Leandro Marín	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Aplicaciones Lineales	Clase: 30 min.

Vídeo : `https://youtu.be/BUOlR6c2vaU`

1. Resumen

Definición 1. *Una aplicación lineal $f : K^n \to K^m$ es una fórmula que dado un elemento u de K^n nos da un elemento $f(u)$ de K^m satisfaciendo las siguientes propiedades:*

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ *para todo* $u, v \in K^n$.
2. $f(cu) = cf(u)$ *para todo* $c \in K$ *y todo* $u \in K^n$

Ejemplo 2. *El ejemplo más sencillo de aplicación lineal es la* **aplicación identidad** *que deja fijos todos los vectores. La representaremos por* $\mathsf{id} : K^n \to K^n$ *y tendremos que* $\mathsf{id}(u) = u$ *para todo* u.

Demostración. Se cumplen las condiciones porque $\mathsf{id}(u+v) = u+v = \mathsf{id}(u) + \mathsf{id}(v)$ y $\mathsf{id}(cu) = cu = c\,\mathsf{id}(u)$ para cualesquiera $u, v \in K^n$ y $c \in K$. □

Ejemplo 3. *Otro ejemplo de aplicación lineal es la* **aplicación nula** *que lleva todos los vectores al vector* 0. *La denotaremos por* 0.

Demostración. Se cumplen las condiciones porque $0(u+v) = 0 = 0(u) + 0(v)$ y $0(cu) = 0 = c\,0 = c\,0(u)$ para cualesquiera $u, v \in K^n$ y $c \in K$. □

Ejemplo 4. *Sea E una operación elemental por filas. Si la aplicamos a matrices columna (es decir, a vectores) E es una aplicación lineal.*

Este es un caso particular de algo que demostraremos de forma más general inmediatamente. Por eso vamos a ver únicamente un ejemplo. Supongamos que tenemos la operación elemental $E_{(1)+2(3)}$ y la aplicamos a la suma de dos vectores:

$$E_{(1)+3(2)}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = E_{(1)+3(2)}\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1+v_1)+3(u_2+v_2) \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_1+3u_2+v_1+3v_2 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+3u_2 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1+3v_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = E_{(1)+3(2)}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + E_{(1)+3(2)}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Todos estos ejemplos en realidad se pueden generalizar al ejemplo fundamental, que es el producto por una matriz.

Proposición 5. *Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ sobre el cuerpo K y $f : K^n \to K^m$ dada por $f(u) = Au$. Entonces f es una aplicación lineal.*

Demostración. Si $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$ y $u \in K^n = \mathbf{M}_{n\times 1}(K)$, el producto de matrices Au será una matriz de $\mathbf{M}_{m\times 1}(K)$, o lo que es lo mismo, un vector de K^m. Esto prueba que f realmente lleva vectores de K^n a K^m. Para ver la linealidad, usamos las propiedades del producto de matrices:

1. $f(u+v) = A(u+v) = Au + Av = f(u) + f(v)$.
2. $f(cu) = A(cu) = (Ac)u = c(Au) = cf(u)$.

□

Todos los ejemplos que hemos visto antes son casos particulares de esta proposición. La aplicación identidad viene representada por la matriz identidad, la aplicación nula por la matriz 0 y las operaciones elementales por las matrices elementales.

En realidad, todas las aplicaciones lineales se pueden representar mediante matrices. El método para obtener dicha matriz será el mismo que utilizamos para las operaciones elementales: aplicarlas a la matriz identidad.

Proposición 6. *Sea $f : K^n \to K^m$ una aplicación lineal, entonces:*

- *Existe una única matriz $M(f)$ que representa la aplicación lineal, es decir, tal que $f(u) = M(f)u$ para cualquier vector $u \in K^n$.*
- *Si aplicamos f a múltiples columnas de una matriz B, tendremos que $f(B) = M(f)B$.*
- *$M(f)$ se puede calcular aplicando f a las columnas de la matriz identidad, es decir, $M(f) = f(I)$.*
- *La matriz $M(f)$ se llamará* **matriz asociada a la aplicación lineal** *f.*
- *En el caso en que la aplicación lineal f venga dada por una matriz A, tendremos que $M(f) = A$ ya que $f(I) = AI = A$.*

Esta relación nos identifica aplicaciones lineales y matrices, con lo que realmente podemos considerar que son la misma cosa. Además, la multiplicación de matrices se puede identificar con la composición de aplicaciones lineales.

Proposición 7. *Sean $f : K^m \to K^p$ y $g : K^n \to K^m$ aplicaciones lineales, entonces podemos componer*

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & K^m \arrow[r, "f"] & K^p \end{tikzcd}$$

Siendo $(f \circ g)(u) = f(g(u))$ para cualquier u de K^n. La matriz de la composición es el producto de las matrices de cada una de las aplicaciones lineales, es decir

$$M(f \circ g) = M(f)M(g).$$

Demostración. Tomemos un vector u cualquiera de K^n, entonces

$$M(f \circ g)u = (f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(M(g)u) = M(f)(M(g)u) = (M(f)M(g))u$$

Como esto es cierto para cualquier vector u, podemos aplicarlo a las columnas de la matriz identidad y deducir que

$$M(f \circ g) = M(f \circ g)I = (M(f)M(g))I = M(f)M(g).$$

□

Nota 8. *Un ejemplo interesante de matrices son los vectores fila. Un vector fila del tipo $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ se corresponde con la aplicación lineal $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$. Este tipo de expresiones nos aparecen muy habitualmente y reciben el nombre de* **covectores** *y el espacio de todos los covectores recibe el nombre de* **espacio dual**. *En realidad el comportamiento de los vectores columna y los vectores fila es totalmente análogo, pero nosotros evitaremos el uso de los vectores fila tomando matrices traspuestas cuando sea necesario.*

Aunque los conceptos sean los mismos, a veces la terminología que se utiliza en el contexto de las aplicaciones lineales y en el de las matrices no es exactamente la misma, por ejemplo:

Definición 9. *Sea $f : K^n \to K^m$ una aplicación lineal. Definiremos:*

1. **Núcleo de** f, *y lo denotaremos* $\mathsf{Ker}(f)$, *al conjunto de vectores* $u \in K^n$ *tales que* $f(u) = 0$ *(o lo que es lo mismo* $M(f)u = 0$*).*
2. **Imagen de** f, *y la denotaremos* $\mathsf{Im}(f)$, *al conjunto de vectores* $v \in K^m$ *para los cuales existe* $u \in K^n$ *tal que* $f(u) = v$ *(o lo que es lo mismo,* $M(f)u = v$*).*

Como podemos ver, si consideramos la aplicación lineal en términos de su matriz asociada, el núcleo de f no es mas que el anulador por la derecha de $M(f)$ y la imagen de f es el espacio generado por las columnas de $M(f)$. Es decir:

$$\mathsf{Ker}(f) = N(M(f))$$

$$\mathsf{Im}(f) = C(M(f))$$

En el campo de las aplicaciones (no únicamente las lineales) existen también conceptos que se relacionan con los que hemos visto. Concretamente son las aplicaciones inyectivas y sobreyectivas.

Definición 10. *Sea* $f : X \to Y$ *una aplicación entre dos conjuntos* X *e* Y *cualesquiera.*

1. *Si* $f(x) = y$ *diremos que* y **es la imagen de** x *o también que* x **es una antiimagen de** y.
2. *La antiimagen de un elemento cualquiera* y *de* Y *puede no existir. Las aplicaciones* $f : X \to Y$ *para las cuales todo elemento de* Y *tiene al menos una antiimagen se dicen* **sobreyectivas**. *Es decir,* $f : X \to Y$ *es sobreyectiva si para todo* $y \in Y$ *existe algún* $x \in X$ *tal que* $f(x) = y$.
3. *Dado un elemento* y *de* Y*, en general es posible que* y *tenga más de una antiimagen. Si esto no sucede y los elementos tienen a lo sumo una antiimagen, diremos que* f *es* **inyectiva**. *Dicho de otro modo,* f *es inyectiva si* $f(x_1) = f(x_2)$ *implica que* $x_1 = x_2$.
4. *Diremos que* f *es* **biyectiva** *si es inyectiva y sobreyectiva. Si* $f : X \to Y$ *es biyectiva, podemos definir* $g : Y \to X$ *tal que a cada* $y \in Y$ *le asigne* $g(y)$ *su única antiimagen de* X. *Esta* g *es la aplicación inversa de* f. *En realidad, una aplicación es biyectiva si y solo si tiene inversa.*

En el caso de aplicaciones lineales, tenemos que

Proposición 11. *Sea* $f : K^n \to K^m$ *una aplicación lineal, entonces*

1. f *es inyectiva si y solo si* $\mathsf{Ker}(f) = 0$.
2. f *es sobreyectiva si y solo si* $\mathsf{Im}(f) = K^m$.

Demostración. Si $f(x_1) = f(x_2)$, utilizando la linealidad tendríamos que $f(x_1 - x_2) = 0$ y eso es equivalente a que $x_1 - x_2 \in \mathsf{Ker}(f) = 0$ y por lo tanto $x_1 = x_2$.
Recíprocamente, si $\mathsf{Ker}(f)$ no fuese 0, habría algún elemento $x_1 \in \mathsf{Ker}(f)$ distinto de 0 y también podríamos tomar $x_2 = 0$ con lo que $f(x_1) = 0 = f(x_2)$ y f no podría ser inyectiva.
La parte (2) es inmediata. □

Esto nos permite relacionar muchos conceptos que hemos estudiado en contextos diferentes:

Proposición 12. *Sea* $r : K^n \to K^m$ *una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. r *es sobreyectiva.*
2. $\mathsf{Im}(r) = K^m$.
3. $C(M(r)) = K^m$.
4. *Las columnas de* $M(r)$ *son generadoras de* K^m.

5. *La matriz* $M(r)$ *tiene una inversa lateral por la derecha.*
6. *Existe una aplicación lineal* $s : K^m \to K^n$ *tal que* $r \circ s = \mathsf{id}$.

y de forma similar, tenemos los conceptos relativos a la inyectividad:

Proposición 13. *Sea* $s : K^m \to K^n$ *una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. s *es inyectiva.*
2. $\mathsf{Ker}(s) = 0$.
3. $N(M(s)) = 0$.
4. *Las columnas de* $M(s)$ *son linealmente independientes.*
5. *La matriz* $M(s)$ *tiene una inversa lateral por la izquierda.*
6. *Existe una aplicación lineal* $r : K^n \to K^m$ *tal que* $r \circ s = \mathsf{id}$.

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

Existen varios tipos de ejercicios que se pueden plantear en términos de aplicaciones lineales, pero que ya hemos resuelto en otro contexto con anterioridad.
Por ejemplo, si nos dan una aplicación lineal, pueden preguntarnos si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Para ello no tendríamos más que reducir la matriz y comprobar si las columnas son linealmente independientes, generadoras o ambas cosas.
También nos podrían pedir las inversas laterales (en caso de existir). Para calcularlas no tenemos más que calcular las matrices inversas laterales.
También nos pueden pedir componer aplicaciones lineales (lo cual es equivalente a multiplicar matrices).
Para obtener la matriz de una aplicación lineal f, simplemente tenemos que aplicar f a las columnas de la matriz identidad para obtener las columnas de la matriz $M(f)$. En muchas ocasiones es incluso más sencillo, si nos dan por ejemplo:

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

se puede ver de forma casi inmediata que

$$\begin{bmatrix} x_1 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

por lo tanto la matriz es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
A continuación vamos a ver ejemplos en los que nos piden que calculemos una aplicación lineal sabiendo que toma ciertos valores sobre unos vectores que nos dan en el enunciado. Este tipo de problemas se pueden plantear como una ecuación matricial. En este tema resolveremos las más sencillas, más adelante planteremos algunas en las cuales existan soluciones múltiples o incluso no existan soluciones. Como es habitual, los 20 primeros ejercicios serán en $\mathbb{R}$, los 20 siguientes en $\mathbb{Z}_5$ y los 10 últimos en $\mathbb{Z}_3$.

Ejercicio 14. *Calcula la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}\quad f\left(\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u=f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}\right)=M(f)\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\\frac{1}{2}&-2\\0&0\end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(2)-3(1)}}\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&-3&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(1)-1(2)}}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&4&-1\\0&1&-3&1\end{array}\right]$$
.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f)=\begin{bmatrix}-1&1\\\frac{1}{2}&-2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-1\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&2\\8&-\frac{5}{2}\\0&0\end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 15. *Calcula la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\quad f\left(\begin{bmatrix}-3\\-8\\-2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\quad f\left(\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u=f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-8&7\\0&-2&5\end{bmatrix}\right)=M(f)\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-8&7\\0&-2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&0\\-1&-\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-8&7\\0&-2&5\end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&3&1&0&0\\3&-8&7&0&1&0\\0&-2&5&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(2)-3(1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&3&1&0&0\\0&1&-2&-3&1&0\\0&-2&5&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&-8&3&0\\0&1&-2&-3&1&0\\0&-2&5&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&-8&3&0\\0&1&-2&-3&1&0\\0&0&1&-6&2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -26 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -26 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -26 & 9 & 3 \\ -15 & 5 & 2 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{5}{2} & -1 \\ \frac{79}{2} & -\frac{27}{2} & -5 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 16. *Calcula la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 11 & \frac{13}{2} \\ 14 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 17. *Calcula la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 5 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 18. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 19. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\left[\begin{array}{cc} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{array}\right]\right) = M(f)\left[\begin{array}{cc} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\left[\begin{array}{cc} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{array}\right]$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -7 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{7}{2}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 3 & -7 \\ -5 & 11 \\ -1 & 2 \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejercicio 20. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\left[\begin{array}{c} -1 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array}\right] \quad f\left(\left[\begin{array}{c} -1 \\ -3 \\ 2 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right] \quad f\left(\left[\begin{array}{c} 0 \\ -5 \\ 6 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{c} -2 \\ 0 \end{array}\right]$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\left[\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{array}\right]\right) = M(f)\left[\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\left[\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{array}\right]$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 6 & 5 \\ 7 & -6 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 30 & -24 & -20 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 21. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -5 \\ 9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-5(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ -20 & -11 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 22. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{7}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{7(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{2}{7}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & 15 \\ 3 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 23. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -9 \\ -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -9 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{9}{2}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 3 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 24. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{3}{2}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 25. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 6 & \frac{11}{2} \\ 0 & -8 & -10 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 26. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -8 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -8 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -3 & -\frac{7}{2} \\ -9 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 27. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 28. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -3 & -5 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -3 & -5 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -3 & -5 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -14 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{11}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{14}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{49}{11} & \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{14}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{49}{11} & \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{14}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{12}{11} & \frac{4}{11} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-11(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{49}{11} & \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{14}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & -4 & -11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{49}{11}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -53 & -18 & -49 \\ 0 & 1 & \frac{14}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & -4 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{14}{11}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -53 & -18 & -49 \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & -4 & -11 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -53 & -18 & -49 \\ 15 & 5 & 14 \\ -12 & -4 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 & 23 & 63 \\ 50 & 17 & 46 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 29. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 11 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 14 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 12 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 30. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -8 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{27}{2} & -\frac{31}{2} & -\frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 31. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -7 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -7 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-7(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -13 & -15 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 32. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -\frac{5}{2} \\ -9 & 8 & 5 \\ \frac{15}{2} & -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 33. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{7}{2}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & -7 \\ 1 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+\frac{11}{2}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & -7 & -12 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -12 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -12 & 11 \\ 4 & 7 & -7 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 & -12 \\ -2 & -4 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 18 & 31 & -29 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 34. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 35. *Calcula la aplicación lineal* $f : \mathbb{Z}_5{}^3 \to \mathbb{Z}_5{}^4$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 36. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}\quad f\left(\begin{bmatrix}0\\3\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}\quad f\left(\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix}2&0&2\\3&3&3\\3&3&4\end{bmatrix}\right)=M(f)\begin{bmatrix}2&0&2\\3&3&3\\3&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&1\\3&3&4\end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix}2&0&2\\3&3&3\\3&3&4\end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&2&1&0&0\\3&3&3&0&1&0\\3&3&4&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{3(1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&0\\3&3&3&0&1&0\\3&3&4&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&0\\0&3&0&1&1&0\\3&3&4&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&0\\0&3&0&1&1&0\\0&3&1&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{2(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&0\\0&1&0&2&2&0\\0&3&1&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&0\\0&1&0&2&2&0\\0&0&1&0&4&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(3)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&1&4\\0&1&0&2&2&0\\0&0&1&0&4&1\end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f)=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&1\\3&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&4\\2&2&0\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&4\\4&3&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 37. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\quad f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}\quad f\left(\begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix}1&1&4\\0&1&1\\3&1&1\end{bmatrix}\right)=M(f)\begin{bmatrix}1&1&4\\0&1&1\\3&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&3\\2&3&3\end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix}1&1&4\\0&1&1\\3&1&1\end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&4&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\3&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&4&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&3&4&2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&4&0\\0&1&1&0&1&0\\0&3&4&2&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 38. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 39. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 40. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 41. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 42. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 43. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 44. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 45. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 46. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 47. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 48. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 49. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\lozenge$

Ejercicio 50. *Calcula la aplicación lineal* $f : \mathbb{Z}_5{}^3 \to \mathbb{Z}_5{}^3$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\lozenge$

Ejercicio 51. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^3$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 52. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 53. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 54. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_3}^3 \to {\mathbb{Z}_3}^3$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 55. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_3}^3 \to {\mathbb{Z}_3}^2$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 56. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_3}^3 \to {\mathbb{Z}_3}^2$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 57. *Calcula la aplicación lineal* $f : \mathbb{Z}_3{}^2 \to \mathbb{Z}_3{}^4$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 58. *Calcula la aplicación lineal* $f : \mathbb{Z}_3{}^2 \to \mathbb{Z}_3{}^2$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$
.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 59. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_3}^3 \to {\mathbb{Z}_3}^2$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$
.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 60. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_3}^3 \to {\mathbb{Z}_3}^3$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 61. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_3}^3 \to {\mathbb{Z}_3}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 62. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_3}^2 \to {\mathbb{Z}_3}^4$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 63. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_3}^2 \to {\mathbb{Z}_3}^2$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

A. Representación matricial de aplicaciones lineales

En este apéndice vamos a ver un poco más en detalle el hecho de que toda aplicación lineal esté representada por una matriz. Este tipo de demostraciones son sencillas desde el punto de vista conceptual, pero un poco complicadas de escribir debido a la notación, por eso se deja como apéndice y no como parte fundamental del tema. Esta demostración, que desde el punto de vista matemático es clarificadora, puede tener el efecto contrario si no estáis acostumbrados al lenguaje matemático.

Empecemos recordando que hacer una operación elemental a varios vectores $u_1, u_2, \cdots, u_p$ es lo mismo que hacer la operación elemental a la matriz que tiene los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_p$ como columnas. El resultado lo tendremos el las columnas de la matriz que nos quede.

Haremos lo mismo para las aplicaciones lineales. Si $f : K^n \to K^m$ es lineal y tomamos varios vectores $u_1, u_2, \cdots, u_p \in K^n$, para calcular $f(u_i)$ para todos los vectores al mismo tiempo, tomaremos la matriz $B = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \vdots & u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ y definiremos $f(B)$ como la matriz que tiene como columnas los vectores $f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)$. Si la aplicación lineal f viene dada por una matriz A, entonces $f(B)$ es lo mismo que multiplicar A por cada columna de B y por lo tanto tenemos que $f(B) = AB$, el producto de matrices ordinario.

Proposición 64. *Sea $f : K^n \to K^m$ una aplicación lineal, $M(f) = f(I)$ la matriz de tamaño $m \times n$ sobre K que resulta de aplicar f a las columnas de la matriz identidad, entonces*

$$f(x) = M(f)x$$

para cualquier vector columna x de K^n.

Demostración. Sea $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ un vector columna cualquiera de K^n y vamos a denotar $v_1, v_2, \cdots, v_n$ a los vectores que resultan de aplicar f a las columnas de la matriz identidad, es decir,

$$M(f) = f(I) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \vdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

El vector x puede escribir como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

y aplicando el hecho de que f es lineal, podemos poner

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = f\left(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x_1 f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \cdots + x_n f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \vdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = f(I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = M(f) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$\square$

Notemos que si la aplicación lineal f viene dada por una matriz A, entonces

$$M(f) = f(I) = AI = A.$$