Boletín 2

1. a) Demostración por contraejemplo

Si $\alpha = p \to q$ y $\beta = \neg p \vee q$ entonces tienen el mismo conjunto clausal, pero que $\alpha = \beta$ no es lo mismo que $\alpha \equiv \beta$. El primero establece una relación de igualdad entre los átomos y los conectivos de ambas expresiones (que no son iguales) y el segundo establece una equivalencia lógica entre ambas expresiones (lo cual sí cumplen).

b) Demostración directa

Basándonos en el resultado anterior y en las reglas de equivalencia lógicas podemos afirmar que dos conjuntos clausales que son idénticos serán siempre equivalentes ($\alpha \equiv \beta$), aunque no por ello serán iguales ($\alpha \neq \beta$)

2. a) Por definición, la disyunción de cero literales será siempre una contradicción, haciendo así que la cláusula vacía sea insatisfacible

b) Al no quedar ninguna afirmación que pueda ser negada se asume que el conjunto vacío de oraciones es una tautología

c) Basándonos en la respuesta anterior, si el conjunto vacío de oraciones es una tautología entonces a su vez este será satisfacible

d) La cláusula trivial es en la que aparece un literal y su negado, aunque como resolución busca insatisfacibilidades (o la llamada cláusula vacía) no aporta nada.

e) En un árbol de resolución, si es un nodo hoja éxito (o verdadero) entonces el conjunto inicial será satisfacible y a su vez todas las ramas del "camino" que ha tomado también lo serán. Por lo tanto, si un nodo no hoja sabemos que es satisfacible entonces el conjunto inicial también lo será.

f) Por definición sabemos que DPLL es un algoritmo que estudia la satisfacibilidad de una oración a partir de llevar a cabo una serie de transformaciones o reglas sucesivas que hacen a la oración equivalente en todos sus pasos

g) Por definición, si una resolvente es satisfacible entonces las cláusulas padres también lo son y viceversa

h) Un árbol semántico funciona igual que una tabla de verdad: estudia todos los posibles modelos de F a través de la propagación de los literales por una rama y sus negados por otra hasta llegar a los nodos hoja, que serán o nodo fallo (interpretación falsa) o nodo éxito (interpretación verdadera)

3. a) Cierta. La resolvente será satisfacible si y solo si el conjunto inicial lo es y viceversa

b) Cierta. Basándonos en el resultado anterior se puede comprobar que esta propiedad se cumple, ya que $\{C1, C_2\} \models Re(C1, C_2)$

c) Falsa. Partiendo de la definición de resolvente ($\{C1, C2\} \models Re(C1, C2)$) y del teorema de la deducción semántica obtenemos que $C1 \wedge C2 \rightarrow Re$ es válido, aunque en este caso no se cumple puesto que $C1 = F$ y $C2 = F$.

Si el conjunto inicial es insatisfacible todas sus resolventes también lo serán.

d) Falsa. Se siguen cumpliendo las misma propiedades del apartado a para la insatisfacibilidad

4. Al no existir ninguna ramificación, los caminos de propagación unitaria son los únicos que pueden llegar a la cláusula vacía o al literal puro, y al no poder elegir otro camino (puesto que solo existe uno) este no requiere de backtracking

5. a) Falso. Que un nodo sea cerrado no nos aporta nada en la solución. Solo podremos afirmar que se trata de una contradicción en el caso de que el tableaux sea completo y cerrado (todos sus nodos son cerrados).

b) Cierto. No hará falta continuar expandiendo el nodo ya que todos los que provengan de ese nodo darán lugar a un nodo cerrado

c) Falso. Para comprobar si un razonamiento es válido mediante tableaux deberemos incluir en el conjunto inicial de oraciones el negado de la conclusión y que al estudiarlo este nos salga completo y cerrado (insatisfacible),

d) Falso. La técnica de tableaux semánticos concluye cuando encuentra un nodo abierto. Por lo tanto, si el tableaux no es completo no nos aportará todas las interpretaciones en la que la oración es verdad

6. a) $((p \to q) \land p) \to q \equiv ((\neg p \lor q) \land p) \to q \equiv$

$\equiv ((\neg p \land p) \lor (q \land p)) \to q \equiv (q \land p) \to q \equiv \neg(q \land p) \lor q \equiv$

$\equiv \neg q \lor \neg p \lor q \equiv V \Rightarrow$ es una tautología

b) $(p \to (q \to r)) \to ((p \land q) \to r) \equiv (\neg p \lor (\neg q \lor r)) \to (\neg(p \land q) \lor r) \equiv$

$\equiv (\neg p \lor \neg q \lor r) \to (\neg p \lor \neg q \lor r) \equiv \neg(\neg p \lor \neg q \lor r) \lor (\neg p \lor \neg q \lor r) \equiv$

$\equiv V \Rightarrow$ es una tautología

c) $\neg(p \to (q \to p)) \equiv \neg(\neg p \lor (\neg q \lor p)) \equiv \neg(V) \equiv F \Rightarrow$ es una contradicción

d) $\neg((\neg p \lor (\neg q \land r)) \to (r \lor \neg q)) \equiv \neg(((\neg p \lor \neg q) \land (\neg p \lor r)) \to (r \lor \neg q)) \equiv$

$\equiv \neg(\neg((\neg p \lor \neg q) \land (\neg p \lor r)) \lor (r \lor \neg q)) \equiv$

$\equiv \neg((\neg(\neg p \lor \neg q) \lor \neg(\neg p \lor r)) \lor (r \lor \neg q)) \equiv$

$\equiv \neg(((p \land q) \lor (p \land \neg r)) \lor (r \lor \neg q)) \equiv$

$\equiv \neg((p \land q) \lor (p \land \neg r) \lor (r \lor \neg q)) \equiv \neg(p \land q) \land \neg(p \land \neg r) \land \neg(r \lor \neg q) \equiv$

$\equiv (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor r) \land (\neg r \land \neg q) \equiv \{\{\neg p, q\}, \{\neg p, r\}, \neg r, \neg q\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ hemos llegado a su FNC y no podemos deducir nada hasta estudiarla

7. a)

$((p \to q) \land p) \to q$

p | $\neg p$

$((V \to q) \land V) \to q$ | $((F \to q) \land F) \to q$

$(V \to q) \to q$ | $F \to q$

q | $\neg q$ | q | $\neg q$

V | V | V | V

Tautología

b)

$((\neg p \lor \neg q) \to (p \land r)) \land (s \lor t)$

p | $\neg p$

$((F \lor \neg q) \to V \land r) \land (s \lor t)$ | $(V \to F) \land (s \lor t)$

$(\neg q \to r) \land (s \lor t)$ | $F \land (s \lor t)$

F

q | $\neg q$

$V \land (s \lor t)$ | $(V \to r) \land (s \lor t)$

$s \lor t$

s | $\neg s$ | $\neg r$ | r

V | t | F | $V \land (s \lor t)$

t | $\neg t$ | $s \lor t$

V | F

s | $\neg s$

V | t

t | $\neg t$

V | F

Contingencia

d)

$\neg(p \to (q \to p))$

p | $\neg p$

$\neg(V \to (q \to V))$ | $\neg(F \to (q \to F))$

$\neg(V)$

F

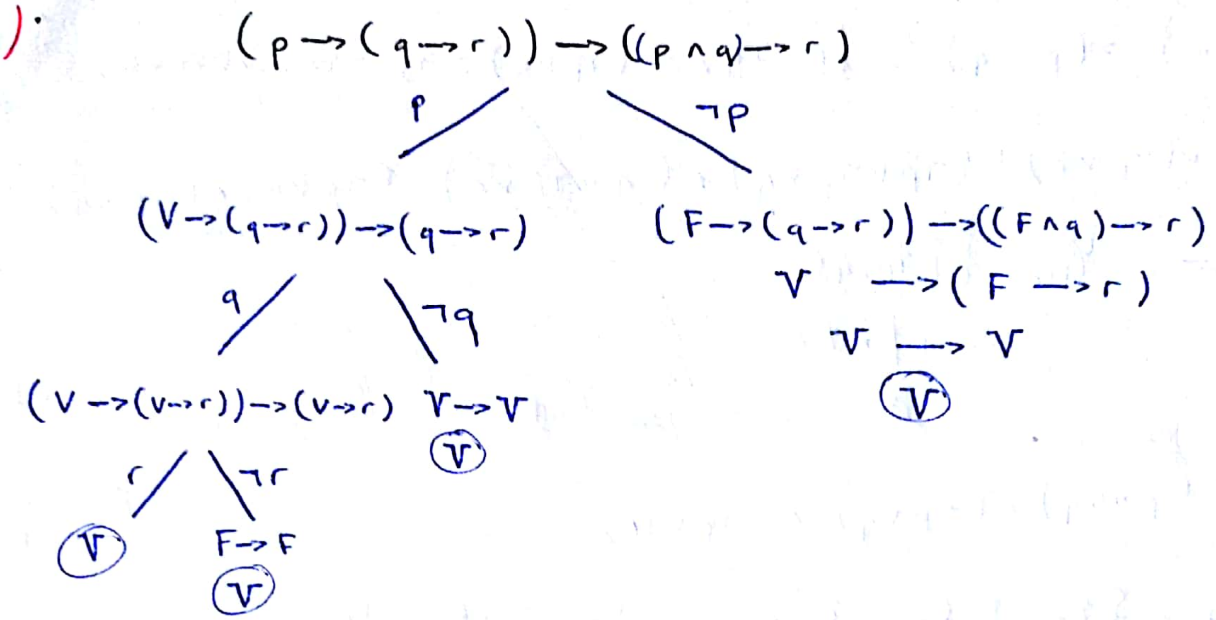
q | $\neg q$

$\neg(V)$ | $\neg(V)$

F | F

Contradicción

c)



8 a) $\cancel{p \to (q \wedge r) \to r \equiv \neg p \vee (q \wedge r) \to r \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \to r \equiv}$

$\cancel{\equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \vee r \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r) \vee r \equiv}$

$\cancel{\equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee r \equiv ((p \wedge \neg q) \vee (r \vee p)) \wedge (r \vee \neg r) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (r \vee p)}$

8. a) $p \to (q \wedge r) \to r \equiv \neg p \vee (q \wedge r) \to r \equiv \neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \vee r \equiv$

$\equiv (p \wedge \neg(q \wedge r)) \vee r \equiv (p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee r \equiv (r \vee p) \wedge (r \vee q \vee \neg r) \equiv$

$\equiv (r \vee p) \wedge V \equiv r \vee p \implies \{\{r, p\}\}$

$r \mid$ R. L. Puro

$\emptyset$ = true $\implies$ satisfacible

b) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \implies \{\{p, q\}, \{\neg p, q, \neg r\}\}$

$q \mid$ R. L. Puro

$\{\{\neg p, \neg r\}\}$

$\neg p \mid$ R. L. Puro

$\emptyset$ = true $\implies$ satisfacible

$p \vee q \qquad \neg p \vee q \vee \neg r$

$R_p = (q \vee \neg r) \implies$ satisfacible

c) $(\neg p \to \neg q) \to (p \to q) \equiv (p \vee \neg q) \to (\neg p \vee q) \equiv \neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q) \equiv$

$\equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q) \equiv (\neg p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p \vee q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv$

$\equiv \neg p \vee q \Longrightarrow \varphi_{FNC} = \{\{\neg p, q\}\}$

q | R. l. Puro

$\emptyset$ = true $\Longrightarrow$ satisfacible

d) $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

$\Omega = \{\{p,q\}, \{p,\neg q\}, \{\neg p, q\}, \cancel{\{\neg p, \neg r\}}\}$ = true

C. Cancelada

$\neg r$ | R. l. Puro

$\{\{p,q\}, \{p,\neg q\}, \{\neg p, q\}\}$ es satisfacible

p / $\neg p$ R. Ramificación

$\{\{q\}\}$ — $\{\{q\}, \{\neg q\}\}$

q | R. Pr. Unit — q | R. Prop. Unit

$\emptyset$ — $\{\{\,\}\} = \square$

Not. Fitting

1 $p \vee q$ 2 $p \vee \neg q$ 3 $\neg p \vee q$ 4 $\neg p \vee \neg r$ C. Entrada

5 $R_p = q$ 6 $R_p = \neg r$ 7 $R_p = q \vee \neg q$ 8 $R_p = \neg q \vee \neg r$ C. Nivel 1

9 $R_q = \neg r$ C. Nivel 2

1	~~$p \vee q$~~	R. Sub (5)
2	~~$p \vee \neg q$~~	R. Sub (5)
3	~~$\neg p \vee q$~~	R. Sub (6)
4	~~$\neg p \vee \neg r$~~	R. Sub (7)
5	p	$R_q(1,2)$, Puro
6	~~q~~	$R_p(3,5)$, Puro
7	~~$\neg r$~~	$R_p(4,5)$, Puro

No ha aparecido la cláusula vacía $\Longrightarrow$ satisfacible

e) $\neg p \to (q \wedge (p \to \neg q)) \equiv \neg\neg p \vee (q \wedge (\neg p \vee \neg q)) \equiv p \vee (q \wedge (\neg p \vee \neg q)) \equiv$

$\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee (\neg p \vee \neg q)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p \vee \neg q) \equiv p \vee q$

$\varphi_{FNC} \equiv \{\{p, q\}\}$

$p \mid$ R. l. Puro

$\emptyset$ = true $\Rightarrow$ satisfacible

f) $((\neg p \vee \neg q) \to (p \wedge r)) \wedge (s \vee t) \equiv (\neg(\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge r)) \wedge (s \vee t) \equiv$

$\equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \wedge (s \vee t) \equiv \cancel{((s \vee t) \wedge (p \wedge q)) \vee ((s \vee t) \wedge (p \wedge r))}$

$\equiv ((p \vee (p \wedge r)) \wedge (q \vee (p \wedge r))) \wedge (s \vee t) \equiv$

$\equiv (((p \vee p) \wedge (p \vee r)) \wedge ((q \vee p) \wedge (q \vee r)) \wedge (s \vee t) \equiv$

$\equiv p \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee p) \wedge (q \vee r) \wedge (s \vee t)$

$\varphi_{FNC} = \{p, p \vee r, q \vee p, q \vee r, s \vee t\}$

$\Omega = \{p, \{p, r\}, \{q, p\}, \{q, r\}, \{s, t\}\}$ = true

$p \mid$ R. Prop. Unit.

$\{\cancel{p}, \cancel{\{p, r\}}, \{q, \cancel{p}\}, \{q, r\}, \{s, t\}\}$

C. Cancelados

$\{\{q, r\}, \{s, t\}\}$

$q \mid$ R. l. Puro

$\{\cancel{\{q, r\}}, \{s, t\}\}$

C. Cancelada

$\{\{s, t\}\}$

$s \mid$ R. l. Puro

$\{\cancel{\{s, t\}}\}$

C. Cancelada

$\{\ \} = \emptyset$

satisfacible si

$v(p) = v(q) = v(s) = V$

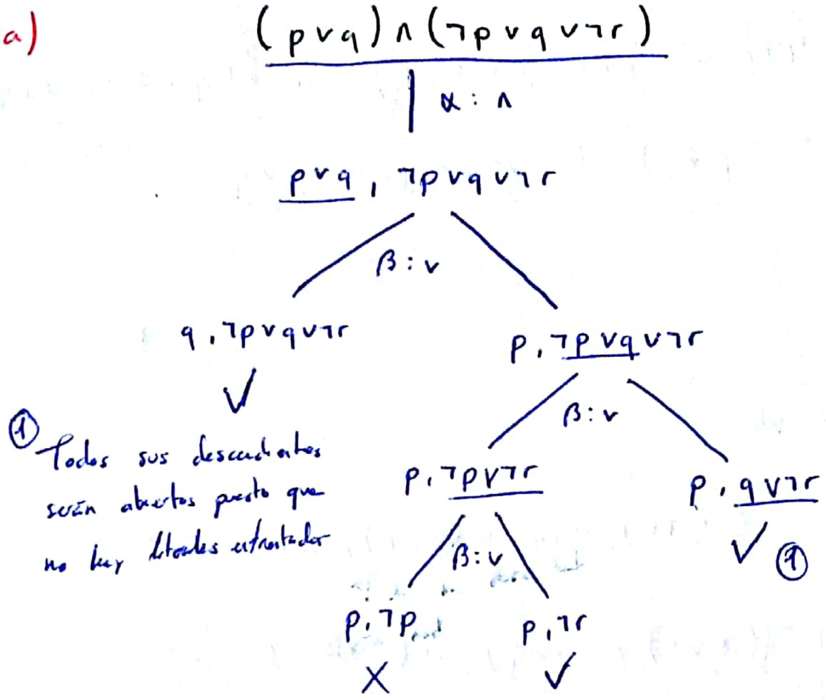
Not. Fitting

1. $\cancel{p}$ Puro (1)
2. $p \vee r$
3. $q \vee p$
4. $q \vee r$
5. $s \vee t$

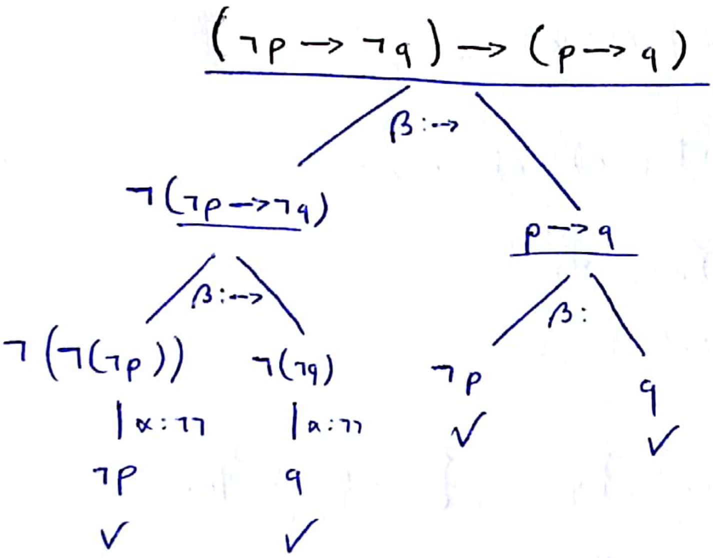
satisfacible

Scanned by CamScanner

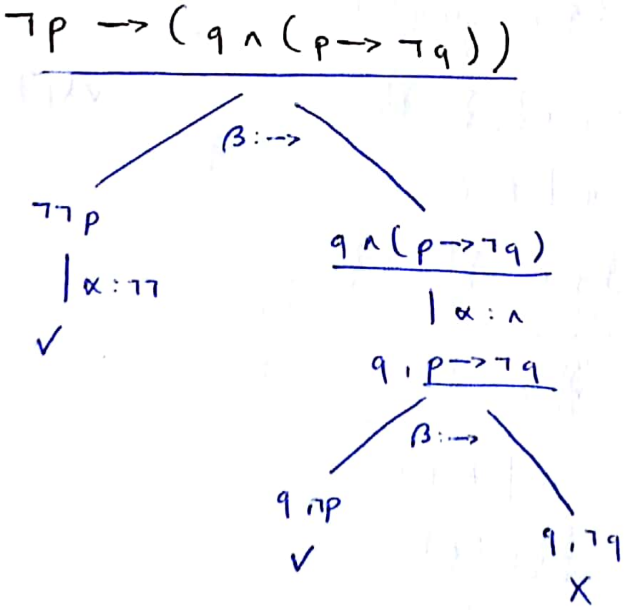
9. a)



b)

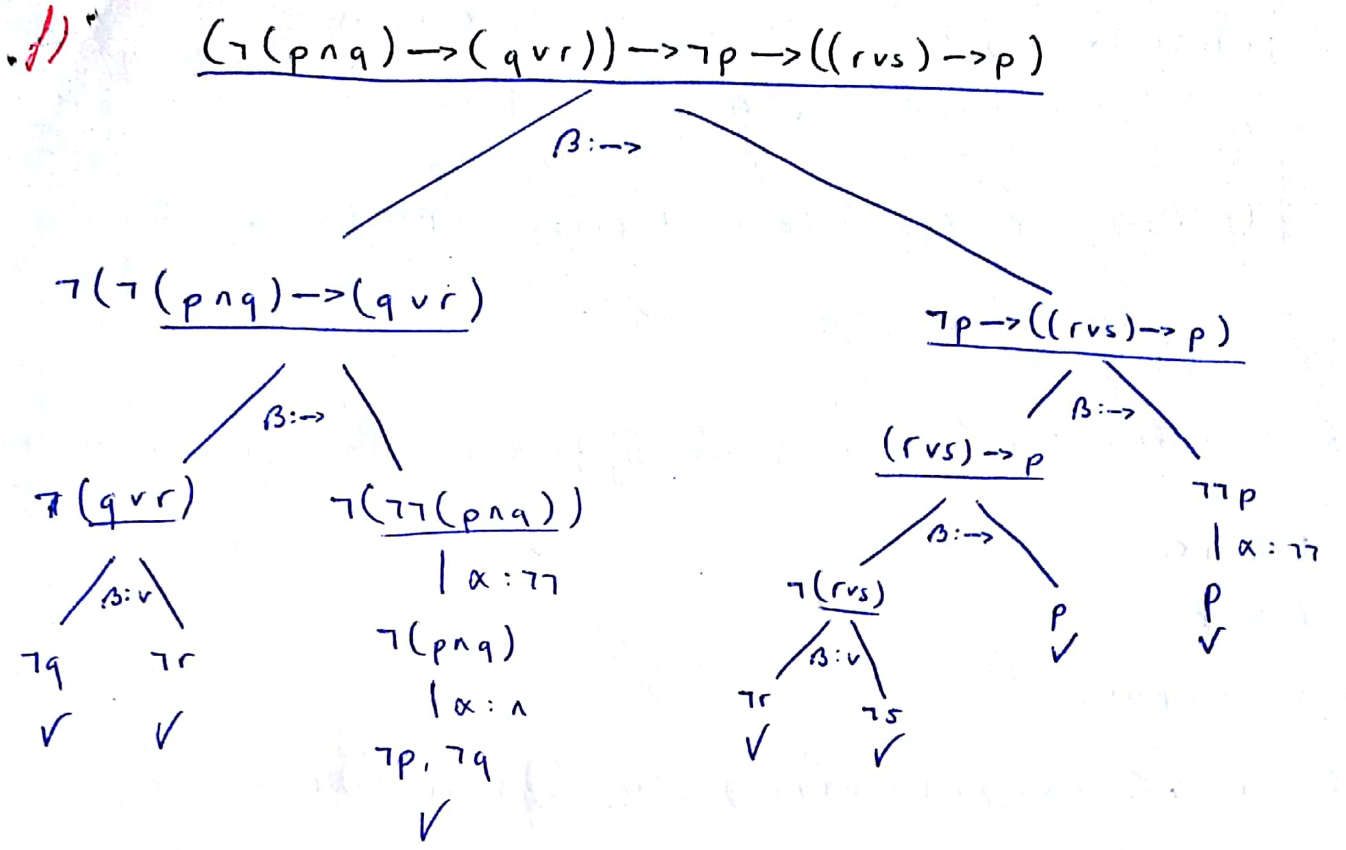


c)



Scanned by CamScanner

I)



II.

- $(B \wedge C) \leftrightarrow C$
- $(A \wedge B) \to (\neg A \wedge B \wedge C)$
- $\neg B \leftrightarrow (A \vee B)$

$\{(B \wedge C) \leftrightarrow C \,;\, (A \wedge B) \to (\neg A \wedge B \wedge C) \,;\, \neg B \leftrightarrow (A \vee B)\}$

A	B	C	$(B \wedge C) \leftrightarrow C$	$(A \wedge B) \to (\neg A \wedge B \wedge C)$	$\neg B \leftrightarrow (A \vee B)$
F	F	F	V	V	
F	F	V	F		
F	V	F	V	V	
F	V	V	V	V	
V	F	F	V	V	
V	F	V	F		
V	V	F	V	F	
V	V	V	V	F	

$\{(B\wedge C)\leftrightarrow C,\ (A\wedge B)\rightarrow(\neg A\wedge B\wedge C),\ \neg B\leftrightarrow(A\vee B)\}$

$| \ \alpha : \leftrightarrow$

$\{(B\wedge C)\rightarrow C,\ C\rightarrow(B\wedge C),\ (A\wedge B)\rightarrow(\neg A\wedge B\wedge C),\ \neg B\leftrightarrow(A\vee B)\}$

$\beta : \rightarrow$

$\{\neg(B\wedge C),\ C\rightarrow(B\wedge C),\ (A\wedge B)\rightarrow(\neg A\wedge B\wedge C),\ \neg B\leftrightarrow(A\vee B)\}$ $\{C,\ C\rightarrow(B\wedge C),\ (A\wedge B)\rightarrow(\neg A\wedge B\wedge C),\ \neg B\leftrightarrow(A\vee B)$

12.

- $B\wedge\neg C$
- $A\rightarrow C$
- $\neg C\rightarrow(A\vee B)$

a) $(B\wedge\neg C)\wedge(\neg A\vee C)\wedge(C\vee(A\vee B)) \Rightarrow \varphi_{FNC}=\{B,\neg C,\neg A\vee C,\ C\vee A\vee B\}$

$\Omega = \{B,\neg C,\{\neg A\vee C\},\{A,B,C\}\} = true$

$B \ |$ R. Prop. Unit

O. Cancelada C. Cancelada

$\{\cancel{B},\neg C,\{\neg A,C\},\cancel{\{A,B,C\}}\}$

$\{\neg C,\{\neg A,C\}\}$

$\neg C \ |$ R. Prop. Unit

C. Cancelada O. cancelada

$\{\cancel{\neg C},\{\neg A,\cancel{C}\}\}$

$\{\{\neg A\}\}$

$\neg A \ |$ R. Prop. Unit

$\{\ \} = \emptyset = true$

satisfacible en

$v(A)=F;\ v(B)=V;\ v(C)=F$

No son contradictorias

b)

A	B	C	$B\wedge\neg C$	$A\rightarrow C$	$\neg C\rightarrow(A\vee B)$
V	V	V	F	V	V

Solo la declaración de A sería falsa

c) A y C son inocentes y B es culpable