FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA INFORMÁTICA

Formalización, Interpretación y Evaluación en Lógica de Predicados

PRIMER CURSO DEL GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

PRIMER CUATRIMESTRE

2020-21

Índice del documento

- Las Relaciones entre Conjuntos
- Las Funciones
- La Sintaxis de la Lógica de Predicados (L1)
- Formalización en L1
- Interpretación y Evaluación en L1

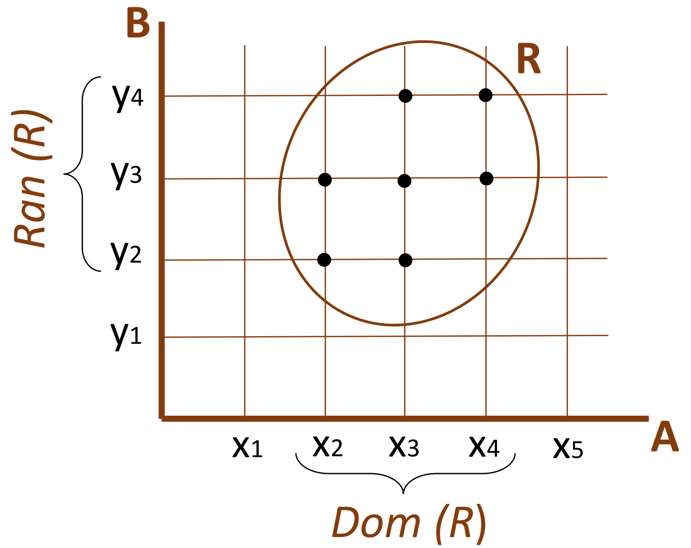
Las Relaciones entre Conjuntos (I)

- Las Relaciones entre Conjuntos:
  - Dados dos conjuntos **A** y **B** se dice que **R** es **una relación binaria** entre ellos si **R** $\subseteq$ **A x B**. Este conjunto se denomina **Producto Cartesiano** de los conjunto **A** y **B**, es un conjunto formado por elementos (x, y) que son todos los pares posibles de elementos, siendo x ∈ A e y ∈ B. La Relación **R** entre **A** y **B** se define como un subconjunto del conjunto Producto Cartesiano **A x B**.
  - Si un elemento $\mathbf{x_1}$ del conjunto **A** está relacionado con un elemento $\mathbf{y_1}$ del conjunto **B**, entonces $(x_1, y_1) \in R$. También se representa por $x_1 \, R \, y_1$, o bien $\mathbf{R(x_1, y_1)}$. Si estos dos elementos no están relacionados mediante la relación **R**, entonces $(x_1, y_1) \notin R$, es decir, $x_1 \not{R} \, y_1$, o bien $\neg\mathbf{R(x_1, y_1)}$.
  - Dada una relación, se define **su relación inversa**, R^{-1}, como **{** (y, x) ∈ B x A | (x, y) ∈ R **}**. Es decir, $y \, R^{-1} x \iff x \, R \, y$

ALGUNAS DEFINICIONES EN RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Dada una relación binaria **R** entre el conjunto **A** y el conjunto **B**, se define:

- El dominio de la relación: **Dom(R)** = **{** x | x ∈ A, R(x, y) para algún y ∈ B**}**.
- El rango de la relación: **Ran(R)** = **{** y | y ∈ B, R(x, y) para algún x ∈ A**}**.
- El campo de la relación: **Campo(R)** = Dom (R) ∪ Ran (R).



REPRESENTACIÓN TABULAR DE RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Dada una relación binaria **R** entre el conjunto **A** y el conjunto **B**, definida en el ejemplo anterior, podemos representarla en diferentes formas:

- El dominio de la relación: Dom(R) = **{**x_2, x_3, x_4**}**.
- El rango de la relación: Ran(R) = **{**y_2, y_3, y_4**}**.
- R = **{**(x_2, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_2), (x_3, y_3), (x_3, y_4), (x_4, y_3), (x_4, y_4)**}**

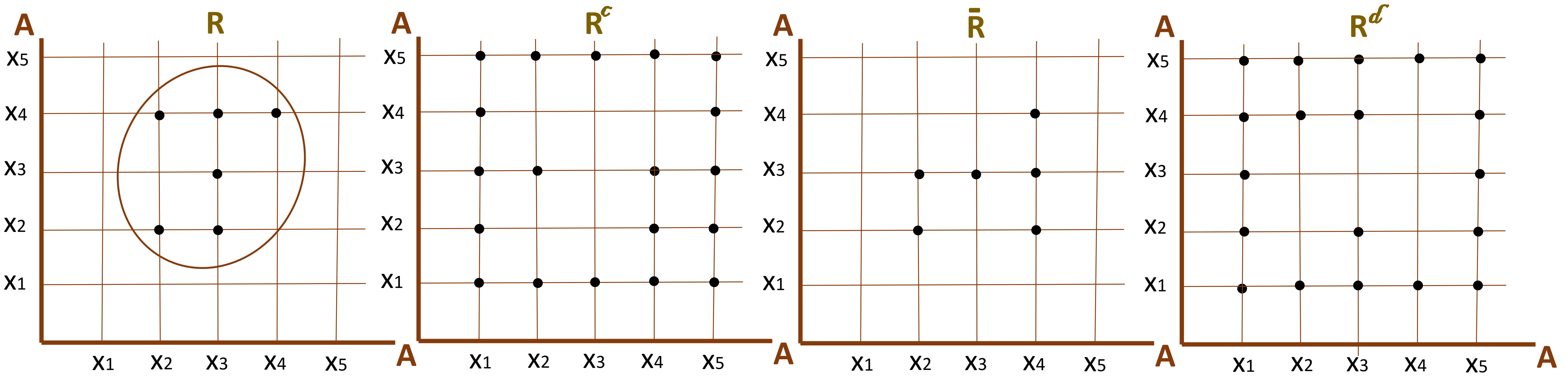
Podemos representar la Relación R, es decir, los elementos de pares que contiene el conjunto que denota la relación entre el conjunto A y el conjunto B, de forma TABULAR, tal como queda en la tabla:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0	1	1	0
x_3	0	1	1	1
x_4	0	0	1	1
x_5	0	0	0	0

Las Relaciones entre Conjuntos (II)

- Relaciones de un conjunto en sí mismo:
  - Si la Relación **R** se establece de un conjunto en sí mismo, se dice que **R** $\subseteq$ **A x A** = A^2 es una relación **sobre A**.
  - Dada una relación R $\subseteq$ A x A, se definen:
    - ❖ Relación complementaria R^c: siendo a,b $\in$ A, definimos que: a R^c b si se cumple que a $\not R$ b.
    - ❖ Relación simétrica $\bar{R}$: para cualesquiera a,b $\in$ A, definimos que: a $\bar{R}$ b, si se cumple que b R a.
    - ❖ Relación dual R^d: para cualesquiera a,b $\in$ A, definimos que: a R^d b, si se cumple que b $\not R$ a.
  - Las Relaciones sobre A pueden cumplir con ciertas propiedades como la reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o euclídea. En las **páginas 39-45 del documento 06-Predicados-B** que tienen en RECURSOS pueden leer las consideraciones teóricas sobre este tema.

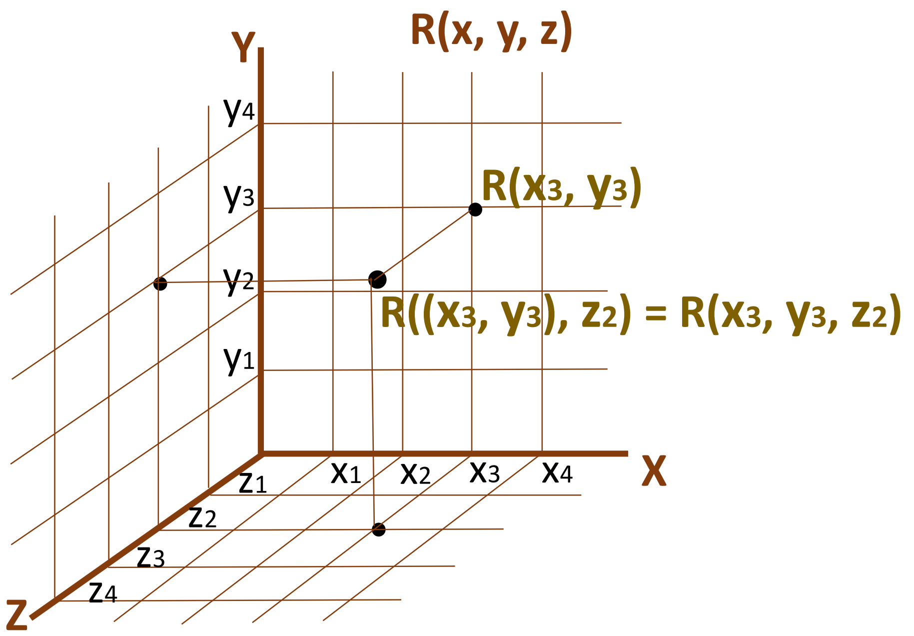
LAS RELACIONES COMPLEMENTARIA, SIMÉTRICA Y DUAL DE UNA RELACIÓN DADA SOBRE A



Las Relaciones entre Conjuntos (III)

- Dada una familia de conjuntos $\mathcal{F} = \{ A_1, A_2, A_3, \ldots., A_n \}$, se define una relación R entre dichos conjuntos, cuyos elementos son las tuplas ordenadas $(z_{1i}, z_{2i}, z_{3i}, \ldots., z_{ni})$, tal que la relación R es: $R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots., \times A_n$, y los correspondientes: $z_{ni} \in A_n$.
- Se dice, entonces, que la relación R es n-aria, o que la tupla ordenada cumple con la relación: $R(z_{1i}, z_{2i}, z_{3i}, \ldots., z_{ni})$. Como ejemplo de relación de orden superior a la binaria, tenemos la del ejemplo del cuadro. Fijamos la atención en que la relación 3-aria se forma a partir de la aplicación sucesiva de binarias.

RELACIÓN 3-ARIA EN EL ESPACIO EUCLIDEO CARTESIANO: X x Y x Z



Las Relaciones entre Conjuntos (y IV)

LAS FUNCIONES (ver páginas 12-14 de 06-Predicados-B)

- Tengamos la relación R en la familia de conjuntos: {Cursos, Asignaturas, Alumnos, Convocatorias, Calificaciones} de una determinada Facultad. La relación estará formada por las quíntuplas ordenadas en las que cada uno de sus elementos es de uno de los conjuntos dados, por ejemplo: (Primero, FLI, María, 2ª, 8).
- Para llegar ahí, en primer lugar formaríamos los pares (curso, asignaturas) que representa el cuadro de asignaturas de un determinado curso, por ejemplo (Primero, FLI). Con este Dominio inicial, componemos la relación con los elementos del siguiente conjunto, Alumnos, y obtenemos la relación que representa el listado de los alumnos de una asignatura de un curso, por ejemplo ((Primero, FLI), Alumnos). El Rango de esta relación son los alumnos que están matriculados en dicho curso y asignatura.
- Particularizado un elemento de este listado, por ejemplo, María, obtendríamos la relación entre la terna (Primero, FLI, María) con las convocatorias posibles (entendidas hasta que dicha alumna supera la asignatura). Así, tendríamos (((Primero, FLI), María), 1ª) o también (((Primero, FLI), María), 2ª).
- Para terminar la quíntupla ordenada, bastaría con relacionar estas cuádruplas con las calificaciones. En principio, (Primero, FLI, María, 1ª) podía tener como Rango cualquiera de las posibles notas que califican a un alumno, pero lo cierto es que le corresponde una única de estas notas o calificaciones: ((((Primero, FLI), María), 1ª), NP) y, de otra, ((((Primero, FLI), María), 2ª), 8).
- Nótese que al par concreto (Primero, FLI) le corresponde un Rango que es el listado de sus alumnos. A la terna concreta (Primero, FLI, María) le corresponde un Rango que son las convocatorias posibles. Pero que a la cuádrupla concreta (Primero, FLI, María, 2ª) le corresponde una única calificación dentro del espectro o conjunto de calificaciones, en este caso, (Primero, FLI, María, 2ª, 8). Esta calificación es la IMAGEN única de un elemento concreto del DOMINIO (Curso, Asignatura, Alumno, Convocatoria). Sin embargo, a la calificación 8 le pueden corresponder múltiples elementos concretos del DOMINIO citado.
- A estas relaciones establecidas de forma que un objeto del DOMINIO tiene uno y solo un **elemento Imagen** del RANGO con el que relacionarse, de llaman **FUNCIONES**. Así en el caso binario, si R(x, y) es una FUNCIÓN, que suele representarse con letras minúsculas, tal como: **f(x) = y, lo será porque el elemento "y", llamado Imagen, es único para cada uno de los elementos del dominio de las "x", que llamaremos Argumento**.

La Sintaxis de la Lógica de Predicados (I)

La Lógica de Predicados:

- La Lógica de Predicados trabaja con "oraciones lógicas" y decimos que es una Lógica de Primer Orden, al tener en cuenta la Estructura interna de las oraciones que hemos visto como proposicionales, es decir, fija su atención en la representación y formalización de los objetos y las relaciones entre ellos que aparecen en el discurso. Concretamente, diremos que es de **Primer Orden al considerar que trabaja asumiendo como variables solamente a los individuos que estarán, en esta Lógica, representados por Términos (los argumentos de los Predicados)**.
- Dichos Términos serán variables (variables de término) o constantes (constantes de término) y, si son variables, podrán estar cuantificados, tanto por el **Cuantificador Universal** (se leerá: "para todo término") como por el **Cuantificador Existencial** (que se leerá: "existe al menos un término").
- Ya hemos visto que la **Lógica Categórica** empleaba el concepto de Predicado, **P(x)**, como formalización simple de la pertenencia de individuos a categorías (conjuntos), quedando la Lógica Categórica como aquella que representa y formaliza la relación que existe entre categorías atendiendo a la evaluación de pertenencia de los individuos a las mismas. Es decir, dado un objeto o individuo, expresa relaciones entre dos categorías por la pertenencia a ellas de dicho objeto.
- También tendremos la **Lógica de Relaciones** que expresa relaciones binarias entre dos objetos, que pertenecen a dos conjuntos, y que serán formalizadas mediante Predicados binarios, o de aridad dos, tal como **R(x, y)** que nos dice que entre los objetos representados por la variable **x** y los objetos representados por la variable **y** se cumple la relación **R**.
- En general, la **Lógica de Predicados** formaliza cualquier expresión que represente relaciones sea cual sea la aridad de las mismas. Es decir, tendremos la formalización de Predicados de aridad uno, como son los predicados categóricos ya estudiados; de aridad dos, los predicados binarios; y los predicados de n-aridad para cualquier relación establecida por R ⊆ A1 x A2 x A3 …. x An. Y tendrá la consideración **de Primer Orden**, como se ha dicho antes, al cuantificar exclusivamente las variables de término que son las únicas variables que se tendrán en cuenta.

La Sintaxis de la Lógica de Predicados (II)

EL ALFABETO DE LA LÓGICA DE PREDICADOS

- **Constantes**. Son los símbolos reservados a verdadero (V) y falso (F), y secuencia de letras que representan Objetos Definidos: Términos Constantes.
- **Variables**. Secuencia de letras que representan Objetos Indefinidos. El conjunto de los posibles objetos que puede representar recibe el nombre de Dominio de la variable.
- **Predicados**. Secuencia de letras que representa una propiedad o relación.
- **Funciones**. Secuencia de letras que representa una relación-función. En Lógica de Predicados las Funciones se tratan como Términos, ya sean variables o constantes.
- **Conectivas** u operadores.
  - ✓ $\wedge$ Conjunción (y)
  - ✓ $\vee$ Disyunción (o)
  - ✓ $\neg$ Negación (no)
  - $\rightarrow$ Implicación (si, entonces)
  - $\leftrightarrow$ Doble implicación (si y sólo si)
- **Cuantificadores**. Se usan solo dos.
  - ✓ Cuantificador Universal: $\forall x$, se lee "para cada x" o "para todo x".
  - ✓ Cuantificador Existencial: $\exists x$, se lee "existe al menos un x".
- **Otros símbolos**. paréntesis '( )', corchetes '[ ]', llaves '{ }'.

La Sintaxis de la Lógica de Predicados (III)

La Sintaxis de la Lógica de Primer Orden (L1):

- Los **Términos** de la Lógica de Primer Orden se construyen aplicando una definición recursiva:
  - **Regla Base**: Cualquier símbolo constante que represente a un objeto definido o cualquier símbolo variable es un término.
  - **Regla Recursiva**: Si $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ son términos, también lo serán **cualquier función**, independientemente de su aridad, que tenga como argumentos términos ya definidos, por ejemplo: $f(t_1), g(t_2), h(t_3), \ldots, l(t_n)$; o también $f(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$.
- Un **Predicado** es una expresión que consta de un símbolo predicativo seguido de una serie de términos entre paréntesis. Lo escribimos así: $R(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$, o también $R(f(t_1), g(t_2), h(t_3), \ldots, l(t_n))$, o también $R(t_1, g(t_2), h(t_3), \ldots, t_n)$.
- Una expresión se dice que es un **Átomo** si es el símbolo constante V o el símbolo constante F o un Predicado.
- **Las oraciones predicativas de la Lógica de Primer Orden** (como f.b.f.) se construyen aplicando una definición recursiva, teniendo en cuenta que el conjunto de fórmulas, denotado por $\mathfrak{F}_{L1}$, es el menor conjunto que se puede obtener al aplicar:
  - **Regla Base**: Cualquier Átomo (según como ha quedado definido antes) es una f.b.f.
  - **Regla Recursiva**: Si dos expresiones **α y β** son f.b.f. también lo serán: la **$\neg\alpha$** y la **$\neg\beta$**; la **$(\alpha \wedge \beta)$**; la **$(\alpha \vee \beta)$**; la **$(\alpha \rightarrow \beta)$**; la **$(\alpha \leftrightarrow \beta)$**; **$(\forall x\ \alpha)$**; y **$(\exists x\ \alpha)$**
- Con respecto a las variables (variables de término), se diferenciarán dos tipos:
  - Una **variable está ligada** si está en una f.b.f. y está cuantificada, por ejemplo: **en $\forall x\ (C(x) \rightarrow R(x))$ la variable "x" está ligada.**
  - Una **variable está libre** si está en una f.b.f y no está cuantificada, por ejemplo: **en $\forall x\ C(x) \rightarrow R(y)$ la variable "y" está libre**, al igual que sería una variable libre la segunda "x" en **$\forall x\ C(x) \rightarrow R(x)$ ya que solamente estaría cuantificada la primera de ellas**.

La Sintaxis de la Lógica de Predicados (y IV)

LA PRECEDENCIA DE CONECTIVAS Y LA SIMPLIFICACIÓN DE PARÉNTESIS

- Una f.b.f. es la que responde a la definición anterior.
- Pero al igual que en **L0**, se pueden considerar otras expresiones con menos paréntesis que representen a una f.b.f.
- Usaremos este consenso sobre la precedencia de conectivas u operadores:
  1. $\neg$, $\forall$, $\exists$ (con asociatividad por la derecha)
     - **a)** $\neg\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$ <=> $(\neg(\forall x\, P(x)) \rightarrow Q(x))$, segunda x libre.
     - **b)** $\forall x\, \neg P(x) \rightarrow Q(x)$ <=> $((\forall x\, \neg P(x)) \rightarrow Q(x))$, segunda x libre.
  2. $\wedge$, $\vee$ (con asociatividad por la izquierda)
  3. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (con asociatividad por la izquierda)
- Si apareciesen paréntesis se aplicará la asociatividad que indiquen.

LOS TIPOS DE ORACIONES O DE FÓRMULAS BIEN FORMADAS

- **Una f.b.f. es cerrada** (o es una sentencia) si todas los símbolos variables están ligados. Ejemplo: $\forall x \forall y\, (C(x) \rightarrow M(y, f(x)))$
- **Una f.b.f. es abierta** si al menos una variable está libre. Ejemplo: $\forall x\, C(x) \rightarrow R(y)$
- Una f.b.f. se denomina **instancia-base** si todos los términos de sus predicados, y los argumentos de las funciones, son constantes; representa, en realidad, una proposición. Ejemplos: $C(a)$, $R(d)$, $C(a) \rightarrow M(b, f(a))$
- **Un literal** es una expresión atómica o su negación: $P(x)$, $\neg P(y)$, $P(f(x))$, $\neg P(b)$
- **Una cláusula** es la dada por la disyunción de uno o más literales.

La Formalización en Lógica de Predicados (I)

LA FORMALIZACIÓN EN LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN (L1):

- Se siguen las mismas pautas que ya hemos utilizado en L0 y en LC, pero en L1 debemos representar formalmente en f.b.f. algunos aspectos diferenciales.

LO SIMPLE

- **Objetos concretos**. Si se mencionan objetos con "nombres y apellidos" se formalizan con una constante de término. Así, si la frase establece una relación entre José y Mercedes, José se puede formalizar por "a" y Mercedes por "b". Si la relación es la de "ser hermanos", el predicado que representa la relación podría formalizarse por **H(x, y)**, "x es hermano de y". Y con ello, la relación concretada o fijada a José y Mercedes se formalizaría por **H(a, b)**.
- **Categorías**. Las propiedades quedan formalizadas por un predicado monádico (aridad uno o unario), al igual que en LC. Así, la categoría de "vehículos de motor" se formalizaría por el predicado **V(x)**, representando a los individuos representados por la variable de término que pertenecen a esa categoría. Se puede leer: "Son vehículos de motor" o "x es un vehículo de motor".
- **Relaciones**. Las relaciones entre objetos se formaliza con predicados de aridad mayor o igual a 2. Por ejemplo, las frases con verbos transitivos. Podemos formalizar el hecho de que "una persona compra comida", que se formalizaría por **C(x, y)** donde la variable de término "x" representa a cualquier persona y la variable de término "y" representa a cualquier tipo de comida. C(x,y) se leería como: "x compra y". O, instanciando, **C(juan, queso)**, es decir, **"Juan compra queso"**.

LA FORMALIZACIÓN EN LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN (L1):

UN POCO MÁS COMPLEJO

- **Variables Libres**. Para hacer referencia a un objeto que puede tomar diferentes valores (es variable), y la fórmula dice algo concerniente a esos valores de la variable sin informar sobre su cantidad (es desconocida).
    - **Algunas personas se relacionan** (con desconocido). Se puede formalizar de la siguiente manera: **$\exists x\ (P(x) \land R(x, y))$**, la variable "y" queda libre, las personas que se relacionan (algunas) se formaliza por la variable "x" que queda ligada por el cuantificador existencial (al menos existe una persona que se relaciona con otra por determinar).
    - **Todos son mas bajos que él** (desconocido). Se puede formalizar como sigue: **$\forall x\ B(x, y)$**, la variable "y" queda libre, representa al individuo que es el máximo en altura aunque no sabemos quién es. Es el máximo pues todos los demás son más bajos. La variable "x" representa a todos estos individuos por lo que se cuantifica con el universal.
    - **El cuadrado del número (desconocido) es 4**. Aquí debemos introducir el predicado que relaciona dos objetos iguales, denotado por **"I(x, y)"**. El primer término del predicado es una función, dado que se indica como "el cuadrado de un número", podría formalizarse por **"f(x)"**. El segundo término del predicado es el término constante **"4"**. De esta manera, la formalización sería: **$I\ (f(x), 4)$.**
- **Variables Ligadas**. Si hay indicios de cuántos objetos cumplen un predicado. Introducir palabras como "cada", "todo", "alguno", "hay", "existe uno",…
    - **Todas son figuras cuadradas**. Indica que todos los objetos que están en mi universo son figuras (geométricas) y son de forma cuadrada: **$\forall x\ (P(x) \land C(x))$**. Hemos de advertir que esta expresión predicativa no es una proposición categórica!!!
    - **En toda pareja de vecinos existe algún maleducado**. Esta frase es idéntica a decir que cualquiera que sean "x" e "y", si son vecinos, entonces o bien "x" es maleducado o bien "y" es maleducado, o bien ambos los son. Nos fijamos que dice que en toda pareja, es decir, para todo "x" y para todo "y" que sean vecinos. Por tanto podemos formalizarlo por: **$\forall x \forall y\ (V(x, y) \rightarrow M(x) \lor M(y))$**
- Si hay ambigüedad sobre la cuantificación, dejar la variable libre (si no crea una ambigüedad mayor). Un ejemplo: "Todos aman": **$\forall x\ A(x, y)$**. ¿a todos o a algunos? ¿También a ellos mismos? Lo adecuado es dejar la variable "y" libre. Otro ejemplo: "Si son piezas de museo, son de alto valor": **$P(x) \rightarrow V(x)$** ¿Todas o algunas? Podría decirse que existen algunas, **$\exists x\ (P(x) \rightarrow V(x))$,** o para todas, **$\forall x\ (P(x) \rightarrow V(x))$**. En general, la pregunta a hacerse es siempre la misma: ¿necesito CUANTIFICADOR?

LA FORMALIZACIÓN EN LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN (L1):

LO COMPLEJO (I)

- La oración: **No existe nadie que sea banquero y no sea millonario**
  - Estamos hablando de un universo de personas que tienen las características de ser banqueros o de ser millonarios. Formalizamos estas características como predicados monádicos (de aridad uno). Así, ser banquero lo formalizamos por **B(x)**, que se lee "x es banquero". Por otra parte, ser millonario por **M(x)** que se lee "x es millonario".
  - Lo que parece decir la frase es que la conjunción de las características de ser banquero y de no ser millonario no la cumple nadie, es decir, negando la Forma Normal Particular Negativa, "no existe un banquero que no sea millonario", escribimos nuestra formalización: $\neg\exists x\, (B(x) \land \neg M(x))$
  - También podíamos haber escrito, aludiendo a esas dos características, que sea cual sea la persona (por tanto para toda persona) esa conjunción no se cumple, y así: $\forall x\, \neg(B(x) \land \neg M(x))$
  - O bien, haciendo uso de la equivalencia lógica de la negación de la conjunción (D'Morgan) en esta última expresión: $\forall x\, (B(x) \rightarrow M(x))$, que resulta ser la Forma Normal Universal Afirmativa, "todos los banqueros son millonarios“.

- La oración: **Algunos estudiantes de Informática sólo son amigos de los aficionados a los videojuegos**
  - Estamos hablando de un universo de personas que tienen las características de ser estudiantes de Informática, o bien ser aficionados a los videojuegos. Por añadidura se dice que las personas, en general, mantienen la relación de amistad entre ellas. Por tanto tenemos tres predicados, dos monádicos y uno binario o de relación. Formalicemos: **E(x)**, que se lee "x es estudiante de Informática"; **V(y)**, que se lee "y es aficionado a los videojuegos"; y, finalmente, **A(x, y)** que se lee "x es amigo de y".
  - Lo que parece decir la frase es que existe algún "x" que es estudiante y que sólo es amigo de los "y" que sean aficionados a los videojuegos. Y si esto es así, ello equivale a decir que para todo "y" de su dominio, si "x" es amigo de él, entonces ese "y" debe ser aficionado a los videojuegos.
  - Escribimos la formalización: $\exists x\, (E(x) \land \forall y\, (A(x, y) \rightarrow V(y)))$
  - La Estructura de la f.b.f. consiste en la conjunción de una característica con la atribución de otra a una relación.

La Formalización en Lógica de Predicados (IV)

LA FORMALIZACIÓN EN LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN (L1):

<u>LO COMPLEJO (II)</u>

- La oración: **Sólo los futbolistas admiran a los futbolistas**
  - Lo que dice la frase es que cualquiera que sean "x" e "y", si "x" admira a "y", y este "y" es futbolista, entonces "x" es también futbolista (ya que los futbolistas son solo admirados por los futbolistas). Si **F(x)** se lee "x es futbolista", y **A(x, y)** se lee "x admira a y".
  - La formalización es: $\forall x\, \forall y\, (A(x, y) \land F(y) \rightarrow F(x))$
- Advirtamos la diferencia entre esta formalización y la de la oración: **Los futbolistas sólo admiran a los futbolistas**
  - Es este caso parece que lo se pretende decir es que un individuo que sea futbolista sólo tendrá amigos entre colegas futbolistas, es decir, que todos sus amigos son igualmente futbolistas.
  - La formalización será: $\forall x\, \forall y\, (F(x) \land (A(x, y) \rightarrow F(y)))$
- Con las dos últimas formalizaciones deben entender que es diferente el patrón gramatical **"Solo los M son S"** (por ejemplo, sólo los buenos móviles son smartphones) en el que smartphone es la condición suficiente para ser buen móvil, del patrón gramatical **"Sólo son M los S"** (por ejemplo, sólo son buenos móviles los smartphones) en el que smartphone es la condición necesaria para ser buen móvil. La oración "sólo los futbolistas admiran a los futbolistas" sigue el primer patrón en el que la característica de los individuos admirados pertenece a la condición suficiente y la de los que admiran, a la condición necesaria, en ambos casos la de ser futbolista.

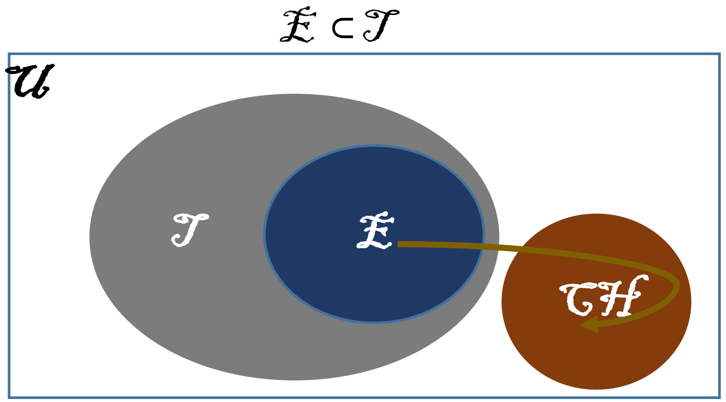
Facultad de Informática

La Formalización en Lógica de Predicados (y V)

LA FORMALIZACIÓN EN LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN (L1):

<u>LO COMPLEJO (y III)</u>

- La oración: **Sólo los tontos se dejan engañar por los charlatanes**
  - **Esta oración sigue el patrón gramatical: Sólo los M son S (M: tontos, y S: engañados)**
  - En esta frase se dice que cualquiera que sean "x" e "y", si "x" se deja engañar por "y", y este "y" es un charlatán, entonces "x" es un tonto. Y lo es necesariamente porque si no fuera tonto no se dejaría engañar (ya sea por los charlatanes, como en este caso). Si **T(x)** se lee "x es tonto", **E(x, y)** se lee "x se deja engañar por y", y **CH(y)** se lee "y es un charlatán".
  - La formalización es: $\forall x \forall y\, (E(x, y) \land CH(y) \rightarrow T(x))$
  - También podríamos formalizarla por: $\forall y\, (CH(y) \rightarrow \forall x\, (E(x, y) \rightarrow T(x))$



LA REPRESENTACIÓN DEL PATRÓN MEDIANTE CONJUNTOS

$\mathcal{T}$ = { x | x es Tonto, o bien, T(x) }

$\mathcal{E}$ = { x | x es Engañado por otro individuo y, o bien, E(x, y) }

$\mathcal{CH}$ = { y | y es un Charlatán engañador, o bien, CH(y) }

En LC, $\forall x\, (E(x) \rightarrow T(x))$, teniendo en cuenta que para ser "x" engañado se tiene que dar la existencia de "y" perteneciente al conjunto $\mathcal{CH}$. Por tanto, sea quien sea el charlatán, si eres engañado por él es que necesariamente eres tonto.

Otra forma de verlo es que: "dado cualquier charlatán, no existe una persona que siendo engañada por él no sea tonta".

Interpretación y Evaluación en L1 (I)

En las **Páginas 25-29 del documento 06-Predicados-B** que tienen en RECURSOS pueden leer formalmente los conceptos de Interpretación, Asignación y Evaluación en Lógica de Primer Orden (L1).

- Cuando queremos evaluar una oración lógica formalizada en Lógica de Primer Orden, L1, debemos seguir unos pasos concretos: **Interpretación, Asignación de variables, Asignación de valores de verdad a los átomos de la fórmula y, finalmente, Evaluación de la misma** siguiendo la semántica de las conectivas y de los cuantificadores existente en ella. Veámoslo con un ejemplo.

<u>EL PASO DE INTERPRETACIÓN</u>

- Si queremos evaluar una expresión u oración en lenguaje natural como la mencionada anteriormente "existen algunos estudiantes de Informática que sólo son amigos de los aficionados a los videojuegos", para devolver VERDAD a la misma bastaría con encontrar evidencias (un caso concreto) de un determinado estudiante de Informática que tuviese un único amigo y éste fuera aficionado a los videojuegos. También de un determinado estudiante de Informática para el que todos sus amigos fueran aficionados a los videojuegos; e incluso, de un estudiante de Informática que no tuviera ningún amigo.
- Formalizada esta expresión, la fórmula predicativa era: $\boldsymbol{\delta = \exists x\, (E(x) \land \forall y\, (A(x, y) \rightarrow V(y)))}$
- Tengamos en cuenta que esta fórmula también representa la oración "existen algunos vinos tintos que sólo maridan con alimentos de intenso sabor". Lo que nos lleva a que si queremos evaluar esta fórmula debemos precisar sobre qué hablamos y hacerlo con la mayor concreción. Esta precisión es lo que denominamos **INTERPRETACIÓN de la fórmula**, $\mathcal{I}_\delta$. Interpretar una fórmula consta de cuatro acciones o resultados.

① Si nos mantenemos en la primera de las oraciones en lenguaje natural representada, está claro que hablamos de unos objetos o individuos que son personas, pertenecen a la categoría de personas. Los estudiantes y los aficionados a los videojuegos serán personas. Por tanto, lo primero a definir es el ámbito de nuestros individuos, que formalmente denominaremos DOMINIO O UNIVERSO DE LA INTERPRETACIÓN. Pero para la búsqueda de la evidencia mencionada anteriormente podíamos haber concretado el alcance del Dominio de la Interpretación. Así, puede ser que entre todos los habitantes de la Región de Murcia no la encontrásemos, pero sí, si abrimos la búsqueda a todos los habitantes de regiones españolas. Es decir, una oración puede ser satisfacible en un dominio concreto, y no serlo en otro concreto diferente. Así, determinar o definir el **DOMINIO DE LA INTERPRETACIÓN**, $\mathcal{D}$, un conjunto no vacío, es cuestión esencial en el paso de Interpretación. Y es el primer resultado a obtener.

Interpretación y Evaluación en L1 (II)

② En la fórmula que interpretamos todos los términos son variables (variables de término), pero en ocasiones es preciso tener en cuenta en la formalización términos constantes (constantes de término). Por ejemplo, en la oración "los amigos de mis amigos, son mis amigos" que se formalizaría como **$\forall x \forall y\, (A(x, y) \wedge A(x, a) \rightarrow A(y, a))$**, necesitamos indicar que quién lo dice es un individuo concreto, es decir, "a", que habrá de ser identificado en el paso de Interpretación. Cuando en la fórmula tenemos constantes de término, una vez identificado el Dominio de la Interpretación, debemos hacer la siguiente acción que es concretar o fijar los términos constantes en dicho Dominio. Esta acción es la de **IDENTIFICAR LOS OBJETOS CONCRETOS**. Es el segundo de los resultados a obtener en el paso de Interpretación de una fórmula.

③ Si recordamos la formalización, la Estructura de la f.b.f. consistía en la conjunción de una característica con la atribución de otra a una relación. Es decir, que la siguiente acción es establecer la interpretación de las categorías y de las relaciones (ya sean predicativas, ya sean de funciones). En este caso, las categorías (características), que son las representadas por los predicados monádicos, **E(x)**, son las de "Estudiante de Informática" y **V(y)**, la de "Aficionado a los Videojuegos". Falta definir la relación que representa el predicado binario, **A(x, y)**, que es la de "Ser Amigo". Por tanto, traeremos a la evaluación a las personas que son estudiantes de Informática, y teniendo en cuenta los que son amigos de cada uno de los estudiantes de informática considerados, entre ellos comprobaremos los que son aficionados a los videojuegos. A esta identificación la llamaremos **IDENTIFICAR CATEGORÍAS O RELACIONES ASOCIADAS POR LA INTERPRETACIÓN**. Y es el tercero de los resultados a obtener en el paso de Interpretación.

④ No es el caso, pero al tiempo, si tuviésemos términos de predicados que fueran formalizados por funciones de al menos un argumento, tendríamos que asociar a las mismas las relaciones concretas que se les pudiera precisar. Hay que tener en cuenta que las funciones son relaciones en las que cada objeto origen tiene una y sólo una imagen. Con esto, tendremos la acción de **IDENTIFICAR FUNCIONES ASOCIADAS POR LA INTERPRETACIÓN**. Y con ello, con estos cuatro resultados, habrá concluido el paso de INTERPRETACIÓN como una cuaterna descriptiva.

EL PASO DE ASIGNACIÓN DE VARIABLES

- Nuestra fórmula tiene dos variables de término: "x" e "y". Estas dos variables recorren el Dominio de la Interpretación, y este proceso consiste en asignar a dichas variables los diferentes términos constantes que existan en el Dominio. Teniendo en cuenta que el Dominio (por ejemplo, los habitantes de la Región de Murcia) se ha definido igual para ambas variables, y que está formado por los objetos **{** $d_1; d_2; d_3; ….: d_n$ **}**, en cada asignación obtendremos predicados instanciados, tal como $E(t_1)$, $E(t_2)$, …. $E(t_n)$, $A(t_1, t_1)$, $A(t_1, t_2)$, $A(t_1, t_3)$, …., $A(t_{n-1}, t_n)$, $V(t_1)$, $V(t_2)$, $V(t_3)$, ……, $V(t_n)$. Recordando que **$E(t_i)$ significa que el individuo "d_i" concreto representado por el término "t_i" es estudiante de Informática, $A(t_i, t_j)$ es que el individuo "d_i" concreto representado por "t_i" es amigo del individuo "d_j" concreto representado por "t_j", y, finalmente, $V(t_j)$ es que el individuo "d_j" concreto representado por "t_j" es aficionado a los videojuegos**.
- Si las variables son argumentos de funciones, procederíamos de manera análoga. Una función f(z), quedaría como $f(t_1)$, $f(t_2)$, ….., $f(t_n)$

Interpretación y Evaluación en L1 (III)

EL PASO DE ASIGNACIÓN DE VALORES DE VERDAD

- El resultado del paso de ASIGNACIÓN DE VARIABLES es la secuencia completa de todos los predicados atómicos (Átomos) de la fórmula instanciados, es decir, tendremos todas las instancias-base atómicas de la fórmula predicativa. Si la fórmula hubiese contenido términos constantes, además de variables de término, la instanciación vendría obligada desde el paso de Interpretación.
- El paso de ASIGNACIÓN DE VALORES DE VERDAD consiste en atribuir o asignar el valor de Verdad, Verdadero o Falso, a cada una de estas instancias-base o predicados atómicos instanciados. De esta manera, **un predicado atómico instanciado, de aridad uno, tendrá una asignación de VERDAD si el individuo, por ejemplo "d_1", representado por el término constante "t_1" pertenece a la Categoría a la que se asocie dicho predicado, es decir, $v(E(t_1)) = V$, si $d_1 \in$ Estudiante-Informática, y será FALSO en caso contrario**. Tengamos en cuenta, además, que la definición de la categoría debe ser lo más precisa posible: podemos entender estudiante universitario, estudiante de Informática de una universidad concreta, estudiante de estudios superiores en Informática.
- **En el caso de predicados binarios**, o de mayor aridad, procedemos de forma similar. Vamos asignando valores de VERDAD a los predicados atómicos instanciados. Así, **$v(A(t_1, t_2)) = V$, si el individuo "d_1" representado por el término "t_1" es amigo del individuo "d_2" representado por el término "t_2"**. **Es decir, si $(d1, d2) \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Y será $v(A(t_1, t_2)) = F$, en caso de que no se cumpla tal pertenencia.**

EL PASO DE EVALUACIÓN PROPIAMENTE DICHA

- La fórmula predicativa que estamos evaluando es: $\boldsymbol{\delta = \exists x\, (E(x) \land \forall y\, (A(x, y) \rightarrow V(y)))}$
- Esta fórmula tiene dos CUANTIFICADORES, uno sobre la variable de término "x", de ámbito global en la fórmula, el cuantificador existencial, y otro sobre la variable de termino "y", de ámbito local (una parte de la Estructura de la fórmula), el cuantificador universal. Por añadidura, la fórmula es una conjunción de dos predicados. El primero es un predicado atómico, y el segundo, es un predicado complejo de conectiva implicación de dos predicados atómicos, con una variable cuantificada.
- Al contar con la Asignación de Valores de Verdad del paso anterior, ahora corresponde evaluar la fórmula siguiendo la definición recursiva que aparece en la **página 28 del documento 06-Predicados-B que tienen en RECURSOS**.
- Si tomásemos independientemente la sub-fórmula $\boldsymbol{\forall y\, (A(x, y) \rightarrow V(y))}$, en ésta aparece la variable "y" cuantificada universalmente y la variable "x", libre. Para evaluar fórmulas con variables libres, debemos inicialmente fijar una instanciación o particularización de dicha variable libre: darle un valor de término constante, arbitrariamente. Por ejemplo, darle a "x" los valores de los términos "t_j"para los que $v(E(t_j)) = V$.

Interpretación y Evaluación en L1 (IV)

LA EVALUACIÓN DE UNA FÓRMULA PREDICATIVA EN L1

- Hasta ahora hemos visto los pasos a dar para evaluar una fórmula predicativa en L1, de manera general. Para ello, hemos descrito los pasos de Interpretación, de Asignación de Variables, de Asignación de Valores de Verdad a los Átomos, y la Evaluación de la fórmula dada.
- Ahora vamos a aplicar lo explicado para la evaluación de fórmulas, pero con unos resultados de la cuaterna de Interpretación que nos quepan en un folio, y un proceso restante de Asignación de Valores de Verdad y de Evaluación que no nos obliguen a recorrer la región recabando evidencias.
- Tengamos la fórmula: **$\delta = \forall x\, (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow \exists y\, Q(y)$**
- El **Dominio de la Interpretación** es el conjunto no vacío de objetos **$\mathcal{D}$ = { a, b, c }.** No tenemos términos constantes en la fórmula.
- **El conjunto de las Relaciones con las que asociar los predicados, son: R_1 = { a, b }, R_2 = { b } y R_3 = { c }**.
- ¿Cuántas Interpretaciones se pueden hacer con esta Estructura dada? Tantas como asociaciones se puedan hacer. En este caso, 27. Ahora, hagamos la siguiente **asociación de predicados a relaciones** por la Interpretación: **P(x)** <=> **R_1**; **R(x)** <=> **R_2**; **y Q(y)** <=> **R_3**
- Con esto hemos concretado el paso de INTERPRETACIÓN. Ahora pasemos a **ASIGNACIÓN DE VARIABLES**. Para simplificar, asumimos que las letras de los objetos y las de los términos constantes son las mismas. Por tanto, tanto la variable **x** como la variable **y** tendrán asignados los términos constantes **{ a, b, c }**, con lo cual **P(x)** se instanciará por **P(a), P(b) y P(c)**; el predicado **R(x)** se instanciará por **R(a), R(b) y R(c)**; y el predicado **Q(y)** se instanciará por **Q(a), Q(b), Q(c)**.
- Teniendo en cuenta la asociación de predicados a relaciones, podemos realizar la **ASIGNACIÓN DE VALORES DE VERDAD**. Procedemos con el siguiente resultado: v(P(a)) = V; v(P(b)) = V; v(P(c)) = F; v(R(a)) = F; v(R(b)) = V; v(R(c)) = F; v(Q(a)) = F; v(Q(b)) = F; y v(Q(c)) = V.
- Con esto evaluemos la fórmula: Como vemos para esta Interpretación **la fórmula es SATISFACIBLE**

x/y	P(x)	R(x)	Q(y)	$P(x) \rightarrow R(x)$	$\forall x\, (P(x) \rightarrow R(x))$	$\exists y\, Q(y)$	$\forall x\, (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow \exists y\, Q(y)$
a	V	F	F	F			
b	V	V	F	V	F	V	V
c	F	F	V	V			

Interpretación y Evaluación en L1 (V)

LA EVALUACIÓN DE UNA FÓRMULA PREDICATIVA EN L1

- Tengamos la fórmula: **δ** = **P(x) ∧ ∀x (R(x) ∧ P(y)) → ∃y Q(x, y)**
- El **Dominio de la Interpretación** es el conjunto no vacío de objetos **𝒟 = { 1, 2 }**. No tenemos términos constantes en la fórmula.
- **El conjunto de las Relaciones con las que asociar los predicados, son: R_1 = { (1, 2), (2, 1) }, R_2 = { 1 } y R_3 = { 1, 2 }**.
- De las cuatro posibles, hagamos la siguiente **asociación de predicados a relaciones** por la Interpretación: **Q(x, y)** <=> **R_1**; **P(x)** <=> **R_2**; **y** **R(x)** <=> **R_3**
- Con esto hemos concretado el paso de INTERPRETACIÓN. Ahora pasemos a **ASIGNACIÓN DE VARIABLES**. Para simplificar, asumimos que las letras de los objetos y las de los términos constantes son las mismas. Por tanto, tanto la variable **x** como la variable **y** tendrán asignados los términos constantes **{ 1, 2 }**, con lo cual **P(x)** o el predicado **P(y)** se instanciarán por **P(1), y P(2)**; el predicado **R(x)** se instanciará por **R(1) y R(2)**; y el predicado **Q(x, y)** se instanciará por **Q(1, 1), Q(1, 2), Q(2, 1) y Q(2, 2)**.
- Teniendo en cuenta la asociación de predicados a relaciones, podemos realizar la **ASIGNACIÓN DE VALORES DE VERDAD**. Procedemos con el siguiente resultado: v(P(1)) = V; v(P(2)) = F; v(R(1)) = V; v(R(2)) = V; v(Q(1, 1)) = F; v(Q(1, 2)) = V; Q(2, 1) = V; y v(Q(2, 2)) = F.
- Al pasar a evaluar la fórmula, debemos tener en cuenta que en la misma existen dos variables libres: **P(x) ∧ ∀x (R(x) ∧ P(y)) → ∃y Q(x, y)** que las hemos remarcado en ROJO. Para poder evaluar la expresión debemos asignar a dichas variables libres un valor fijado del dominio. Así, la variable libre quedará sustituida por una constante de término cualesquiera. Por ejemplo, **la variable "x" la hacemos igual a 1 en sus apariciones como libre, y a la variable "y" la hacemos igual a 2 en su aparición como libre.** En general, **las variables libres se renombran** para evitar confusiones.
- Con esto evaluemos la fórmula. Como vemos para esta Interpretación y atribución a las variables libres, **la fórmula es SATISFACIBLE**

<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>P(1)</th><th>P(2)</th><th>R(x)</th><th>R(x) ∧ P(2)</th><th>∀x (R(x) ∧ P(2))</th><th>P(1) ∧ ∀x (R(x) ∧ P(2))</th><th>Q(1, y)</th><th>∃y Q(1, y)</th><th>δ</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td rowspan="4">V</td><td rowspan="4">F</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">F</td><td rowspan="4">F</td><td rowspan="4">F</td><td>F</td><td rowspan="4">V</td><td rowspan="4">V</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>V</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">F</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

Interpretación y Evaluación en L1 (VI)

- Seguimos con la fórmula: $\boldsymbol{\delta = P(x) \wedge \forall x\,(R(x) \wedge P(y)) \rightarrow \exists y\, Q(x, y)}$, con la misma **Interpretación,** $\mathcal{J}_\delta$, la misma **Asignación de Variable** y la misma **Asignación de Valores de Verdad**. Para todas las atribuciones a las variables libres, la fórmula es **SATISFACIBLE**

<table>
<tr><th></th><th>x</th><th>y</th><th>P(1)</th><th>P(1)</th><th>R(x)</th><th>R(x) ∧ P(1)</th><th>∀x (R(x) ∧ P(1))</th><th>P(1) ∧ ∀x (R(x) ∧ P(2))</th><th>Q(1, y)</th><th>∃y Q(1, y)</th><th>δ</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Para x=1; y=1</td><td>1</td><td>1</td><td rowspan="4">V</td><td rowspan="4">V</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="4">V</td><td rowspan="4">V</td><td>F</td><td rowspan="4">V</td><td rowspan="4">V</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>V</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">V</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>x</th><th>y</th><th>P(2)</th><th>P(1)</th><th>R(x)</th><th>R(x) ∧ P(1)</th><th>∀x (R(x) ∧ P(1))</th><th>P(2) ∧ ∀x (R(x) ∧ P(2))</th><th>Q(2, y)</th><th>∃y Q(2, y)</th><th>δ</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Para x=2; y=1</td><td>1</td><td>1</td><td rowspan="4">F</td><td rowspan="4">V</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="4">V</td><td rowspan="4">F</td><td></td><td rowspan="4">V</td><td rowspan="4">V</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">V</td><td>V</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>F</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>x</th><th>y</th><th>P(2)</th><th>P(2)</th><th>R(x)</th><th>R(x) ∧ P(2)</th><th>∀x (R(x) ∧ P(1))</th><th>P(1) ∧ ∀x (R(x) ∧ P(2))</th><th>Q(2, y)</th><th>∃y Q(2, y)</th><th>δ</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Para x=2; y=2</td><td>1</td><td>1</td><td rowspan="4">F</td><td rowspan="4">F</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">F</td><td rowspan="4">F</td><td rowspan="4">F</td><td></td><td rowspan="4">V</td><td rowspan="4">V</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">F</td><td>V</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>F</td></tr>
</table>

Interpretación y Evaluación en L1 (VII)

LA EVALUACIÓN DE UNA FÓRMULA PREDICATIVA EN L1

- Tengamos la fórmula: **δ** = **∀x∀y (R(x, y) → ¬R(y, x)) → ¬∃x R(x, x)**
- El **Dominio de la Interpretación** es el conjunto no vacío de objetos $\mathcal{D}$ = **{ 1, 2, 3 }**. No tenemos términos constantes en la fórmula.
- **El conjunto de las Relaciones con las que asociar los predicados son: R_1 = { (1, 2), (1, 3), (3, 2) }. Tenemos una única asociación posible**.
- Hagamos dicha **asociación de predicados a relaciones** por la Interpretación: **R(x, y)** <=> **R_1**
- Con esto hemos concretado el paso de INTERPRETACIÓN. Ahora pasemos a **ASIGNACIÓN VARIABLES** y a **ASIGNACIÓN DE VALORES DE VERDAD.** Para simplificar, llevemos esto como hicimos en los casos anteriores, directamente a una tabla de verdad, con **α** = **(R(x, y) → ¬R(y, x))**
- Con esto evaluemos la fórmula. Como vemos para esta Interpretación **la fórmula es SATISFACIBLE**

x	y	R(x, y)	R(y, x)	¬R(y, x)	α	∀x∀y α	R(x, x)	∃x R(x, x)	¬∃x R(x, x)	δ
1	1	F	F	V	V	V	F	F	V	V
1	2	V	F	V	V					
1	3	V	F	V	V					
2	1	F	V	F	V					
2	2	F	F	V	V					
2	3	F	V	F	V					
3	1	F	V	F	V					
3	2	V	F	V	V					
3	3	F	F	V	V					

Interpretación y Evaluación en L1 (VIII)

LA EVALUACIÓN DE UNA FÓRMULA PREDICATIVA EN L1

- Tengamos la fórmula: $\boldsymbol{\delta = \forall x\, (R(f(x)) \land \neg P(x) \rightarrow Q(x, f(x)))}$, con $\boldsymbol{\alpha = R(f(x)) \land \neg P(x) \rightarrow Q(x, f(x))}$
- El **Dominio de la Interpretación** es el conjunto no vacío de objetos $\mathcal{D}$ **= { a, b, c, d }**. No tenemos términos constantes en la fórmula.
- **El conjunto de las Relaciones con las que asociar los predicados son: R_1 = {a}, R_2 = {b, c, d}, R_3 = {(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)}** y, finalmente, **R_4 = {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)}**
- **Ahora** lo que nos dice **el problema es qué asociación de predicados y de funciones a relaciones por la Interpretación** debe realizarse para que la fórmula dada sea **SATISFACIBLE**. Como en la fórmula tenemos una función, **f(x)**, que sabemos que es una relación binaria en la que para cada uno de los términos origen se debe tener uno y sólo un término imagen. Esta es la primera asociación que tenemos identificar. Las dos relaciones binarias, **R_3** y **R_4**, que nos proporcionan cumplen con la condición de función. Por tanto, podemos asociar a **f(x)** <=> **R_3** tanto como **f(x)** <=> **R_4**. Para simplificar la asociación, vamos a considerar que ésta es biunívoca. Con ello: **Q(x, f(x))** <=> **R_4**, o bien **Q(x, f(x))** <=> **R_3**, respectivamente. Los predicados P(x) y R(f(x)) los podemos asociar a R_1 y a R_2, de forma cruzada. Con esto:

La fórmula: $\boldsymbol{\delta = \forall x\, (R(f(x)) \land \neg P(x) \rightarrow Q(x, f(x)))}$

- Con la asociación de predicados y funciones a relaciones: **f(x)** <=> **R_3**; **Q(x, f(x))** <=> **R_4**; **P(x)** <=> **R_1** y **R(f(x))** <=> **R_2**, **NO es SATISFACIBLE**

x	f(x)	R(f(x))	P(x)	¬P(x)	∧	Q(x, f(x))	α	∀x α	δ
a	b	V	V	F	F	F	V	F	F
b	c	V	F	V	V	F	F		
c	d	V	F	V	V	F	F		
d	a	F	F	V	F	F	V		

La fórmula: $\boldsymbol{\delta = \forall x\, (R(f(x)) \land \neg P(x) \rightarrow Q(x, f(x)))}$

- Con la asociación de predicados y funciones a relaciones: **f(x)** <=> **R_3**; **Q(x, f(x))** <=> **R_4**; **P(x)** <=> **R_2** y **R(f(x))** <=> **R_1**, **SI es SATISFACIBLE**

x	f(x)	R(f(x))	P(x)	¬P(x)	∧	Q(x, f(x))	α	∀x α	δ
a	b	F	F	V	F	F	V	V	V
b	c	F	V	F	F	F	V		
c	d	F	V	F	F	F	V		
d	a	V	V	F	F	F	V		

Interpretación y Evaluación en L1 (IX)

LA EVALUACIÓN DE UNA FÓRMULA PREDICATIVA EN L1

- Tengamos la fórmula: **$\delta = \forall x\,(R(f(x)) \land \neg P(x) \rightarrow Q(x, f(x)))$**, con **$\alpha = R(f(x)) \land \neg P(x) \rightarrow Q(x, f(x))$**
- El **Dominio de la Interpretación** es el conjunto no vacío de objetos **$\mathcal{D}$ = { a, b, c, d }**. No tenemos términos constantes en la fórmula.
- **El conjunto de las Relaciones con las que asociar los predicados son: R_1 = {a}, R_2 = {b, c, d}, R_3 = {(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)}** y, finalmente, **R_4 = {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)}**

La fórmula: **$\delta = \forall x\,(R(f(x)) \land \neg P(x) \rightarrow Q(x, f(x)))$**

- Con la asociación de predicados y funciones a relaciones: **f(x)** <=> **R_4**; **Q(x, f(x))** <=> **R_3**; **P(x)** <=> **R_1** y **R(f(x))** <=> **R_2**, **NO es SATISFACIBLE**

x	f(x)	R(f(x))	P(x)	¬P(x)	∧	Q(x, f(x))	α	∀x α	δ
a	a	F	V	F	F	F	V	F	F
b	b	V	F	V	V	F	F		
c	c	V	F	V	V	F	F		
d	d	V	F	V	V	F	F		

La fórmula: **$\delta = \forall x\,(R(f(x)) \land \neg P(x) \rightarrow Q(x, f(x)))$**

- Con la asociación de predicados y funciones a relaciones: **f(x)** <=> **R_4**; **Q(x, f(x))** <=> **R_3**; **P(x)** <=> **R_2** y **R(f(x))** <=> **R_1**, **NO es SATISFACIBLE**

x	f(x)	R(f(x))	P(x)	¬P(x)	∧	Q(x, f(x))	α	∀x α	δ
a	a	V	F	V	V	F	F	F	F
b	b	F	V	F	F	F	F		
c	c	F	V	F	F	F	F		
d	d	F	V	F	F	F	F		

Hemos analizado cuatro posibles INTERPRETACIONES en la Estructura dada, al considerar biunívoca la asignación. Pero realmente, existen 16 posibles Interpretaciones, teniendo en cuenta todas las posibilidades de Asignación de Predicados/Funciones a las Relaciones dadas en la Estructura. Eso sí, como hemos visto, una posible respuesta a la pregunta planteada es que la fórmula **$\delta = \forall x\,(R(f(x)) \land \neg P(x) \rightarrow Q(x, f(x)))$ es SATISFACIBLE** para una de las Asociaciones de Funciones y Predicados por la Interpretación. Será en el **Dominio $\mathcal{D}$ = { a, b, c, d } y la Estructura de Relaciones dada,** y con la asociación: **f(x)** <=> **R_3**; **Q(x, f(x))** <=> **R_4**; **P(x)** <=> **R_2**; y **R(f(x))** <=> **R_1**

Interpretación y Evaluación en L1 (X)

RESUMEN DE LA INTERPRETACIÓN Y DE LA EVALUACIÓN DE UNA FÓRMULA PREDICATIVA EN L1 (I)

- Dada una fórmula cualquiera, **δ**, estará formada por unos predicados, sea cual sea su aridad, cuyos términos podrán ser variables o constantes, o estar definidos a partir de funciones. Los términos variables podrán estar cuantificados o no, en cuyo caso, se dice que las variables son libres. Las funciones, como términos de un predicado, tendrán argumentos, sea cual sea su aridad. Los predicados están conectados por conectivas u operadores, y la cuantificación podrá afectar de manera global en la fórmula a la variable involucrada, o local en el ámbito de un predicado de la misma. Por ejemplo, en la fórmula $\boldsymbol{\delta = \forall x\, (R(f(x)) \land \neg P(x) \rightarrow Q(x, f(x)))}$ el cuantificador universal sobre la variable **x** afecta globalmente a ésta en la fórmula. Sin embargo, en la fórmula $\boldsymbol{\delta = P(x) \land \forall x\, (R(x) \land P(y)) \rightarrow \exists y\, Q(x, y)}$ no hay cuantificadores que afecten globalmente, tanto la cuantificación sobre la variable **x** como la cuantificación existencial sobre la variable **y** son locales para predicados determinados.
- En esta última fórmula, las dos variables tienen ocurrencias como libres y como ligadas. Cuando esto ocurra es conveniente renombrar las variables libres, teniendo en cuenta que las variables libres resultantes recorrerán el mismo dominio de variable que las originales. Aplicando este renombramiento de variables, la fórmula podría escribirse así: $\boldsymbol{P(z) \land \forall x\, (R(x) \land P(w)) \rightarrow \exists y\, Q(z, y)}$**.**
- El Dominio de la Interpretación y las relaciones que han quedado definidas para llevar a cabo la asociación de predicados y funciones, se conoce normalmente como **Estructura** de la Interpretación, **a efectos de Evaluación**. Así, para la fórmula $\boldsymbol{\delta = \forall x\, (R(f(x)) \land \neg P(x) \rightarrow Q(x, f(x)))}$ **definimos la Estructura siguiente:** el dominio será $\boldsymbol{\mathcal{D} = \{ a, b, c, d \}}$; no tenemos términos constantes en la fórmula; el conjunto de las Relaciones con las que asociar los predicados R(f(x)), P(x) y Q(x, f(x)) y la función f(x), son: **R1 = {a}; R2 = {b, c, d}; R3 = {(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)}**; y **R4 = {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)}**.

Interpretación y Evaluación en L1 (y XI)

RESUMEN DE LA INTERPRETACIÓN Y DE LA EVALUACIÓN DE UNA FÓRMULA PREDICATIVA EN L1 (y II)

- Conocida o dada una Estructura, finalmente, se procede con **la asociación de predicados y funciones a relaciones para configurar las diferentes Interpretaciones** de la fórmula. Si no se puede completar este proceso de la asociación, se dice que la fórmula es ININTERPRETABLE en la Estructura dada. La fórmula anterior en la Estructura dada tiene 16 interpretaciones. Hemos analizado cuatro de ellas. En una, la evaluación de la fórmula resulta tener el valor de VERDAD; por tanto, la fórmula tiene una Interpretación que la hace SATISFACIBLE. Si bien, las evaluaciones de la fórmula en las otras Interpretaciones analizadas tomaba el valor de FALSO; es decir, es FALSEABLE en las mismas. Si hubiésemos definido una Estructura distinta, la fórmula hubiese tenido una evaluación diferente.
- Si una fórmula es tal que para ella no se encuentra una Estructura (y asociación) en la que sea FALSEABLE, se dice que la fórmula es una **TAUTOLOGÍA**. Por ejemplo, la fórmula: $\boldsymbol{\delta = \forall x \forall y\, (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)) \rightarrow \neg \exists x\, R(x, x)}$ es una Tautología. Hemos visto que era Satisfacible en una Estructura, pero **¿¿pueden comprobar que no existe Estructura (y asociación) en la que quede Falseada??**
- Si una fórmula es tal que para ella no se encuentra una Estructura (y asociación) en la que sea SATISFACIBLE, se dice que la fórmula es una **CONTRADICCIÓN o INSATISFACIBLE**.
- **Por cierto, las tablas que han visto no son exactamente Tablas de Verdad tal y como las construíamos en L0. NO SE EQUIVOQUEN, ¡¡¡NI SE CONFUNDAN!!! En realidad, plasman el resultado del proceso de Interpretación y Evaluación con los pasos que hemos dado**.