Fundamentos Lógicos de la Informática

Extensión de SAT a L1

Grupo docente FLI

Dpto. Ingeniería de al Información y las Comunicaciones
Facultad de Informática
Universidad de Murcia

Desarrollo

Profundizamos en ...

Tableaux Semántico Ground - I

Algoritmo de construcción

Entradas: γ, una expresión.
Salidas: Un tableaux semántico Υ de γ.

1. Nodo raíz etiquetarlo con el conjunto $\{\gamma\}$ y marcarlo como no-resuelto.
2. Para cada nodo no resuelto, considerar su conj. de fórmulas $U(n)$
   a. Marcar nodo n como resuelto.
   b. Si $U(n)$ está formado sólo por literales,
      1. si existe literal y su negado, etiquetar el nodo como cerrado ✘.
      2. en otro caso, etiquetarlo como abierto ✔.

      En L1 un literal y su negado son de la forma $P(\tilde{C})$ y $\neg P(\tilde{C})$, con $\tilde{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$.
   c. Elegir una fórmula de $U(n)$ que no sea un literal,
      1. Si es α-fórmula crear hijo, l, y etiquetarlo con el conjunto $U(l) = (U(n) - \{\alpha\}) \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$

Tableaux Semántico Ground - II

Algoritmo de construcción

2. Si es β-fórmula crear hijos con etiquetas $U(l) = (U(n) - \{\beta\}) \cup \{\beta_1\}$ y $U(l') = (U(n) - \{\beta\}) \cup \{\beta_2\}$
3. Si se tiene una δ-fórmula crear uno nodo hijo l y etiquetarlo con el conjunto $U(l) = (U(n) - \{\delta\}) \cup \{\delta(C)\}$ donde C es una constante que **no aparezca** en $U(n)$.
4. Si se tiene una γ-fórmula y C es una constante que **aparece** en $U(n)$, crear uno nodo hijo l y etiquetarlo con el conjunto $U(l) = U(n) \cup \{\gamma(C)\}$.
   - Si $U(l)$ consta solo de literales y de γ-fórmulas , y
   - si $U(l)$ **no** contiene un par complementario de literales , y
   - si $U(n) = U(l)$ para todas las elecciones de C ,

     entonces etiquetar la hoja como abierto ✔.
5. Si se tiene una γ-fórmula y **no aparece** ninguna constante en $U(n)$, elegir una letra C como constante y crear uno nodo hijo l para etiquetarlo con el conjunto $U(l) = U(n) \cup \{\gamma(C)\}$.

3. Retornar el árbol Υ.

α, β, γ y δ fórmulas

Aplicar en este orden: $\alpha, \beta, \delta, \gamma$

α fórmulas		
α	α_1	α_2
$\neg\neg\xi$	ξ	
$\xi \wedge \varphi$	ξ	φ
$\neg(\xi \vee \varphi)$	$\neg\xi$	$\neg\varphi$
$\neg(\xi \rightarrow \varphi)$	ξ	$\neg\varphi$
$\xi \leftrightarrow \varphi$	$\xi \rightarrow \varphi$	$\varphi \rightarrow \xi$

β fórmulas		
β	β_1	β_2
$\neg(\xi \wedge \varphi)$	$\neg\xi$	$\neg\varphi$
$\xi \vee \varphi$	ξ	φ
$\xi \rightarrow \varphi$	$\neg\xi$	φ
$\neg(\xi \leftrightarrow \varphi)$	$\neg(\xi \rightarrow \varphi)$	$\neg(\varphi \rightarrow \xi)$

γ fórmulas	
γ	$\gamma(C)$
$\forall x\varphi(x)$	$\varphi(C)$
$\neg\exists x\varphi(x)$	$\neg\varphi(C)$

δ fórmulas	
δ	$\delta(C)$
$\exists x\varphi(x)$	$\varphi(C)$, C letra nueva
$\neg\forall x\varphi(x)$	$\neg\varphi(C)$, C letra nueva

Insatisfacibilidad

Definición (Árbol completado, abierto y cerrado)

- Un tableau cuya construcción termina se llama **tableau completado** o se dice que está completado.
- Un tableau completado es **cerrado** sii todas las hojas están marcadas como cerradas.
- Un tableau completado es **abierto** sii no es cerrado.

Teorema (Lógica de Predicados)

Si α es una expresión y Υ su tableau, entonces

- *Si Υ tiene todas las ramas cerradas, la expresión es insatisfactible.*

Profundizamos en ...

Refutación por reducción al absurdo

Procedimiento de demostración

Entradas: Conjunto $\mathcal{F}$, y una expresión cualquiera ξ.
Salidas: Indicar si $\mathcal{F} \models \xi$ es cierto o no.

1. Si $\mathcal{F}$ es inconsistente, se puede demostrar cualquier fórmula. Retornar.
2. Si $\mathcal{F}$ es consistente, definir $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{\neg\xi\}$.
3. Obtener el tableau Υ asociado a $\mathcal{F}'$
   - Si Υ es completo y cerrado, ξ es un teorema de $\mathcal{F}$.
   - En otro caso, “no se sabe” y no se puede afirmar ni negar que ξ sea una consecuencia lógica de $\mathcal{F}$.

Desarrollo

Profundizamos en ...

Cláusulas (Repaso)

Definición (Cláusula)

- *Una **cláusula** es la disyunción de literales.*
- *Una **cláusula** es un conjunto finito de literales.*

- Una cláusula con sólo un literal se llama **cláusula unitaria**.
- Una cláusula sin literales se llama **cláusula vacía** y se denota por $\square$.

Definición (Cláusula de Horn)

*Una **cláusula de Horn** es una cláusula con a lo sumo un literal positivo.*

La expresión general es de la forma $P \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2 \vee \cdots \vee \neg Q_n$

- Si $n = 0$, H se llama **hecho**.
- Si no hay literal positivo P, H se llama **objetivo**.
- Si $n > 0$ y existen el literal positivo P, H se llama **regla**.

Se utiliza para razonamiento "hacia atrás".

Forma Normal Conjuntiva (Repaso)

Definición

- *Una fórmula, ξ, está en* ***forma normal conjuntiva*** *si responde a la expresión $\wedge_i(\vee_j P_{i_j})$ donde P_{i_j} son literales (de L0 o L1).*
- *Un* ***conjunto clausal*** *o clausulado es un conjunto de cláusulas expresadas como conjuntos de literales.*
- *Una fórmula está en* ***forma clausal*** *si se expresa como un conjunto clausal.*

Ejemplo:La forma clausal de $(p \vee q) \wedge \neg p$ es $\{\{p, q\}, \{\neg p\}\}$
Ejemplo:El conjunto clausal $\{\{\neg p, q\}, \{r\}\}$ es la forma clausal de las fórmulas $(p \to q) \wedge r$ y $(\neg q \to \neg p) \wedge r$.

Son Equivalentes: F.N. conjuntiva (o clausal). Conjunción de disyunciones de literales. Conjunción de cláusulas. Conjunto clausulado. Forma clausal.

Otras formas Normales Conjuntiva en L1

Definición (FNC-Prenex, ξ_{Px})

*Una fórmula está en **forma normal conjuntiva prenex** (FNC-Prenex) sii es de la forma:* $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\ M[x_1, \ldots, x_n]$

- Q_i *es un cuantificador (o* $\forall$ *o* $\exists$*).*
- x_i *es una variable cuantificada por* Q_i*.*
- M *es una expresión verificando: (1) no contiene cuantificadores, (2) sus únicas variables son* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *(son libres en* M*). (3)* M *están en forma normal conjuntiva.*
- $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n$ *se llama **prefijo** de la fórmula.*
- $M[x_1, \ldots, x_n]$ *se llama **matriz** de la fórmula.*

Definición (FN de Skolem, ξ_{Sk})

*Una fórmula cerrada está en **forma normal de Skolem** (o forma clausal) sii está en FNC-Prenex y su prefijo sólo contiene cuantificadores universales.*

Satisfacibilidad y Consistencia

- Una cláusula es satisfacible si alguno de sus literales es cierto para alguna interpretación. Así, la cláusula $\square$ es insatisfactible.
- Una valoración v es un modelo del conjunto clausal Φ sii $v(C)$ para cada cláusulas $C \in \Phi$.
- Un conjunto de cláusulas es consistente sii tiene algún modelo.
- Un conjunto de cláusulas es inconsistente sii no tiene ningún modelo.
- El conjunto vacío de cláusulas, $\emptyset$, siempre es *VERDADERO* (válido).
- No confundir $\emptyset$ con $\square$.
- Una expresión en FNC, ξ_{FNC}, es una tautología sii en cada cláusula aparece un literal y su negado.
- Dada una expresión ξ podemos calcular expresiones ξ_{FNC} (en Lo y en L1), ξ_{Px} (en L1) y ξ_{Sk} (en L1) verificando:
    - En L0, $\xi \equiv \xi_{FNC}$. Conserva validez e insatisfactibilidad.
    - En L1,
        - $\xi \equiv \xi_{Px}$. Conserva validez e insatisfactibilidad.
        - $\xi \sim \xi_{Sk}$. Definición de $\sim$: ξ es satisfactibe sii ξ_{Sk} es satisfactible.
        - $\xi \sim \xi_{FNC}$. Sólo conserva insatisfactibilidad.

Profundizamos en ...

Proceso de Transformación

Fórmula	ξ	$\forall x(P(x) \to \exists y Q(y))$
$\downarrow$		
FNC-Prenex	ξ_{Px}	$\forall x \exists y(\neg P(x) \vee Q(y))$
$\downarrow$		
FN-Skolem	ξ_{Sk}	$\forall x(\neg P(x) \vee Q(f(x)))$
$\downarrow$		
FNC	ξ_{FNC}	$\neg P(x) \vee Q(f(x))$

$\xi \dashrightarrow \xi_{Px}$ -

Entradas: ξ, una expresión.
Salidas: ξ_{Px}, su forma normal prenex.

1. Normalizar Variables. Dos variables de cuantificadores diferentes no puede nombrase igual.
   Cambiar el nombre de las variables que están afectadas por cuantificadores hasta conseguir que cada cuantificador tenga su propia variable.
   $$Q_1x \dots Q_2x \dots Q_3x \dots \equiv Q_1x \dots Q_2y \dots Q_3z \dots$$
2. Eliminar todas los operadores binarios salvo $\wedge$ y $\vee$.
   Aplicar las reglas de eliminación de $\leftrightarrow$ y $\rightarrow$ de $L0$.
   $$\alpha \leftrightarrow \beta \;\equiv\; [\neg\alpha \vee \beta] \wedge [\alpha \vee \neg\beta]$$
   $$\alpha \rightarrow \beta \;\equiv\; \neg\alpha \vee \beta$$

$\xi \dashrightarrow \xi_{Px}$ - II

3. Reducir el alcance de las negaciones aplicando D'Morgan. Las negaciones solo deben afectar a fórmulas atómicas. Aplicar:

$$\begin{aligned}
\neg(\alpha \vee \beta) &\equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta \\
\neg(\alpha \wedge \beta) &\equiv \neg\alpha \vee \neg\beta \\
\neg(\exists x)\alpha[x] &\equiv \forall x\ \neg\alpha[x] \\
\neg(\forall x)\alpha[x] &\equiv \exists x\ \neg\alpha[x]
\end{aligned}$$

4. Eliminar las negaciones múltiples aplicando idempotencia: $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
5. Extraer los cuantificadoree de la matriz. Repetidamente, aplicar:

$$\begin{aligned}
\alpha \odot Qx\beta(x) &\equiv Qx(\alpha \odot B(x)) \\
\alpha[y] \odot Qx\beta(x) &\equiv Qx(\alpha[y] \odot B(x))
\end{aligned}$$

El operador $\odot$ representa a $\wedge$ o $\vee$, y Q representa a $\forall$ o $\exists$.

$\xi \dashrightarrow \xi_{Px}$ - III

6. Obtener la FNC en la matriz.
   a) Aplicar distributividad.

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma &\equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)\\ \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) &\equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)\end{aligned}$$

   b) Reducir la cantidad de paréntesis:

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &\equiv \alpha \wedge \beta \wedge \gamma\\ (\alpha \vee \beta) \vee \gamma &\equiv \alpha \vee \beta \vee \gamma\end{aligned}$$

   c) Eliminar información redundante.

$$\vdots$$

$\xi \dashrightarrow \xi_{Px}$ - IV

Eliminar información redundante (cont.)

i) Eliminar literales opuestos

$$\alpha \vee \neg\alpha \equiv \mathit{VERDAD}$$

$$\alpha \wedge \neg\alpha \equiv \mathit{FALSO}$$

ii) Eliminar constantes

$$\mathit{FALSO} \vee \alpha \equiv \alpha$$

$$\mathit{VERDAD} \wedge \alpha \equiv \alpha$$

iii) Eliminar literales iguales

$$\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$$

$$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$$

iv) Quedarnos con expresiones subsumidas (o literales incluidos)

$$(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \equiv \alpha$$

$\xi_{Px} \dashrightarrow \xi_{Sk} \dashrightarrow \xi_{FNC}$

Entradas: $\xi_{Px} : Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n M[x_1, \ldots, x_n]$, una expresión en FNC-Prenex.
Salidas: ξ_{FNC}, su forma normal conjuntiva.

1. Seleccionar el primer cuantificador existencial Q_i de ξ_{Px} y realizar el siguiente proceso de **Eliminación del cuantificador** Q_i:
   a) Si Q_i es el primero elegir una signatura que representa a una constante F no utilizada en la expresión ξ_{Px}.
      F recibe el nombre de **una Cte. de Skolem**
   b) Si Q_i **no** es el primero:
      - Elegir una signatura f no usada en la expresión ξ_{Px} que represente a una función de aridad $i-1$.
      - Usar como argumentos de f a las variables x_t cuantificadas universalmente que se encuentran antes de Q_i.

      La función f recibe el nombre de **una función de Skolem**.
   c) Eliminar $Q_i x_i = \exists x_i$ de ξ_{Px}.
   d) Sustituir en ξ_{Px} la variable x_i por la constante F o la función f (según proceda) en la matriz M.
2. Repetir 1 mientras que sea posible (hasta obtener ξ_{Sk}).
3. Eliminar los cuantificadores universales.

Profundizamos en ...

Unificadores

- Dado un conjunto de expresiones $\{P_i\}_{i=1}^{k}$ y una sustitución s, se dice que s es un **unificador** sii $P_1 s = P_2 s = \ldots = P_k s$, en cuyo caso se denotará por $\{P_i\}s$.
- Si existe s tal que $\{P_i\}s$, se dice que $\{P_i\}_{i=1}^{k}$ es **unificable**.

Definición (Unificador más general)

El ***unificador más general****, g, para un conjunto $\{P_i\}_{i=1}^{k}$ es aquel que hace que todos los demás unificadores se contemplen como casos particulares de g.*
Es decir, si g es el unificador más general g, y s es otro unificador,
$\exists$ una sustitución t tal que $s = g \cdot t$. (es decir,$\{P_i\}g \cdot t = \{P_i\}s$)

Par Discordante

Definición (Par discordante)

Dados dos literales P y P', con términos i-ésimos t_i y t'_i:

- *Si tienen símbolos principales distintos, t_i y t'_i constituyen un par discordante.*
- *Si coinciden en los símbolos principales, las parejas formada por los pares discordantes de sus términos son pares discordantes de t_i y y t'_i*

Ejemplo.

- Los términos $p(x, A)$ y $q(x, B)$ tienen un único par discrepante: $< p(x, A), q(x, B) >$.
- Los términos $p(f(x), y)$ y $p(f(g(y)), A)$, tienen 2 pares discrepantes: $< x, g(y) >$ y $< y, A >$.
- Los términos $p(A, f(B, C), g(x))$ y $p(A, f(x, y), g(h(z))$, tienen 3 pares discordantes: $< B, x >$, $< C, y >$ y $< x, h(z) >$

Unificación de Literales: Algoritmo De Robinson

Entradas: $\Sigma = \{P, P'\}$, el par de literales que se desea unificar.
Salidas: El unificador más general, g, de Σ.

1. Si P y P' difieren en el predicado, no son unificables. Salir.
2. Si P y P' comparten variables, realizar particularizaciones alfabéticas hasta que difieran.
3. Considerar la sustitución vacía $g = \sigma_0 = \{\}$. Definir $P_0 = P\sigma_0$ y $P'_0 = P'\sigma_0$.
4. Mientras $P_k \neq P'_k$ (inicialmente $k = 0$), determinar el primer par discordante $< t, t' >$ y hacer:
   a) Si ni t_i ni t'_i son variables entonces no son unificables. Salir.
   b) Si uno es variable x y otro es término t (si los dos son variables, uno hace de término):
      i) Si x se encuentra en t (occur check), no son unificables. Salir.
      ii) Definir
      $k := k + 1$, $\sigma_k = \{t/x\}$, $P_k = P_{k-1}\sigma_k$, $P'_k = P'_{k-1}\sigma_k$ y $g := g \cdot \sigma_k$.
5. (Si $P_k = P'_k$) Retornar como u.m.g. $g = \sigma_0 \cdot \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_k$.

Unificación de Clásulas

Entradas: $\Sigma = \{\xi_1, \xi_2\}$, un par de cláusulas.
Salidas: El unificador más general, g, de Σ.

1. Definir $g = \emptyset = \{\}$.
2. Para cada literal P_1 de ξ_1 hacer:
    1. Para cada literal P_2 de ξ_2 hacer:
        1. Definir $s := Unificar\_Literal(P_1, P_2)$
        2. Hacer las sustituciones $\xi_1 s$ y $\xi_2 s$.
        3. Hacer $g := g \cdot s$.
3. Devolver g

Profundizamos en ...

1. Tableaux Semántico: Construcción y Razonamientos
   - Construcción
   - Razonamiento automático
2. Seminario: Resolución
   - Definiciones y Resultados Básicos
   - Algoritmo de transformación de ξ a ξ_{FNC}
   - Unificador más general posible. Algoritmo de Robinson.
   - **Reglas de inferencia**
   - Consistencia
   - Representación del procedimiento de resolución.
   - Razonamiento automático
   - Consideraciones teóricas

Reglas de Inferencia del S.D.R.R.

1. Regla de Resolución. Si ξ_1 y ξ_2 **no comparten variables**:

$$\xi_1 s, \xi_2 s \vdash_{\mathsf{RR}} R_{Ps}(\xi_1 s, \xi_2 s)$$

donde s es el umg del P en ξ_1 y el P de ξ_2. Si comparten variables aplicar sustitución hasta que sean diferentes.

2. Regla de Factorización o Regla de Eliminación de Literales "Iguales". Si P_1 y P_2 **no comparten variables** y $\{P_i\}s$, o $P_1 = P_2$:

$$\xi \vee P_1 \vee P_2 \vdash_{\mathsf{RF}} \xi s$$

Idea: duplican información. Se puede suprimir esta regla sii se trabaja con (a) conjuntos clausales y (b) unificación clausal.

3. Regla de Eliminación de Literales "Opuestos". Si P_1 y P_2 **no comparten variables** y $\{P_i\}s$, o $P_1 = P_2$:

$$\xi \vee P_1 \vee \neg P_2 \vdash_{\mathsf{RE}} \emptyset$$

Idea: generan una tautología y no determinan la insatisfactibilidad.

Profundizamos en ...

Procedimiento de Resolución

(In)Consistencia de un conjunto de fórmulas clausales

Entradas: $\mathcal{F}$, un conjunto de expresiones clausales.
Salida: Indica si $\mathcal{F}$ es consistente o no.

1. Definir $\mathcal{F}_0$ como el conjunto clausal de $\mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}_i = \mathit{Resolventes}(\mathcal{F}_{i-1})$. Inicialmente $i = 1$.
3. Si $\mathcal{F}_i \neq \emptyset$, hacer
   - A) Si $\square \in \mathcal{F}_i$, parar. Retornar que $\mathcal{F}$ es inconsistente
     Se ha encontrado un literal y su negado.
   - B) Si $\square \notin \mathcal{F}_i$, hacer
     - a) $\mathcal{F}_i := \mathcal{F}_{i-1} \cup \mathcal{F}_i$;
     - b) $i = i + 1$;
     - c) Ir a 2.
4. Si $\mathcal{F}_i = \emptyset$,
   - Si ha terminado, retornar que $\mathcal{F}$ es consistente
     Además, $\mathcal{F}_{i-1}$ coincide con el cierre del conjunto clausulado, $\mathcal{F}^*$.
   - Si no ha terminado (faltan recursos) retornar "no se sabe".

Profundizamos en ...

1. Tableaux Semántico: Construcción y Razonamientos
   - Construcción
   - Razonamiento automático
2. Seminario: Resolución
   - Definiciones y Resultados Básicos
   - Algoritmo de transformación de ξ a ξ_{FNC}
   - Unificador más general posible. Algoritmo de Robinson.
   - Reglas de inferencia
   - Consistencia
   - **Representación del procedimiento de resolución.**
   - Razonamiento automático
   - Consideraciones teóricas

Representación Fitting

1	$\vdots$	
2	C_t	Premisa
3	$\vdots$	
4	$\vdots$	
5	ξ	R(i,j), Ps
6	$\vdots$	
7	ψ	F(i), Ps
8	$\vdots$	

- $C_t \in \Delta$
- $\vdash_{\text{RR}}$. $\xi = R_{Ps}(C_i, C_j)$
  - ξ es la resolvente de C_i y C_j respecto de Ps.
  - C_i es la cláusula que se encuentra en la línea i.
  - P es el literal respecto del que se hace la resolución.
  - s es el umg de P (en L1).
  - Ps es la particularización por sustitución de la expresión P según la sustitución s (en L1).
- $\vdash_{\text{RF}}$. $\psi = F_{Ps}(C_i)$, es usar factorización sobre la línea i respecto de Ps.
- $\vdash_{\text{RE}}$. No tienen sentido generar líneas.

Grafo de resolución

Se construirá un grafo de resolución en el sentido de L0, pero según la regla a aplicar se etiquetarán las ramas o se generarán nuevos nodos.

1. Si se aplica la Regla de Resolución.

   $$\xi_1 s, \xi_2 s \vdash_{\mathrm{RR}} R_{Ps}(\xi_1 s, \xi_2 s)$$

   Una de las ramas se etiquetará con s.

2. Si se aplica Regla de Factorización o Regla de Eliminación de Literales "Iguales" (información duplicada):
   Se generará un nuevo nodo donde se elimine la información duplicada.
   Recuerda que se puede suprimir esta regla sii se trabaja con (a) conjuntos clausales y (b) unificación clausal.

3. Si se aplicara la Regla de Eliminación de Literales "Opuestos" se tachará el nodo de la cláusula trivial.

Profundizamos en ...

1. Tableaux Semántico: Construcción y Razonamientos
   - Construcción
   - Razonamiento automático
2. Seminario: Resolución
   - Definiciones y Resultados Básicos
   - Algoritmo de transformación de ξ a ξ_{FNC}
   - Unificador más general posible. Algoritmo de Robinson.
   - Reglas de inferencia
   - Consistencia
   - Representación del procedimiento de resolución.
   - Razonamiento automático
   - Consideraciones teóricas

Refutación por reducción al absurdo

Procedimiento de demostración

Entradas: Conjunto $\mathcal{F}$, y una expresión cualquiera ξ.
Salidas: Indicar si $\mathcal{F} \models \xi$ es cierto o no.

1. Si $\mathcal{F}$ es inconsistente, se puede demostrar cualquier fórmula. Retornar.
2. Si $\mathcal{F}$ es consistente, definir $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{\neg\xi\}$.
3. Aplicar el operador Regla de (In)Consistencia (procedimiento de resolución) al conjunto $\mathcal{F}'_{FNC}$.
    - Si $\mathcal{F}'_{FNC}$ es inconsistente, entonces ξ es un teorema (es deducible) de $\mathcal{F}$.
    - En otro caso "no se sabe", entonces no se puede afirmar ni negar que ξ sea un teorema de $\mathcal{F}$.

Respondiendo a Preguntas Existenciales. $\varphi: \ \exists x \ \psi[x]$

Solo por Resolución.

Problema 1: Indicar si $\mathcal{F} \models \xi$ es cierto o no.
Comprobar si $\{\{\neg\varphi\} \cup \Sigma\}_{FNC} \vdash \square$.

Problema 2: ¿Cuál es la particularización de x para $\Sigma \models \varphi$?

- Recorrer el árbol solución hasta llegar a $\square$ del siguiente modo.
  1. Añadir $ans(x)$ al conjunto de entrada.
     Si ξ es cláusula de $(\neg\varphi)_{FNC}$, sustituir ξ por $\xi \vee ans(x)$.
     La variable x será la misma que la utilizada en ξ.
  2. Propagar $ans(x)$.
     Si una cláusula padre ξ tiene $ans(x)$, modificar la resolvente hija añadiendo $ans(x)$ según indique el conjunto de unificación.
- Las cláusulas $ans()$ que aparezcan en $\square$ es la respuesta buscada.

Si se usan árboles:

- Solución al Problema 1 es un árbol solución (de la refutación).
- Solución al Problema 2 es un **árbol de derivación**.

Profundizamos en ...

Resolución

Dado $\mathcal{F}$, conjunto de cláusulas:

- Solidez.
  - Si la cláusula vacía $\Box$ se deriva por el procedimiento de resolución, entonces $\mathcal{F}$ es insatisfacible.
  - Si $\mathcal{F} \vdash_{\mathsf{RR}} \xi$, entonces $\mathcal{F} \models \xi$.
- Completitud.
  - Si $\mathcal{F}$ es insatisfacible, la cláusula vacía $\Box$ en L0 se derivará y en L1 se puede derivar por el procedimiento de resolución.
  - Si $\mathcal{F} \models \xi$, entonces $\mathcal{F} \vdash_{\mathsf{RR}} \xi$ **por refutación**.
    $\vdash_{\mathsf{RR}}$ 'per se' no es completo.
    P.e. $p \models p \vee q$, $p \not\vdash_{\mathsf{RR}} p \vee q$, $\{p, \neg(p \vee q)\}_{FNC} \vdash_{\mathsf{RR}} \Box$.

Observa que:

- Comprobar la insatisfacibilidad es equivalente a comprobar la inconsistencia.
- Existe una relación directa entre satisfacibilidad y consistencia.