FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA INFORMÁTICA

Equivalencia, Consecuencia Lógica y Técnicas SAT en Lógica de Predicados

PRIMER CURSO DEL GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

PRIMER CUATRIMESTRE

2020-21

Facultad de Informática

Índice del documento

- Sustitución de variables de término
- La Equivalencia Lógica en L1
- La Consecuencia Lógica en L1
- La Satisfacibilidad en Lógica de Predicados (SAT en L1)

Sustitución de variables de término

- Hemos visto que, cuando tenemos una fórmula con variables libres, se procede, en general, a renombrar las variables en sus ocurrencias como libres por otras variables, si bien deben seguir éstas quedando definidas para el mismo Dominio de la variable renombrada. Por ejemplo, dada la fórmula **δ** = **$P(x) \land \forall x\ (R(x) \land P(y)) \rightarrow \exists y\ Q(x, y)$**, renombrábamos las variables en ocurrencia libre, quedándonos la fórmula sobre otras variables tal como sigue: **$P(z) \land \forall x\ (R(x) \land P(w)) \rightarrow \exists y\ Q(z, y)$. Luego, atribuíamos una constante de término a la variable libre.** Así, en el caso citado, la fórmula a evaluar quedaría como: **$P(1) \land \forall x\ (R(x) \land P(2)) \rightarrow \exists y\ Q(1, y)$**, donde **{ 1, 2 }** son los términos del dominio.
- Lo que hemos hecho en segundo lugar es, realmente, una PARTICULARIZACIÓN BÁSICA POR SUSTITUCIÓN DE VARIABLE.
- Debemos tener claro que existe una diferencia radical entre PARTICULARIZAR una variable de término por una constante de término y hacer una ASIGNACIÓN DE VARIABLES con los objetos o individuos del Dominio de la Interpretación. Esencialmente, la ASIGNACIÓN se produce como correspondencia de un elemento formal (variable de término) con los objetos del Mundo real, mientras que en la PARTICULARIZACIÓN se sustituye un elemento formal (variable de término) por otro del Mundo formal (constante de término).

DEFINICIONES Y BUENAS PRÁCTICAS EN EL ÁMBITO DE LA SUSTITUCIÓN DE VARIABLES

- Una sustitución es una expresión **s** = $\{ t_1/v_1; t_2/v_2; \ldots ; t_n/v_n \}$ que indica que:
  - Toda ocurrencia de la variable **v_i** se debe sustituir por el término **t_i**, en el ámbito de su cuantificación.
  - Todas las sustituciones se hacen simultáneamente, no paso a paso.
- Una **Particularización por Sustitución** de una expresión consiste en sustituir sus variables por términos (variables, constantes o funciones).
- Una **Particularización básica** es una particularización por sustitución donde las variables se sustituyen por constantes: **a/x**; **b/y; f(c)/z**
- Una **Particularización alfabética** es una particularización por sustitución donde las variables se sustituyen por otras variables: **z/x**; **w/y**
- Dada una fórmula **δ** y una sustitución **s**, la notación **δs** indica la particularización por sustitución de la fórmula **δ** según la sustitución **s**.
- Se puede realizar una sustitución como producto de varias sustituciones. Ver la **página 35 del documento 06-Predicados-B** de RECURSOS.
- Las Particularizaciones por Sustitución las utilizaremos al aplicar las técnicas SAT y en el desarrollo de los métodos deductivos.
- Debemos observar algunas BUENAS PRÁCTICAS en la sustitución de variables:
  - NO se puede sustituir una constante de término por una variable ni por otra constante de término.
  - NO se puede sustituir una **variable x** por un término en el que la variable aparezca como argumento de una **función, por ejemplo f(x)**.

Facultad de Informática

La Equivalencia Lógica en L1 (I)

- El concepto de Equivalencia Lógica ya lo vimos en Lógica de Proposiciones. Y como tal concepto de relación semántica entre dos expresiones o fórmulas predicativas, se mantiene exactamente igual. Todas las Equivalencias Lógicas vistas entonces siguen vigentes, siempre y cuando se respete el esquema o patrón de dichas fórmulas o expresiones.
- En definitiva, diremos que dos expresiones o fórmulas predicativas, $\boldsymbol{\delta(x_i)}$ y $\boldsymbol{\xi\,(x_i)}$, son lógicamente equivalentes si y sólo si: $\boldsymbol{\delta(x_i) \leftrightarrow \xi\,(x_i)}$**, es una TAUTOLOGÍA**. Hemos definido en página anterior cuando una expresión o fórmula predicativa es una Tautología: cuando es SATISFACIBLE independientemente de la Interpretación considerada, es decir, no existe una Estructura en la que quede FALSEADA.
- La relevancia de la relación semántica de la Equivalencia Lógica entre expresiones derivaba de la posibilidad de reescribir una fórmula por otra que le sea equivalente lógicamente. De esta manera, si utilizando equivalencias lógicas conocidas se puede reescribir una fórmula en otra, estas dos fórmulas serán, asimismo, equivalentes lógicamente.

EQUIVALENCIAS LÓGICAS BÁSICAS EN LÓGICA DE PREDICADOS (L1)

- Serán Equivalencias Lógicas en L1 todas aquellas que lo son en L0. Por ejemplo, $\boldsymbol{\alpha(x) \rightarrow \beta(x) \equiv \neg\alpha(x) \vee \beta(x)}$
- Sustitución de la variable cuantificada: $\boldsymbol{\forall x\, Q(x) \equiv \forall z\, Q(z)}$ y, asimismo, $\boldsymbol{\exists x\, Q(x) \equiv \exists z\, Q(z)}$
- La negación de una fórmula cuyo predicado se establezca sobre una variable cuantificada universalmente es equivalente a una fórmula cuyo predicado esté negado y su variable esté cuantificada existencialmente. Así: $\boldsymbol{\neg\forall x\, Q(x) \equiv \exists x\, \neg Q(x)}$
- La negación de una fórmula cuyo predicado se establezca sobre una variable cuantificada existencialmente es equivalente a una fórmula cuyo predicado esté negado y su variable esté cuantificada universalmente. Así: $\boldsymbol{\neg\exists x\, Q(x) \equiv \forall x\, \neg Q(x)}$
- En consonancia con las dos anteriores, también serán equivalencias lógicas las dos siguientes: $\boldsymbol{\neg\exists x\, \neg Q(x) \equiv \forall x\, Q(x)}$ y $\boldsymbol{\neg\forall x\, \neg Q(x) \equiv \exists x\, Q(x)}$
- La alternancia de cuantificadores del mismo significado: $\boldsymbol{\forall x \forall y\, R(x, y) \equiv \forall y \forall x\, R(x, y)}$ y, asimismo, $\boldsymbol{\exists x \exists y\, R(x, y) \equiv \exists y \exists x\, R(x, y)}$
- El cuantificador universal y la conjunción: $\boldsymbol{\forall x\, Q(x) \wedge \forall y\, P(y) \equiv \forall x\, (Q(x) \wedge P(x))}$ **¡¡¡OJO!!!** $\boldsymbol{\forall x\, Q(x) \vee \forall y\, P(y) \not\equiv \forall x\, (Q(x) \vee P(x))}$
- El cuantificador existencial y la disyunción: $\boldsymbol{\exists x\, Q(x) \vee \exists y\, P(y) \equiv \exists x\, (Q(x) \vee P(x))}$ **¡¡¡OJO!!!** $\boldsymbol{\exists x\, Q(x) \wedge \exists y\, P(y) \not\equiv \exists x\, (Q(x) \wedge P(x))}$
- El cuantificador universal y la implicación: $\boldsymbol{\forall x\, (A \rightarrow P(x)) \equiv A \rightarrow \forall x\, P(x)}$ en la expresión **A** no puede aparecer la variable "x" libre
- El cuantificador existencial y la implicación: $\boldsymbol{\exists x\, (A \rightarrow P(x)) \equiv A \rightarrow \exists x\, P(x)}$ en la expresión **A** no puede aparecer la variable "x" libre

La Equivalencia Lógica en L1 (y II)

Comprobar si es correcta la equivalencia siguiente: $\neg\forall x\, (P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x\, (P(x) \land \neg Q(x))$

- Aplicando la equivalencia de la negación del universal con el existencial de la negación: $\neg\forall x\, (P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x\, \neg(P(x) \to Q(x))$
- Aplicando la interdefinición en la matriz de la fórmula: $\exists x\, \neg(P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x\, \neg(\neg P(x) \lor Q(x))$
- Aplicando una de las equivalencias de D'Morgan: $\exists x\, \neg(\neg P(x) \lor Q(x)) \equiv \exists x\, (P(x) \land \neg Q(x))$ **con lo que queda comprobada la equivalencia pedida.**
- **Y con ella, sabemos que la negación de la F.N. Universal Afirmativa es equivalente a la F.N. Particular Negativa**

Comprobar si es correcta la equivalencia siguiente: $\forall x\, \neg(P(x) \to Q(x)) \equiv \neg(\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x))$

- Partimos de la fórmula de la izquierda, y como sabemos que: $\neg(P(x) \to Q(x)) \equiv (P(x) \land \neg Q(x))$
- La fórmula inicial es equivalente a: $\forall x\, \neg(P(x) \to Q(x)) \equiv \forall x\, (P(x) \land \neg Q(x))$
- Por la equivalencia citada de el cuantificador universal y la conectiva conjunción: $\forall x\, (P(x) \land \neg Q(x)) \equiv \forall x\, P(x) \land \forall x\, \neg Q(x)$
- Aplicando la equivalencia lógica de D'Morgan: $(A \land B) \equiv \neg(\neg A \lor \neg B)$, en nuestro caso: $\forall x\, P(x) \land \forall x\, \neg Q(x) \equiv \neg(\neg\forall x\, P(x) \lor \neg\forall x\, \neg Q(x))$
- Aplicando la equivalencia de interdefinición: $\neg(\neg\forall x\, P(x) \lor \neg\forall x\, \neg Q(x)) \equiv \neg(\forall x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg Q(x))$
- Aplicando en el consecuente de la implicación, la equivalencia de la negación del universal con el existencial de la negación y la de la idempotencia ($\neg\neg A \equiv A$): $\neg(\forall x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg Q(x)) \equiv \neg(\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x))$ **con lo que hemos comprobado la corrección de la equivalencia.**

Comprobar si es correcta la equivalencia siguiente: $\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, (P(x) \to Q(x))$

- Aplicando la interdefinición a la implicación central de la fórmula: $\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x) \equiv \neg\forall x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$
- Aplicando la equivalencia de la negación del universal con el existencial de la negación: $\neg\forall x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, \neg P(x) \lor \exists x\, Q(x)$
- Aplicando la equivalencia citada del cuantificador existencial y la disyunción: $\exists x\, \neg P(x) \lor \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, (\neg P(x) \lor Q(x))$
- Aplicando la interdefinición en la matriz de la fórmula: $\exists x\, (\neg P(x) \lor Q(x)) \equiv \exists x\, (P(x) \to Q(x))$ **con lo que queda comprobada la equivalencia.**

La Consecuencia Lógica en L1 (I)

- El concepto de Consecuencia Lógica ya lo vimos en Lógica de Proposiciones. Y como tal, el concepto de relación semántica entre dos expresiones o fórmulas predicativas se mantiene exactamente igual. Todas las Consecuencias Lógicas vistas entonces siguen vigentes, siempre y cuando se respete el esquema o patrón de dichas fórmulas o expresiones. Asimismo, se siguen manteniendo como válidas las Consecuencias Lógicas que representan los diecinueve silogismos categóricos definidos en LC.
- En definitiva, diremos que dadas dos expresiones o fórmulas predicativas, **$\delta(xi)$** y **$\xi\ (xi)$**, **tendrán una relación de Consecuencia Lógica entre ellas**, **$\delta(xi) \vDash \xi\ (xi)$**, si y sólo si **$\delta(xi) \rightarrow \xi\ (xi)$ es una TAUTOLOGÍA**. Es decir, una expresión predicativa para la que no existe una Interpretación (Estructura y Asociación de predicados y funciones a Relaciones dadas de la Estructura) en la que quede FALSEADA. **¡¡¡ESTO ES IMPORTANTE COMPRENDERLO!!!**
- Como ya ocurría en L0, dadas dos expresiones, se cumple que: **$\delta(xi) \vDash \xi\ (xi)$** y **$\xi\ (xi) \vDash \delta(xi)$**, si y sólo si **$\delta(xi)$** $\equiv$ **$\xi\ (xi)$**.
- Por añadidura, si una expresión o fórmula es consecuencia lógica de un conjunto de premisas, por ejemplo: **$\{\alpha(xi), \beta(xi), \gamma(xi)\} \vDash \delta(xi)$ por el Teorema de la Deducción Semántica**: **$\{\alpha(xi), \beta(xi)\} \vDash \gamma(xi) \rightarrow \delta(xi)$**, y también **$\{\alpha(xi)\} \vDash \beta(xi) \rightarrow (\gamma(xi) \rightarrow \delta(xi))$**, y finalmente **$\vDash \alpha(xi) \rightarrow (\beta(xi) \rightarrow (\gamma(xi) \rightarrow \delta(xi)))$**.
- **Como corolario, si se quiere comprobar que $\{\alpha(xi), \beta(xi), \gamma(xi)\} \vDash \delta(xi)$ podremos hacerlo, como hacíamos en L0, por planteamiento directo y comprobar que la fórmula $\alpha(xi) \wedge \beta(xi) \wedge \gamma(xi) \rightarrow \delta(xi)$ es una Tautología; o bien, por refutación y comprobar que $\alpha(xi) \wedge \beta(xi) \wedge \gamma(xi) \wedge \neg\delta(xi)$ es una Contradicción o expresión Insatisfacible.**

La Consecuencia Lógica en L1 (II)

CONSECUENCIAS LÓGICAS BÁSICAS EN LÓGICA DE PREDICADOS (L1)

- Se mantienen todas aquellas Consecuencias Lógicas y Silogismos Básicos válidos en L0, además de los 19 Silogismos Categóricos que se definen en la Lógica Categórica.
- Las Consecuencias Lógicas en L1 provenientes de las Equivalencias Lógicas comprobadas en L1. Por ejemplo, $\forall x\ (A \rightarrow P(x)) \vDash A \rightarrow \forall x\ P(x)$; y también $A \rightarrow \forall x\ P(x) \vDash \forall x\ (A \rightarrow P(x))$ en las que en la expresión **A** no puede aparecer la variable "x" libre.
- $\forall x\ \alpha(x) \vDash \alpha(c)$ siendo **"c"** un término constante del dominio recorrido por la variable **"x"**. Así, siendo VERDAD el predicado para todos los valores asignados a la variable **"x"**, lo será necesariamente para uno de los valores constantes en el que podamos particularizar la misma.
- $\alpha(c) \vDash \exists x\ \alpha(x)$ siendo **"c"** un término constante del dominio recorrido por la variable **"x"**. Así, siendo VERDAD el predicado para uno de los términos constantes **"c"** en los que podemos particularizar la variable, lo será necesariamente el predicado para al menos uno de los valores asignados a dicha variable **"x"**.
- La llamada Consecuencia Lógica del descenso cuantificacional: $\forall x\ \alpha(x) \vDash \exists x\ \alpha(x)$. Puede entenderse como la aplicación de la propiedad transitiva de la consecuencia lógica, partiendo de las dos anteriormente enunciadas.
- Consecuencias Lógicas obtenidas por Particularización. Por ejemplo: $\{\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)), P(c)\} \vDash Q(c)$ **es una particularización del Modus Ponens.** Si suponemos que $v(\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))) = V$, también será $v(\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))\{c/x\}) = V$, es decir, $v(P(c) \rightarrow Q(c)) = V$. Como suponemos, al ser premisa, que $v(P(c)) = V$, por el Modus Ponens "de siempre": $v(Q(c)) = V$. Debemos remarcar que no podemos concluir válidamente el predicado Q(x) particularizado con otro término constante que no sea "c" (el que aparece particularizando en la segunda premisa). **¡¡¡PIENSEN POR QUÉ!!!**
- **¡¡¡OJO!!!** $\{\exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x)), P(c)\} \nvDash Q(c)$ dado que no podemos garantizar que sea "c" la constante que haga cierta la primera premisa.
- La llamada regla de intercambio: $A(c) \leftrightarrow B(c) \vDash \forall x\ A(x) \leftrightarrow \forall x\ B(x)$ y, también $A(c) \leftrightarrow B(c) \vDash \exists x\ A(x) \leftrightarrow \exists x\ B(x)$ esta regla es esencial dado que permite sustituir partes de fórmulas por otras relacionadas con ellas mediante Equivalencias Lógicas manteniendo su validez. Por ejemplo, podemos decir que $\exists x\ (P(x) \rightarrow \forall y\ \neg(Q(y) \wedge \neg R(y))) \equiv \exists x\ (\neg P(x) \vee \forall y\ (Q(y) \rightarrow R(y)))$

La Consecuencia Lógica en L1 (y III)

OTRAS CONSECUENCIAS LÓGICAS IMPORTANTES

- La generalización universal condicional: $\mathbf{A \rightarrow Q(x) \vDash A \rightarrow \forall x\, Q(x)}$ en la expresión A no aparece la variable "x" como libre.
- La generalización existencial condicional: $\mathbf{Q(x) \rightarrow A \vDash \exists x\, Q(x) \rightarrow A}$ en la expresión A no aparece la variable "x" como libre.
- El existencial y la conjunción: $\mathbf{\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \vDash \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)}$. **Ya vimos que no existía equivalencia lógica entre estas expresiones**.
- El universal y la disyunción: $\mathbf{\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \vDash \forall x\, (P(x) \vee Q(x))}$. **Ya vimos que no existía equivalencia lógica entre estas expresiones**.
- El universal y la implicación: $\mathbf{\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vDash \forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)}$
- El existencial y la implicación: $\mathbf{\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x) \vDash \exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))}$
- El universal y el existencial con la conjunción: $\mathbf{\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \vDash \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))}$
- El universal y el existencial con la disyunción: $\mathbf{\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \vDash \exists x\, (P(x) \vee Q(x))}$ y, también: $\mathbf{\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \vDash \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)}$
- El universal y el existencial con la implicación: $\mathbf{\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vDash \exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)}$

Facultad de Informática

SAT en L1: Tableaux Semánticos (I)

LOS TABLEAUX SEMÁNTICOS COMO TÉCNICA SAT EN L1

- En las **páginas 5-10 del documento 07-SAT-L1-B que tienen en RECURSOS pueden leer cómo desarrollar esta técnica SAT en L1**. Básicamente, se sigue el mismo procedimiento y la misma conceptualización de la técnica aplicada en L0. La diferencia estriba en la necesidad de introducir dos nuevas "reglas" para la transformación de las fórmulas. De una parte, en las que aparece el cuantificador existencial (las llamadas **δ-fórmulas**) y, de otra, en las que aparece el cuantificador universal (las llamadas **ϒ-fórmulas**).
- Por lo demás, se dirá que un Tableau Semántico se ha completado cuando hayamos llegado a tener todos los nodos del mismo como nodos hoja, en los que ahora sólo podrán aparecer literales y ϒ-fórmulas. Un Tableau Semántico completado quedará cerrado cuando en todos sus nodos hoja aparecen, al menos, un literal y su negado o complementario. Es importante señalar que un literal y su negado, a los efectos de considerar el nodo hoja cerrado, deben ser instancias base, es decir, átomos predicativos sobre términos constantes, y en los que coincidan dichas constantes. Por ejemplo, P(c) y ¬P(c) son literales complementarios, también lo serán Q(f(a)) y ¬Q(f(a)), y también R(b, c) y ¬R(b, c). Pero no lo serán: P(x) y ¬P(x), tampoco lo serán Q(f(a) y ¬Q(f(b)), y tampoco R(b, c) y ¬R(a, c).
- Dada una fórmula y completado su Tableau Semántico, si éste queda CERRADO podemos decir que la fórmula es INSATISFACIBLE.
- A la hora de construir el Tableau Semántico de una determinada fórmula en L1, es preciso aplicar las sucesivas reglas con un orden de prioridad: siempre que sea posible las **α-fórmulas** y las **β-fórmulas** y, posteriormente, se aplican antes las **δ-fórmulas** (cuantificadores existenciales) que las **ϒ-fórmulas** (cuantificadores universales).

COMPROBACIÓN DE VALIDEZ DE UNA CONSECUENCIA LÓGICA ⊨

- Lo haremos aplicando el planteamiento de Refutación.
- A la fórmula que se obtiene de la conjunción de las premisas con la negación de la conclusión, se le obtiene su Tableau Semántico Completado, y en caso de ser CERRADO, dicha fórmula será INSATISFACIBLE y quedará comprobada la VALIDEZ de la Consecuencia Lógica.
- Si el Tableau Semántico Completado resultara NO CERRADO, "ni se sabe" y ni se puede afirmar ni negar que sea una Consecuencia Lógica.

Facultad de Informática

SAT en L1: Tableaux Semánticos (II)

Vamos a comprobar la validez de la Consecuencia Lógica **$P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x) \vDash \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$. Para lo cual, hagamos un planteamiento por Refutación y comprobemos que la expresión $\phi = (P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x)) \wedge \neg\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$ es una fórmula INSATISFACIBLE.**

La expresión **ϕ** es una conjunción que constituye una **α-fórmula**. Se construye un nodo nuevo desdoblando en serie las dos partes conjuntadas.

La expresión **$P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x)$** es una implicación que constituye una **β -fórmula**. Se abren dos ramas con nuevos nodos, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas.

Las expresiones **$\forall x\, Q(x)$** y **$\neg\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$** son dos **ϒ-fórmulas**, por lo que componemos un nuevo nodo manteniendo las cuantificadas universalmente y agregando expresiones particularizadas a una constante determinada. Como existe una constante en el nodo de partida, **la constante a**, entonces particularizamos la variable **x** por esa constante.

La expresión **$\neg(P(a) \rightarrow Q(a))$** es una **α-fórmula**, por lo que se construye un nuevo nodo desdoblando en serie las dos partes conjuntadas.

Los dos nodos hoja quedan cerrados al existir en ellos literales complementarios, resaltados en color rojo. Por tanto, el Tableau Semántico queda COMPLETADO y CERRADO, lo que la fórmula **ϕ es INSATISFACIBLE y la Consecuencia Lógica que queríamos comprobar es VÁLIDA**.

$P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x) \wedge \neg\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$

$P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x)$
$\neg\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$

Rama izquierda:

$\neg P(a)$
$\neg\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$

$\neg P(a)$
$\neg\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$
$\neg(P(a) \rightarrow Q(a))$

$\neg P(a)$
$\neg\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$
$P(a)$
$\neg Q(a)$

Rama derecha:

$\forall x\, Q(x)$
$\neg\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$

$\forall x\, Q(x)$
$\neg\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$
$Q(a)$
$\neg(P(a) \rightarrow Q(a))$

$\forall x\, Q(x)$
$\neg\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$
$Q(a)$
$P(a)$
$\neg Q(a)$

SAT en L1: Tableaux Semánticos (III)

Vamos a comprobar la validez de la Consecuencia Lógica $\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x)) \vDash P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x)$. **Para lo cual, hagamos un planteamiento por Refutación y comprobemos que la expresión $\phi = \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x)) \wedge \neg(P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x))$ es una fórmula INSATISFACIBLE.**

La expresión ϕ es una conjunción que constituye una **α-fórmula**. Se construye un nodo nuevo desdoblando en serie las dos partes conjuntadas.

$\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x)) \wedge \neg(P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x))$

La expresión **$\neg(P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x))$** es la negación de una implicación, lo que constituye entonces una **α-fórmula**. Por tanto, se construye un nodo nuevo desdoblando en serie las dos partes conjuntadas.

$\neg(P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x))$
$\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$

Las expresiones **$\neg\forall x\, Q(x)$** y **$\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$** son dos **δ-fórmulas**, por lo que componemos nuevos nodos por separado para sendas fórmulas, particularizando la variable **x** por constantes que no se encuentren en el nodo inicial. Por tanto, la **constante a** no se puede usar, y para la primera **δ-fórmula** utilizaremos la particularización a la **constante c**. Para la segunda **δ-fórmula**, dado que hemos utilizado la **constante c** para la anterior, debemos utilizar otra constante nueva, por ejemplo, **la constante d**.

$P(a)$
$\neg\forall x\, Q(x))$
$\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$

$P(a)$
$\neg Q(c)$
$\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$

La expresión **$P(a) \rightarrow Q(d)$** es una **β-fórmula**, por lo que se abren dos ramas con nuevos nodos, donde en cada se coloca una de las partes disyuntadas.

$P(a)$
$\neg Q(c)$
$P(a) \rightarrow Q(d)$

Rama izquierda:

$P(a)$
$\neg Q(c)$
$\neg P(a)$

Rama derecha:

$P(a)$
$\neg Q(c)$
$Q(d)$

Una vez completado el Tableau Semántico se puede ver que no queda CERRADO, con lo que la expresión **ϕ NO es INSATISFACIBLE y, por tanto, no podemos decir que la Consecuencia Lógica sea VÁLIDA**. Ni tan siquiera podemos decir que sea inválida.

Facultad de Informática

SAT en L1: Tableaux Semánticos (IV)

Vamos a comprobar la validez de la Consecuencia Lógica **$\exists y \forall x\ M(x, y) \vDash \forall x \exists y\ M(x, y)$. Para lo cual, hagamos un planteamiento por Refutación y comprobemos que la expresión $\phi = \exists y \forall x\ M(x, y) \land \neg \forall x \exists y\ M(x, y)$ es una fórmula INSATISFACIBLE.**

La expresión **ϕ** es una conjunción que constituye una **α-fórmula**. Se construye un nodo nuevo desdoblando en serie las dos partes conjuntadas.

$\exists y \forall x\ M(x, y) \land \neg \forall x \exists y\ M(x, y)$

$\exists y \forall x\ M(x, y)$
$\neg \forall x \exists y\ M(x, y)$

$\forall x\ M(x, b)$
$\neg \forall x \exists y\ M(x, y)$

$\forall x\ M(x, b)$
$\forall y\ \neg M(a, y)$

$\forall x\ M(x, b)$
$M(a, b)$
$\forall y\ \neg M(a, y)$

$\forall x\ M(x, b)$
$M(a, b)$
$\forall y\ \neg M(a, y)$
$\neg M(a, b)$

Las expresiones **$\exists y \forall x\ M(x, y)$** y **$\neg \forall x \exists y\ M(x, y)$** son dos **δ-fórmulas**, por lo que componemos nuevos nodos por separado para ambas. Particularizando, la variable **y** de la primera por constantes que no se encuentren en el nodo inicial, por ejemplo, por la **constante b**, mientras que en el caso de la segunda particularizamos la variable **x** por la **constante a**.

Nos encontramos ahora con dos **ϒ-fórmulas**. Una cuantificada para la **variable x** y la otra para la **variable y**. Ahora particularizamos dichas variables por constantes que se hayan utilizado antes: **la variable x por la constante a, y la variable y por la constante b**.

Una vez completado el Tableau Semántico, su único nodo hoja queda **CERRADO**, por lo que la fórmula **ϕ es INSATISFACIBLE y la Consecuencia Lógica que queríamos comprobar es VÁLIDA. Si el predicado M(x, y) fuera "x amigo de y", la consecuencia lógica planteada es "si uno es amigo de todos, todos tienen un amigo“.**

SAT en L1: Tableaux Semánticos (y V)

Vamos a comprobar la validez de la Consecuencia Lógica $\exists x \forall y\ P(x, y) \vDash \forall x \exists y\ P(x, y)$. **Para lo cual, hagamos un planteamiento por Refutación y comprobemos que la expresión $\phi = \exists x \forall y\ P(x, y) \wedge \neg \forall x \exists y\ P(x, y)$ es una fórmula INSATISFACIBLE.**

La expresión **ϕ** es una conjunción que constituye una **α-fórmula**. Se construye un nodo nuevo desdoblando en serie las dos partes conjuntadas.

$\exists x \forall y\ P(x, y) \wedge \neg \forall x \exists y\ P(x, y)$

$\exists x \forall y\ P(x, y)$
$\neg \forall x \exists y\ P(x, y)$

$\forall y\ P(a, y)$
$\neg \forall x \exists y\ P(x, y)$

$\forall y\ P(a, y)$
$\forall y\ \neg P(b, y)$

$\forall y\ P(a, y)$
$P(a, c)$
$\forall y\ \neg P(b, y)$
$\neg P(b, c)$

Las expresiones **$\exists x \forall y\ P(x, y)$** y **$\neg \forall x \exists y\ P(x, y)$** son dos **δ-fórmulas**, por lo que componemos nuevos nodos por separado para sendas fórmulas. Particularizamos la variable **x** de la primera por constantes que no se encuentren en el nodo inicial, por ejemplo por la **constante a**. En caso de la segunda, particularizamos la misma variable **x** por otra, ya que la constante a ha sido utilizada y se encuentra en el nodo. Por ejemplo, utilizaremos la **constante b**.

Nos encontramos ahora con dos **ϒ-fórmulas**, ambas estando cuantificadas para la **variable y**. Por lo tanto, particularizamos por constantes que no hemos usado antes para esta variable, pudiendo ser una constante diferente y nueva, como por ejemplo la **constante c**.

Una vez completado el Tableau Semántico, no queda CERRADO, con lo que la expresión **ϕ NO es INSATISFACIBLE, y por tanto, no podemos decir que la Consecuencia Lógica sea VÁLIDA.**
Si el predicado P(x, y) es "x es mayor que y", la consecuencia lógica planteada es "si existe un máximo, entonces existe un mínimo" lo cual no es siempre así.