Tema 2: INTEGRALES

CÁLCULO

(Grado en Ingeniería Informática - UMU)

Curso 2019/20

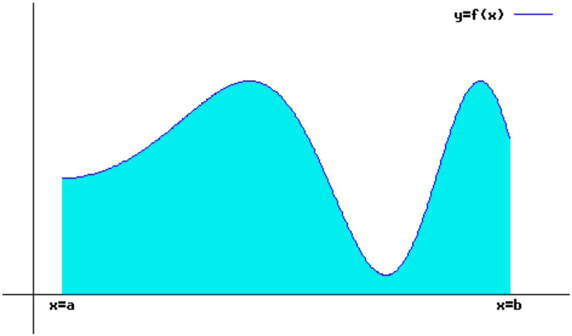
Contenidos del tema

1. Regla de Barrow. Primitivas.
2. Integrales impropias.
3. Interpolación.
4. Integración numérica.

Contenidos del tema

1. **Regla de Barrow. Primitivas.**
2. Integrales impropias.
3. Interpolación.
4. Integración numérica.

Interpretación geométrica de la integral



Si $f(x) \geq 0$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es el área del recinto limitado por ....

- la curva $y = f(x)$
- el eje OX
- las rectas $x = a$ y $x = b$

Definición (Sumas inferiores y superiores)

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Escribimos

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

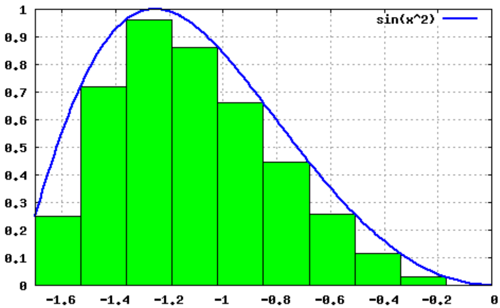
Definición (Sumas inferiores y superiores)

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Escribimos

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Se llama n-ésima **suma inferior** de f al número

$$I_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \min f\big([x_{k-1}, x_k]\big).$$



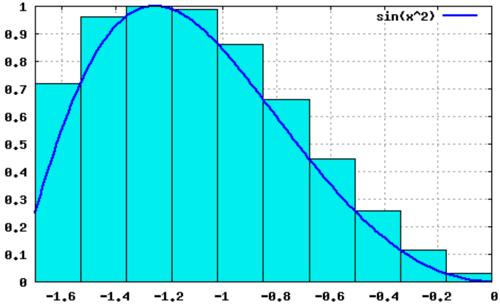
Definición (Sumas inferiores y superiores)

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Escribimos

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Se llama n-ésima **suma superior** de f al número

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \max f\left([x_{k-1}, x_k]\right).$$



Definición de la integral

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

Llamamos **integral** de f en $[a, b]$ a dicho límite, que se representa mediante

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Además,

$$I_n(f) \leq \int_a^b f \leq S_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Definición de la integral

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple

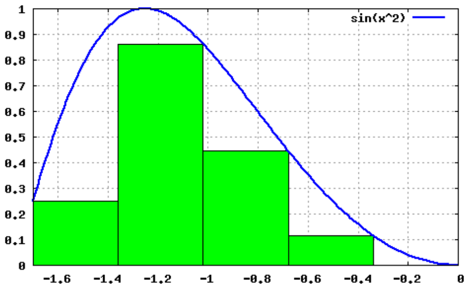
$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

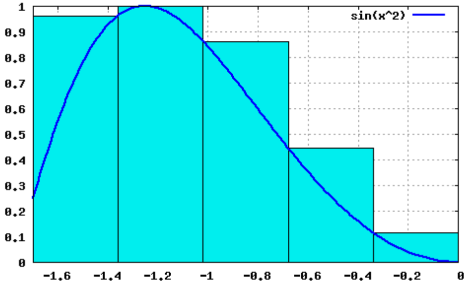
Llamamos **integral** de f en $[a, b]$ a dicho límite, que se representa mediante

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Además,

$$I_n(f) \le \int_a^b f \le S_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$





Definición de la integral

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple

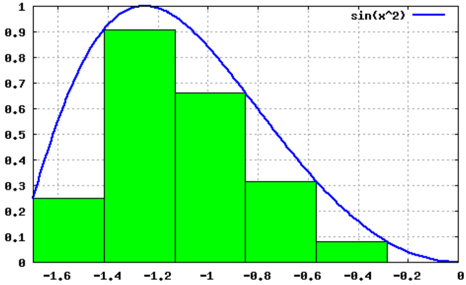
$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

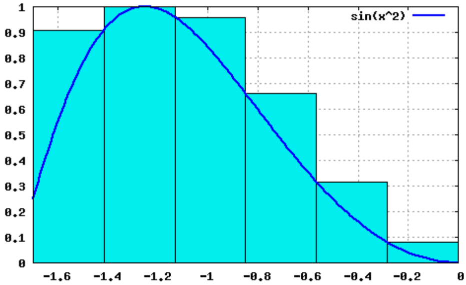
Llamamos **integral** de f en $[a, b]$ a dicho límite, que se representa mediante

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Además,

$$I_n(f) \leq \int_a^b f \leq S_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$





Definición de la integral

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple

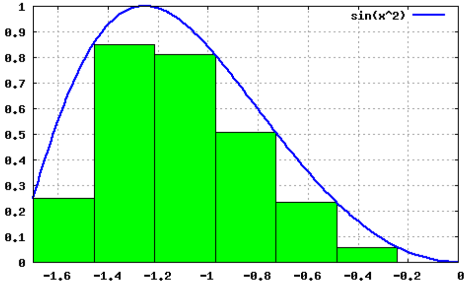
$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

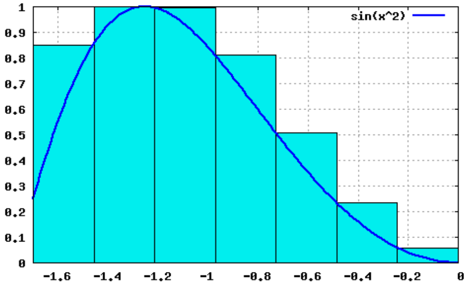
Llamamos **integral** de f en $[a, b]$ a dicho límite, que se representa mediante

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Además,

$$I_n(f) \le \int_a^b f \le S_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$





Definición de la integral

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple

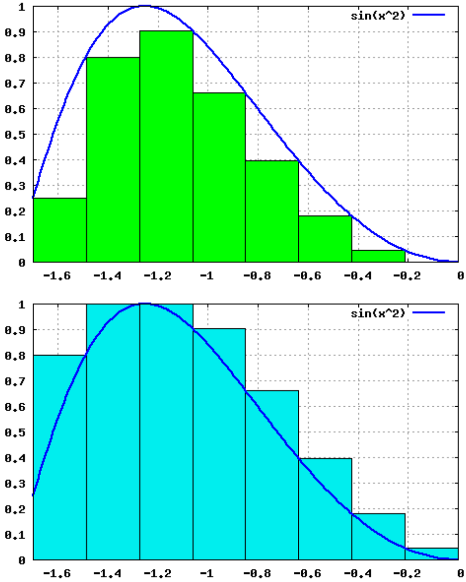
$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

Llamamos **integral** de f en $[a, b]$ a dicho límite, que se representa mediante

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Además,

$$I_n(f) \leq \int_a^b f \leq S_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$



Definición de la integral

Teorema

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple

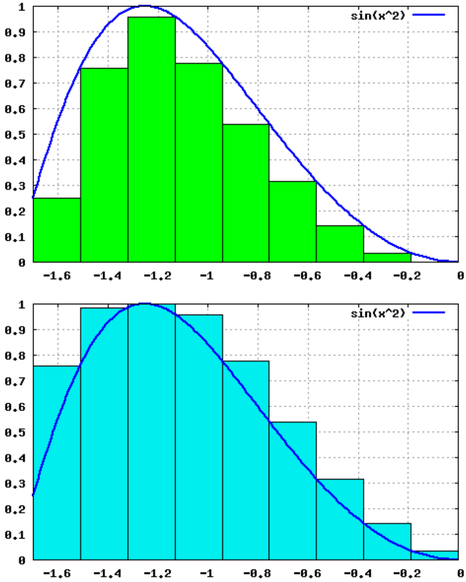
$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

Llamamos **integral** de f en $[a, b]$ a dicho límite, que se representa mediante

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Además,

$$I_n(f) \leq \int_a^b f \leq S_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$



Definición de la integral

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple

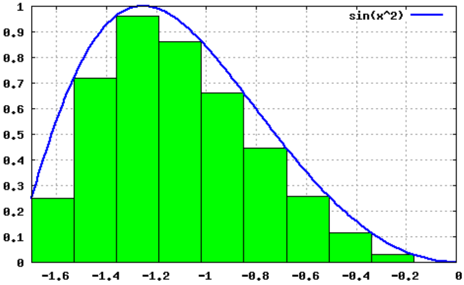
$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

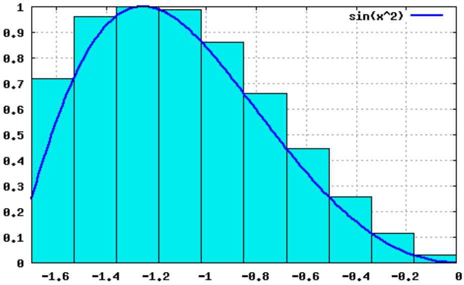
Llamamos **integral** de f en $[a, b]$ a dicho límite, que se representa mediante

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Además,

$$I_n(f) \leq \int_a^b f \leq S_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$





Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple

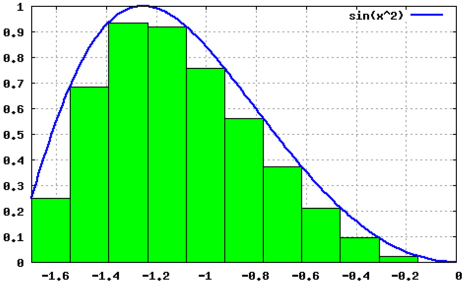
$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

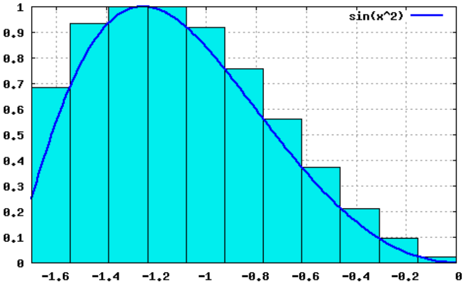
Llamamos **integral** de f en $[a, b]$ a dicho límite, que se representa mediante

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Además,

$$I_n(f) \le \int_a^b f \le S_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$





Definición de la integral

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple

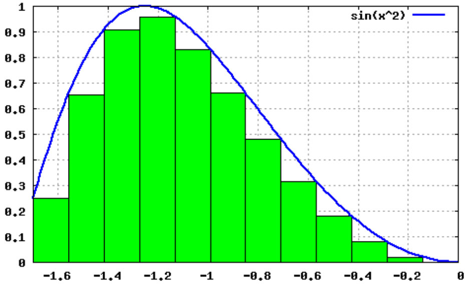
$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

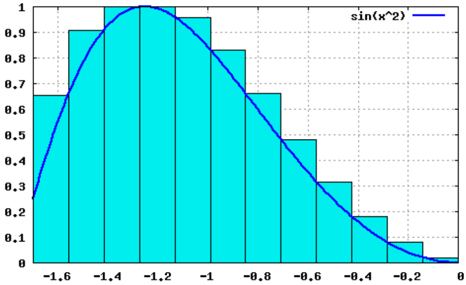
Llamamos **integral** de f en $[a, b]$ a dicho límite, que se representa mediante

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Además,

$$I_n(f) \leq \int_a^b f \leq S_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$





Definición de la integral

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple

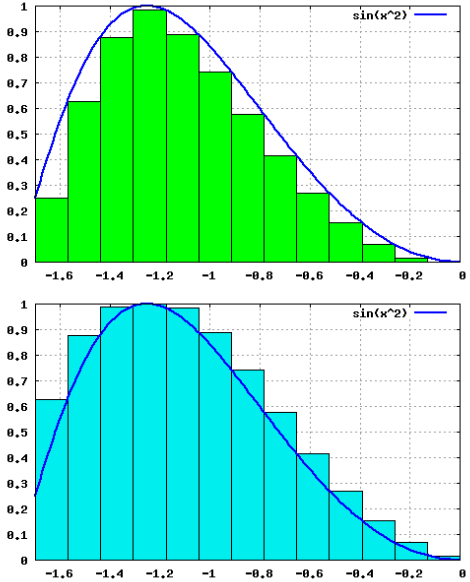
$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

Llamamos **integral** de f en $[a, b]$ a dicho límite, que se representa mediante

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Además,

$$I_n(f) \leq \int_a^b f \leq S_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$



Definición de la integral

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple

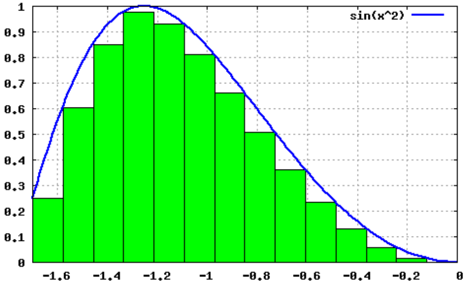
$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

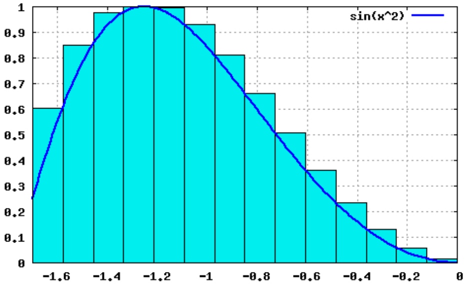
Llamamos **integral** de f en $[a, b]$ a dicho límite, que se representa mediante

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Además,

$$I_n(f) \leq \int_a^b f \leq S_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$





Definición de la integral

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple

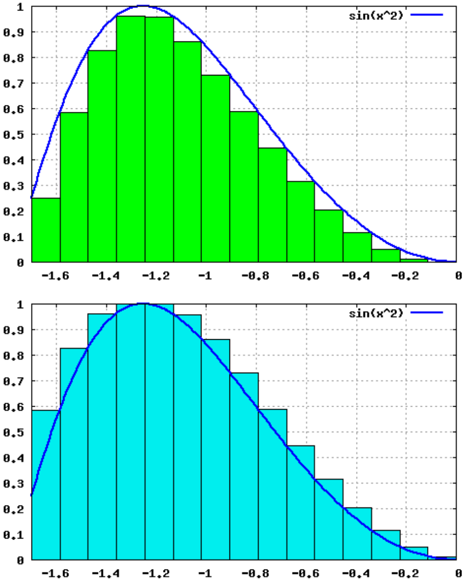
$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

Llamamos **integral** de f en $[a, b]$ a dicho límite, que se representa mediante

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Además,

$$I_n(f) \leq \int_a^b f \leq S_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$



Propiedades básicas de la integral

Linealidad de la integral

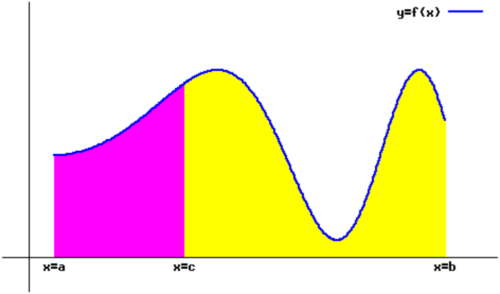
Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\boxed{\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g}$$

Aditividad de la integral

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $c \in (a, b)$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f}$$



PREGUNTA

Dada una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\text{¿¿}\ \ \textbf{cómo podemos calcular} \int_a^b f \ \ \textbf{??}$$

Posibilidades

1. Mediante la **regla de Barrow**, calculando previamente una **primitiva**.
2. Mediante **métodos numéricos**, obteniendo un **valor aproximado**.

Definición (Primitiva)

Sean $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones.

Decimos que F es una **primitiva** de f en $[a, b]$ si F es continua en $[a, b]$, F es derivable en (a, b) y se cumple:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a, b).$$

Si F es primitiva de f en algún intervalo, escribimos:

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + C}$$

Teorema (Regla de Barrow)

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y F una **primitiva** de f en $[a, b]$. Entonces

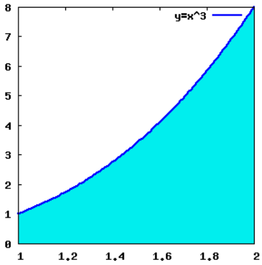
$$\boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a)}$$

Ejemplo

Cálculo de $\displaystyle\int_1^2 x^3\,dx$

- Integramos la función $f(x) = x^3$
- $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ es **primitiva** de f
- Por la **Regla de Barrow**:

$$\int_1^2 x^3\,dx = F(2) - F(1) = \frac{15}{4}$$



Algunas primitivas inmediatas

1. $\displaystyle\int \alpha\, dx = \alpha x + C$ si α constante
2. $\displaystyle\int x^s\, dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C$ si $s \neq -1$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$
4. $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C$
5. $\displaystyle\int \alpha^x\, dx = \frac{\alpha^x}{\log \alpha} + C$ si $\alpha > 0$
6. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$
7. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C$

Linealidad de las primitivas

1. $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Por ejemplo...

$$\int (2\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx$$

$$= 2\int \operatorname{sen} x\,dx - \int \cos x\,dx = -2\cos x - \operatorname{sen} x + C$$

Método de sustitución o cambio de variable

RECUERDA (regla de la cadena):

Si $F(t)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces la **función compuesta** $F(g(x))$ es derivable, y su derivada es $F'(g(x))g'(x)$.

Fórmula del CAMBIO DE VARIABLE

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Ejemplos

$(A)\ \int e^{2x}\,dx \qquad (B)\ \int x\,\mathrm{sen}(x^2)\,dx \qquad (C)\ \int \frac{1}{x\log x}\,dx$

Método de integración por partes

RECUERDA (cómo se deriva un producto de funciones):

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces la **función producto** $f(x)g(x)$ es derivable, y su derivada es $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Fórmula de INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

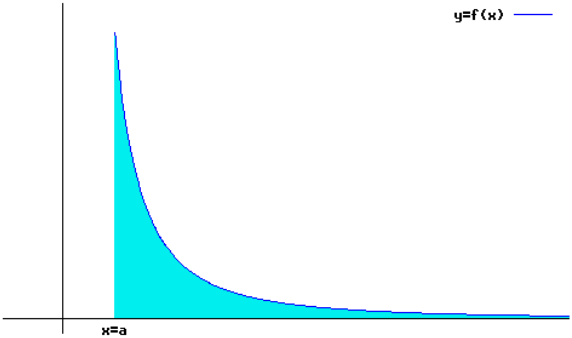
Ejemplos

$$(A) \int x\cos x\,dx \qquad (B) \int xe^x\,dx \qquad (C) \int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$$

Contenidos del tema

1. Regla de Barrow. Primitivas.
2. **Integrales impropias.**
3. Interpolación.
4. Integración numérica.

Interpretación geométrica de las integrales impropias



Si $f(x) \geq 0$ entonces $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es el área del recinto limitado por ....

– la curva $y = f(x)$
– el eje OX
– la recta $x = a$

Integrales impropias en intervalos $[a, \infty)$

Definición

Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua.

Decimos que la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ es. . .

Integrales impropias en intervalos $[a, \infty)$

Definición

Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua.

Decimos que la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ es...

1. **CONVERGENTE** si existe el límite $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = L \in \mathbb{R}$.

   En tal caso, se define $\boxed{\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = L}$.

Integrales impropias en intervalos $[a, \infty)$

Definición

Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua.

Decimos que la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es. . .

1. **CONVERGENTE** si existe el límite $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = L \in \mathbb{R}$.

   En tal caso, se define $\boxed{\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx = L}$.

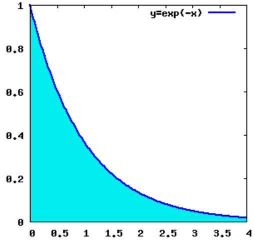
2. **DIVERGENTE** si el límite $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ no existe o es infinito.

Ejemplo

¿¿ Es convergente $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$??

Ejemplo

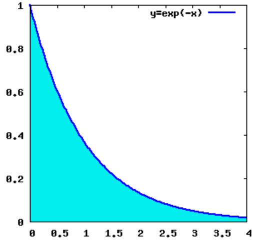
¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$??



Ejemplo

¿¿ Es convergente $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$??

- $\int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + C$



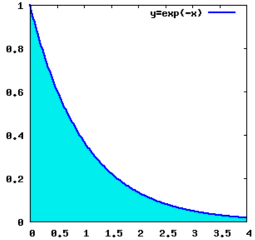
Ejemplo

¿¿ Es convergente $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$??

- $\int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + C$
- Aplicando la **Regla de Barrow**:

$$\int_0^b e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = 1 - e^{-b}$$

para todo $b > 0$.



Ejemplo

¿¿ Es convergente $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$??

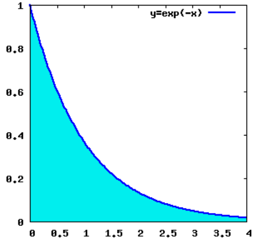
- $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$
- Aplicando la **Regla de Barrow**:

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = 1 - e^{-b}$$

para todo $b > 0$.

- Tomando límites:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-b}) = 1$$



Ejemplo

¿¿ Es convergente $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$??

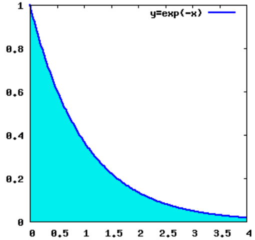
- $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$
- Aplicando la **Regla de Barrow**:

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = 1 - e^{-b}$$

para todo $b > 0$.

- Tomando límites:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-b}) = 1$$



Por tanto . . .

Esta integral impropia es **convergente** y $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$.

Ejemplo importante

La integral impropia

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx}$$

converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Criterio de Comparación

Criterio de Comparación

Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas **no negativas** tales que existe:

$$C = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Se cumple:

Criterio de Comparación

Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas **no negativas** tales que existe:

$$C = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Se cumple:

1. Si $\boxed{C = 0}$ y $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow$ $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

Criterio de Comparación

Criterio de Comparación

Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas **no negativas** tales que existe:

$$C = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Se cumple:

1. Si $C = 0$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.
2. Si $C = \infty$ y $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$ converge.

Criterio de Comparación

Criterio de Comparación

Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas **no negativas** tales que existe:

$$C = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Se cumple:

1. Si $C = 0$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.
2. Si $C = \infty$ y $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge.
3. Si $C \in (0, \infty)$ entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge} \iff \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ converge.}$$

Criterio de Comparación

Criterio de Comparación

Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas **no negativas** tales que existe:

$$C = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Se cumple:

1. Si $C = 0$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.
2. Si $C = \infty$ y $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$ converge.
3. Si $C \in (0, \infty)$ entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge} \iff \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ converge.}$$

Ejemplo

$\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx$ es **convergente**.

Criterio de Comparación

Criterio de Comparación

Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas **no negativas** tales que existe:

$$C = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Se cumple:

1. Si $C = 0$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.
2. Si $C = \infty$ y $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge.
3. Si $C \in (0, \infty)$ entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge} \iff \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ converge.}$$

Ejemplo

$\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx$ es **convergente**.

Ejemplo

$\int_1^\infty \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$ es **divergente**.

Integrales impropias en intervalos $(-\infty, b]$

Definición

Sea $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

Decimos que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ es...

Integrales impropias en intervalos $(-\infty, b]$

Definición

Sea $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

Decimos que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ es...

1. **CONVERGENTE** si existe el límite $\displaystyle\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx = L \in \mathbb{R}$.

   En tal caso, se define $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = L}$.

Integrales impropias en intervalos $(-\infty, b]$

Definición

Sea $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

Decimos que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ es...

1. **CONVERGENTE** si existe el límite $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx = L \in \mathbb{R}$.

   En tal caso, se define $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = L}$.

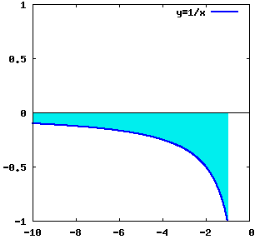
2. **DIVERGENTE** si el límite $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ no existe o es infinito.

Ejemplo

¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$??

Ejemplo

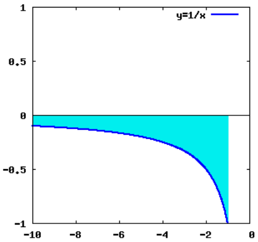
¿¿ Es convergente $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$??



Ejemplo

¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$??

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$



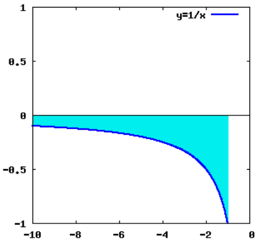
Ejemplo

¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$??

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$
- Aplicando la **Regla de Barrow**:

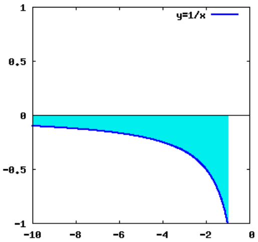
$$\int_a^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log(-x)\Big]_a^{-1} = -\log(-a)$$

para todo $a < -1$.



Ejemplo

¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$??



- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$
- Aplicando la **Regla de Barrow**:

$$\int_a^{-1} \frac{1}{x}\, dx = \Big[\log(-x)\Big]_a^{-1} = -\log(-a)$$

para todo $a < -1$.

- Tomando límites:

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^{-1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{a\to-\infty} -\log(-a) = -\infty$$

Ejemplo

¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$??

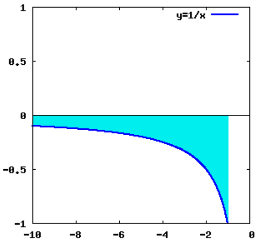
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$
- Aplicando la **Regla de Barrow**:

$$\int_a^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log(-x)\Big]_a^{-1} = -\log(-a)$$

para todo $a < -1$.

- Tomando límites:

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} -\log(-a) = -\infty$$



Por tanto ...

Esta integral impropia es **divergente**.

Integrales impropias en el intervalo $(-\infty, \infty)$

Definición

Sea $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua.

Decimos que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ es. . .

Integrales impropias en el intervalo $(-\infty, \infty)$

Definición

Sea $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua.

Decimos que la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es. . .

1. **CONVERGENTE** si las integrales impropias $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ y $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ son convergentes.

   En tal caso, se define $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx}$.

Integrales impropias en el intervalo $(-\infty, \infty)$

Definición

Sea $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua.

Decimos que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es...

1. **CONVERGENTE** si las integrales impropias $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ son convergentes.

   En tal caso, se define $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx}$.

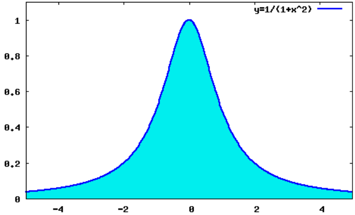
2. **DIVERGENTE** en caso contrario.

Ejemplo

¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$??

Ejemplo

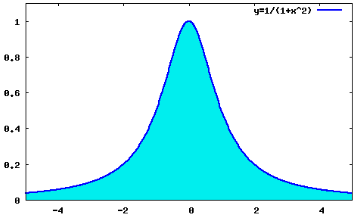
¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$??



Ejemplo

¿¿ Es convergente $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$??

- $\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x \ + C}$



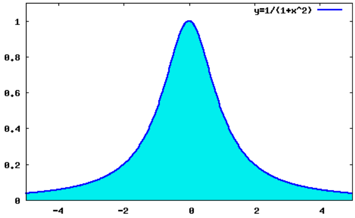
Ejemplo

¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$??

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \;+ C$
- Aplicando la **Regla de Barrow**:

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan x\Big]_0^b = \arctan b$$

para todo $b > 0$.



Ejemplo

¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$??

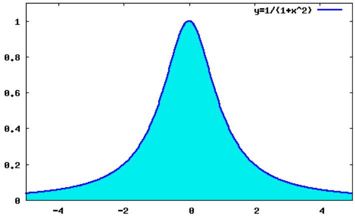
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \ + C$
- Aplicando la **Regla de Barrow**:

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan x\Big]_0^b = \arctan b$$

para todo $b > 0$.

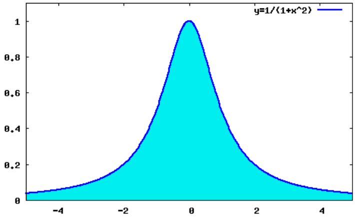
- Tomando límites:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$$



Ejemplo

¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$??



- $\displaystyle\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \;\; + C}$
- Aplicando la **Regla de Barrow**:

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan x\Big]_0^b = \arctan b$$

para todo $b > 0$.

- Tomando límites:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$$

- $\displaystyle\boxed{\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}}$

Ejemplo

¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$??

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \; + C$
- Aplicando la **Regla de Barrow**:

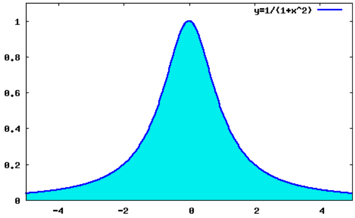
$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan x\Big]_0^b = \arctan b$$

para todo $b > 0$.

- Tomando límites:

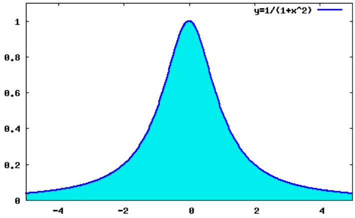
$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$$

- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$



Ejemplo

¿¿ Es convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$??



- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \;+ C$
- Aplicando la **Regla de Barrow**:

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan x\Big]_0^b = \arctan b$$

para todo $b > 0$.

- Tomando límites:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$$

- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Por tanto ...

La integral impropia es **convergente** y vale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$.

Contenidos del tema

Polinomio interpolador de Lagrange

Teorema

Se consideran $n+1$ puntos del plano con abscisas distintas dos a dos:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_n, y_n).$$

Entonces existe un único polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que

$$P(x_i) = y_i \quad \text{para todo } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Polinomio interpolador de Lagrange

Teorema

Se consideran $n+1$ puntos del plano con abscisas distintas dos a dos:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_n, y_n).$$

Entonces existe un único polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que

$$P(x_i) = y_i \quad \text{para todo } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Dicho polinomio se llama **polinomio interpolador** en los puntos dados y se puede calcular mediante la fórmula

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

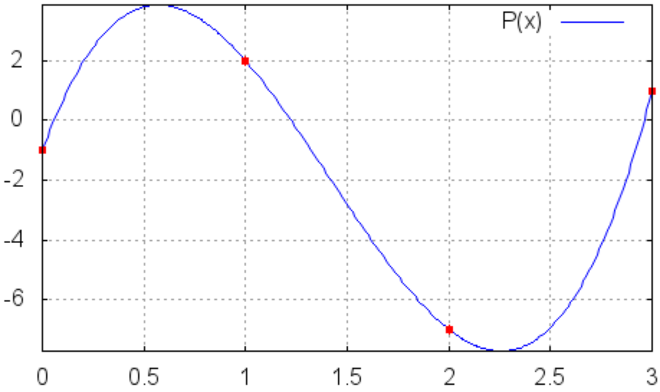
donde

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{para todo } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Ejemplo

Polinomio interpolador en los puntos

$$(0,-1),\ (1,2),\ (2,-7),\ (3,1).$$



Definición

Sea $f(x)$ una función definida, al menos, en $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$. Llamamos **polinomio interpolador** de $f(x)$ en los puntos de abscisas $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ al polinomio interpolador en los puntos

$$\big(x_0, f(x_0)\big),\ \big(x_1, f(x_1)\big),\ \ldots,\ \big(x_n, f(x_n)\big).$$

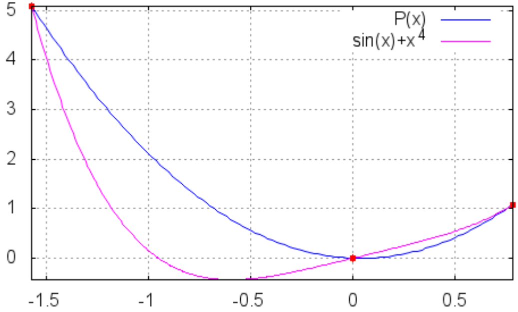
Definición

Sea $f(x)$ una función definida, al menos, en $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$.
Llamamos **polinomio interpolador** de $f(x)$ en los puntos de abscisas $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ al polinomio interpolador en los puntos

$$(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)),\ \ldots,\ (x_n, f(x_n)).$$

Ejemplo

Polinomio interpolador de $f(x) = \operatorname{sen} x + x^4$ en los puntos de abscisas $\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}\}$.



COTA DEL ERROR del polinomio interpolador de Lagrange

Sean:

▷ $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ números reales
▷ $f(x)$ una función de clase $\mathcal{C}^{n+1}$ en el intervalo $[x_0, x_n]$
▷ $P(x)$ su polin. interpolador en los puntos de abscisas $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

COTA DEL ERROR del polinomio interpolador de Lagrange

Sean:

- ▷ $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ números reales
- ▷ $f(x)$ una función de clase $\mathcal{C}^{n+1}$ en el intervalo $[x_0, x_n]$
- ▷ $P(x)$ su polin. interpolador en los puntos de abscisas $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Si $M > 0$ cumple $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ para todo $x \in [x_0, x_n]$ entonces

$$\boxed{\left|f(x) - P(x)\right| \leq \frac{M}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|} \quad \text{para todo } x \in [x_0, x_n].$$

COTA DEL ERROR del polinomio interpolador de Lagrange

Sean:

- ▷ $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ números reales
- ▷ $f(x)$ una función de clase $\mathcal{C}^{n+1}$ en el intervalo $[x_0, x_n]$
- ▷ $P(x)$ su polin. interpolador en los puntos de abscisas $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Si $M > 0$ cumple $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ para todo $x \in [x_0, x_n]$ entonces

$$\boxed{\left|f(x) - P(x)\right| \leq \frac{M}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|} \quad \text{para todo } x \in [x_0, x_n].$$

Ejemplo

El polinomio interpolador de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en los puntos de abscisas $\{-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{8}\}$ cumple lo siguiente:

$$\left|f(x) - P(x)\right| < 0.182 \quad \text{para todo } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\right].$$

Definición

Sean $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ números reales y $f(x)$ una función definida, al menos, en el intervalo $[x_0, x_n]$.

Interpolación a trozos

Definición

Sean $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ números reales y $f(x)$ una función definida, al menos, en el intervalo $[x_0, x_n]$.

Llamamos **función interpoladora lineal a trozos** de $f(x)$ en los puntos de abscisas $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ a la función $\ell(x)$ definida en $[x_0, x_n]$ tal que

> *$\ell(x)$ coincide en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con el polinomio interpolador de $f(x)$ en los puntos de abscisas $\{x_{i-1}, x_i\}$*
>
> *[es decir, la recta que pasa por $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$]*

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Interpolación a trozos

Definición

Sean $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ números reales y $f(x)$ una función definida, al menos, en el intervalo $[x_0, x_n]$.

Llamamos **función interpoladora lineal a trozos** de $f(x)$ en los puntos de abscisas $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ a la función $\ell(x)$ definida en $[x_0, x_n]$ tal que

> $\ell(x)$ *coincide en el intervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *con el polinomio interpolador de* $f(x)$ *en los puntos de abscisas* $\{x_{i-1}, x_i\}$
>
> *[es decir, la recta que pasa por* $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ *y* $(x_i, f(x_i))$ *]*

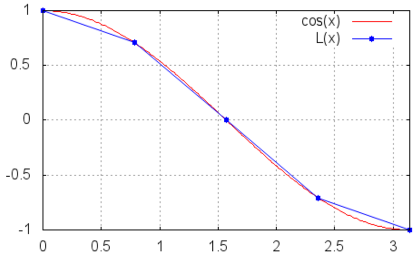
para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo

Para $f(x) = \cos x$ y las abscisas $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$:

$$f(0.2) = 0.98006\ldots$$

$$\ell(0.2) = 0.92541\ldots$$



COTA DEL ERROR de la función interpoladora lineal a trozos

Sean

▷ $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ números reales

▷ $f(x)$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en el intervalo $[x_0, x_n]$

▷ $\ell(x)$ su función interp. lineal a trozos en las abscisas $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

COTA DEL ERROR de la función interpoladora lineal a trozos

Sean

▷ $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ números reales

▷ $f(x)$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en el intervalo $[x_0, x_n]$

▷ $\ell(x)$ su función interp. lineal a trozos en las abscisas $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Si $M > 0$ cumple $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in [x_0, x_n]$ entonces

$$\boxed{|f(x) - \ell(x)| \leq \frac{M}{8} \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})^2} \quad \text{para todo } x \in [x_0, x_n].$$

COTA DEL ERROR de la función interpoladora lineal a trozos

Sean

▷ $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ números reales

▷ $f(x)$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en el intervalo $[x_0, x_n]$

▷ $\ell(x)$ su función interp. lineal a trozos en las abscisas $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Si $M > 0$ cumple $\left|f''(x)\right| \leq M$ para todo $x \in [x_0, x_n]$ entonces

$$\boxed{\left|f(x) - \ell(x)\right| \leq \frac{M}{8} \max_{i=1,\ldots,n} \left(x_i - x_{i-1}\right)^2} \quad \text{para todo } x \in [x_0, x_n].$$

Ejercicio

Se dispone de una tabla de valores de la función $f(x) = e^{-x} + \cos x$ en los puntos de abscisas $\{0, 0.5, \ldots, 3.5, 4\}$.

Da una cota superior del error cometido al aproximar $f(x)$ mediante interpolación lineal a trozos, para cualquier $x \in [0, 4]$.

Contenidos del tema

1. Regla de Barrow. Primitivas.
2. Integrales impropias.
3. Interpolación.
4. **Integración numérica.**

Vamos a estudiar dos métodos para calcular **aproximadamente** la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

de una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

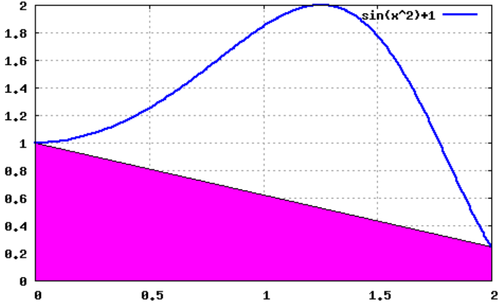
- **Método del trapecio.**
- **Método de Simpson.**

Método del trapecio

- Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\dfrac{b-a}{n}$, $\quad x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$

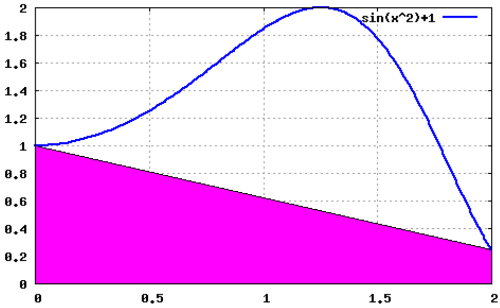
- Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\dfrac{b-a}{n}$, $\quad x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$
- Para cada $k = 1, 2 \ldots, n$ aproximamos la integral por el área del trapecio de bases $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, y altura $\dfrac{b-a}{n}$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx \;\approx\; \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right)$$



- Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\dfrac{b-a}{n}$, $\quad x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$
- Para cada $k = 1, 2 \ldots, n$ aproximamos la integral por el área del trapecio de bases $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, y altura $\dfrac{b-a}{n}$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right) = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)$$

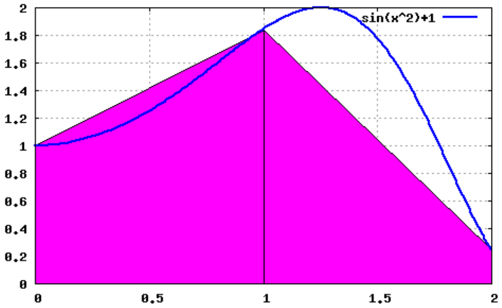


- Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\dfrac{b-a}{n}$, $\quad x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$
- Para cada $k = 1, 2 \ldots, n$ aproximamos la integral por el área del trapecio de bases $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, y altura $\dfrac{b-a}{n}$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right) = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)$$

- Obtenemos así la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \boxed{\frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big)}$$

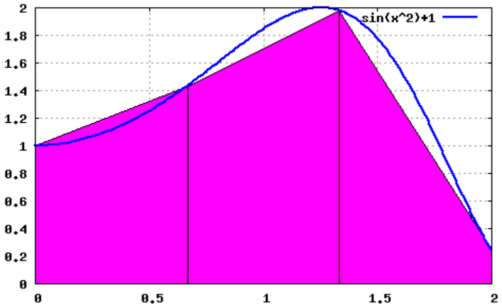


- Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\dfrac{b-a}{n}$, $\quad x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$
- Para cada $k = 1, 2 \dots, n$ aproximamos la integral por el área del trapecio de bases $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, y altura $\dfrac{b-a}{n}$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \;\approx\; \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right) = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)$$

- Obtenemos así la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\approx\; \boxed{\frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big)}$$

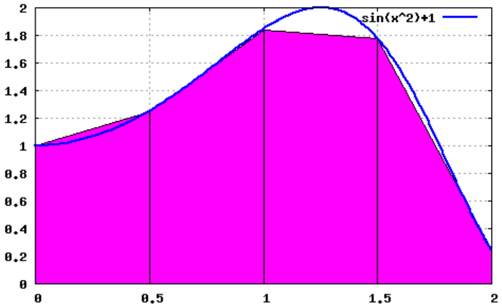


- Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\dfrac{b-a}{n}$, $\quad x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$
- Para cada $k = 1, 2 \ldots, n$ aproximamos la integral por el área del trapecio de bases $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, y altura $\dfrac{b-a}{n}$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right) = \frac{b-a}{2n}(f(x_{k-1}) + f(x_k))$$

- Obtenemos así la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \boxed{\frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big)}$$

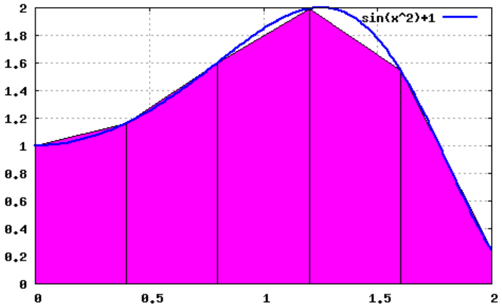


- Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\dfrac{b-a}{n}$, $\quad x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$
- Para cada $k = 1, 2 \ldots, n$ aproximamos la integral por el área del trapecio de bases $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, y altura $\dfrac{b-a}{n}$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right) = \frac{b-a}{2n}(f(x_{k-1}) + f(x_k))$$

- Obtenemos así la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \boxed{\frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big)}$$

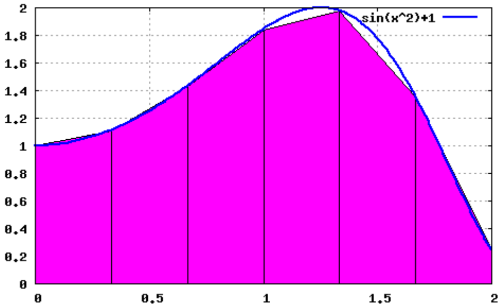


- Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\dfrac{b-a}{n}$, $\quad x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$
- Para cada $k = 1, 2 \ldots, n$ aproximamos la integral por el área del trapecio de bases $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, y altura $\dfrac{b-a}{n}$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right) = \frac{b-a}{2n}(f(x_{k-1}) + f(x_k))$$

- Obtenemos así la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \boxed{\frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big)}$$

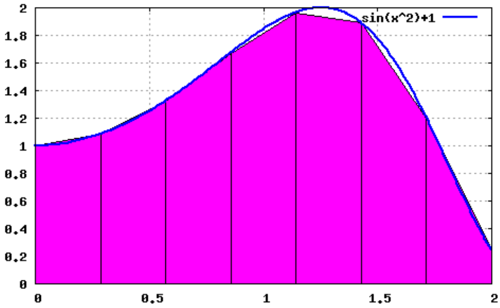


- Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\dfrac{b-a}{n}$, $\quad x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$
- Para cada $k = 1, 2 \ldots, n$ aproximamos la integral por el área del trapecio de bases $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, y altura $\dfrac{b-a}{n}$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right) = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)$$

- Obtenemos así la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \boxed{\frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big)}$$

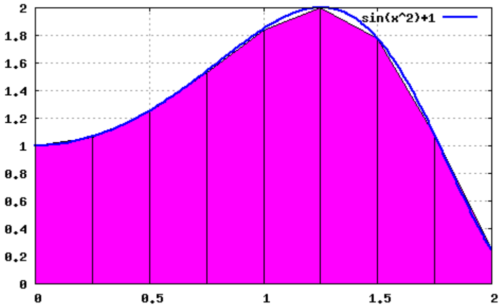


- Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\dfrac{b-a}{n}$, $\quad x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$
- Para cada $k = 1, 2 \dots, n$ aproximamos la integral por el área del trapecio de bases $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, y altura $\dfrac{b-a}{n}$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right) = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)$$

- Obtenemos así la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \boxed{\frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big)}$$



Fórmula del método del trapecio

La aproximación de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

que se obtiene mediante el **método del trapecio** con n subintervalos es:

$$\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big).$$

Fórmula del método del trapecio

La aproximación de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

que se obtiene mediante el **método del trapecio** con n subintervalos es:

$$\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big).$$

Ejemplo

Aproximación de la integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

mediante el método del trapecio con $n = 3$ y $n = 5$.

Fórmula del método del trapecio

La aproximación de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

que se obtiene mediante el **método del trapecio** con n subintervalos es:

$$\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big).$$

Ejemplo

Aproximación de la integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

mediante el método del trapecio con $n = 3$ y $n = 5$.

- $\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{3}}(f) = 0.7$

Fórmula del método del trapecio

La aproximación de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

que se obtiene mediante el **método del trapecio** con n subintervalos es:

$$\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big).$$

Ejemplo

Aproximación de la integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

mediante el método del trapecio con $n = 3$ y $n = 5$.

- $\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{3}}(f) = 0.7$
- $\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{5}}(f) = \frac{1753}{2520} = 0.695\ldots$

Fórmula del método del trapecio

La aproximación de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

que se obtiene mediante el **método del trapecio** con n subintervalos es:

$$\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big).$$

Ejemplo

Aproximación de la integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

mediante el método del trapecio con $n = 3$ y $n = 5$.

- $\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{3}}(f) = 0.7$
- $\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{5}}(f) = \frac{1753}{2520} = 0.695\ldots$
- Valor exacto $= \log(2) = 0.69314718055995\ldots$

Preguntas

1. ¿ Podemos dar una **cota superior** del *error absoluto*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) \right|$$

para valores concretos de n **?**

Preguntas

1. ¿ Podemos dar una **cota superior** del *error absoluto*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) \right|$$

   para valores concretos de n **?**

2. Fijado cualquier $\varepsilon > 0$, ¿ podemos determinar un número n de subintervalos para que dicho error absoluto sea menor que ε **?**

Preguntas

1. ¿ Podemos dar una **cota superior** del *error absoluto*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) \right|$$

para valores concretos de n **?**

2. Fijado cualquier $\varepsilon > 0$, ¿ podemos determinar un número n de subintervalos para que dicho error absoluto sea menor que ε **?**

COTA DEL ERROR en el método del trapecio

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y escribimos $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Si f es de clase $\mathcal{C}^2$ en $[a,b]$ y $M > 0$ es una constante que cumple $|f''(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) \right| \leq \frac{(b-a)M}{12} \cdot h^2$$

COTA DEL ERROR en el método del trapecio

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y escribimos $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Si f es de clase $\mathcal{C}^2$ en $[a, b]$ y $M > 0$ es una constante que cumple $|f''(x)| \leq M$ $\forall x \in [a, b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) \right| \leq \frac{(b-a)M}{12} \cdot h^2$$

Ejemplo

¿ Qué número n de subintervalos necesitamos para aproximar

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

mediante el método del trapecio con error absoluto menor que 10^{-4} ?

COTA DEL ERROR en el método del trapecio

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y escribimos $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Si f es de clase $\mathcal{C}^2$ en $[a,b]$ y $M > 0$ es una constante que cumple $|f''(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) \right| \leq \frac{(b-a)M}{12} \cdot h^2$$

Ejemplo

¿ Qué número n de subintervalos necesitamos para aproximar

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

mediante el método del trapecio con error absoluto menor que 10^{-4} ?

- $n = 41$

COTA DEL ERROR en el método del trapecio

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y escribimos $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Si f es de clase $\mathcal{C}^2$ en $[a,b]$ y $M > 0$ es una constante que cumple $|f''(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) \right| \leq \frac{(b-a)M}{12} \cdot h^2$$

Ejemplo

¿ Qué número n de subintervalos necesitamos para aproximar

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

mediante el método del trapecio con error absoluto menor que 10^{-4} ?

- $n = 41$
- $\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{41}}(f) = 0.693184\ldots$

COTA DEL ERROR en el método del trapecio

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y escribimos $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Si f es de clase $\mathcal{C}^2$ en $[a,b]$ y $M > 0$ es una constante que cumple $|f''(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) \right| \leq \frac{(b-a)M}{12} \cdot h^2$$

Ejemplo

¿ Qué número n de subintervalos necesitamos para aproximar

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

mediante el método del trapecio con error absoluto menor que 10^{-4} ?

- $n = 41$
- $\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{41}}(f) = 0.693184\ldots$
- Valor exacto $= \log(2) = 0.69314718055995\ldots$

COTA DEL ERROR en el método del trapecio

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y escribimos $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Si f es de clase $\mathcal{C}^2$ en $[a,b]$ y $M > 0$ es una constante que cumple $|f''(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) \right| \leq \frac{(b-a)M}{12} \cdot h^2$$

Ejemplo

¿ Qué número n de subintervalos necesitamos para aproximar

$$\int_0^1 \mathrm{sen}(x^2)\,dx$$

mediante el método del trapecio con error absoluto menor que 10^{-3} ?

COTA DEL ERROR en el método del trapecio

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y escribimos $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Si f es de clase $\mathcal{C}^2$ en $[a,b]$ y $M > 0$ es una constante que cumple $|f''(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) \right| \leq \frac{(b-a)M}{12} \cdot h^2$$

Ejemplo

¿ Qué número n de subintervalos necesitamos para aproximar

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$$

mediante el método del trapecio con error absoluto menor que 10^{-3} ?

- $n = 23$

COTA DEL ERROR en el método del trapecio

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y escribimos $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Si f es de clase $\mathcal{C}^2$ en $[a,b]$ y $M > 0$ es una constante que cumple $|f''(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \mathrm{Trapecio}_{\mathbf{n}}(f) \right| \leq \frac{(b-a)M}{12} \cdot h^2$$

Ejemplo

¿ Qué número n de subintervalos necesitamos para aproximar

$$\int_0^1 \mathrm{sen}(x^2)\,dx$$

mediante el método del trapecio con error absoluto menor que 10^{-3} ?

- $n = 23$
- $\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{23}}(f) = 0.3104\ldots$

Método de Simpson

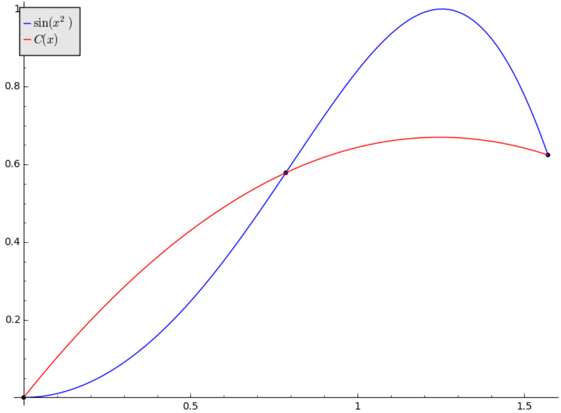
Interpolación cuadrática

Llamamos **función interpoladora cuadrática a trozos** de f en los nodos

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} = b$$

a la función $C : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida a trozos que

- es cuadrática en cada intervalo $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ y
- cumple $C(x_i) = f(x_i)$ para cada $i = 0, 1, \ldots, 2n$.



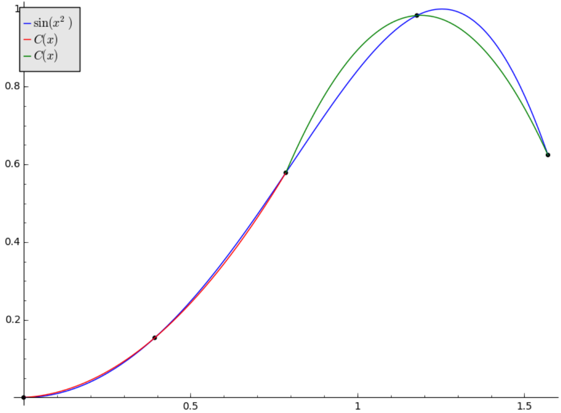
Interpolación cuadrática

Llamamos **función interpoladora cuadrática a trozos** de f en los nodos

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} = b$$

a la función $C : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida a trozos que

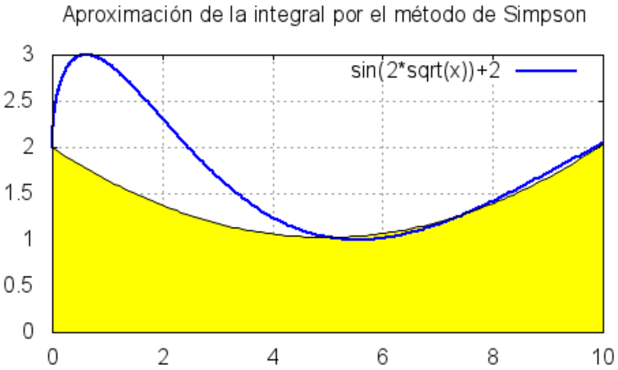
- es cuadrática en cada intervalo $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ y
- cumple $C(x_i) = f(x_i)$ para cada $i = 0, 1, \ldots, 2n$.



Método de Simpson - simple

Se usa la función interpoladora cuadrática a trozos en los nodos

$$x_0 = a, \qquad x_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad x_2 = b.$$

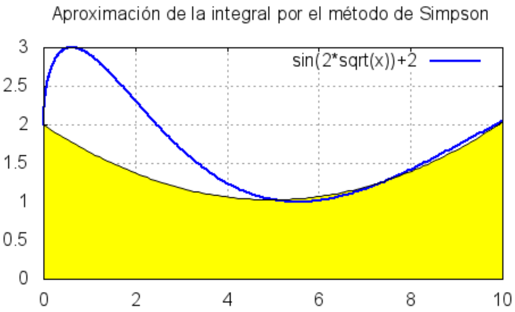


$$\int_a^b f(x)\,dx \;\approx\; \text{Simpson}_1(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Método de Simpson - compuesto

Dado $n \in \mathbb{N}$, se usa la función interp. cuadrática a trozos en los $2n+1$ nodos

$$\boxed{x_j = a + jh} \qquad \text{con } j = 0, 1, \ldots, 2n \qquad \text{siendo } h = \frac{b-a}{2n}.$$

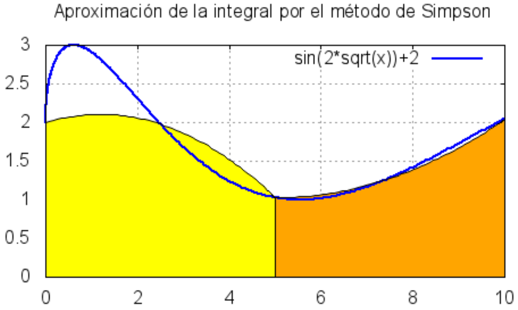


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \mathrm{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right)$$

Método de Simpson - compuesto

Dado $n \in \mathbb{N}$, se usa la función interp. cuadrática a trozos en los $2n+1$ nodos

$$\boxed{x_j = a + jh} \qquad \text{con } j = 0, 1, \ldots, 2n \qquad \text{siendo } h = \frac{b-a}{2n}.$$

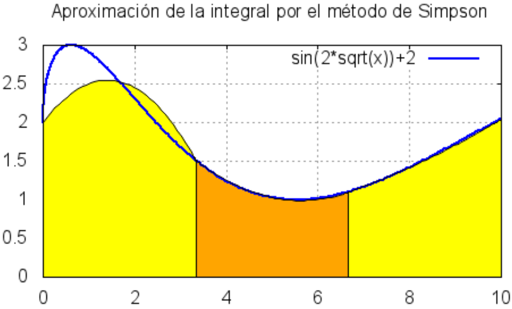


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \mathrm{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right)$$

Método de Simpson - compuesto

Dado $n \in \mathbb{N}$, se usa la función interp. cuadrática a trozos en los $2n+1$ nodos

$$\boxed{x_j = a + jh} \qquad \text{con } j = 0, 1, \ldots, 2n \qquad \text{siendo } h = \frac{b-a}{2n}.$$

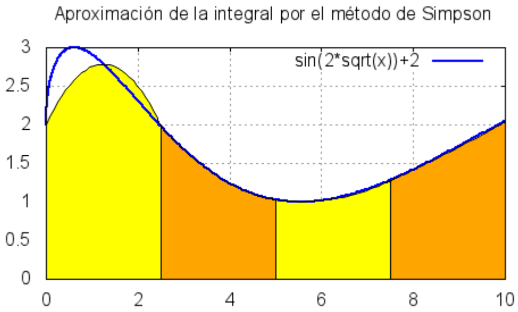


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \mathrm{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right)$$

Método de Simpson - compuesto

Dado $n \in \mathbb{N}$, se usa la función interp. cuadrática a trozos en los $2n+1$ nodos

$$\boxed{x_j = a + jh} \qquad \text{con } j = 0, 1, \ldots, 2n \qquad \text{siendo } h = \frac{b-a}{2n}.$$

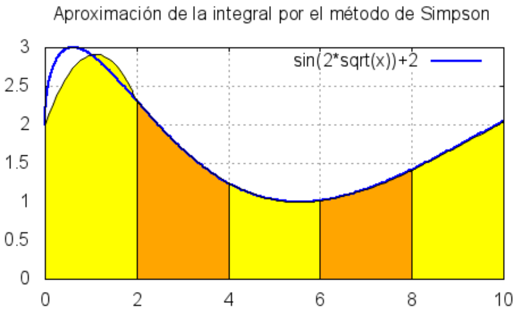


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \mathrm{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right)$$

Método de Simpson - compuesto

Dado $n \in \mathbb{N}$, se usa la función interp. cuadrática a trozos en los $2n+1$ nodos

$$\boxed{x_j = a + jh} \qquad \text{con } j = 0, 1, \ldots, 2n \qquad \text{siendo } h = \frac{b-a}{2n}.$$

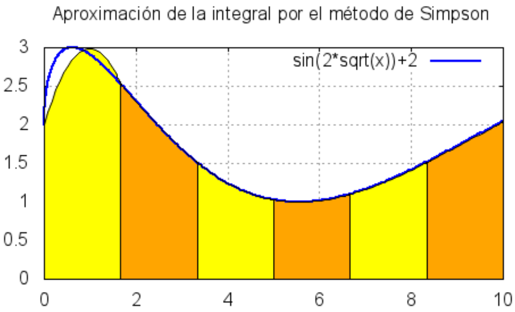


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \mathrm{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right)$$

Método de Simpson - compuesto

Dado $n \in \mathbb{N}$, se usa la función interp. cuadrática a trozos en los $2n+1$ nodos

$$\boxed{x_j = a + jh} \qquad \text{con } j = 0, 1, \ldots, 2n \qquad \text{siendo } h = \frac{b-a}{2n}.$$

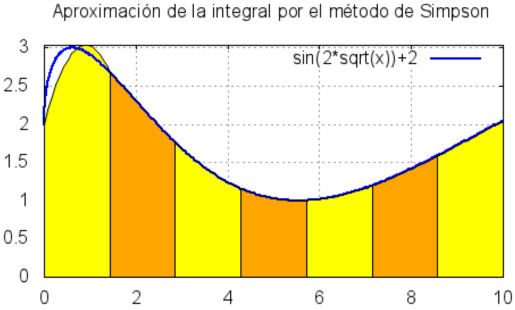


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \mathrm{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right)$$

Método de Simpson - compuesto

Dado $n \in \mathbb{N}$, se usa la función interp. cuadrática a trozos en los $2n+1$ nodos

$$\boxed{x_j = a + jh} \qquad \text{con } j = 0, 1, \ldots, 2n \qquad \text{siendo } h = \frac{b-a}{2n}.$$

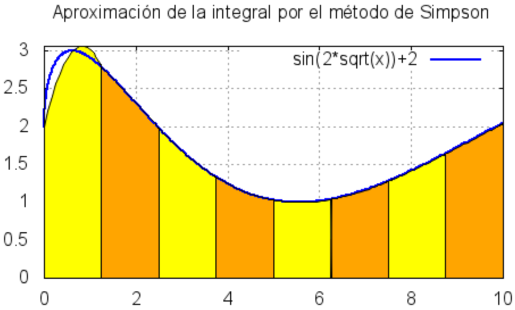


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \text{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right)$$

Método de Simpson - compuesto

Dado $n \in \mathbb{N}$, se usa la función interp. cuadrática a trozos en los $2n+1$ nodos

$$\boxed{x_j = a + jh} \qquad \text{con } j = 0, 1, \ldots, 2n \qquad \text{siendo } h = \frac{b-a}{2n}.$$



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \mathrm{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right)$$

Fórmula del método de Simpson

La aproximación de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

que se obtiene mediante el **método de Simpson** con n parábolas es:

$$\mathrm{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right).$$

Fórmula del método de Simpson

La aproximación de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

que se obtiene mediante el **método de Simpson** con n parábolas es:

$$\mathrm{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right).$$

Ejemplo

Si calculamos aproximadamente $\log(2) = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ mediante el método de Simpson con 2 y 4 parábolas, obtenemos

$$\mathrm{Simpson}_{\mathbf{2}}(f) = 0.69325\ldots \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Simpson}_{\mathbf{4}}(f) = 0.69315\ldots$$

El valor "exacto" de $\log(2)$ es $0.69314718055995\ldots$

Observamos que la aproximación $\mathrm{Simpson}_{\mathbf{2}}(f)$ (con 5 evaluaciones) ya es bastante mejor que la aproximación $\mathrm{Trapecio}_{\mathbf{5}}(f)$ (con 6 evaluaciones).

COTA DEL ERROR en el método de Simpson

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y escribimos $h = \dfrac{b-a}{2n}$.

Si f es de clase $\mathcal{C}^4$ en $[a, b]$ y $M > 0$ es una constante tal que $|f^{(4)}(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \mathrm{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) \right| \leq \frac{(b-a)M}{180} \cdot h^4$$

COTA DEL ERROR en el método de Simpson

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y escribimos $h = \dfrac{b-a}{2n}$.

Si f es de clase $\mathcal{C}^4$ en $[a,b]$ y $M > 0$ es una constante tal que $|f^{(4)}(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \mathrm{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) \right| \leq \frac{(b-a)M}{180} \cdot h^4$$

Ejemplo: $f(x) = x \operatorname{sen} x,\ a = 0,\ b = \pi$

Representación de $\dfrac{1}{n^4}$ y

$$error(n) = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \mathrm{Simpson}_{\mathbf{n}}(f) \right|$$

para $n = 1, 2, \ldots, 100$.