FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA INFORMÁTICA

Séptima sesión de prácticas

PRIMER CURSO DEL GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

PRIMER CUATRIMESTRE

2020-21

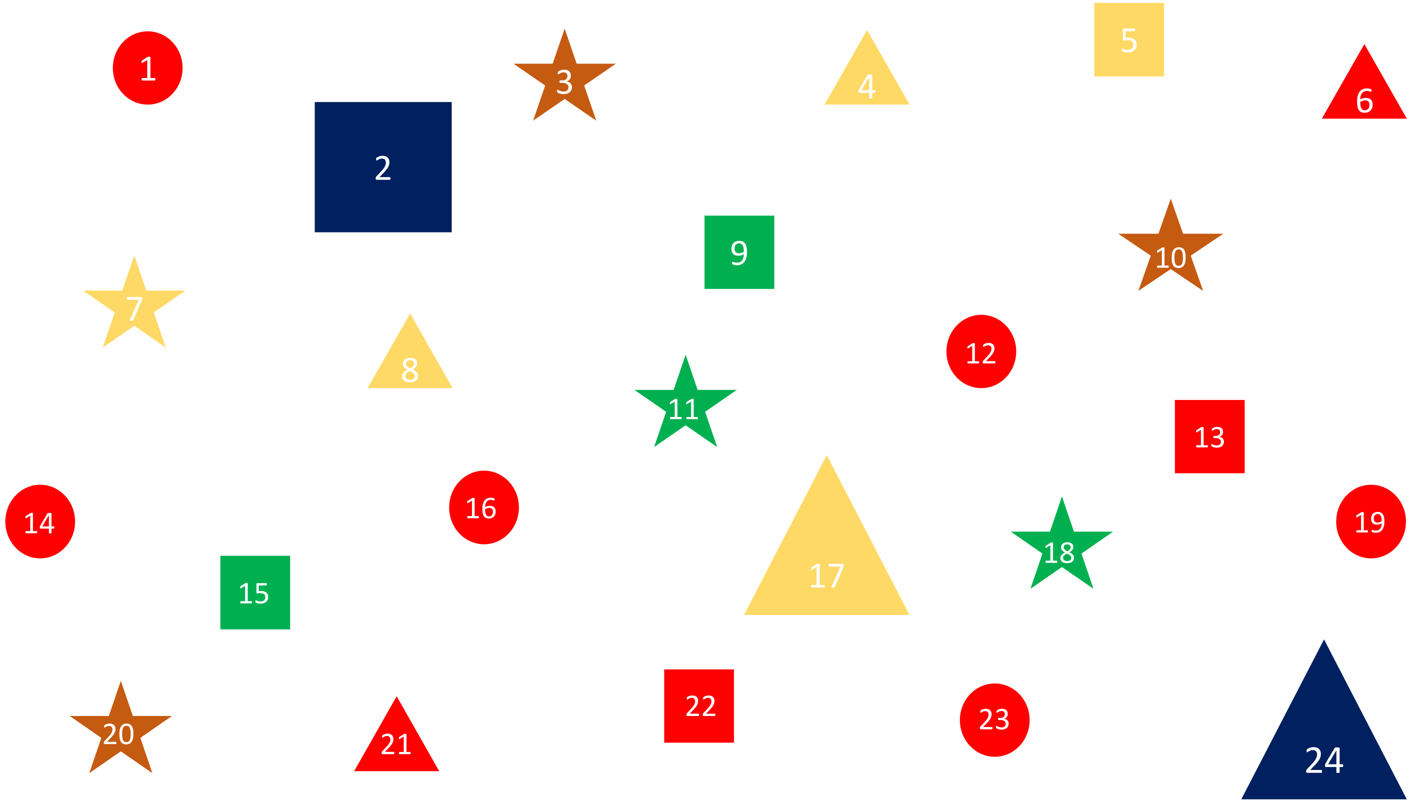
Índice del documento

Facultad de Informática

Las Categorías y los Conjuntos (I)

UNIVERSO: $\mathscr{U}$ = { x | x son figuras geométricas}

¿Qué podemos decir en este universo con L0?



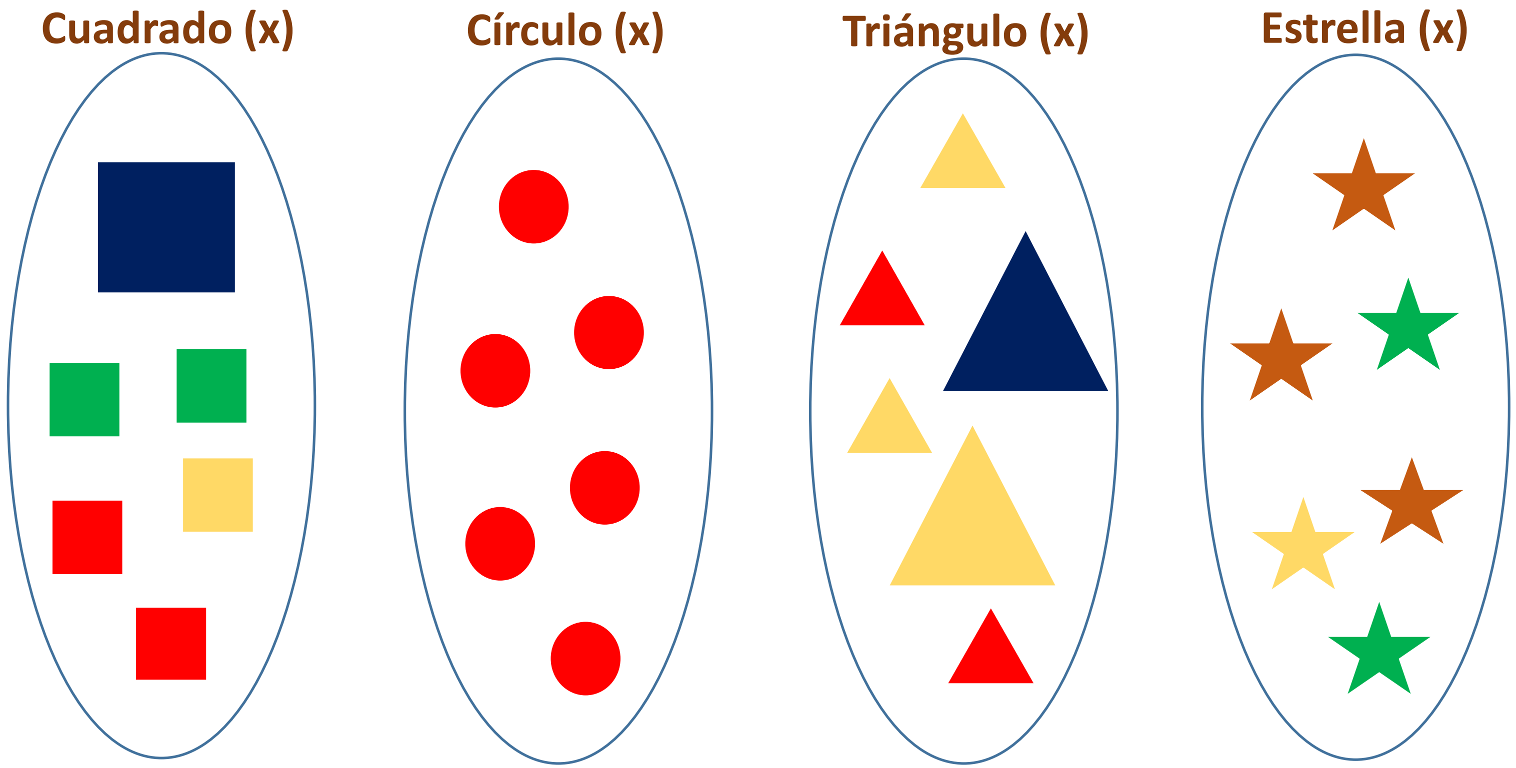
CATEGORÍAS:

- FIGURAS GEOMÉTRICAS (24)
- POR SU FORMA
  - FIGURAS CUADRADO (6)
  - FIGURAS CÍRCULO (6)
  - FIGURAS TRIÁNGULO (6)
  - FIGURAS ESTRELLA (6)
- POR SU TAMAÑO
  - FIGURAS PEQUEÑAS (21)
  - FIGURAS GRANDES (3)
- POR SU COLOR
  - FIGURAS ROJAS (10)
  - FIGURAS VERDES (4)
  - FIGURAS AZULES (3)
  - FIGURAS AMARILLAS (4)
  - FIGURAS MARRONES (3)

Las Categorías y los Conjuntos (II)

UNIVERSO: $\mathscr{U}$ **= { x | x son figuras geométricas}**

Partición del conjunto Universo en cuatro Categorías disjuntas: Ontología de Figuras Geométricas por su forma:



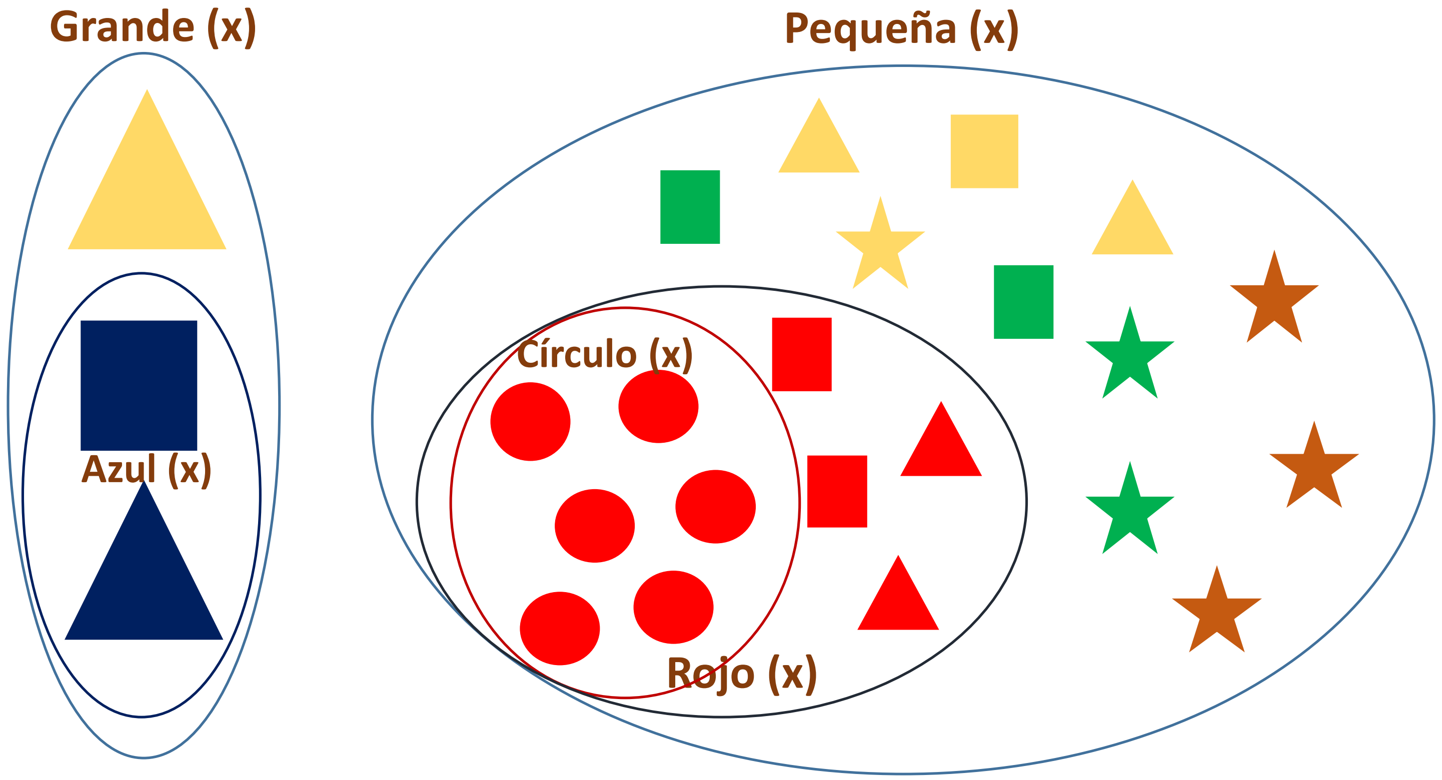
CATEGORÍAS Y AFIRMACIONES CATEGÓRICAS:

- Podemos afirmar que "Ninguna figura triángulo es una figura círculo", "Ninguna figura cuadrado es una figura estrella", etc.
- Podemos afirmar que "Ninguna figura de una categoría definida por un valor categórico está comprendida en otra categoría de valor diferente".
- Las CATEGORÍAS son DISJUNTAS
- En una categoría definida según un determinado valor categórico (lo llamaremos intensión) puede estar formada por elementos heterogéneos de categorías de intensión diferente. Así la categoría de figuras por su FORMA y de valor Triángulo, estará formada por elementos o figuras de diferente COLOR y de diferente TAMAÑO.

Las Categorías y los Conjuntos (III)

UNIVERSO: $\mathscr{U}$ = { x | x son figuras geométricas}

Partición del conjunto Universo en dos Categorías disjuntas: Ontología de Figuras Geométricas por su tamaño, con subcategorías



CATEGORÍAS Y AFIRMACIONES CATEGÓRICAS:

- Podemos afirmar que "Todas las figuras rojas son figuras pequeñas"
- Podemos afirmar que "Todas las figuras círculo son figuras rojas"
- Podemos afirmar que "Ninguna figura circulo o estrella es figura grande
- Podemos afirmar que "Todas las figuras azules son figuras grandes"
- Podemos afirmar que "Algunas figuras estrella son figuras verdes"
- Podemos afirmar "No existe una figura estrella que sea figura azul"
- Podemos afirmar que "Existe alguna figura cuadrado que no es figura pequeña"
- Podemos afirmar que "No todas las figuras grandes son figuras triángulo"

La Lógica Categórica (I)

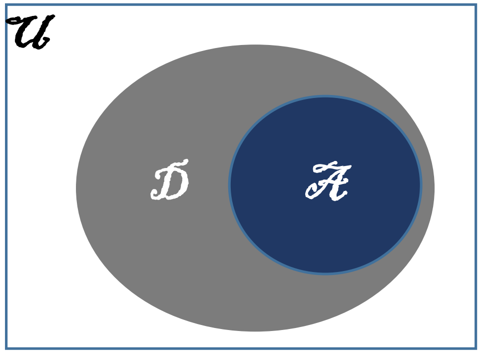
- Relaciones entre Categorías y La Lógica Categórica:
  - **La Lógica Categórica representa y formaliza la relación que existe entre Categorías** atendiendo a la evaluación de pertenencia de los individuos a las mismas. Analicemos, en principio, estas posibles relaciones entre Categorías. Más tarde, las formalizaremos.

La Lógica Categórica (II)

- Relaciones entre Categorías y La Lógica Categórica:
  - **La Lógica Categórica representa y formaliza la relación que existe entre Categorías** atendiendo a la evaluación de pertenencia de los individuos a las mismas. Analicemos, en principio, estas posibles relaciones entre Categorías. Más tarde, las formalizaremos.
  - Una Categoría $\mathscr{A}$ será una subcategoría de otra Categoría $\mathscr{D}$, si los individuos que pertenecen a $\mathscr{A}$, también pertenecen $\mathscr{D}$. Se dirá que: $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}$

LAS RELACIONES ENTRE CATEGORÍAS REPRESENTADAS EN DIAGRAMAS DE EULER

$\mathscr{A} \subset \mathscr{D}$

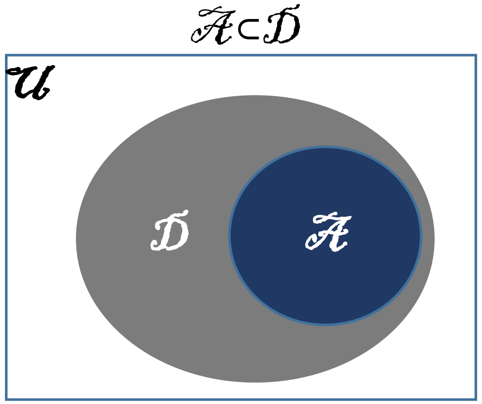


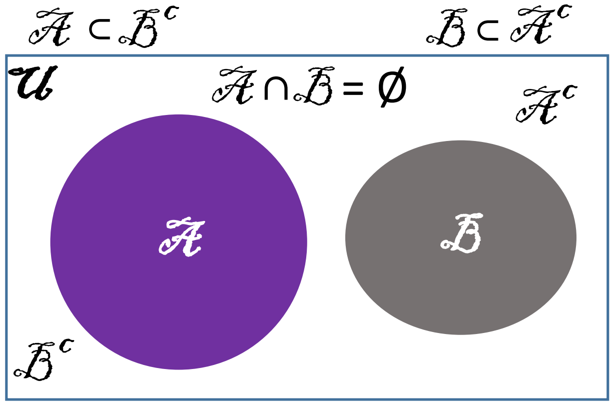
Facultad de Informática

La Lógica Categórica (III)

- Relaciones entre Categorías y La Lógica Categórica:
  - **La Lógica Categórica representa y formaliza la relación que existe entre Categorías** atendiendo a la evaluación de pertenencia de los individuos a las mismas. Analicemos, en principio, estas posibles relaciones entre Categorías. Más tarde, las formalizaremos.
  - Una Categoría $\mathcal{A}$ será una subcategoría de otra Categoría $\mathcal{D}$, si los individuos que pertenecen a $\mathcal{A}$, también pertenecen $\mathcal{C}$. Se dirá que: $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$
  - Dos Categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ definirán una nueva Categoría, que será subcategoría de cada una de las dos iniciales, si existen individuos que pertenecen a ambas Categorías y, al tiempo, existen individuos que pertenecen a una y no pertenecen a la otra. La subcategoría quedará definida por la Intersección de Categorías, y se denota por $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ se dice que las Categorías son disjuntas.
  - Dos Categorías definirán una nueva Categoría, que será subcategoría de una de ellas, si existen individuos que perteneciendo a una de ellas no pertenece a la otra. Si los individuos pertenecen a la Categoría $\mathcal{A}$ y no pertenecen a la Categoría $\mathcal{B}$, la nueva Categoría se define como la diferencia de $\mathcal{A}$ y de $\mathcal{B}$, se denota por $\mathcal{A}$ **-** $\mathcal{B}$, y dicha Categoría es una subcategoría de $\mathcal{A}$.

LAS RELACIONES ENTRE CATEGORÍAS REPRESENTADAS EN DIAGRAMAS DE EULER



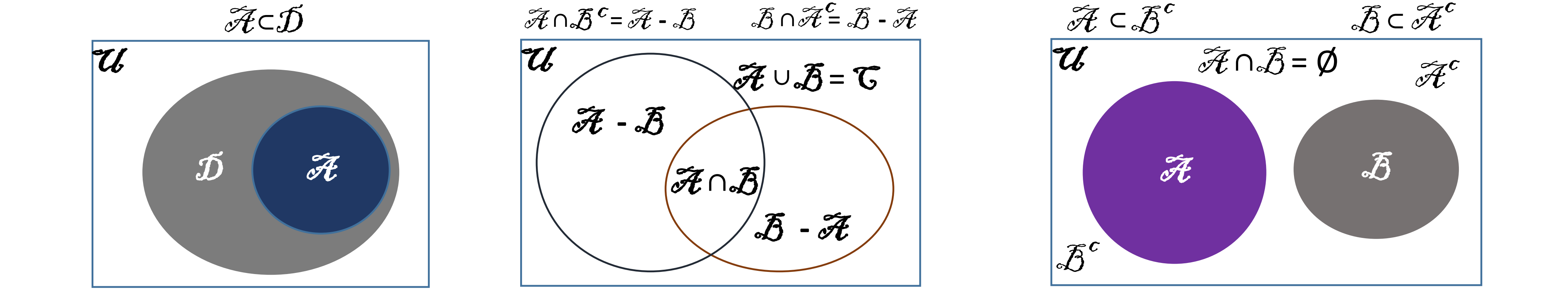


Facultad de Informática

La Lógica Categórica (IV)

- Relaciones entre Categorías y La Lógica Categórica:
  - **La Lógica Categórica representa y formaliza la relación que existe entre Categorías** atendiendo a la evaluación de pertenencia de los individuos a las mismas. Analicemos, en principio, estas posibles relaciones entre Categorías. Más tarde, las formalizaremos.
  - Una Categoría $\mathcal{A}$ será una subcategoría de otra Categoría $\mathcal{D}$, si los individuos que pertenecen a $\mathcal{A}$, también pertenecen a $\mathcal{D}$. Se dirá que: $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$
  - Dos Categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ definirán una nueva Categoría, que será subcategoría de cada una de las dos iniciales, si existen individuos que pertenecen a ambas Categorías y, al tiempo, existen individuos que pertenecen a una y no pertenecen a la otra. La subcategoría quedará definida por la Intersección de Categorías, y se denota por $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ se dice que las Categorías son disjuntas.
  - Dos Categorías definirán una nueva Categoría, que será subcategoría de una de ellas, si existen individuos que perteneciendo a una de ellas no pertenece a la otra. Si los individuos pertenecen a la Categoría $\mathcal{A}$ y no pertenecen a la Categoría $\mathcal{B}$, la nueva Categoría se define como la diferencia de $\mathcal{A}$ y de $\mathcal{B}$, se denota por $\mathcal{A} - \mathcal{B}$, y dicha Categoría es una subcategoría de $\mathcal{A}$.
  - Dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ serán subcategorías de una nueva Categoría $\mathcal{C}$ formada por la reunión de los individuos que pertenecen a cada una de ellas. Esta nueva Categoría se definirá como la Unión de las Categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, y se denotará por $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{B} - \mathcal{A})$.
  - Por otra parte, dado un Universo $\mathcal{U}$ y una Categoría $\mathcal{A}$, quedará definida una nueva Categoría $\mathcal{A}^c$, que será igual a la Categoría $\mathcal{U} - \mathcal{A}$. Si tenemos dos Categorías disjuntas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^c$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}^c$. La Categoría $\mathcal{A}^c$ se llama Categoría Complementaria de $\mathcal{A}$.

LAS RELACIONES ENTRE CATEGORÍAS REPRESENTADAS EN DIAGRAMAS DE EULER



La Lógica Categórica (V)

- Formalización en Predicados y Lógica Categórica (en adelante, LC):
  - Dada una Categoría definida por su propiedad característica o Intensión, llamaremos **Predicado Categórico** a esta Intensión y lo denotaremos por **P(x)**, y diremos que el elemento **x** cumple con el Predicado **P**, entendiendo por ello que el individuo representado por el elemento **x** pertenece a la Categoría $\mathscr{P}$ representada por su Intensión o **Predicado P(x)**. Así, $\mathscr{P}$ = **{** x | P(x) **}.**
  - De esta manera, el elemento **x** representa la variable que recorre todo el dominio de los individuos representados por los elementos $\mathbf{d}_i$ de un universo $\mathscr{U}$ **= {** $\mathbf{d}_i$**},** y de todos ellos, los que cumplen con la Intensión o **Predicado P(x),** pertenecerán y conformarán a la **Categoría** $\mathscr{P}$.

La Lógica Categórica (VI)

- Formalización en Predicados y Lógica Categórica (en adelante, LC):
  - Dada una Categoría definida por su propiedad característica o Intensión, llamaremos **Predicado Categórico** a esta Intensión y lo denotaremos por **P(x)**, y diremos que el elemento **x** cumple con el Predicado **P**, entendiendo por ello que el individuo representado por el elemento **x** pertenece a la Categoría $\mathscr{P}$ representada por su Intensión o **Predicado P(x)**. Así, $\mathscr{P}$ = { x | P(x) **}.**
  - De esta manera, el elemento **x** representa la variable que recorre todo el dominio de los individuos representados por los elementos $\mathbf{d}_i$ de un universo $\mathscr{U}$ = **{** $\mathbf{d}_i$**},** y de todos ellos, los que cumplen con la Intensión o **Predicado P(x),** pertenecerán y conformarán a la **Categoría** $\mathscr{P}$.
  - Si un individuo concreto, representado por $\mathbf{d}_j$, cumple con la Intensión y, por tanto, pertenece a la Categoría $\mathscr{P}$, entonces **P(**$\mathbf{d}_j$**)** se evaluará lógicamente como **VERDAD.** Si dicho individuo no cumple con la Intensión y, por tanto no pertenece a la Categoría $\mathscr{P}$, entonces **P(**$\mathbf{d}_j$**)** se evaluará lógicamente como **FALSO**. En este caso, el individuo concreto representado por $\mathbf{d}_j$ pertenecerá a la Categoría $\mathscr{P}^c$ y teniendo en cuenta el Universo $\mathscr{U}$, dicha Categoría Complementaria se definirá por $\mathscr{P}^c$= **{** x | ¬P(x)**}.**
  - **Formalizando**, tanto el elemento **x** como los elementos $\mathbf{d}_i$ se definirán como los **TÉRMINOS** del **Predicado P(x)**. El primero se tomará como Término Variable (o variable de Término) y cada uno de los $\mathbf{d}_i$ como Términos Constantes (o constantes de Término). **La evaluación de VERDAD de los Predicados se hará al nivel de la aplicación de los mismos a los Términos Constantes (o constantes de Término).**

La Lógica Categórica (VII)

- Formalización en Predicados y Lógica Categórica (en adelante, LC):
  - La Sintaxis de **la Lógica Categórica (LC)** sigue el patrón de la Lógica de Proposiciones, construyendo ahora sobre Predicados. Tendremos, ya hemos visto su significado, la Negación, **¬P(x)**, de un Predicado; la Conjunción de dos Predicados, **P(x) ∧ Q(X)**, que formaliza la Intersección de sus Categorías, $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$; la Disyunción de dos Predicados, **P(x) ∨ Q(X)**, que formaliza la Unión de sus Categorías, $\mathscr{P} \cup \mathscr{Q}$; la Implicación de dos Predicados, **P(x) → Q(X)**, que formaliza que, dada la pertenencia a su Categoría del individuo representado por el Término del Predicado Antecedente, su pertenencia a la Categoría del Predicado Consecuente; y la Doble Implicación que formaliza la doble pertenencia categórica de los individuos representados por los Términos de sendos Predicados.

La Lógica Categórica (VIII)

- Formalización en Predicados y Lógica Categórica (en adelante, LC):
  - La Sintaxis de **la Lógica Categórica (LC)** sigue el patrón de la Lógica de Proposiciones, construyendo ahora sobre Predicados. Tendremos, ya hemos visto su significado, la Negación, **¬P(x)**, de un Predicado; la Conjunción de dos Predicados, **P(x) ∧ Q(X)**, que formaliza la Intersección de sus Categorías, $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$; la Disyunción de dos Predicados, **P(x) ∨ Q(X)**, que formaliza la Unión de sus Categorías, $\mathscr{P} \cup \mathscr{Q}$; la Implicación de dos Predicados, **P(x) → Q(X)**, que formaliza que, dada la pertenencia a su Categoría del individuo representado por el Término del Predicado Antecedente, asimismo su pertenencia a la Categoría del Predicado Consecuente; y la Doble Implicación que formaliza la doble pertenencia categórica de los individuos representados por los Términos de sendos Predicados.
  - Por añadidura, podemos preguntarnos si dado el Universo citado, $\mathscr{U}$ **= { d$_i$}**, todos los individuos del mismo cumplirán con la Intensión de una Categoría definida, o si serán algunos de ellos, al menos uno de ellos, o si por el contrario ninguno la cumplirá. Para formalizar estas situaciones, haremos uso de los llamados CUANTIFICADORES. Existen dos Cuantificadores: el **CUANTIFICADOR UNIVERSAL**, **∀x**, que se lee "para todo x", y el **CUANTIFICADOR EXISTENCIAL**, **∃x**, que se lee "al menos existe un x".
  - Por tanto, **∀x P(x)** formaliza el hecho de que todos los elementos **d$_i$** cumplen con el Predicado **P(x)**. De ser así, **∀x P(x)** se evaluará como VERDAD. Si, por el contrario, para algún elemento **P(d$_j$)** es FALSO, entonces **∀x P(x)** se evaluará como FALSO. Por otra parte, **∃x P(x)** formaliza el hecho de que al menos uno de los elementos **d$_i$** cumple con el Predicado **P(x).** Si es así, **∃x P(x)** se evaluará como VERDAD, en caso contrario, si no lo cumple ninguno se evaluará como FALSO.

La Lógica Categórica (IX)

Las Proposiciones Categóricas y su Forma Normal:

La Lógica Categórica (LC) va a articularse con cuatro expresiones, llamadas **Proposiciones Categóricas**, que pueden ser evaluadas como VERDAD o como FALSO. Se escriben en **Forma Normal Categórica**. Teniendo en cuenta las dos Categorías siguientes: $\mathscr{P}$= **{ x | P(x) },** y $\mathscr{Q}$= **{ x | Q(x) },** el universo $\mathscr{U}$ **= { d**$_i$**}**, y los dos cuantificadores definidos, son estas cuatro:

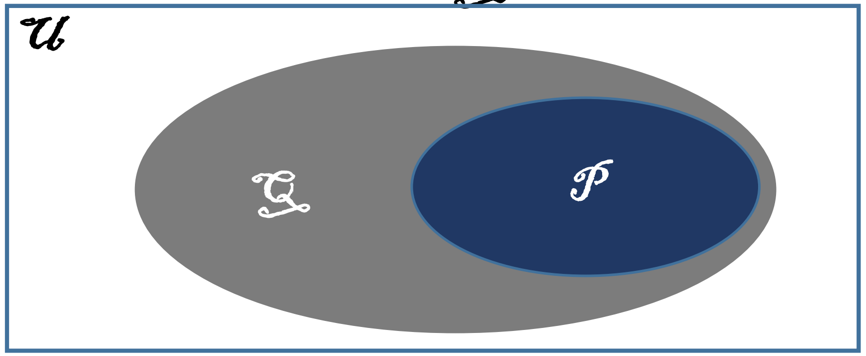
La Lógica Categórica (X)

Las Proposiciones Categóricas y su Forma Normal:

La Lógica Categórica (LC) va a articularse con cuatro expresiones, llamadas **Proposiciones Categóricas**, que pueden ser evaluadas como VERDAD o como FALSO. Se escriben en **Forma Normal Categórica**. Teniendo en cuenta las dos Categorías siguientes: $\mathscr{P}$ **= { x | P(x) },** y $\mathscr{Q}$ **= { x | Q(x) },** el universo $\mathscr{U}$ **= {** $\mathbf{d_i}$ **},** y los dos cuantificadores definidos, son estas cuatro:

- **FORMA NORMAL UNIVERSAL AFIRMATIVA: (∀x (P(x) → Q(x))** que expresa que, en el contexto del universo $\mathscr{U}$, **todos los individuos** de la Categoría $\mathscr{P}$ cuya Intensión o Predicado es P(x), también serán individuos pertenecientes a la Categoría $\mathscr{Q}$ cuya Intensión o Predicado es Q(x). Formalmente en **LC**, que **para todos** los Términos de la variable **x**, si **P(** d_j **) es VERDAD, necesariamente Q(** d_j **) será VERDAD.** Representa la relación de inclusión entre Categorías: $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}$

$\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}$

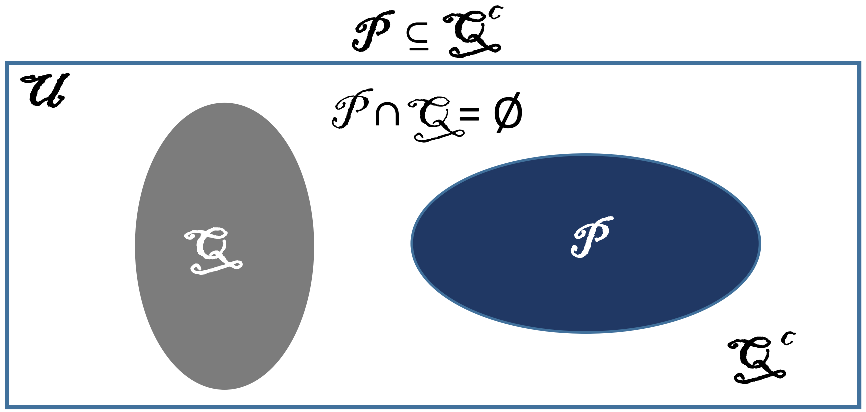


La Lógica Categórica (XI)

Las Proposiciones Categóricas y su Forma Normal:

La Lógica Categórica (LC) va a articularse con cuatro expresiones, llamadas **Proposiciones Categóricas**, que pueden ser evaluadas como VERDAD o como FALSO. Se escriben en **Forma Normal Categórica**. Teniendo en cuenta las dos Categorías siguientes: $\mathscr{P}$ **= { x | P(x) }**, y $\mathscr{Q}$ **= { x | Q(x) }**, el universo $\mathscr{U}$ **= { d_i}**, y los dos cuantificadores definidos, son estas cuatro:

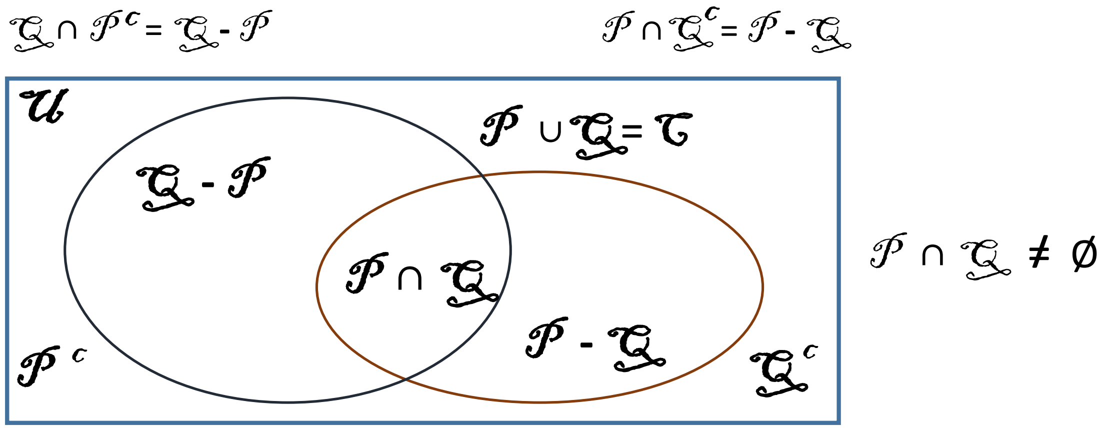
- **FORMA NORMAL UNIVERSAL NEGATIVA: ($\forall$x (P(x) $\rightarrow$ ¬Q(x))** que expresa que, en el contexto del universo $\mathscr{U}$, **ninguno de los individuos** de la Categoría $\mathscr{P}$ cuya Intensión o Predicado es P(x), será individuo perteneciente a la Categoría $\mathscr{Q}$ cuya Intensión o Predicado es Q(x). Esto quiere decir que todos los individuos de la Categoría $\mathscr{P}$ pertenecerán, asimismo, a la Categoría cuya Intesión es **¬Q(x),** y ésta es la Categoría Complementaria de $\mathscr{Q}$, es decir, $\mathscr{Q}^c$ **= { x | ¬ Q(x) }.** Formalmente en **LC**, que **para todos** los Términos de la variable **x**, **si P(d_j) es VERDAD, necesariamente ¬Q(d_j) también es VERDAD (o Q(d_j) es FALSO).** Por tanto, esta Forma Normal Universal Negativa representa la relación de inclusión entre Categorías: $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}^c$



La Lógica Categórica (XII)

Las Proposiciones Categóricas y su Forma Normal:

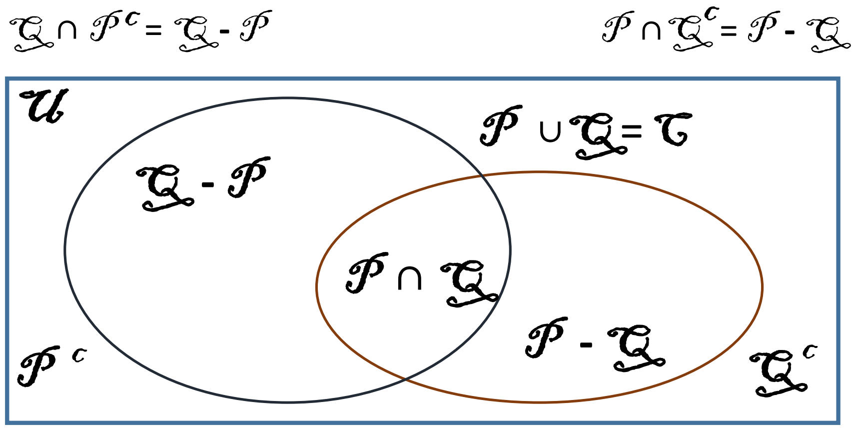
La Lógica Categórica (LC) va a articularse con cuatro expresiones, llamadas **Proposiciones Categóricas**, que pueden ser evaluadas como VERDAD o como FALSO. Se escriben en **Forma Normal Categórica**. Teniendo en cuenta las dos Categorías siguientes: $\mathscr{P}$ **= { x | P(x) },** y $\mathscr{Q}$ **= { x | Q(x) },** el universo $\mathscr{U}$ **= { d_i},** y los dos cuantificadores definidos, son estas cuatro:



- **FORMA NORMAL PARTICULAR AFIRMATIVA**: **(∃x (P(x) ∧ Q(x))** que expresa que, en el contexto del universo $\mathscr{U}$, **algunos (al menos uno) de los individuos** pertenecientes a la Categoría $\mathscr{P}$ cuya Intensión es el Predicado **P(x)**, también pertenecen a la Categoría $\mathscr{Q}$ cuya Intensión es el Predicado **Q(x)**, y viceversa. De esta manera, formalmente en **LC**, **al menos para uno** de los Términos de la variable **x**, por ejemplo **d_j**, **P(d_j) es VERDAD al tiempo que también Q(d_j) es VERDAD.** Desde el punto de vista de las Categorías, **se cumple que** $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} \neq \emptyset$

Las Proposiciones Categóricas y su Forma Normal:

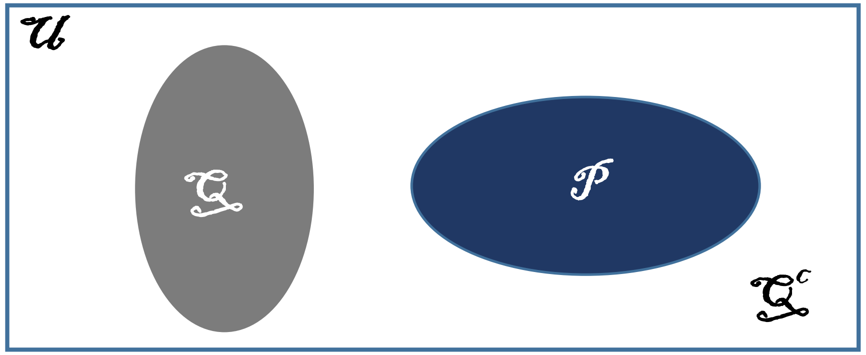
La Lógica Categórica (LC) va a articularse con cuatro expresiones, llamadas **Proposiciones Categóricas**, que pueden ser evaluadas como VERDAD o como FALSO. Se escriben en **Forma Normal Categórica**. Teniendo en cuenta las dos Categorías siguientes: $\mathscr{P}$ **= { x | P(x) }**, y $\mathscr{Q}$ **= { x | Q(x) }**, el universo $\mathscr{U}$ **= {** $\mathbf{d}_i$ **}**, y los dos cuantificadores definidos, son estas cuatro:



$\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} \neq \emptyset$

Esta situación es la que no se puede dar, dado que la niega

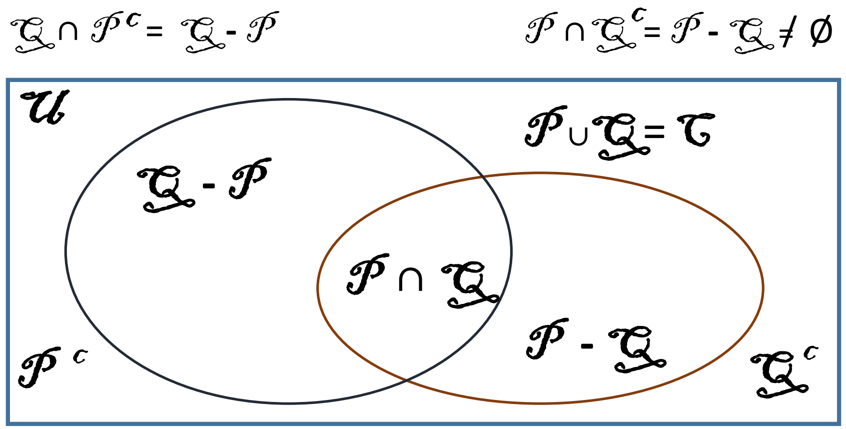
$\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}^c$



- **FORMA NORMAL PARTICULAR AFIRMATIVA**: **(∃x (P(x) ∧ Q(x))** que expresa que, en el contexto del universo $\mathscr{U}$, **algunos (al menos uno) de los individuos** pertenecientes a la Categoría $\mathscr{P}$ cuya Intensión es el Predicado **P(x)**, también pertenecen a la Categoría $\mathscr{Q}$ cuya Intensión es el Predicado **Q(x)**, y viceversa. De esta manera, formalmente en **LC**, **al menos para uno** de los Términos de la variable **x**, por ejemplo $\mathbf{d}_j$, **P($\mathbf{d}_j$) es VERDAD al tiempo que también Q($\mathbf{d}_j$) es VERDAD.** Desde el punto de vista de las Categorías, **se cumple que** $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} \neq \emptyset$

Las Proposiciones Categóricas y su Forma Normal:

La Lógica Categórica (LC) va a articularse con cuatro expresiones, llamadas **Proposiciones Categóricas**, que pueden ser evaluadas como VERDAD o como FALSO. Se escriben en **Forma Normal Categórica**. Teniendo en cuenta las dos Categorías siguientes: $\mathscr{P}$ **= { x | P(x) }, y** $\mathscr{Q}$ **= { x | Q(x) },** el universo $\mathscr{U}$ **= { d_i}**, y los dos cuantificadores definidos, son estas cuatro:

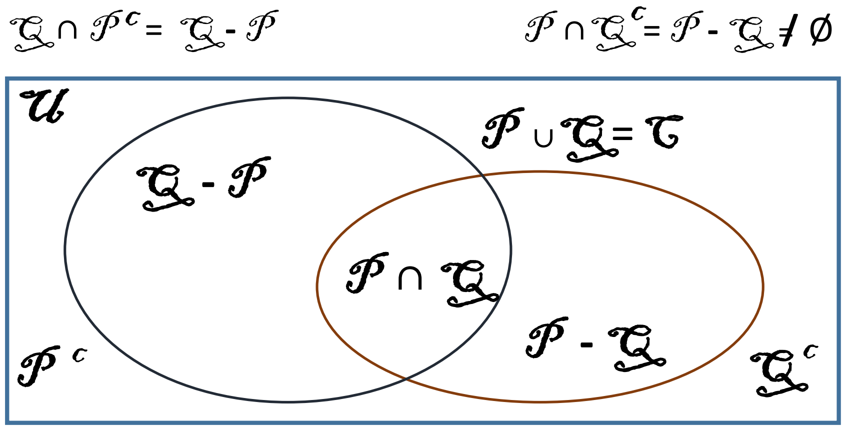


- **FORMA NORMAL PARTICULAR NEGATIVA: ($\exists$x (P(x) $\wedge \neg$ Q(x))** que expresa que, en el contexto del universo $\mathscr{U}$, **algunos (al menos uno) de los individuos** pertenecientes a la Categoría $\mathscr{P}$ cuya Intensión es el Predicado **P(x)**, también pertenecen a la Categoría $\mathscr{Q}^c$ cuya Intensión es el Predicado **¬Q(x).** De esta manera, formalmente en **LC**, **al menos para uno** de los Términos de la variable **x**, por ejemplo **d_j**, **P(d_j) es VERDAD al tiempo que también ¬Q(d_j) es VERDAD (o bien, Q(d_j) es FALSO)**. Desde el punto de vista de las Categorías, **se cumple que** $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}^c \neq \emptyset$

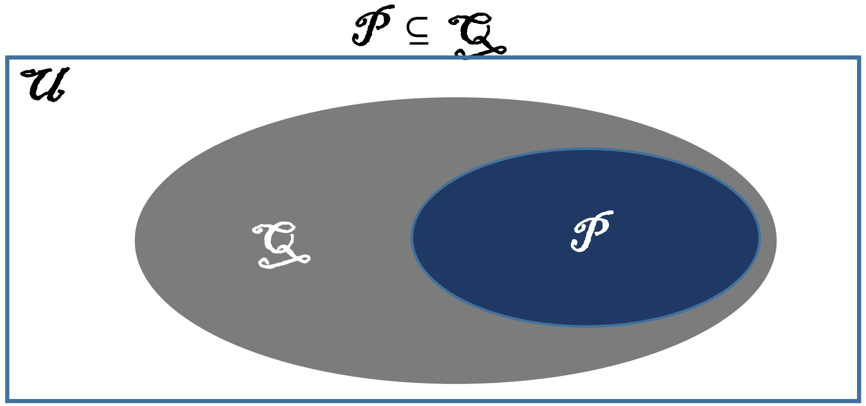
La Lógica Categórica (y XV)

Las Proposiciones Categóricas y su Forma Normal:

La Lógica Categórica (LC) va a articularse con cuatro expresiones, llamadas **Proposiciones Categóricas**, que pueden ser evaluadas como VERDAD o como FALSO. Se escriben en **Forma Normal Categórica**. Teniendo en cuenta las dos Categorías siguientes: $\mathscr{P}$ **= { x | P(x) }**, y $\mathscr{Q}$ **= { x | Q(x) }**, el universo $\mathscr{U}$ **= {** $\mathbf{d_i}$**}**, y los dos cuantificadores definidos, son estas cuatro:



Esta situación es la que no se puede dar, dado que la niega

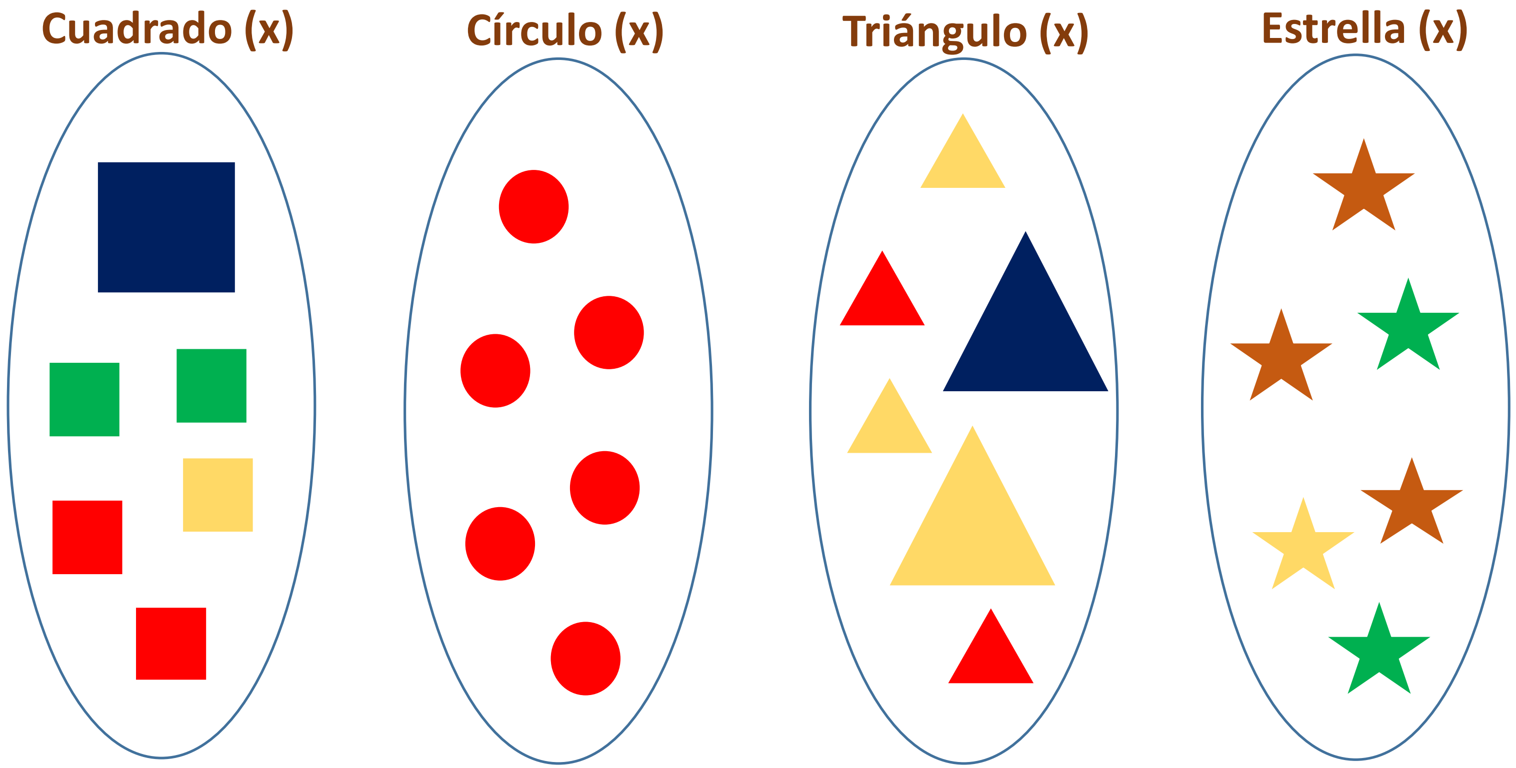


- **FORMA NORMAL PARTICULAR NEGATIVA: (∃x (P(x) ∧ ¬ Q(x))** que expresa que, en el contexto del universo $\mathscr{U}$, **algunos (al menos uno) de los individuos** pertenecientes a la Categoría $\mathscr{P}$ cuya Intensión es el Predicado **P(x)**, también pertenecen a la Categoría $\mathscr{Q}^c$ cuya Intensión es el Predicado **¬Q(x).** De esta manera, formalmente en **LC**, **al menos para uno** de los Términos de la variable **x,** por ejemplo $\mathbf{d_j}$, **P(**$\mathbf{d_j}$**) es VERDAD al tiempo que también ¬Q(**$\mathbf{d_j}$ **) es VERDAD (o bien, Q(**$\mathbf{d_j}$ **) es FALSO)**. Desde el punto de vista de las Categorías, **se cumple que** $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}^c \neq \emptyset$

Formalización e Interpretación en LC (I)

UNIVERSO: $\mathcal{U}$ **= { x | x son figuras geométricas}**

Partición del conjunto Universo en cuatro Categorías disjuntas: Ontología de Figuras Geométricas por su forma:



CATEGORÍAS Y PROPOSICIONES CATEGÓRICAS:

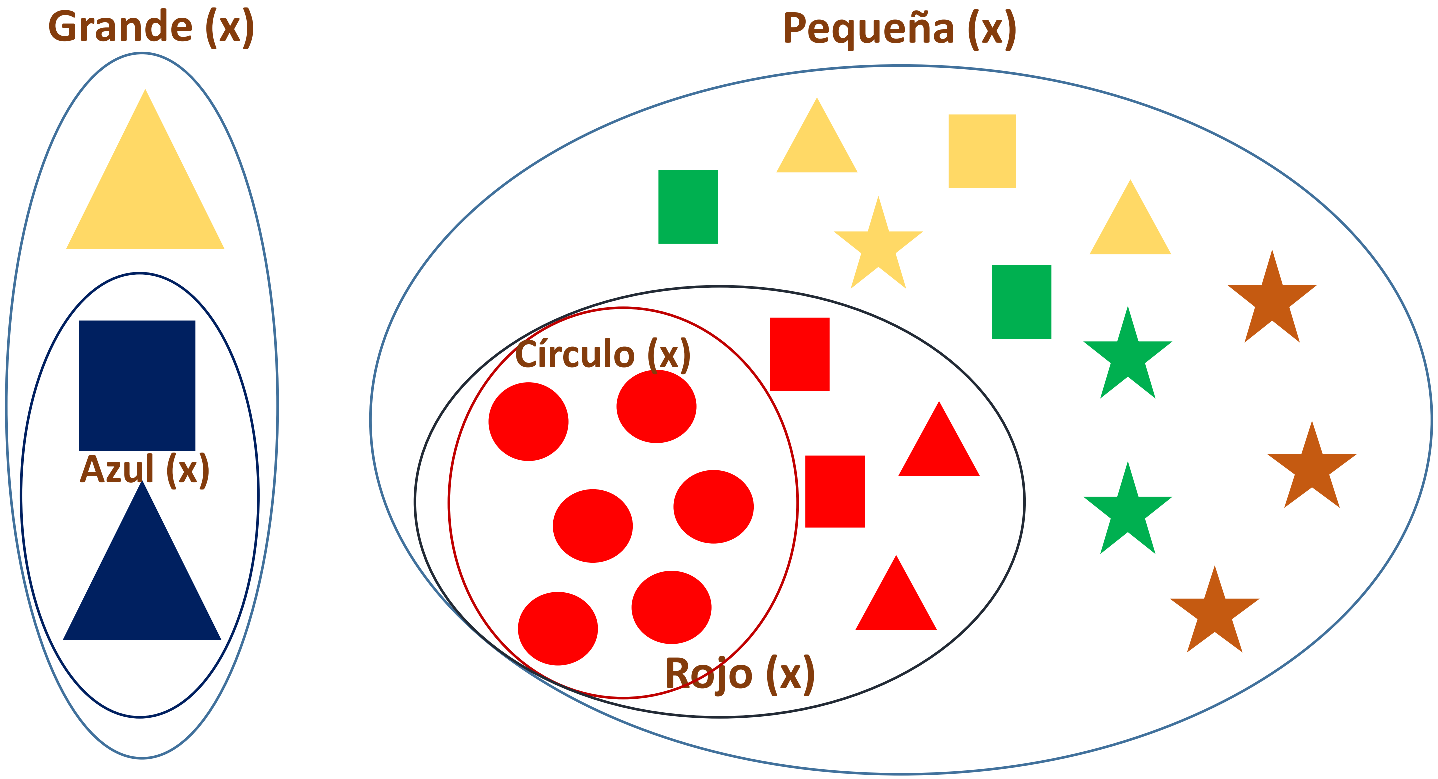
- La Forma Normal Particular Afirmativa entre las Categorías de la Ontología es siempre FALSA
- Podemos afirmar que "Todas las figuras círculo son figuras rojas", y formalizarlo por: **∀x (Círculo(x) → Roja(x))**
- Podemos afirmar que "Ninguna figura estrella es figura grande", y formalizarlo por: **∀x (Estrella(x) → ¬Grande(x))**
- Podemos afirmar "No existe una figura estrella que sea figura azul", y formalizarlo por: **¬∃x (Estrella(x) ∧ Azul(x)).** Es decir, **∀x (Estrella(x) → ¬Azul(x))**
- Podemos negar que "Todas las figuras cuadrado son figuras pequeñas", y formalizarlo por:
  ¬∀x (Cuadrado(x) → Pequeña(x))
  es decir, "existe una figura cuadrado que no es figura pequeña", formalizado por:
  ∃x (Cuadrado(x) ∧ ¬Pequeña(x))

Facultad de Informática

Formalización e Interpretación en LC (II)

UNIVERSO: $\mathscr{U}$ = { x | x son figuras geométricas}

Partición del conjunto Universo en dos Categorías disjuntas: Ontología de Figuras Geométricas por su tamaño, con subcategorías



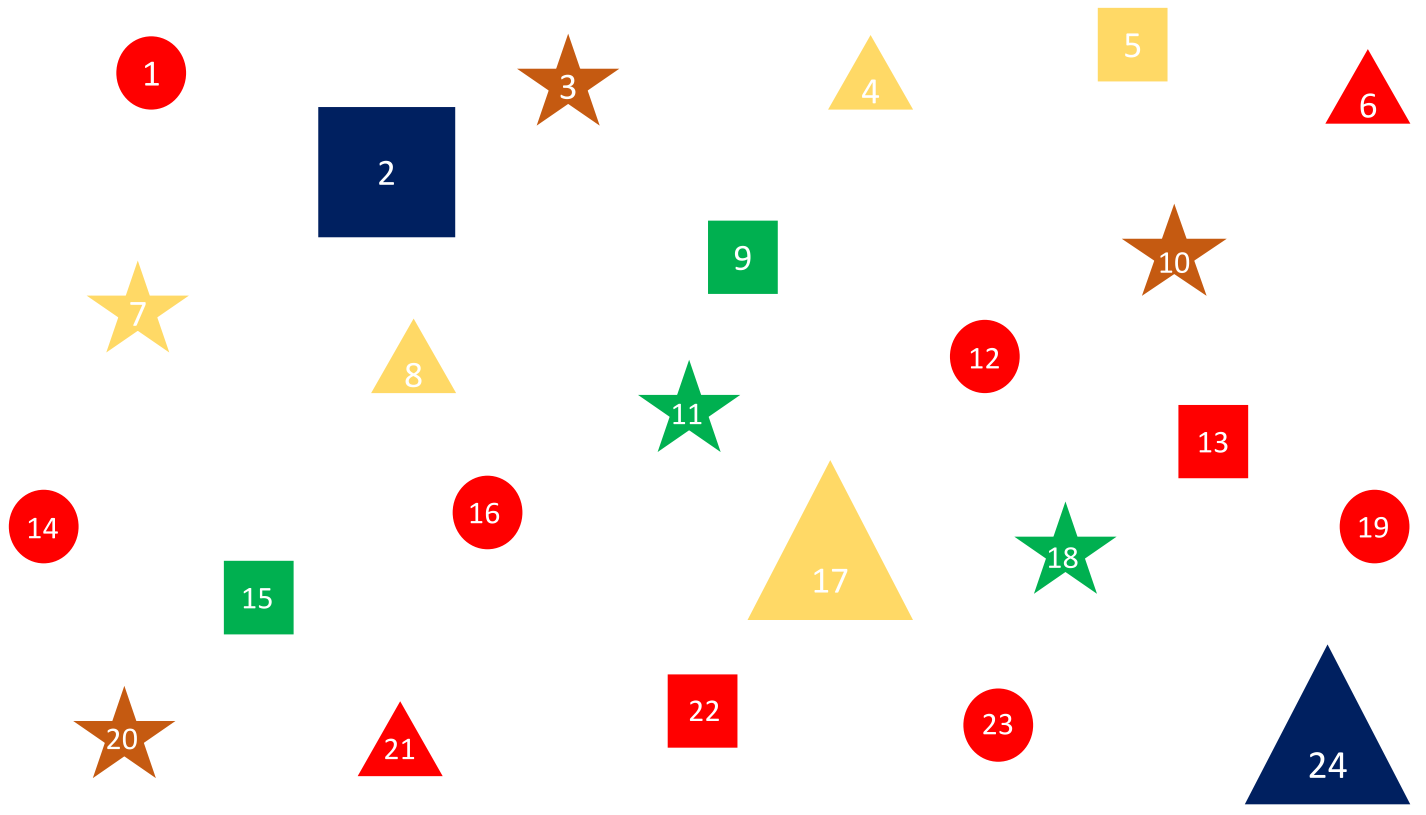
CATEGORÍAS Y PROPOSICIONES CATEGÓRICAS:

- Tomando las Proposiciones Categóricas como elementos formales, podemos construir otras expresiones categóricas complejas.
- Podemos afirmar que "La condición suficiente para que no exista una figura círculo que sea figura amarilla, es que todas las figuras círculo sean figuras rojas", y formalizarlo por:
  $\forall x\,(Cí(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow \neg\exists x\,(Cí(x) \wedge Am(x))$
- Podemos afirmar que "La condición necesaria para que ninguna figura círculo o estrella sea figura grande, es que ninguna figura círculo sea grande y que ninguna figura estrella sea grande", y formalizarlo por:
  $\forall x\,(Cí(x) \vee Es(x) \rightarrow \neg Gr(x)) \rightarrow$
  $\forall x\,(Cí(x) \rightarrow \neg Gr(x)) \wedge \forall x\,(Es(x) \rightarrow \neg Gr(x))$
- Podemos afirmar que "Es equivalente decir que no todas las figuras cuadrado son figuras pequeñas, a que existe una figura cuadrado que no es figura pequeña", y formalizarlo por:
  $\neg\forall x\,(Cu(x) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow \exists x\,(Cu(x) \wedge \neg P(x))$

Formalización e Interpretación en LC (y III)

UNIVERSO: $\mathscr{U}$ = { x | x son figuras geométricas}

¿Qué podemos decir en este universo con LC?



INTERPRETACIÓN Y SATISFACIBILIDAD:

- FIGURAS GEOMÉTRICAS (24 elementos)
- POR SU FORMA
  - FIGURAS CUADRADO (2, 5, 9, 13, 15, 22)
  - FIGURAS CÍRCULO (1, 12, 14, 16, 19, 23)
  - FIGURAS TRIÁNGULO (4, 6, 8, 17, 21,24)
  - FIGURAS ESTRELLA (3, 7, 10, 11, 18, 20)
- POR SU TAMAÑO
  - FIGURAS PEQUEÑAS (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23)
  - FIGURAS GRANDES (2, 17, 24)
- POR SU COLOR
  - FIGURAS ROJAS (1, 6, 12, 13, 14, 16, 19, 21, 22, 23)
  - FIGURAS VERDES (9, 11, 15, 18)
  - FIGURAS AZULES (2, 24)
  - FIGURAS AMARILLAS (4, 5, 7, 8, 17)
  - FIGURAS MARRONES (3, 10, 20)

- Si nos diesen dos predicados categóricos **P(x)** y **Q(x)**: ¿cuántas interpretaciones se pueden construir en este universo de figuras geométricas?. **Son 110 = 11x10 = 11 categorías tomadas de 2 en 2 sin repetición**

- Si consideramos la expresión de la proposición categórica universal afirmativa: **∀x (P(x) → Q(x))** ¿Para qué interpretaciones en este universo de figuras geométricas, dicha oración es satisfacible, evaluable como VERDAD?

Los Silogismos Categóricos Válidos

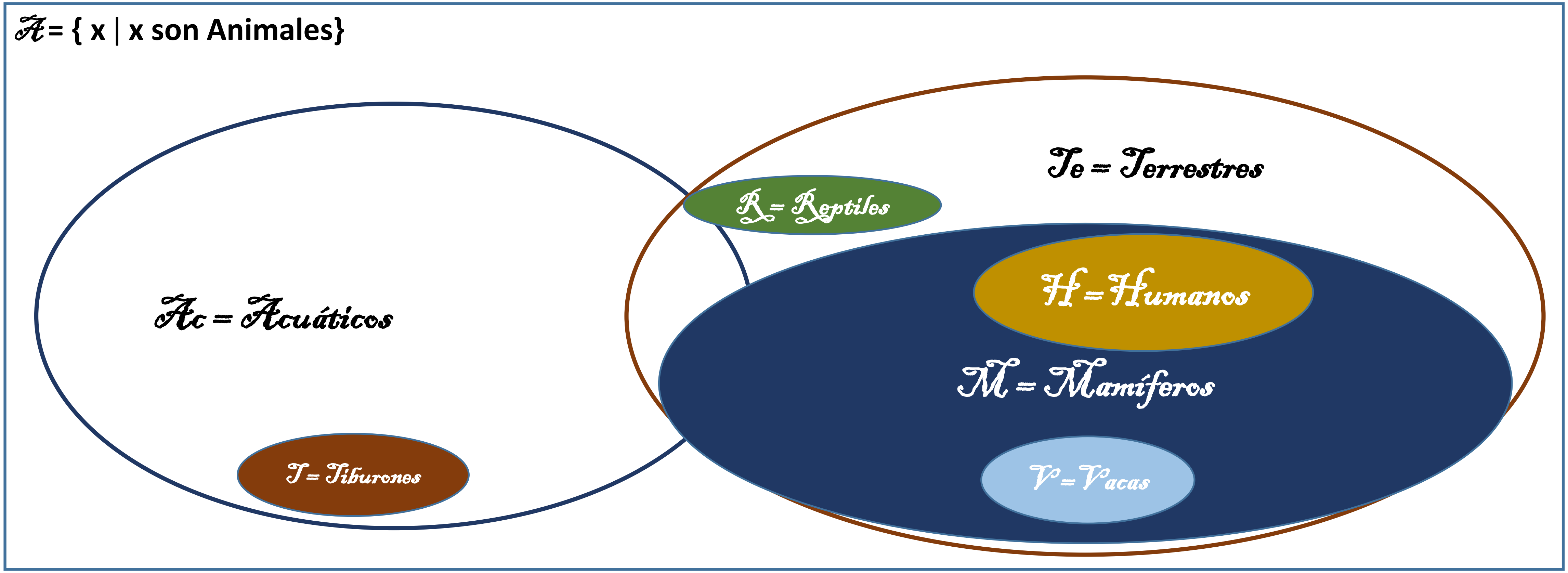
	LOS DIECINUEVE SILOGISMOS CATEGÓRICOS VÁLIDOS ARISTOTÉLICOS					
FIGURA 1ª	**BARBARA** $\begin{array}{c} \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow Q(x)) \\ \forall x\,(P(x) \rightarrow \mathbf{M(x)}) \\ \hline \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \end{array}$	**CELARENT** $\begin{array}{c} \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow \neg Q(x)) \\ \forall x\,(P(x) \rightarrow \mathbf{M(x)}) \\ \hline \forall x\,(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \end{array}$	**DARII** $\begin{array}{c} \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow Q(x)) \\ \exists x\,(P(x) \wedge \mathbf{M(x)}) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge M(x)) \end{array}$	**FERIO** $\begin{array}{c} \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow \neg Q(x)) \\ \exists x\,(P(x) \wedge \mathbf{M(x)}) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \end{array}$	**En los Silogismos Categóricos tanto las dos premisas como la conclusión son Proposiciones Categóricas, es decir, Formas Normales cuantificadas Universal o Existencialmente, que siguen el patrón conocido de VALIDEZ: de la VERDAD de las premisas, se concluye la VERDAD de la conclusión.**	
FIGURA 2ª	**CESARE** $\begin{array}{c} \forall x\,(Q(x) \rightarrow \neg \mathbf{M(x)}) \\ \forall x\,(P(x) \rightarrow \mathbf{M(x)}) \\ \hline \forall x\,(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \end{array}$	**CAMESTRES** $\begin{array}{c} \forall x\,(Q(x) \rightarrow \mathbf{M(x)}) \\ \forall x\,(P(x) \rightarrow \neg \mathbf{M(x)}) \\ \hline \forall x\,(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \end{array}$	**FESTINO** $\begin{array}{c} \forall x\,(Q(x) \rightarrow \neg \mathbf{M(x)}) \\ \exists x\,(P(x) \wedge \mathbf{M(x)}) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \end{array}$	**BAROCO** $\begin{array}{c} \forall x\,(Q(x) \rightarrow \mathbf{M(x)}) \\ \exists x\,(P(x) \wedge \neg \mathbf{M(x)}) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \end{array}$	**Las vocales (tres en cada uno) que aparecen en los nombres de los silogismos, representan:** (A) ***F.N. Universal Afirmativa*** (E) ***F.N. Universal Negativa*** (I) ***F.N. Particular Afirmativa*** (O) ***F.N. Particular Negativa***	
FIGURA 3ª	**DARIPTI** $\begin{array}{c} \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow Q(x)) \\ \exists x\,(\mathbf{M(x)} \wedge P(x)) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \end{array}$	**FELAPTON** $\begin{array}{c} \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow \neg Q(x)) \\ \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow P(x)) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \end{array}$	**DISAMIS** $\begin{array}{c} \exists x\,(\mathbf{M(x)} \wedge Q(x)) \\ \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow P(x)) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \end{array}$	**DATISI** $\begin{array}{c} \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow Q(x)) \\ \exists x\,(\mathbf{M(x)} \wedge P(x)) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \end{array}$	**BOCARDO** $\begin{array}{c} \exists x\,(\mathbf{M(x)} \wedge \neg Q(x)) \\ \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow P(x)) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \end{array}$	**FERISON** $\begin{array}{c} \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow \neg Q(x)) \\ \exists x\,(\mathbf{M(x)} \wedge P(x)) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \end{array}$
FIGURA 4ª	**BAMALIP** $\begin{array}{c} \forall x\,(Q(x) \rightarrow \mathbf{M(x)}) \\ \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow P(x)) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \end{array}$	**CALEMES** $\begin{array}{c} \forall x\,(Q(x) \rightarrow \mathbf{M(x)}) \\ \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow \neg P(x)) \\ \hline \forall x\,(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \end{array}$	**DIMATIS** $\begin{array}{c} \exists x\,(Q(x) \wedge \mathbf{M(x)}) \\ \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow P(x)) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \end{array}$	**FESAPO** $\begin{array}{c} \forall x\,(Q(x) \rightarrow \neg \mathbf{M(x)}) \\ \forall x\,(\mathbf{M(x)} \rightarrow P(x)) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \end{array}$	**FRESISON** $\begin{array}{c} \forall x\,(Q(x) \rightarrow \neg \mathbf{M(x)}) \\ \exists x\,(\mathbf{M(x)} \wedge P(x)) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \end{array}$	**Conclusiones:** ○ **UNA F.N.U.A.** ○ **CUATRO F.N.U.N.** ○ **SEIS F.N.P.A.** ○ **OCHO F.N.P.N.**

Ejercicio 14: Formalizar relación entre categorías (I)

- La Lógica Categórica trabaja con cuatro expresiones normalizadas. Utilícelas para formalizar la relación entre las siguientes categorías:
  - Animales. Vacas. Tiburones.
  - Animales. Humanos. Terrestres.
  - Acuáticos. Mamíferos. Reptiles.

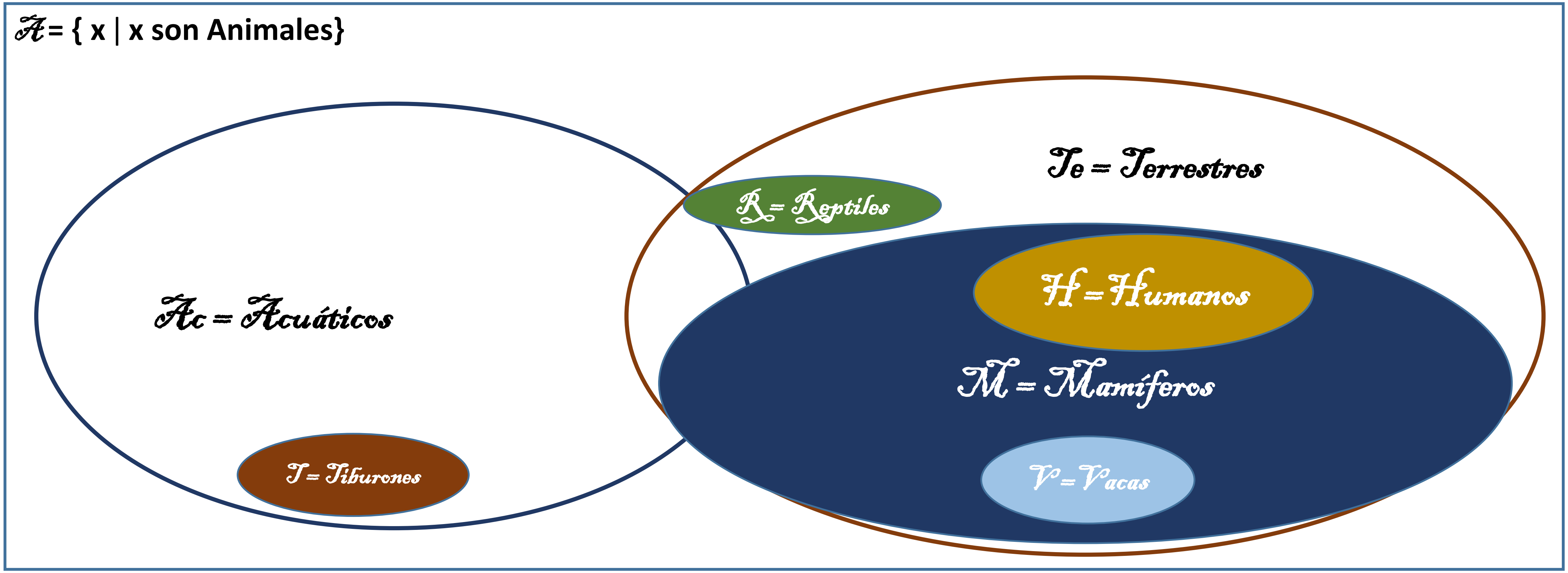
Ejercicio 14: Formalizar relación entre categorías (II)

- La Lógica Categórica trabaja con cuatro expresiones normalizadas. Utilícelas para formalizar la relación entre las siguientes categorías:
  - Animales. Vacas. Tiburones.
  - Animales. Humanos. Terrestres.
  - Acuáticos. Mamíferos. Reptiles.



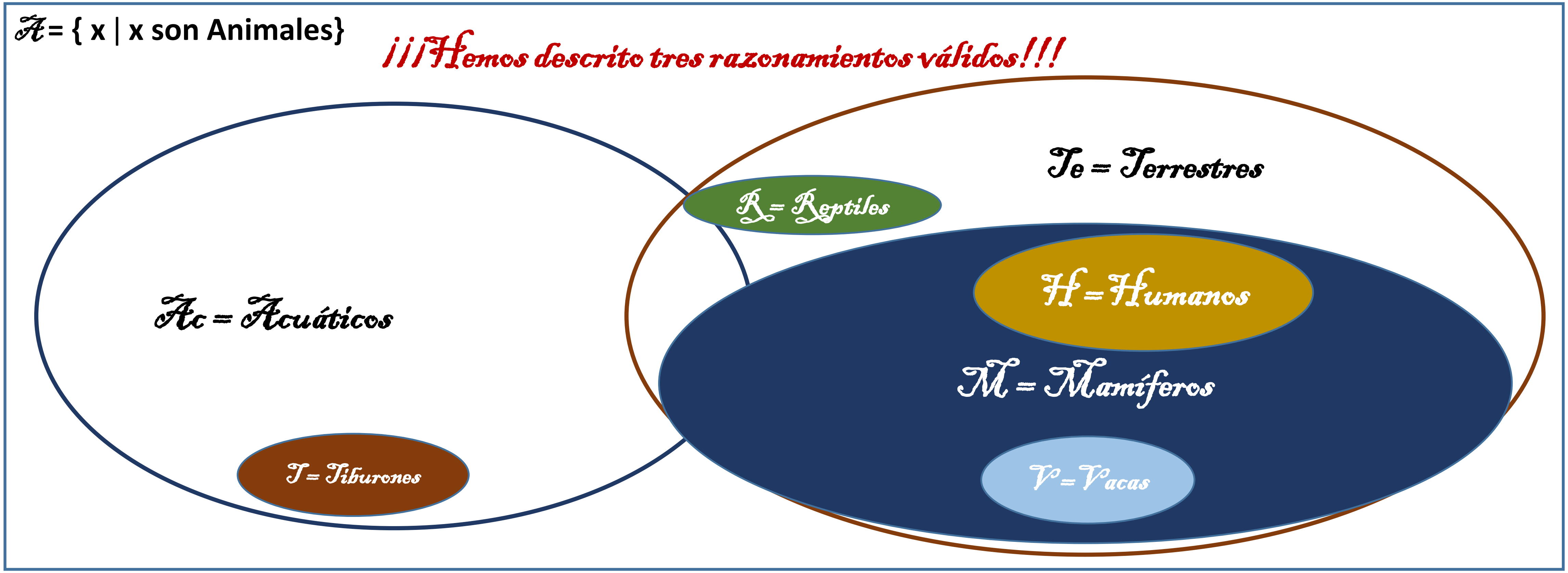
Ejercicio 14: Formalizar relación entre categorías (III)

- La Lógica Categórica trabaja con cuatro expresiones normalizadas. Utilícelas para formalizar la relación entre las siguientes categorías:
  - Ninguna vaca es tiburón. Todos los tiburones son animales. Algunos animales no son vacas.
  - Todos los terrestres son animales. Todos los humanos son terrestres. Todos los humanos son animales.
  - Ningún reptil es mamífero. Algunos reptiles son acuáticos. Algunos acuáticos no son mamíferos.



Ejercicio 14: Formalizar relación entre categorías (IV)

- La Lógica Categórica trabaja con cuatro expresiones normalizadas. Utilícelas para formalizar la relación entre las siguientes categorías:
  - Ninguna vaca es tiburón. Todos los tiburones son animales. *Algunos animales no son vacas*. (4ª - FESAPO)
  - Todos los terrestres son animales. Todos los humanos son terrestres. *Todos los humanos son animales*. (1ª - BARBARA)
  - Ningún reptil es mamífero. Algunos reptiles son acuáticos. *Algunos acuáticos no son mamíferos*. (3ª - FERISON)



Ejercicio 14: Formalizar relación entre categorías (y V)

- La Lógica Categórica trabaja con cuatro expresiones normalizadas. Utilícelas para formalizar la relación entre las siguientes categorías:
  - "Ninguna vaca es tiburón": $\forall x\, (V(x) \rightarrow \neg T(x))$
  - "Todos los tiburones son animales": $\forall x\, (T(x) \rightarrow A(x))$
  - "Algunos animales no son vacas": $\exists x\, (A(x) \land \neg V(x))$

  - "Todos los terrestres son animales": $\forall x\, (Te(x) \rightarrow A(x))$
  - "Todos los humanos son terrestres": $\forall x\, (H(x) \rightarrow Te(x))$
  - "Todos los humanos son animales": $\forall x\, (H(x) \rightarrow A(x))$

  - "Ningún reptil es mamífero": $\forall x\, (R(x) \rightarrow \neg M(x))$
  - "Algunos reptiles son acuáticos": $\exists x\, (R(x) \land Ac(x))$
  - "Algunos acuáticos no son mamíferos": $\exists x\, (Ac(x) \land \neg M(x))$

Ejercicio 15: Formalizar con predicados categóricos

- Formalice las siguientes frases con predicados categóricos:
  - "A es un coche rápido y elegante": $\mathbf{C(A) \land R(A) \land E(A)}$
  - "A es un coche rápido y elegante pero B no": $\mathbf{C(A) \land C(B) \land R(A) \land E(A) \land \neg(R(B) \land E(B))}$. Entendemos que A y B son coches, pero B no es rápido ni elegante.
  - "Todos los coches son rápidos y elegantes": $\mathbf{\forall x\, (C(x) \rightarrow R(x) \land E(x))}$
  - "Para que algunos coches sean rápidos y elegantes, es suficiente con que todos lo sean": $\mathbf{\forall x\, (C(x) \rightarrow R(x) \land E(x)) \rightarrow \exists x\, (C(x) \land R(x) \land E(x))}$

- SIGNATURA: $\mathcal{U}$ **= { x | x son todos los vehículos}**
  - **{C/1; C(x)** = x es un coche**}**
  - **{R/1; R(x)** = x es rápido**}**
  - **{E/1; E(x)** = x es elegante**}**

Ejercicio 16: Evaluación sentencias categóricas en diversos mundos (I)

- Traduce las siguientes sentencias en cada uno de los siguientes casos (o categorías genéricas) e indica si es cierta en cada uno de los siguientes mundos (interpretaciones)

1	$\forall x\, (S(x) \rightarrow P(x))$	5	$\forall x\, (S(x) \land P(x))$
2	$\exists x\, (S(x) \rightarrow P(x))$	6	$\exists x\, (S(x) \land P(x))$
3	$\forall x\, (S(x) \rightarrow \neg P(x))$	7	$\neg(\forall x\, (\neg S(x) \land P(x)))$
4	$\neg\exists x\, (S(x) \rightarrow \neg P(x))$	8	$\exists x\, (S(x) \land \neg P(x))$

- <u>CASOS: SIGNATURA</u>
  - **a)** **{S/1; S(x)** = “x es un videojuego”**}** **{P/1; P(x)** = “x es divertido”**}**
  - **b)** **{S/1; S(x)** = “x es estudiante”**}** **{P/1; P(x)** = “x suspende” = “x está suspendido”**}**
- MUNDOS: INTERPRETACIONES. Suponemos que el $\mathcal{U}$ **= {a, b, c, d}**
  - **1) S = {a, b} ; P = {a, b, c}**
  - **2) S = {a, b} ; P = {c, d}**
  - **3) S = {a, b} ; P = {b, c}**

Ejercicio 16: Evaluación sentencias categóricas en diversos mundos (II)

- Traduce las siguientes sentencias en cada uno de los siguientes casos (o categorías genéricas) e indica si es cierta en cada uno de los siguientes mundos (interpretaciones)

	Sentencia/fórmula	Caso	Oración en lenguaje natural
1	$\forall x\ (S(x) \rightarrow P(x))$	(a)	Todos los videojuegos son divertidos
2	$\exists x\ (S(x) \rightarrow P(x))$	(a)	Existe algún elemento que si es videojuego, entonces es divertido
3	$\forall x\ (S(x) \rightarrow \neg P(x))$	(a)	Ningún videojuego es divertido
4	$\neg\exists x\ (S(x) \rightarrow \neg P(x))$	(a)	Todos son videojuegos divertidos
	Sentencia/fórmula	**Caso**	**Oración en lenguaje natural**
1	$\forall x\ (S(x) \rightarrow P(x))$	(b)	Todos los estudiantes suspenden
2	$\exists x\ (S(x) \rightarrow P(x))$	(b)	Existe alguien que si es estudiante, entonces suspende
3	$\forall x\ (S(x) \rightarrow \neg P(x))$	(b)	Ningún estudiante suspende
4	$\neg\exists x\ (S(x) \rightarrow \neg P(x))$	(b)	Todos son estudiantes suspendidos = no existe alguien que si es estudiante, no haya suspendido

Ejercicio 16: Evaluación sentencias categóricas en diversos mundos (y III)

- Traduce las siguientes sentencias en cada uno de los siguientes casos (o categorías genéricas) e indica si es cierta en cada uno de los siguientes mundos (interpretaciones)

	Sentencia/fórmula	Caso	Oración en lenguaje natural	Mundo	Eval	Mundo	Eval
1	$\forall x\, (S(x) \rightarrow P(x))$	(a)	Todos los videojuegos son divertidos	(1)	V	(3)	F
2	$\exists x\, (S(x) \rightarrow P(x))$	(a)	Existe algún elemento que si es videojuego, entonces es divertido	(1)	V	(3)	V
3	$\forall x\, (S(x) \rightarrow \neg P(x))$	(a)	Ningún videojuego es divertido	(1)	F	(3)	F
4	$\neg\exists x\, (S(x) \rightarrow \neg P(x))$	(a)	Todos son videojuegos divertidos	(1)	F	(3)	F

	Sentencia/fórmula	Caso	Oración en lenguaje natural	Mundo	Eval	Mundo	Eval
1	$\forall x\, (S(x) \rightarrow P(x))$	(b)	Todos los estudiantes suspenden	(1)	V	(2)	F
2	$\exists x\, (S(x) \rightarrow P(x))$	(b)	Existe alguien que si es estudiante, entonces suspende	(1)	V	(2)	F
3	$\forall x\, (S(x) \rightarrow \neg P(x))$	(b)	Ningún estudiante suspende	(1)	F	(2)	V
4	$\neg\exists x\, (S(x) \rightarrow \neg P(x))$	(b)	Todos son estudiantes suspendidos = no existe alguien que si es estudiante, no haya suspendido	(1)	F	(2)	F