Fundamentos Lógicos de la Informática

Razonamientos (lógicos) y Deducciones (sintácticas)

Grupo docente FLI

Dpto. Ingeniería de al Información y las Comunicaciones
Facultad de Informática
Universidad de Murcia

Repaso

En este punto ya conoces todo esto de los razonamientos:

- Consecuencia lógica.
- Razonamiento válido.
- El significado de las expresiones $\alpha \models \beta$ y $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \models \beta$
- **Teorema de la deducción semántica.**
  Relación entre $\models$, tautologías y contradicciones.
- Propiedades fundamentales de $\models$
  Reflexiva, monotonía y transitiva.
- Algunos razonamientos válidos: Silogismos categóricos, silogismos hipotéticos, silogismos hipotéticos mixtos, silogismos disyuntivos, dilemas, consecuencias por equivalencias, etc

Estos son razonamientos válidos ¿por qué?

$$\begin{array}{l} \text{Todos los cerdos vuelan} \\ \text{Todo lo que vuelan pueden bucear} \\ \hline \therefore \text{Todos los cerdos bucean} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Todos los humanos vuelan} \\ \text{Todo lo que vuela tienen dos patas} \\ \hline \therefore \text{Todos los humanos tienen dos patas} \end{array}$$

Desarrollo

Profundizamos en ...

Razonamientos Deductivos Válidos

Razonamiento deductivo

- Es un esquema de razonamiento que permite desarrollar una teoría.
- Parte de formular unas hipótesis básicas para obtener unas consecuencias.
- Lo más normal, pero no siempre, parte de premisas que hablan de aspectos generales para concluir aspectos particulares.
- En todo razonamiento deductivo válido **las premisas son condición suficiente para la verdad de la conclusión**.
  - **La relación entre premisas y conclusión es de implicación** (es un condicional material tautológico)
  - De aquí la importancia del teorema de la deducción (obtiene implicaciones).
- Forman parte del razonamiento deductivo todas las propiedades mencionadas sobre $\models$.

Estrategias de Razonamiento Deductivo ¿$\alpha \models \beta$?

- Se usan para casos particulares de demostraciones
  - Demostración vacía. Comprobar si $\forall v_I, v(\alpha) = F$ (sin usar β).
  - Demostración trivial. Comprobar si $\forall v_I, v(\beta) = V$ (sin usar α).
- Demostración directa.
  - Comprobar que β es una consecuencia lógica de α, utilizando definiciones o teoremas probados con anterioridad (p.e. MP, MT, ...).
- Demostración por contrarreciproco (o por contraposición).

$$\alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha$$

- Refutación.
  - Demostración por contradicción: $\alpha \to \beta \equiv \alpha \wedge \neg\beta \to \gamma \wedge \neg\gamma$
  - Búsqueda de contraejemplos.
    Encontrar un elemento a t.q. $v(\alpha[a] \to \beta[a]) = F$.
- Demostración indirecta. Variante de las anteriores.
  - Si se sabe que $\alpha \models \gamma$, dirigir los esfuerzos para comprobar $\gamma \models \beta$ (usando cualquiera técnica).

Profundizamos en ...

Concepto general de Inducción - I

- La inducción es una forma de razonamiento en la que, a partir de casos particulares, se obtienen reglas generales.
- En general las reglas obtenidas no tienen porqué ser válidas en el sentido de siempre ciertas. Eso no impide que sean reglas útiles.
- La inducción es muy utilizada en ciencias experimentales. El proceso sería:
    1. Se observan y registran hechos
    2. Se analizan para establecer conceptos a partir de sus propiedades
    3. Se formulan leyes universales sobre los hechos (en forma de hipótesis, teorías o conjeturas)
    4. Se diseñan experimentos para generar nuevos hechos y comprobar que cumplen las leyes propuestas.
    5. Si el grado de acierto es elevado (normalmente el 95 %) se acepta la regla como comprobada científicamente.

Concepto general de Inducción - II

- Así pues pueden existir varias teorías sobre un mismo problema y se acepta como mejor aquella que más se ajusta a lo observado como "verdad temporal" a la espera de mejores teorías.
- Es por ello que el saber científico experimental, basado en inducción, se considera como el conjunto de verdades temporales que más se ajusta a lo que se ha podido observar y por lo que, de vez en cuando, a la luz de nuevos hechos, se descartan teorías y reglas que fueron tenidas como "verdades" durante mucho tiempo.
- Principio de Inducción Matemática:
  - Mecanismo inductivo que establece cuándo son ciertas una secuencia infinita de proposiciones P_i, $i = 1, 2, \ldots, \infty$.

Principios de Inducción Matemática

$P(n)$:"para el el natural n se cumple la propiedad P".

- Principio de inducción débil. $U = \mathbb{N}$. Lo usual es $n_0 = 0$.

$$\overbrace{\{P(n_0)\}}^{\text{Base Inductiva}} \cup \bigcup_{k > n_0} \{ \overbrace{P(k)}^{\text{Hipótesis Inductiva}} \rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{\text{Paso Inductivo}} \} \models \overbrace{\forall n \geq n_0 \;\; P(n)}^{\text{Conclusión}}$$

Ejemplo: La suma de los primeros n naturales es: $n(n+1)/2$.

- Principio de inducción fuerte. Lo usual es $n_0 = 0$.

$$\{P(n_0)\} \cup \bigcup_{k > n_0} \{ \overbrace{P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge P(n_0+k)}^{\text{Realmente: Cualquier subconjunto de estos } k} \rightarrow P(n_0+k+1)\} \models \forall n \geq n_0 \;\; P(n)$$

Ejemplo: Todo número mayor que 1 se puede expresar como producto de números primos.

Principio de Inducción Estructural

Demostración por Recusión

$P(x)$:"el objeto x (cualquiera) cumple la propiedad P".

$$\bigcup_{y_0}\{P(y_0)\} \bigcup \{P(y_1) \wedge \ldots \wedge P(y_k) \rightarrow P(y)\} \models \forall x P(x)$$

- $\{y_0\}$. Objetos básicos sobre los que se verifica P.
- Dado y, el conjunto de objetos $\{P(y_1), \ldots, P(y_k)\}$ son todos los objetos que se han utilizado para definir/construir y (deben verificar cierta relación $D(x, y)$).

Ejemplo: Hay $2^h - 1$ nodos en un árbol binario perfecto de h niveles.

Profundizamos en ...

Teorías, teoremas y axiomas

- $\mathcal{T}$ es una **teoría** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$($\forall\alpha$, si $\mathcal{T} \models \alpha$ entonces $\alpha \in \mathcal{T}$).
  - α es un **teorema** si α es una expresión cierta por consecuencia lógica.
- $\mathcal{T}$ es **teoría axiomatizable** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ($\exists\mathcal{F}$ t.q. $\mathcal{T} = \{\alpha|\mathcal{F} \models \alpha\}$) se llama teoría del conjunto de fórmulas $\mathcal{F}$.
  - α es un **axioma**, si $\alpha \in \mathcal{F}$
- Una **teoría** es **contradictoria o inconsistente** cuando (son equivalentes):
  - $\mathcal{T} \models \alpha$ y $\mathcal{T} \models \neg\alpha$.
  - $\exists v$ t.q. $v(\alpha) = v(\neg\alpha) = V$ para alguna α

¡Recuerda! Usamos el Principio de No Contradicción.

$$\nexists v \text{ t.q. } v(\alpha) = v(\neg\alpha) = V \text{ para toda } \alpha$$

Desarrollo

¿Cómo optimizar los razonamientos?

Corolario (del Teorema de la Deducción)

$$\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n\} \models \beta \textit{ sii } \models (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$$

Para pensar:

$\mathcal{F}$ y β vienen dados, pero

- ¿Podría obtener los β a partir de $\mathcal{F}$?
- ¿Quizás modificaciones sintácticas?
- ¿Un modificación sintáctica la hace semánticamente cierta? ¿cuándo y cómo?

Profundizamos en ...

Sistema Deductivo y conceptos asociados - I

- Un **sistema deductivo** (SD) está formado por
  1. un conjunto de axiomas (fórmulas de partidas que por principio son aceptadas).
  2. un conjunto de reglas de inferencia sintácticas (esquemas para generar nuevas fórmulas).
- Una **demostración** (prueba formal) es una secuencia de conjuntos de fórmulas (puede ser sólo una). Cada fórmula
  - o es un axioma
  - o puede obtenerse del conjunto anterior aplicando una regla de inferencia.

Sistema Deductivo y conceptos asociados - II

- Un **teorema** (por deducción), α, es el último conjunto de la secuencia. Se indica por $\vdash \alpha$, en cuyo caso se dice que
  - α es **demostrable** (válida) y
  - la secuencia es **una demostración de** α.

Usando una definición recursiva:

Definición (Teorema)

*Un **teorema** o es un axioma o es el resultado de una regla de inferencia sobre otros teoremas.*

Sistema Deductivo y conceptos asociados - III

- Dado $\mathcal{F} = \{\psi_i |\ i \in I\}$ y α,
  $\mathcal{F} \vdash \alpha$ indica que se utilizan las fórmulas de $\mathcal{F}$ para obtener el teorema α.

  En este caso se dice que

  - $\mathcal{F} \vdash \alpha$ recibe el nombre de **deducción** o **razonamiento**.
  - La fórmula α se llama **conclusión** de la deducción (o **derivación**.)
  - Las ψ_i se llaman **premisas** en la demostración de α.

Teorías y decidibilidad

- $(\mathcal{T}, \vdash)$ es una **teoría** $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}(\forall\alpha$, si $\mathcal{T} \vdash \alpha$ entonces $\alpha \in \mathcal{T})$.
- $(\mathcal{T}, \vdash)$ es **teoría axiomatizable** $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists\mathcal{F}$ t.q. $\mathcal{T} = \{\alpha | \mathcal{F} \vdash \alpha\})$
- $\mathcal{F}$ **inconsistente** cuando es posible derivar una oración y su negación. $\exists\alpha\ (\mathcal{F} \vdash \alpha$ y $\mathcal{F} \vdash \neg\alpha)$
- $\mathcal{F}$ es **consistente** cuando no es inconsistente.
- Tipo de teorías:

	Procedimiento para determinar la	
Teoría	inconsistencia	consistencia
decidible	Sí	Sí
semidecidible	Sí	a veces
indecidible	No	No

Problemas de Hilbert

Todo sistema fundamental matemático debería cumplir:

1. Consistencia. No puedes obtener nunca una contradicción en tu propio sistema.
   Siguiendo las reglas del sistema no se debe llegar a α y $\neg\alpha$.
2. Completitud. Si cualquier declaración es verdadera, tiene que haber alguna forma de probarlo utilizando las reglas del sistema.
3. Decidibilidad. Sobre una afirmación matemática se puede determinar si esa afirmación es o no demostrable mediante un método/procedimiento/algoritmo.

- Kurt Gödel demostró con "esta oración no se puede demostrar" que: (1) ningún sistema matemático puede ser a la vez coherente y completo; (2) La consistencia no puede demostrarse con los propios axiomas del sistema.
- Alan Turing demostró que no se podía decidir (salvo en sistemas muy restrictivos)

Siempre habrá verdades que nunca podremos demostrar.

Profundizamos en ...

Teorema de la Deducción en la práctica

Para demostrar el teorema $\vdash \alpha \to \beta$ (en matemáticas), se utiliza el siguiente argumento informal:

1. Se supone α, y se añade α a las premisas.
2. Se demuestra β a partir de considerar cierto α.
3. Se dice que es válido: $\alpha \to \beta$.

Ojo

Pero nunca se demuestra que sea derivable $\alpha \to \beta$.

Teorema de la Deducción, en lo formal (es $\Rightarrow$ en matemáticas)

Un Sistema Deductivo cumple el Teorema de la Deducción si se verifica:

Teorema (Teorema de la Deducción)

Dadas las f.b.f. α y β y el conjunto de fórmulas $\mathcal{F}$ (que puede ser vacío), se cumple $\mathcal{F} \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Longrightarrow \mathcal{F} \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$

Metateorema: $\mathcal{F} \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Longleftrightarrow \mathcal{F} \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$

¿Cómo se aplica?

- Para deducir $\alpha \rightarrow \beta$, supongo que α es cierto y si demuestro β, entonces la implicación es cierta.
- Son equivalentes
  - $\mathcal{F} \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$
  - $\mathcal{F} \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \vdash (\alpha_n \rightarrow \beta)$
  - $\ldots$
  - $\mathcal{F} \vdash (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \cdots (\alpha_n \rightarrow \beta)) \cdots))$

Observaciones

- Esta forma de demostración matemática se uso durante siglos; pero hasta 1930 no se demostró que era lógicamente correcta.
- El uso de este metateorema conduce a demostraciones más cortas que serían casi imposibles sin él.
- **No todos los sistemas deductivos cumplen el teorema de la deducción.**
  - Si se cumple en sistemas deductivos tipo Hilbert en lógicas de primer orden (Modus Ponen). P.e. Deducción Natural sí cumple el teorema de deducción.
  - El sistema deductivo basado en la regla de resolución no cumple el teorema de la deducción.

¿Recuerdas del Teorema de la Deducción Semántica?

$$\mathcal{F} \cup \{\alpha\} \models \beta \Longleftrightarrow \mathcal{F} \models (\alpha \to \beta)$$

Este sí se cumple siempre: ¡Demuéstrese!

Desarrollo

Consecuencias, $\models$

Un teorema (por consecuencia lógica):

- $\models \alpha$, α es válida.
- $\mathcal{F} = \{\psi_i | \; i \in I\} \models \alpha$
  - Si $v(\wedge\psi_i) = V$, entonces $v(\alpha) = V$
  - Comprobamos si $\wedge\alpha_i \to \alpha$ es válida.

Ejemplo. Ley de contraposición como consecuencia lógica

- $(P \to Q) \models (\neg Q \to \neg P)$
- $\models (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ (es válida)

Deducciones, $\vdash$

Un teorema (por deducción):

- $\vdash \alpha$, α es válida (demostrable) ☹
  - Existe una secuencia $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n = \alpha$, donde ϕ_i o es axioma o $\vdash \phi_i$.
- $\mathcal{F} \vdash \alpha$.
  - La secuencia cumple lo anterior o $\phi_i \in \mathcal{F}$.

Ejemplo. Ley de contraposición como consecuencia deducible

- Como deducción o razonamiento: $(P \to Q) \vdash (\neg Q \to \neg P)$
- Como teorema: $\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ (T. de la deducción)

Solidez y Completitud

- **Solidez** o **corrección**.
  - $\mathcal{F} \vdash \alpha$ implica $\mathcal{F} \models \alpha$.
  - $\vdash \alpha$ implica $\models \alpha$.

  Es una propiedad esencial en cualquier sistema de deducción computacional útil.
- **Completitud**.
  - $\mathcal{F} \models \alpha$ implica $\mathcal{F} \vdash \alpha$. (Completitud semántica)
  - $\models \alpha$ implica $\vdash \alpha$. (Completitud semántica fuerte)

  Es una propiedad teórica esencial, computacionalmente deseable. No todos lo cumplen: Resolución no es completo.
- **Completitud sintáctica**.
  $\mathcal{F}$ es sintácticamente completo si, para toda fórmula α del lenguaje del sistema, α es un teorema de $\mathcal{F}$ o $\neg\alpha$ es un teorema de $\mathcal{F}$.

  Para cualquier α, $\mathcal{F} \vdash \alpha$ o $\mathcal{F} \vdash \neg\alpha$