Ejercicios de Lógica

Fundamentos Lógicos de la Informática

Grupo Docente FLI

Dpto. Ingeniería de al Información y las Comunicaciones
Facultad de Informática
Universidad de Murcia

LÓGICA PROPOSICIONAL

L0. Reconocer fbf y construirlas

Sesión 1

Ejercicio 1

Justifica si las siguientes expresiones responden a f.b.f. y representan a la misma oración. Indica la f.b.f. original y la que contenga el menor número de paréntesis posible.

1. $(p \rightarrow q) \vee \neg(p \leftrightarrow s)$ y $p \rightarrow q \vee \neg(p \leftrightarrow s)$
2. $(p \vee \neg q) \rightarrow p \rightarrow r$ y $p \vee \neg q \rightarrow (p \rightarrow r)$

Ejercicio 2

Construir la fbf que formalicen las siguientes frases. Define la signatura:

1. Voy al cine solo si no llueve.
2. Si no llueve voy al cine.
3. No voy al cine a menos que no llueva.
4. Llueve luego no voy al cine.
5. Es suficiente que llueva para no que vaya al cine.
6. Para que vaya al cine es necesario que no llueva.
7. Voy al cine luego llueve.

L0. Formalización y semántica

Sesión 2

Ejercicio 3

Construir razonadamente fórmulas proposicionales que formalicen las siguientes frases. Para ello, definir la signatura para la formalización. A partir de cada tabla qué puedes decir sobre la sastisfacibilidad de cada una de las oraciones. Comprobar el tipo de oración por tablas de verdad.

1. "No es cierto que los delfines sean inteligentes o cabezotas"
2. "Para que los delfines no sean cabezotas es suficiente con que sean inteligentes pero es necesario que sean cariñosos"
3. "Los delfines son inteligentes o cabezotas pero no ambas cosas; no obstante si no son inteligentes tampoco son cariñosos"
4. "Para entrar en la piscina es necesario que no lleves toalla pero sí gorro, sin embargo es suficiente con que no lleves bañador"
5. "Te bañas y no tienes gorro, o te bañas y sí tienes gorro, o no te bañas; pero ¡te estás bañando!"

L0. Razonamientos

Ejercicio 4

Probar si el siguiente razonamiento es válido: $\{p \to q, q \to p\} \models p \leftrightarrow q$

Ejercicio 5

Se considera el siguiente razonamiento:

> *Si Rosa participa en clase, los estudiantes se enojan con ella, y si no participa en clase, los profesores se enojan con ella. Pero, Rosa participa en clase o no participa. Por lo tanto, los estudiantes o los profesores se enojan con ella.*

Se pide:

- Formalizar en lógica proposicional el razonamiento indicando claramente las sentencias.
- Indique cuáles son las premisas y la consecuencia.
- Es el razonamiento válido.

SAT EN LÓGICA PROPOSICIONAL

L0. Satisfacibilidad

Sesión 3

Ejercicio 6

Determina si los siguientes conjuntos son satisfacibles utilizando DPLL.
$\{\neg p \vee q, \neg p \vee \neg r, p \vee q, q \vee r, \neg q \vee r\}$, $\{\neg p, p \vee s, q \vee \neg s, \neg q \vee r, \neg r\}$

Ejercicio 7

Convertir en forma normal conjuntiva la siguiente fórmula proposicional. ¿Es satisfacible? $\neg(p \to (q \wedge \neg r) \to (p \to q))$

§Constrate los resultados con sus tablas de verdad.

L0. Satisfacibilidad

Sesión 4

Ejercicio 8

Determina si los siguientes conjuntos son satisfacibles utilizando Resolución.
$\{\neg p \vee q, \neg p \vee \neg r, p \vee q, q \vee r, \neg q \vee r\}$, $\{\neg p, p \vee s, q \vee \neg s, \neg q \vee r, \neg r\}$

Ejercicio 9

Construye sus grafos semánticos y determina el tipo de oración: $p \rightarrow q \rightarrow p \vee q$, $p \wedge r \vee (\neg p \wedge q) \rightarrow \neg q$

Ejercicio 10

Mediante tableaux determina si los siguientes conjuntos son satisfacibles o insatisfacibles: $\{p \rightarrow q, \neg q \vee r, p \wedge \neg r\}$, $\{p \rightarrow q, q \rightarrow p \wedge r, p \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r\}$

L0. Demostración

Sesión 5

Ejercicio 11

Demostrar por refutación por tablas de verdad, DPLL, tableaux y resolución (por conjunto soporte) si los siguientes razonamientos son válidos.

- $\{p \to q, \neg r, q \to t, \neg r \to p\} \models t$
- $\{p \lor q, q \to p, \neg p \lor \neg q\} \models p$
- §$\{p \to q, q \to p, \neg p \lor \neg q\} \models \neg p$

Para la técnica de resolución represente la solución utilizando notación Fitting. Apóyese en un grafo de resolución, pero enumere la aparición de las resolventes, justificando cada resolvente del grafo en función de la técnica utilizada. Haz coincidir el número de la cláusula con el número de línea en la notación Fitting.

Ejercicio 12

El inspector Clouseau considera que los autores del robo de la Pantera Rosa se encuentra entre María, Rosa, Luis y Carlos. Concluye que: "o fue María o fue Rosa", "o fue Luis o fue Carlos", "si fue Luis, no fue Carlos", "si fue Luis, lo fue María", "si fue María, lo fue Carlos". Suponiendo que Clouseau no se equivoca ¿quiénes deberían ser culpables e inocentes del robo?

DEDUCCIÓN NATURAL EN L0

Deducción Natural en L0 Sesión 6

Ejercicio 13

Probar utilizando el método de la deducción natural los siguientes argumentos.

- $\neg p \to (q \to r), \neg p, q \vdash r$
- $(p \land q) \to (r \land s), \neg\neg p, q \vdash s$
- $p \lor q, p \to r, q \to s \vdash r \lor s$
- $(p \land q) \to r \vdash p \to (q \to r)$
- $\vdash p \to (p \lor q)$
- $p \to q \lor r, q \to \neg p \vdash p \to r$
- $\neg(\neg p \land \neg q), \neg p \vdash q$

LÓGICA CATEGÓRICA

LC. Formalización

Sesión 7

Ejercicio 14

La Lógica Categórica trabaja con cuatro expresiones normalizadas. Utilícelas para formalizar la relación entre las siguientes categorías.

1. Animales. Vacas. Tiburones.
2. Animales. Humanos. Terrestres.
3. Acuáticos. Mamíferos. Reptiles.

Ejercicio 15

Formalice las siguientes frases:

1. A es un coche rápido y elegante.
2. A es un coche rápido y elegante pero B no.
3. Todas los coches son rápidos y elegantes.
4. Para que algunos coches sean rápidos y elegantes es suficiente con que todos lo sean.

LC. Interpretación

Ejercicio 16

Traduce las siguientes sentencias en cada uno de los siguientes casos e indica si es cierta en cada uno de los siguientes mundos:

1. $\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$
2. $\exists x(S(x) \rightarrow P(x))$
3. $\forall x(S(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $\neg\exists x(S(x) \rightarrow \neg P(x))$
5. $\forall x(S(x) \wedge P(x))$
6. $\exists x(S(x) \wedge P(x))$
7. $\neg(\forall x(\neg S(x) \wedge P(x)))$
8. $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$

Casos:

- $S(x)$:"x es videojuego". $P(x)$:"x es divertido"
- $S(x)$:"x es estudiante". $P(x)$:"x suspende"

Mundos:

- $S = \{a, b\}$, $P = \{a, b, c\}$
- $S = \{a, b\}$, $P = \{c, d\}$
- $S = \{a, b\}$, $P = \{b, c\}$

LÓGICA DE PREDICADOS

L1. Fórmulas bien formadas

Sesión 8

Ejercicio 17

Realice lo que se pide para cada una de las expresiones dadas.

1. Indicar su signatura especificando las funciones, predicados y su aridad.
2. Construye su árbol sintáctico.
3. Reescriba la expresión para que ningún cuantificador tenga asociado el mismo nombre de variable. Ni existan variables libres con el mismo nombre que variables cuantificadas. Determine el conjunto de variables libres y el de variables ligadas de la nueva expresión.

Expresiones:

- $\forall x \exists y [R(x,y) \wedge \exists x \; I(y, g(x,x))]$
- $\exists x [R(x,y) \wedge \forall y \; \neg I(g(y,c),x)]$ (con c una constante)
- $\exists y \{P(x) \wedge Q(x,y) \rightarrow \forall z \exists x \; R(x,y,z) \vee \forall z \; P(z)\}$

L1. Formalización

Ejercicio 18

Formaliza las siguientes oraciones.

1. Dada la signatura $\Lambda = \{A/2, P/1\}$. $A(x,y)$:"x es amigo de y". $P(x)$:"x es alpinista". J :"Juan".
   - Todos los amigos de Juan son alpinistas.
   - Algunos alpinistas son amigos.
   - Hay alpinistas que no tiene amigos.
   - Miguel es amigo de Juan y es alpinista.
2. Determina la signatura y formaliza para las siguientes oraciones:
   - Todos los lobos son cazadores de algún conejo.
   - Algunos cuadros son admirados por todas las personas.
3. No se puede hacer click sobre una carpeta del sistema cada vez que haya un usuario conectado al ordenador principal.

Interpretación

Sesión 9

Ejercicio 19

Se tiene la siguiente información:

- A no ama a D.
- D ama a C.
- B ama a C o a D.
- A ama a cualquiera que ame a B.
- C ama a cualquiera que le ame a él.
- Nadie se ama a sí mismo.

Se pide:

1. Formalice cada una de las oraciones en L1, definiendo explícitamente los predicados que utilice.
2. Construya un universo, conjunto de tablas, para los predicados definidos en el apartado anterior, donde el conjunto de oraciones de partida sea satisfacible.
3. Dada una tabla del apartado anterior, indica si añadiendo la oración "A ama a B" el conjunto de partida sigue siendo satisfacible. ¿Pasa lo mismo si se añade la oración "A ama a C"?

Justifica las respuestas.

Ejercicio 20

Se considera las fórmula $\varphi : \forall x[P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(f(x))] \wedge Q(a)$
y los siguientes esquemas:

	Interpretación 1	Interpretación 2
Dominio	Números naturales	Personas
Constante a	2	Juan
Función $f(x)$	x^2	madre de x
Predicado $P(x)$	x es un número impar	x juega al póker
Predicado $Q(x)$	$x > 0$	x estudia informática
Predicado $R(x)$	x es múltiplo de 9	x es terco

Traduce las fórmulas en dichas interpretaciones.

L1. Evaluación (semántica)

Ejercicio 21

Se considera las fórmula $\psi : \forall x \exists y [P(x, f(y)) \wedge Q(a)]$. Determine el valor de verdad de la fórmula para el siguiente mundo. §¿Qué tipo de oración es ψ?

	Interpretación
Dominio	$D_{\mathcal{M}} = \{1, 2, 3\}$ naturales
Constante a	$a_{\mathcal{M}} = 3$
Predicado $P(x, y)$	$P_{\mathcal{M}} = \{(1, 3), (2, 3)\}$
Predicado $Q(x)$	$Q_{\mathcal{M}} = \{2, 3\}$
Función $f(y)$	$f_{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

L1. Interpretación

Sesión 10

Ejercicio 22

Interpretar la fórmula $\exists x C(f(x), x)$ para que sea satisfacible en el mundo numérico que define estas relaciones:

$R1$	4	9	16
2	1	1	0
3	0	1	1
4	1	0	1

;

$R2$	2	3	4
4	0	1	0
9	1	0	0
16	0	1	0

Ejercicio 23

Evaluar la fórmula $\forall x \exists y (C(x, f(x)) \wedge C(x, y) \to P(y))$ en alguna interpratación sobre el mundo numérico dado por

$R1$	4	9	16
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	0	1

,

$R2$	
4	0
9	1
16	1

,

$R3$	
2	1
3	0
4	1

.

Formalización y Razonamientos

Ejercicio 24

Formaliza en lógica de predicados el siguiente razonamiento:

> *Si Rosa participa en clase, los estudiantes se enojan con ella, y si no participa en clase, los profesores se enojan con ella. Pero, Rosa participa en clase o no participa. Por lo tanto, o los estudiantes se enojan con ella o los profesores se enojan con ella.*

Comprobar si es un razonamiento válido utilizando el tableaux generado por http://www.umsu.de/logik/trees/.

SAT Y RAZONAMIENTOS EN LÓGICA DE PREDICADOS

Razonamientos: Tableaux

Sesión 11

Ejercicio 25

Demuestra que son razonamientos válidos.

1. $\models \forall x\, P(x) \to P(a)$
2. $\left\{ \begin{array}{l} \forall x\, (F(x) \to M(x)) \\ \forall x\, (M(x) \to P(x)) \\ F(a) \end{array} \right\} \models \exists x\, P(x)$
3. $\forall x\, \forall y\, (P(x,y) \to \neg P(y,x)) \models \neg \exists x\, P(x,x)$
4. $\exists x\, \forall y\, P(x,y) \models \forall x\, \exists y\, P(y,x)$

Aplica los razonamientos anteriores para:

1. $P(x)$:"x es humano".a :"Moctezuma"
2. $F(x)$:"x es felino". $M(x)$:"x es Mamífero". $P(x)$:"x tiene pelo". a :"Silvestre".
3. $P(x,y)$:"x es padre de y".
4. $P(x,y)$:"x es madre de y".

Ejercicio 26

Se considera la siguiente argumentación:

> *Todos tus amigos son frikis. Así, ya que Miguel es un friki, debe ser uno de tus amigos. Pero los frikis no pueden ser amigos. Y así Miguel no es un amigo tuyo.*

Se pide:

- Formalizar en lógica de predicados el razonamiento indicando claramente las sentencias.
- Indique cuáles son las premisas y la consecuencia.
- Comprobar por tableaux si el razonamiento es válido
- Compara tu resultado con el obtenido en http://www.umsu.de/logik/trees/.

DEDUCCIÓN NATURAL EN L1

Deducción Natural en L1

Sesión 12

Ejercicio 27

Probar utilizando el método de la deducción natural los siguientes argumentos.

- $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \forall x(r(x) \rightarrow q(x)), \forall x(p(x) \vee r(x)) \vdash \forall x q(x)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
- $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))$
- $\forall x(p(x) \rightarrow \exists y q(x, y)), \exists x(p(x) \wedge r(x)) \vdash \exists x \exists y(r(x) \wedge q(x, y))$
- § $\vdash \neg \forall x p(x) \leftrightarrow \exists x \neg p(x)$

REPASO

Ejercicio 28

§§Formalice las siguientes oraciones:

- Todo el que odia muestra todos los peores males.
- Ningún secreto es descubierto por cualquier niño.
- Todo el que estudie historia o filosofía aprenderá algo interesante y conocerá cualquier personaje griego.

§§ Interpretación

Ejercicio 29

Interpretar las siguientes fórmulas

- $\alpha : \forall x \forall y [C(x, f(x)) \wedge C(x, y) \rightarrow P(y)]$.
- $\beta : \exists x \exists y [P(y) \rightarrow C(x, f(x)) \wedge C(x, y)]$.

en la siguiente estructura y comprobar su satisfacibilidad:

Universo: $\{2, 3, 4, 9, 16\}$; Relaciones:

$R1$	4	9	16
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	0	1

; Categorías:

$R2$	
4	1
9	1
16	1