1. Resumen

Vídeo : `https://youtu.be/IK8Fehxmgmo`

Definición 1. *Una aplicación $f : \mathcal{A}^n(K) \to \mathcal{A}^m(K)$ diremos que es una* **aplicación afín** *si existe una matriz $A \in M_{m\times n}(K)$ y un $B \in K^m$ tal que $f(P) = AP + B$. Si utilizamos coordenadas homogéneas, esta relación de puede escribir como* $\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline f(P) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline B & A \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline P \end{array}\right]$.

Dada una aplicación afín de esta forma, definiremos los siguientes elementos:

1. *A la aplicación lineal representada por A la llamaremos* **aplicación lineal asociada a** f *y la denotaremos $\overrightarrow{f}$.*

2. *Al punto B lo llamaremos* **desplazamiento del origen**, *de hecho,* $\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline f(0) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline B & A \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline B \end{array}\right]$.

Usando esta notación, podemos decir que la **matriz de** f *es* $M(f) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(0) & M(\overrightarrow{f}) \end{array}\right]$.

Proposición 2. *La composición de aplicaciones afines es una aplicación afín. La aplicación lineal asociada es la composición de las aplicaciones lineales asociadas.*

Demostración. Sean $f : \mathcal{A}^n(K) \to \mathcal{A}^m(K)$ y $g : \mathcal{A}^p(K) \to \mathcal{A}^n(K)$ aplicaciones afines, entonces

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline (f\circ g)(P) \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline f(g(P)) \end{array}\right] && \text{(Definición de composición de aplicaciones)} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(0) & M(\overrightarrow{f}) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline g(P) \end{array}\right] && (f \text{ es afín}) \\
&= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(0) & M(\overrightarrow{f}) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline g(0) & M(\overrightarrow{g}) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline P \end{array}\right] && (g \text{ es afín}) \\
&= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(0) + M(\overrightarrow{f})g(0) & M(\overrightarrow{f})M(\overrightarrow{g}) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline P \end{array}\right] && \text{(Producto de matrices en bloques)}
\end{aligned}$$

Esto prueba que efectivamente existe una matriz de la forma que hemos indicado en la definición que representa a la función compuesta $f \circ g$. □

Definición 3. *Una aplicación $t : \mathcal{A}^n(K) \to \mathcal{A}^n(K)$ se llama una* **traslación** *si la aplicación lineal asociada es la aplicación identidad.*

Proposición 4. *Una aplicación $t : \mathcal{A}^n(K) \to \mathcal{A}^n(K)$ es una traslación si y solo si se puede poner como $t(P) = P + v$ para un vector constante que llamaremos desplazamiento.*

Demostración. Para calcular el desplazamiento, en realidad lo único que tenemos que ver es donde va el origen, $v = t(0)$, porque como la matriz tiene que tener la forma $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline v & I \end{array}\right]$ entonces, para todo punto P tendremos que $\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline t(P) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline v & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline P \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline P+v \end{array}\right]$. □

Las aplicaciones lineales se pueden considerar como aplicaciones afines que dejan fijo el origen de coordenadas. Para transformar la matriz de una aplicación lineal $M(f)$ en la matriz de una aplicación afín únicamente tenemos que añadir una primera fila y columna que tenga un uno en la diagonal y cero en el resto de las posiciones, es decir, $M(f)$ se transformará en $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M(f) \end{array}\right]$.

Cualquier aplicación afín se puede poner como composición de una aplicación lineal y una traslación, ya que

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(0) & M(f) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(0) & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M(f) \end{array}\right].$$

Tal y como sucedía en el caso de los espacios vectoriales, podemos extender el concepto de aplicación afín y de matriz asociada a una aplicación afín utilizando sistemas de referencia. Si L una variedad afín de dimensión n y R un sistema de referencia afín de L. Entonces tenemos una biyección entre el espacio afín $\mathcal{A}^n(K)$ y la variedad afín L que a cada $\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline X \end{array}\right] \in \mathcal{A}^n(K)$ le asigna $\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline X \end{array}\right]_R = R \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline X \end{array}\right] \in L$. Vamos a denotar φ_R a esta biyección para hacer la siguiente definición:

Definición 5. *Sean L y L' dos variedades afines de dimensiones n y n' con sistemas de referencia R y R'. Una aplicación $f : L' \to L$ diremos que es una aplicación afín si la composición*

$$\mathcal{A}^{n'}(K) \xrightarrow{\varphi_{R'}} L' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{\varphi_R^{-1}} \mathcal{A}^n(K)$$

es una aplicación afín. En caso de que lo sea, la matriz de esta aplicación afín la llamaremos matriz asociada a f en los sistemas de referencia R' y R y la denotaremos $M_{R'R}(f)$.

En realidad, la propiedad de que f sea una aplicación afín no depende de la elección de los sistemas de referencia puesto que las matrices de cambio de sistema de referencia tienen la misma estructura que las de las aplicaciones afines y su producto también tiene la misma estructura.

Vamos a ver una serie de ejemplos de cómo utilizar los sistemas de referencia para construir aplicaciones afines:

Ejemplo 6. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $30°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\mathsf{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, que convertida en transformación afín nos da $M_{RR}(g_{30}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{30}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{30}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(g_{30}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{30})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2}\sqrt{3}+2 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\sqrt{3}+\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejemplo 7. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{3}{4}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{3}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{3}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(h_{\frac{3}{4}}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejemplo 8. *Calcula las matrices de las transformaciones afines que corresponden a la simetría y la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y la de la proyección $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Poniendo estas matrices en formato afín nos da

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p{,}s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p{,}s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejemplo 9. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{2}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Si hacemos el cálculo de la homotecia vectorial centrada en el origen de factor reductor $\frac{1}{2}$, la matriz asociada es $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, y si hacemos su versión afín, tenemos que $M_{RR}(h_{\frac{1}{2}}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{2}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{2}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\lozenge$

Ejemplo 10. *Calcula las matrices de las transformaciones afines que corresponden a la simetría y la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia

$$R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Las matrices de la proyección y la simetría en el sistema de referencia R son

$$M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p,s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p,s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejemplo 11. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Este vector no tiene la misma longitud que v_2 ya que v_2 tiene longitud $\sqrt{2}$ y este vector tiene longitud $\sqrt{6}$. Para conseguir que tengan la misma longitud, debemos tomar $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Esto nos da el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & -1 & -1 \\ 1 & -\frac{2}{3}\sqrt{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Usando que $\mathsf{cos}(60°) = \frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{60°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{60^\circ}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{60^\circ}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(g_{60^\circ}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & -1 & -1 \\ 1 & -\frac{2}{3}\sqrt{3} & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{60^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{5}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

Ejercicio 12. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* 120° *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{120}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{120}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{120}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(g_{120}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{120})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 13. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $60°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(60°) = \frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{60}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{60}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{60}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{60})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{60})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 14. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $30°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathsf{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{30}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{30}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{30}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{30})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{30})}\underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{3}-4 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 15. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $60°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(60°) = \frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{60}) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{60}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{60}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{60})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{60})}\underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 16. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $150°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(150°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathsf{sen}(150°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{150}) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{150}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{150}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{150})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{150})} \underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} - 4 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 17. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* 30° *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathsf{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{30}) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{30}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{30}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{30})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{30})} \underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 18. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* 135° *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(135°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\operatorname{sen}(135°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{135}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{135}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{135}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{135})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{135})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -3\sqrt{2}-3 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

♢

Ejercicio 19. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $45°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\operatorname{sen}(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{45}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{45}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{45}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{45}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{45})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{45})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}-3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{5}{2}\sqrt{2}-2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

♢

Ejercicio 20. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $150°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(150°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathsf{sen}(150°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{150}) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{150}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{150}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{150})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{150})} \underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 21. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $120°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(120°) = -\frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(120°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{120}) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{120}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{120}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{120})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{120})} \underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} - \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} - 3 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 22. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* 150° *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix}-3\\-1\end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(150^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathsf{sen}(150^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{150}) = \left[\begin{array}{c|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{150}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{150}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{150})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{150})} \underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{7}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 23. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* 45° *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix}-2\\-3\end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\mathsf{sen}(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{45}) = \left[\begin{array}{c|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{45}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{45}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{45}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{45})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{45})} \underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}-2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{5}{2}\sqrt{2}-3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 24. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* 60° *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$.
Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(60°) = \frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{60}) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{60}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{60}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{60})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{60})} \underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 25. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* 135° *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$.
Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(135°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\mathsf{sen}(135°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{135}) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{135}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{135}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{135})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{135})} \underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2}-1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}-2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 26. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $30°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathsf{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{30}) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{30}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{30}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{30})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{30})} \underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 27. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $150°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(150°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathrm{sen}(150°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{150}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{150}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{150}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{150})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{150})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} - \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 28. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $30°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathrm{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{30}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{30}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{30}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{30})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{30})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} - \frac{7}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 29. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $150°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(150^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\operatorname{sen}(150^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{150}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{150}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{150}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{150})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{150})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

◊

Ejercicio 30. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* 45° *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{45}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{45}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{45}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{45}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{45})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{45})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

◊

Ejercicio 31. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $150°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix}-2\\-1\end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(150°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathsf{sen}(150°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{150}) = \left[\begin{array}{c|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{150}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{150}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{150})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{150})} \underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}-\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 32. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $135°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix}-1\\-2\end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(135°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\mathsf{sen}(135°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{135}) = \left[\begin{array}{c|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{135}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{135}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{135})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{135})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\Diamond$

Ejercicio 33. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $30°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$.
Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathsf{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{30}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{30}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{30}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{30})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{30})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$\Diamond$

Ejercicio 34. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $120°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$.
Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(120°) = -\frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(120°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{120}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{120}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{120}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C
\end{tikzcd}$$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{120})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{120})} \underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{9}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 35. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $45°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\mathsf{cos}(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\mathsf{sen}(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{45}) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{45}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{45}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C
\end{tikzcd}$$

$$M(g_{45}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{45})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{45})} \underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}-2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 36. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo* $60°$ *alrededor del punto* $P = \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{60}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{60}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{60}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(g_{60}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{60})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 37. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{3}{4}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{3}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{3}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(h_{\frac{3}{4}}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 38. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{2}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{2}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{2}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 39. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 40. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{3}{4}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{3}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{3}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 41. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{2}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{2}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{2}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(h_{\frac{1}{2}}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 42. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{2}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{2}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{2}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(h_{\frac{1}{2}}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 43. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{2}{3}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{2}{3}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(h_{\frac{2}{3}}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 44. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{3}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{3}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 45. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{2}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{2}{3}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{2}{3}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 46. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{2}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{2}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{2}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 47. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{2}{3}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{2}{3}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 48. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{2}{3}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{2}{3}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 49. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 50. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{3}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{3}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 51. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{4}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 52. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{4}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 53. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 54. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{3}{4}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{3}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{3}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 55. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{3}{4}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{3}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{3}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 56. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{3}{4}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{3}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{3}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 57. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{2}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{2}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{2}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 58. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{3}{4}$ y con centro en el punto* $\left[\begin{array}{r} 2 \\ -2 \end{array}\right]$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{3}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{3}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 59. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{3}{4}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{3}{4}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{3}{4}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(h_{\frac{3}{4}}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 60. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{3}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{3}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C
\end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 61. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{3}$ *y con centro en el punto* $\left[\begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array}\right]$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{3}}"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{3}}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C
\end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 62. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array}\right]$ *y* $B = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}\right]$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(s) M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 63. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 64. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 65. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 66. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 67. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{24}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 68. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$.
Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 69. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$.
Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 70. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 71. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 4 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 72. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 73. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 74. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -4 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 2 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 75. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C
\end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 76. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C
\end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 77. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 78. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 79. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 80. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{12}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 81. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 82. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 83. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 84. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 85. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 86. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(s) M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 87. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 88. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 89. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 90. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 91. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 92. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 93. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 94. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 95. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(p) M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 96. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ 2 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 97. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 98. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(p) M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 99. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 100. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 101. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 102. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 103. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 104. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 105. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 106. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 107. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 108. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 109. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 110. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 111. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A, B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{array}\right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C
\end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 112. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{4}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{4}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{4}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C
\end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 113. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{4}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{4}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 114. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 115. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{2}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{2}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{2}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})}\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 116. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{2}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{2}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{2}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})}\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 117. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{2}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{2}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{2}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(h_{\frac{2}{3}}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 118. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{2}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{2}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{2}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 119. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 120. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{2}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$.
Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{2}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{2}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(h_{\frac{2}{3}}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 121. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{2}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{2}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{2}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 122. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{2}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{2}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{2}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 123. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{4}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{4}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 124. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{3}{4}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{3}{4}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{3}{4}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(h_{\frac{3}{4}}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$\diamond$

Ejercicio 125. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{2}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{2}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 126. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 127. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{2}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{2}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{2}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 128. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{2}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{2}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{2}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(h_{\frac{2}{3}}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 129. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{3}{4}$ *y con centro en el punto* $\left[\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ -2 \end{array}\right]$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{3}{4}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{3}{4}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$\lozenge$

Ejercicio 130. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{2}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$.
Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{2}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{2}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\lozenge$

Ejercicio 131. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 132. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{3}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 133. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 134. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{4}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$.
Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{4}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{4}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 135. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor* $\frac{1}{2}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$.
Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{2}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{2}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(h_{\frac{1}{2}}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 136. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$.
Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "h_{\frac{1}{3}}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "h_{\frac{1}{3}}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 137. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{21}{29} & -\frac{11}{29} & -\frac{7}{29} & -\frac{2}{29} \\ -\frac{11}{29} & \frac{3}{29} & -\frac{6}{29} & -\frac{10}{29} \\ \frac{12}{29} & \frac{2}{29} & -\frac{4}{29} & \frac{3}{29} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{48}{29} & \frac{21}{29} & \frac{16}{29} & -\frac{12}{29} \\ \frac{96}{29} & \frac{16}{29} & -\frac{3}{29} & \frac{24}{29} \\ -\frac{72}{29} & -\frac{12}{29} & \frac{24}{29} & \frac{11}{29} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 138. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(s) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 139. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{48}{35} & \frac{8}{35} & -\frac{11}{35} & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{35} & \frac{13}{35} & \frac{4}{35} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{6}{35} & \frac{1}{35} & \frac{3}{35} & \frac{1}{7} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{12}{35} & \frac{33}{35} & -\frac{6}{35} & -\frac{2}{7} \\ \frac{36}{35} & -\frac{6}{35} & \frac{17}{35} & -\frac{6}{7} \\ \frac{12}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 140. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 141. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{11}{14} & -\frac{5}{28} & -\frac{3}{28} & \frac{3}{14} \\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{28} & -\frac{1}{28} & \frac{1}{14} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 142. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(s) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{33}{53} & -\frac{13}{53} & \frac{7}{53} & -\frac{10}{53} \\ \frac{21}{53} & -\frac{11}{53} & \frac{10}{53} & \frac{16}{53} \\ \frac{2}{53} & \frac{4}{53} & \frac{6}{53} & -\frac{1}{53} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{16}{53} & \frac{21}{53} & -\frac{48}{53} & \frac{8}{53} \\ -\frac{24}{53} & -\frac{48}{53} & -\frac{19}{53} & \frac{12}{53} \\ \frac{4}{53} & \frac{8}{53} & \frac{12}{53} & \frac{51}{53} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 143. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{18}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{7}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{9}{11} & \frac{6}{11} \\ -\frac{6}{11} & \frac{6}{11} & \frac{6}{11} & -\frac{7}{11} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 144. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 145. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{21}{65} & \frac{22}{65} & -\frac{1}{65} & \frac{2}{13} \\ \frac{31}{65} & -\frac{17}{65} & -\frac{14}{65} & \frac{2}{13} \\ \frac{4}{65} & \frac{2}{65} & -\frac{6}{65} & -\frac{1}{13} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{16}{65} & \frac{57}{65} & \frac{24}{65} & \frac{4}{13} \\ \frac{48}{65} & \frac{24}{65} & -\frac{7}{65} & -\frac{12}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{12}{13} & \frac{3}{13} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 146. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{8}{13} & \frac{7}{26} & \frac{5}{26} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{11}{52} & -\frac{7}{52} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{3}{26} & -\frac{1}{52} & \frac{3}{52} & -\frac{1}{13} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{6}{13} & \frac{12}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{4}{13} \\ \frac{18}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{24}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{12}{13} & -\frac{3}{13} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 147. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(s) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{17}{29} & -\frac{7}{29} & \frac{2}{29} & \frac{11}{29} \\ \frac{2}{29} & \frac{6}{29} & -\frac{10}{29} & \frac{3}{29} \\ \frac{11}{29} & \frac{4}{29} & \frac{3}{29} & \frac{2}{29} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{88}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{24}{29} & -\frac{16}{29} \\ -\frac{66}{29} & -\frac{24}{29} & \frac{11}{29} & -\frac{12}{29} \\ -\frac{44}{29} & -\frac{16}{29} & -\frac{12}{29} & \frac{21}{29} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 148. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(s) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{13}{29} & -\frac{6}{29} & \frac{10}{29} & -\frac{3}{29} \\ \frac{20}{29} & \frac{7}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{11}{29} \\ \frac{1}{29} & -\frac{4}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{2}{29} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{8}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{24}{29} & -\frac{16}{29} \\ \frac{6}{29} & -\frac{24}{29} & \frac{11}{29} & -\frac{12}{29} \\ \frac{4}{29} & -\frac{16}{29} & -\frac{12}{29} & \frac{21}{29} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 149. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{4}{21} & -\frac{4}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{21} & \frac{19}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{21} \\ \frac{8}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{11}{21} & -\frac{16}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{16}{21} & \frac{13}{21} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 150. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(s) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 151. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R

es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 152. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{11}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 153. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{14} & -\frac{5}{28} & \frac{3}{14} & \frac{3}{28} \\ -\frac{9}{7} & \frac{1}{14} & -\frac{2}{7} & \frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{28} & \frac{1}{14} & \frac{1}{28} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 154. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -5 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(s) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -5 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{66}{65} & -\frac{1}{65} & \frac{22}{65} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{14}{65} & \frac{14}{65} & \frac{17}{65} & \frac{2}{13} \\ -\frac{6}{65} & \frac{6}{65} & -\frac{2}{65} & -\frac{1}{13} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{72}{65} & -\frac{7}{65} & \frac{24}{65} & \frac{12}{13} \\ -\frac{24}{65} & \frac{24}{65} & \frac{57}{65} & -\frac{4}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{12}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 155. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 156. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 157. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{9}{13} & \frac{2}{13} & \frac{22}{65} & \frac{1}{65} \\ -\frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{17}{65} & -\frac{14}{65} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{2}{65} & \frac{6}{65} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{20}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{4}{13} & \frac{57}{65} & -\frac{24}{65} \\ \frac{24}{13} & \frac{12}{13} & -\frac{24}{65} & -\frac{7}{65} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 158. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 159. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R

es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(s) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{14} \\ -1 & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{14} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -3 & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ 2 & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 160. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(s) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 161. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "s"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "s"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(s) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(s) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{25}{53} & \frac{11}{53} & -\frac{10}{53} & \frac{16}{53} \\ \frac{9}{53} & -\frac{13}{53} & \frac{7}{53} & \frac{10}{53} \\ \frac{15}{53} & -\frac{4}{53} & -\frac{6}{53} & -\frac{1}{53} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{120}{53} & \frac{21}{53} & -\frac{48}{53} & -\frac{8}{53} \\ \frac{180}{53} & -\frac{48}{53} & -\frac{19}{53} & -\frac{12}{53} \\ \frac{30}{53} & -\frac{8}{53} & -\frac{12}{53} & \frac{51}{53} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 162. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(p) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{22}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{10}{29} & \frac{6}{29} \\ -\frac{6}{29} & -\frac{14}{29} & -\frac{8}{29} & -\frac{1}{29} \\ \frac{5}{29} & \frac{2}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{4}{29} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{10}{29} & \frac{25}{29} & \frac{6}{29} & \frac{8}{29} \\ \frac{15}{29} & \frac{6}{29} & \frac{20}{29} & -\frac{12}{29} \\ \frac{20}{29} & \frac{8}{29} & -\frac{12}{29} & \frac{13}{29} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 163. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(p) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{7}{13} & -\frac{7}{52} & -\frac{2}{13} & \frac{11}{52} \\ \frac{3}{13} & \frac{5}{26} & \frac{1}{13} & \frac{7}{26} \\ \frac{3}{13} & -\frac{3}{52} & \frac{1}{13} & \frac{1}{52} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{18}{13} & \frac{17}{26} & \frac{6}{13} & \frac{3}{26} \\ -\frac{24}{13} & \frac{6}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{6}{13} & \frac{3}{26} & -\frac{2}{13} & \frac{25}{26} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 164. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(p) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{28} & -\frac{3}{28} & \frac{3}{14} & \frac{5}{28} \\ \frac{9}{28} & -\frac{1}{28} & \frac{1}{14} & -\frac{3}{28} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{9}{14} & \frac{13}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{9}{7} & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{27}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{5}{14} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 165. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 166. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{5}{13} & -\frac{7}{26} & \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{19}{26} & -\frac{11}{52} & -\frac{2}{13} & -\frac{7}{52} \\ -\frac{3}{26} & \frac{1}{52} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{52} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{13} & \frac{25}{26} & \frac{2}{13} & -\frac{3}{26} \\ -\frac{12}{13} & \frac{2}{13} & \frac{5}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{9}{13} & -\frac{3}{26} & \frac{6}{13} & \frac{17}{26} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 167. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{8}{21} & -\frac{4}{21} & -\frac{5}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{7} & \frac{17}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{8}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{21} & \frac{20}{21} & \frac{4}{21} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{8}{21} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 168. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{8}{27} & \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{8}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{16}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{16}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 169. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(p) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 170. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 171. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{18} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 172. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{10}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{21} & -\frac{4}{21} & \frac{2}{21} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{7} & \frac{20}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ -\frac{4}{7} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 173. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 174. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(p) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{27}{35} & \frac{1}{7} & \frac{13}{35} & -\frac{4}{35} \\ -\frac{13}{35} & \frac{1}{7} & -\frac{8}{35} & -\frac{11}{35} \\ \frac{6}{35} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{35} & -\frac{3}{35} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{35} & \frac{1}{7} & \frac{34}{35} & \frac{3}{35} \\ \frac{18}{35} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{35} & \frac{26}{35} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 175. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{24} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 176. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 177. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(p) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 178. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(p) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & -\frac{5}{18} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{4}{3} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 179. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(p) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{16}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{16}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{array}\right]$$

$\diamond$

Ejercicio 180. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(p) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 181. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right]}_{R}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)}\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 182. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 183. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{13}{29} & \frac{11}{29} & -\frac{7}{29} & -\frac{2}{29} \\ -\frac{7}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{6}{29} & -\frac{10}{29} \\ -\frac{5}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & -\frac{3}{29} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{10}{29} & \frac{25}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{6}{29} \\ \frac{20}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & \frac{12}{29} \\ -\frac{15}{29} & \frac{6}{29} & \frac{12}{29} & \frac{20}{29} \end{array}\right]$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 184. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 185. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{7}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{9} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{10}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 186. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponde a la proyección ortogona sobre el plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "p"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "p"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(p) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{20}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{10}{29} & -\frac{6}{29} \\ \frac{33}{29} & \frac{11}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{7}{29} \\ \frac{6}{29} & \frac{2}{29} & -\frac{3}{29} & \frac{4}{29} \end{array}\right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{12}{29} & \frac{25}{29} & \frac{6}{29} & -\frac{8}{29} \\ \frac{18}{29} & \frac{6}{29} & \frac{20}{29} & \frac{12}{29} \\ -\frac{24}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{12}{29} & \frac{13}{29} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 187. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(120°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{120°}) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{120°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{120°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(g_{120°}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{120°})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{6}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} + \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} - \frac{3}{2} & \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} + \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{7}{10} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 188. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]$

Usando que $\mathsf{cos}(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{120^\circ}) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{120^\circ}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{120^\circ}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{120^\circ})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{120^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} + \frac{3}{10} & \frac{7}{10} & \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} - 3 & -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} + \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 189. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que para por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B.*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\mathsf{cos}(135°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\mathsf{sen}(135°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{135°}) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{135°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{135°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{135°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{135°})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 190. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathsf{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{30°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{30°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{30°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{30°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{30°})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{5}\sqrt{5} + \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} & \frac{1}{10}\sqrt{3} + \frac{4}{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2 & \frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 191. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\operatorname{sen}(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{45°}) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{45°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{45°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{45}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{45°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{45°})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{3}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \\ -\sqrt{2} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 192. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ y $\mathrm{sen}(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{60°}) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{60°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{60°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(g_{60°}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{60°})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} - \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} + \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 193. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(150°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\operatorname{sen}(150°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{150°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{150°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{150°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{150°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{150°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2}\sqrt{3}+1 & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}-1 & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 194. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B*.*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{30°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{30°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{30°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{30°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{30°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{10}\sqrt{3} - \frac{1}{5} & \frac{1}{10}\sqrt{3} + \frac{4}{5} & \frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 195. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B*.*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\mathsf{cos}(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathsf{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{30°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{30°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{30°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{30°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{30°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 196. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(135°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\operatorname{sen}(135°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{135°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{135°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{135°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{135°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{135°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{2} + \frac{3}{10}\sqrt{2} + \frac{3}{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{2} + \frac{4}{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{2} - \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{10}\sqrt{5}\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 & \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{2} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5}\sqrt{2} + \frac{3}{5}\sqrt{2} + \frac{6}{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{2} - \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{2} & -\frac{2}{5}\sqrt{2} + \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 197. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ y $\mathrm{sen}(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{60°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{60°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{60°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{60°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{60°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} - \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} + 1 & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 198. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]$

Usando que $\mathsf{cos}(120°) = -\frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(120°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{120°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{120°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{120°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{120°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{120°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{3}{5} \\ 3 & \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{7}{10} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 199. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\mathsf{cos}(135°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\mathsf{sen}(135°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{135°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{135°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{135°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{135°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{135°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}+1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 200. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{60^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{60^\circ}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{60^\circ}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{60^\circ})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{60^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} + \frac{3}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} - \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 201. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* 60° *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\text{sen}(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{45°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{45°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{45°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{45}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(g_{45°}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{45°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 202. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]$

Usando que $\mathsf{cos}(120°) = -\frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(120°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{120°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{120°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{120°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(g_{120°}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{120°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} + \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} \\ \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} - \frac{9}{10} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{7}{10} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 203. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]$

Usando que $\mathsf{cos}(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\mathsf{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{30°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{30°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{30°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{30°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{30°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{4}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{4}{5} & \frac{1}{10}\sqrt{3} + \frac{4}{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2 & \frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} - \frac{4}{5}\sqrt{3} + \frac{8}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 204. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(135°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\mathsf{sen}(135°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{135°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{135°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{135°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{135°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{135°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 205. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{30°}) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{30°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{30°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{30°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{30°})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}+1 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 206. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\mathsf{cos}(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\mathsf{sen}(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{45^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{45^\circ}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{45^\circ}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{45}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{45^\circ})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{45^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 207. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* 60° *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\mathsf{cos}(135°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\mathsf{sen}(135°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{135°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{135°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{135°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\mathsf{id}) M_{RR}(g_{135°}) M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{135°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{5}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \\ -\sqrt{2} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{5}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 208. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\mathsf{cos}(120°) = -\frac{1}{2}$ y $\mathsf{sen}(120°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{120°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{120°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{120°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{120°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{120°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 209. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$*. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B*.*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\mathsf{cos}(135°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\mathsf{sen}(135°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{135°}) = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{135°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{135°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{135°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{135°})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 210. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}(120°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{120°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{120°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{120°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{120°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{120°})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{3}{4} \\ -3 & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 211. *Calcula la matriz de las transformación afín que corresponden al giro de ángulo* $60°$ *alrededor de la recta que para por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. *Consideraremos sentido positivo del giro el que va de* A *a* B.

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3. Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]$

Usando que $\cos(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{30°}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "g_{30°}"'] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "g_{30°}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \end{tikzcd}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\mathsf{id})M_{RR}(g_{30°})M_{CR}(\mathsf{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_{RR}(g_{30°})} \underbrace{\left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array}\right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{4}{5} & \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{10}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{5} - \frac{1}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{10}\sqrt{3} + \frac{4}{5} \end{array}\right]$$

◊