FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA INFORMÁTICA

Lógica de Proposiciones

PRIMER CURSO DEL GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

PRIMER CUATRIMESTRE

2018-19

Índice del documento

Introducción

- La Lógica de Proposiciones (en adelante, L0) también es conocida por el nombre de Lógica de Declaraciones o Lógica de Enunciados.
- A las oraciones lógicas en L0 las llamaremos genéricamente Proposiciones.
- A las oraciones lógicas atómicas (oraciones enunciativas simples) les daremos el nombre de “sentencias” o “proposiciones atómicas”.

- Las oraciones lógicas en L0 las formalizaremos según su **Lenguaje Formal**, basado en un Alfabeto o Vocabulario y una Gramática expresada mediante la definición recursiva de construcción de proposiciones.
- Como Lógica Formal sus objetivos esenciales son, por una parte, la resolución de la **Satisfacibilidad** de Proposiciones Complejas y, por otra, la demostración de la **Validez** de Razonamientos.
- La Satisfacibilidad de Proposiciones Complejas estará sujeta a la **Interpretación** (mejor, diferentes interpretaciones) que se realice de las Proposiciones Atómicas que la formen.
- Un concepto que manejaremos con asiduidad es el de **Equivalencia Lógica**, que nos permitirá reescribir o simplificar expresiones proposicionales complejas con el fin de instrumentar técnicas óptimas para resolver la satisfacibilidad de las mismas. La Equivalencia Lógica es una de las dos relaciones semánticas que estudiaremos entre oraciones lógicas.
- En los Razonamientos, los esquemas lógicos utilizados son los **deductivos** formalmente válidos: De lo general a lo particular, con conclusiones **necesariamente** ciertas partiendo de premisas verdaderas. Con los Razonamientos válidos veremos la segunda de las relaciones semánticas claves en la Lógica Formal: La llamada **Consecuencia Lógica**.

El Lenguaje Formal de la L0 (I)

- **Un Lenguaje Formal consta de**: (1) Un conjunto de símbolos primitivos: alfabeto o vocabulario del lenguaje, y (2) Una definición recursiva para conectar los símbolos: gramática o sintaxis del lenguaje.
- Definición de **Fórmula Bien Formada**: Una f.b.f. (palabra, expresión, fórmula) es una cadena de caracteres generada según una gramática formal a partir de un alfabeto dado.
- Un lenguaje formal es el conjunto de todas las f.b.f. obtenidas a partir de un vocabulario y una gramática.
- En la práctica, necesitan de un sistema de codificación/formalización y de interpretación.
- En **Lógica de Proposiciones, L0, el alfabeto o vocabulario** estará formado por:
  - **Constantes**. Son los símbolos reservados verdadero (V) y falso (F). B = {V; F} .
  - **Proposiciones atómicas** o letras proposicionales. Formados por un conjunto arbitrario de letras: **{p, q, r, s, t, …}** También se denominan átomos. El conjunto de todos los átomos se denotarán por P.
  - **Conectivas** u operadores booleanos. **La aplicación de una conectiva implica una operación lógica**.

    $\wedge$ Conjunción $\quad\quad$ $\rightarrow$ Implicación

    $\vee$ Disyunción $\quad\quad$ $\leftrightarrow$ Doble implicación

    $\neg$ Negación
  - Otros símbolos. **Paréntesis** '( )', corchetes '[ ]', etc. Se utilizan para leer mejor las expresiones con conectivas lógicas.

El Lenguaje Formal de la L0 (II)

- La **Gramática o sintaxis de la Lógica de Proposiciones** se basa en la siguiente Definición para la Construcción de Fórmulas Proposicionales
- El conjunto de fórmulas, que hemos llamado Lenguaje Formal, es el menor conjunto de fórmulas que se puede obtener al aplicar las siguientes reglas gramaticales:
  - Paso Básico: Cualquier átomo perteneciente al conjunto P de proposiciones es una f.b.f.
  - Paso Recursivo: Si α y β son dos f.b.f. también lo son:
    - $\neg\, \alpha$, la negación de la f.b.f. Se lee "no α".
    - $(\alpha \wedge \beta)$, la conjunción de las dos f.b.f. Se lee "α y β".
    - $(\alpha \vee \beta)$, la disyunción de las dos f.b.f. Se lee "α o β *o ambas a la vez*".
    - $(\alpha \rightarrow \beta)$, el condicionamiento de las dos f.b.f. Se lee "α implica β".
    - $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, el doble condicionamiento de las f.b.f. Se lee "α si y solo si β".
- Esta definición para la construcción de Fórmulas Proposicionales se dice que es **UNA DEFINICIÓN RECURSIVA**, básica para los formalismos matemáticos.
- Con el fin de generalizar:
  - Un literal es una expresión atómica o su negación.
  - Una cláusula es un literal o la disyunción de dos o más literales (quitando todos los paréntesis).

El Lenguaje Formal de la LO (III)

Reglas de manejo y de simplificación de paréntesis

- Precedencia/Prioridad de operadores
  - **El orden de prioridad de los operadores es: (1) $\neg$; (2) $\vee$, $\wedge$; (3) $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.**
  - En el caso de que dos operadores tengan la misma prioridad, será precedente el situado más a la izquierda.
  - Las expresiones $\mathbf{p \vee q \rightarrow r}$, y $\mathbf{p \vee (q \rightarrow r)}$ son dos f.b.f. pero son dos expresiones distintas cuya semántica (valor de verdad) es diferente. **LO EXPLICAMOS**
- Regla para añadir paréntesis
  - A cualquier expresión $\boldsymbol{\alpha}$ que no se corresponda con una negación se le puede añadir paréntesis para construir la oración $\mathbf{(\boldsymbol{\alpha})}$.
- Regla para añadir paréntesis con prioridad de operadores
  - Consiste en aplicar la "Regla para añadir paréntesis", primero a los patrones $\vee$ y $\wedge$; y después a los patrones $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$
  - Ejemplos: Al aplicar esta regla dos veces a la expresión $\mathbf{p \vee q \rightarrow r}$**,** se genera $\mathbf{(p \vee q) \rightarrow r}$**,** y después $\mathbf{((p \vee q) \rightarrow r)}$. A la expresión $\mathbf{p \vee (q \rightarrow r)}$ sólo se le puede aplicar una vez la regla para generar $\mathbf{(p \vee (q \rightarrow r))}$
- Expresión con el menor número de paréntesis
  - Una f.b.f. $\boldsymbol{\alpha}$ se puede expresar con el menor número de paréntesis según $\boldsymbol{\beta}$**,** si y sólo si cumple simultáneamente estas condiciones.
    - $\boldsymbol{\beta}$ es una expresión con menos paréntesis de $\boldsymbol{\alpha}$.
    - $\boldsymbol{\beta}$ contiene la menor cantidad de paréntesis posibles para que se cumpla el paso anterior. Es decir, si a $\boldsymbol{\beta}$ se le quitara otro par de paréntesis no se obtendría $\boldsymbol{\alpha}$.
  - También se puede decir que al aplicar continuamente la regla para añadir paréntesis con prioridad de operadores sobre $\boldsymbol{\beta}$ se obtiene $\boldsymbol{\alpha}$**.**

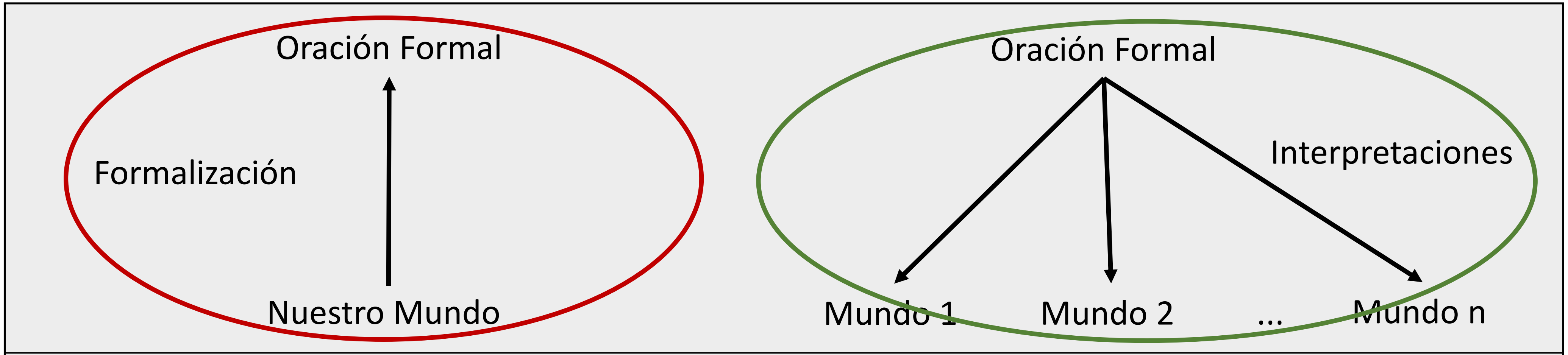
Reglas de manejo y de simplificación de paréntesis

- **Tengamos una expresión como ésta: $\neg p \lor q \land r \to \neg q \to s$. ¿Es una f.b.f.? ¿podemos añadirle paréntesis?**
  - $(\neg p \lor q) \land r \to \neg q \to s$
  - $((\neg p \lor q) \land r) \to \neg q \to s$
  - $(((\neg p \lor q) \land r) \to \neg q) \to s$
  - $((((\neg p \lor q) \land r) \to \neg q) \to s)$
- **Alternativas de diferente semántica. HAGAN LO MISMO EN CASA**
  - $\neg p \lor (q \land r) \to \neg q \to s$
  - $\neg p \lor (q \land r \to \neg q) \to s$
  - $\neg p \lor q \land r \to (\neg q \to s)$
- **Recordemos:** Precedencia/Prioridad de operadores
  - **El orden de prioridad de los operadores es: (1) $\neg$; (2) $\lor$, $\land$; (3) $\to$, $\leftrightarrow$.**
  - En el caso de que dos operadores tengan la misma prioridad, será precedente el situado más a la izquierda.
  - Las expresiones $\mathbf{p \lor q \to r}$, y $\mathbf{p \lor (q \to r)}$ son dos f.b.f. pero son dos expresiones distintas cuya semántica (valor de verdad) es diferente.

Formalización e Interpretación en L0

- **Formalizar una oración:** tarea mediante la cual podemos escribir su f.b.f. en el lenguaje formal.
- **Interpretar una f.b.f.:** se define como el procedimiento que traduce sus fórmulas atómicas a oraciones naturales del mundo

Lenguaje de la Lógica Formal



Lenguajes naturales de los mundos

La Formalización nos permite abstraernos del lenguaje natural y escribir fórmulas que pueden representar situaciones en múltiples escenarios naturales. Los enunciados: (a) “no comeré ni beberé a menos que tenga la despensa llena”; y (b) “ganaré mucho dinero y viviré feliz sólo si tengo un buen trabajo”, se pueden representar por la misma f.b.f. en L0: $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})$

La Formalización de oraciones en L0 (I)

¬α
- No es el caso de **α**.
- No **α**.
- No es cierto que **α**.
- Es falso que **α**.
- No sucede que **α**.
- La negación de **α**.

α → β
- Si **α** , **β**.
- Si **α** entonces **β**.
- **α** sólo si **β**.
- Sólo **α** si **β**.
- Es suficiente **α** para que **β**.
- Siempre que **α** entonces **β**.
- Es necesario **β** para que **α**.
- No **α** a menos que **β**.
- A no ser que **β** no **α**.

α **∧ β**
- ***α*** y **β**.
- Alternativas a "y": pero, aunque, además, sin embargo, también, a la vez, aún, no obstante.

α **∨ β**
- o ***α*** o **β** .
- Ya ***α***, ya **β**, ya ambas.

α **↔ β**
- ***α*** si y sólo si **β**.
- ***α*** equivale a **β**.
- ***α*** cuando y sólo cuando **β**.
- ***α*** cuando únicamente **β**.
- ***α*** es condición suficiente y necesaria para que **β.**

Facultad de Informática

La Formalización de oraciones en L0 (y II)

Los pasos a dar para formalizar oraciones en L0:

- Las oraciones en lenguaje natural: "si estornudo, cierro los ojos"; "no estornudaré a menos que cierre los ojos"; "estornudaré sólo si cierro los ojos"; "la condición necesaria para estornudar es cerrar los ojos"; "a no ser que cierre los ojos no estornudaré"; "si no cierro lo ojos, entonces no estornudo", todas ellas se formalizan de la siguiente manera:
- **Se identifican las oraciones simples o atómicas y se las denota por "letras" proposicionales**
  - Estornudar (estornudo, estornudaré) = **p**
  - Cerrar los ojos (cierro los ojos, cierre los ojos) = **q**
- **Se identifica los indicadores de conexión o de composición, y se les denota por las conectivas adecuadas.**
  - En este caso, es la conectiva de Implicación o condicional. Por tanto, la f.b.f. que formaliza las oraciones es: $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q})$
- Si la oración en lenguaje natural hubiese sido: "estornudo y cierro los ojos"
  - La f.b.f. que la formaliza sería: $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$
- En las primeras oraciones lo que se pretende decir es que existe un condicionamiento o una secuencia ordenada de ocurrencias entre las oraciones atómicas. En la segunda opción, lo que se afirma que las ocurrencias se deben dar al mismo tiempo.
- **SEMÁNTICA DIFERENTE QUE SE EVIDENCIARÁ EN LA EVALUACIÓN DE LAS MISMAS.**

La Evaluación en L0 (I)

- Al Valor de Verdad de una expresión cualquiera (una f.b.f.) se le llama Evaluación de la misma.
- Requiere de un procedimiento en cuya base está lo que llamaremos Asignación: Una asignación es establecer un valor de verdad a una fórmula atómica según una interpretación.
- Una asignación, por tanto, pone de relieve la necesidad de una interpretación. Sin embargo, en L0 no se suele hacer distinción entre interpretación y asignación. En otras lógicas sí se matiza claramente la diferencia, lo veremos en L1.
- En L0, a una proposición atómica (una f.b.f. denotada por las letras latinas p, q, r, etc.) con independencia de su Interpretación se le pueden asignar dos valores de Verdad: Verdadero (V) ó Falso (F), los dos elementos "constantes" del conjunto B = {V; F} .
- Podemos por tanto decir que la proposición atómica "p" tiene dos interpretaciones, cada una de ellas obtenida al aplicar la correspondiente asignación: v(p) = V ó v(p) = F. También será para "q": v(q) = V ó v(q) = F. Y para "r": v(r) = V ó v(r) = F.
- Entonces, cuál es la Evaluación de la f.b.f.: **$(p \wedge q \rightarrow r)$**
- Al construir todas las asignaciones/interpretaciones de dicha f.b.f. nos damos cuenta de que se pueden realizar ocho (8), combinando todas las posibilidades de Asignación con las tres fórmulas atómicas que la componen. Diremos que para esa fórmula existen ocho interpretaciones, cada una de ellas formada por la combinación de tres asignaciones diferentes para las tres proposiciones atómicas. Una de ellas sería: v(p) = V, v(q) = V, v(r) = V. Pero otra: v(p) = V, v(q) = V, v(r) = F. **Y así, hasta ocho!!!**
- La Evaluación de una f.b.f. compleja no tiene un único Valor de Verdad. Tiene tantos como interpretaciones se le puedan dar, y cada interpretación se compone de tantas asignaciones como proposiciones atómicas la formen. **LO VEREMOS MAS ADELANTE**

Facultad de Informática

La Evaluación en L0 (II)

- La Evaluación de una f.b.f. compleja (**a partir de ahora, ORACIÓN**) se define de una forma recursiva (ver la página 17 del documento 02-Proposicional-B). Y para ello, debemos definir la evaluación de las oraciones que se forman mediante un único conector o conectiva.
- La Evaluación de la **Conjunción de dos proposiciones**, es: Será VERDAD si y solo si las dos proposiciones conjuntadas han sido evaluadas como VERDADERAS. De esta manera, en cualquier otra evaluación (o asignación) de las mismas, la Conjunción es FALSA.
- La Evaluación de la **Disyunción de dos proposiciones**, es: Será FALSA si y solo si las dos proposiciones disyuntadas han sido evaluadas como FALSAS. De esta manera, en cualquier otra evaluación (o asignación) de las mismas, la Disyunción es VERDADERA.
- La Evaluación de la **Negación de una Proposición**, es: Será FALSA cuando la proposición de partida es VERDADERA, y será VERDADERA cuando la proposición de partida es FALSA.
- La Evaluación de la **Implicación o Condicional de dos proposiciones**, es: Será FALSA si y solo si la evaluación del antecedente es VERDAD y la del consecuente es FALSA. De esta manera, en cualquier otra evaluación (o asignación) de antecedente y consecuente, la Implicación es VERDADERA.
- La Evaluación de la **Doble Implicación de dos proposiciones**, es: Será VERDAD cuando antecedente y consecuente tienen la misma evaluación (o asignación) de Verdad, y será FALSA cuando antecedente y consecuente tienen diferente evaluación (o asignación) de Verdad.

La Evaluación en L0 (III)

INTER		EVALUACIONES															
p	q	¬p	¬q	p ∧ q	q ∧ p	p ∨ q	q ∨ p	p → q	q → p	p ↔ q	q ↔ p	p ∧ V	p ∨ F	p ∨ V	p ∧ F	p∧¬p	p∨¬p
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	F	F	V

- La Evaluación de una oración formada por las dos proposiciones atómicas **"p"** y **"q"**, tendrá cuatro interpretaciones posibles.
- Como se ve en la tabla, la conjunción, la disyunción y la doble implicación son operaciones conmutativas; la implicación, no. **OJO!!!**
- La constante **V** es el elemento neutro para la conjunción, y el elemento absorbente para la disyunción.
- La constante **F** es el elemento neutro para la disyunción, y el elemento absorbente para la conjunción.
- La conjunción de una proposición y su negada es evaluada como el elemento neutro de la disyunción, es decir, es la constante **F**.
- La disyunción de una proposición y su negada es evaluada como el elemento neutro de la conjunción, es decir, por la constante **V**.
- De las dos anteriores, se puede decir que **p** y **¬p** son proposiciones complementarias, en Lógica las llamamos contradictorias.
- Podemos demostrar que la conjunción y la disyunción cumplen con la propiedad distributiva, en las dos secuencias: de la conjunción con respecto a la disyunción, y de la disyunción con respecto a la conjunción.
- Con todo ello, el universo de las proposiciones con respecto a las conectivas: negación, conjunción y disyunción, forman lo que se llama un ALGEBRA de BOOLE, el Algebra de los Significados, al cumplir con los cuatro postulados o axiomas de Huntington.

La Evaluación en L0 (y IV)

INTERPRETA		EVALUACIONES DE (1): $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ y (2): $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$						
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$
V	V	F	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V

INTERPRETA		EVALUACIONES DE (3): $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$ y (4): $(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$						
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$
V	V	F	F	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	F	F

- La Evaluación de las oraciones (1 y (2) resultan tener todas sus interpretaciones como VERDADERAS. La Evaluación de la oración (4), las tiene todas FALSAS. Y la (3), algunas VERDADERAS y algunas FALSAS.

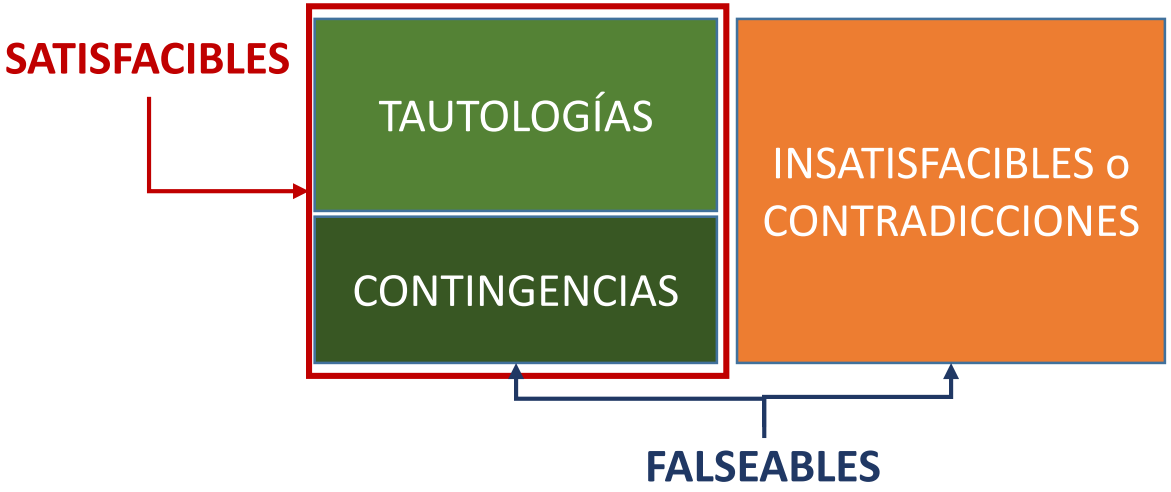
La Decibilidad y la Satisfacibilidad en L0

- **Problema de la Decidibilidad**: Encontrar un algoritmo que decida si una oración es satisfacible. Diremos, por tanto, que una Lógica es decidible si contamos con un método o técnica determinista que nos diga si una oración cualquiera **α**, escrita en su lenguaje formal, es satisfacible, o bien, es insatisfacible.
- Una oración es SATISFACIBLE si al menos una de sus interpretaciones se puede evaluar como VERDADERA. Una oración será INSATISFACIBLE si en todas sus interpretaciones se evalúa como FALSA.
- La primera de las técnicas es la llamada **"Tablas de Verdad",** basada en la implementación de un algoritmo o secuencia de los siguientes pasos, siguiendo un procedimiento que siempre termina:
  - Paso 1: Determinar el número n de elementos atómicos de la oración **α**. En el ejemplo: n = 2
  - Paso 2: Construir una tabla con tantas columnas como n + número de operaciones (en el ejemplo: 2 + 3) y con tantas filas como interpretaciones posibles, 2 elevado a n (en el ejemplo: 2 elevado a 2 = 4)
  - Paso 3: Establecer asignaciones para cada interpretación.
  - Paso 4: Obtener las evaluaciones según el orden de construcción de la oración, teniendo en cuenta la pag.12.
  - Paso 5: El valor de verdad de la oración **α** viene dada por la última columna completada.

INTERPRETA		**EVALUACIONES DE (3): $(p \to q) \land q \to p$ y (4): $(p \to q) \land p \land \neg q$**						
p	**q**	**$\neg p$**	**$\neg q$**	**$p \to q$**	**$(p \to q) \land q$**	**$(p \to q) \land q \to p$**	**$(p \to q) \land p$**	**$(p \to q) \land p \land \neg q$**
V	V	F	F	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	F	F

Satisfacibilidad y tipos de oraciones en L0

- Hemos dicho antes que una oración es SATISFACIBLE si al menos una de sus interpretaciones se puede evaluar como VERDADERA. Y también que una oración será INSATISFACIBLE si en todas sus interpretaciones se evalúa como FALSA.



- Una oración que tiene al menos una interpretación evaluada como FALSA, se denomina FALSEABLE.
- Si una oración es SATISFACIBLE y FALSEABLE, se dice de ella que es una CONTINGENCIA.
- Si una oración SATISFACIBLE no puede ser FALSEADA, entonces se dice de ella que es una TAUTOLOGÍA. Es decir, este tipo de oraciones tiene todas sus interpretaciones evaluadas como VERDADERAS. **Si la oración α es una TAUTOLOGÍA, entonces la oración α no es FALSEABLE. Y, viceversa!!!**
- El conjunto de las oraciones llamadas CONTINGENCIAS unido al conjunto de oraciones llamadas TAUTOLOGÍAS, nos aporta el conjunto de las oraciones SATISFACIBLES, que es disjunto del conjunto de las oraciones INSATISFACIBLES, llamadas también CONTRADICCIONES.
- Si **α** es SATISFACIBLE, entonces **¬α** es una oración INSATISFACIBLE? **NO!!!!!** Lo será, si y solo si **α es TAUTOLOGÍA.**

Conjuntos de oraciones en L0 (I)

- **Un conjunto de oraciones es SATISFACIBLE** si y solo si existe (al menos) una interpretación tal que para todas las oraciones del conjunto su evaluación es VERDADERA . En este caso, dicha interpretación se llama un **MODELO** para el conjunto de oraciones.
- **Un conjunto de oraciones se dice que es INSATISFACIBLE** si no cumple con la definición anterior, es decir, no existe ninguna interpretación que pueda ser llamada modelo.

CONJUNTO SATISFACIBLE

INTER		EVALUACIONES					
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F	F	V

MODELO → fila V V

CONJUNTO INSATISFACIBLE

INTER		EVALUACIONES					
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$\neg p \vee q \wedge \neg q$	$q \rightarrow p \rightarrow \neg p$
V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	V	V

Conjuntos de oraciones en L0 (y II)

- En un conjunto SATISFACIBLE de oraciones todas las oraciones que lo componen deben ser SATISFACIBLES.
- Si a un conjunto SATISFACIBLE de oraciones se le añade una TAUTOLOGÍA, el conjunto sigue siendo SATISFACIBLE.
- Un conjunto INSATISFACIBLE de oraciones puede estar formado por oraciones que son todas ellas SATISFACIBLES.
- Un conjunto de oraciones que contenga una CONTRADICCIÓN es un conjunto INSATISFACIBLE.

CONJUNTOS INSATISFACIBLES

ORACIONES AÑADIDAS

INTER		EVALUACIONES						
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$(p \to q) \wedge q$	$(p \to q) \wedge q \to p$	$q \to p \to \neg p$
V	V	V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	F	F	V	V

INTER		EVALUACIONES						
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$\neg p \vee q \wedge \neg q$	$q \to p \to \neg p$	$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$
V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	V

La Equivalencia Lógica en L0 (I)

Definición de la Equivalencia Lógica: Es una relación semántica entre dos oraciones lógicas.

- Dos oraciones **α** y **β** se dice que son lógicamente equivalentes si y solo si la evaluación de **α** (denotada por v(**α**)) es igual a la evaluación de **β** (denotada por v(**β**)) para cualquier interpretación considerada. Es decir, que interpretación a interpretación v(**α**) = v(**β**).
- Si se cumple la definición anterior dada para dos oraciones **α** y **β**, diremos que dichas oraciones están relacionadas mediante la equivalencia lógica y lo denotaremos por: **α ≡ β**.
- Si **α** ≡ **β**, para dos oraciones cualesquiera, entonces la oración formada por **(α ↔ β)** es una **TAUTOLOGÍA**. **¿¿¿POR QUÉ???**

INTER		**EVALUACIONES**									
p	**q**	**¬p**	**¬q**	**p → q**	**¬p ∨ q**	**¬p ∨ ¬q**	**¬(p ∧ q)**	**¬p ∧ ¬q**	**¬(p ∨ q)**	**p ∧ (q ∨ ¬p)**	**(p ∧ q) ∨ (p ∧ ¬p)**
V	V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F

LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

Facultad de Informática

La Equivalencia Lógica en L0 (II)

- Como se cumple que si **$\alpha \equiv \beta$**, para dos oraciones cualesquiera, la oración formada por **$(\alpha \leftrightarrow \beta)$** es una **TAUTOLOGÍA**, entonces también lo será **$((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$.** Y con ello, **$(\alpha \rightarrow \beta)$** será una **TAUTOLOGÍA y $(\beta \rightarrow \alpha)$** también lo será.
- En todo caso, no confundir la Equivalencia Lógica con la doble implicación: **$\alpha \equiv \beta$** representa una relación semántica entre las oraciones, y **$(\alpha \leftrightarrow \beta)$** una operación entre ellas.
- En las **páginas 24 a 30 del documento 02-Proposicional-B que tienen en RECURSOS**, pueden encontrar la definición formalizada de Equivalencia Lógica, así como analizar las relaciones de equivalencia lógica más importantes y comunes entre oraciones lógicas para nuestras aplicaciones.
- La relación de Equivalencia Lógica entre dos oraciones, se utiliza preferentemente para reescribir una por otra. Por ejemplo, si en la formulación de una oración compleja **α** nos encontramos con la operación **$\neg(p \wedge q)$**, al saber que dicha expresión es lógicamente equivalente con **$(\neg p \vee \neg q)$,** podremos reescribir la primera por la segunda.
- De esta manera, si partimos de una oración **α,** y mediante reescrituras por equivalencia lógica en su formulación obtenemos una nueva oración **β**, y viceversa, podremos decir que **$\alpha \equiv \beta$.**
- **A modo de ejemplo:**
- Si quisiésemos formalizar la llamada disyunción alternativa, aquella operación que nos dice que "una cosa o la otra, pero no las dos a la vez", para dos proposiciones atómicas **p** y **q**, dicha operación se formalizaría en la siguiente oración: **$(p \vee q \wedge \neg(p \wedge q))$. Vamos a reescribir esta fórmula.**
    - Añadamos paréntesis para precisar mejor: **$((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$.**
    - Apliquemos la equivalencia de De Morgan al segundo término de la conjunción principal: **$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q))$.**
    - Apliquemos la equivalencia de la propiedad distributiva de la conjunción con respecto a la disyunción: **$((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q))$**
    - Si aplicamos la equivalencia lógica de **$(\alpha \wedge \neg\, \alpha) \equiv F$,** tenemos: **$(F \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee\ F)$**
    - Y teniendo en cuenta que **$(\alpha \vee F) \equiv \alpha$,** tendremos finalmente: **$((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$**
- Esto nos dice que: **$(p \vee q \wedge \neg(p \wedge q)) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$. HAGAN LA REESCRITURA DE LA SEGUNDA HACIA LA PRIMERA!!!**

La Equivalencia Lógica en L0 (III)

- Vamos a aplicar la Equivalencia Lógica para transformar unas oraciones en otras, de manera que en estas últimas no aparezcan las conectivas de Implicación y de Doble Implicación. Es decir, que en nuestras nuevas oraciones solo aparecerán las conectivas de Negación, Conjunción y Disyunción: las conectivas u operadores que hacían del conjunto de proposiciones un Algebra de Boole!!!
- Estas últimas fórmulas, estructuradas de una cierta manera, tienen una gran importancia en Lógica Formal a la hora de establecer mecanismos de resolución de la SATISFACIBILIDAD de oraciones. Vamos a estructurar las fórmulas de manera que sean: a) Conjunción de disyunciones; y b) Disyunción de conjunciones.
- A estos dos tipos de fórmulas las llamaremos **FORMAS NORMALES** de una oración compleja. Si es una conjunción de disyunciones, la llamaremos FORMA NORMAL CONJUNTIVA **(FNC).** Si es una disyunción de conjunciones, la llamaremos FORMA NORMAL DISYUNTIVA **(FND).**
- Hemos visto antes que la oración $(((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge \neg\mathbf{q}) \rightarrow \neg\mathbf{p})$ tenía todas sus interpretaciones evaluadas como VERDADERAS, por lo que es una TAUTOLOGÍA.
- Hemos visto, asimismo, que la oración $((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge \mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$ tenía todas sus interpretaciones evaluadas como FALSAS, por lo que es una CONTRADICCIÓN u oración INSATISFACIBLE.
- Transformemos la TAUTOLOGÍA a su FORMA NORMAL CONJUNTIVA por aplicación de Equivalencias Lógicas. $(((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p) \equiv (((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p) \equiv (\neg((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p) \equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg\neg q) \vee \neg p) \equiv$ $(\neg(\neg p \vee q) \vee q) \vee \neg p) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee q) \vee \neg p) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p)) \equiv ((p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p))$ **FNC!!!**
- **Y, QUÉ ES LO QUE HEMOS ENCONTRADO???? QUÉ PODEMOS DECIR DE ESTA FÓRMULA NUEVA????**

La Equivalencia Lógica en L0 (y IV)

Facultad de Informática

- Si es equivalente a la de partida, debe ser una TAUTOLOGÍA. Lo es? Analicémosla un poco más. La fórmula es una conjunción de dos disyunciones. Y en cada una de las dos disyunciones aparece una proposición y su negada: $(\mathbf{p \vee \neg p})$ en la primera, y $(\mathbf{\neg q \vee q})$ en la segunda. Y sabemos que esto se evalúa como la constante **V.** Así que, tenemos: $((\mathbf{p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p)) \equiv ((V \vee q) \wedge (V \vee \neg p)})$
- Como $(\mathbf{V \vee \alpha}) \equiv \mathbf{V}$, podemos seguir de la siguiente manera: $\mathbf{((V \vee q) \wedge (V \vee \neg p)) \equiv (V \wedge V) \equiv V}$
- Es decir, que la fórmula **FNC** es equivalente lógicamente a la constante **V**, por tanto es una oración VERDAD, una TAUTOLOGÍA **(y sin hacer interpretaciones en Tablas de Verdad!!!!)**. Pues si la FNC obtenida es una TAUTOLOGÍA y es equivalente a la fórmula de partida, eso quiere decir que ésta también es una TAUTOLOGÍA. Cuestión que ya sabíamos, pero que hemos demostrado de otra manera. **Para saber si una oración es una TAUTOLOGÍA basta con transformarla en su FNC y comprobar que en todas y en cada una de las disyunciones que la forman aparece una proposición atómica y su negada.**
- Veamos ahora que pasa con la oración que sabemos que es una CONTRADICCIÓN: $(\mathbf{(p \to q) \wedge p \wedge \neg q})$
- La vamos a transformar en su FORMA NORMAL DISYUNTIVA **(FND)** mediante la aplicación de las equivalencias lógicas conocidas.
- $\mathbf{((p \to q) \wedge p \wedge \neg q) \equiv ((\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q) \equiv ((\neg p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)) \equiv ((\neg p \wedge p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p \wedge \neg q))}$ **FND!!!** La fórmula es una disyunción de dos conjunciones. En cada una de las conjunciones aparece una proposición atómica y su negada: $(\mathbf{\neg p \wedge p})$ en la primera, y $(\mathbf{q \wedge \neg q})$ en la segunda. Y sabemos que esto se evalúa como la constante **F.** Así que, tenemos: $\mathbf{((\neg p \wedge p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p \wedge \neg q)) \equiv ((F \wedge \neg q) \vee (p \wedge F)) \equiv (F \vee F) \equiv F}$
- **Para saber si una oración es una CONTRADICCIÓN basta con transformarla en su FND y comprobar que en todas y en cada una de las conjunciones que la forman aparece una proposición atómica y su negada.**

Razonamientos y Consecuencia Lógica (I)

Definición de Consecuencia Lógica: Es una relación semántica entre oraciones lógicas.

- Se dice que **β** es consecuencia lógica de **α**, y lo denotaremos por **α ⊨ β**, si y sólo si:
  - En aquellas interpretaciones en las que **α** es verdad (v(**α**) = V), necesariamente **β** también es verdad (v(**β**) = V)
  - En la misma interpretación no puede ser que **α** se evalúe como verdad y **β** se evalúe como falsa. CONTRAEJEMPLO.
- Teniendo en cuenta esta definición: **si α ⊨ β entonces (α → β) es una oración tautológica.**
- Se dice que una oración **β** es consecuencia lógica del conjunto de oraciones F, que denotaremos por F ⊨ β, si todo **modelo de** F lo es necesariamente de **β.** Recordemos que un modelo es aquella interpretación en la que todas y cada una de las oraciones del conjunto de oraciones se evalúan como VERDAD.
- Un **razonamiento** en el que tengamos un conjunto de premisas F y una conclusión **β**, será **VÁLIDO** si podemos demostrar que F ⊨ β, es decir que β **es una consecuencia lógica del conjunto F.**

INTERPRETA		EVALUACIONES DE: $(p \to q) \land p \to q$ y $(p \to q) \land \neg q \to \neg p$						
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \land p$	$(p \to q) \land p \to q$	$(p \to q) \land \neg q$	$(p \to q) \land \neg q \to \neg p$
V	V	F	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V

Razonamientos y Consecuencia Lógica (II)

Facultad de Informática

- **Si el conjunto Γ es el conjunto vacío, entonces $\models \beta$.** Con lo que β **es una oración tautológica. OJO!!! Es muy importante.**
- De la TABLA DE VERDAD que hemos desarrollado:
  a) La oración **q** es consecuencia lógica de la oración **$((p \to q) \wedge p)$.** La oración **$((p \to q) \wedge p \to q)$** es una **TAUTOLOGÍA.**
  b) La oración **$\neg p$** es consecuencia lógica de la oración **$((p \to q) \wedge \neg q)$.** La oración **$((p \to q) \wedge \neg q \to \neg p)$** es una **TAUTOLOGÍA.**
  c) La oración **q** es una consecuencia lógica del conjunto de oraciones **$\{(p \to q); p\}$.** Es decir, **$\{(p \to q); p\} \models q$** y como hemos visto en a) la implicación de la conjunción de las dos oraciones del conjunto con la oración que es consecuencia lógica de él, **es una TAUTOLOGÍA**
  d) La oración **$\neg p$** es una consecuencia lógica del conjunto de oraciones **$\{(p \to q); \neg q\}$.** Es decir, **$\{(p \to q); \neg q\} \models \neg p$** y como hemos visto en b) la implicación de la conjunción de las dos oraciones del conjunto con la oración que es consecuencia lógica de él, **es una TAUTOLOGÍA**
- Según esto, la oración **q** es la conclusión del conjunto de premisas **$\{(p \to q); p\}$** en un esquema de RAZONAMIENTO VÁLIDO: De la verdad de las premisas se concluye necesariamente la verdad de la conclusión. Este es un esquema de razonamiento válido que llamaremos SILOGISMO HIPOTÉTICO MIXTO MODUS PONENS
- De la misma forma, la oración **$\neg p$** es la conclusión del conjunto de premisas **$\{(p \to q); \neg q\}$** en un esquema de RAZONAMIENTO VÁLIDO. Este es un esquema de razonamiento válido que llamaremos SILOGISMO HIPOTÉTICO MIXTO MODUS TOLLENS

INTERPRETA		EVALUACIONES DE: $(p \to q) \wedge p \to q$ y $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$						
p	**q**	**$\neg p$**	**$\neg q$**	**$p \to q$**	**$(p \to q) \wedge p$**	**$(p \to q) \wedge p \to q$**	**$(p \to q) \wedge \neg q$**	**$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$**
V	V	F	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V

Razonamientos y Consecuencia Lógica (III)

Propiedades de la relación Consecuencia Lógica entre oraciones:

- Reflexiva: para cualquier oración α, se cumple $\alpha \vDash \alpha$
- Transitividad: para cualquier par de oraciones α y β, y dado un conjunto F de oraciones, si $F \vDash \alpha$ y $\alpha \vDash \beta$, entonces $F \vDash \beta$
- Monotonía: Dado un conjunto F de oraciones y una oración β, si $F \vDash \beta$, entonces $[F \cup \{\alpha\}] \vDash \beta$ para cualquier α
- Si $F \vDash \beta$ y α es una Tautología perteneciente al conjunto F, entonces $[F - \{\alpha\}] \vDash \beta$
- Relación entre la equivalencia lógica $\equiv$ y la consecuencia lógica $\vDash$: Si $\alpha \equiv \beta$, entonces $\alpha \vDash \beta$ y $\beta \vDash \alpha$

INTERPRE		EVALUACIONES								
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p \lor q$	$\neg(p \land \neg q)$	$(p \to q) \to \neg p \lor q$	$\neg p \lor q \to (p \to q)$	$\neg p \lor q \to \neg(p \land \neg q)$	$(p \to q) \to \neg(p \land \neg q)$
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V

Razonamientos y Consecuencia Lógica (IV)

El Teorema de la Deducción Semántica:

- Si la oración β **es consecuencia lógica del conjunto de oraciones $F = \{\alpha1, \alpha2, \alpha3, \ldots, \alpha n\}$,** lo que escribimos como $\{\alpha1, \alpha2, \alpha3, \ldots, \alpha n\} \vDash \beta$ **entonces también $\{\alpha1, \alpha2, \alpha3, \ldots\} \vDash \alpha n \rightarrow \beta$**
- Y si esto es así, también sería una consecuencia lógica: $\{\alpha1, \alpha2\} \vDash \alpha3 \rightarrow (\ldots(\alpha n \rightarrow \beta))$
- Y también: $\{\alpha1\} \vDash \alpha2 \rightarrow (\alpha3 \rightarrow (\ldots(\alpha n \rightarrow \beta)))$
- Y por último, también lo sería: $\vDash \alpha1 \rightarrow (\alpha2 \rightarrow (\alpha3 \rightarrow (\ldots(\alpha n \rightarrow \beta))))$
- Por lo que partiendo del conjunto vacío de oraciones, la oración $(\alpha1 \rightarrow (\alpha2 \rightarrow (\alpha3 \rightarrow (\ldots(\alpha n \rightarrow \beta)))))$ es una **TAUTOLOGÍA.**
- Por tanto, en general, si tenemos un conjunto F de oraciones y dos oraciones **α y β** cualesquiera, tal que se cumple que $[F \cup \{\alpha\}] \vDash \beta$ se cumplirá también que $F \vDash \alpha \rightarrow \beta$
- **ESTE ES UN TEOREMA DE UNA IMPORTANCIA Y RELEVANCIA MÁXIMA EN LÓGICA!!!!**
- QUE TIENE UN COROLARIO QUE YA HEMOS VISTO EN LAS TABLAS DE VERDAD: Si F es un conjunto formado por $\{\alpha1, \alpha2, \alpha3, \ldots, \alpha n\}$, y $F \vDash \beta$, entonces $(\alpha1 \wedge \alpha2 \wedge \alpha3 \wedge \ldots. \wedge \alpha n \rightarrow \beta)$ es una **TAUTOLOGÍA. CON ELLO, ACABAMOS DE ENUNCIAR UN PLANTEAMIENTO DE SATISFACIBILIDAD PARA DEMOSTRAR SI UN RAZONAMIENTO ES VÁLIDO!!!! LO LLAMAREMOS MÉTODO DIRECTO**
- **Que también podemos expresarlo como que: $(\alpha1 \wedge \alpha2 \wedge \alpha3 \wedge \ldots. \wedge \alpha n \wedge \neg \beta)$ es una CONTRADICCIÓN!!!! CON LO QUE TENDREMOS LO QUE LLAMAREMOS MÉTODO POR REFUTACIÓN**

Razonamientos y Consecuencia Lógica (y V)

En las páginas 36-42 del documento 02-Proposicional-B disponible en RECURSOS tienen una serie de esquemas básicos (como ladrillos elementales) de razonamientos válidos, entre los que se encuentran algunos de los Silogismos más relevantes. **Los SILOGISMOS:** Son esquemas de razonamiento deductivo válido formados por dos premisas y una conclusión.

SILOGISMOS:

- Inconsistencia: $\{\alpha; \neg\alpha\} \vDash \beta$
- Silogismo hipotético: $\{\alpha \to \beta; \beta \to \gamma\} \vDash \alpha \to \gamma$
- Demostración por casos: $\{\alpha \to \gamma; \beta \to \gamma\} \vDash \alpha \vee \beta \to \gamma$
- Prueba por caos: $\{\alpha \to \gamma; \neg\alpha \to \gamma\} \vDash \gamma$
- Silogismo disyuntivo (Modus Tollendo Ponens): $\{\alpha \vee \beta; \neg\beta\} \vDash \alpha$
- Silogismos hipotéticos mixtos: Modus Ponens y Modus Tollens, ya vistos anteriormente

OTROS ESQUEMAS BÁSICOS:

- Dilema constructivo: $\{\alpha \vee \beta; \alpha \to \delta; \beta \to \gamma\} \vDash \delta \vee \gamma$
- Transposición: $\alpha \to \beta \vDash \neg\beta \to \neg\alpha$