FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA INFORMÁTICA

Evaluación en L0, Equivalencia y Consecuencia Lógicas

PRIMER CURSO DEL GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

PRIMER CUATRIMESTRE

2020-21

La Evaluación en L0 (I)

- Al Valor de Verdad de una expresión cualquiera (una f.b.f.) se le llama **Evaluación** de la misma.
- Requiere de un procedimiento en cuya base está lo que llamaremos Asignación: **Una asignación es establecer un valor de verdad a una fórmula atómica según una interpretación**.
- Una asignación, por tanto, pone de relieve la necesidad de una interpretación. Sin embargo, en L0 no se suele hacer distinción entre interpretación y asignación. En otras lógicas sí se matiza claramente la diferencia, lo veremos en L1.
- En L0, a una proposición atómica (una f.b.f. denotada por las letras latinas p, q, r, etc.) se le pueden asignar dos valores de Verdad: Verdadero (V) ó Falso (F), los dos elementos "constantes" del conjunto B = {V; F} .
- Podemos por tanto decir que la proposición atómica **p** tiene dos interpretaciones, cada una de ellas obtenida al aplicar la correspondiente asignación: v(p) = V ó v(p) = F. También será para **q**: v(q) = V ó v(q) = F. Y para **r**: v(r) = V ó v(r) = F.

La Evaluación en L0 (II)

- Entonces, cuál es la **Evaluación** de la f.b.f.: **($p \wedge q \rightarrow r$)**
- Al construir todas las asignaciones/interpretaciones de dicha f.b.f. nos damos cuenta de que se pueden realizar ocho (8), construyendo todas las posibilidades de Asignación con las tres fórmulas atómicas que la componen. Diremos que para esa fórmula existen ocho interpretaciones, cada una de ellas formada por la variación matemática de **dos** asignaciones (VERDAD O FALSO) diferentes para las **tres** proposiciones atómicas (**p**, **q** y **r**). Una de ellas sería: v(p) = V, v(q) = V, v(r) = V. Pero otra: v(p) = V, v(q) = V, v(r) = F. **Y así, hasta ocho: las variaciones con repetición de dos elementos tomados de ¡¡¡tres en tres!!!**
- La Evaluación de una f.b.f. compleja no tiene un único Valor de Verdad. Tiene tantos como interpretaciones se le puedan dar, y cada interpretación se compone de tantas asignaciones como proposiciones atómicas la formen. **LO VEREMOS MAS ADELANTE: En la Tabla de Verdad de la página 8.**

Facultad de Informática

La Evaluación en L0 (III)

- La Evaluación de una f.b.f. compleja (**a partir de ahora, ORACIÓN**) se define de una forma recursiva (ver la página 17 del documento 02-Proposicional-B). Y para ello, debemos definir la evaluación de las oraciones que se forman mediante un único conector o conectiva.
- La Evaluación de la **Conjunción de dos proposiciones**, es: Será VERDAD si y solo si las dos proposiciones conjuntadas han sido evaluadas como VERDADERAS. De esta manera, en cualquier otra evaluación (o asignación) de las mismas, la Conjunción es FALSA.
- La Evaluación de la **Disyunción de dos proposiciones**, es: Será FALSA si y solo si las dos proposiciones disyuntadas han sido evaluadas como FALSAS. De esta manera, en cualquier otra evaluación (o asignación) de las mismas, la Disyunción es VERDADERA.
- La Evaluación de la **Negación de una Proposición**, es: Será FALSA cuando la proposición de partida es VERDADERA, y será VERDADERA cuando la proposición de partida es FALSA.
- La Evaluación de la **Implicación o Condicional de dos proposiciones**, es: Será FALSA si y solo si la evaluación del antecedente es VERDAD y la del consecuente es FALSA. De esta manera, en cualquier otra evaluación (o asignación) de antecedente y consecuente, la Implicación es VERDADERA.
- La Evaluación de la **Doble Implicación de dos proposiciones**, es: Será VERDAD cuando antecedente y consecuente tienen la misma evaluación (o asignación) de Verdad, y será FALSA cuando antecedente y consecuente tienen diferente evaluación (o asignación) de Verdad.

La Evaluación en L0 (IV)

INTER		EVALUACIONES															
p	**q**	**¬p**	**¬q**	**p ∧ q**	**q ∧ p**	**p ∨ q**	**q ∨ p**	**p → q**	**q → p**	**p ↔ q**	**q ↔ p**	**p ∧ V**	**p ∨ F**	**p ∨ V**	**p ∧ F**	**p∧¬p**	**p∨¬p**
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	F	F	V

- La Evaluación de una oración formada por las dos proposiciones atómicas **"p"** y **"q"**, tendrá cuatro interpretaciones posibles.
- Como se ve en la tabla, la conjunción, la disyunción y la doble implicación son operaciones conmutativas; la implicación, no. **¡OJO!**
- La constante **V** es el elemento neutro para la conjunción, y el elemento absorbente para la disyunción.
- La constante **F** es el elemento neutro para la disyunción, y el elemento absorbente para la conjunción.
- La conjunción de una proposición y su negada es evaluada como el elemento neutro de la disyunción, es decir, es la constante **F**.
- La disyunción de una proposición y su negada es evaluada como el elemento neutro de la conjunción, es decir, por la constante **V**.
- De las dos anteriores, se puede decir que **p** y **¬p** son proposiciones complementarias, en Lógica las llamamos contradictorias.
- Podemos demostrar que la conjunción y la disyunción cumplen con la propiedad distributiva, en las dos secuencias: de la conjunción con respecto a la disyunción, y de la disyunción con respecto a la conjunción.
- Con todo ello, el universo de las proposiciones con respecto a las conectivas: negación, conjunción y disyunción, forman lo que se llama un ALGEBRA de BOOLE, el Algebra de los Significados, al cumplir con los cuatro postulados o axiomas de Huntington.

La Evaluación en L0 (y V)

INTERPRETA		EVALUACIONES DE (1): $(p \to q) \wedge p \to q$ y (2): $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$						
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$(p \to q) \wedge p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$
V	V	F	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V

INTERPRETA		EVALUACIONES DE (3): $(p \to q) \wedge q \to p$ y (4): $(p \to q) \wedge p \wedge \neg q$						
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$(p \to q) \wedge q \to p$	$(p \to q) \wedge p$	$(p \to q) \wedge p \wedge \neg q$
V	V	F	F	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	F	F

- La Evaluación de las oraciones (1 y (2) resultan tener todas sus interpretaciones como VERDADERAS. La Evaluación de la oración (4), las tiene todas FALSAS. Y la (3), algunas VERDADERAS y algunas FALSAS.

La Decibilidad y la Satisfacibilidad en L0 (I)

- **Problema de la Decidibilidad**: Encontrar un algoritmo que decida si una oración es satisfacible. Diremos, por tanto, que una Lógica es decidible si contamos con un método o técnica determinista que nos diga si una oración cualquiera **α**, escrita en su lenguaje formal, es satisfacible, o bien, es insatisfacible.
- Una oración es SATISFACIBLE si al menos una de sus interpretaciones se puede evaluar como VERDADERA. Una oración será INSATISFACIBLE si en todas sus interpretaciones se evalúa como FALSA.
- La primera de las técnicas es la llamada **“Tablas de Verdad”,** basada en la implementación de un algoritmo o secuencia de los siguientes pasos, siguiendo un procedimiento que siempre termina:
  - **Paso 1:** Determinar el número n de elementos atómicos de la oración **α**. En el ejemplo: n = 2
  - **Paso 2:** Construir una tabla con tantas columnas como n + número de operaciones (en el ejemplo: 2 + 3) y con tantas filas como interpretaciones posibles, 2 elevado a n (en el ejemplo: 2 elevado a 2 = 4)
  - **Paso 3:** Establecer asignaciones para cada interpretación.
  - **Paso 4:** Obtener las evaluaciones según el orden de construcción de la oración, teniendo en cuenta lo visto en las tablas de la pag.6.
  - **Paso 5:** El valor de verdad de la oración **α** viene dada por la última columna completada, que será su EVALUACIÓN.

La Decibilidad y la Satisfacibilidad en L0 (y II)

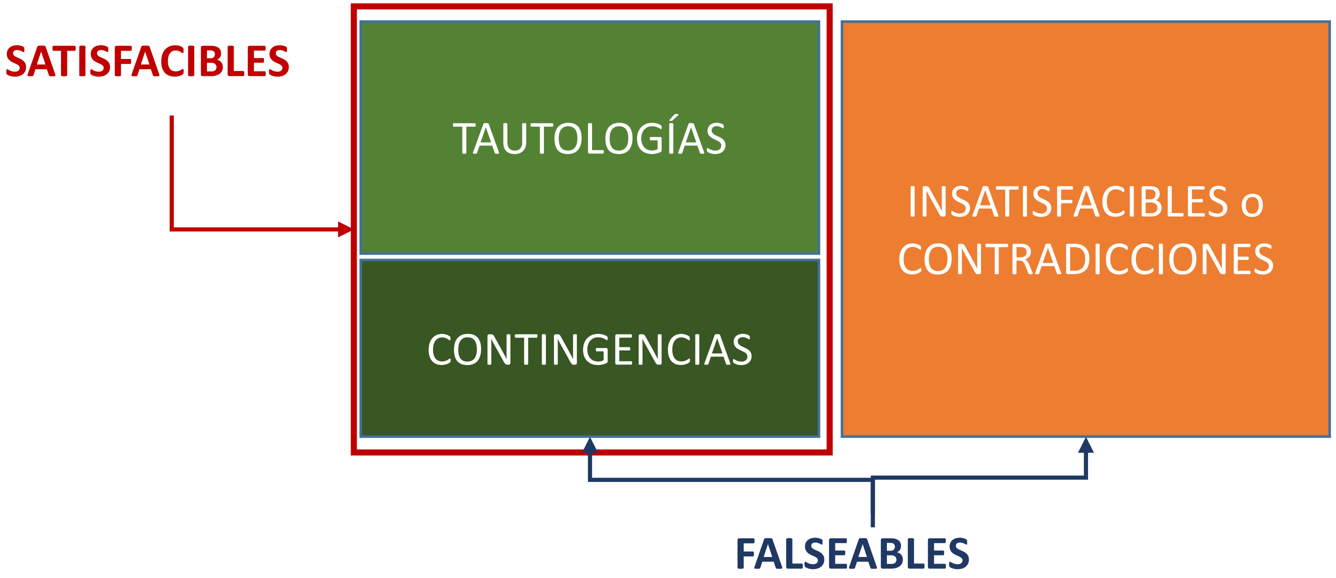
Facultad de Informática

- Apliquemos la técnica **Tablas de Verdad**, para evaluar la f.b.f. que nos habíamos propuesto: **($p \land q \rightarrow r$)**
  - Paso 1: Determinar el número n de elementos atómicos de la oración. En este caso: n = 3
  - Paso 2: Construir una tabla con tantas columnas como n + número de operaciones (en este caso: 3 + 2) y con tantas filas como interpretaciones posibles, 2 elevado a n (en este caso: 2 elevado a 3 = 8)
  - Paso 3: Establecer asignaciones para cada interpretación.
  - Paso 4: Obtener las evaluaciones según el orden de construcción de la oración, teniendo en cuenta la pag.12.
  - Paso 5: El valor de verdad de la oración **($p \land q \rightarrow r$)** viene dada por la última columna completada.

INTERPRETACIONES			EVALUACIÓN DE: ($p \land q \rightarrow r$)	
p	**q**	**r**	**$p \land q$**	**$p \land q \rightarrow r$**
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Satisfacibilidad y tipos de oraciones en L0 (I)

- Hemos dicho antes que una oración es SATISFACIBLE si al menos una de sus interpretaciones se puede evaluar como VERDADERA. Y también que una oración será INSATISFACIBLE si en todas sus interpretaciones se evalúa como FALSA.



- Una oración que tiene al menos una interpretación evaluada como FALSA, se denomina FALSEABLE.
- Si una oración es SATISFACIBLE y FALSEABLE, se dice de ella que es una CONTINGENCIA.
- Si una oración SATISFACIBLE no puede ser FALSEADA, entonces se dice de ella que es una TAUTOLOGÍA.
- El conjunto de las oraciones llamadas CONTINGENCIAS unido al conjunto de oraciones llamadas TAUTOLOGÍAS, nos aporta el conjunto de las oraciones SATISFACIBLES, que es disjunto del conjunto de las oraciones INSATISFACIBLES, llamadas también CONTRADICCIONES.

Satisfacibilidad y tipos de oraciones en L0 (y II)

- Si una oración SATISFACIBLE no puede ser FALSEADA, entonces se dice de ella que es una TAUTOLOGÍA. Es decir, este tipo de oraciones tiene todas sus interpretaciones evaluadas como VERDADERAS. **Si la oración α es una TAUTOLOGÍA, entonces la oración α no es FALSEABLE. Y, ¡¡¡viceversa!!!**
- Si un oración es una TAUTOLOGÍA, entonces dicha oración es SATISFACIBLE. ¡¡¡Pero no viceversa!!!
- Si una oración es una CONTRADICCIÓN (INSATISFACIBLE), será una oración FALSEABLE. ¡¡¡Pero no viceversa!!!
- Una oración SATISFACIBLE puede ser FALSEABLE. Y, viceversa, una oración FALSEABLE puede ser SATISFACIBLE.
- Si **α** es SATISFACIBLE, entonces ¿**¬α** es una oración INSATISFACIBLE? **¡¡¡NO!!!** Lo será, si y sólo si **α es TAUTOLOGÍA.**
- Si **α** es INSATISFACIBLE, entonces ¿**¬α** es una oración SATISFACIBLE? SI, lo es, y además será una TAUTOLOGÍA.

Conjuntos de oraciones en L0 (I)

- **Un conjunto de oraciones es SATISFACIBLE** si y solo si existen (al menos una) interpretaciones tal que para todas las oraciones del conjunto su evaluación es VERDADERA . En este caso, dichas interpretaciones se llaman **MODELO** para el conjunto de oraciones. La conjunción de todas las oraciones de un conjunto satisfacible es una oración satisfacible para la interpretación MODELO.
- **Un conjunto de oraciones se dice que es INSATISFACIBLE** si no cumple con la definición anterior, es decir, no existe ninguna interpretación que pueda ser llamada MODELO.

CONJUNTO SATISFACIBLE

INTER		EVALUACIONES					
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F	F	V

MODELO: fila p = V, q = V

CONJUNTO INSATISFACIBLE

INTER		EVALUACIONES					
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$\neg p \vee q \wedge \neg q$	$q \rightarrow p \rightarrow \neg p$
V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	V	V

Conjuntos de oraciones en L0 (II)

- En un conjunto SATISFACIBLE de oraciones todas las oraciones que lo componen deben ser SATISFACIBLES.
- Si a un conjunto SATISFACIBLE de oraciones se le añade una TAUTOLOGÍA, el conjunto sigue siendo SATISFACIBLE.
- Si a un conjunto SATISFACIBLE de oraciones se le añade una oración cualquiera puede transformarse en un conjunto de oraciones INSATISFACIBLE.
- A un conjunto SATISFACIBLE de oraciones se le puede suprimir cualquier oración que el conjunto seguirá siendo SATISFACIBLE. Incluso, si suprimimos todas sus oraciones seguirá siendo SATISFACIBLE. Por ello, podemos decir que el conjunto vacío de oraciones es SATISFACIBLE y, por definición, REPRESENTA UNA TAUTOLOGÍA.

INTER		EVALUACIONES						
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$	$q \rightarrow p \rightarrow \neg p$
V	V	V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	F	F	V	V

CONJUNTO AHORA INSATISFACIBLE

ORACIÓN AÑADIDA

CONJUNTO SATISFACIBLE

Conjuntos de oraciones en L0 (y III)

- Un conjunto INSATISFACIBLE de oraciones puede estar formado por oraciones que son todas ellas SATISFACIBLES.
- Un conjunto de oraciones que contenga una CONTRADICCIÓN es un conjunto INSATISFACIBLE.
- Si a un conjunto INSATISFACIBLE de oraciones se le añade un nueva oración, el conjunto sigue siendo INSATISFACIBLE, incluso si la oración añadida es una TAUTOLOGÍA.
- Si en un conjunto INSATISFACIBLE de oraciones se suprime una oración, puede ocurrir que el conjunto resultante sea SATISFACIBLE

INTER		EVALUACIONES						
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$\neg p \vee q \wedge \neg q$	$q \to p \to \neg p$	$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$
V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	V

EL CONJUNTO SIGUE SIENDO INSATISFACIBLE

ORACIÓN AÑADIDA

CONJUNTO INSATISFACIBLE

La Equivalencia Lógica en L0 (I)

Definición de la Equivalencia Lógica: Es una relación semántica entre dos oraciones lógicas.

- Dos oraciones **α** y **β** se dice que son lógicamente equivalentes si y solo si la evaluación de **α** (denotada por v(**α**)) es igual a la evaluación de **β** (denotada por v(**β**)) para cualquier interpretación considerada. Es decir, que interpretación a interpretación v(**α**) = v(**β**).
- Si se cumple la definición anterior dada para dos oraciones **α** y **β**, diremos que dichas oraciones están relacionadas mediante la equivalencia lógica y lo denotaremos por: **α** ≡ **β**.
- Si **α** ≡ **β**, para dos oraciones cualesquiera, entonces la oración formada por **(α ↔ β)** es una **TAUTOLOGÍA**. **¿¿¿POR QUÉ???**

INTER		EVALUACIONES									
p	**q**	**¬p**	**¬q**	**p → q**	**¬p ∨ q**	**¬p ∨ ¬q**	**¬(p ∧ q)**	**¬p ∧ ¬q**	**¬(p ∨ q)**	**p ∧ (q ∨ ¬p)**	**(p ∧ q) ∨ (p ∧ ¬p)**
V	V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F

LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

La Equivalencia Lógica en L0 (II)

Tabla con las equivalencias lógicas mas usadas y relevantes

DENOMINACIÓN	EXPRESIONES EQUIVALENTES	
Interdefinición de la Implicación	$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg\alpha \vee \beta$ $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
D'Morgan Conjunción de negaciones	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	$\neg(\alpha \vee \beta)$
D'Morgan Disyunción de Negaciones	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	$\neg(\alpha \wedge \beta)$
Contraposición	$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$
Exportación/Importación	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Upsilon$	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \Upsilon)$
Distributiva Conjunción/Disyunción	$\alpha \wedge (\beta \vee \Upsilon)$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \Upsilon)$
Distributiva Disyunción/Conjunción	$\alpha \vee (\beta \wedge \Upsilon)$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \Upsilon)$
Epistemológicas	$\alpha \wedge \neg\alpha$ $\alpha \vee \neg\alpha$	F V

La Equivalencia Lógica en L0 (III)

- Como se cumple que si **$\alpha \equiv \beta$**, para dos oraciones cualesquiera, la oración formada por **$(\alpha \leftrightarrow \beta)$** es una **TAUTOLOGÍA**, entonces también lo será **$((\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha))$.** Y con ello, **$(\alpha \rightarrow \beta)$** será una **TAUTOLOGÍA y $(\beta \rightarrow \alpha)$** también lo será.
- En todo caso, no confundir la Equivalencia Lógica con la doble implicación: **$\alpha \equiv \beta$** representa una relación semántica entre las oraciones, y **$(\alpha \leftrightarrow \beta)$** una operación entre ellas.
- En las **páginas 24 a 30 del documento 02-Proposicional-B que tienen en RECURSOS**, pueden encontrar la definición formalizada de Equivalencia Lógica, así como analizar las relaciones de equivalencia lógica más importantes y comunes entre oraciones lógicas para nuestras aplicaciones.
- La relación de Equivalencia Lógica entre dos oraciones, se utiliza preferentemente para reescribir una por otra. Por ejemplo, si en la formulación de una oración compleja **α** nos encontramos con la operación **$\neg(p \land q)$**, al saber que dicha expresión es lógicamente equivalente con **$(\neg p \lor \neg q)$,** podremos reescribir la primera por la segunda.
- De esta manera, si partimos de una oración **α,** y mediante reescrituras por equivalencia lógica en su formulación obtenemos una nueva oración **β**, y viceversa, podremos decir que **$\alpha \equiv \beta$.**

La Equivalencia Lógica en L0 (IV)

A modo de ejemplo:

- Si quisiésemos formalizar la llamada disyunción alternativa, aquella operación que nos dice que "una cosa o la otra, pero no las dos a la vez", para dos proposiciones atómicas **p** y **q**, dicha operación se formalizaría en la siguiente oración: **$(p \lor q \land \neg(p \land q))$. Vamos a reescribir esta fórmula.**
  - Añadamos paréntesis para precisar mejor: **$((p \lor q) \land \neg(p \land q))$.**
  - Apliquemos la equivalencia de De Morgan al segundo término de la conjunción principal: **$((p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q))$.**
  - Apliquemos la equivalencia de la propiedad distributiva de la conjunción con respecto a la disyunción: **$((p \land \neg p) \lor (p \land \neg q) \lor (q \land \neg p) \lor (q \land \neg q))$**
  - Si aplicamos la equivalencia lógica de **$(\alpha \land \neg\, \alpha) \equiv F$,** tenemos**: $(F \lor (p \land \neg q) \lor (q \land \neg p) \lor\ F)$**
  - Y teniendo en cuenta que **$(\alpha \lor F) \equiv \alpha$,** tendremos finalmente: **$((p \land \neg q) \lor (q \land \neg p))$**
- Esto nos dice que: **$(p \lor q \land \neg(p \land q)) \equiv ((p \land \neg q) \lor (q \land \neg p))$.**
- **HAGAN LA REESCRITURA DE LA SEGUNDA HACIA LA PRIMERA**

La Equivalencia Lógica en L0 (V)

- Vamos a aplicar la Equivalencia Lógica para transformar unas oraciones en otras, de manera que en estas últimas no aparezcan las conectivas de Implicación y de Doble Implicación. Es decir, que en nuestras nuevas oraciones solo aparecerán las conectivas de Negación, Conjunción y Disyunción: ¡¡¡las conectivas u operadores que hacían del conjunto de proposiciones un Algebra de Boole!!!
- Estas últimas fórmulas, estructuradas de una cierta manera, tienen una gran importancia en Lógica Formal a la hora de establecer mecanismos de resolución de la SATISFACIBILIDAD de oraciones.
- Vamos a estructurar las fórmulas de manera que sean:
  - a) Conjunción de disyunciones; y
  - b) Disyunción de conjunciones.
- A estos dos tipos de fórmulas las llamaremos **FORMAS NORMALES** de una oración compleja. Si es una conjunción de disyunciones, la llamaremos FORMA NORMAL CONJUNTIVA **(FNC).** Si es una disyunción de conjunciones, la llamaremos FORMA NORMAL DISYUNTIVA **(FND).**
- Hemos visto antes que la oración $(((p \to q) \land \neg q) \to \neg p)$ tenía todas sus interpretaciones evaluadas como VERDADERAS, por lo que es una TAUTOLOGÍA.
- Hemos visto, asimismo, que la oración $((p \to q) \land p \land \neg q)$ tenía todas sus interpretaciones evaluadas como FALSAS, por lo que es una CONTRADICCIÓN u oración INSATISFACIBLE.

La Equivalencia Lógica en L0 (y VI)

- Transformemos la TAUTOLOGÍA a su FORMA NORMAL CONJUNTIVA por aplicación de Equivalencias Lógicas.

  $(((\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \land \neg\mathbf{q}) \to \neg\mathbf{p}) \equiv$

  $(((\neg\mathbf{p} \lor \mathbf{q}) \land \neg\mathbf{q}) \to \neg\mathbf{p}) \equiv$

  $(\neg((\neg\mathbf{p} \lor \mathbf{q}) \land \neg\mathbf{q}) \lor \neg\mathbf{p}) \equiv$

  $(\neg(\neg\,\mathbf{p} \lor \mathbf{q}) \lor \neg\neg\mathbf{q}) \lor \neg\mathbf{p}) \equiv$

  $(\neg(\neg\,\mathbf{p} \lor \mathbf{q}) \lor \mathbf{q}) \lor \neg\mathbf{p}) \equiv$

  $((\mathbf{p} \land \neg\mathbf{q}) \lor \mathbf{q}) \lor \neg\mathbf{p}) \equiv$

  $((\mathbf{p} \land \neg\mathbf{q}) \lor (\mathbf{q} \lor \neg\mathbf{p})) \equiv$

  $((\mathbf{p} \lor \mathbf{q} \lor \neg\mathbf{p}) \land (\neg\mathbf{q} \lor \mathbf{q} \lor \neg\mathbf{p}))$ **¡¡¡ QUE ES SU FNC!!!**
- **Y, ¿¿¿QUÉ ES LO QUE HEMOS ENCONTRADO??? ¿¿¿QUÉ PODEMOS DECIR DE ESTA FÓRMULA NUEVA???**
- Si es equivalente a la de partida, debe ser una TAUTOLOGÍA. ¿Lo es? Analicémosla un poco más. La fórmula es una conjunción de dos disyunciones. Y en cada una de las dos disyunciones aparece una proposición y su negada: $(\mathbf{p} \lor \neg\mathbf{p})$ en la primera, y $(\neg\mathbf{q} \lor \mathbf{q})$ en la segunda. Y sabemos que esto se evalúa como la constante **V.** Así que, tenemos: $((\mathbf{p} \lor \mathbf{q} \lor \neg\mathbf{p}) \land (\neg\mathbf{q} \lor \mathbf{q} \lor \neg\mathbf{p})) \equiv ((\mathbf{V} \lor \mathbf{q}) \land (\mathbf{V} \lor \neg\mathbf{p}))$
- Como $(\mathbf{V} \lor \alpha) \equiv \mathbf{V}$, podemos seguir de la siguiente manera: $((\mathbf{V} \lor \mathbf{q}) \land (\mathbf{V} \lor \neg\mathbf{p})) \equiv (\mathbf{V} \land \mathbf{V}) \equiv \mathbf{V}$
- Es decir, que la fórmula **FNC** es equivalente lógicamente a la constante **V**, por tanto es una oración VERDAD, una TAUTOLOGÍA **(¡¡¡y sin hacer interpretaciones en Tablas de Verdad!!!)**. Pues si la FNC obtenida es una TAUTOLOGÍA y es equivalente a la fórmula de partida, eso quiere decir que ésta también es una TAUTOLOGÍA. Cuestión que ya sabíamos, pero que hemos demostrado de otra manera.
- **Para saber si una oración es una TAUTOLOGÍA basta con transformarla en su FNC y comprobar que en todas y en cada una de las disyunciones que la forman aparece una proposición atómica y su negada.**

Razonamientos y Consecuencia Lógica (I)

Definición de Consecuencia Lógica: Es una relación semántica entre oraciones lógicas.

- Se dice que **β** es consecuencia lógica de **α**, y lo denotaremos por **α ⊨ β**, si y sólo si:
  - En aquellas interpretaciones en las que **α** es verdad (v(**α**) = V), necesariamente **β** también es verdad (v(**β**) = V)
  - En la misma interpretación no puede ser que **α** se evalúe como verdad y **β** se evalúe como falsa. CONTRAEJEMPLO.
- Teniendo en cuenta esta definición: **si α ⊨ β entonces (α → β) es una oración tautológica.**
- Se dice que una oración **β** es consecuencia lógica del conjunto de oraciones F, que denotaremos por F ⊨ β, si todo **modelo de** F lo es necesariamente de **β.** Recordemos que un modelo es aquella interpretación en la que todas y cada una de las oraciones del conjunto de oraciones se evalúan como VERDAD.
- Un **razonamiento** en el que tengamos un conjunto de premisas F y una conclusión **β**, será **VÁLIDO** si podemos demostrar que F ⊨ β**,** es decir que β **es una consecuencia lógica del conjunto** F **.**

INTERPRETA		EVALUACIONES DE: $(p \to q) \land p \to q$ y $(p \to q) \land \neg q \to \neg p$						
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \land p$	$(p \to q) \land p \to q$	$(p \to q) \land \neg q$	$(p \to q) \land \neg q \to \neg p$
V	V	F	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V

Razonamientos y Consecuencia Lógica (II)

- **Si el conjunto F es el conjunto vacío, entonces** $\vDash \beta$ **.** Con lo que β **es una oración tautológica. ¡¡¡OJO!!! Es muy importante.** Y por qué β es una Tautología: pues porque si β debe ser consecuencia lógica del conjunto vacío de premisas, y este conjunto es (lo hemos visto antes) satisfacible, y por definición una tautología, la única posibilidad es que β también lo sea para que se cumpla la definición de consecuencia lógica: **{v(V → V) = V}**.
- De la TABLA DE VERDAD que hemos desarrollado:
  - **a)** **((p → q) ∧ p → q)** es una **TAUTOLOGÍA.** Así que, la oración **q** es consecuencia lógica de la oración **((p → q) ∧ p).**
  - **b)** **((p → q) ∧ ¬q → ¬p)** es una **TAUTOLOGÍA.** Así que, la oración **¬p** es consecuencia lógica de la oración **((p → q) ∧ ¬q).**
  - c) La oración **q** es una consecuencia lógica del conjunto de oraciones **{(p → q); p}.** Es decir, **{(p → q); p} ⊨ q** y como hemos visto en a) la implicación de la conjunción de las dos oraciones del conjunto con la oración que es consecuencia lógica de él, **es una TAUTOLOGÍA**
  - d) La oración **¬p** es una consecuencia lógica del conjunto de oraciones **{(p → q); ¬q}.** Es decir, **{(p → q); ¬q} ⊨ ¬p** y como hemos visto en b) la implicación de la conjunción de las dos oraciones del conjunto con la oración que es consecuencia lógica de él, **es una TAUTOLOGÍA**
- Según esto, la oración **q** es la conclusión del conjunto de premisas **{(p → q); p}** en un esquema de RAZONAMIENTO VÁLIDO: De la verdad de las premisas se concluye necesariamente la verdad de la conclusión. Este es un esquema de razonamiento válido que llamaremos SILOGISMO HIPOTÉTICO MIXTO MODUS PONENS
- De la misma forma, la oración **¬p** es la conclusión del conjunto de premisas **{(p → q); ¬q}** en un esquema de RAZONAMIENTO VÁLIDO. Este es un esquema de razonamiento válido que llamaremos SILOGISMO HIPOTÉTICO MIXTO MODUS TOLLENS

Razonamientos y Consecuencia Lógica (III)

Propiedades de la relación Consecuencia Lógica entre oraciones:

- Reflexiva: para cualquier oración $\boldsymbol{\alpha}$, se cumple $\boldsymbol{\alpha} \vDash \boldsymbol{\alpha}$
- Transitividad: para cualquier par de oraciones $\boldsymbol{\alpha}$ y β, y dado un conjunto F de oraciones, si $F \vDash \boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\alpha} \vDash \beta$, entonces $F \vDash \beta$
- Monotonía: Dado un conjunto F de oraciones y una oración β, si $F \vDash \beta$, entonces $[F \cup \{\alpha\}] \vDash \beta$ para cualquier $\boldsymbol{\alpha}$
- Si $F \vDash \beta$ y $\boldsymbol{\alpha}$ es una Tautología perteneciente al conjunto F, entonces $[F - \{\boldsymbol{\alpha}\}] \vDash \beta$
- Relación entre la equivalencia lógica $\equiv$ y la consecuencia lógica $\vDash$: Si $\boldsymbol{\alpha} \equiv \beta$, entonces $\boldsymbol{\alpha} \vDash \beta$ y $\beta \vDash \boldsymbol{\alpha}$

INTERPRE		EVALUACIONES								
p	**q**	**¬p**	**¬q**	**p → q**	**¬p ∨ q**	**¬(p ∧¬q)**	**(p → q) → ¬p ∨ q**	**(p → q) ∧ ¬p → ¬p ∨ q**	**¬p ∨ q → ¬(p ∧¬q)**	**(p → q) → ¬(p ∧¬q)**
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V

POR MONOTONÍA **POR TRANSITIVIDAD**

Razonamientos y Consecuencia Lógica (IV)

El Teorema de la Deducción Semántica:

- Si la oración β **es consecuencia lógica del conjunto de oraciones $F = \{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\}$,** lo que escribimos como **$\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\} \vDash \beta$, entonces también $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots\} \vDash \alpha n \rightarrow \beta$**
- Y si esto es así, también sería una consecuencia lógica: **$\{\alpha 1, \alpha 2\} \vDash \alpha 3 \rightarrow (\ldots(\alpha n \rightarrow \beta))$**
- Y también: **$\{\alpha 1\} \vDash \alpha 2 \rightarrow (\alpha 3 \rightarrow (\ldots(\alpha n \rightarrow \beta)))$**
- Y por último, también lo sería: **$\vDash \alpha 1 \rightarrow (\alpha 2 \rightarrow (\alpha 3 \rightarrow (\ldots(\alpha n \rightarrow \beta))))$**
- Partiendo del conjunto vacío de premisas, la oración **$(\alpha 1 \rightarrow (\alpha 2 \rightarrow (\alpha 3 \rightarrow (\ldots(\alpha n \rightarrow \beta)))))$** es una **TAUTOLOGÍA.**
- Por tanto, en general, si tenemos un conjunto F de oraciones y dos oraciones **α y** β cualesquiera, tal que se cumple que: $[F \cup \{\alpha\}] \vDash \beta$, se cumplirá también que: $F \vDash \alpha \rightarrow \beta$
- **¡¡¡ESTE ES UN TEOREMA DE UNA IMPORTANCIA Y RELEVANCIA MÁXIMA EN LÓGICA!!!**

Razonamientos y Consecuencia Lógica (V)

- QUE TIENE UN COROLARIO QUE YA HEMOS VISTO EN LAS TABLAS DE VERDAD: Si $\mathcal{F}$ es un conjunto formado por **$\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\}$**, y $\mathcal{F} \vDash \beta$, entonces **$(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \wedge \alpha 3 \wedge \ldots. \wedge \alpha n \rightarrow \beta)$** es una **TAUTOLOGÍA. CON ELLO, ¡¡¡ACABAMOS DE ENUNCIAR UN PLANTEAMIENTO DE SATISFACIBILIDAD PARA DEMOSTRAR SI UN RAZONAMIENTO ES VÁLIDO!!! LO LLAMAREMOS MÉTODO DIRECTO**
- **Que también podemos expresarlo como que: $(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \wedge \alpha 3 \wedge \ldots. \wedge \alpha n \wedge \neg \beta)$ es una ¡¡¡CONTRADICCIÓN!!! Esto es así dado que si $(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \wedge \alpha 3 \wedge \ldots. \wedge \alpha n \rightarrow \beta)$** es una **TAUTOLOGÍA, si la negamos tendremos una Contradicción. Así, $\neg(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \wedge \alpha 3 \wedge \ldots. \wedge \alpha n \rightarrow \beta)$ debe ser una Contradicción y aplicando las equivalencias lógicas, tendremos la expresión del principio.**
- **DE ESTA MANERA TENDREMOS UN MÉTODO MUY POTENTE PARA PLANTEAR EL PROBLEMA DE RESOLVER SI UNA CONSECUENCIA LÓGICA ES VÁLIDA: LO LLAMAREMOS MÉTODO POR REFUTACIÓN**

- **Por ejemplo, si queremos demostrar la validez de este razonamiento $\{\neg p \rightarrow r, \neg q \rightarrow r\} \vDash \neg p \vee \neg q \rightarrow r$ podemos plantearnos el Método directo y expresar el problema como el de comprobar si la expresión: $((\neg p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \vee \neg q \rightarrow r))$ es una TAUTOLOGÍA.**
- **Pero, también podríamos haber empleado el Método por Refutación y expresar el problema como el de comprobar si la expresion: $((\neg p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg (\neg p \vee \neg q \rightarrow r))$ es una CONTRADICCIÓN.**

Razonamientos y Consecuencia Lógica (y VI)

En las páginas 36-42 del documento 02-Proposicional-B disponible en RECURSOS tienen una serie de esquemas básicos (como ladrillos elementales) de razonamientos válidos, entre los que se encuentran algunos de los Silogismos más relevantes. **Los SILOGISMOS:** Son esquemas de razonamiento deductivo válido formados por dos premisas y una conclusión.

SILOGISMOS:

- Inconsistencia: $\{\alpha; \neg\alpha\} \vDash \beta$
- Silogismo hipotético: $\{\alpha \to \beta; \beta \to \gamma\} \vDash \alpha \to \gamma$
- Demostración por casos: $\{\alpha \to \gamma; \beta \to \gamma\} \vDash \alpha \vee \beta \to \gamma$
- Prueba por caos: $\{\alpha \to \gamma; \neg\alpha \to \gamma\} \vDash \gamma$
- Silogismo disyuntivo (Modus Tollendo Ponens): $\{\alpha \vee \beta; \neg\beta\} \vDash \alpha$
- Silogismos hipotéticos mixtos: Modus Ponens y Modus Tollens, ya vistos anteriormente

OTROS ESQUEMAS BÁSICOS:

- Dilema constructivo: $\{\alpha \vee \beta; \alpha \to \delta; \beta \to \gamma\} \vDash \delta \vee \gamma$
- Transposición: $\alpha \to \beta \vDash \neg\beta \to \neg\alpha$