Boletín 3

1\. a) Sabemos que $v(\psi) = F$ y que $v(\phi) = V$ para culquier interpretación I. Por lo tanto, teniendo $\phi \vee \phi$ se comprueba que $\models \psi \vee \phi$ a partir de las reglas de equivalencia sobre tautologías. $(F \vee V \equiv V)$

b) " " " " " " "

Por lo tanto, teniendo $\neg\psi \wedge \phi$ se comprueba que $\models \neg\psi \wedge \phi$, ya que $\neg F \wedge V \equiv V \wedge V \equiv V$

c) " " " " " " " "

Por lo tanto, teniendo $\psi \rightarrow \phi$ se comprueba que $\models \psi \rightarrow \phi$, ya que en una implicación si el lado izquierdo tiene un valor de verdad de falso o el de la derecha de verdadero la oración será evaluada como verdadera $(F \rightarrow V \equiv V)$

d) Como hemos mencionado en el caso anterior, si tenemos que si el lado derecho de una implicación es verdadera la oración será evaluada como verdadera. Teniendo que $\models \beta$ y aplicando las reglas de equivalencia sobre tautologías

$\psi \rightarrow (\phi \vee \beta) \equiv \psi \rightarrow V \equiv V$, por lo que se demuestra que

$\models \psi \rightarrow (\phi \vee \beta)$ sii $\models \beta$

e) Aplicando el teorema de la Deducción semántica, si tenemos $\psi \models \phi$ entonces $\models \psi \rightarrow \phi$ también se cumple. La demostración de este apartado ya se encuentra en el apartado c)

f) Se demuestra exactamente igual que el apartado anterior

g) La relación entre equivalencias y razonamientos válidos establece

$$\psi \equiv \phi \overset{\text{si y solo si}}{\Longleftrightarrow} \psi \vDash \phi \text{ y } \phi \vDash \psi$$

h) $\vDash \psi \rightarrow \phi$ sii $\psi \vDash \phi$ es el teorema de la Deducción Semántica. Ya se ha demostrado en el apartado e)

2. DPLL: lo primero es transformar las oraciones a FNC y a su forma clausal, más luego añadirle el negado de la conclusión para poder comprobarlo por refutación

$$q \rightarrow p \equiv \neg q \vee p \Rightarrow \{\{\neg q, p\}\}$$

$$q \Rightarrow \{\{q\}\}$$

$$p \rightarrow (r \wedge t) \equiv \neg p \vee (r \wedge t) \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee t) \Rightarrow \{\{\neg p, r\}, \{\neg p, t\}\}$$

$$\neg(r \vee t) \equiv \neg r \wedge \neg t \Rightarrow \{\{\neg r\}, \{\neg t\}\}$$

$$DPLL(\Omega) = \{\{\neg q, p\}, \{q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg p, t\}, \{\neg r\}, \{\neg t\}\} = false$$

q | R. Prop. Unit

O. eliminada C. cancelada

$$\{\{\cancel{\neg q}, p\}, \{\cancel{q}\}, \{\neg p, r\}, \{\neg p, t\}, \{\neg r\}, \{\neg t\}\}$$

$$\{\{p\}, \{\neg p, r\}, \{\neg p, t\}, \{\neg r\}, \{\neg t\}\}$$

p | R. Prop. Unit

C. cancelada O. eliminada O. eliminada

$$\{\{\cancel{p}\}, \{\cancel{\neg p}, r\}, \{\cancel{\neg p}, t\}, \{\neg r\}, \{\neg t\}\}$$

$$\{\{r\}, \{\neg r\}, \{\neg t\}\}$$

$\neg t$ | R. Prop. Unit

$$\{\{r\}, \{\neg r\}\}$$

R. Ramificación

$\square$ $\square$

Comprobado que $F \cup (\neg \beta)$ es una contradicción.

R. Válido

Resolución por conjunto soporte. Al igual que DPLL, con las premisas en FNC añadiremos al conjunto de premisas el negado de la conclusión y aplicaremos resolventes únicamente sobre este, ya que será nuestro conjunto soporte. Si obtenemos □, habremos demostrado que el razonamiento es válido por refutación.

$F = \{ {}^{1}\,\neg q \vee p \quad {}^{2}\,\cancel{q} \quad {}^{3}\,\cancel{\neg p \vee r}\ \text{Subs}(11) \quad {}^{4}\,\neg p \vee t\ \text{Subs}(11) \quad {}^{5}\,\cancel{\neg r}\ \text{Subs}(9) \quad {}^{6}\,\cancel{\neg t}\ \text{Subs}(8) \quad {}^{7}\,\neg r \vee \neg t \}$

ERROR al copiar: Conj. Soporte es ¬r y ¬t mismo resultado

8 $R_r = \cancel{\neg p \vee \neg t}$ Subs(11)

9 $R_t = \cancel{\neg p \vee \neg r}$ Subs(11)

10 $R_p = \cancel{\neg t \vee q}$ Subs(13)

11 $R_r = \neg p$

12 $R_t = \cancel{\neg p}$ Subs(11)

13 $R_r = \cancel{\neg t}$ Subs(6)

$R_p = \neg q$

$R_q = \square$

Hemos obtenido que $F^* = \square$, por lo que es insatisfacible.
Como F y F* son iguales en términos de in/satisfacibilidad, el conjunto inicial es insatisfacible y con ello se demuestra a su vez que el razonamiento es válido por refutación

Resolución por Notación Fitting. Al igual que el método anterior, buscamos □ para demostrar que es un R. Válido

1	$\neg q \vee p$	
2	q	
3	$\cancel{\neg p \vee r}$	Subs(8)
4	$\neg p \vee t$	Subs(8)
5	$\neg r$	
6	$\neg t$	
7	$\neg r \vee \neg t$	
8	$\neg p$	$R_r(7,3)$
9	$\neg q$	$R_p(1,8)$
10	□	$R_q(2,9)$

R. Válido

Tableaux semántico: añadiremos el negado de la conclusión a las premisas y buscaremos obtener un tableaux completo y cerrado para así demostrar por refutación que es R. Válido

$\xi = \{\underline{\neg q \vee p}, q, \neg p \vee r, \neg p \vee t, \neg r, \neg t\}$

R. Válido

Tableaux completo y cerrado

$\beta : \vee$

$\underline{\neg q}, \underline{q}, \neg p \vee r, \neg p \vee t, \neg r, \neg t$ — X

$p, q, \underline{\neg p \vee r}, \neg p \vee t, \neg r, \neg t$

$\beta : \vee$

$\underline{p}, q, \underline{\neg p}, \neg p \vee t, \neg t$ — X *

$p, q, \underline{r}, \neg p \vee t, \underline{\neg r}, \neg t$ — X *

* Todos los nodos descendientes serán cerrados ya que hay un literal y su negado

3 Basándonos en los teoremas de razonamiento, como la deducción semántica, sabemos que si $F' \models \beta$, entonces $F' \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible. Basándonos en este resultado, podemos comprobar que si $F' \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible entonces el razonamiento será válido. Este método está basado en refutación o reducción al absurdo y consiste en incluir el negado de la conclusión en el conjunto de oraciones inicial para estudiar si es un razonamiento válido.

DPLL

$$p \Rightarrow \{\{p\}\}$$

$$p \to (q \wedge p) \to (p \wedge q) \equiv (\neg p \vee (q \wedge p)) \to (p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee (q \wedge p)) \vee (p \wedge q) \equiv$$

$$\equiv (p \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee (p \wedge q) \equiv \underline{((p \wedge q) \vee p)} \wedge ((p \wedge q) \vee (\neg q \vee \neg p)) \equiv$$

$$\equiv \underline{p} \wedge ((p \wedge (\neg p \vee q)) \vee (q \wedge (\neg q \vee \neg p))) \equiv p \wedge ((\overset{F}{\cancel{p \wedge \neg p}}) \vee (p \wedge q) \vee (\overset{F}{\cancel{q \wedge \neg q}}) \vee (q \wedge \neg p))$$

$$\equiv p \wedge \underline{((p \wedge q) \vee (q \wedge \neg p))} \equiv \underline{p \wedge q} \Rightarrow \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \Rightarrow \{\{\neg p, \neg q\}\}$$

$$DPLL(\Omega) = \{\cancel{\{p\}}, \{\cancel{\neg p}, \neg q\}\}$$

p | R. Prop. Unit

$\{\cancel{\{\neg q\}}\}$

$\neg q$ | R. Prop. Unit

$\emptyset$

ERROR en la conversión a FNC

Scanned by CamScanner

6.

a) $p \wedge q \vdash q \wedge p$

1	$p \wedge q$	premisa
2	p	$E_\wedge$, 1
3	q	$E_\wedge$, 1
4	$q \wedge p$	$I_\wedge$, 2, 3

b) $p \vee q \vdash q \vee p$

1	$p \vee q$	premisa
2	p	hipótesis
3	$q \vee p$	$I_\vee$, 2
4	q	hipótesis
5	$q \vee p$	$I_\vee$, 4
6	$q \vee p$	$E_\vee$, 1, 2-3, 4-5

c) $p \wedge (q \wedge r) \vdash (p \wedge q) \wedge r$

1	$p \wedge (q \wedge r)$	premisa
2	p	$E_\wedge$, 1
3	$q \wedge r$	$E_\wedge$, 1
4	q	$E_\wedge$, 3
5	r	$E_\wedge$, 3
6	$p \wedge q$	$I_\wedge$, 2, 4
7	$(p \wedge q) \wedge r$	$I_\wedge$, 6, 5

d) $p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$

1	$p \to (q \to r)$	premisa
2	$p \wedge q$	hipótesis
3	p	$E_\wedge$, 2
4	q	$E_\wedge$, 2
5	$q \to r$	$E_\to$, 1, 3
6	r	$E_\to$, 5, 4
7	$(p \wedge q) \to r$	

e) $q \to p,\ \neg\neg q,\ p \to (r \wedge t) \vdash r \vee t$

1	$q \to p$	premisa
2	$\neg\neg q$	premisa
3	$p \to (r \wedge t)$	premisa
4	q	$E_{\neg\neg}$, 2
5	p	$E_\to$, 1, 4
6	$r \wedge t$	$E_\to$, 3, 5
7	r	$E_\wedge$, 6
8	$r \vee t$	$I_\vee$, 7

f) $p \to (q \to r),\ p,\ \neg r \vdash \neg q$

1	$p \to (q \to r)$	premisa
2	p	premisa
3	$\neg r$	premisa
4	$q \to r$	$E_\to$, 1, 2
5	q	hipótesis
6	r	$E_\to$, 4, 5
7	$\neg r$	IT, 3
8	$r \wedge \neg r$	$I_\wedge$, 6, 7
9	$\neg q$	$I_\neg$, 5-8

g) $p \to r,\ q \to r \vdash (p \vee q) \to r$

1	$p \to r$	premisa
2	$q \to r$	premisa
3	$p \vee q$	hipótesis
4	p	hipótesis
5	r	$E_{\to}$, 1, 4
6	q	hipótesis
7	r	$E_{\to}$, 2, 6
8	r	$E_{\vee}$, 3, 4-5, 6-7
9	$(p \vee q) \to r$	$I_{\to}$, 3-8