EJERCICIOS DE CÁLCULO **_CURSO 2019-20_**

HOJA 1 (SUCESIONES)

1. Demuestra por inducción que las siguientes igualdades son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$:

   a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

   b) $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, para todo $r \neq 1$.

   c) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

   d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   e) $-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = \dfrac{(-1)^n\, n(n+1)}{2}$.

   f) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   g) $3^2 + 6^2 + 9^2 + \cdots + (3n)^2 = \dfrac{3n(n+1)(2n+1)}{2}$.

   h) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

2. Demuestra por inducción que

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

   para todo $n \geq 2$.

3. Demuestra por inducción que $n^2 < 2^n$ para todo $n \geq 5$.

4. Demuestra por inducción que $2^n < n!$ para todo $n \geq 4$.

5. Demuestra por inducción que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

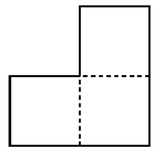
   para todo $n \geq 2$.

6. La sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$ se define recurrentemente como:

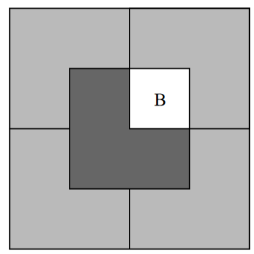
$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 3. \end{cases}$$

   Demuestra por inducción que F_{3n} es un número *par* para todo $n \in \mathbb{N}$.

7. Dado un tablero de ajedrez de tamaño $2^n \times 2^n$ (siendo $n \in \mathbb{N}$) con un cuadrado cualquiera borrado, utiliza el método de inducción para demostrar que es posible cubrir ese tablero con piezas en forma de "L" que se pueden rotar, de la forma:



Por ejemplo, para un tablero 4×4 ($n = 2$) con un cuadrado borrado:



[Nota: no hay que mostrar necesariamente dicho cubrimiento, sólo hay que demostrar teóricamente su existencia.]

8. Se considera la sucesión definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + 2n \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Demuestra que a_n es monótona estrictamente creciente y no está acotada superiormente.

(b) Encuentra una definición explícita para a_n.

9. Se considera la sucesión definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \dfrac{2a_{n-1}}{n} \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

Encuentra una definición explícita para a_n y utilízala para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

10. Sea a_n la sucesión definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{3a_{n-1}}{n+1} \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

Encuentra una fórmula explícita para a_n y utilízala para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

11. Para cada una de las siguientes condiciones, encuentra una sucesión que la cumpla, o bien, justifica que tal sucesión no puede existir:

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3 \text{ y } a_n < 3 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \\
(b) & \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \text{ y } a_n > 0.5 \text{ a partir de un término.} \\
(c) & \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 \text{ y } a_n < 1.5 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \\
(d) & \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ y } a_n \text{ no es monótona.}
\end{array}
$$

12. Para cada una de las siguientes condiciones, encuentra sucesiones que la cumplan, o bien, justifica que tales sucesiones no pueden existir:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $a_n < 10^{10}$ a partir de un término.

    (b) $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

    (c) a_n es acotada, b_n diverge a ∞ y $\dfrac{a_n}{b_n}$ no es convergente a 0.

    (d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ y a_n no es monótona.

13. Demuestra que las siguientes sucesiones convergen a cero:

$$
(a) \quad \frac{n^{(2/3)} \operatorname{sen}(n!)}{n+1} \qquad\qquad (b) \quad \frac{(n+3)\cos(n\pi)}{\sqrt{n^3+2}}
$$

14. Demuestra que la sucesión $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ está acotada y deduce que $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}$ converge a cero.

15. Demuestra que la sucesión $\dfrac{\log(n!)}{n \log n}$ está acotada y deduce que $\dfrac{\log(n!)}{n \log^2 n}$ converge a cero.

16. Demuestra que la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n^6} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5$ está acotada y deduce que la sucesión

$$
b_n = \frac{1}{n^7} \sum_{k=1}^{n} k^5
$$

    converge a cero.

17. Se considera la sucesión recurrente definida por: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (a) Prueba que es monótona creciente y acotada superiormente.

    (b) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

18. Se considera la sucesión recurrente definida por: $a_1 = 2,\ \ a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (a) Demuestra por inducción que todos sus términos están en el intervalo $[1, 2]$.

    (b) Justifica que es convergente y halla su límite.

19. Se considera la sucesión recurrente definida por: $a_1 = 2,\ \ a_{n+1} = \dfrac{1}{3 - a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (a) Estudia si es convergente.

    (b) Si es convergente, calcula su límite.

20. Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

    (a) Demuestra que $0 \leq a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (b) Demuestra que a_n es convergente y calcula su límite.

21. Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 1 + \dfrac{1}{4 - a_{n-1}} \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

    (a) Demuestra que $1 \leq a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (b) Demuestra que a_n es convergente y calcula su límite.

22. Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n-1} + 2} \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

    (a) Demuestra que $1 \leq a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (b) Demuestra que a_n es convergente y calcula su límite.

23. Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = 2 - \dfrac{1}{1 + a_{n-1}} \quad \text{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

    (a) Demuestra que $0 \leq a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (b) Demuestra que a_n es convergente y calcula su límite.

24. Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = -\dfrac{1}{2(1+a_{n-1})} + 1 \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Demuestra que $0 \leq a_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demuestra que a_n es convergente y calcula su límite.

25. Se considera la sucesión a_n definida por recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n^2} - 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Demuestra que $0 \leq a_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demuestra que a_n es monótona estrictamente creciente.

(c) Deduce que la sucesión a_n es convergente y calcula su límite.

26. Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = 3 - \dfrac{1}{a_{n-1}+1} \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

Demuestra que a_n es convergente y calcula su límite.

27. Se considera la sucesión a_n definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3 - \dfrac{2}{a_{n-1}+2} \quad \text{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

Determina si a_n es convergente y, en caso afirmativo, calcula su límite.

28. Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{5}{5-a_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Determina si a_n es convergente y, en caso afirmativo, calcula su límite.

29. Calcula (si existen) los límites de las siguientes sucesiones:

(a)	$\dfrac{\sqrt{3n^3+1}}{2n^2+n}$	(b)	ne^{-n}	(c)	$\dfrac{\log n}{2n^2+n}$
(d)	$(-1)^{n-1} + \cos(n\pi)$	(e)	$\cos(n\pi/2)$	(f)	$(-7/9)^n$
(g)	$(-1)^n + \dfrac{3n^2-5}{n^2}$	(h)	$\sqrt[n]{n^n+3^n}$	(i)	$\dfrac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n}$

30. Calcula los límites siguientes:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2^n}{n}\right)\qquad (b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{-\log n+\operatorname{sen}(n^2)}{\log n}$$

$$(c)\ \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{si } a_n \text{ es una sucesión que cumple } \ 0<\sqrt{n}\,a_n<2 \quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

31. Calcula los límites siguientes:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{2^n-1}+(-1)^{n-1}\right)\qquad (b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\cos(n^3)}{\sqrt{n}+1}$$

$$(c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(\operatorname{sen} n+3)^n}{5^n}\qquad (d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen} n-3\cos n}{\sqrt{n^3}}\qquad (e)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(n!)+(-1)^n-3^n}{3^n+2^n+1}$$

32. Calcula los límites de las siguientes sucesiones:

   a) $\dfrac{1+4^{n-1}}{7^{n-2}}$

   b) $(-1)^{n+1}\cdot\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)+2^n$

   c) $\dfrac{e^{a_n}}{\sqrt{n}}$ donde la sucesión a_n está definida por la fórmula $a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{n}{n+1}$.

33. Se considera la sucesión recurrente definida por: $a_1=1,\ \ a_{n+1}=a_n+\dfrac{1+a_n}{1+2a_n}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Demuestra que a_n es divergente.

34. Demuestra las siguientes relaciones:

$$(a)\ \sqrt{n^2+3n+7}\sim n\qquad (b)\ \sqrt{3n^5+1}\ll n^3\qquad (c)\ \log(n^2)\sim\log n$$

$$(d)\ \log(n+1)\sim\log n\qquad (e)\ \log(\log n)\ll\log n\qquad (f)\ n!\ll(n+1)!$$

35. Sean a_n y b_n dos sucesiones de términos positivos tales que $a_n\sim b_n$. Demuestra que $a_n+b_n\sim a_n$.

36. Para cada una de las siguientes condiciones, encuentra sucesiones que la cumplan, o bien, justifica que tales sucesiones no pueden existir:

   (a) $a_n\ll b_n$ y a_nb_n no es del mismo orden que b_n.

   (b) $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\infty,\ \ a_n\sim b_n$ y $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\neq 0$.

37. Un ordenador procesa n datos en n^2 segundos. Una preparación previa de los datos, que se tarda 1 hora en hacer, permite procesar n datos en $(n+1)\log_2(n)$ segundos. Indica razonadamente si para valores grandes de n interesa la preparación.

38. Los tiempos de ejecución de dos algoritmos que resuelven el mismo problema con n datos de entrada son del orden de, respectivamente, $n(\log n)^2$ y $n^2 \log n$. Indica razonadamente cuál de los dos algoritmos es más rápido para valores grandes de n.

39. El Profesor Bacterio está preparando un experimento para transformar guisantes en manzanas, pero antes quiere hacer una simulación del mismo en el ordenador. Para ello tiene dos algoritmos programados: uno que requiere $\log(n^2+2^n)$ operaciones, y otro que requiere $\sqrt[3]{n}$ operaciones, siendo n el número de guisantes a transformar. ¿Qué algoritmo realiza muchas menos operaciones para simular el experimento cuando se aplica a cantidades arbitrariamente grandes de guisantes?

40. Encuentra el orden de magnitud de las siguientes sucesiones y ordénalas según dicho orden:

$$a_n = n^3 2^n - n^2 3^n \qquad b_n = \frac{(n+3)!}{n! + 3^n}$$

41. Encuentra el orden de magnitud de las siguientes sucesiones y ordénalas según dicho orden:

$$a_n = \frac{5^n n^4}{2^n + (\log n)^3} + (-3)^n \sqrt{n^4 + 2n - 1} \qquad b_n = (n-1)! + 3^n + 5^{-n}$$

42. Encuentra el orden de magnitud de las siguientes sucesiones y ordénalas según dicho orden:

$$a_n = 7n^6 5^n + 6n^5 6^n \qquad b_n = (n+2)! + 4^n n!$$

43. Encuentra el orden de magnitud de las siguientes sucesiones y ordénalas según dicho orden:

$$a_n = 2^n n^3 + 3^n n^2 \qquad b_n = (n+7)! \qquad c_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\log(n^2) + (\log n)^2 + 1}$$

44. Encuentra el orden de magnitud de las siguientes sucesiones y ordénalas según dicho orden:

$$a_n = 3^n n^4 + 4^{n-1} n^3 + \log n \qquad b_n = (n-1)! \qquad c_n = \frac{\log(2^n) + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$$

45. Encuentra el orden de magnitud de las sucesiones siguientes y ordénalas según dicho orden:

$$a_n = \frac{2n^2}{\log\left(n^2 + 2n + 1\right)} \cdot \frac{\log\left((n+1)^{(n+1)}\right)}{\sqrt{n^3}} \qquad b_n = n^2 e^{2n} - 3^n \qquad c_n = \frac{(n+2)!}{n^2 - n + 1}$$

46. Encuentra el orden de magnitud de las siguientes sucesiones y ordénalas según dicho orden:

$$a_n = 2^{n+7} n^5 - 5^n (n+3)^2 \qquad b_n = \frac{(2n+1)!}{4^n + n^n} \qquad c_n = \frac{(\log n)^2 + \log(n^3)}{1 + \sqrt{n}\log n + (\log n)^2}$$

47. Encuentra el orden de magnitud de las tres sucesiones cuyos términos generales se dan a continuación y ordénalas mediante la relación "ser mucho menor que":

$$a_n = \frac{(n-1)! \cdot n^{n+1}}{n! + 2^n} \qquad b_n = \frac{n \log(n^n)}{\sqrt{n^5}} \qquad c_n = 2^{n-1} + (-4)^n n^2$$

48. Determina el orden de magnitud de cada una de las sucesiones siguientes y ordénalas según dicho orden:

(a) $\dfrac{\sqrt{n^5+1}}{2n+\sqrt{n^3}}$ *(b)* $\dfrac{3n^2+6n-1}{\sqrt{n^2+1}} \log(3n^2)$ *(c)* $\dfrac{n!+n^n}{n^2}$

(d) $(n^2+3^n)\log(2n^2)$ *(e)* $\dfrac{\log(n^n)}{7n+\log n} \cdot \dfrac{1}{3\log n + 1}$ *(f)* $\dfrac{n}{3} - \cos n$

(g) $4^{n-1} + (-4)^n n$ *(h)* $r^n + n^2 \quad \text{con } |r| < 1$ *(i)* $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

49. Determina el orden de magnitud de cada una de las sucesiones siguientes y ordénalas según dicho orden:

(a) $\dfrac{\sqrt{n^5+1}}{2\sqrt{n^3}+n^2}$ *(b)* $\dfrac{1}{\cos(n)+n}$ *(c)* $\dfrac{(n+1)!}{\log(n^n)+n^2}$

(d) $\dfrac{\log(n^n)+\sqrt{n+1}}{4n^2+n-1}$ *(e)* $\dfrac{3\sqrt{n}}{\log(n+1)} \cdot \dfrac{\log(n^n)}{\sqrt{n^3}}$ *(f)* $3^n - n3^{n-1}$

(g) $ne^{3n} - 3^n$ *(h)* $r^n + n^2 \quad \text{con } 1 < |r| < 3$ *(i)* $(n+1)^{3/2} - n^{3/2}$

50. Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = -\dfrac{n-1}{2} \cdot a_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Encuentra una fórmula explícita para a_n.

(b) ¿Es monótona? ¿Es acotada? ¿Es convergente?

(c) Determina el orden de magnitud de a_n.

51. Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{2}} \cdot a_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Encuentra una fórmula explícita para a_n.

(b) ¿Es monótona? ¿Es acotada? ¿Es convergente?

(c) Determina el orden de magnitud de a_n.

52. Sea a_n el número de instrucciones de un determinado algoritmo para su ejecución sobre n datos de entrada. Se sabe que dicho algoritmo actúa del siguiente modo:

- Con un sólo dato de entrada resuelve el problema con una instrucción.

- Con n datos de entrada usa $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y se ejecuta el mismo algoritmo sobre ellos.

(a) Define la sucesión recurrente a_n.

(b) Estudia la monotonía y acotación de la misma.

(c) Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $|a_n - 2n^2| < 2n$.

(d) Deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2n^2} = 1$.

(e) Determina el orden de magnitud de la sucesión a_n.

Para resolver con *SAGE*

53. Dada la ecuación $\tan(x) = \dfrac{1}{x-1}$ se pide:

(a) Prepara la ecuación, localiza y separa gráficamente sus dos soluciones negativas más cercanas a $x = 0$ en intervalos de anchura 0.5.

(b) Realiza manualmente dos pasos del método de bisección para aproximar la solución negativa más cercana a $x = 0$.

(c) Calcula aproximadamente las soluciones indicadas en el apartado (a) mediante el método de bisección, con error absoluto menor que 10^{-8}.

54. Dada la función $f(x) = e^x - e^{-x} - x^3 + 1$ se pide:

(a) Localiza y separa gráficamente todas las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ en intervalos de anchura 0.5.

(b) Realiza manualmente dos pasos del método de bisección para aproximar la raíz que está más cerca de $x = 0$.

(c) Calcula aproximadamente todas las raíces positivas de la ecuación mediante el método de bisección, con error absoluto menor que 10^{-8}.

(d) Utiliza el comando *"find_root"* para hallar las soluciones positivas de la ecuación y compara las soluciones obtenidas con las del apartado (c).

55. Dada la ecuación $\dfrac{1}{\log(x)} = \sin(x)$ se pide:

(a) Prepara la ecuación, localiza y separa gráficamente sus dos soluciones más cercanas a $x = 0$ en intervalos de anchura 0.5.

(b) Calcula aproximadamente dichas soluciones mediante el método de bisección, con error absoluto menor que 10^{-6}, comparándolas con las obtenidas por *"find_root"*.

56. Localiza y separa las soluciones de la ecuación:

$$x^2 = -10\cos(x)$$

Calcula aproximadamente las soluciones mediante el método de bisección, con error absoluto menor que 10^{-4}.

57. Localiza y separa las soluciones de la ecuación:

$$e^x = \frac{1}{x}$$

Calcula aproximadamente las soluciones mediante el método de bisección, con error absoluto menor que 10^{-5}.

58. Dada la ecuación $2^{-x} + e^x = 6 - 2\cos(x)$ se pide:

   (a) Localiza y separa gráficamente todas sus soluciones en intervalos de anchura 0.5.

   (b) Realiza manualmente dos pasos del método de bisección para aproximar la solución negativa.

   (c) Calcula aproximadamente todas las soluciones de la ecuación mediante el método de bisección, con error absoluto menor que 10^{-8}.

   (d) Utiliza el comando *"find_root"* para resolver la ecuación y compara las soluciones obtenidas con las del apartado (c).

59. Dada la ecuación $\dfrac{1}{x^2} = 1 + 2^x$ se pide:

   (a) Localiza y separa gráficamente todas sus soluciones en intervalos de anchura 0.5.

   (b) Realiza manualmente dos pasos del método de bisección para aproximar la solución positiva.

   (c) Calcula aproximadamente todas las soluciones de la ecuación mediante el método de bisección, con error absoluto menor que 10^{-7}.

   (d) Utiliza el comando *"find_root"* para resolver la ecuación y compara las soluciones obtenidas con las del apartado (c).

60. Dada la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, se pide:

   (a) Encuentra un intervalo de anchura 0.5 donde esté la raíz positiva de la ecuación.

   (b) Comprueba que se cumplen las condiciones del "teorema de convergencia global" del método de Newton en ese intervalo.

   (c) Calcula aproximadamente la raíz mediante el método de Newton, deteniendo el algoritmo cuando la distancia entre iteraciones consecutivas sea menor que 10^{-10}.

61. Dada la ecuación $x - \cos x = 0$, se pide:

   (a) Encuentra un intervalo de anchura 0.5 donde esté la única raíz de la ecuación.

   (b) Comprueba que se cumplen las condiciones del "teorema de convergencia global" del método de Newton en ese intervalo.

(c) Calcula aproximadamente la raíz mediante el método de Newton, deteniendo el algoritmo cuando la distancia entre iteraciones consecutivas sea menor que 10^{-9}.

62. Sea α la raíz positiva de la ecuación

$$\sin(1/x) - x = 0$$

que está más lejos de $x = 0$.

(a) Encuentra un intervalo de anchura 0.2 al que pertenezca α y en el que se cumplan las condiciones del "teorema de convergencia global" del método de Newton.

(b) Realiza manualmente dos pasos del método de Newton empezando en un punto del intervalo obtenido en el apartado (a).

(c) Calcula aproximadamente α mediante el método de Newton, deteniendo el algoritmo cuando la distancia entre dos iteraciones consecutivas sea menor que 10^{-8}.

63. Sea α la raíz positiva de la ecuación $x^3 - 5x - 3 = 0$.

(a) Encuentra un intervalo de anchura 0.5 al que pertenezca α y en el que se cumplan las condiciones del "teorema de convergencia global" del método de Newton.

(b) Realiza manualmente dos pasos del método de Newton empezando en un punto del intervalo obtenido en el apartado (a).

(c) Calcula aproximadamente α mediante el método de Newton, deteniendo el algoritmo cuando la distancia entre dos iteraciones consecutivas sea menor que 10^{-10}.

(d) Utiliza *"find_root"* para resolver la ecuación en el intervalo del apartado (a) y compara la solución obtenida con la del apartado (c).

64. Sea α la raíz positiva de la ecuación $2x^4 + 16x^3 + x^2 - 74x + 56 = 0$ que está más lejos de $x = 0$.

(a) Encuentra un intervalo de anchura 0.5 al que pertenezca α y en el que se cumplan las condiciones del "teorema de convergencia global" del método de Newton.

(b) Realiza manualmente dos pasos del método de Newton empezando en un punto del intervalo obtenido en el apartado (a).

(c) Calcula aproximadamente α mediante el método de Newton, deteniendo el algoritmo cuando la distancia entre dos iteraciones consecutivas sea menor que 10^{-10}.

(d) Utiliza *"find_root"* para resolver la ecuación en el intervalo del apartado (a) y compara la solución obtenida con la del apartado (c).

65. Dada la ecuación $(x-1)\sin(x) = \dfrac{1}{2(1-x^2)}$ se pide:

(a) ¿Cuántas soluciones tiene?

(b) Sea α la solución de la ecuación que está más cerca del punto $x = 0$. Encuentra un intervalo de anchura 0.2 al que pertenezca α y en el que se cumplan las condiciones del "teorema de convergencia global" del método de Newton.

(c) Realiza manualmente dos pasos del método de Newton empezando en un punto del intervalo obtenido en el apartado (b).

(d) Calcula aproximadamente α mediante el método de Newton, deteniendo el algoritmo cuando la distancia entre dos iteraciones consecutivas sea menor que 10^{-9}.

(e) Utiliza el comando *"find_root"* para resolver la ecuación en el intervalo del apartado (b) y compara la solución obtenida con la del apartado (d).

66. Dada la ecuación $x^3 + 94x^2 - 389x + 295 = 0$ se pide:

(a) Localiza y separa gráficamente todas sus soluciones en intervalos de anchura 0.5.

(b) Realiza manualmente dos pasos del método de Newton empezando en $x_0 = 2$. ¿Qué ocurre?

(c) Sea α la solución negativa de la ecuación. Encuentra un intervalo de anchura 0.5 al que pertenezca α y en el que se cumplan las condiciones del "teorema de convergencia global" del método de Newton.

(d) Calcula aproximadamente α mediante el método de Newton, deteniendo el algoritmo cuando la distancia entre dos iteraciones consecutivas sea menor que 10^{-10}.

(e) Utiliza el comando *"find_root"* para resolver la ecuación en el intervalo del apartado (c) y compara la solución obtenida con la del apartado (d).