Fundamentos Lógicos de la Informática

Sistema Deductivo basado en Deducción Natural

Grupo docente FLI

Dpto. Ingeniería de al Información y las Comunicaciones
Facultad de Informática
Universidad de Murcia

Desarrollo

Definición del Sistema DN

- **Axiomas:** No hay tautologías.
- **Reglas de Inferencia:**

  11-13 reglas básicas y multitud de reglas derivadas.

Notación Fitting

- Todas las expresiones están dentro de una caja (no habitual).
- Si en el desarrollo de una demostración se utiliza una suposición (hipótesis), se emplea una nueva caja ("dentro" de otra caja).
- La primera fila de la nueva caja la ocupa la suposición, ϕ.
- La última fila de la caja la ocupa una conclusión, ψ.
- La caja representa la (sub)deducción $\phi \vdash \psi$.

1	α	Premisa
$\vdots$	$\ldots$	
2	β	Regla R n o bien Regla R n,m.
3	ϕ	Hipótesis o Suposición o Asumción (Para Regla R')
$\vdots$	$\ldots$	Justificaciones correspondientes.
4	ψ	Justificación de obtención de ψ
5	$\beta[\phi, \psi]$	Regla R', 3-4 o bien Regla R', n, 3-4. (n<3)
$\vdots$	$\ldots$	

Desarrollo

Profundizamos en ...

Regla de la Iteración o Repetición (*IT*)

$$IT : \frac{\vdash \alpha}{\vdash \alpha}$$

SÍ es correcto:

1	P	
2	$\ldots$	
3	$\ldots$	
4	P	IT 1
5	$\ldots$	
6	P	IT 1

No es correcto:

1	$\ldots$	
2	P	Hipótesis
3	$\ldots$	
4	Q	Bajo P
5	P	IT 2 ✗
6	Q	IT 4 ✗

Conjunción

- Regla de Introducción de la Conjunción

$$I_{\wedge} : \frac{\vdash \alpha \qquad \vdash \beta}{\vdash \alpha \wedge \beta}$$

- Reglas de Eliminación de la Conjunción

$$E_{\wedge} : \frac{\vdash \alpha \wedge \beta}{\vdash \alpha}, \frac{\vdash \alpha \wedge \beta}{\vdash \beta}$$

Implicación

- **Teorema de la Deducción.** Regla de Introducción de la Implicación

$$I_{\rightarrow} : \frac{\vdash (\alpha \vdash \beta)}{\vdash \alpha \rightarrow \beta}$$

¡¡Regla con 1 caja!!

- **Modus Ponens.** Regla de Eliminación de la Implicación.

$$E_{\rightarrow} : \frac{\vdash \alpha \rightarrow \beta \qquad \vdash \alpha}{\vdash \beta}$$

Disyunción

- Reglas de Introducción de la Disyunción.

$$I_\vee : \frac{\vdash \alpha}{\vdash \alpha \vee \beta}, \frac{\vdash \alpha}{\vdash \beta \vee \alpha}$$

- **Prueba por casos.** Regla de Eliminación de la Disyunción.

$$E_\vee : \frac{\vdash \alpha \vee \beta \qquad \vdash (\alpha \vdash \gamma) \qquad \vdash (\beta \vdash \gamma)}{\vdash \gamma}$$

¡¡Regla con 2 cajas!!

Negación y Contradicción

- **Reducción al absurdo**. Regla de Inclusión de la Negación.

$$I_{\neg} : \frac{\vdash (\alpha \vdash \beta \wedge \neg\beta)}{\vdash \neg\alpha}$$

¡¡Regla con 1 caja!!

- **Reducción al absurdo**. Regla de Eliminación de la Negación.

$$E_{\neg} : \frac{\vdash (\neg\alpha \vdash \beta \wedge \neg\beta)}{\vdash \alpha}$$

¡¡Regla con 1 caja!!

- Regla de eliminación de la Doble Negación.

$$E_{\neg\neg} : \frac{\vdash \neg\neg\alpha}{\vdash \alpha}$$

- Regla de eliminación de la Contradicción. **No confundir.**

$$CONTRA : \frac{\vdash \alpha \qquad \vdash \neg\alpha}{\vdash \beta}$$

Doble Implicación

- Regla de eliminación de la Doble Implicación.

$$E_{\leftrightarrow} : \frac{\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)}{\vdash (\beta \rightarrow \alpha)}, \frac{\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)}{\vdash (\alpha \rightarrow \beta)}$$

- Regla de Inclusión de la Doble Implicación

$$I_{\leftrightarrow} : \frac{\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \quad \vdash (\beta \rightarrow \alpha)}{\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)}$$

Cuantificador Universal

- **Instanciación Universal.** Eliminación del Cuantificador Universal

$$E_\forall : \frac{\vdash \forall x\, \alpha(x)}{\vdash \alpha(c)}$$

Siendo c **una constante individuo cualquier**

- **Generalización Universal.** Introducción del Cuantificador Universal.

$$I_\forall : \frac{\vdash \alpha(c)}{\vdash \forall x\, \alpha(x)}$$

Con restricciones

Siendo c una constante que no aparece en premisas, ni en derivaciones, ni en hipótesis no cerradas, entonces hacer:

1. Cambiar todas las constantes c por una variable x no utilizada en α.
2. Añadir $\forall x$.

Quédate con esta idea ...

Si probamos algo sobre un individuo c sin hacer ninguna suposición que distinga c de cualquier otro individuo, lo que se ha probado para c se puede probar para cualquier otro.

Cuantificador Existencial

- **Generalización existencial.** Introducción del Cuantificador Existencial.

$$I_\exists : \frac{\vdash \alpha(c)}{\vdash \exists x \alpha(x)}$$

Siendo c un individuo (constante) cualquiera, hacer

1. Cambiar **algunas** letras c por una variable x **no** utilizada en α.
2. Añadir $\exists x$.

- **Instanciación existencial.** Eliminación del Cuantificador Existencial.

$$E_\exists : \frac{\vdash \exists x\, \alpha(x) \quad \vdash (\alpha(c) \vdash \beta)}{\vdash \beta}$$

Puesto que existe algo, el c, que cumple α, si hipotizamos sobre ese algo sin hacer ninguna suposición adicional sobre el individuo, podemos derivar la conclusión que intentamos probar si es independiente de c.

No hacer ninguna suposición adicional significa que: c es una constante individuo que no puede aparecer ni en en el antecedente $\exists x\, \alpha(x)$ de la regla de inferencia, ni en ninguna premisa de la derivación, ni en ninguna hipótesis de la derivación, ni

Profundizamos en ...

Solidez y Completitud

Teorema (Solidez y Completitud en *DN*)

- *Solidez. DN en L0 y en L1 es sólido: si* $\vdash_{DN} \alpha \Longrightarrow \models \alpha$
- *Completitud. DN en L0 y en L1 es completo: si* $\models \alpha \Longrightarrow \vdash_{DN} \alpha$

donde $\vdash_{DN}$ está formado por las siguientes reglas de inferencia:

Lógica		Reglas de Inclusión	Reglas de Eliminación	Otras Reglas
		$I_\wedge$	$E_\wedge$	IT
		$I_\vee$	$E_\vee$	$CONTRA$
	L_0	$I_\rightarrow$	$E_\rightarrow$	
		$I_\leftrightarrow$	$E_\leftrightarrow$	
L_1		$I_\neg$	$E_\neg$	
			$E_{\neg\neg}$	L_0
		$I_\forall$	$E_\forall$	
		$I_\exists$	$E_\exists$	L_1

Profundizamos en ...

Derivaciones incorrectas de $\forall x P(x)$ - I

Siempre debe proceder de un c arbitrario.

Derivación incorrecta: c no es arbitrario.

1	$P(c)$	Premisa. (c, en premisa)
2	$\forall x P(x)$	$I_{\forall}$,1. ✘

La premisa de partida hace referencia a un individuo que cumple P, y no todos los individuos del mundo tienen que cumplir necesariamente P.

P.e. Si Toby es un perro, ¿todo el planeta está formado por perros?

Derivaciones incorrectas de $\forall x P(x)$ - II

Siempre debe proceder de un c arbitrario.

Derivación incorrecta: a no es arbitrario.

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Premisa
2	$P(a) \rightarrow Q(a)$	$E_\forall, 1, a/x.$
3	$\quad P(a)$	Asunción (Para $I_\rightarrow$) (*a*, en Hipótesis)
4	$\quad Q(a)$	$E_\rightarrow, 2, 3$
5	$\quad \forall x Q(x)$	$I_\forall$, 4. ✘
6	$P(a) \rightarrow \forall x Q(x)$	$I_\rightarrow$, 3-5

Un individuo a particular es el que se ha considerado en la hipótesis para hacer la derivación interna, esto no es justificación para generalizar la propiedad derivada.

Bajo la hipótesis de que hay un individuo particular, el a, que llega a verificar $Q()$ ¿debemos concluir que todos los objetos del mundo cumplirán $Q()$? ¿Y si no existe tal individuo a?

Derivaciones incorrectas de $\forall x P(x)$ - y III

El $\forall$ debe afectar a todas las ctes. sustituidas

Derivación incorrecta: No se sustituyen todas las contantes.

1	$\forall x P(x, x)$	Premisa
2	$P(a, a)$	$E_{\forall}, 1, a/x.$
3	$\forall x P(x, a)$	$I_{\forall}$,2. ✘

TODAS las ocurrencia del individuo c se deberá sustituir por la variable. Las sustituciones no son parciales, cambiaría el sentido de la oración.

P.e. si la relación del ejemplo es Amar, pasaríamos de que todo el mundo se ama a sí mismo para decir que todo el mundo ama a una sola persona.

$I_\forall$ vs $I_\exists$ - I

Distingue la regla $I_\forall$ de la regla $I_\exists$

- $I_\forall$, el individuo c no debe ser un individuo distinguido y cuando se introduce $\forall$ se hace sobre **todas** las ocurrencias del individuo sustituido.
- $I_\exists$, el individuo c es cualquiera (incluso distinguido) y las sustituciones se pueden hacer sobre **algunas** ocurrencias del individuo sustituido.

Ejemplo. $P(c) \vdash \exists x P(x)$

1	$P(c)$	Premisa
2	$\exists x P(x)$	$I_\exists$,1.

Recuerda que poner en la línea 2 "$\forall x P(x)$ $\quad I_\forall, 1.$" es incorrecto.

$I_\forall$ vs $I_\exists$ - II

Ejemplo. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash P(a) \to \exists x Q(x)$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Premisa
2	$P(a) \to Q(a)$	$E_\forall, 1, a/x.$
3	$P(a)$	Asunción (Para $I_\to$)
4	$Q(a)$	$E_\to, 2, 3$
5	$\exists x Q(x)$	$I_\exists$, 4.
6	$P(a) \to \exists x Q(x)$	$I_\to$, 3-5

Recuerda que poner en la línea 5, "$\forall x Q(x)$ $\quad I_\forall, 4.$" es incorrecto.

$I_\forall$ vs $I_\exists$ - III

Ejemplo. $\forall x P(x,x) \vdash \exists x P(x,a)$

1	$\forall x P(x,x)$	Premisa
2	$P(a,a)$	$E_\forall, 1, a/x.$
3	$\exists x P(x,a)$	$I_\exists$,2.

Recuerda que poner en la línea 3, "$\forall x P(x,a)$ $\quad I_\forall, 2.$" es incorrecto.

$I_\forall$ vs $I_\exists$ - IV

Ejemplo. Varias derivaciones con sustituciones parciales

1	$P(c) \to Q(c)$	Premisa
2	$\exists x(P(x) \to Q(c))$	$I_\exists, 1.$ ✔
3	$\exists x(P(c) \to Q(x))$	$I_\exists, 1.$ ✔
4	$\exists x P(x) \to Q(c)$	$I_\exists, 1.$ ✘
5	$P(c) \to \exists x Q(x)$	$I_\exists, 1.$ ✘

Importante:

- La inclusión de $\exists$ afecta a toda la oración.
- Sustituir algunas constantes c por una variable x para aplicar $I_\exists$ (líneas 2 y 3), no es equivalente a aplicar $I_\exists$ en la sub-expresión en la que se realiza esa sustitución (líneas 4 y 5).

Moraleja: Cuidadín con los paréntesis. No olvides ponerlos.

Derivaciones incorrectas de $E_\exists$ - I

Se debe hipotizar sobre c's que no sean distinguidos

Derivación incorrecta: Se hipotiza sobre una cte ya existente

1	$\forall x \exists y P(y, x)$	Premisa
2	$\exists y P(y, c)$	$E_\forall$, 1. c/x
3	$P(c, c)$	Asunción ($E_\exists$) ✘
4	$\exists x P(x, x)$	$I_\exists$, 3.
5	$\exists x P(x, x)$	$E_\exists$, 2,3-4.

Se usa en la hipótesis un individuo, c, que ya aparece en la expresión existencial (antecedente de la regla de inferencia). Rompe la generalidad de la derivación hipotética.

P.e. si la relación del ejemplo es Padre-de, pasaríamos de que c tiene un padre a decir que c es padre de sí mismo.

Derivaciones incorrectas de $E_\exists$ - II

Se debe hipotizar sobre c's que no sean distinguidos

Derivación incorrecta: Se hipotiza sobre una cte ya existente

1	$P(a)$	Premisa
2	$\exists y Q(y)$	Premisa
3	$Q(a)$	Asunción ($E_\exists$) ✘
4	$P(a) \wedge Q(a)$	$I_\wedge, 1, 3.$
5	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$I_\exists, 4.$
6	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$E_\exists$, 2,3-5.

Se usa en la hipótesis un individuo, c, que ya aparece en una premisa de la derivación. Rompe la generalidad de la derivación hipotética.

P.e. si $P(a)$ indica que "Ramón es persona" y Q representa a la categoría de los perros, concluiríamos que Ramón es tanto persona como perro.

Derivaciones incorrectas de $E_\exists$ - III

Se debe hipotizar sobre c's que no sean distinguidos

Derivación incorrecta: Se hipotiza sobre una cte ya existente

1	$\exists x P(x)$	Premisa
2	$Q(a)$	Asunción (Para $\mathrm{I}_\rightarrow$)
3	$P(a)$	Asunción (Para $\mathrm{E}_\exists$) ✘
4	$P(a) \wedge Q(a)$	$I_\wedge, 2, 3.$
5	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$I_\exists, 4.$
6	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$E_\exists, 1, 3-5.$
7	$Q(a) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\mathrm{I}_\rightarrow$, 2-6.

Se usa un individuo, a, que aparece en la hipótesis de una derivación que afecta a la línea donde se aplica la regla $\mathrm{E}_\exists$.

P.e. si suponemos que "Ramón es persona", $P(a)$, y Q representa a la categoría de los perros, concluiríamos que existen seres que son personas y perros (pero porque asumimos que Ramón, que ya era perro, lo hicimos persona.)

Derivaciones incorrectas de $E_\exists$ - y IV

Se debe concluir expresiones sin la c de hipótesis

Derivación incorrecta: Se concluye sobre la cte de hipótesis

1	$\exists x P(x,x)$	Premisa
2	$P(c,c)$	Asunción (Para $E_\exists$)
3	$\exists x P(c,x)$	$I_\exists$, 2.
4	$\exists x P(c,x)$	$E_\exists$, 1,2-3. ✘

La conclusión β contiene una contante c, que se ha utilizado para hipotizar sobre el existencial.

La hipótesis (asunción) no puede contener constantes de la conclusión.

P.e. Bajo la premisa de que alguien que se mira a sí mismo, y bajo la hipótesis de que Alicia se mira a sí misma, concluimos que Alicia mira a alguien. Si en vez de Alicia, el que se mira es Juan ¿cómo podemos seguir aceptando que Alicia mira a alguien?

Desarrollo

Reglas Derivadas

Definición (Regla Derivada)

Regla de inferencia que han sido deducidas utilizando únicamente reglas básicas de inferencia.

Ejemplo. Algunas reglas derivadas ...

- Regla de Modus Tollens (MT): $\{\vdash A \to B, \vdash \neg B\} \vdash \neg A$
- Regla de Silogismo Hipotético (SH): $\{\vdash A \to B, \vdash B \to C\} \vdash A \to C$
- Regla del Dilema Constructivo (DC): $\{\vdash A \vee B, \vdash A \to C, \vdash B \to D\} \vdash C \vee D$
- Regla de Absorción (ABS): $\{\vdash A \to B\} \vdash A \to (B \wedge C)$
- Regla del Silogísmo Disyuntivo (SD): $\{\vdash A \vee B, \vdash \neg A\} \vdash B$
- ...
- Se pueden demostrar todas las reglas (semánticas) vistas a lo largo del curso.

Equivalencias

Definición (Equivalencias)

$$\alpha \approx \beta \overset{def}{\Longleftrightarrow} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

Si se demuestra que $\alpha \approx \beta$, entonces se pueden incluir las siguientes reglas en el sistema: $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \beta}$ y $\dfrac{\vdash \beta}{\vdash \alpha}$

Ejemplo. Algunas equivalencias ...

- Ley de la Exportación: *EXP* : $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma \approx \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$
- Ley de la Doble Negación: *DN* : $\alpha \approx \neg\neg\alpha$
- Leyes de De Morgan: $DM\wedge$: $\neg(\alpha \wedge \beta) \approx (\neg\alpha \vee \neg\beta)$, $DM\vee$: $\neg(\alpha \vee \beta) \approx (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$.
- Leyes Conmutativas: $COM\wedge$: $(\alpha \wedge \beta) \approx (\beta \wedge \alpha)$, $COM\vee$: $(\alpha \vee \beta) \approx (\beta \vee \alpha)$
- Leyes asociativas, Leyes Distributivas, Ley de la Eliminación de la Implicación Material, Ley de la Transposición, . . . (escribelas formalmente)

Desarrollo

Estrategias Generales

- **Estrategia de Deducción Directa**. Intenta alcanzar conclusiones utilizando el menor numero de deducciones y de hipótesis posible, aplicando primero las reglas de inferencia que no requieran de supuestos.
- **Estrategia de Prueba por Casos**. Estrategia para probar $\alpha \vee \beta \vdash \gamma$.
- **Estrategia del Teorema de la Deducción**. Estrategia para probar $\alpha \rightarrow \beta$.
- **Estrategia de Reducción al Absurdo**. Estrategia para probar una expresión α considerando la hipótesis $\neg\alpha$.
- **Estrategia para la demostración de Teoremas**. Estrategia para deducir $\vdash F_u$, introduciento una hipótesis e intentar utilizar la estrategia del Teorema de la Deducción y/o la estrategia de Reducción al Absurdo.

Estrategias por Tipo de Conclusión

El operador principal **no es** un cuantificador.

Conclusión	**Entonces hacer ...**
Atómica	Demostración directa. Si no es posible, aplicar reducción al absurdo.
Negada	Hipotizar sin su negación y si se llega a contradicción aplicar $I_\neg$.
Conjunción	Derivar cada una de sus subfórmulas y aplicar $I_\wedge$.
Disyunción	Probar una de sus subfórmulas y aplicar $I_\vee$. Si no es posible, aplicar reducción al absurdo.
Condicional	Aplicar el teorema de la deducción.
Bicondicional	Aplicar dos veces el teorema de la deducción.

Estrategias por Tipo de Conclusión

El operador principal **sí es** un cuantificador.

- Recuerda siempre que el ámbito del cuantificador es sobre toda la fórmula[1].
- Probar previamente una instancia de la fórmula cuantificada.

Para probar...	Derivar...
$Qx\alpha[x]$	$\alpha[c]$

Para probar...	Derivar...
$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	$P(c) \rightarrow Q(c)$
$\forall x \neg P(x)$	$\neg P(c)$
$\forall x \exists y P(x, y)$	$\exists y P(c, y)$
$\exists x P(a, x)$	$P(a, c)$
$\exists x P(x, x)$	$P(c, c)$
...	...

[1] Las cuatro reglas para cuantificadores operan solo cuando el operador (cuantificador) está en la posición más a la izquierda.