

Boletín 2

Satisfacibilidad

2.1. Técnicas de Satisfacibilidad

Ejercicio 23.

Demuestre los siguientes resultados:

1. Si α y β son expresiones tales que sus conjuntos clausales son iguales, entonces no es necesariamente cierto que $\alpha = \beta$.
2. Si α y β son dos expresiones en forma normal conjuntiva que definen los mismos conjuntos clausales, entonces α y β son lógicamente equivalentes.

Ejercicio 24.

Justifique los siguientes enunciados:

1. La cláusula vacía es insatisfacible.
2. El conjunto vacío de cláusulas es una tautología.
3. El conjunto vacío de cláusulas es satisfacible.
4. Una resolvente con cláusula trivial no aporta nada al razonamiento
5. En un árbol de resolución, dado cualquier nodo que no sea hoja, si la oración de dicho nodo es satisfacible, entonces se puede garantizar que las cláusulas del conjunto inicial (de partida) también lo son.
6. Al aplicar la técnica de DPLL, la expresión derivada que se obtiene tras aplicar una regla es una expresión equivalente a la expresión previa.
7. Al aplicar la regla de resolución se obtiene una resolvente que es satisfacible si las cláusulas padres lo son.
8. Al aplicar la técnica de Árboles Semánticos podemos asegurar que obtendremos todos los modelos de una expresión satisfacible.

Ejercicio 25.

Sobre resolución, indica si es cierta o falsa cada una de las siguientes afirmaciones, justificando claramente la respuesta:

1. Si el conjunto de cláusulas es satisfacible, la resolvente lo es.
2. Si una cláusula es satisfacible, y otra cláusula es satisfacible, la resolvente lo es.
3. Si un conjunto de más de dos cláusulas es insatisfacible, se pueden obtener resolventes satisfacibles.
4. Si un conjunto de más de dos cláusulas es satisfactible, se pueden obtener la cláusula vacía.

En todos los casos se asume que se puede aplicar la regla de resolución.

Ejercicio 26.

Demuestre los siguientes resultados:

1. Si α y β son expresiones tales que sus conjuntos clausales son iguales, entonces no es necesariamente cierto que $\alpha = \beta$.
2. Si α y β son dos expresiones en forma normal conjuntiva que definen los mismos conjuntos clausales, entonces α y β son lógicamente equivalentes ($\alpha \equiv \beta$).

Ojo: Observe la diferencia entre '=' (sintaxis) y ' \equiv ' (semántica).

Ejercicio 27.

¿Por qué en el algoritmo DPLL los nodos que generan una sola rama no requieren de backtracking? Razona la respuesta.

Ejercicio 28.

Sobre Tableaux Semánticos, indica si es cierta o falsa cada una de las siguientes afirmaciones, justificando claramente la respuesta:

1. Una rama que finaliza en un nodo cerrado significa que hemos encontrado una contradicción.
2. Si en un nodo del Tableaux Semántico aparece una expresión (literal o no) y su negada, no es necesario seguir expandiendo el nodo.
3. Para demostrar un razonamiento válido mediante Tableaux Semántico hemos de ver si todos sus nodos están abiertos.
4. Al aplicar la técnica de Tableaux Semánticos podemos estar seguros de haber encontrado todos los modelos de una oración satisfacible.

2.2. Aplicación de Técnicas de Satisfacibilidad

Ejercicio 29.

Para cada una de las fórmulas siguientes, obtenga una fórmula equivalente en forma normal conjuntiva y su forma normal disyuntiva. Determine a partir de las formas normales si las fórmulas de partida son una tautología o una contradicción.

1. $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$
3. $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow p))$
4. $\neg[(\neg p \vee (\neg q \wedge r)) \rightarrow (r \vee \neg q)]$

Ejercicio 30.

Para cada una de las formulas siguientes, aplica la técnica de Arboles Semánticos y comprueba si alguna de ellas es insatisfacible

1. $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
2. $(\neg p \vee \neg q \rightarrow p \wedge r) \wedge (s \vee t)$
3. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$
4. $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow p))$

Ejercicio 31.

Para cada una de las fórmulas siguientes aplica las técnicas DPLL y Resolución para comprobar su satisfacibilidad.

1. $p \rightarrow (q \wedge r) \rightarrow r$
2. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$
3. $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
4. $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

5. $\neg p \rightarrow (q \wedge (p \rightarrow \neg q))$
6. $(\neg p \vee \neg q \rightarrow p \wedge r) \wedge (s \vee t)$

Ejercicio 32.

Para cada una de las fórmulas siguientes aplica la técnica Tableaux Semánticos para comprobar su satisfacibilidad.

1. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$
2. $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \vee q)$
3. $\neg p \rightarrow (q \wedge (p \vee \neg q))$
4. $(\neg p \vee \neg q \rightarrow p \wedge r) \wedge (s \vee t)$
5. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \vee (p \wedge q \rightarrow r)$
6. $(\neg(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)) \vee \neg p \rightarrow ((r \wedge s) \rightarrow p)$

Ejercicio 33.

Para cada uno de los conjuntos de oraciones siguientes responde a las preguntas: ¿Es el conjunto satisfacible? ¿Qué planteamiento harás para responder a la pregunta anterior? Para responder aplica tanto la técnica de Tableaux Semánticos como la técnica de Árboles Semánticos.

1. $\{p \rightarrow q; (p \wedge q) \rightarrow \neg p\}$
2. $\{p \vee q; q \vee \neg r \vee s; \neg p \vee \neg q; \neg p \vee \neg r \vee \neg s; p\}$
3. $\{p \rightarrow (q \vee r); (p \wedge q) \vee r; r \rightarrow (r \vee p)\}$
4. $\{p \vee q; \neg r \vee s; \neg u \vee \neg t \vee \neg q; \neg t \vee u; t \vee w; \neg p \vee t \vee \neg w\}$

De ser satisfacible alguno de los conjuntos de oraciones, con cuál de las técnicas aplicadas puedes indicar un modelo. ¿Por qué?

Ejercicio 34.

En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C. El viajero ha obtenido la siguiente información la cual nos dice:

1. “B y C son veraces si y solo si C es veraz”
2. “Si A y B son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso”
3. “B es mentiroso si y solo si A o B es veraz”

Determinar a qué tribu pertenecen los isleños A, B y C. Utiliza las tablas de verdad, DPLL y árbol semántico. También, haz un planteamiento de Refutación y aplica la técnica de Tableaux Semánticos para probarlo.

Nota: En general, ser mentiroso no es el negado de ser veraz. El negado de ser veraz es no-ser veraz. Pero en la isla sí se cumple porque solo hay dos tribus.

Ejercicio 35.

Tres estudiantes A, B y C son acusados de introducir un virus en las salas de ordenadores de la Facultad de Informática. Durante el interrogatorio, el responsable de las salas obtiene la siguiente información:

- “B lo hizo y C es inocente”.
- “Si A es culpable entonces C también lo es”.
- “Yo no lo hice, lo hizo al menos uno de los otros”.

Se pregunta:

1. ¿Son las tres declaraciones contradictorias? Utiliza DPLL y Tableaux Semánticos para probarlo.
2. Asumiendo que todos son culpables, ¿qué declaraciones son falsas?
3. Asumiendo que nadie mintió, ¿quién es inocente y quién es culpable?

