FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA INFORMÁTICA

Deducción Natural en L0

PRIMER CURSO DEL GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

PRIMER CUATRIMESTRE

2020-21

Índice del documento

Sistemas Deductivos (I)

- Un Sistema Deductivo esta formado por:
  - Un conjunto de Axiomas, que son fórmulas de partida que por principio son aceptadas.
  - Un conjunto de Reglas de Inferencia, que son esquemas para generar nuevas fórmulas, que establecen como construir nuevas expresiones a partir de unas iniciales.
  - Implementan un método SINTÁCTICO (no semántico) de pasos reiterativos, hasta que se cumple algún criterio de parada, formando una secuencia de fórmulas llamada Demostración.

CONSIDERACIONES PREVIAS O YA ESTUDIADAS

- Hasta ahora hemos estudiado el Razonamiento Lógico desde la perspectiva o enfoque Semántico. Hemos definido un Razonamiento como VÁLIDO si y solo si la conclusión del mismo es Consecuencia Lógica (relación semántica) del conjunto de premisas. Podemos afinar un poco más, y decir que un **Razonamiento es CORRECTO** si y solo si es Lógicamente Válido y sus premisas son verdaderas (el conjunto de premisas es satisfacible). Esto último es por obviar aquellas consecuencias lógicas que parten de un conjunto insatisfacible de premisas que realmente nos interesan bien poco, son escasamente informativas al no permitir saber si la conclusión será verdadera o falsa.

- Hemos visto que para comprobar que $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\} \models \beta$, podemos llevar a cabo dos planteamientos semánticos alternativos: a) comprobar que la oración $(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \wedge \alpha 3 \wedge \ldots . \wedge \alpha n \rightarrow \beta)$ es una Tautología; o bien, b) comprobar que la oración $(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \wedge \alpha 3 \wedge \ldots . \wedge \alpha n \wedge \neg \beta)$ es una Contradicción. Tanto para un planteamiento como para el otro disponemos de una serie de métodos semánticos que llamamos Técnicas SAT.

- El problema de comprobar una Consecuencia Lógica, lo transformamos en el problema de analizar la Satisfacibilidad de una determinada oración lógica. Cuando nos planteamos una consecuencia lógica, como comprobación de la Corrección de un Razonamiento Lógico, no decimos nada acerca del tipo de satisfacibilidad de las oraciones premisas o conclusión, es decir, de la verdad de las premisas no quiere decir que las mismas sean tautologías, serán eso si, satisfacibles cada una de ellas. Lo que realmente estamos diciendo es que dicho conjunto de premisas tiene al menos un Modelo (una interpretación) que las hace verdaderas, al tiempo que a la conclusión para dicha interpretación.

- Teniendo en cuenta el concepto de relación semántica para la Consecuencia Lógica, podemos derivar el concepto de Teoría Lógica al aplicar $\models$ reiteradamente sobre las nuevas consecuencias lógicas que se van obteniendo. Así:

- Un conjunto $\vdash$ de oraciones lógicas es una **TEORÍA** si y solo si dicho **conjunto es cerrado** bajo consecuencias lógicas, es decir, si y solo si para todas las oraciones **β: si $\{T\} \models \beta$ entonces $\beta \in T$ (β pertenece al conjunto T).** Los elementos de T se llaman **teoremas por consecuencia lógica**

- Una **TEORÍA** se dice que **es AXIOMATIZABLE**, si definimos $T(F) = \{\beta \mid \{F\} \models \beta\}$ y, por tanto, podemos decir que **$T(F)$ es una teoría del conjunto de oraciones $\{F\}$.** Los elementos de este conjunto de oraciones **$\{F\}$** se llaman **AXIOMAS** de la teoría.

- Una **TEORÍA** es contradictoria o inconsistente si en dicha teoría es posible demostrar una contradicción: podemos concluir que una oración es verdadera y falsa a la vez. En realidad, nuestras **Lógicas Formales Clásicas NO son inconsistentes**.

Facultad de Informática

Sistemas Deductivos (II)

- Demostración y Teoremas:
  - Una **Demostración** o Prueba Formal es una secuencia de fórmulas, en las que cada una de ellas es: o un Axioma, o una nueva que puede obtenerse de algunas anteriores aplicando una Regla de Inferencia. El criterio de parada usual es llegar a alguna expresión concreta que se ha propuesto como objetivo de la demostración.
  - Un **Teorema** (en Sistemas Deductivos) es la última fórmula, β, de una secuencia de Demostración. Se denotará por **⊢ β,** y se dirá que: β es demostrable, y que la secuencia es una demostración de β.
  - Utilizando una definición recursiva: Un Teorema, o es una Axioma o es el resultado de una Regla de Inferencia sobre otros Teoremas.
  - La connotación de método Sintáctico se asocia a que el foco se centrará en el ESQUEMA O FORMA de las fórmulas y no en su semántica o su valor de verdad. Por eso, ¡¡¡nos olvidamos de las oraciones lógicas!!! **Bienvenidas sean las FÓRMULAS Y SUS ÁTOMOS**.

ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS Y TEOREMA DE LA DEDUCCIÓN (SINTÁCTICA)

- No siempre los Teoremas se obtienen partiendo de un conjunto de axiomas. El conjunto de partida puede también contener supuestos o hipótesis de partida, lo que generaliza la definición de demostración dada anteriormente. Una **DEDUCCIÓN** o Estructura Deductiva se describe mediante dos sucesiones de fórmulas separadas por el símbolo "⟹". De esta forma, **{α1, α2, α3, …, αn}** ⟹ **{β1, β2, β3, …, βm}** representa una deducción en la que la sucesión $\boldsymbol{\alpha_i}$ es el antecedente y sus elementos se llaman Premisas. La sucesión β_j es el consecuente de la deducción y sus elementos se llaman Conclusiones.
- Una estructura deductiva o **Deducción** se define como **CORRECTA** cuando las fórmulas de la sucesión consecuente se obtienen de acuerdo con alguna de las reglas siguientes: a) β_j es una de las premisas; b) β_j es una fórmula válida o aceptada en el sistema, es decir, β_j es un axioma o un teorema; y c) β_j se deduce de alguna premisa o de alguna conclusión previa aplicando alguna Regla de Inferencia.
- El Teorema de la Deducción Sintáctica, o simplemente Teorema de la Deducción, es fundamental en la teoría de la demostración ya que permite definir una relación entre estructuras deductivas correctas y fórmulas válidas o teoremas. Su enunciado es el siguiente: Si **{α1, α2, α3, …, αn}** ⟹ **{β1, β2, β3, …, βm}** es una deducción correcta, existe una deducción correcta de **αn** → β_j con premisas **{α1, α2, α3, …, αn-1}**. O lo que es lo mismo, podemos tener la conclusión **αn** → β_j a partir del conjunto de premisas al que hemos eliminado la premisa **αn**.
- Este **Teorema de la Deducción**, que hay que demostrar para cada Sistema Deductivo determinado pero que afortunadamente se cumple para los que vamos a estudiar en esta asignatura, **es esencial** porque nos permite plantear la demostración de un teorema dado como la demostración o deducción de una estructura deductiva. Así, si queremos demostrar el teorema **⊢ α → (β → α)** bastaría con comprobar la corrección de la estructura deductiva **{α, β} ⊢ α**. Lo cual es obvio teniendo en cuenta la regla del apartado a) de la definición de corrección de una Estructura Deductiva. Su viceversa también es interesante: si **{α, β} ⊢ α** es una estructura deductiva correcta, entonces la fórmula **α → (β → α)** es un teorema del sistema, es decir, **⊢ α → (β → α)**. La demostración de Teoremas y la corrección de Estructuras Deductivas tiene un punto de conexión mediante el Teorema de la Deducción.
- **Teniendo en cuenta el concepto de DEDUCCIÓN:** La fórmula **α → (β → α)** es una teorema, es decir, una fórmula válida en el sistema, pero las fórmulas **α y β** de la estructura deductiva correcta **{α, β} ⊢ α** no lo son. En todo caso, ¡¡¡serán premisas de una deducción correcta teniendo como conclusión una de ellas!!!

Sistemas Deductivos (y III)

- Razonamientos y Deducciones:
  - En general, en un Razonamiento dado las premisas y la conclusión no serán, cada una de ellas, fórmulas válidas en un Sistema Deductivo. Por tanto, si en el contexto de un Sistema Deductivo nos planteamos **comprobar la corrección de un Razonamiento: la forma de hacerlo será demostrar que la Estructura Deductiva formada por las premisas y la conclusión del razonamiento es CORRECTA**, tal y como ha quedado definido anteriormente dicho concepto.
  - Cada Sistema Deductivo quedará definido por un conjunto de Axiomas y por un conjunto de Reglas de Inferencia. En dicho Sistema Deductivo podremos demostrar Teoremas, según la definición de Demostración. Y también, demostrar la corrección de una Estructura Deductiva. Teniendo en cuenta el Teorema de la Deducción, un Teorema representará una Estructura Deductiva correcta, que podrá ser utilizada en secuencias de Deducción como subsecuencias de la general.
  - Lo relevante es entender la connotación de la Deducción como **método Sintáctico asociado al ESQUEMA O FORMA de las fórmulas**.

ENTENDIENDO EL ESQUEMA DE UN AXIOMA O DE UN TEOREMA

- Aunque en la asignatura estudiaremos la DEDUCCIÓN NATURAL como Sistema Deductivo, existen otros muchos. Por ejemplo, el llamado **Sistema de Kleene** (1953), que se define sobre la base de un conjunto de ocho Axiomas y **una única Regla de Inferencia**, el Modus Ponens:

$$\frac{\vdash \alpha, \vdash (\alpha \rightarrow \beta)}{\vdash \beta}$$

- **Esta regla**, establece un criterio clásico de búsqueda de demostraciones en forma transitiva: para demostrar $\boldsymbol{\beta}$**,** si está demostrado $\boldsymbol{\alpha \rightarrow \beta}$, intentar demostrar $\boldsymbol{\alpha}$**.**
- **El segundo de los Axiomas** del Sistema de Kleene se escribe como sigue: $\boldsymbol{\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta))}$**,** donde $\boldsymbol{\alpha}$**,** $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\delta}$ son fórmulas cualesquiera.
- Si $\boldsymbol{\alpha = p \wedge q}$**,** $\boldsymbol{\beta = r}$**, y** $\boldsymbol{\delta = \neg q}$**,** entonces la fórmula $\boldsymbol{\vdash (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge q \rightarrow (r \rightarrow \neg q)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow \neg q))}$ es asimismo una fórmula axiomática. En este caso, particularizada al escenario deductivo de las partes que la componen, al tener idéntico esquema sintáctico: un esquema concreto de implicaciones anidadas.
- Por otra parte, teniendo en cuenta el Teorema de la Deducción (Sintáctica), este Axioma nos permite definir como Estructura Deductiva correcta la siguiente: $\boldsymbol{\{(\alpha \rightarrow \beta); (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)); \alpha\} \vdash \delta}$. Lo que nos plantea un clásico método de resolución de problemas: Si queremos deducir un objetivo $\boldsymbol{\delta}$**,** a partir de una premisa $\boldsymbol{\alpha}$**,** basta con demostrar que desde $\boldsymbol{\alpha}$ se puede deducir o derivar otro objetivo $\boldsymbol{\beta}$ tal que de éste se pueda deducir $\boldsymbol{\delta}$**.** Es lo que se conoce como la búsqueda de subobjetivos en serie, es decir, resolver un problema resolviendo subproblemas que se conectan en orden total.
- **El séptimo Axioma** de Kleene se formula de la siguiente manera: $\boldsymbol{\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha)}$**,** donde $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son fórmulas cualesquiera.
- Teniendo en cuenta el Teorema de la Deducción (Sintáctica), este Axioma representa una Estructura Deductiva clásica y correcta: $\boldsymbol{\{(\alpha \rightarrow \beta); (\alpha \rightarrow \neg \beta)\} \vdash \neg \alpha}$. Uno de los métodos más fructíferos en demostración lógica: el de **Reducción al Absurdo**. Que viene a decir que si una fórmula $\boldsymbol{\alpha}$ implica otra $\boldsymbol{\beta}$ y también a su negación $\boldsymbol{\neg \beta}$**,** entonces es deducible su negación $\boldsymbol{\neg \alpha}$. Por tanto, para demostrar la negación de una fórmula dada basta con demostrar que ésta implica otra y su negación.

El Sistema de Deducción Natural (I)

- En **Deducción Natural** no existen Axiomas, y tenemos estas trece Reglas de Inferencia básicas. En las páginas 4-13 del documento 04-Deducción-B que tienen en RECURSOS tienen la explicación del Sistema.

REGLA I∧ $\dfrac{\vdash \alpha , \vdash \beta}{\vdash \alpha \wedge \beta}$	**REGLA E∧** $\dfrac{\vdash \alpha \wedge \beta}{\vdash \alpha}$ $\dfrac{\vdash \alpha \wedge \beta}{\vdash \beta}$	**REGLA I→** $\dfrac{\vdash (\alpha \vdash \beta)}{\vdash \alpha \rightarrow \beta}$ Regla con 1 caja	**REGLA E→** $\dfrac{\vdash \alpha , \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\vdash \beta}$
REGLA I∨ $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \alpha \vee \beta}$ $\dfrac{\vdash \beta}{\vdash \alpha \vee \beta}$	**REGLA E∨** $\dfrac{\vdash \alpha \vee \beta , \vdash (\alpha \vdash \delta) , \vdash (\beta \vdash \delta)}{\vdash \delta}$ Regla con 2 cajas	**REGLA I↔** $\dfrac{\vdash \beta \rightarrow \alpha , \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\vdash \alpha \leftrightarrow \beta}$	**REGLA E↔** $\dfrac{\vdash \alpha \leftrightarrow \beta}{\vdash \alpha \rightarrow \beta}$ $\dfrac{\vdash \alpha \leftrightarrow \beta}{\vdash \beta \rightarrow \alpha}$
REGLA I¬ $\dfrac{\vdash (\alpha \vdash \beta \wedge \neg \beta)}{\vdash \neg \alpha}$ Regla con 1 caja	**REGLA E¬** $\dfrac{\vdash (\neg \alpha \vdash \beta \wedge \neg \beta)}{\vdash \alpha}$ Regla con 1 caja	**REGLA E¬¬** $\dfrac{\vdash \neg\neg \alpha}{\vdash \alpha}$	**REGLA CONTRA** $\dfrac{\vdash \alpha , \vdash \neg \alpha}{\vdash \beta}$
REGLA IT $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \alpha}$		Además de estas Reglas de Inferencia básicas, en Deducción Natural tendremos tantas Reglas Derivadas como Estructuras Deductivas hayamos demostrado	

El Sistema de la Deducción Natural en L0 (y II)

- Las Reglas del Sistema de Deducción Natural, en adelante Deducción Natural o DN, que hemos visto son en realidad Estructuras Deductivas básicas correctas asumidas a priori en el Sistema.
- Cuando queremos demostrar si una nueva Estructura Deductiva es correcta, debemos aplicar dichas reglas con el objetivo de obtener en nuestra secuencia de fórmulas la que sea conclusión, utilizando las premisas y las fórmulas que se vayan obteniendo al aplicar las reglas como fórmulas admitidas en la secuencia de deducción.
- Además del planteamiento de Deducción Directa, que intenta alcanzar conclusiones utilizando el menor numero de deducciones y de hipótesis posible, aplicando primero las Reglas de Inferencia que no requieran de supuestos, existen **tres estrategias de resolución de la deducción** planteada, en función de la forma del objetivo (o subobjetivo) que deseemos demostrar o deducir:
    - Si la fórmula **objetivo es de la forma ($\alpha \rightarrow \beta$)**, podemos utilizar la **estrategia del Teorema de la Deducción**. Consiste en introducir una subsecuencia de deducción con **α** como primera fórmula (llamada Supuesto) y deducir a partir de ella, y de las fórmulas previas a la subsecuencia, aplicando las Reglas de Inferencia, la fórmula β; es decir, obtener **$\vdash (\alpha \vdash \beta)$**. Con ello, se devolverá a la secuencia principal **$\vdash \alpha \rightarrow \beta$ en aplicación de la REGLA I$\rightarrow$**
    - Si la fórmula **objetivo es de la forma ($\neg \alpha$)**, podemos utilizar la **estrategia de Reducción al Absurdo**. Consiste en introducir una subsecuencia de deducción con **α** como primera fórmula (llamada Supuesto) y deducir a partir de ella, y de las fórmulas previas a la subsecuencia, aplicando las Reglas de Inferencia, la fórmula **($\beta \wedge \neg \beta$)**; es decir, obtener **$\vdash (\alpha \vdash \beta \wedge \neg \beta)$**. Con ello, se devolverá a la secuencia principal **$\vdash \neg \alpha$ en aplicación de la REGLA I$\neg$.** Similar estrategia **si el objetivo es (α), aplicando la REGLA E$\neg$**
    - Si la fórmula **objetivo es de la forma (δ)**, **y una de las premisas es de la forma ($\alpha \vee \beta$)**, podemos utilizar la **estrategia de Prueba por Casos.** Consiste en introducir dos subsecuencias de deducción, una de ellas con **α** como su primera fórmula (primer supuesto por Casos), y la segunda con **β** como su primera fórmula (segundo supuesto por Casos). Si en ambas subsecuencias se deduce la fórmula **(δ)**, se tendrá **$\vdash (\alpha \vdash \delta)$** y **$\vdash (\beta \vdash \delta)$**, respectivamente. Con ello, se devolverá a la secuencia principal **$\vdash \delta$ en aplicación de la REGLA E$\vee$**
- Es muy importante tener en cuenta que cuando se utilizan estas estrategias y se construyen subsecuencias de deducción, una vez que se ha devuelto a la secuencia principal el resultado de la misma, las fórmulas de dichas subsecuencias no pueden ser utilizadas a los efectos de la deducción principal: es como si fueran de una CAJA NEGRA. **¡¡¡ESTO NO HAY QUE OLVIDARLO!!!**
- Cuando un objetivo tiene por forma **($\alpha \wedge \beta$),** habrá que deducir independientemente **$\vdash \alpha$ y $\vdash \beta$**
- Cuando un objetivo tiene por forma **($\alpha \vee \beta$),** habrá que deducir, **o bien $\vdash \alpha$, o bien $\vdash \beta$**

La Deducción Natural en L0 (I)

- Vamos ahora a demostrar algunas de las Estructuras Deductivas más conocidas (ya sea porque son Consecuencias Lógicas de nuestro SISTEMA SEMÁNTICO), y que compondrán las llamadas Reglas Derivadas de la DN
- La REGLA IT, regla que nos permite iterar (o repetir) una fórmula de la secuencia general en un paso posterior de la misma, o en alguna subsecuencia (la viceversa, no es correcta), no es exactamente la estructura deductiva que nos indica que una conclusión puede ser obtenida por ser una premisa, por lo que vamos a demostrar ésta.
- En Deducción Natural, como en cualquiera de los Sistemas Deductivos, no podemos dar nada por demostrado o deducido, si no está en los axiomas o en las Reglas de Inferencia que determinan el Sistema. **¡¡¡Debemos demostrarlo todo!!!**

$\{(p)\} \vdash p$

1	**p**	**Premisa**
2	**$\neg p$**	**Supuesto R.A.**
3	**p**	**REGLA IT 1**
4	**$p \land \neg p$**	**REGLA I$\land$ 2,3**
5	**p**	**REGLA E$\neg$ 2-4**

La Deducción Natural en L0 (II)

- Vamos ahora a demostrar algunas de las Estructuras Deductivas más conocidas (ya sea porque son Consecuencias Lógicas de nuestro SISTEMA SEMÁNTICO), y que compondrán las llamadas Reglas Derivadas de la DN

$\{(p \to q); \neg q\} \vdash \neg p$

1	$p \to q$	Premisa 1ª
2	$\neg q$	Premisa 2ª
3	p	Supuesto R.A.
4	$p \to q$	REGLA IT 1
5	q	REGLA E$\to$ 3,4
6	$\neg q$	REGLA IT 2
7	$q \wedge \neg q$	REGLA I$\wedge$ 5,6
8	$\neg p$	REGLA I$\neg$ 3-7

Aplicando el Teorema de la Deducción, podemos escribir la regla de transposición

$\{(p \to q)\} \vdash \neg q \to \neg p$

$\{\neg(p \vee q)\} \vdash \neg p \wedge \neg q$

1	$\neg(p \vee q)$	Premisa
2	p	Supuesto R.A.
3	$p \vee q$	REGLA I$\vee$ 2
4	$\neg(p \vee q)$	REGLA IT 1
5	$(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	REGLA I$\wedge$ 3,4
6	$\neg p$	REGLA I$\neg$ 2-5
7	q	Supuesto R.A.
8	$p \vee q$	REGLA I$\vee$ 7
9	$\neg(p \vee q)$	REGLA IT 1
10	$(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	REGLA I$\wedge$ 8,9
11	$\neg q$	REGLA I$\neg$ 7-10
12	$\neg p \wedge \neg q$	REGLA I$\wedge$ 6,11

La Deducción Natural en L0 (III)

Facultad de Informática

- Vamos ahora a demostrar algunas de las Estructuras Deductivas más conocidas (ya sea porque son Consecuencias Lógicas de nuestro SISTEMA SEMÁNTICO), y que compondrán las llamadas Reglas Derivadas de la DN

$\{(p \rightarrow (q \rightarrow r))\} \vdash p \wedge q \rightarrow r$

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Premisa 1ª
2	$p \wedge q$	Supuesto T.D.
3	p	REGLA E$\wedge$ 2
4	q	REGLA E$\wedge$ 2
5	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	REGLA IT 1
6	$q \rightarrow r$	REGLA E$\rightarrow$ 3,5
7	r	REGLA E$\rightarrow$ 4,6
8	$p \wedge q \rightarrow r$	REGLA I$\rightarrow$ 2-7

$\{(p \rightarrow q)\} \vdash \neg p \vee q$

1	$p \rightarrow q$	Premisa
2	$\neg(\neg p \vee q)$	Supuesto R.A.
3	$\neg p$	Supuesto R.A.
4	$\neg p \vee q$	REGLA I$\vee$ 3
5	$\neg(\neg p \vee q)$	REGLA IT 2
6	$(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee q)$	REGLA I$\wedge$ 4,5
7	p	REGLA E$\neg$ 3-6
8	q	Supuesto R.A.
9	$\neg p \vee q$	REGLA I$\vee$ 8
10	$\neg(\neg p \vee q)$	REGLA IT 2
11	$(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee q)$	REGLA I$\wedge$ 9,10
12	$\neg q$	REGLA I$\neg$ 8-11
13	$p \rightarrow q$	REGLA IT 1
14	q	REGLA E$\rightarrow$ 7,13
15	$\neg q \wedge q$	REGLA I$\wedge$ 12,14
16	$\neg p \vee q$	REGLA E$\neg$ 2-15

La Deducción Natural en L0 (IV)

- Vamos ahora a demostrar algunas de las Estructuras Deductivas más conocidas (ya sea porque son Consecuencias Lógicas de nuestro SISTEMA SEMÁNTICO), y que compondrán las llamadas Reglas Derivadas de la DN

{(¬p ∧ ¬q)} ⊢ ¬ (p ∨ q)

1	¬p ∧ ¬q	Premisa
2	¬p	REGLA E∧ 1
3	¬q	REGLA E∧ 1
4	p ∨ q	Supuesto R.A.
5	p ∨ q	REGLA IT 4
6	p	Supuesto Casos 1º
7	¬p	REGLA IT 2
8	r ∧ ¬r	REGLA CONTRA 6,7
9	q	Supuesto Casos 2º
10	¬q	REGLA IT 3
11	r ∧ ¬r	REGLA CONTRA 9,10
12	r ∧ ¬r	REGLA E∨ 5-11
13	¬ (p ∨ q)	REGLA I¬ 4-12

{(p ∨ q); ¬p } ⊢ q

1	p ∨ q	Premisa 1ª
2	¬p	Premisa 2ª
3	¬q	Supuesto R.A.
4	¬p	REGLA IT 2
5	¬p ∧ ¬q	REGLA I∧ 3,4
6	¬(p ∨ q)	REGLA DERIVADA
7	p ∨ q	REGLA IT 1
8	¬ (p ∨ q) ∧ (p ∨ q)	REGLA I∧ 6,7
9	q	REGLA E¬ 3-8

Aplicación de una Regla Derivada

La Deducción Natural en L0 (y V)

- Vamos ahora a demostrar dos Estructuras Deductivas o, lo que es análogo, sus fórmulas derivadas (en este caso, son los dos axiomas del Sistema de Kleene comentados en la página 5) de la aplicación del Teorema de la Deducción, y viceversa:

$\vdash (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge q \rightarrow (r \rightarrow \neg q)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow \neg q))$

La Estructura Deductiva aplicando el T.D., es:

$\{(p \wedge q \rightarrow r); ((p \wedge q \rightarrow (r \rightarrow \neg q)); (p \wedge q)\} \vdash \neg q$

1	$p \wedge q \rightarrow r$	Premisa 1ª
2	$p \wedge q \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$	Premisa 2ª
3	$p \wedge q$	Premisa 3ª
4	r	REGLA E→ 1,3
5	$r \rightarrow \neg q$	REGLA E→ 2,3
6	$\neg q$	REGLA E→ 4,5

$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$

La Estructura Deductiva aplicando el T.D., es:

$\{(p \rightarrow q); (p \rightarrow \neg q\} \vdash \neg p$

1	$p \rightarrow q$	Premisa 1ª
2	$p \rightarrow \neg q$	Premisa 2ª
3	p	Supuesto R.A.
4	$p \rightarrow q$	REGLA IT 1
5	q	REGLA E→ 3,4
6	$p \rightarrow \neg q$	REGLA IT 2
7	$\neg q$	REGLA E→ 3,6
8	$q \wedge \neg q$	REGLA I∧ 5,7
9	$\neg p$	REGLA I¬ 3-8

Solidez y Completitud

- Consecuencia Lógica y Estructura Deductiva son dos conceptos lógicos bien diferentes; si bien, en ambos casos se relaciona una conclusión con sus premisas.
- En el caso de la Consecuencia Lógica, **dicha relación es Semántica**, de manera que si $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\} \vDash \beta$ esto quiere decir que si $v(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \wedge \alpha 3 \wedge \ldots . \wedge \alpha n) = V$, entonces $v(\beta) = V$
- En el caso de la Estructura Deductiva, **dicha relación es Sintáctica**, de manera que si $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\} \vdash \beta$ esto quiere decir que β o es un teorema o se deriva en una secuencia de fórmulas obtenidas todas ellas de la aplicación de Reglas de Inferencia sobre las α_i, tomadas éstas como premisas, o sobre las fórmulas previamente obtenidas en la secuencia deductiva.
- No obstante, los dos conceptos están ligados para un determinado Sistema Deductivo:
- Se dice que un **Sistema Deductivo es SÓLIDO o CORRECTO** cuando es cierto que:
  - Si se demuestra que $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\} \vdash \beta$, se puede comprobar que $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\} \vDash \beta$
  - Y por tanto, si se demuestra que $\vdash \beta$ **(β es un teorema)**, se puede comprobar que $\vDash \beta$ **(β es una tautología)**
  - Ésta es una propiedad esencial en cualquier Sistema Deductivo útil, dado que lo que nos dice esta propiedad es que todo aquello que ha sido demostrado (deducido o derivado) utilizando el Sistema Deductivo (enfoque sintáctico) es también semánticamente comprobado. Esto, además, nos permite trabajar sintácticamente (reglas de inferencia) con rigor sin necesidad de utilizar los potencialmente ineficientes métodos semánticos (técnicas SAT). **¡¡¡LA DEDUCCIÓN NATURAL ES UN SISTEMA SÓLIDO!!!**
- Por otra parte, Se dice que un **Sistema Deductivo es COMPLETO** cuando se cumple que:
  - Si se comprueba que $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\} \vDash \beta$, se puede demostrar que $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\} \vdash \beta$
  - Y por tanto, si se comprueba que $\vDash \beta$ **(β es una tautología),** se puede demostrar que $\vdash \beta$ **(β es un teorema)**
  - En principio, semánticamente es siempre posible comprobar si una consecuencia lógica es válida, dado que siempre es posible comprobar por técnicas SAT si una oración es tautológica. Pero, ¿es posible demostrar sintácticamente en cualquier sistema deductivo la corrección de un teorema? Pues no. Si el Sistema Deductivo es COMPLETO, así es, pero si no cumple esta propiedad, la respuesta es negativa. Esta es una propiedad, la COMPLETITUD, que no cumplen todos los Sistemas Deductivos. **¡¡¡LA DEDUCCIÓN NATURAL ES UN SISTEMA COMPLETO!!!**

Consistencia y Decidibilidad

- Teniendo en cuenta el concepto de DEMOSTRACIÓN (y en su caso, DEDUCCIÓN), podemos derivar el concepto de Teoría Deductiva al aplicar ⊢ reiteradamente sobre los Teoremas (en su caso, Estructuras Deductivas) que se van obteniendo en un Sistema Deductivo. Ya hemos visto que si el Teorema de la Deducción Sintáctica se cumple en el Sistema Deductivo determinado, una Estructura Deductiva representa un Teorema a través una fórmula que se escribe mediante implicaciones anidadas entre premisas y conclusión.
- En cualquier caso, podemos definir lo siguiente:
- Un conjunto T de fórmulas es una **TEORÍA** si y solo si dicho **conjunto es cerrado** bajo Demostraciones, es decir, si y solo si para todas las fórmulas **β: si $\{\mathrm{T}\} \vdash \beta$ entonces $\beta \in \mathrm{T}$ (β pertenece al conjunto T).** Los elementos de T se llaman **teoremas por Demostración**.
- Una **TEORÍA** se dice que **es AXIOMATIZABLE**, si definimos **$\mathrm{T}(\digamma) = \{\beta \mid \{\digamma\} \vdash \beta\}$** y, por tanto, podemos decir que **$\mathrm{T}(\digamma)$ es una teoría del conjunto de fórmulas $\{\digamma\}$.** Los elementos de este conjunto de fórmulas **$\{\digamma\}$** se llaman **AXIOMAS** de la teoría.
- Una **TEORÍA** es contradictoria o inconsistente si en dicha teoría es posible demostrar una contradicción: podemos concluir una fórmula y la negación de la misma aplicando el Sistema Deductivo que implemente la Teoría. **Una Teoría se dice que es Consistente si NO es Inconsistente**, y por lo tanto, **T ES CONSISTENTE** si y solo si, sólo puede demostrarse una fórmula β o su negación $\neg\beta$, pero no ambas a la vez: **$\{\mathrm{T}\} \vdash \beta$ o $\{\mathrm{T}\} \vdash \neg\beta$**.
- Por otra parte, dada una Teoría T y el Sistema Deductivo que implementa **(τ, ⊢),** se dice que:
- **$\{\mathrm{T}, \tau, \vdash\}$ es DECIBIBLE** si y solo si existen procedimientos para determinar la inconsistencia y la consistencia.
- **$\{\mathrm{T}, \tau, \vdash\}$ es SEMIDECIBIBLE** si y solo si existen procedimientos para determinar la inconsistencia y sólo a veces es posible determinar la consistencia.
- **$\{\mathrm{T}, \tau, \vdash\}$ es INDECIBIBLE** si y solo si no es posible determinar la inconsistencia, ni la consistencia.