todas o algunas? Pero **necesito cuantificador**.

Desarrollo

De lo formal a lo natural I

Definición (Interpretación)

Una interpretación de cierta expresión α *en un mundo* $\mathbb{M}$ *es una cuaterna* $\mathcal{I}_\alpha = (\mathbb{D}, \mathcal{C}_\mathbb{D}, \mathcal{F}_\mathbb{D}, \mathcal{R}_\mathbb{D})$, *donde:*

- $\mathbb{D}$, *conjunto no vacío de objetos, llamado dominio de la interpretación.*
- $C_\mathbb{D}$, *conjunto de objetos concretos,* $C_\alpha \longmapsto C_\mathbb{D}$.
- $\mathcal{F}_\mathbb{D}$, *conjunto de funciones concretas.* $f_\alpha \longmapsto f_\mathbb{D}$.
- $R_\mathbb{D}$, *conjunto de relaciones concretas.* $R_\alpha \longmapsto R_\mathbb{D}$.

Definición (Asignación de variables)

Dada una interpretación $\mathcal{I}_\alpha$, *una asignación de variables es* $\sigma_{\mathcal{I}_\alpha} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{D}$, *función que relaciona cada variable de* α *con un elemento del dominio.*

$\sigma_{\mathcal{I}_\alpha|x \hookrightarrow d}$ *es una asignación de variables definida igual que* $\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}$ *excepto que a* x *se le asigna el objeto* d.

De lo formal a lo natural II

Definición (Asignación)

Dadas $\mathcal{I}_\alpha$ y $\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}$, una asignación de valores de verdad es $v_{\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}} : \mathcal{P}_\alpha \longrightarrow \mathbb{B}$, función que asigna un valor de verdad a cada elemento atómico de α.

Dado un predicado atómico $R_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{P}_\alpha$, de la oración α, con términos t_i, entonces:

- $v_{\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}}(R_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = V$ sii $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in R_\mathbb{D}$, donde
    - $R_\mathbb{D}$ es la relación asociada a R_α por la interpretación $\mathcal{I}_\alpha$.
    - Si t_i es una constante o función, d_i es el que viene determinado por la interpretación $\mathcal{I}_\alpha$.
    - Si t_i es una variable, d_i es el que viene determinado por la asignación de variables $\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}$.
- $v_{\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}}(R_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = F$ sii $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \notin R_\mathbb{D}$, donde $R_\mathbb{D}$ y d_i se definen como en el caso anterior.

De lo formal a lo natural III

Definición (Evaluación)

Dadas α, $\mathcal{I}_\alpha$, $\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}$ *y* $v_{\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}}$ *se define* $v(\alpha)$ *como:*

- **Regla Base:** *Si* $\alpha \in \mathcal{P}$, *entonces* $v(\alpha) = v_{\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}}(\alpha)$.
- **Regla Recursiva:** *Si* $\alpha \notin \mathcal{P}$, *entonces:*

α	$v(\beta)$	$v(\alpha)$
$\neg\beta$	V	F
	F	V
$\forall x\ \beta$	V	*si* $\forall d \in \mathbb{D},\ v_{\lvert x \hookrightarrow d}(\beta) = V$
	F	*en otro caso*
$\exists x\ \beta$	V	*si* $\exists d \in \mathbb{D},\ v_{\lvert x \hookrightarrow d}(\beta) = V$
	F	*en otro caso*

α	$v(\beta)$	$v(\gamma)$	$v(\alpha)$
$\beta \wedge \gamma$	V	V	V
	otro caso		F
$\beta \vee \gamma$	F	F	F
	otro caso		V
$\beta \to \gamma$	V	F	F
	otro caso		V
$\beta \leftrightarrow \gamma$	$v(\beta) = v(\gamma)$		V
	otro caso		F

Evaluación con variables libres

Cuando una fórmula sea abierta (con variables libres) no se puede decir si es verdadera o falsa, dependerá del valor de las variables libres.
La evaluación de la fórmula consiste en:

1. Asignar valores del dominio a las variables libres y comprobar la satisfacibilidad de la fórmula.
2. Enumerar los valores del dominio que la hacen cierta.
3. Enumerar los valores del dominio que la hacen falsa.

Ejemplo.

La evaluación de: $P(x, s(1))$:"x es menor estricto que el siguiente del número 1", interpretado en el conjunto de los números naturales, hace que la oración sea:

- Verdadera, para todos los $x \in \{1\}$.
- Falsa, para todos los $x \in \{s(1), s(s(1)), \ldots\} = \{2, 3, \ldots\}$.

Desarrollo

Equivalencias

Junto a las equivalencia de la lógica proposicional, añadir:

$$
\begin{array}{lcl}
\neg\exists x \alpha_{[x]} & \equiv & \forall x \neg\alpha_{[x]} \\
\neg\exists x \neg\alpha_{[x]} & \equiv & \forall x \alpha_{[x]} \\
\neg\forall x \alpha_{[x]} & \equiv & \exists x \neg\alpha_{[x]} \\
\neg\forall x \neg\alpha_{[x]} & \equiv & \exists x \alpha_{[x]} \\
\forall x(\alpha_{[x]} \wedge \beta_{[x]}) & \equiv & (\forall x \alpha_{[x]}) \wedge (\forall y \beta_{[y]}) \\
\exists x(\alpha_{[x]} \vee \beta_{[x]}) & \equiv & (\exists x \alpha_{[x]}) \vee (\exists y \beta_{[y]})
\end{array}
$$

Ojo

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x(\alpha_{[x]} \vee \beta_{[x]}) & \not\equiv & (\forall x \alpha_{[x]}) \vee (\forall y \beta_{[y]}) \\
\exists x(\alpha_{[x]} \wedge \beta_{[x]}) & \not\equiv & (\exists x \alpha_{[x]}) \wedge (\exists y \beta_{[y]})
\end{array}
$$

Recuerda el convenio: Letras griegas para oraciones complejas. $\alpha_{[x]}$ NO es una función, es una expresión de L1 en la que aparece la variable x.

Desarrollo

Sustituciones y Particularizaciones

Concepto y utilidad

Concepto:

- Asignación de valor en variable: $x \hookrightarrow d$
  Identifica x por un objeto real d de un mundo real.
- Sustitución de variable por término: τ/x
  Sustituye x por otros símbolo (término) del mundo formal.

Aplicaciones:

- Reescribir expresiones. P.e. $P(y)$ en vez de $P(x)$.
- Particularizar variables a constantes, para
  - Aplicar reglas semánticas. P.e. Modus Ponens.
  - Aplicar reglas sintácticas como Deducción Natural.
- Unificación: ¿Son iguales 2 predicados salvo sustitución?
  - Algoritmo de Robinson. P.e. $P(x, y)s = P(A, f(z))$.
  - Sistema deductivos basado en la regla de resolución.

Sustituciones y Particularizaciones

Definiciones

- Una **sustitución** es una expresión $s = \{t_1/v_1, t_2/v_2, \ldots, t_n/v_n\}$ que indica:
  - Todas ocurrencia de la **variable** v_i se debe sustituir por el **término** t_i
  - Todas las sustituciones se hacen simultáneamente, no paso a paso.
- Una **particularización por sustitución** de una expresión consiste en sustituir sus variables por términos (variables, constantes o funciones).
- Una **particularización básica** es una particularización por sustitución donde las variables se sutituyen por constantes.
- Una **particularización alfabética** es una particularización por sustitución donde las variables se sutituyen por otras variables.
- Dada una expresión P y una sustitución s, la notación Ps indica la **particularización por sustitución** de la expresión P según la sustitución s.

Composición de Sustituciones

Definición (Composición de sustituciones)

La composición de las sustituciones s y t, $s \cdot t$, es la sustitución obtenida aplicando t a s y añadiendo después los elementos de t que no tiene variables de s.

Si $s = \{a_1/x_1, a_2/x_2, \ldots, a_n/x_n\}$ y $t = \{b_1/y_1, b_2/y_2, \ldots, b_m/y_m\}$ con X e Y los conjuntos de variables sustituidas según s y t respectivamente, entonces $s \cdot t = \{(a_i t)/x_i |\ x_i \neq a_i t\} \cup \{b_i/y_i |\ y_i \in Y - X\}$,

Ejemplo: $s = \{f(y)/x, z/y\}$ y $t = \{a/x, y/z, b/y\}$. ¿$s \cdot t$?

1. Defino los conjuntos $X = \{x, y\}$ e $Y = \{x, z, y\}$
2. Construyo la secuencia “inicial”:
   $s \cdot t \approx \{f(y)t/x, zt/y\} \cup \{a/x, y/z, b/y\}$
3. Aplico t a s: $s \cdot t \approx \{f(b)/x, y/y\} \cup \{a/x, y/z, b/y\}$
4. Elimino los elementos t.q. $x_i = a_i t$: $s \cdot t \approx \{f(b)/x\} \cup \{a/x, y/z, b/y\}$
5. Suprimo los elementos t.q. $y_i \in Y \cap X$: $s \cdot t \approx \{f(b)/x\} \cup \{y/z\}$
6. **Solución:** $s \cdot t = \{f(b)/x, y/z\}$

Desarrollo

Razonamientos Válidos

$\models$ se define igual que en L0, y son válidos:

- Todos los razonamientos válidos indicados en L0.
- Los 19 razonamientos válidos de LC.
- Los razonamientos válidos derivados de las reglas de equivalencia de la sección anterior.
- Los obtenidos por particularizaciones. Ejemplo: Modus Ponens: $\forall x(P(x) \to Q(x)), P(K) \models Q(K)$
  1. Supongamos, $v(\forall x(P(x) \to Q(x))) = v(P(K)) = V$
  2. $v([P(x) \to Q(x)]\{K/x\}) = v(P(K) \to Q(K)) = V$ y $v(P(K)) = V$
  3. Concluimos, $v(Q(K)) = V$

  Observa:

  K/x sustituye x por otros símbolo del mundo formal.

  $x \hookrightarrow d$ identifica x por un objeto real d de un mundo real.
- Y muchos más ...

Desarrollo

Relación inversa, complementaria, simétrica y dual

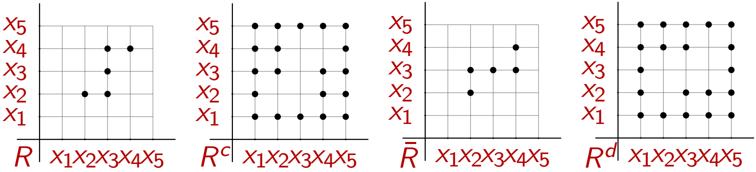
Definición (Relación inversa)

Dada $R \subseteq A \times B$, *se define su relación inversa,* R^{-1}, *como* $R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A |\ (x,y) \in R\}$. *Es decir* $yR^{-1}x \overset{def}{\Longleftrightarrow} xRy$.

Definición

Dada una relación $R \subseteq A \times A$, *se definen:*

- *Relación complementaria* R^c: $a, b \in A$, $aR^c b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \not R b$.
- *Relación simétrica* $\bar{R}$: *para cualesquiera* $a, b \in A$, $a\bar{R}b \overset{def}{\Longleftrightarrow} bRa$.
- *Relación dual* R^d: *para cualesquiera* $a, b \in A$, $aR^d b \overset{def}{\Longleftrightarrow} b \not R a$.



Propiedades importantes

Irreflexiva o antirreflexiva. $\forall a \in A \; a \not R a$

Reflexiva. $\forall a \in A \; aRa$

Simétrica. $\forall a, b \in A$, si aRb entonces bRa.

Transitiva. $\forall a, b, c \in A$, si aRb y bRc entonces aRc.

Asimétrica. $\forall a, b \in A$, si aRb entonces $b \not R a$.

Antisimétrica. $\forall a, b \in A$, si aRb y bRa entonces $a = b$.

Intransitiva. $\forall a, b, c \in A$, si aRb y bRc entonces $a \not R c$.

Negativamente Transitiva. $\forall a, b, c \in A$, si $a \not R b$ y $b \not R c$ entonces $a \not R c$.

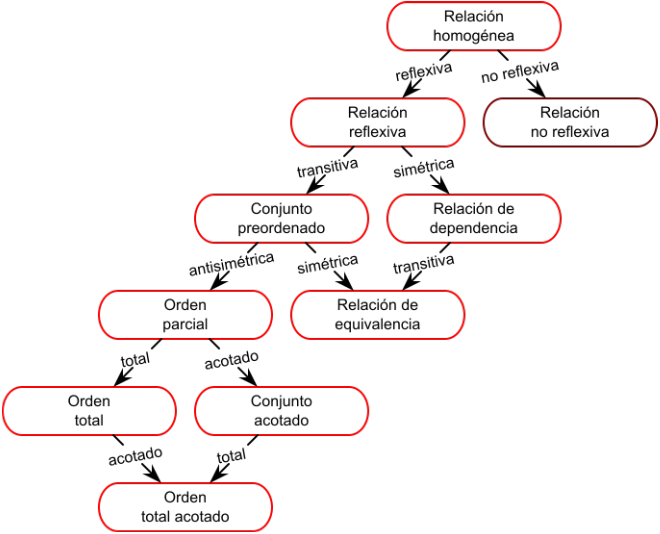
Completa o total. $\forall a, b \in A$, o bien aRb, o bien bRa, o ambas.

Serial. $\forall a \in A$, si $a \in A$ entonces existe $b \in A$ verificando aRb.

Euclidea. $\forall a, b, c \in A$ si aRb y aRc entonces bRc.

Incestuosa. $\forall a, b, c \in A$, si aRb y aRc, existe un $d \in A$ verificando bRd, cRd.

Tipos de Relaciones



Fuente: Wikipedia

Relación de Equivalencia I

Definición (Relación de equivalencia)

Una relación R sobre A es una relación binaria que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva (en cuyo caso se suele denotar por $\sim$).

Dada una relación de equivalencia $(A, \sim)$, puede realizar el siguiente proceso:

1. Considerar un elemento $x \in A$ y definir el conjunto $[x] = \emptyset$.
2. Considerar todos los elementos $y \in A$ diferentes de x, y si $x \sim y$ entonces añadir y a $[x]$
3. Repetir los dos pasos anteriores hasta que se hayan construido todos los posibles conjuntos $[x]$.

- $[x]$ recibe el nombre de **clase de equivalencia**, que es un conjunto.
- Cualquier $y \in [x]$ es un **representententante de la clase**.

Relación de Equivalencia II

Definición (Clase de equivalencia, conjunto cociente, representante.)

Dada una relación de equivalencia $(A, \sim)$*,*

- *Para cada* $x \in A$ *se define la* ***clase de equivalencia*** *de* x *como el conjunto:*
$$[x] = \{y | y \in A \text{ verificando } x \sim y\}$$
- *La familia de subconjuntos formada por los subconjuntos de* A *dados por las clases de equivalencia recibe el nombre de* ***conjunto cociente****, que se denota por* $A/\sim$ *y es una partición de* A*:*
$$A/\sim = \{[x] |\ x \in A\}$$
- *Si* $C \in A/\sim$*, entonces* C *se corresponde con algún* $[x]$ *(e.d.* $C = [x]$*) y se dice que* x *es un* ***representante*** *de la clase* C*. Obviamente, una clase de equivalencia puede tener tantos representantes como elementos componga la clase.*

Ejemplo de Relación de Equivalencia

Ejemplo.

Considere el conjunto de los números naturales y la siguiente relación:

$$x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} y - x = 2k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Si realiza el proceso anterior obtendrá dos conjuntos:

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} |\ n \text{ es par}\} \text{ y } [1] = \{n \in \mathbb{Z} |\ n \text{ es impar}\}.$$

Debe entender esto:

- Si considera uno de los conjuntos, todos los elementos que pertenecen a él definiría el mismo conjunto. Por ejemplo, los elementos -2, 0 y 2 pertenecen a $[0]$ y verifican que
$$\ldots = [-2] = [0] = [2] = \ldots$$
En definitiva, cualquier $n \in [0]$ representaría al mismo conjunto, sería un representante.
- Los dos conjuntos son disjuntos ($[x] \cap [y] = \emptyset$) y reconstruyen el conjunto de los números enteros: $\mathbb{Z} = [0] \cup [1]$: ¡es una partición!

Ejercicios de Relación de Equivalencia

- ¿Es una relación de equivalencia? Dos alumnos están relacionados sii pertenecen al mismo grupo (supuesto que no hay repetidores).
- ¿Es una relación de equivalencia? Dado un conjunto de objetos (p.e. números), $x \sim y$ sii $x = y$.
- Determinar las clases de equivalencia para: Dado un k, p.e. $k = 3$, $a \sim b$ sii al dividir a y b por k, dan el mismo resto.
- Determinar las clases de equivalencia para: Si $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$, $(a, b) \sim (c, d)$ sii $a + d = b + c$.
- Dibuja los grafos para los que se define esta relación entre nodos $n \sim m$ sii $(n, m) \in R$ o existe r t.q. $(n, r), (r, m) \in R$
- Cómo deben ser los grafos para los que se define esta relación? $n \sim m$ sii existe un camino que los une.

Por simplicidad asume que los grafos son no dirigidos.