

Ejercicios Hoja 1

Curso 2020/2021

1. Encuentra el valor reducido de cada uno de los siguientes números en el correspondiente \mathbb{Z}_n
 - 23, 13, 55, -5 , -43 , -17 en \mathbb{Z}_4
 - 21, 19, 155, -3 , -23 , -11 en \mathbb{Z}_3
 - 27, 11, 58, -5 , -73 , -13 en \mathbb{Z}_{11}
2. Calcula $345 \cdot 43 + 122 \cdot 5 - 225$ en \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_8 y \mathbb{Z}_{11} .
3. Calcula el máximo común divisor de los siguientes pares de números y expresálo en función de los mismos
 - 402 y 31
 - 824 y 205
 - 412 y 102
 - 213 y 66
4. Para cada uno de los \mathbb{Z}_n indicados estudia qué elementos son unidades y, para cada uno de ellos, calcula el inverso correspondiente.
 - 23, 13, 55, -5 , -43 , -17 en \mathbb{Z}_8
 - 21, 19, 155, -3 , -23 , -11 en \mathbb{Z}_5
 - 27, 11, 58, -5 , -73 , -13 en \mathbb{Z}_{14}
5. Para cada \mathbb{Z}_n estudia qué elementos son unidades y, para los que lo sean, calcula su inverso
 - \mathbb{Z}_9
 - \mathbb{Z}_{12}
 - \mathbb{Z}_{18}
6. Calcula los siguientes inversos
 - 11^{-1} en \mathbb{Z}_{42}
 - 31^{-1} en \mathbb{Z}_{100}

- 13^{-1} en \mathbb{Z}_{70}
7. Efectúa las operaciones indicadas
- $32 \cdot 21 - 12 \cdot 24^{-1}$ en \mathbb{Z}_7
 - $23 + 12 \cdot 11^{-1} + 43 \cdot 10^4$ en \mathbb{Z}_6
 - $23 + 12 \cdot 11^{-1} + 43 \cdot 10^4$ en \mathbb{Z}_4
8. Calcula $\varphi(15)$ y úsala para ver si 3, 6 y 11 son unidades en \mathbb{Z}_{15} . Calcula 11^{-1} en \mathbb{Z}_{15} .
9. Calcula $\varphi(48)$ y úsala para ver si 2, 3 y 5 son unidades en \mathbb{Z}_{48} . Calcula 5^{-1} en \mathbb{Z}_{48} .
10. Calcular las dos últimas cifras de 1237^{121} (*Indicación:* calcula esta potencia en \mathbb{Z}_{100} usando $\varphi(100)$)
11. Para las siguientes ecuaciones, indica si tiene solución y (caso de tener) calcula todas las posibles soluciones
- $12x + 18y = 48$
 - $20x + 35y = 15$
 - $16x + 28y = 22$
 - $14x + 35y = 21$
12. Un coleccionista de obras de arte ha adquirido varias obras entre pinturas y dibujos. Las pinturas le han costado 210 euros cada una y los dibujos 120 euros. Cuando el coleccionista llega a casa, no sabe si se ha gastado 2700 euros o 2600 euros. ¿ Pueden haberle costado 2600 euros ?. ¿ Cuántos cuadros y dibujos ha comprado ?.
13. Una bufanda cuesta 19 rublos, pero el comprador no tiene más que billetes de tres rublos, y la cajera sólo de cinco. ¿Puede en estas condiciones abonarse el importe de la compra, y cómo hacerlo ?.
14. En una bolsa hay monedas de 10 y 20 céntimos y que su valor es 2 euros. ¿Que combinaciones de monedas son posible ?.
15. ¿Es posible llenar exactamente un depósito de 25 litros con recipientes de 6 y 8 litros ?.

16. Una persona va a un supermercado y compra 12 litros de leche, unos de leche entera y otros de desnatada, por 120 euros. Si la leche entera vale 3 euros más por litro que la desnatada, y ha comprado el mínimo posible de leche desnatada, ¿cuántos litros habrá comprado de cada una ?.
17. Un programa produce números que se sabe que son siempre múltiplos de 3, que son impares y que el triple de esos números siempre dan resto 2 al dividirlos por 5 ¿ qué forma tienen esos números ?. Calcula dos de ellos y comprueba que cumplen las condiciones.
18. Un general quiere distribuir a sus soldados en grupos. Primero dispone a sus soldados en grupos de 11 y le sobran 2. Decide quitar 10 soldados y agruparlos en grupos de 9 y ahora le sobran 3. Finalmente añade de nuevo 4 de los 10 soldados que quitó y, al agruparlos en grupos de 25 le sobra 1. Calcula dos posibles soluciones del número de soldados y comprueba que la primera de ellas cumple las condiciones.
19. De un cierto número se sabe que al dividirlo por 7 el resto es 3. El resto al dividir el doble de ese número por 11 es 5 y el número es múltiplo de 4. ¿Cuánto puede valer ese número ?.
20. Encuentra todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales pasando la matriz del sistema a forma reducida

$$\begin{aligned}
 & \bullet \left. \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + y + 2z &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{Z}_7, \quad \left. \begin{aligned} x - y + z + t &= 1 \\ 2x + y - t &= 2 \\ y - z + 2t &= 0 \\ 3x + y + z + t &= 3 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{Z}_5 \\
 & \bullet \left. \begin{aligned} 2x - y + z + t &= 1 \\ 2x + y - t &= 2 \\ y + 2z + 3t &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{Z}_{11}, \quad \left. \begin{aligned} 2x + 4z &= 0 \\ -x - z &= 3 \\ 2x + y + 5z &= -4 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{Z}_5 \\
 & \bullet \left. \begin{aligned} x + 2z + 5t &= 2 \\ y - 3z &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{R}, \quad \left. \begin{aligned} 2x + y + z + t &= 4 \\ z + 4t &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{Z}_{11} \\
 & \bullet \left. \begin{aligned} 3x + 2z + 5t &= 2 \\ y - 3z &= 1 \\ 4z &= 12 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{R}, \quad \left. \begin{aligned} 3x + y + 3z + 5t + 2u &= 3 \\ 3z + 3t + u &= 1 \\ 4u &= 12 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{Z}_7 \\
 & \bullet \left. \begin{aligned} x + y + z + t &= 1 \\ x + y + 3z + 4t &= 2 \\ x + y + 5z + 7t &= 3 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{Z}_7, \quad \left. \begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 3x + z &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{Z}_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \left. \begin{aligned} x - y + z + t &= 1 \\ 2x + y - t &= 2 \\ y - 2z + t &= 0 \\ 3x + y + z + t &= 3 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{R}, & \left. \begin{aligned} 2x - y + z + t &= 1 \\ 2x + y - t &= 2 \\ y + 2z + 3t &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{Z}_5 \\
& \bullet \left. \begin{aligned} -x - 5z + v &= -1 \\ 3x + y + z + u &= 0 \\ -2x + t &= 3 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{R}, & \left. \begin{aligned} 3x + y - z &= 2 \\ 2x + z + u &= 1 \\ x + t &= 7 \end{aligned} \right\} \text{ en } \mathbb{Z}_7
\end{aligned}$$

21. Encuentra la forma reducida de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}
& \bullet \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{Z}_3, & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{Z}_7 \\
& \bullet \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{Z}_5 & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{Z}_3
\end{aligned}$$

22. Encuentra cuando sea posible las inversas de las siguientes matrices

$$\begin{aligned}
& \bullet \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{Z}_2 \\
& \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{Z}_7 \\
& \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{Z}_5
\end{aligned}$$