FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA INFORMÁTICA

Oraciones, Razonamientos y Formalización en L0

PRIMER CURSO DEL GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

PRIMER CUATRIMESTRE

2020-21

Facultad de Informática

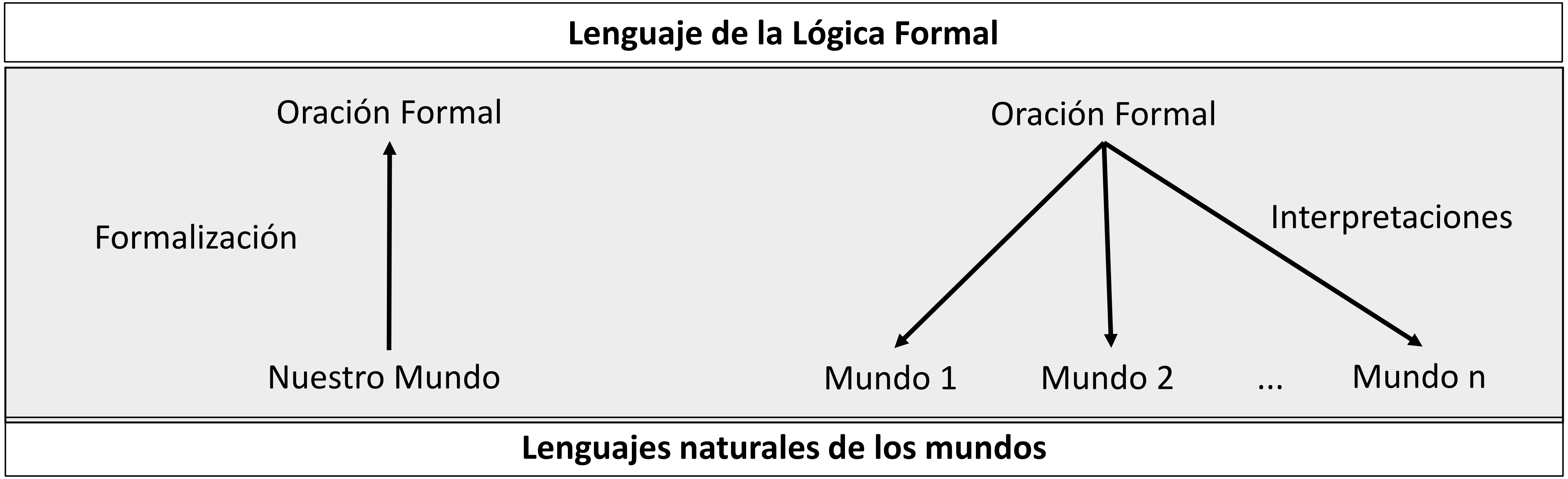
La Lógica y sus tipos

- ¿Qué estudia la lógica?
  - Estudia las oraciones y los razonamientos.
  - Estudia la incoherencia y las consecuencias.
  - Hay tantas lógicas como clases de oraciones y razonamientos se lleguen a utilizar.

- Formal vs Informal
  - Formal: estudia los principios de la demostración e inferencia válida usando lenguajes formales.
  - Informal: estudia las argumentaciones.
- Clásicas. Leyes de tercero excluido, no contradicción, explosión.
  - Lógica proposicional o de orden cero. La unidad de información es la proposición.
  - Lógica de primer orden. Las variables se establecen sobre los individuos.
  - Lógica de segundo orden. Las variables se aplican a predicados y funciones.
- Modales. Incluyen los operadores de necesario y posible.
- Epistémicas. Incluyen operadores del tipo sabe, asume, cree, ...
- Divergentes. No asumen el principio del tercero excluido.
  - Lógica multivaluada. Distintos valores de verdad.
  - Lógica fuzzy. Infinitos valores de verdad.

La Lógica Formal

La **Lógica Formal** es una parte de la Matemática mediante la cual podemos formalizar y analizar el conocimiento haciendo uso de un lenguaje formal, a partir del manejo tanto de oraciones (lógicas), aseverando (calculando) la veracidad o falsedad de las mismas (**SATISFACIBILIDAD**), como de razonamientos (lógicos), demostrando su corrección o validez (**DEMOSTRACIÓN o DEDUCCIÓN**).



En este curso vamos a utilizar la Lógica Formal, según dos Lógicas Clásicas: la Lógica Proposicional o de Orden Cero, que denotaremos por L0, y la Lógica de Primer Orden, tanto en su versión de Lógica Categórica (LC), como en la de Lógica de Predicados (L1)

Las oraciones lógicas (I)

Tipos de oraciones lógicas

- Oraciones Simples
  - Tienen un sintagma verbal.
- Oraciones Complejas o Compuestas
  - Tienen más de un sintagma verbal.
  - Están formada por dos o más oraciones simples.
  - Incluyen nexos o elementos de relación entre oraciones simples (indicadores de composición): conjunciones, locuciones conjuntivas, adverbios, pronombres relativos, etc.

Indicadores de Composición

- esto y aquello
- esto o aquello
- o esto, o aquello.
- ni esto, ni aquello.
- si esto entonces aquello.
- esto solo si aquello.
- esto a condición de que aquello.
- esto si y solo si aquello.
- no esto a menos que aquello.
- esto hasta que aquello.
- ... y muchos más ...

Las oraciones lógicas (II)

En Lógica Formal Clásica:

- **Una frase (o enunciado) a la que podemos atribuir, sin el menor asomo de duda, <u>un valor de Verdad o de Falsedad</u>, será una oración lógica.**
  - Atención: "*Podemos atribuir*" no indica que tengamos que saber exactamente si la frase es verdadera o falsa en un contexto, sino que tenemos los medios para saberlo. Por ejemplo, la frase "**Está lloviendo**" es una oración lógica a la que podemos asignar sin duda alguna un valor de verdad o falsedad… una vez que hayamos mirado por la ventana para ver lo que pasa fuera, desde la perspectiva de la definición meteorológica del fenómeno "lluvia".
  - También lo serán, en estos casos como oraciones complejas: **"Soy español y me gusta el fútbol pero no el béisbol"**, **"me pondré una chaqueta o iré a cenar a un restaurante"**, **"este verano iremos a Madrid o iremos a Bruselas"**, "**si estornudo, cierro los ojos", "si mi abuela tuviera ruedas, sería una bicicleta", "todos los mamíferos son vivíparos", "algunos españoles a los que gusta el futbol, no son amantes del béisbol"**
  - Frases del estilo **"la frase que está Vd. leyendo es falsa"** no es una oración lógica, pues no podemos asignarle un valor de verdad ni de falsedad ni de nada de nada, salvo quizá acordarnos amablemente de los ancestros del autor de la frase, quizás un tertuliano de los medios de comunicación. Tampoco lo serán aquellas que no supongan una afirmación o negación, como por ejemplo, las exclamativas o las interrogativas: **"¿quién escribió la novela 'Cien años de soledad'?"**

Las oraciones lógicas (y III)

En Lógica Formal Clásica:

- **O son simples (atómicas), o son complejas (moleculares).**
  - **La Lógica formal no entiende nada acerca de si una oración simple (atómica) es verdadera o falsa**. No tiene ni la menor idea de si son verdaderas o falsas, seremos nosotros los que hagamos la atribución. Lo que sí formaliza es qué les ocurre (si serán verdaderas o falsas) a las diferentes oraciones complejas que se forman a partir de oraciones simples, en función de los diferentes valores de verdad de las mismas y de la semántica de las conectivas del lenguaje formal implementado.
- **Las oraciones lógicas las formalizaremos, o bien mediante Proposiciones, o bien mediante Predicados, ya sean categóricos o relacionales. Y veremos sus lenguajes formales.**
- **Cumplen con el <u>principio del tercero excluido</u>:** Es verdadera o es falsa, no hay una tercera posibilidad.
- **Cumplen con el <u>principio de no contradicción</u>:** No puede ser verdadera y falsa a la vez. **Hay que tener en cuenta que es diferente ser Contradictorio y ser Contrario. ¡¡¡OJO!!! Bueno y malo son conceptos contrarios, no contradictorios.**

Tipos de Razonamiento

- **Razonamiento Deductivo**
  - (PREMISA) Regla: todos los estudiantes de la Facultad de Informática son inteligentes.
  - (PREMISA) Caso: Juan es estudiante de la Facultad de Informática.
  - (CONCLUSIÓN) Resultado*:* ***Necesariamente*** Juan es inteligente.
- **Razonamiento Inductivo**
  - (PREMISA) Caso: Juan es estudiante de la Facultad de Informática.
  - (PREMISA) Resultado: Juan es inteligente.
  - (CONCLUSIÓN) Regla: ***Probablemente**,* todos los estudiantes de la Facultad de Informática son inteligentes.
- **Razonamiento Abductivo**
  - (PREMISA) Resultado: Juan es inteligente.
  - (PREMISA) Regla: todos los estudiantes de la Facultad de Informática son inteligentes.
  - (CONCLUSIÓN) Caso: ***Posiblemente***, Juan es estudiante de la Facultad de Informática.

- En este curso de lo que vamos a hablar es de **Razonamiento Deductivo**

Los Razonamientos Lógicos (I)

- Un **Razonamiento Lógico es un esquema** mediante el que decimos que una oración lógica, que llamaremos Conclusión, se deduce a partir de un conjunto de otras oraciones lógicas, que llamaremos Premisas.
- **¡¡¡No confundir razonamiento con el condicional!!!** En nuestro lenguaje natural, muchas veces omitimos la regla de condicionamiento y expresamos directamente premisas y conclusión como una frase única: "Como llueve, el patio estará mojado"
- No todos los esquemas son adecuados, ni todas las oraciones son oraciones lógicas. ¡¡¡OJO CON ESTO!!!
  - Es mejor dormir en un puente que nada; nada es mejor que ser millonario. Por tanto, es mejor dormir en un puente que ser millonario. ¡¡¿¿??!! Aquí lo que pasa es que las supuestas oraciones no son lógicas: ¿cómo se evidencia la atribución de verdad?
  - Todos los animales son mortales; todos los hombres son mortales. Por tanto, todos los animales son hombres. ¡¡¿¿??!! Aquí las oraciones si son oraciones lógicas; es el esquema el que es dudoso: es un aparente silogismo clásico de figura segunda, pero desgraciadamente no adecuado: puede concluir también todos los hombres son animales, lo que aporta un esquema anómalo. Ya lo sabía ¡¡¡Aristóteles!!!

Los Razonamientos Lógicos (II)

Indicadores de las premisas
- Para
- Desde
- Porque
- Suponiendo que
- Al ver que
- Teniendo en cuenta que
- Esto es así porque
- Por la razón que
- En vista del hecho de que
- Como (indica)
- Dado que
- Ya que
- En cuanto

Indicadores de conclusión
- Por lo tanto
- Así
- Por esta razón
- En/como consecuencia
- Por consiguiente
- Siendo así
- Resulta que
- La moraleja es
- Lo que demuestra que
- Lo que significa que
- Lo que indica que
- De la cual se puede inferir que
- En/como conclusión

Los Razonamientos Lógicos (III)

- De un Razonamiento Lógico diremos que es VÁLIDO (CORRECTO) o NO. Y tendremos Métodos y Técnicas para demostrarlo.

- Básicamente, diremos que de la VERDAD de las Premisas se concluye la VERDAD de la Conclusión. Pero hay mucho que hablar sobre esto.
  - **Si estornudo, cierro los ojos; estornudo. Por tanto, cierro los ojos**
  - **Si mi abuela tuviera ruedas, sería una bicicleta; mi abuela tiene ruedas. Por tanto, mi abuela es una bicicleta**
  - Ambos razonamientos representan un esquema correcto que es el llamado MODUS PONENS, por tanto, son razonamientos VÁLIDOS. Pero en el segundo de ellos, una de las premisas es seguramente FALSA (la segunda premisa). De premisas falsas no podemos saber si las conclusiones son Verdaderas, o bien son Falsas. ¡¡¡PIENSENLO UN POCO!!!

Los Razonamientos Lógicos (y IV)

- Pongamos un ejemplo algo distinto de uno de los anteriores
  - **Si estornudo, cierro los ojos; no estornudo. Por tanto, no cierro los ojos**
  - ¿Se puede concluir, en este caso, que de la VERDAD de las dos premisas, se obtiene la VERDAD de la conclusión? Pues, evidentemente, ¡¡¡NO!!!
  - La conclusión puede ser FALSA, es decir, puedo tener los ojos cerrados, sin estornudar. Así, la conclusión FALSA es compatible con la VERDAD de las premisas.
  - En este caso, se dice que el esquema de razonamiento deductivo es **NO VÁLIDO**.

- Para terminar con estos ejemplos de validez de razonamientos, pongamos otro de razonamiento VÁLIDO, alterando la ocurrencia de premisas y conclusión, y sus negaciones.
  - **Si estornudo, cierro los ojos; no cierro lo ojos. Por tanto, no estornudo**
  - Que si lo analizan verán que es **VÁLIDO**.

El Lenguaje Formal de la L0 (I)

- **Un Lenguaje Formal consta de**: (1) Un conjunto de símbolos primitivos: alfabeto o vocabulario del lenguaje, y (2) Una definición recursiva para conectar los símbolos: gramática o sintaxis del lenguaje.
- Definición de **Fórmula Bien Formada**: Una f.b.f. (palabra, expresión, fórmula) es una cadena de caracteres generada según una gramática formal a partir de un alfabeto dado.
- Un lenguaje formal es el conjunto de todas las f.b.f. obtenidas a partir de un vocabulario y una gramática.
- En la práctica, necesitan de un sistema de codificación/formalización y de interpretación.

El Lenguaje Formal de la L0 (II)

- En **Lógica de Proposiciones, L0, el alfabeto o vocabulario** estará formado por:
  - **Constantes**. Son los símbolos reservados verdadero (V) y falso (F). B = {V; F} .
  - **Proposiciones atómicas o letras proposicionales**. Formados por un conjunto arbitrario de letras. También se denominan átomos. El conjunto de todos los átomos se denotarán por P.
  - **Conectivos u operadores booleanos**.

    $\wedge$ Conjunción $\rightarrow$ Implicación

    $\vee$ Disyunción $\leftrightarrow$ Doble implicación

    $\neg$ Negación
  - **Otros símbolos**. paréntesis '( )', corchetes '[]', etc. Se utilizan para leer mejor las expresiones con conectivos lógicos.

- La **Gramática o sintaxis de la Lógica de Proposiciones** se basa en la siguiente definición para la Construcción de Fórmulas Proposicionales: El conjunto de fórmulas, que hemos llamado Lenguaje Formal, es el menor conjunto de fórmulas que se puede obtener al aplicar las siguientes reglas gramaticales:
  - **Paso Básico**: Cualquier átomo perteneciente al conjunto P de proposiciones es una f.b.f.
  - **Paso Recursivo**: Si α y β son dos f.b.f. también lo son:
    - $\neg\alpha$, la negación de la f.b.f. Se lee "no α".
    - $(\alpha \wedge \beta)$, la conjunción de las dos f.b.f. Se lee "α y β ".
    - $(\alpha \vee \beta)$, la disyunción de las dos f.b.f. Se lee "α o β *o ambas a la vez*".
    - $(\alpha \rightarrow \beta)$, el condicionamiento de las dos f.b.f. Se lee "α implica β".
    - $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, el doble condicionamiento de las f.b.f. Se lee "α si y solo si β".

El Lenguaje Formal de la L0 (III)

- Esta definición para la construcción de Fórmulas Proposicionales se dice que es **UNA DEFINICIÓN RECURSIVA**, básica para los formalismos matemáticos, y una de las tres tipologías de definición esenciales:
  - Definición Extensiva o Extensional
  - Definición Comprensiva o Intensional
  - Definición Recursiva (que incluye la llamada definición Inductiva)

El Lenguaje Formal de la L0 (IV)

Reglas de manejo y de simplificación de paréntesis

- Precedencia/Prioridad de operadores
  - **El orden de prioridad de los operadores es: (1) $\neg$; (2) $\vee$, $\wedge$; (3) $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.**
  - En el caso de que dos operadores tengan la misma prioridad, será precedente el situado más a la izquierda.
  - Las expresiones $\mathbf{p \vee q \rightarrow r}$, y $\mathbf{p \vee (q \rightarrow r)}$ son dos f.b.f. pero son dos expresiones distintas cuya semántica (valor de verdad) es diferente.
- Regla para añadir paréntesis
  - A cualquier expresión $\boldsymbol{\alpha}$ que no se corresponda con una negación se le puede añadir paréntesis para construir la oración $\mathbf{(\boldsymbol{\alpha})}$.
- Regla para añadir paréntesis con prioridad de operadores
  - Consiste en aplicar la "Regla para añadir paréntesis", primero a los patrones $\vee$ y $\wedge$; y a continuación a los patrones $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$
  - Ejemplos: Al aplicar esta regla dos veces a la expresión $\mathbf{p \vee q \rightarrow r}$, se genera $\mathbf{(p \vee q) \rightarrow r}$, y después $\mathbf{((p \vee q) \rightarrow r)}$. A la expresión $\mathbf{p \vee (q \rightarrow r)}$ sólo se le puede aplicar una vez la regla para generar $\mathbf{(p \vee (q \rightarrow r))}$

El Lenguaje Formal de la L0 (V)

Reglas de manejo y de simplificación de paréntesis

- Expresión con el menor número de paréntesis
  - Una f.b.f. **α** se puede expresar con el menor número de paréntesis según **β,** si y sólo si cumple simultáneamente estas condiciones.
    - **β** es una expresión con menos paréntesis de **α**.
    - **β** contiene la menor cantidad de paréntesis posibles para que se cumpla el paso anterior. Es decir, si a **β** se le quitara otro par de paréntesis no se obtendría **α**.
  - También se puede decir que al aplicar continuamente la regla para añadir paréntesis con prioridad de operadores sobre **β** se obtiene **α.**

- **Tengamos una expresión como ésta: $\neg p \lor q \land r \rightarrow \neg q \rightarrow s$. ¿Es una f.b.f.?, ¿Podemos añadirle paréntesis? Estos son los pasos a dar:**
  - $(\neg p \lor q) \land r \rightarrow \neg q \rightarrow s$
  - $((\neg p \lor q) \land r) \rightarrow \neg q \rightarrow s$
  - $(((\neg p \lor q) \land r) \rightarrow \neg q) \rightarrow s$
  - $((((\neg p \lor q) \land r) \rightarrow \neg q) \rightarrow s)$

El Lenguaje Formal de la L0 (y VI)

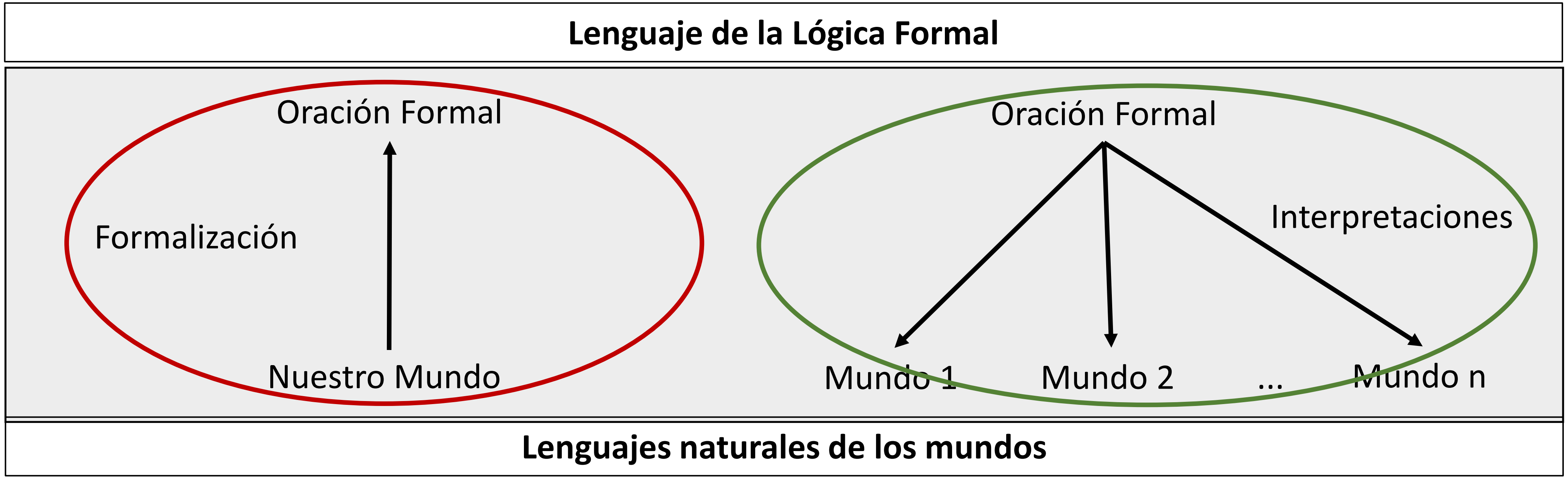
Reglas de manejo y de simplificación de paréntesis

- **Alternativas de diferente semántica. HAGAN LO MISMO EN CASA**
  - $\neg p \lor (q \land r) \to \neg q \to s$
  - $\neg p \lor (q \land r \to \neg q) \to s$
  - $\neg p \lor q \land r \to (\neg q \to s)$

- **Recordemos:** Precedencia/Prioridad de operadores
  - **El orden de prioridad de los operadores es: (1) $\neg$; (2) $\lor$, $\land$; (3) $\to$, $\leftrightarrow$.**
  - En el caso de que dos operadores tengan la misma prioridad, será precedente el situado más a la izquierda.
  - Las expresiones $\mathbf{p \lor q \to r}$, y $\mathbf{p \lor (q \to r)}$ son dos f.b.f. pero son dos expresiones distintas cuya semántica (valor de verdad) es diferente.

Formalización e Interpretación en L0

- **Formalizar una oración:** tarea mediante la cual podemos escribir su f.b.f. en el lenguaje formal.
- **Interpretar una f.b.f.:** se define como el procedimiento que traduce sus fórmulas atómicas a oraciones naturales del mundo



La Formalización nos permite abstraernos del lenguaje natural y escribir fórmulas que pueden representar situaciones en múltiples escenarios naturales. Los enunciados: (a) “no comeré ni beberé a menos que tenga la despensa llena”; y (b) “ganaré mucho dinero y viviré feliz sólo si tengo un buen trabajo”, se pueden representar por f.b.f.’s de igual estructura en L0: **$(p \wedge q \rightarrow r)$**

La Formalización de oraciones en L0 (I)

<u>$\neg\alpha$</u>

- No es el caso de **α**.
- No **α**.
- No es cierto que **α**.
- Es falso que **α**.
- No sucede que **α**.
- La negación de **α**.

<u>$\alpha \rightarrow \beta$</u>

- Si **α** , **β**.
- Si **α** entonces **β**.
- **α** sólo si **β**.
- Sólo **α** si **β**.
- Es suficiente **α** para que **β**.
- Siempre que **α** entonces **β**.
- Es necesario **β** para que **α**.
- No **α** a menos que **β**.
- A no ser que **β** no **α**.

<u>$\alpha \wedge \beta$</u>

- ***α*** y **β**.
- Alternativas a “y”: pero, aunque, además, sin embargo, también, a la vez, aún, no obstante.

<u>$\alpha \vee \beta$</u>

- o ***α*** o **β** .
- Ya ***α***, ya **β**, ya ambas.

<u>$\alpha \leftrightarrow \beta$</u>

- ***α*** si y sólo si **β**.
- ***α*** equivale a **β**.
- ***α*** cuando y sólo cuando **β**.
- ***α*** cuando únicamente **β**.
- ***α*** es condición suficiente y necesaria para que **β.**

La Formalización de oraciones en L0 (II)

Los pasos a dar para formalizar oraciones en L0:

- Las oraciones en lenguaje natural: “si estornudo, cierro los ojos”; “no estornudaré a menos que cierre los ojos”; “estornudaré sólo si cierro los ojos”; “la condición necesaria para estornudar es cerrar los ojos”; “a no ser que cierre los ojos no estornudaré”; “si no cierro lo ojos, entonces no estornudo”, todas ellas se formalizan de la siguiente manera:
- **Se identifican las oraciones simples o atómicas y se las denota por “letras” proposicionales**
  - Estornudar (estornudo, estornudaré) = **p**
  - Cerrar los ojos (cierro los ojos, cierre los ojos) = **q**
- **Se identifica los indicadores de conexión o de composición, y se les denota por las conectivas adecuadas.**
  - En este caso, es la conectiva de Implicación o condicional. Por tanto, la f.b.f. que formaliza las oraciones es: $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q})$
- Si la oración en lenguaje natural hubiese sido: “estornudo y cierro los ojos”
  - La f.b.f. que la formaliza sería: $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$
- En las primeras oraciones lo que se pretende decir es que existe un condicionamiento o una secuencia ordenada de ocurrencias entre las oraciones atómicas. En la segunda opción, lo que se afirma que las ocurrencias se deben dar al mismo tiempo.
- **SEMÁNTICA DIFERENTE QUE SE EVIDENCIARÁ EN LA EVALUACIÓN DE LAS MISMAS.**

Facultad de Informática

La Formalización de oraciones en L0 (y III)

Vamos ahora a formalizar en L0 el circuito de encendido del teléfono de la figura, incluyendo el estado de todas sus baterías**:**

p1 ∧ (p2 ∨ p3) ∧ p4

- El circuito de encendido está compuesto por cuatro baterías, que denotaremos por las proposiciones atómicas: p1, p2, p3 y p4.
- Si la batería denotada por **p1** está cargada, a la proposición atómica que formaliza su estado se le atribuirá el valor VERDAD, y si está descargada, se le atribuirá el valor FALSO. Igual, al resto.
- Las baterías **p2** y **p3** están en paralelo entre sí, formando el circuito global en serie con **p1** y **p4**. La conexión en serie se representa por la conectiva conjunción, y la conexión en paralelo por la conectiva disyunción.
- Así el circuito se formalizaría por la expresión en L0: **p1 ∧ (p2 ∨ p3) ∧ p4**