FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA INFORMÁTICA

Novena sesión de prácticas

PRIMER CURSO DEL GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

PRIMER CUATRIMESTRE

2020-21

Facultad de Informática

Índice del documento

La Sintaxis de la Lógica de Predicados (I)

EL ALFABETO DE LA LÓGICA DE PREDICADOS

- **Constantes**. Son los símbolos reservados a verdadero (V) y falso (F), y secuencia de letras que representan Objetos Definidos: Términos Constantes.
- **Variables**. Secuencia de letras que representan Objetos Indefinidos. El conjunto de los posibles objetos que puede representar recibe el nombre de Dominio de la variable.
- **Funciones**. Secuencia de letras que representa una relación-función. En Lógica de Predicados las Funciones se tratan como Términos, ya sean variables o constantes.
- **Predicados**. Secuencia de letras que representa una propiedad o relación, que se aplica a términos.
- **Conectivas** u operadores entre predicados.
  - ✓ ∧ Conjunción (y)
  - ✓ ∨ Disyunción (o)
  - ✓ ¬ Negación (no)
  - → Implicación (si, entonces)
  - ↔ Doble implicación (si y sólo si)
- **Cuantificadores**. Se usan solo dos y se refieren a las variables.
  - ✓ Cuantificador universal: ∀x, se lee para cada x, o para todo x.
  - ✓ Cuantificador existencial: ∃x, se lee existe (al menos) un x.
- **Otros símbolos**. paréntesis ‘( )’, corchetes ‘[ ]’, llaves ‘{ }’.

La Sintaxis de la Lógica de Predicados (y II)

LA PRECEDENCIA DE CONECTIVAS Y LA SIMPLIFICACIÓN DE PARÉNTESIS

- Una f.b.f. es la que responde a la definición anterior.
- Pero al igual que en **L0**, se pueden considerar otras expresiones con menos paréntesis que representen a una f.b.f..
- Usaremos este consenso sobre la precedencia de conectivas u operadores:
  1. ¬, ∀, ∃ (con asociatividad por la derecha)
     - **a)** ¬ ∀x P(x) → Q(x) <=> (¬(∀x P(x)) → Q(x)), segunda x libre.
     - **b)** ∀x ¬ P(x) → Q(x) <=> ((∀x ¬ P(x)) → Q(x)), segunda x libre.
  2. ∧, ∨ (con asociatividad por la izquierda)
  3. →, ↔ (con asociatividad por la izquierda)
- Si apareciesen paréntesis se aplicará la asociatividad que indiquen.

LOS TIPOS DE FÓRMULAS BIEN FORMADAS

- Una **variable está ligada** si está en una f.b.f. y está cuantificada, por ejemplo: **en ∀x (C(x) → R(x)) la variable "x" está ligada.**
- Una **variable está libre** si está en una f.b.f y no está cuatificada, por ejemplo: **en ∀x C(x) → R(y) la variable "y" está libre.**
- **Una f.b.f. es cerrada** (o es una sentencia) si todas los símbolos variables están ligados. Ejemplo: ∀x ∀y (C(x) → M(y, f(x)))
- **Una f.b.f. es abierta** si al menos una variable está libre. Ejemplo: ∀x C(x) → R(y)
- **Una f.b.f se denomina instancia-base** si todos los términos de sus predicados, y los argumentos de las funciones, son constantes; representa, en realidad, una proposición. Ejemplos: C(a), R(d), C(a) → M(b, f(a))
- **Un literal** es una expresión atómica o su negación: P(x), ¬P(y), P(f(x)), ¬P(b)
- **Una cláusula** es la dada por la disyunción de uno o más literales.

Ejercicio 19: formalizar e interpretar oraciones en L1 (I)

Se tiene la siguiente información

- A no ama a D
- D ama a C
- B ama a C o a D
- A ama a cualquiera que ame a B
- C ama a cualquiera que le ame a él
- Nadie se ama a sí mismo

Se pide, justificando las respuestas:

1. Formalizar cada una de las oraciones en L1, definiendo explícitamente los predicados
2. Construir un universo, conjunto de tablas, para los predicados definidos en el que el conjunto de oraciones sea satisfacible
3. Dada una tabla del apartado anterior, indicar si añadiendo la oración “A ama a B” el conjunto de partida sigue siendo satisfacible. ¿Pasa lo mismo si se añade la oración “A ama a C”?

Ejercicio 19: formalizar e interpretar oraciones en L1 (II)

Se pide, justificando las respuestas:

Formalizar cada una de las oraciones en L1, definiendo explícitamente los predicados

La signatura que debemos formalizar es: **{P/2}**. **P(x, y): "x ama a y"; A, B, C, D son constantes de término**

ORACIÓN	FÓRMULA
A no ama a D	$\neg P(A, D)$
D ama a C	$P(D, C)$
B ama a C o a D	$P(B, C) \vee P(B, D)$
A ama a cualquiera que ame a B	$\forall y\ (P(y, B) \rightarrow P(A, y))$
C ama a cualquiera que le ame a él	$\forall y\ (P(y, C) \rightarrow P(C, y))$
Nadie se ama a sí mismo	$\forall y\ \neg P(y, y) \equiv \neg \exists y\ P(y, y)$

Ejercicio 19: formalizar e interpretar oraciones en L1 (III)

	FÓRMULA
1	¬P(A, D)
2	P(D, C)
3	P(B, C) ∨ P(B, D)
4	∀y (P(y, B) → P(A, y))
5	∀y (P(y, C) → P(C, y))
6	∀y ¬P(y, y) ≡ ¬∃y P(y, y)

Se pide, justificando las respuestas:

Construir un universo, conjunto de tablas, para los predicados definidos en el que el conjunto de oraciones sea satisfacible

Lo que tenemos que hacer es construir una representación tabular de **la relación que se asocia al predicado**, teniendo en cuenta las oraciones conocidas

v(P(B, C)) = v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0			0
B		0	1	1
C			0	
D			1	0

v(P(B, C)) = V; v(P(B, D)) = F

R	A	B	C	D
A	0			0
B		0	1	0
C			0	
D			1	0

v(P(B, C)) = F; v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0			0
B		0	0	1
C			0	
D			1	0

Ejercicio 19: formalizar e interpretar oraciones en L1 (IV)

	FÓRMULA
1	¬P(A, D)
2	P(D, C)
3	P(B, C) ∨ P(B, D)
4	∀y (P(y, B) → P(A, y))
5	∀y (P(y, C) → P(C, y))
6	∀y ¬P(y, y) ≡ ¬∃y P(y, y)

Se pide, justificando las respuestas:

Construir un universo, conjunto de tablas, para los predicados definidos en el que el conjunto de oraciones sea satisfacible

Lo que tenemos que hacer es construir una representación tabular de **la relación que se asocia al predicado**, teniendo en cuenta las oraciones conocidas

v(P(B, C)) = v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0			0
B		0	1	1
C		1	0	1
D			1	0

Por 5

v(P(B, C)) = V; v(P(B, D)) = F

R	A	B	C	D
A	0			0
B		0	1	0
C		1	0	1
D			1	0

Por 5

v(P(B, C)) = F; v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0			0
B		0	0	1
C			0	1
D			1	0

Facultad de Informática

Ejercicio 19: formalizar e interpretar oraciones en L1 (V)

	FÓRMULA
1	¬P(A, D)
2	P(D, C)
3	P(B, C) ∨ P(B, D)
4	∀y (P(y, B) → P(A, y))
5	∀y (P(y, C) → P(C, y))
6	∀y ¬P(y, y) ≡ ¬∃y P(y, y)

Se pide, justificando las respuestas:

Construir un universo, conjunto de tablas, para los predicados definidos en el que el conjunto de oraciones sea satisfacible

Lo que tenemos que hacer es construir una representación tabular de **la relación que se asocia al predicado**, teniendo en cuenta las oraciones conocidas

v(P(B, C)) = v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0		1	0
B		0	1	1
C		1	0	1
D			1	0

Por 4

Por 5

v(P(B, C)) = V; v(P(B, D)) = F

R	A	B	C	D
A	0		1	0
B		0	1	0
C		1	0	1
D			1	0

v(P(B, C)) = F; v(P(B, D)) = V

Por 5

R	A	B	C	D
A	0			0
B		0	0	1
C			0	1
D			1	0

Ejercicio 19: formalizar e interpretar oraciones en L1 (VI)

	FÓRMULA
1	¬P(A, D)
2	P(D, C)
3	P(B, C) ∨ P(B, D)
4	∀y (P(y, B) → P(A, y))
5	∀y (P(y, C) → P(C, y))
6	∀y ¬P(y, y) ≡ ¬∃y P(y, y)

Se pide, justificando las respuestas:

Construir un universo, conjunto de tablas, para los predicados definidos en el que el conjunto de oraciones sea satisfacible

Lo que tenemos que hacer es construir una representación tabular de **la relación que se asocia al predicado**, teniendo en cuenta las oraciones conocidas

v(P(B, C)) = v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0		1	0
B		0	1	1
C	1	1	0	1
D			1	0

Por 4

Por 5

Por 5

v(P(B, C)) = V; v(P(B, D)) = F

R	A	B	C	D
A	0		1	0
B		0	1	0
C	1	1	0	1
D			1	0

v(P(B, C)) = F; v(P(B, D)) = V

Por 5

R	A	B	C	D
A	0			0
B		0	0	1
C			0	1
D			1	0

Ejercicio 19: formalizar e interpretar oraciones en L1 (VII)

	FÓRMULA
1	¬P(A, D)
2	P(D, C)
3	P(B, C) ∨ P(B, D)
4	∀y (P(y, B) → P(A, y))
5	∀y (P(y, C) → P(C, y))
6	∀y ¬P(y, y) ≡ ¬∃y P(y, y)

Se pide, justificando las respuestas:

Construir un universo, conjunto de tablas, para los predicados definidos en el que el conjunto de oraciones sea satisfacible

Lo que tenemos que hacer es construir una representación tabular de **la relación que se asocia al predicado**, teniendo en cuenta las oraciones conocidas

v(P(B, C)) = v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0		1	0
B		0	1	1
C	1	1	0	1
D			1	0

Por 4

Por 5

Por 5

v(P(B, C)) = V; v(P(B, D)) = F

R	A	B	C	D
A	0		1	0
B		0	1	0
C	1	1	0	1
D			1	0

v(P(B, C)) = F; v(P(B, D)) = V

Por 5

R	A	B	C	D
A	0			0
B		0	0	1
C			0	1
D			1	0

En cualquiera de las tres tablas, la relación representada hace satisfacible al conjunto de oraciones dadas.

Ejercicio 19: formalizar e interpretar oraciones en L1 (VIII)

Se pide, justificando las respuestas:

Dada una tabla del apartado anterior, indicar si añadiendo la oración “A ama a B” el conjunto de partida sigue siendo satisfacible. ¿Pasa lo mismo si se añade la oración “A ama a C”?

Lo que tenemos que hacer es comprobar sobre la representación tabular de **la relación que se asocia al predicado**, al añadir la nueva oración se produce o no una contradicción. Si no se produce, sigue siendo satisfacible, en caso contrario tenemos un conjunto insatisfacible.

	FÓRMULA
1	¬P(A, D)
2	P(D, C)
3	P(B, C) ∨ P(B, D)
4	∀y (P(y, B) → P(A, y))
5	∀y (P(y, C) → P(C, y))
6	∀y ¬P(y, y) ≡ ¬∃y P(y, y)
7	**P(A, B)**

v(P(B, C)) = v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0	**1**	1	0
B		0	1	1
C	1	1	0	1
D			1	0

Por 7

v(P(B, C)) = V; v(P(B, D)) = F

R	A	B	C	D
A	0	**1**	1	0
B		0	1	0
C	1	1	0	1
D			1	0

v(P(B, C)) = F; v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0	**1**		0
B		0	0	1
C			0	1
D			1	0

Ejercicio 19: formalizar e interpretar oraciones en L1 (IX)

Se pide, justificando las respuestas:

Dada una tabla del apartado anterior, indicar si añadiendo la oración "A ama a B" el conjunto de partida sigue siendo satisfacible. ¿Pasa lo mismo si se añade la oración "A ama a C"?

Lo que tenemos que hacer es comprobar sobre la representación tabular de **la relación que se asocia al predicado**, al añadir la nueva oración se produce o no una contradicción. Si no se produce, sigue siendo satisfacible, en caso contrario tenemos un conjunto insatisfacible.

	FÓRMULA
1	¬P(A, D)
2	P(D, C)
3	P(B, C) ∨ P(B, D)
4	∀y (P(y, B) → P(A, y))
5	∀y (P(y, C) → P(C, y))
6	∀y ¬P(y, y) ≡ ¬∃y P(y, y)
7	P(A, B)

v(P(B, C)) = v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0/ 1	**1**	1	0
B		0	1	1
C	1	1	0	1
D			1	0

v(P(B, C)) = V; v(P(B, D)) = F

R	A	B	C	D
A	0/ 1	**1**	1	0
B		0	1	0
C	1	1	0	1
D			1	0

v(P(B, C)) = F; v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0/ 1	**1**		0
B		0	0	1
C			0	1
D			1	0

Por 7

Por 4

Ejercicio 19: formalizar e interpretar oraciones en L1 (X)

	FÓRMULA
1	¬P(A, D)
2	P(D, C)
3	P(B, C) ∨ P(B, D)
4	∀y (P(y, B) → P(A, y))
5	∀y (P(y, C) → P(C, y))
6	∀y ¬P(y, y) ≡ ¬∃y P(y, y)
7	**P(A, B)**

Se pide, justificando las respuestas:

Dada una tabla del apartado anterior, indicar si añadiendo la oración "A ama a B" el conjunto de partida sigue siendo satisfacible. ¿Pasa lo mismo si se añade la oración "A ama a C"?

Lo que tenemos que hacer es comprobar sobre la representación tabular de **la relación que se asocia al predicado**, al añadir la nueva oración se produce o no una contradicción. Si no se produce, sigue siendo satisfacible, en caso contrario tenemos un conjunto insatisfacible.

v(P(B, C)) = v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0/ 1	1	1	0
B		0	1	1
C	1	1	0	1
D			1	0

Por 7

Por 4

v(P(B, C)) = V; v(P(B, D)) = F

R	A	B	C	D
A	0/ 1	1	1	0
B		0	1	0
C	1	1	0	1
D			1	0

v(P(B, C)) = F; v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0/ 1	1		0
B		0	0	1
C			0	1
D			1	0

Si añadimos la oración P(A, B), entonces encontramos una contradicción, por tanto, el conjunto se hace insatisfacible

Ejercicio 19: formalizar e interpretar oraciones en L1 (XI)

	FÓRMULA
1	¬P(A, D)
2	P(D, C)
3	P(B, C) ∨ P(B, D)
4	∀y (P(y, B) → P(A, y))
5	∀y (P(y, C) → P(C, y))
6	∀y ¬P(y, y) ≡ ¬∃y P(y, y)
7	**P(A, C)**

Se pide, justificando las respuestas:

Dada una tabla del apartado anterior, indicar si añadiendo la oración "A ama a B" el conjunto de partida sigue siendo satisfacible. ¿Pasa lo mismo si se añade la oración "A ama a C"?

Lo que tenemos que hacer es comprobar sobre la representación tabular de **la relación que se asocia al predicado**, al añadir la nueva oración se produce o no una contradicción. Si no se produce, sigue siendo satisfacible, en caso contrario tenemos un conjunto insatisfacible.

v(P(B, C)) = v(P(B, D)) = V

Por 7

R	A	B	C	D
A	0		1	0
B		0	1	1
C	1	1	0	1
D			1	0

v(P(B, C)) = V; v(P(B, D)) = F

Por 7

R	A	B	C	D
A	0		1	0
B		0	1	0
C	1	1	0	1
D			1	0

v(P(B, C)) = F; v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0		**1**	0
B		0	0	1
C			0	1
D			1	0

Ejercicio 19: formalizar e interpretar oraciones en L1 (y XII)

Se pide, justificando las respuestas:

Dada una tabla del apartado anterior, indicar si añadiendo la oración "A ama a B" el conjunto de partida sigue siendo satisfacible. ¿Pasa lo mismo si se añade la oración "A ama a C"?

Lo que tenemos que hacer es comprobar sobre la representación tabular de **la relación que se asocia al predicado**, al añadir la nueva oración se produce o no una contradicción. Si no se produce, sigue siendo satisfacible, en caso contrario tenemos un conjunto insatisfacible.

	FÓRMULA
1	¬P(A, D)
2	P(D, C)
3	P(B, C) ∨ P(B, D)
4	∀y (P(y, B) → P(A, y))
5	∀y (P(y, C) → P(C, y))
6	∀y ¬P(y, y) ≡ ¬∃y P(y, y)
7	P(A, C)

v(P(B, C)) = v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0		1	0
B		0	1	1
C	1	1	0	1
D			1	0

Por 7

v(P(B, C)) = V; v(P(B, D)) = F

R	A	B	C	D
A	0		1	0
B		0	1	0
C	1	1	0	1
D			1	0

Por 7

Por 5

v(P(B, C)) = F; v(P(B, D)) = V

R	A	B	C	D
A	0		1	0
B		0	0	1
C	1		0	1
D			1	0

Si añadimos la oración P(A, C), entonces no encontramos ninguna contradicción, dado que dicha oración ya estaba en la relación.

Ejercicio 20: Interpretar una f.b.f. en mundos diferentes (I)

Se considera la fórmula: $\forall x\ [P(x) \land Q(x) \rightarrow R(f(x))] \land Q(a)$

Se pide traducir la fórmula siguiendo las siguientes interpretaciones:

	Interpretación 1	Interpretación 2
Dominio	Números naturales	Personas
Constante a	2	Juan
Función f(x)	Cuadrado de x	Madre de x
Predicado P(x)	x es un número impar	X juega al póker
Predicado Q(x)	X > 0	X estudia informática
Predicado R(x)	X es múltiplo de 9	X es terco

Ejercicio 20: Interpretar una f.b.f. en mundos diferentes (II)

Se considera la fórmula: $\forall x\ [P(x) \land Q(x) \rightarrow R(f(x))] \land Q(a)$

Se pide traducir la fórmula siguiendo las siguientes interpretaciones:

	Interpretación 1	Interpretación 2
Dominio	Números naturales	Personas
Constante a	2	Juan
Función f(x)	Cuadrado de x	Madre de x
Predicado P(x)	x es un número impar	X juega al póker
Predicado Q(x)	X > 0	X estudia informática
Predicado R(x)	X es múltiplo de 9	X es terco

INTERPRETACIÓN 1

Todos los números naturales impares y mayores de cero tienen un cuadrado que es múltiplo de 9, y 2 es mayor que cero

Ejercicio 20: Interpretar una f.b.f. en mundos diferentes (y III)

Se considera la fórmula: $\forall x\, [P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(f(x))] \wedge Q(a)$

Se pide traducir la fórmula siguiendo las siguientes interpretaciones:

	Interpretación 1	Interpretación 2
Dominio	Números naturales	Personas
Constante a	2	Juan
Función f(x)	Cuadrado de x	Madre de x
Predicado P(x)	x es un número impar	X juega al póker
Predicado Q(x)	X > 0	X estudia informática
Predicado R(x)	X es múltiplo de 9	X es terco

INTERPRETACIÓN 1

Todos los números naturales impares y mayores de cero tienen un cuadrado que es múltiplo de 9, y 2 es mayor que cero

INTERPRETACIÓN 2

Todas las personas que juegan al póker y estudian informática tienen una madre terca, y Juan estudia informática

Ejercicio 21: Evaluar una f.b.f. en una interpretación dada (I)

Se considera la fórmula: $\delta = \forall x\, \exists y\, [P(x, f(y)) \land Q(a)]$

Se pide determinar el valor de verdad de la fórmula para el siguiente mundo. ¿Qué tipo de oración es?

	Interpretación
Dominio	$\mathcal{D}_M = \{1, 2, 3\}$ Números naturales
Constante a	$a_M = 3$
Función f(y)	$\mathcal{F}_M = \{(1, 2); (2, 3); (3, 1)\}$
Predicado P(x, y)	$\mathcal{P}_M = \{(1, 3); (2, 3)\}$
Predicado Q(x)	$\mathcal{Q}_M = \{2, 3\}$

<u>INTERPRETACIÓN</u>

Nos dan la asociación de los predicados y funciones a las relaciones descritas en la estructura dada de manera extensiva. Por tanto procedemos a plasmar la asignación de valores constantes a las variables, y a asignar los valores de verdad a los predicados instanciados.

Ejercicio 21: Evaluar una f.b.f. en una interpretación dada (y II)

Se considera la fórmula: $\delta = \forall x\ \exists y\ [P(x, f(y)) \wedge Q(a)]$

x	y	f(y)	P(x, f(y))	Q(3)	(1) = P(x, f(y)) ∧ Q(3)	∀x ∃y (1)
1	1	2	F	V	F	**F**
1	2	3	V		V	
1	3	1	F		F	
2	1	2	F		F	
2	2	3	V		V	
2	3	1	F		F	
3	1	2	F		F	
3	2	3	F		F	
3	3	1	F		F	

EVALUACIÓN DE LA FÓRMULA

La evaluación en la interpretación de la estructura dada resulta tener un valor de verdad FALSO. Lo es por que para el valor "x = 3" no se cumple que exista un valor de la variable "y" que haga VERDADERO la expresión. La oración es, por lo tanto, FALSEABLE EN DICHA INTERPRETACIÓN.