**_EJERCICIOS DE CÁLCULO_** **_CURSO 2019-20_**
**_HOJA 2 (INTEGRALES)_**

1. Calcula las sumas superior e inferior de $f(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$ con $n = 5$.

2. Calcula las sumas superior e inferior de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$ con $n = 6$.

3. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que:

   (i) Si $f$ es *creciente* en el intervalo $[a, b]$, entonces
   $$S_n(f) - I_n(f) = \big(f(b) - f(a)\big) \cdot \frac{(b-a)}{n}$$

   (ii) Si $f$ es *decreciente* en el intervalo $[a, b]$, entonces
   $$S_n(f) - I_n(f) = \big(f(a) - f(b)\big) \cdot \frac{(b-a)}{n}$$

4. Calcula las primitivas siguientes por cambio de variable:

$$\text{(a)} \int (\operatorname{sen} x)^5 \cos x \, dx \qquad \text{(b)} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} \, dx \qquad \text{(c)} \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$$

$$\text{(d)} \int x^3 e^{2x^4+1} \, dx \qquad \text{(e)} \int \frac{x}{(1+x^2)^3} \, dx \qquad \text{(f)} \int \sqrt{2x+1} \, dx$$

$$\text{(g)} \int x^2 \cos(x^3+1) \, dx \qquad \text{(h)} \int (\cos x)^3 \operatorname{sen} x \, dx$$

5. Calcula las primitivas siguientes mediante el método de integración por partes:

$$\text{(a)} \int \log x \, dx \qquad \text{(b)} \int x \log x \, dx \qquad \text{(c)} \int x^2 e^x \, dx$$

$$\text{(d)} \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \qquad \text{(e)} \int x e^{-x} \, dx \qquad \text{(f)} \int x^3 \cos(x^2) \, dx$$

$$\text{(g)} \int e^{2x} \cos(3x) \, dx \qquad \text{(h)} \int x(x+1)^{10} \, dx \qquad \text{(i)} \int \sqrt{x} \, \log x \, dx$$

6. Calcula las siguientes integrales:

$$\textit{(a)} \int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x \; dx \qquad \textit{(b)} \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} \; dx \qquad \textit{(c)} \int_0^{1/2} (1-x)^7 \; dx$$

$$\textit{(d)} \int_e^{3e} \frac{\log(3x)}{x} \; dx \qquad \textit{(e)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+(\operatorname{sen} x)^2} \; dx \qquad \textit{(f)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \operatorname{sen} x \, dx$$

7. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_0^{\pi} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx \qquad \text{(b)} \int_2^{2e} x^2 \log\left(\frac{x}{2}\right) dx \qquad \text{(c)} \int_0^{\log 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\, dx$$

$$\text{(d)} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(3x)\, dx \qquad \text{(e)} \int_0^{1} \frac{x^2}{1+x^6}\, dx \qquad \text{(f)} \int_1^{2e} x \log(x^2)\, dx$$

8. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_1^{e} \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x}\, dx \qquad \text{(b)} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{e^{2\cos x}}\, dx \qquad \text{(c)} \int_1^{e} x(\log x)^2\, dx$$

$$\text{(d)} \int_0^{1} \sqrt{x^4+2x^2}\, dx \qquad \text{(e)} \int_{-\pi}^{0} x^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx \qquad \text{(f)} \int_0^{\log 3} \frac{e^x}{(2+e^x)^3}\, dx$$

9. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_1^{e} \frac{1}{x(2+\log x)^4}\, dx \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi} e^{-2x} \cos x \, dx$$

10. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_1^{e^2} x \log x \, dx \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi} (1+x^2) \cos x \, dx \qquad \text{(c)} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\alpha} \cos x \, dx \quad (\text{con } \alpha > 0)$$

11. Calcula el área del recinto plano limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x$ y la recta $y = 2$.

12. Calcula el área de la región plana comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ y la recta $y = 2x$.

13. Calcula el área del recinto plano limitado por la gráfica de la función $f(x) = \log x$ y las rectas $y = 1$ y $x = 1$.

14. Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = 5 - x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{4}{x^2}$$

15. Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ y la recta $y = 2x$.

16. Calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 1 + \frac{x}{3} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x+1}$$

17. Calcula el área de la región del primer cuadrante del plano que está encerrada entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{2}{x} \qquad g(x) = x - 1 \qquad h(x) = x^2 + 1$$

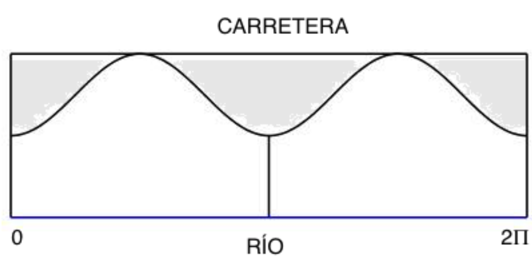
18. Calcula el área de la región del plano situada en el primer cuadrante y limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x-1}{8x}$$

19. Calcula el área de la región del plano situada en el primer cuadrante y limitada por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, la recta tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 0$ y la recta $x = 2$.

20. Calcula el área del recinto plano limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x$ y su tangente en el punto de abscisa $x = -1$.

21. Se desea construir un puente de $2\pi$ metros de largo con dos arcos y tres pilares. Suponiendo que la sección de cada arco está definida por la curva $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, determina la longitud de los pilares para que la superficie del ojo del puente (pilares + arco) sea de $50\,m^2$. (Nota: los pilares se consideran sin grosor.)




22. Demuestra que la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^{3x}}\,dx$ converge y calcula su valor.

23. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcula su valor en el caso de que sean convergentes:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^{1/2}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x}{x^2-x-2}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{4+x^2}\,dx$

24. Calcula las siguientes integrales impropias:

$$\text{(a)} \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx \qquad \text{(b)} \int_0^\infty e^{-3x}\operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{(c)} \int_0^\infty \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^{3/2}}\,dx$$

$$\text{(d)} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx \qquad \text{(e)} \int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx \qquad \text{(f)} \int_0^\infty (x+1)e^{-x}\,dx$$

25. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcula su valor en el caso de que sean convergentes:

$$\text{(a)} \quad \int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int_{-\infty}^0 x^2 e^{3x}\,dx \qquad \text{(c)} \quad \int_e^\infty \frac{\log x}{x}\,dx$$

$$\text{(d)} \quad \int_0^\infty e^{2x}(x+1)\,dx \qquad \text{(e)} \quad \int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^3}\,dx \qquad \text{(f)} \quad \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^7+2}}{7x^4+3x^3+x+4}\,dx$$

$$\text{(g)} \quad \int_2^\infty \frac{x}{x^2-x-2}\,dx \qquad \text{(h)} \quad \int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$$

26. Determina si las integrales impropias siguientes convergen y, en caso afirmativo, calcula su valor:

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x}}{\log x + (x+\sqrt{x})^2}\,dx \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-5|x|}\,dx$$

27. Determina para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{e^{\alpha x}}\,dx$$

converge. Calcula el valor de dicha integral impropia en los casos en que sea convergente.

28. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$ y $\beta > 1$. Demuestra que la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{\beta^x}\,dx$$

converge.

29. Sea $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Demuestra que la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{e^x}\,dx$$

converge y calcula su valor.

30. Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $0 \le xf(x) \le 1$ para todo $x \ge 1$. Utiliza el Criterio de Comparación para demostrar que la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty (f(x))^q\,dx$ converge para todo $q > 1$.

31. Demuestra que la región del plano situada a la derecha del eje $OY$, comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = x\, e^{-x^3}$ y el eje $OX$, tiene área finita.

32. Demuestra que la región del plano situada a la derecha del eje $OY$, comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = x^5\, e^{-x^2}$ y el eje $OX$, tiene área finita.

33. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha.$$

Determina el valor de $\alpha$ sabiendo que $\text{Trapecio}_2(f) = 2$ y $\text{Trapecio}_4(f) = \dfrac{7}{4}$.

34. Al aplicar el método del trapecio con 2 subintervalos para aproximar la integral

$$\int_0^2 f(x)\, dx$$

de una función continua $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, obtenemos el valor $\text{Trapecio}_2(f) = 2$. Si por el contrario aplicamos el método de Simpson con una parábola, obtenemos el valor $\text{Simpson}_1(f) = 4$. ¿Cuánto vale $f(1)$?

## Para resolver con *SAGE*

35. Sea $P(x)$ el polinomio interpolador de Lagrange de la función $f(x) = \cos(x)$ en los nodos

$$p_k = \frac{k}{5} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 5)$$

(a) Calcula una cota superior teórica para el error $|f(x) - P(x)|$ en el intervalo $[0,1]$.

(b) Calcula $P(x)$ y represéntalo gráficamente junto con $f(x)$ en el intervalo $[0,1]$.

(c) Representa gráficamente la "función error" $|f(x) - P(x)|$ en el intervalo $[0,1]$, comprobando que es menor que la cota obtenida en el apartado (a).

36. Sea $P(x)$ el polinomio interpolador de Lagrange de la función $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$ en los nodos

$$p_k = 1 + k \cdot \frac{2}{7} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 7)$$

(a) Calcula una cota superior teórica para el error $|f(x) - P(x)|$ en el intervalo $[1,3]$.

(b) Calcula $P(x)$ y represéntalo gráficamente junto con $f(x)$ en el intervalo $[1,3]$.

(c) Representa gráficamente la "función error" $|f(x) - P(x)|$ en el intervalo $[1,3]$, comprobando que es menor que la cota obtenida en el apartado (a).

37. Sea $P(x)$ el polinomio interpolador de Lagrange de la función $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+x^2}$ en los nodos

$$p_k = \frac{k}{5} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 5)$$

(a) Calcula una cota superior teórica para el error $|f(x) - P(x)|$ en el intervalo $[0, 1]$.

(b) Calcula $P(x)$ y represéntalo gráficamente junto con $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

(c) Representa gráficamente la "función error" $|f(x) - P(x)|$ en el intervalo $[0, 1]$, comprobando que es menor que la cota obtenida en el apartado (a).

38. Se quiere aproximar la función $f(x) = \sin(x/2)$ en el intervalo $[0, 2]$ mediante un polinomio interpolador de Lagrange en nodos equiespaciados, con error absoluto menor que 0.1.

    (a) Calcula un tal polinomio.

    (b) Llamando $P(x)$ al polinomio calculado en el apartado anterior, representa gráficamente $f(x)$, $P(x)$ y la "función error" $|f(x) - P(x)|$ en el intervalo $[0, 2]$.

39. Se quiere aproximar la función $f(x) = e^{-2x}$ en el intervalo $[0, 1]$ mediante un polinomio interpolador de Lagrange en nodos equiespaciados, con error absoluto menor que 0.1.

    (a) Calcula un tal polinomio.

    (b) Llamando $P(x)$ al polinomio calculado en el apartado anterior, representa gráficamente $f(x)$, $P(x)$ y la "función error" $|f(x) - P(x)|$ en el intervalo $[0, 1]$.

40. Sea $\ell(x)$ la función interpoladora lineal a trozos de la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + 3x^4}$ en los nodos

$$p_k = \cos\left(\left(1 - \frac{k}{12}\right) \cdot \pi\right) \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots, 12.$$

    (a) Calcula una cota superior teórica del error absoluto $|f(x) - \ell(x)|$ para cualquier $x \in [-1, 1]$.

    (b) Utiliza la función $\ell(x)$ para calcular una aproximación de $f(0.8)$ y comprueba que el error real de dicha aproximación es menor que la cota obtenida en el apartado (a).

41. Sea $\ell(x)$ la función interpoladora lineal a trozos de la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2x^2}$ en los nodos

$$p_k = \cos\left(\left(1 - \frac{k}{10}\right) \cdot \pi\right) \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots, 10.$$

    (a) Calcula una cota superior teórica del error absoluto $|f(x) - \ell(x)|$ para cualquier $x \in [-1, 1]$.

    (b) Utiliza la función $\ell(x)$ para calcular una aproximación de $f(-0.2)$ y comprueba que el error real de dicha aproximación es menor que la cota obtenida en el apartado (a).

42. Se desea aproximar la función $f(x) = 2^{x^2+x}$ en el intervalo $[-1, 1]$ mediante la función interpoladora lineal a trozos $\ell_n(x)$ en $n + 1$ nodos equiespaciados

$$-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1.$$

    (a) ¿Qué valor de $n$ garantiza que $|f(x) - \ell_n(x)| < 0.01$ para todo $x \in [-1, 1]$?

    (b) Para dicho valor de $n$, utiliza la función $\ell_n(x)$ para calcular una aproximación de $f(-0.3)$ y comprueba que el error real de dicha aproximación es menor que 0.01.

43. Se desea aproximar la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $[-2, 2]$ mediante la función interpoladora lineal a trozos $\ell_n(x)$ en $n+1$ nodos equiespaciados

$$-2 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2.$$

(a) ¿Qué valor de $n$ garantiza que $|f(x) - \ell_n(x)| < 0.01$ para todo $x \in [-2, 2]$?

(b) Para dicho valor de $n$, utiliza la función $\ell_n(x)$ para calcular una aproximación de $f(0.25)$ y comprueba que el error real de dicha aproximación es menor que 0.01.

44. Se desea aproximar la función $f(x) = x \log(x-1)$ en el intervalo $[1.4, 3]$ mediante la función interpoladora lineal a trozos $\ell_n(x)$ en $n+1$ nodos equiespaciados

$$p_0 = 1.4 < p_1 < \ldots < p_n = 3.$$

(a) ¿Qué valor de $n$ garantiza que $|f(x) - \ell_n(x)| < 10^{-3}$ para todo $x \in [1.4, 3]$?

(b) Para dicho valor de $n$, utiliza la función $\ell_n(x)$ para calcular una aproximación de $f(1.7)$ y comprueba que el error real de dicha aproximación es menor que $10^{-3}$.

45. Se considera la integral

$$\int_2^4 \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

(a) Calcula la aproximación de dicha integral mediante el método del trapecio con $n = 20$ subintervalos.

(b) Da una cota superior teórica del error absoluto de la aproximación obtenida en (a).

46. Se considera la integral

$$\int_1^3 \frac{\cos(x)}{x}\, dx$$

(a) Calcula la aproximación de dicha integral mediante el método del trapecio con $n = 25$ subintervalos.

(b) Da una cota superior teórica del error absoluto de la aproximación obtenida en (a).

47. Calcula una aproximación de la integral

$$\int_0^1 \sqrt{3 + \cos(x^3)}\, dx$$

mediante el método del trapecio con error absoluto menor que $10^{-3}$.

48. Calcula una aproximación de la integral

$$\int_{-2}^0 \sqrt{3 + \sin(x^2) + \cos(x^2)}\, dx$$

mediante el método del trapecio con error absoluto menor que $10^{-3}$.

49. Se considera la integral

$$\int_{-2}^{1} e^{-x^2}\,dx$$

(a) Calcula la aproximación de dicha integral mediante el método de Simpson con $n = 10$ parábolas.

(b) Da una cota superior teórica del error absoluto de la aproximación obtenida en (a).

50. Se considera la integral

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{xe^{x^2}}\,dx$$

(a) Calcula la aproximación de dicha integral mediante el método de Simpson con $n = 15$ parábolas.

(b) Da una cota superior teórica del error absoluto de la aproximación obtenida en (a).

51. Calcula una aproximación de la integral

$$\int_{-3}^{-1} \sqrt{2+\cos(x^2)}\,dx$$

mediante el método de Simpson con error absoluto menor que $10^{-3}$.

52. Calcula una aproximación de la integral

$$\int_{0}^{3} \sqrt{2-\sin(x^2)}\,dx$$

mediante el método de Simpson con error absoluto menor que $10^{-4}$.

53. Calcula aproximaciones de la integral

$$\int_{0}^{1.5} \sqrt{2+\sin(x^2)}\,dx$$

mediante los métodos del trapecio y Simpson, con error absoluto menor que $10^{-4}$, comparando el número de evaluaciones de la función utilizadas en cada caso.

54. Calcula aproximaciones de la integral

$$\int_{-1.5}^{0.5} \sqrt{3-\cos(x^3)}\,dx$$

mediante los métodos del trapecio y Simpson, con error absoluto menor que $10^{-4}$, comparando el número de evaluaciones de la función utilizadas en cada caso.