Análisis Matemático
y
Métodos Numéricos

Alfonsa García López
Francisco García Mazarío
Rafael Miñano Rubio
Blanca Ruiz Palma
José Ignacio Tello del Castillo

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Prólogo

La presente guía contiene el material de apoyo de la asignatura Análisis Matemático y Métodos Numéricos de las titulaciones de Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas e Ingeniería Técnica en Informática de Gestión, que se imparte en la Escuela Universitaria de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid durante el curso 2008-09.

La principal novedad de la asignatura para el presente curso consiste en que el tema 3 (Resolución numérica de ecuaciones) no se impartirá como el resto de los temas, sino que se pedirá que los alumnos realicen un trabajo en grupo, que se entregará y contará para la calificación final de quienes opten por evaluación continua.

En el Capítulo 0 se puede encontrar información sobre los profesores que impartirán la asignatura a lo largo del curso, los prerrequisitos que se deben conocer al empezar el curso para un correcto seguimiento de la asignatura, los objetivos que se pretenden conseguir, la planificación de las actividades, el material de apoyo para la asignatura, los métodos docentes y de evaluación, las fechas de realización de las pruebas para los alumnos que deseen optar por la evaluación continua, etc. Además, se han incluido en el capítulo 0 las normas para la realización del trabajo sobre el tema 3 comentado en el párrafo anterior.

A continuación aparecen en la guía los contenidos de la asignatura, agrupados por temas, de acuerdo con el programa oficial de la misma. Para cada tema se incluye un desarrollo teórico con los conceptos, resultados (incluyendo algunas demostraciones) y algunos ejemplos básicos. Seguidamente aparecen una serie de ejercicios o problemas, de los cuales algunos se resolverán en clase y otros servirán para el trabajo personal del alumno. Finalmente, en cada tema se incluye lo que se ha llamado la "práctica", que contiene una serie de ejercicios y problemas preparados para realizar con ayuda del ordenador y del programa de cálculo simbólico Derive.

Una vez desarrollados los 7 temas de la asignatura, se incluyen en la guía los enunciados de los exámenes que se han realizado durante los dos últimos cursos, con las soluciones a las preguntas de test.

Y por último aparece la bibliografía que se puede consultar para ampliar conocimientos sobre la asignatura. La bibliografía se ha dividido en tres apartados. En el primero se incluyen los libros de nivel más básico, en el segundo la bibliografía complementaria y en el tercero una serie de libros de problemas donde se pueden encontrar ejercicios y problemas sobre los contenidos de la asignatura. De todos los libros incluidos en la bibliografía hay ejemplares en la biblioteca para su consulta o préstamo a los alumnos interesados.

Madrid, enero de 2009.

Contenidos

Capítulo 0

Organización de la asignatura

Profesores

El siguiente cuadro recoge información sobre los profesores que impartirán la asignatura a lo largo del presente curso 2008-09, incluyendo los horarios de tutorías, los despachos donde se atenderán dichas tutorías y las direcciones electrónicas.

Profesor	Despacho	Tutorías	e-mail
Alfonsa García López	2104-B	Ju 10-13 Vi 10-13	alfonsa.garcia@eui.upm.es
Francisco García Mazarío	2105	Lu 14-15 Ma 13-14 y 15-16 Ju 18-21	gmazario@eui.upm.es
Rafael Miñano Rubio	2006	Lu 16-17 Ma 18-20 Ju 10-11 y 15-17	rafael.minano@upm.es
Blanca Ruiz Palma	2004	Lu 9-11 y 13-14 Mi 9-12	blancar@eui.upm.es
José Ignacio Tello del Castillo	2110	Ma 10-12 Ju 10-14	jtello@eui.upm.es

Prerrequisitos

Para el correcto seguimiento de la asignatura son necesarios algunos conocimientos y destrezas previas, la mayor parte de los cuales forman parte de los contenidos de los programas oficiales de la enseñanza media en España (ESO y Bachiller) o de otras asignaturas del Departamento impartidas en el primer cuatrimestre. Se recuerda que durante el primer cuatrimestre se imparte la asignatura de libre elección Laboratorio de Matemáticas, en la que se repasan dichos conocimientos.

Los prerrequisitos y destrezas comentados serían:

- Métodos de demostración: inducción y reducción al absurdo.
- Manejo de propiedades y desigualdades de números reales.
- Módulo y argumento de un número complejo.
- Conceptos generales de funciones: dominio, cotas, crecimiento...
- Resolución de ecuaciones de segundo grado y de sistemas de ecuaciones lineales.
- Conocimiento de las propiedades de las funciones elementales: polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y del valor absoluto.
- Cálculo de límites, indeterminaciones y regla de L´Hôpital.
- Conocimiento de los conceptos de continuidad de una función y del teorema de Bolzano.
- Cálculo de derivadas y estudio del crecimiento y la convexidad de una función.
- Cálculo de primitivas: elementales, por partes y cambio de variable.

En **moodle** se puede encontrar material de autoevaluación sobre los prerrequisitos.

Objetivos

Entre los objetivos de la asignatura distiguiremos entre *objetivos cognitivos* (referidos a conocimientos que se han de aprender) y *objetivos competenciales* (es decir, habilidades y destrezas que se deben adquirir). Detallaremos los objetivos por temas:

Tema 1:

Objetivos cognitivos:

- Aprender los conceptos de sucesión, sucesión acotada, sucesión monótona y sucesión convergente/divergente.
- Relación entre acotación, monotonía y convergencia de una sucesión.
- Propiedades de los límites de sucesiones.
- Concepto de orden de magnitud de una sucesión (mismo orden, mucho menor y O-grande). Propiedades.

Objetivos competenciales:

- Ser capaces de resolver problemas que se formulen en términos de estudiar la convergencia de una sucesión definida de modo explícito (con técnicas de límites de funciones o regla del sandwich) o de modo recursivo.
- Saber calcular el orden de magnitud de una sucesión, comparar los órdenes de diferentes sucesiones y saber aplicarlo al estudio de complejidad de algoritmos.

Tema 2:

Objetivos cognitivos:

– Conocer el concepto de ecuación en diferencias, su orden, si es lineal, homogénea o de coeficientes constantes.

Objetivos competenciales:

– Ser capaces de resolver problemas formulados mediante una sucesión definida en modo recursivo por medio de la resolución de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden y de segundo orden homogéneas con coeficientes constantes.

Tema 3:

Objetivos cognitivos:

– Dominar los conceptos de método numérico, solución de una ecuación (existencia y unicidad), aproximación de una solución, error de aproximación y cota del error.

– Conocer los métodos de bisección y de Newton para la resolución aproximada de ecuaciones.

Objetivos competenciales:

– Ser capaces de resolver problemas que se formulen en términos de resolver una ecuación, saber estudiar si tiene o no solución, determinar cuántas soluciones tiene, localizar las soluciones en intervalos y separarlas.

– Saber hallar una aproximación por los dos métodos anteriores y dar una cota del error.

– Saber hallar una aproximación por el método de bisección con una cota del error prefijada.

Tema 4:

Objetivos cognitivos:

– Comprender los conceptos de serie, término general de una serie, suma y suma parcial, convergencia y divergencia de una serie.

– Conocer los conceptos de orden de magnitud de la suma parcial de una serie y de suma aproximada de una serie.

Objetivos competenciales:

– Ser capaces de resolver problemas que se formulen en términos de la convergencia de una serie, tanto para series de términos positivos como para series cualesquiera.

– Saber hallar la suma de una serie convergente geométrica.

– Saber estudiar el orden de magnitud de la suma parcial de una serie.

– Saber hallar la suma aproximada de una serie con una cota del error prefijada.

Tema 5:

Objetivos cognitivos:

– Comprender los conceptos de polinomio de Taylor, aproximación de un valor mediante el polinomio de Taylor de una función, aproximación funcional local y error de aproximación.

– Conocer la expresión del resto de Lagrange para el error de aproximación.

- Serie de Taylor de una función.
- Desarrollo en serie de potencias de una función y campo de validez.
- Conocer los desarrollos en serie de potencias de las funciones $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\ln(1+x)$, y su campo de validez.

Objetivos competenciales:

- Saber hallar el polinomio de Taylor de una función, usarlo para aproximar un determinado valor de la función y dar una cota del error utilizando el resto de Lagrange.
- Saber aproximar el valor de una función con una cota de error prefijada, utilizando un polinomio de Taylor o bien a partir del desarrollo en serie de potencias de la misma.

Tema 6:

Objetivos cognitivos:

- Comprender los conceptos de aproximación funcional global, polinomio interpolador, interpolación a trozos (lineal, cuadrática) y aproximación de un valor mediante un polinomio interpolador.
- Conocer las expresiones de la cota del error de una aproximación para un polinomio interpolador de cualquier orden y para la interpolación lineal a trozos.

Objetivos competenciales:

- Dada una tabla de puntos, saber hallar su polinomio interpolador y obtener un valor aproximado mediante un polinomio interpolador o mediante interpolación a trozos (lineal o cuadrática).
- Dada una función, saber aproximar un determinado valor a partir de un polinomio interpolador o bien a partir de una interpolación a trozos (lineal o cuadrática) y dar una cota del error.
- Determinar la longitud de subintervalo necesaria para aproximar una función en un intervalo mediante interpolación lineal a trozos garantizando una cota de error dada.
- Comparar gráficamente, con ayuda de Derive, distintas aproximaciones de una función en un punto (polinomio de Taylor, polinomio de interpolación, interpolación lineal a trozos).

Tema 7:

Objetivos cognitivos:

- Comprender el concepto de integral de Riemann y sus propiedades básicas (linealidad, aditividad, monotonía…).
- Conocer los métodos numéricos de integración del trapecio y de Simpson.
- Concepto de función definida como integral, su continuidad y derivabilidad.
- Conocer y comprender el teorema Fundamental del Cálculo.
- Aprender el concepto de integral impropia.

Objetivos competenciales:

– Ser capaces de modelizar y resolver problemas que se formulen en términos de cálculo de una integral.
– Saber aplicar los métodos del trapecio y de Simpson para aproximar el valor de una integral.
– Saber hallar un valor aproximado de una integral mediante los métodos del trapecio y Simpson, con una cota de error prefijada (con Derive).
– Saber trabajar con funciones definidas como integrales, estudiando su continuidad y derivabilidad o hallando su expresión explícita, en particular para funciones sencillas definidas a trozos.
– Saber estudiar la convergencia de algunas integrales impropias y calcular su valor cuando sean convergentes.

Créditos ECTS

La asignatura Análisis Matemático y Métodos Numéricos tiene asignados un total de 6 créditos LRU (equivalentes a 60 horas de clase), que al pasarlos a créditos europeos (también llamados ECTS y equivalentes, cada uno, a 25-30 horas de trabajo del estudiante) se convierten en 4 ECTS, teniendo en cuenta la carga total de créditos de las titulaciones que se imparten en la Escuela Universitaria de Informática.

Ello implica que la asignatura se debe programar para un total de entre 100 y 120 horas de trabajo del alumno, incluyendo horas de clase magistral, horas de problemas, clases con ordenador, tutorías, estudio personal, exámenes, etc.

La planificación temporal, con las horas previstas que se dedicarán a cada tema, se recogen en el siguiente cuadro:

Tema	Horas totales	Horas presenciales
1. Sucesiones de números reales	21	10 + 3
2. Ecuaciones en diferencias	11	5 + 2
3. Resolución numérica de ecuaciones	15	2
4. Series numéricas	19	9 + 2
5. Aproximación local de funciones: Pol. de Taylor	10	5 + 1'5
6. Aproximación global de funciones: Pol. interpolador	6	3 + 1'5
7. Integración	12	6 + 1

En la columna de las horas presenciales se incluyen tanto las horas de clase en aula como las de laboratorio, y en las horas totales se añaden las horas previstas de trabajo autónomo del alumno y las tutorías.

Finalmente, para evaluación se prevé un total de 4'5 horas para los alumnos que aprueben por curso y de 7'5 para los que necesiten hacer el examen final, lo que da un promedio de 6 horas para evaluación que, al sumarlas con las 94 horas totales del cuadro anterior, se obtienen entre 98'5 y 101'5 horas totales de trabajo del alumno (según tengan que acudir o no al examen final), correspondientes a los 4 créditos ECTS de la asignatura.

Planificación de actividades

Tal como se detallará en el punto siguiente, en la asignatura se impartirán clases magistrales, clases de problemas y clases con ordenador. En este apartado se da información sobre los horarios de las actividades principales.

Los horarios, aulas y profesores que impartirán la asignatura en cada uno de los 8 grupos se muestran en el siguiente cuadro:

Grupo	Aula	Horario	Profesor
GM-11	4302	Ma,Ju: 9-10; Mi: 10-12	José Ignacio Tello del Castillo
SM-11	3302	Ma,Ju: 9-10; Mi: 9-11	Alfonsa García/Blanca Ruiz
SM-12	3303	Lu: 13-14; Ma: 12-13; Mi: 12-14	Francisco García Mazarío
Mixto	1202	Lu,Ma: 12-13; Vi: 11-12	José Ignacio Tello del Castillo
GT-11	3303	Lu: 20-21; Ju: 18-20	Rafael Miñano Rubio
ST-11	3302	Lu,Ma,Ju: 17-18	Rafael Miñano Rubio
T-12	3203	Ma,Mi: 16-17; Ju: 16-18	Francisco García Mazarío
PAS	Rect.	Ju: 16-19	Alfonsa García/Blanca Ruiz

Para los grupos GM-11, SM-11, SM-12, T-12 y PAS, en el anterior cuadro se incluyen todas las horas de clase presenciales, con o sin ordenador. Sin embargo, para los grupos Mixto, GT-11 y ST-11 en horario sólo aparecen las clases sin ordenador, por lo que los alumnos de dichos grupos deberán apuntarse, para las clases con ordenador, en uno de los grupos que aparecen en el siguiente cuadro. Dichas clases se impartirán en el Centro de Cálculo, o bien en el aula 3103.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
9-10				R. Miñano	
10-11					
11-12					
12-13					
13-14					
14-15					
15-16					
16-17		R. Miñano			
17-18					
18-19					
19-20					
20-21				R. Miñano	

Todas las actividades serán anunciadas con la antelación y publicidad suficiente en la plataforma **moodle** para poder ser seguidas por los alumnos interesados. En algunos casos estas actividades pueden ser distintas para los diferentes grupos de clase, dependiendo del profesor de cada grupo.

Métodos docentes

Para la impartición de la asignatura se utilizarán diferentes métodos docentes, que se describen a continuación:

De las 100-120 horas correspondientes a los 4 créditos ECTS asignados a la asignatura, entre 20 y 25 corresponden a clases magistrales, una hora (la primera de curso) se dedicará a la presentación de la asignatura, y unas 15-20 horas a clases de problemas (en las que se corregirán los problemas con número impar de los enunciados que se encuentran en la presente guía, dejando los números pares para trabajo personal del alumno), trabajo en grupo, tutorías colectivas u otras actividades propuestas por cada uno de los profesores de los grupos.

Para la resolución de los ejercicios y problemas con ordenador, cuyos enunciados se encuentran también en la presente guía, se utilizarán aproximadamente 11 horas de clase en aulas que disponen de entre 20 y 30 ordenadores, en cada uno de los cuales trabajarán uno o dos alumnos. Para la realización de dichos ejercicios y problemas se utilizará el programa Derive.

El número total, aproximado, de horas presenciales dedicadas a los diferentes métodos docentes se recogen en el cuadro siguiente:

Métodos docentes	Horas
Clases de teoría	22
Resolución de problemas	18
Prácticas de laboratorio	11
Trabajo en grupo	2
Exposiciones de trabajo	0’25
Tutorías	2’75
Exámenes (para no aprobados por curso)	3’5
Pruebas de evaluación continua	4’5

La planificación de la asignatura incluye la realización de un trabajo en equipo que supondrá unas 15 horas de trabajo del alumno, de las cuales 2 son presenciales.

Normas de evaluación

Todos los exámenes constarán de preguntas tipo test, cuestiones teóricas y problemas, algunos de los cuales se realizarán en las aulas del Centro de Cálculo para poder hacer uso del ordenador. En estos últimos los alumnos podrán disponer de una hoja del tamaño de un folio, escrito por una cara, con las anotaciones que estimen oportunas sobre la asignatura o sobre el programa Derive.

1. **Convocatoria de Junio:**

   El alumno podrá elegir una de las siguientes opciones:

(a) **Examen final.**
La calificación se obtiene de un único examen que se realizará en la fecha asignada para la convocatoria de Junio (Viernes 19 de Junio, 9h, www.eui.upm.es).

La asignatura se aprueba obteniendo en el mismo una nota mayor o igual que 5 (sobre 10).

(b) **Evaluación continua.**
Los alumnos que lo deseen pueden optar por un modelo con:

- Un trabajo en grupo sobre el tema 3, obligatorio para los que opten por evaluación continua, que tendrá un valor del 15% de la nota. La fecha límite prevista de entrega del trabajo es el 17 de abril de 2009.
- Tres pruebas de evaluación realizadas a lo largo del curso, una sobre los temas 1 y 2 (que valdrá un 30% de la nota), otra sobre los temas 4 y 5 (30%) y otra sobre los temas 6 y 7 (25 %). En cada una de esas pruebas se podrá pedir utilizar conceptos y técnicas de los temas anteriores. Fechas previstas para las pruebas:

  1^a prueba: Miércoles/Jueves 25/26 de marzo de 2009.

  2^a prueba: Miércoles/Jueves 6/7 de mayo de 2009.

  3^a prueba: Miércoles/Jueves 3/4 de junio de 2009.

  (Se recomienda confirmar en la web las fechas definitivas.)

Para poder presentarse a la prueba de evaluación, los alumnos deberán haber realizado previamente una prueba de entrenamiento, que tendrán que entregar el día de la prueba de evaluación. Dichas pruebas estarán disponibles en:

- La página web de la asignatura: http://www.dma.eui.upm.es/docencia/amymn (Material)
- La plataforma moodle de UPM-Virtual

Los alumnos con una calificación media ponderada de las cuatro pruebas mayor o igual que 6 estarán aprobados por curso y no tendrán que hacer el examen final.

Los alumnos que no consigan el aprobado por curso irán al examen final y se les calificará con la mejor de las dos puntuaciones siguientes:

i. Nota del examen
ii. (Media ponderada de la nota del trabajo y de las dos mejores pruebas de evaluación)*0.5+(Nota del examen)*0.5

La asignatura se aprueba si se obtiene una calificación mayor o igual que 5 (sobre 10).

En cualquiera de las dos opciones, **(a)** o **(b)** (salvo que se haya aprobado por curso), si un alumno no entrega el examen final se considerará como no presentado en la convocatoria de junio.

2. **Convocatorias extraordinarias:**

La calificación se obtiene de un único examen relativo a todos los temas explicados durante el curso.

La asignatura se aprueba obteniendo una nota mayor o igual que 5 (sobre 10).

No se guardará ninguna nota de convocatorias anteriores.

Material de apoyo

La presente guía constituye el material de apoyo fundamental para el seguimiento de la asignatura, pero no es el único. Además de la información contenida en esta guía, pondremos a disposición de los alumnos otro material de apoyo a su trabajo. Este material estará disponible en:

- la web de la asignatura: http://www.dma.eui.upm.es/docencia/amymn (Material)
- la plataforma **moodle** de UPM–Virtual[1]

- *Pruebas de prerrequisitos de cada tema.* Se han elaborado diversas pruebas de prerrequisitos, que se han colocado en **moodle** y que pueden servir para que los alumnos que lo deseen puedan comprobar el nivel de conocimientos previos antes de empezar cada uno de los temas del curso.
- *Pruebas de entrenamiento:* Para cada una de las tres pruebas de evaluación continua que se realizarán a lo largo del cuatrimestre, se publicará una prueba de entrenamiento, consistente en un compendio de cuestiones del mismo tipo que las que se preguntan en los exámenes de la asignatura, para que los alumnos trabajen individualmente o en grupo. Se podrán consultar al profesor las dudas que surjan, bien en las tutorías individuales o en las colectivas. Para presentarse a la prueba de evaluación continua es imprescindible llevar completada la prueba de entrenamiento correspondiente. Cada una de estas pruebas se publicará al menos una semana antes de la realización de la prueba de evaluación.
- *Preguntas de test:* Batería de preguntas tipo test (Verdadero/Falso) para que el alumno que lo desee pueda autoevaluarse. (Sólo disponibles en la plataforma **moodle**.)
- *Enunciados de exámenes* de cursos anteriores. Los correspondientes a los dos últimos cursos están disponibles en esta guía docente. En la página web de la asignatura se encuentran también los de otros cursos anteriores. Se incluyen las soluciones de las preguntas tipo test.

Trabajo sobre resolución numérica de ecuaciones

Normas de realización

1. Objetivo del trabajo: Análisis y aplicación de algunos métodos de resolución aproximada de ecuaciones. Concretamente se tratarán el **método de la bisección** y el **método de Newton.**

[1] **Acceso a la plataforma moodle:**
1) Para acceder a las asignaturas es necesario una cuenta de correo de alumnos UPM
Para obtenerla: https://correo.alumnos.upm.es/.
2) Para acceder a **moodle** directamente: https://moodle.upm.es/titulaciones/oficiales
- usuario: la dirección de correo UPM completa (incluida la parte final, @alumnos.upm.es).
- contraseña: la que se tenga para dicha dirección de correo.
En caso de encontrar cualquier problema con el acceso puede escribirse a gate@gate.upm.es o a rafael.minano@upm.es

2. El trabajo, que se realizará por parejas, deberá contener los siguientes puntos:

   (a) Una explicación teórica (máximo dos páginas) de elaboración propia de uno de los dos métodos a elegir, incluyendo la descripción detallada del algoritmo y de las condiciones que garantizan la convergencia.

   (b) Programación con DERIVE de las funciones necesarias para aplicar el método de Newton para resolver ecuaciones dando la expresión de las funciones que se hayan definido, explicando cómo utilizarlas y cómo interpretar el resultado obtenido (ver detalles en Anexo 1).

   (c) Resolución, con ambos métodos, de las ecuaciones de la batería de pruebas (ver Anexo 2). Para cada una de ellas se deberá:

      (i) Reescribirla (cuando sea necesario) en la forma $f(x) = 0$, con una elección adecuada de la función f.

      (ii) Localizar gráficamente todas las soluciones, dando, para cada una, un intervalo de longitud menor o igual que 1 que la contenga, y justificar que no hay más.

      (iii) Aproximar una de las soluciones por los dos métodos, detallando la comprobación de las condiciones de convergencia de cada uno, y aplicando la función DERIVE correspondiente, con 5 y con 10 iteraciones.

      (iv) Determinar una cota del error para cada una de las de aproximaciones anteriores.

   (d) Comparación entre los dos algoritmos desde el punto de vista de

      (i) velocidad de convergencia (número de iteraciones necesarias para obtener una aproximación con una precisión dada).

      (ii) condiciones de convergencia (requisitos necesarios para poder aplicar cada método).

   (e) Resolución detallada del problema adjudicado según los criterios del Anexo 3. Debe incluir: el planteamiento de la ecuación $f(x) = 0$, la comprobación de las hipótesis necesarias para garantizar la convergencia del algoritmo, la ejecución con DERIVE de dicho algoritmo, así como la interpretación del resultado.

   (f) Breve descripción de qué parte del trabajo ha realizado cada integrante del grupo, junto con una estimación del tiempo dedicado a cada parte.

   (g) Bibliografía utilizada.

3. Plazo de entrega: La fecha límite para entregar el trabajo será el 17 de abril de 2009. En esa fecha o antes, cada grupo deberá:

   (a) entregar a su profesor una copia del trabajo en papel, con las hojas grapadas, e indicando en la portada el nombre y el DNI de los dos integrantes del grupo.

   (b) entregar en **moodle**, antes de las 23:55h de la fecha límite, un fichero DERIVE con todas las ejecuciones, nombrado:
   `TrabajoAMyMN_nombreapellido1_nombreapellido2.dfw`.

4. Evaluación: Una parte de la corrección del trabajo consistirá en preguntas personalizadas a cada alumno. El profesor podrá citar a los autores bien en el aula para una exposición del trabajo, bien en tutoría para preguntas individualizadas. Para la calificación se tendrán en cuenta los criterios incluidos en la tabla del Anexo 4, en la que se indican las puntuaciones máximas por apartado.

5. Bibliografía recomendada:
   - Guía docente de la asignatura (Tema 3).
   - Los libros 3, 4, 5, 7, 11 y 19 de la bibliografía de la asignatura (que se puede encontrar al final de esta misma guía y en la web de la asignatura).

Anexo 1: Uso de Derive para aplicar los métodos de la bisección y Newton

Para aplicar el **método de bisección** a la resolución de la ecuación $f(x) = 0$, una vez comprobadas las condiciones de convergencia, elegido el intervalo y decidido el número de iteraciones a realizar, se usará la función `BISECCION`, incluida el fichero `AMyMN.mth`, evaluando la instrucción `BISECCION(`$f(x)$`, `x`, `a`, `b`, `n`)` donde:

- $f(x)$ es la función de la que queremos determinar sus puntos de corte con el eje x (resolver la ecuación $f(x) = 0$).
- x es la variable.
- a y b son los extremos del intervalo en el que se encuentra la solución buscada.
- n es el número de iteraciones deseadas.

La aproximación será un número del último intervalo y la cota de error será la longitud del mismo.

Para el **método de Newton** hay que programar en DERIVE la sucesión recurrente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

donde:

- $f(x)$ es la función de la que queremos determinar sus puntos de corte con el eje x (resolver la ecuación $f(x) = 0$).
- $f'(x)$ es la derivada la función $f(x)$.
- x_0 es el valor inicial para empezar a aplicar el método de Newton.
- x_n y x_{n+1} son, respectivamente, las aproximaciones n-ésima y $(n+1)$-ésima de la solución de la ecuación en el intervalo correspondiente.

En este método consideraremos que se ha obtenido la solución aproximada de la ecuación con un error menor que 10^{-k} cuando dos iteraciones consecutivas coincidan en k decimales.

Anexo 2: Batería de pruebas

Se deberán resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 7 = 0$ (obsérvese que aproximar la solución positiva de esta ecuación es un método de aproximar $\sqrt{7}$).

2. $e^{-x} = x$.

3. $\ln x = \dfrac{x}{5} - 5$.

4. $\dfrac{2e^x}{x+5} = x$.

5. $7x^3 + abx^2 + cdx + ef + 1 = 0$, donde los coeficientes ab, cd y ef corresponden, de dos en dos y en ese orden, a los seis últimos dígitos del DNI (XXabcdef) del componente del grupo cuyo primer apellido sea el primero por orden alfabético. Por ejemplo, si el DNI es 50736970 la ecuación a resolver es $7x^3 + 73x^2 + 69x + 71 = 0$.

Anexo 3: Problemas asignados

Cada pareja deberá elegir de la siguiente lista el problema correspondiente al último dígito del DNI del componente del grupo cuyo primer apellido sea el primero por orden alfabético.

Problema 0

Tras iniciar la emisión de un programa de actualidad, el índice de audiencia (en %) viene dado por la función

$$f(t) = 40t^2e^{1-3t}$$

donde t es el tiempo (en horas) transcurrido desde que empezó dicho programa. Los medidores de audiencia detectan las bajadas de interés y deciden emitir un anuncio sobre "la boda del año" cuando la audiencia decae al 4%. Utilizar el método de bisección para determinar con un error menor que un segundo en qué instante aparecerá el anuncio.

Problema 1

En una ciudad, la población del área urbana disminuye con el tiempo y su tamaño viene dado por la función

$$U(t) = 100000e^{-0.05t} + 200000;$$

la población del extrarradio crece con el tiempo y su tamaño viene dado por la función

$$E(t) = \frac{100000}{1 + e^{-0.075t}}$$

siendo t el tiempo medido en años y $t = 0$ representa el 1 de enero del año actual. En esa fecha, la población urbana era 6 veces la población del extrarradio, y se desea saber en cuántos años la población urbana será solamente el triple de la población del extrarradio.

Determinar por el método de la bisección aplicado a un intervalo de longitud 1, con error inferior a un mes, el instante en que la población urbana será el triple de la población del extrarradio.

Problema 2

La temperatura, en grados centígrados, de cierto equipo electrónico a los t minutos de entrar en funcionamiento viene dada por:

$$f(t) = T_0 + te^{0.1t}$$

donde T_0 es la temperatura inicial.

Al alcanzar la temperatura de 80º el sistema pone en funcionamiento un ventilador. Si el equipo empieza a funcionar a las 10 en punto de la mañana con una temperatura inicial de 20º, utilizar el método de bisección para precisar hasta los segundos el instante en que se pone en marcha el ventilador.

Problema 3

El coste de conexión a Internet en un cibercafé, para un usuario que no haga otra consumición, es de

$$f(x) = e^{x-1}(3x^2 - x + 1) \text{ euros},$$

siendo x el tiempo de conexión, expresado en horas.

Un usuario concreto sólo dispone de 5 euros para gastarse en este menester y le interesa saber cuál es el tiempo máximo que puede pasar conectado.

Obtener una aproximación al tiempo máximo de conexión, con un error menor que un minuto, usando el método de la bisección.

Problema 4

En una fábrica de cable de fibra óptica estiman que, si se fabrican x kilómetros de cable, el coste de fabricación de **cada metro** de cable viene dado por la función

$$c(x) = \frac{6\,x + 40\,\ln(1 + x)}{10\,x},$$

donde $c(x)$ está expresado en euros.

1. Si el precio de venta es de 2 euros por metro, definir una función $f(x)$ que exprese la ganancia en euros que se obtiene cuando se fabrican y venden x kilómetros de cable.
2. Representar con Derive la gráfica de $f(x)$ e interpretar los valores $f(3)$ y $f(6)$.
3. Si se quiere aproximar hasta los metros la mínima cantidad de cable que hay que fabricar y vender para que el proceso sea rentable, indicar cuál sería la ecuación a resolver y la cota de error admisible.
4. Resolver la ecuación anterior por el método de la bisección, determinando previamente el número de iteraciones necesarias para garantizar que el error es menor que la cota establecida.
5. Proponer una solución de la ecuación. Evaluar f sobre la solución propuesta e interpretar el significado.

Problema 5

El sonido se percibe con una intensidad dada por la función

$$L(r) = L_0 - \ln(r) - \beta\, r,$$

donde r es la distancia a la fuente de sonido expresada en metros, $L(r)$ está medida en decibelios (db) y $L_0 = 80\,\text{db}$ y $\beta = 0'0115$ son constantes. Determinar, por el método de la bisección, con un error menor que un decímetro, la distancia a la fuente de sonido desde la que se percibe 20 db.

Problema 6

Se quiere pintar la superficie limitada por la curva $y = e^{-x} + 2$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$ (las unidades son metros). ¿Es posible cubrir toda la superficie si se dispone de pintura para 5 m^2?

En caso de que sobre o falte pintura, sustituir la recta $x = 3$ por la recta $x = p$, de modo que se aproveche toda. Aproximar p hasta los centímetros utilizando el método de la bisección.

Problema 7

Después de administrar cierto fármaco a un paciente, su concentración en sangre (en mg / ml) viene dada por la función

$$c(t) = t\, e^{1-t/3},$$

donde el tiempo t (en horas) es el tiempo transcurrido desde que se administró el fármaco. Cuando la concentración decae a 2 mg / ml, se debe administrar al paciente una dosis adicional. Determinar, por el método de bisección y con error menor que 1 minuto, en qué momento hay que aplicar esta segunda dosis.

Problema 8

El número de usuarios de Internet en una ciudad t años después de implantar este servicio viene dado por

$$N(t) = 10^6\, e^{at} + \frac{435000}{a}(\, e^a - 1)$$

Sabiendo que después de un año hay 1564000 usuarios, utilizar el método de biseccción para determinar a y estimar el número de usuarios 3 años después.

Problema 9

Un joven quiere comprarse una casa y necesita pedir una hipoteca de 200 000 euros a pagar en 30 años. Dado que sólo puede destinar 800 euros al mes al pago de la misma, desea conocer cuál es el máximo tipo de interés que puede admitir. Para determinarlo, se sabe que la fórmula que relaciona la deuda a amortizar, A, la cantidad P que se paga en cada periodo, el número n de periodos, y la tasa de interés por periodo i es

$$A = \frac{P}{i}\left(1 - (1+i)^{-n}\right)$$

Utilizar el método de bisección para obtener el tipo de interés por encima del cual el joven no debería firmar la hipoteca.

Nota: Para elegir adecuadamente la escala en la representación gráfica conviene tener en cuenta la magnitud esperable de la variable i. Por ejemplo, si el tipo de interés ofrecido por el banco es el 5% y los pagos se hacen mensualmente, será $i = 0.05/12$.

Anexo 4: Criterios de evaluación

En el siguiente cuadro se resumen los criterios que se seguirán para la evaluación del trabajo:

	Bien	**Regular**	**Mal**
Explicación teórica	Está bien estructurada. Se entiende el método descrito. El lenguaje es adecuado. *(1.5 puntos)*	La estructura elegida es mejorable. El lenguaje usado no siempre es adecuado. *(1 punto)*	No se entiende el método descrito. El lenguaje usado no es el adecuado. *(0 puntos)*
Método de Newton	Está programado correctamente. El algoritmo es claro. *(1.5 puntos)*	El algoritmo funciona, aunque resulta poco claro. *(1 punto)*	El algoritmo no funciona o no está completamente programado. *(0 puntos)*
Ejecuciones obligatorias	Están contempladas exactamente las condiciones que hay que probar por ambos métodos. Los cálculos son correctos. *(3 puntos)*	Sobra o falta alguna condición. Hay algún cálculo incorrecto aunque no muy relevante. *(2 puntos)*	No se verifican las condiciones de convergencia. Los cálculos realizados no comprueban lo que se supone o son incorrectos. *(0 puntos)*
Comparación de los algoritmos	Están contempladas todas las comparaciones posibles. El lenguaje es el adecuado. *(1 punto)*	Se ha hecho una comparación parcial de los algoritmos. El lenguaje no siempre es el adecuado. *(0.5 puntos)*	No se ha realizado la comparación. El lenguaje empleado es inadecuado. *(0 puntos)*
Modelización	La modelización, los cálculos y la interpretación del resultado son correctos y están bien expresados. *(1.5 puntos)*	Hay algún cálculo incorrecto, pero el error es menor. Si no hubiera sido por ese error, el resultado sería el esperado. *(1 punto)*	El planteamiento no es correcto o hay cálculos erróneos, en algún caso con errores graves. *(0 puntos)*
Presentación	El trabajo es legible, incluye todos los apartados. Es fácil seguir la línea de razonamiento empleada. *(1.5 puntos)*	Se puede seguir la línea de razonamiento, pero cuesta trabajo. *(1 punto)*	Faltan apartados obligatorios. La redacción es engorrosa y no se puede seguir la línea de razonamiento. *(0 puntos)*

Cuestiones teóricas de los exámenes

De acuerdo con las normas de evaluación, en todos los exámenes se pueden preguntar cuestiones teóricas. En estas cuestiones se pueden pedir:

- definiciones de conceptos del temario.
- enunciados de resultados del temario.
- demostración de algunos de los resultados que se indican a continuación, razonamientos similares o casos particulares de los mismos.

Concretamente, los resultados cuya demostración podrá pedirse en los exámenes (salvo cambios imprevistos, que se anunciarán con antelación) son los que se relacionan a continuación (la referencia numérica coincide con la que aparece en esta guía):

Tema 1: Sucesiones de números reales.

- Proposición 1.1.1: Toda sucesión convergente está acotada.
- Ejemplo 1.1.3 (b): Estudio de la convergencia de las sucesiones geométricas.
- Proposición 1.1.6: Propiedades de desigualdades.
- Proposición 1.2.10: Jerarquía de infinitos (hay que saber demostrar todas las desigualdades; ver ejemplos 1.2.3 al 1.2.9).
- Proposición 1.2.15 (e): $a_n \ll b_n$ entonces $a_n + b_n \sim b_n$.
- Proposición 1.2.19: Relación entre mucho menor e igual orden con O grande.

Tema 2: Ecuaciones en diferencias.

- Proposición 2.3.2 (a)

Tema 4: Series numéricas.

- Ejemplo 4.1.4: Convergencia de las series geométricas.
- Proposición 4.1.6: Condición necesaria de convergencia de series.
- Proposición 4.2.3 (a) y Corolario 4.2.4 (a): Criterio integral (caso decreciente), desigualdades y consecuencias.
- Ejemplo 4.2.5 y Proposición 4.2.8: Estudio de las series armónicas.
- Proposición 4.2.15: Criterio de la raíz.

Tema 5: Aproximación local de funciones: Polinomio de Taylor.

- Proposición 5.1.1: Construcción y unicidad del polinomio de Taylor:
- Desarrollos en serie de Taylor de las funciones: $1/(1-x)$, e^x, $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ (ver ejemplos 5.2.1, 5.2.3 y 5.2.5).

Tema 6: Aproximación global de funciones: Polinomio interpolador.

- Proposición 6.3.3: Cota del error en la interpolación lineal a trozos.

Tema 7: Integración.

- Proposición 7.1.2: Continuidad de funciones definidas como integrales.
- Ejemplos 7.3.3 y 7.3.4: Convergencia de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ y $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{px}\,dx$.

Tema 1

Sucesiones de números reales

Teoría

En Informática muchos problemas se modelizan en términos de sucesiones. Por ejemplo, la complejidad de un algoritmo se suele expresar como una función del número de datos de entrada, que es una variable discreta que toma valores en el conjunto $\mathbb{N}$. Así, $a(n)$ puede denotar el coste (en tiempo de ejecución o número de instrucciones) de ejecutar el algoritmo sobre n datos. Estudiando propiedades de $a(n)$ podemos conocer el comportamiento del algoritmo. Sobre todo interesan aquellas propiedades que nos permiten afirmar algo sobre $a(n)$ para valores grandes de n.

1.0 Preliminares

Definición 1.0.1 (Sucesión)
Una *sucesión de números reales* es una aplicación $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ o bien $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

Además de la notación $a(n)$, habitual para funciones, se utilizan también $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente a_n.

Los números reales a_0, a_1, a_2, ... se llaman *términos de la sucesión*.

Para definir una sucesión es necesario dar una regla que permita calcular a_n para cada número natural n. Esto se puede hacer *de modo explícito* y *por recurrencia*.

Ejemplo 1.0.2
La sucesión $[0, 2, 4, 6, \dots]$ de los números pares se puede definir dando la expresión explícita de su término general $a_n = 2n$ si $n \geq 0$.

La misma sucesión se puede definir recursivamente, expresando cada término en función de los anteriores y proporcionando los valores iniciales necesarios: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2$ si $n \geq 0$.

En general, una *progresión aritmética*, $[a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \dots]$, se puede definir explícitamente por $a_n = a + nd$ si $n \geq 0$ y recursivamente por $a_0 = a$, $a_n = a_{n-1} + d$ si $n \geq 1$.

De modo análogo, una *progresión geométrica*, $[a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots]$, se puede definir explícitamente por $a_n = ar^n$ si $n \geq 0$ $(r \neq 0)$ y recursivamente por $a_0 = a$, $a_n = ra_{n-1}$ si $n \geq 1$.

Ejemplo 1.0.3
A veces, para definir una sucesión se listan sus primeros términos, deteniéndose cuando la regla de formación parece evidente. Tal es el caso de la sucesión $[1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, -1/6, \dots]$,

cuya expresión explícita puede ser $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ si $n > 0$ o también $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ si $n \geq 0$.

Ejemplo 1.0.4
La sucesión $a_n = n!$ si $n \geq 0$ se puede definir recursivamente por $a_0 = 1$, $a_n = na_{n-1}$ si $n \geq 1$.

Ejemplo 1.0.5
La sucesión de Fibonacci [1] $[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots]$ se puede definir recursivamente por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, si $n \geq 0$. Más adelante se verá cómo obtener una expresión explícita equivalente.

Definición 1.0.6 (Sucesión acotada)

(a) Se dice que una sucesión a_n está *acotada superiormente* si y sólo si el conjunto de sus términos está acotado superiormente, es decir, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Se dice que una sucesión a_n está *acotada inferiormente* si y sólo si el conjunto de sus términos está acotado inferiormente, es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Se dice que una sucesión a_n está *acotada* si y sólo si lo está superior e inferiormente, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.0.7

(a) La sucesión $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ está acotada, pues $|a_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

(b) La sucesión de Fibonacci no está acotada, pues $a_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{2, 3, 4\}$, cosa que puede probarse por inducción, luego para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$.

Definición 1.0.8 (Sucesión monótona)
Se dice que una sucesión a_n es

$$\left.\begin{array}{r} \text{creciente} \\ \text{decreciente} \\ \text{estrictamente creciente} \\ \text{estrictamente decreciente} \end{array}\right\} \text{ si y sólo si para todo } n \in \mathbb{N} \left\{\begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \\ a_n < a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1} \end{array}\right.$$

En cualquiera de estos casos se dice que la sucesión es *monótona*.

Ejemplo 1.0.9

(a) La sucesión de los números pares es estrictamente creciente.

(b) La sucesión $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ no es creciente ni decreciente.

(c) La sucesión de Fibonacci, a partir de $n = 2$, es estrictamente creciente.

(d) La sucesión $a_n = \left[\dfrac{n+20}{10}\right]$, donde $[x]$ denota la parte entera de x, es creciente pero no estrictamente.

[1] Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci (1180-1250).

Definición 1.0.10 (Límite de una sucesión)

(a) SUCESIÓN CONVERGENTE: Se dice que un número real l es *límite* de una sucesión a_n si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \varepsilon$$

Es decir, para cualquier valor positivo arbitrariamente pequeño (el número real ε) existe un término de la sucesión (el que ocupa el lugar n_0) a partir del cual todos distan del límite menos que ese valor.

Si $l \in \mathbb{R}$ es límite de a_n, se dice que la sucesión es *convergente* o que *converge a* l y se nota $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim a_n = l$ o $a_n \to l$.

(b) SUCESIÓN DIVERGENTE: Se dice que una sucesión es divergente si no es convergente. Dentro de las sucesiones divergentes distinguimos dos tipos: las que poseen límite ∞ o $-\infty$ y las que no.

Se dice que una sucesión divergente a_n tiene límite ∞ (respectivamente, $-\infty$) si y sólo si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n > M \quad (\text{respectivamente, } a_n < M)$$

Es decir, para cada valor (el número real M) existe un término de la sucesión (el que ocupa el lugar n_0) a partir del cual todos están por encima (respectivamente, por debajo) de dicho valor.

Si límite de a_n es ∞ (respectivamente, $-\infty$), se dice que la sucesión es *divergente a* ∞ o que *diverge a* ∞ (respectivamente, $-\infty$) y se nota $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim a_n = \infty$ o $a_n \to \infty$ (resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim a_n = -\infty$ o $a_n \to -\infty$).

Ejemplo 1.0.11

(a) Una sucesión *constante*, $a_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es convergente y tiene por límite la propia constante c.

(b) La sucesión $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ es convergente y tiene límite 0.

(c) La sucesión de los números pares, $a_n = 2n$, diverge a ∞.

(d) La sucesión $a_n = -n$ diverge a $-\infty$.

(e) La sucesión $a_n = (-1)^n$, formada por $[1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots]$, es divergente y no tiene límite, ni finito ni infinito.

Nota 1.0.12

(a) De la definición se deduce que $\lim a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim(a_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n - l| = 0$.

(b) El carácter de una sucesión (convergente o divergente) y su límite, cuando existe, no dependen de sus primeros términos.

(c) Si $\lim a_n = l$ entonces $\lim a_{n+k} = l$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.0.13

Las sucesiones

$$a_n = \begin{cases} -n & \text{si} \quad n \in \{1, \ldots, 1000\} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad n \geq 1001 \end{cases}$$

y $b_n = \dfrac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tienen el mismo carácter.

Proposición 1.0.14
Si una sucesión tiene límite, finito o infinito, éste es único.

Proposición 1.0.15 (Álgebra de límites finitos)
Si a_n y b_n convergen a a y b respectivamente, entonces:

(a) Sean $c, d \in \mathbb{R}$, entonces $c \cdot a_n + d \cdot b_n \to c \cdot a + d \cdot b$.

(b) $a_n b_n$ converge a $a \cdot b$.

(c) Si $b \neq 0$, la sucesión $\dfrac{a_n}{b_n}$ está definida a partir de cierto término y converge a $\dfrac{a}{b}$.

(d) Si $a > 0$, $a_n^{b_n}$ converge a a^b.

Proposición 1.0.16
(a) Si a_n converge a $l \in \mathbb{R}$ y f es una función continua en l, entonces $f(a_n)$ converge a $f(l)$.

(b) Si $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función tal que existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, entonces la sucesión $f(n)$ tiene también límite l.

Ejemplo 1.0.17
(a) Puesto que la sucesión $\dfrac{n-1}{2n}$ converge a $\dfrac{1}{2}$ y la función logaritmo neperiano es continua en $(0, \infty)$, entonces la sucesión $\ln(\dfrac{n-1}{2n})$ converge a $\ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

(b) Como $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, entonces, por el resultado 1.0.16(b), $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} = 0$. Sin embargo el recíproco no es cierto pues la sucesión $\operatorname{sen}(\pi n)$ es convergente a 0 pero no existe $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\pi x)$.

Nota 1.0.18 (Álgebra de límites infinitos)
El álgebra de límites de sucesiones, cuando alguno de los límites que aparecen es infinito, es análoga al álgebra de límites finitos, con las excepciones siguientes, llamadas indeterminaciones:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

Para resolver muchas de estas indeterminaciones es útil el siguiente resultado.

Proposición 1.0.19 (Regla de L'Hôpital[2])
Sean $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Si existe $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y ambos coinciden.

Un resultado análogo se verifica cuando $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$.

[2]Guillaume François Antoine, Marqués de l'Hôpital, matemático francés (1661-1704).

Ejemplo 1.0.20
Al intentar calcular el límite de la sucesión $\sqrt[n]{n}$ aplicando las propiedades del álgebra de límites se obtiene $\lim \sqrt[n]{n} = \lim n^{1/n} = (\lim n)^{\lim(1/n)} = \infty^0$, que es una indeterminación.

Para resolverla, y teniendo en cuenta que $\sqrt[n]{n} > 0$ para todo $n > 0$, se toman logaritmos en la expresión inicial, $\ln \sqrt[n]{n} = \ln n^{1/n} = \frac{1}{n} \ln n = (\ln n)/n$, y a continuación límites,

$$\lim \frac{\ln n}{n} = \frac{\lim \ln n}{\lim n} = \frac{\infty}{\infty},$$

con lo que se obtiene otra indeterminación que puede resolverse por la regla de L'Hôpital. Se consideran las funciones derivables $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x$, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.

Es decir, $\ln \lim \sqrt[n]{n} = \lim \ln \sqrt[n]{n} = 0$, de donde se deduce que $\lim \sqrt[n]{n} = e^0 = 1$.

Nota 1.0.21
En general $\lim \sqrt[n]{p(n)} = 1$, siendo $p(n)$ un polinomio con coeficiente positivo en el término de mayor grado.

1.1 Resultados generales

Proposición 1.1.1
Toda sucesión convergente está acotada.

Demostración.
El resultado es consecuencia de la definición de límite.

Sea a_n una sucesión convergente y llamemos l a su límite. Por definición,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \varepsilon.$$

En particular, tomamos $\varepsilon = 1$, por ejemplo. Para dicho ε existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica $|a_n - l| < 1$. De aquí se deduce que $-1 < a_n - l < 1$ para todo $n \geq n_0$ y en consecuencia $l - 1 < a_n < l + 1$. Así $a_n \in (l - 1, l + 1)$ para todo $n \geq n_0$.

Por otro lado, como el conjunto $\{a_0, \ldots, a_{n_0}\}$ es finito estará acotado, y pongamos que m y M son sus cotas inferior y superior respectivamente.

Por tanto, todo término de la sucesión a_n verificará que $\min\{l-1, m\} \leq a_n \leq \max\{l+1, M\}$, que es lo que queríamos demostrar.

□

El siguiente resultado se enuncia sin demostración.

Proposición 1.1.2
(a) *Toda sucesión monótona y acotada es convergente.*

(b) *Toda sucesión monótona creciente y no acotada tiene límite* ∞.

(c) Toda sucesión monótona decreciente y no acotada tiene límite $-\infty$.

La proposición anterior es muy útil para probar la existencia de límites en el caso de sucesiones definidas de modo recursivo. Por ejemplo:

Ejemplo 1.1.3

(a) (i) La sucesión

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad n = 1 \\ \dfrac{a_{n-1}}{2} + 1 & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

es convergente pues es monótona decreciente y acotada inferiormente (ambas cuestiones se probarían por inducción sobre n). Por tanto a_n tiene límite finito, pongamos l. Tomando límites en la relación de recurrencia $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2} + 1$, se tiene, aplicando propiedades del álgebra de límites, que $l = \dfrac{l}{2} + 1$. Por tanto $l = 2$.

(ii) La sucesión recurrente $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n/2 + 3/4$ es creciente y acotada, como se puede probar por inducción, luego converge. Llamando l al límite y tomando límites en la relación de recurrencia, se obtiene la ecuación $l = l/2 + 3/4$, cuya solución $l = 3/2$ debe ser el límite.

(b) La sucesión geométrica $a_n = r^n$ es convergente si y sólo si $r \in (-1, 1]$. Además

$$\lim a_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r = 1 \\ 0 & \text{si} \quad |r| < 1 \\ \infty & \text{si} \quad r > 1 \\ \nexists & \text{si} \quad r \leq -1 \end{cases}$$

Demostración.
Lo demostraremos por casos:

- Si $r = 1$, la sucesión es la constante $[1, 1, 1, \ldots]$, que tiene límite 1.
- Si $0 \leq |r| < 1$, la sucesión $|r|^n$ es monótona decreciente y acotada pues $|r|^n < 1$, para todo $n > 1$. Luego es convergente.

  Una forma de calcular el límite consiste en definir recursivamente la sucesión. Así, tenemos que $|a_n| = |r|\,|a_{n-1}|$. Tomando límites en la relación anterior tenemos que $l = |r|\,l$, de donde $l\,(|r| - 1) = 0$. Como $|r| \neq 1$, entonces $0 = l = \lim\limits_{n\to\infty} |r|^n$, de donde $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.
- Si $r > 1$, la sucesión a_n es monótona creciente y no acotada (pues por reducción al absurdo, si estuviera acotada sería convergente y el único límite posible es $l = 0$, imposible en este caso). Por tanto, si $r > 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$, esto es, la sucesión diverge a ∞.
- Si $r \leq -1$ la sucesión es divergente pues no posee límite: los términos pares forman una sucesión monótona creciente de términos positivos mientras que los términos impares forman una sucesión monótona decreciente de términos negativos.

□

(c) Se puede probar, aunque no es trivial, que la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente y acotada, por tanto converge. Su límite es, por definición, el número e.

Proposición 1.1.4
Si a_n está acotada y b_n converge a 0, entonces $a_n b_n$ converge a 0.

Demostración.
Tenemos que ver que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad |a_n\, b_n| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Fijemos un $\varepsilon > 0$, y veamos que para dicho ε existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica $|a_n\, b_n| < \varepsilon$.

De la hipótesis tenemos que:

- a_n está acotada, esto es, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| < M$.
- b_n converge a 0, esto es, si tomamos $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica $|b_n| < \varepsilon'$.

Combinando los dos resultados anteriores se tiene que, para todo $n \geq n_0$,

$$|a_n\, b_n| = |a_n|\ |b_n| < M\varepsilon' = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

como se quería demostrar.

$\square$

Ejemplo 1.1.5
La sucesión $c_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})}{n}$ tiene límite 0 pues se puede expresar como el producto de dos sucesiones: una de ellas acotada, $a_n = \operatorname{sen}(n\dfrac{\pi}{2})$, y la otra, $b_n = \dfrac{1}{n}$, con límite cero.

Proposición 1.1.6

(a) *Si $\lim a_n = l < m$ (respectivamente, $l > m$), entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $a_n < m$ (respectivamente, $a_n > m$).*

(b) *Si $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y a_n es convergente, entonces $\lim a_n \geq 0$.*

(c) *Si $a_n \geq b_n$ para todo n y ambas sucesiones son convergentes, entonces $\lim a_n \geq \lim b_n$.*

Demostración.
Probaremos el apartado (a) para mostrar cómo pueden extraerse consecuencias de la definición de límite.

Puesto que $a_n \to l$, si tomamos $\varepsilon = m - l > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica $|a_n - l| < \varepsilon$. De aquí se deduce que $-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ y en consecuencia $a_n < l + \varepsilon = l + (m - l) = m$. $\square$

Proposición 1.1.7 (Regla del sandwich)

(a) *Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim a_n = \lim c_n$, entonces b_n converge al mismo límite que a_n y c_n.*

(b) Si $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim a_n = \infty$*, entonces* $\lim b_n = \infty$.

(c) Si $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim b_n = -\infty$*, entonces* $\lim a_n = -\infty$.

Demostración.
Probaremos el apartado (a). Los restantes se dejan como ejercicio para el curioso lector.

La tesis es que $\lim b_n = \lim c_n$ o, equivalentemente, $\lim(b_n - c_n) = 0$. Por tanto habrá que probar que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad |b_n - c_n| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Fijemos un $\varepsilon > 0$.

- Como $a_n \leq b_n \leq c_n$ entonces $0 \leq c_n - b_n \leq c_n - a_n$.
- Como $\lim a_n = \lim c_n$ entonces $\lim(c_n - a_n) = 0$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|c_n - a_n| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$.

Por tanto, para todo $n \geq n_0$

$$|c_n - b_n| \leq |c_n - a_n| < \varepsilon$$

como se quería probar. □

Ejemplo 1.1.8
(a) La sucesión $\frac{n!}{n^n}$ converge a 0, ya que

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\cdots 1}{n\,n\cdots n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{1}{n} \leq \underbrace{1 \cdots 1}_{n-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

y las sucesiones 0 y $\frac{1}{n}$ convergen a 0.

(b) La sucesión $\sqrt[n]{n^{2n}+1}$ tiene límite infinito, ya que $n^2 \leq \sqrt[n]{n^{2n}+1}$ y $\lim n^2 = \infty$.

1.2 Órdenes de magnitud

Los programas son implementaciones de algoritmos. Distintos programas pueden resolver un mismo problema, así pues surge la necesidad de poder compararlos por algún método, que puede ser teórico o empírico. Dentro del modo empírico, una forma estándar de comparar programas es elegir un conjunto de datos de entrada "típico" y ver cómo de rápida es la ejecución de cada programa propuesto. Lo malo de estos tests empíricos es que dependen fuertemente

- de la implementación realizada del algoritmo (un cambio de una línea de código de un programa puede afectar a la rapidez de la ejecución), y
- de la máquina en la que se ejecutan (dos programas distintos que resuelvan un mismo problema ejecutados en una máquina y luego en otra pueden dar conclusiones diferentes).

Una alternativa muy útil a los tests empíricos consiste en comparar algoritmos en lugar de programas, esto es, analizar la complejidad de los algoritmos. Por ejemplo, si diseñamos algún algoritmo para ordenar los elementos de una lista de tamaño n, podemos considerar una función de n, $a(n)$, que mida el número de operaciones elementales realizadas por el algoritmo sobre listas de tamaño n. La función anterior nos permite medir la rapidez con la que dicho algoritmo lleva a cabo esa tarea pues nos da una estimación del coste computacional del algoritmo. Otra pregunta que cabe plantearse es: y si hubiera varios algoritmos para resolver un mismo problema, ¿cómo podemos decidir cuál es mejor?

En esta sección desarrollaremos las bases matemáticas para comparar complejidades de algoritmos, esto es, los fundamentos matemáticos para contestar a esta última cuestión.

Definición 1.2.1 (Sucesión mucho menor que otra)
Se dice que la sucesión a_n es *mucho menor* que la sucesión b_n, y se nota $a_n \ll b_n$, si y sólo si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Esta definición implica que los términos de la sucesión b_n deben ser no nulos a partir de uno de ellos.

Ejemplo 1.2.2

(a) $100n^2 \ll n^3$, $1 - \frac{1}{n} \ll 100n^2$ y $1 - \frac{1}{n} \ll n^3$.

(b) En general, si $a_n \ll b_n$ y $b_n \ll c_n$, entonces $a_n \ll c_n$.

(c) $\frac{1}{n} \ll 1 - \frac{1}{n}$.

(d) $2\sqrt{n} \ll \frac{n}{3} - \operatorname{sen} n$.

(e) $\operatorname{sen} n \ll \ln n$.

Ejemplo 1.2.3
Si $0 < c < d$ entonces $n^c \ll n^d$. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^c}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{d-c}} = 0.$$

Ejemplo 1.2.4
Si $0 < c < d$ entonces $c^n \ll d^n$, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{d^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^n = 0.$$

Ejemplo 1.2.5
Veamos que $\ln n \ll n^p$ para todo $p > 0$.

Aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene que para todo $p > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{px^{p-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{px^p} = 0.$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0$.

Ejemplo 1.2.6
También con la regla de L'Hôpital es inmediato comprobar que $\lim \dfrac{n}{e^n} = 0$, y por tanto $n \ll e^n$.

Ejemplo 1.2.7
Si $p > 0$ y $r > 1$ entonces $n^p \ll r^n$. En efecto, razonando de manera análoga al ejemplo anterior, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{r^x} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{r^{x/p}}\right)^p = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{r^{x/p}(1/p)\ln r}\right)^p = 0.$$

Luego $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{r^n} = 0$.

Ejemplo 1.2.8
Para todo $r > 1$, $r^n \ll n!$.

En efecto, consideremos la sucesión $a_n = r^n/n!$, que se puede definir recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \frac{r}{n} a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Ahora es fácil comprobar que $a_n < a_{n-1}$ para $n > r$ y por lo tanto (a_n) es monótona decreciente para n suficientemente grande. Como además $a_n \geq 0$ para todo n, se concluye que (a_n) es convergente. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n} \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = 0.$$

Por tanto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0$.

Ejemplo 1.2.9
Como ya se vio en el ejemplo 1.1.8, aplicando la regla del sandwich se deduce que $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$ y por lo tanto $n! \ll n^n$.

Los ejemplos anteriores se pueden agrupar para obtener el siguiente resultado:

Proposición 1.2.10 (Jerarquía de infinitos)
Para todo $0 < c < d$ *y todo* $1 < r < s$ *se verifica*

$$\ln n \ll n^c \ll n^d \ll r^n \ll s^n \ll n! \ll n^n.$$

La jerarquía de sucesiones anterior no es exhaustiva.

Definición 1.2.11 (Sucesiones del mismo orden)
Se dice que la sucesión a_n es *del mismo orden* que la sucesión b_n, y se nota $a_n \sim b_n$, si y sólo si $\lim \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| = l \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Nota 1.2.12

- Esta definición implica que los términos de ambas sucesiones deben ser no nulos a partir de uno de ellos.
- Si $a_n \ll b_n$ entonces $a_n \not\sim b_n$.

- Si $a_n \sim b_n$ entonces ni a_n es mucho menor que b_n ni b_n es mucho menor que a_n.

Ejemplo 1.2.13

(a) $2n^2 \sim 3n^2 + 1$.

(b) $\dfrac{2n^2}{\sqrt{n^3}} \sim \sqrt{n}$.

(c) $\ln n^2 \not\sim n$.

(d) Si $r > 1$, $\dfrac{n^3 + r^{2n}}{r^n} \sim r^n$.

Cuando se trabaja con varias sucesiones y se necesita compararlas, resulta cómodo sustituir una de ellas por otra con el mismo orden que la inicial pero que tenga una expresión más simple (prescindiendo de sumandos, algunas constantes, etc.).

Definición 1.2.14 (Orden de magnitud)
Se denomina *orden de magnitud* de una sucesión a otra sucesión, cuya expresión sea lo más sencilla posible, y que sea del mismo orden que la sucesión dada.

Para la obtención del orden de magnitud pueden ser útiles las siguientes propiedades:

Proposición 1.2.15 (Propiedades)

(a) Si $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $a_n \sim |a_n|$ y $\alpha a_n \sim a_n$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

(b) $a_n \sim b_n$ y $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$.

(c) Si $a_n \sim a'_n$ y $b_n \sim b'_n$ entonces

- $\dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{a'_n}$.
- $a_n b_n \sim a'_n b'_n$.
- $a_n \ll b_n \Rightarrow a'_n \ll b'_n$.

(d) $a_n \ll b_n$, $c_n \sim c'_n \Rightarrow a_n c_n \ll b_n c'_n$.

(e) $a_n \ll b_n \Rightarrow a_n + b_n \sim b_n$.

Demostración.
Demostramos solamente el apartado (e):

Puesto que $a_n \ll b_n$ se tiene que $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$. Entonces $\lim \dfrac{a_n + b_n}{b_n} = \lim \dfrac{a_n}{b_n} + \lim \dfrac{b_n}{b_n} = 1$. Por lo tanto, $a_n + b_n \sim b_n$. □

Ejemplo 1.2.16
Vamos a determinar el orden de magnitud de la sucesión $a_n = 3 \ln n^n + 2n^2$. Se tiene que:

(a) $3 \ln n^n \sim \ln n^n = n \ln n$.

(b) $2n^2 \sim n^2$.

Como $n \ln n \ll n^2$, por la proposición anterior, $a_n \sim n^2$.

En análisis de algoritmos se utiliza otra clasificación de las sucesiones, ligeramente distinta de las relaciones anteriores, que permite comparar más sucesiones. Esta clasificación, realizada utilizando un criterio más general, se estudia seguidamente.

Definición 1.2.17 (Notación o grande)
Se dice que la sucesión a_n es una *o grande* de la sucesión b_n, o que a_n está *dominada asintóticamente* por b_n, y se nota $a_n \in \mathrm{O}(b_n)$, si y sólo si existen un número real M y un número natural n_0 tales que $|a_n| \leq M|b_n|$ para todo $n \geq n_0$.

Nota 1.2.18
Obsérvese que, dada una sucesión (b_n):

- $\mathrm{O}(b_n)$ es un conjunto de sucesiones:

$$\mathrm{O}(b_n) = \{a_n \,/\, \exists\, M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ |a_n| \leq M|b_n| \quad \forall n \geq n_0\}$$

- $b_n \in \mathrm{O}(b_n)$.
- Si $b_n \neq 0$ a partir de cierto término, $a_n \in \mathrm{O}(b_n)$ equivale a decir que $\dfrac{a_n}{b_n}$ está acotada.
- Geométricamente, la relación $a_n \in \mathrm{O}(b_n)$ significa que, a partir de cierto término, la gráfica de la sucesión $|a_n|$ se halla por debajo de la gráfica de $|b_n|$ multiplicada por una cierta constante, $M > 0$.
- Desde el punto de vista algorítmico, si $a_n \in \mathrm{O}(b_n)$ y a_n y b_n definen las funciones de coste de dos algoritmos A y B respectivamente, entonces para problemas de tamaño n_0 o mayores, el coste de la ejecución del algoritmo A nunca será superior a M veces lo que cueste la ejecución del algoritmo B.

El siguiente resultado muestra que la notación o grande generaliza simultáneamente las relaciones "ser mucho menor" y "ser del mismo orden".

Proposición 1.2.19
Dadas dos sucesiones a_n y b_n, si $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right|$ converge, entonces $a_n \in \mathrm{O}(b_n)$. En particular,

(a) si $a_n \ll b_n$, entonces $a_n \in \mathrm{O}(b_n)$ y $b_n \notin \mathrm{O}(a_n)$.

(b) si $a_n \sim b_n$, entonces $a_n \in \mathrm{O}(b_n)$ y $b_n \in \mathrm{O}(a_n)$.

Demostración.
Basta recordar que si la sucesión $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right|$ converge, entonces está acotada. □

Ejemplo 1.2.20
Como consecuencia de la proposición anterior y de los ejemplos ya vistos sobre las relaciones ser mucho menor y ser del mismo orden, es inmediato verificar que:

(a) $100n^2 \in \mathrm{O}\,(n^3)$, pero $n^3 \notin \mathrm{O}\,(100n^2)$.

(b) $\dfrac{1}{n} \in \mathrm{O}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$, pero $1 - \dfrac{1}{n} \notin \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(c) Para todo $p > 0$, $\ln n \in \mathrm{O}(n^p)$, pero $n^p \notin \mathrm{O}(\ln n)$.

(d) $\operatorname{sen} n \in \mathrm{O}(\ln n)$, pero $\ln n \notin \mathrm{O}(\operatorname{sen} n)$.

(e) $2n^2 \in \mathrm{O}(3n^2 + 1)$ y $3n^2 + 1 \in \mathrm{O}(2n^2)$.

(f) $\dfrac{2n^2}{\sqrt{n^3}} \in \mathrm{O}(\sqrt{n})$ y $\sqrt{n} \in \mathrm{O}\left(\dfrac{2n^2}{\sqrt{n^3}}\right)$.

Ejemplo 1.2.21
Las sucesiones $(a_n) = (1, 1, 1, \cdots)$ y $(b_n) = (1, 2, 1, 2, \cdots)$, no son del mismo orden, ni una mucho menor que la otra pues no existe el límite $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$. Sin embargo, se verifica que

- $b_n \in \mathrm{O}(a_n)$ y
- $a_n \in \mathrm{O}(b_n)$.

Ejemplo 1.2.22
Una sucesión a_n está acotada si y sólo si $a_n \in \mathrm{O}(1)$. Dicho de otro modo, $\mathrm{O}(1)$ está formado por el conjunto de todas las sucesiones acotadas. En particular, $\mathrm{O}(1)$ contiene al conjunto de todas las sucesiones convergentes, así como a las sucesiones (a_n) y (b_n) del ejemplo 1.2.21.

Ejemplo 1.2.23
Las sucesiones $(a_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \cdots)$ y $(b_n) = (0, 2, 0, 2, \cdots)$ verifican que $a_n \notin \mathrm{O}(b_n)$ y $b_n \notin \mathrm{O}(a_n)$, por lo que no son comparables con la relación "o grande". Sin embargo, como ambas sucesiones están acotadas, se tiene que $a_n \in \mathrm{O}(1)$ y $b_n \in \mathrm{O}(1)$.

Proposición 1.2.24
La relación ser una o grande, definida en el conjunto de las sucesiones, es reflexiva y transitiva:

(a) $a_n \in \mathrm{O}(a_n)$

(b) Si $a_n \in \mathrm{O}(b_n)$ *y* $b_n \in \mathrm{O}(c_n)$, *entonces* $a_n \in \mathrm{O}(c_n)$.

Para analizar el orden de magnitud de una sucesión, a veces es útil descomponerla en otras más sencillas y estudiar cada componente. Las siguientes propiedades ayudan en esta tarea.

Proposición 1.2.25
(a) Si $a_n,\ c_n \in \mathrm{O}(b_n)$, *entonces* $a_n + c_n \in \mathrm{O}(b_n)$.

(b) Si $a_n \in \mathrm{O}(b_n)$, *entonces* $ca_n \in \mathrm{O}(b_n)$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

(c) Si $a_n \in \mathrm{O}(b_n)$ *y* $c_n \in \mathrm{O}(d_n)$, *entonces* $a_n c_n \in \mathrm{O}(b_n d_n)$.

Las propiedades (a) y (b) indican que el conjunto $\mathrm{O}(a_n)$ es un subespacio vectorial del $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las sucesiones.

Ejemplo 1.2.26
Aplicando las propiedades anteriores se prueba que $\dfrac{1 + \operatorname{sen} n}{4n^2 + n - 20} \in \mathrm{O}(1/n^2)$, pues

- $1 + \operatorname{sen} n \in \mathrm{O}(1)$.

- $\dfrac{1}{4n^2+n-20} \sim \dfrac{1}{n^2}$ y por lo tanto $\dfrac{1}{4n^2+n-20} \in \mathrm{O}(\dfrac{1}{n^2})$.

Nota 1.2.27
Conviene tener en cuenta que en análisis de algoritmos:

(a) En ocasiones se abusa de la notación, y suele escribirse $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, en lugar de $a_n \in \mathrm{O}(b_n)$. Por ejemplo: $n \ln n + n^2 = n^2 + \mathrm{O}(n \ln n) = \mathrm{O}(n^2)$. En cualquier caso, esta manera de manipular los órdenes, en la asignatura de AMYMN, será considerada un error.

(b) La complejidad de un algoritmo puede encuadrarse en alguno de los casos siguientes que, puesto que aparecen con frecuencia, se designan con nombres particulares:

Orden	Nombre
$\mathrm{O}(1)$	Constante
$\mathrm{O}(\ln n)$	Logarítmica
$\mathrm{O}(n)$	Lineal
$\mathrm{O}(n^2)$	Cuadrática
$\mathrm{O}(r^n),\ r > 1$	Exponencial
$\mathrm{O}(n!)$	Factorial

Problemas

Problema 1.0
Hallar, en caso de que existan, los límites de las sucesiones siguientes:

(a) $\dfrac{\sqrt{3n^3+1}}{2n^2+n}$	(b) $n\,e^{-n}$	(c) $\dfrac{\ln n}{2n^2+n}$
(d) $(-1)^{n-1}+\cos(n\pi)$	(e) $\cos(n\pi/2)$	(f) $(-7/9)^n$
(g) $(-1)^n+\dfrac{3n^2-5}{n^2}$	(h) $\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{(n+1)^2}{n}$	(i) $\dfrac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n}$
(j) $\left(\dfrac{4n+1}{7n-2}\right)^{\frac{3n^2+1}{n+2}}$	(k) $\left(\dfrac{n-2}{n+3}\right)^n$	(l) $\left(\dfrac{n^2+1}{n-1}\right)^{3/n}$

Problema 1.1
Proponer sucesiones a_n que verifiquen cada una de las propiedades siguientes o justificar que no pueden existir:

(a) $a_n \to 3$ *y* $a_n < 3$ *para todo* n.

(b) $a_n \to 1$ *y* $a_n > 0'5$ *a partir de un término.*

(c) $a_n \to 2$ *y* $a_n < 1'5$ *para todo* n.

(d) $a_n \to 0$ *y* a_n *no es monótona.*

Problema 1.2
Sean x_n e y_n dos sucesiones de números reales estrictamente positivos.

(a) *Si* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = l \in \mathbb{R}$ *y* $\lim x_n = \infty$, *¿cuánto vale* $\lim y_n$*?*

(b) *Si* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \infty$ *y* x_n *está acotada, ¿cuánto vale* $\lim y_n$*?*

Problema 1.3
Demostrar que la sucesión $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ *está acotada y deducir que* $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}$ *converge a cero.*

Problema 1.4
Demostrar que la sucesión $\dfrac{\ln(n!)}{n\ln(n)}$ *está acotada y deducir que* $\dfrac{\ln(n!)}{n\ln^2(n)}$ *converge a cero.*

Problema 1.5
Calcular el límite de la sucesión

$$\frac{n^{2/3}\,\mathrm{sen}(n!)}{n+1}.$$

Problema 1.6
Calcular el límite de la sucesión

$$\frac{(n+3)\cos(n\pi)}{\sqrt{n^3+2}}.$$

Problema 1.7
Usar la regla del sandwich para calcular los límites de las sucesiones siguientes:

(a) $\sqrt[n]{2^n+3^n}$ (b) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}+\dfrac{2n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{2n}{n^2+n}$

(c) $\sqrt[n]{n^n+2^n}$ (d) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Problema 1.8
Usar la regla del sandwich para calcular los límites de las sucesiones siguientes:

(a) $\sqrt[n]{2^n+5^n}$ (b) $a_n = \dfrac{3n}{\sqrt{n^4+1}}+\dfrac{3n}{\sqrt{n^4+2}}+\cdots+\dfrac{3n}{\sqrt{n^4+n}}$

(c) $\sqrt[n]{n^n+3^n}$ (d) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}$

Problema 1.9
Estudiar la convergencia y calcular los límites de las sucesiones recurrentes siguientes:

(a) $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots$ (b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+2a_n} \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

Problema 1.10
Estudiar la convergencia y calcular los límites de las sucesiones recurrentes siguientes:

(a) $\sqrt{3},\ \sqrt{3\sqrt{3}},\ \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}},\ldots$ (b) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2+3a_n} \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

Problema 1.11
Probar que $\log_a(n) \sim \log_b(n)$ *para todo* $a, b \in \mathbb{R}$, *con* $a, b > 1$.

Problema 1.12
Probar que $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \sim \ln(n)$.

Problema 1.13
Determinar el orden de magnitud de cada una de las sucesiones siguientes y ordenarlas según dicho orden:

(a) $\dfrac{\sqrt{n^5+1}}{2n+\sqrt{n^3}}$ (b) $\dfrac{3n^2+6n-1}{\sqrt{n^2+1}}\ln(3n^2)$ (c) $\dfrac{n!+n^n}{n^2}$

(d) $\left(n^2+3^n\right)\ln(2n^2)$ (e) $\dfrac{\ln(n^n)}{7n+\ln(n)}\cdot\dfrac{1}{3\ln(n)+1}$ (f) $\dfrac{n}{3}-\cos(n)$

(g) $4^{n-1}+(-4)^n n$ (h) r^n+n^2 con $|r|<1$ (i) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Problema 1.14
Determinar el orden de magnitud de cada una de las sucesiones siguientes y ordenarlas según dicho orden:

(a) $\dfrac{\sqrt{n^5+1}}{2\sqrt{n^3}+n^2}$ (b) $\dfrac{1}{\cos(n)+n}$ (c) $\dfrac{(n+1)!}{\ln(n^n)+n^2}$

(d) $\dfrac{\ln(n^n)+\sqrt{n+1}}{4n^2+n-1}$ (e) $\dfrac{3\sqrt{n}}{\ln(n+1)}\cdot\dfrac{\ln(n^n)}{\sqrt{n^3}}$ (f) $3^n - n3^{n-1}$

(g) $ne^{3n}-3^n$ (h) r^n+n^2 con $1<|r|<3$ (i) $(n+1)^{3/2}-n^{3/2}$

Problema 1.15
Para cada una de las sucesiones a_n siguientes, determinar, si existen, todos los números $p\in\mathbb{R}$ tales que $a_n\in O(n^p)$ y estudiar si $a_n\sim n^p$ para algún valor de p:

(a) $a_n=\begin{cases} n & \textit{si } n \textit{ es impar}\\ n^2 & \textit{si } n \textit{ es par}\end{cases}$ (b) $a_n=n\cos(n\pi/2)$ (c) $a_n=(-2)^n+2^n$

Problema 1.16
Para cada una de las sucesiones a_n siguientes, determinar, si existen, todos los números $p\in\mathbb{R}$ tales que $a_n\in O(n^p)$ y estudiar si $a_n\sim n^p$ para algún valor de p:

(a) $a_n=e^n-e^{3n}$ (b) $a_n=(-1)^n n^3+n^3$ (c) $a_n=n^2\cos(n\pi/2)-n^3\operatorname{sen}(n\pi/2)$

Problema 1.17
Un ordenador procesa n datos en n^2 segundos. Una preparación previa de los datos, que se tarda 1 hora en hacer, permite procesar n datos en $(n+1)\log_2(n)$ segundos. Indicar razonadamente si para valores grandes de n interesa la preparación.

Problema 1.18
Los tiempos de ejecución de dos algoritmos que resuelven el mismo problema con n datos de entrada son, respectivamente, 2^n y $3n^4+6$. Indicar razonadamente cuál de los dos algoritmos es más rápido para valores grandes de n.

Práctica

Objetivos

- Manejar las herramientas de Derive que permiten generar términos de sucesiones y analizar su comportamiento.
- Modelar y resolver problemas usando sucesiones y sus propiedades.
- Comparar órdenes de magnitud de diferentes sucesiones.
- Desarrollar la intuición para reconocer sucesiones del mismo orden.

1.1 Estudio de sucesiones con Derive

Consideramos las sucesiones $a_n = \dfrac{1}{3^n}$, $b_n = n^3 - 30n^2 + 216n$ y $c_n = \cos(n\pi)$.

Para trabajar con ellas, se escribe el término general en la línea de edición o, si se les quiere asignar un nombre, se escribe utilizando := de la siguiente forma: `A(n) := 1/3 ^n .`

(a) Calcular el límite de las anteriores sucesiones cuando n tiende a infinito.

(Para calcular un límite con Derive:

(i) iluminamos la expresión de la que queremos calcular el límite,

(ii) seleccionamos el icono $\boxed{\text{lim}}$ de la barra de herramientas o la opción **Cálculo/Límites** del menú,

(iii) indicamos la variable (n) y el punto (`inf`),

(iv) pulsamos **Simplificar**.)

(b) Para generar una lista de términos de una sucesión se puede usar la función `VECTOR` de Derive, cuya sintaxis es

`VECTOR(expresión, variable, inicio, fin, paso).`

Al evaluar esta expresión, Derive devuelve el resultado de calcular `expresión` para los valores de la `variable` comprendidos entre `inicio` y `fin`, en saltos de longitud `paso`. El `paso` es opcional y su valor por defecto es 1.

(i) Obtener los 10 primeros términos de la sucesión a_n. Para ello, escribir la expresión adecuada utilizando la función `VECTOR` y evaluarla con la opción del menú **Simplificar/Normal** o con el icono $\boxed{=}$. Para obtener los valores en notación decimal, valores aproximados, se utiliza la opción del menú **Simplificar/Aproximar** o con el icono $\boxed{\approx}$. ¿Cuál de los dos resultados nos da los valores exactos de los términos de la sucesión a_n?

(ii) Obtener los términos $b_{10}, b_{20}, b_{30}, ..., b_{100}$ de la sucesión b_n.

(iii) Obtener los 20 primeros términos de la sucesión c_n y obtener los 10 primeros términos de c_n para n impar.

(iv) Estudiar analíticamente la monotonía de las sucesiones anteriores.

(c) La función `VECTOR` permite generar no sólo los términos de una sucesión x_n, sino también tablas de la forma $[n, x_n]$, lo que tiene diversas aplicaciones.

(i) A partir de la definición de límite de una sucesión, justificar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < 10^{-2}$ para $n \geq n_0$.

(ii) **Aproximar** la expresión `VECTOR([n, a(n)], n, 1, 10)` para encontrar dicho n_0:

$n_0 =$

¿Por qué se puede asegurar que no existe ningún $n \geq n_0$ tal que $a_n \geq 10^{-2}$?

Observación: También puede obtenerse información sobre n_0 resolviendo la inecuación $a_n < 10^{-2}$ utilizando la opción `SOLVE`. (Este método no siempre se podrá emplear, pues depende de la expresión de a_n.)

(iii) **Aproximar** la expresión `VECTOR([n, a(n)], n, inicio, fin, paso)`, eligiendo los valores adecuados de `inicio, fin, paso`, para hallar el menor n_1 tal que $a_n < 10^{-15}$ para

$n \geq n_1$. Dar el valor exacto de a_{n_1}.

$$n_1 = \qquad\qquad , \, a_{n_1} =$$

(iv) A partir de la definición de límite de una sucesión, justificar que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n > 10^2$ para $n \geq n_2$.

Aproximar la expresión `VECTOR([n, b(n)], n, inicio, fin, paso)`, eligiendo los valores adecuados de `inicio, fin, paso`, para hallar n_2:

$$n_2 =$$

Justificar que no existe ningún $n \geq n_2$ tal que $b_n \leq 10^2$.

(d) La función `VECTOR` también permite obtener simultáneamente los términos de varias sucesiones y tantear los valores de n para los que una desigualdad es cierta. Simplificar las expresiones:

$$\texttt{VECTOR}([\texttt{n}, \texttt{a(n)}, \texttt{b(n)}, \texttt{c(n)}],\ \texttt{n},\ \texttt{1},\ \texttt{10}),$$

$$\texttt{VECTOR}([\texttt{n}, \texttt{a(n)} < \texttt{10}^{-2}, \texttt{b(n)} > \texttt{10}^{2}],\ \texttt{n},\ \texttt{1},\ \texttt{20}).$$

y comprobar que se obtienen los mismos resultados que en los apartados anteriores.

1.2 Sucesiones definidas recursivamente con IF

Las sucesiones definidas recursivamente se pueden implementar en Derive con la función condicional `IF`, cuya sintaxis es

$$\boxed{\texttt{IF(condición, acción, alternativa)}.}$$

Por ejemplo, para definir la sucesión factorial,

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n\, a_{n-1} & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

se escribe `A(n) := IF(n=0, 1, n A(n-1))`.

(a) Escribir en Derive la sucesión factorial como se ha indicado anteriormente y obtener sus 10 primeros términos, comenzando en $n = 0$.

(b) Definir una función `B(n)` que proporcione los términos de la sucesión que modeliza el problema de las Torres de Hanoi:

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n = 1 + 2b_{n-1} & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

`B(n) :=`

Obtener sus 10 primeros términos.

1.3 Problemas

1.3.1 Opción 1

(a) Sea la sucesión $x_n = 2\arctan(n^2 - 1)$. (DERIVE utiliza la función `ATAN(x)`para calcular $\arctan(x)$.)

(i) Calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(ii) Justificar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \pi| < 10^{-3}$ para $n \geq n_0$. Encontrar el menor n_0 que lo verifique, y probar que no existe ningún $n \geq n_0$ tal que $|x_n - \pi| \geq 10^{-3}$.

(b) Una expedición española desea escalar una montaña en Afganistán. El primer día ascienden 2.400 metros y montan el campamento base. A partir de entonces se endurecen las condiciones climatológicas y sólo pueden ascender cada día $\dfrac{1000}{\sqrt{n}}$ metros, donde n indica que es el n-ésimo día de ascenso ($n \geq 2$). Se pide:

(i) Dar una expresión recursiva para el número de metros ascendidos en n días.

(ii) Sabiendo que el Everest mide 8882 metros, justificar que a ese ritmo podrían ascender cualquier montaña del planeta.

(iii) Si la montaña afgana que desean coronar tiene 5.900 metros, calcular qué día alcanzan la cima.

(c) El espacio en memoria, medido en KB, que usan dos algoritmos para resolver el mismo problema con n datos es $a_n = n^2 + \ln(n^3)$ para uno de ellos y $b_n = 5n\ln(n^7)$ para el otro.

(i) Determinar qué algoritmo conviene usar para los valores $n = 100$ y $n = 500$.

(ii) Si se suele trabajar con problemas con una cantidad arbitrariamente grande de datos, ¿qué algoritmo conviene usar?

(iii) Si en cada ejecución se tienen que procesar a lo sumo 1000 datos y la memoria disponible es de 256 MB (1 MB=1024 KB), ¿alguno de los algoritmos garantiza que no agotará la memoria?

1.3.2 Opción 2

(a) Sea la sucesión $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

(i) Calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(ii) Usar DERIVE para obtener la expresión decimal del número e, que DERIVE representa como ê, y obtener el primer término de la sucesión x_n que coincida con e hasta el primer decimal.

(iii) ¿Existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - e| < 10^{-3}$ para $n \geq n_0$? Sabiendo que x_n es monótona, encontrar el menor n_0 que lo verifique y un valor aproximado de x_{n_0}.

(b) Una planta de tratamiento de basuras quiere reciclar todo el papel que hay almacenado en Valdemingómez. El primer mes de funcionamiento recicla 40 toneladas. A partir de entonces, debido al deterioro de las instalaciones, cada mes sólo puede reciclar $\frac{50}{n}$ toneladas, donde n indica que es el n-ésimo mes de funcionamiento ($n \geq 2$). Se pide:

(i) Dar una expresión recursiva para el número de toneladas recicladas en n meses.

(ii) Suponiendo que la máxima cantidad de papel que puede tener almacenada una planta de residuos es 400 toneladas, justificar que a ese ritmo se puede reciclar el papel contenido en cualquier planta.

(iii) Si Valdemingómez tiene 280 toneladas de papel, calcular qué mes termina de reciclarlo.

(c) El número de operaciones que realizan dos algoritmos A y B para resolver el mismo problema con n datos es $a_n = 70^n + 4n^{70} - 1$ para A y $b_n = n!$ para B.

(i) Determinar qué algoritmo conviene usar para los valores $n = 10$ y $n = 50$.

(ii) Si se pueden recibir cantidades arbitrariamente grandes de datos, ¿qué algoritmo conviene usar?

(iii) Si un ordenador realiza 10^{100} operaciones por segundo, ¿cuál es el número máximo de datos que puede tener el problema para poder resolverlo en un día utilizando el algoritmo A?

1.4 Órdenes de magnitud

1.4.1 Opción 1

(a) Justificar que los siguientes pares de sucesiones verifican las relaciones que se indican, calculando los límites que sean necesarios:

- $n^5 \cdot 3^n \ll 4^n$
- $3^n \ln(n) \ll n^n$
- $3^{2n+1} + 5^n \sim 9^n$
- $\ln(n^6 + n^4) \sim \ln(n)$
- $\dfrac{(2n+4)n!}{(n+1)^3} \sim (n-2)!$

- $n^2\ln(n^8) \in O(\sqrt{n^5})$

- $\dfrac{\sqrt{n^6+5}(n+2)!}{(n-2)!} \in O(n^7)$

(b) Para cada una de las siguientes sucesiones, hallar otra del mismo orden lo más simple posible:

- $a_n = (-3)^n \dfrac{(n+2)!}{1+n^2} \sim$
- $b_n = 2^{3n+5} \dfrac{n^3}{n^3+7} \sim$
- $c_n = \ln(\frac{3}{n}) \sim$
- $d_n = \dfrac{\sqrt{n^5}}{n+4} + \ln(n) \sim$
- $e_n = \dfrac{(n^3 - 6n^5 + 1)}{2n+1} \ln(n) \sim$
- $f_n = \dfrac{n^{n-3}(n+2)!}{(n-1)!} \sim$
- $g_n = \ln(n^4 + 2^n) \sim$
- $h_n = \dfrac{\sqrt{n+3}\ln(n)}{\ln(n^3+2)} \sim$
- $i_n = \dfrac{\sqrt{9^n} + (n+1)!}{n + \ln(n)} \sim$

(c) Ordenar según su magnitud las sucesiones del apartado anterior.

(d) En cada uno de los casos siguientes, encontrar, si existen, todos los valores $p \in \mathbb{R}$ de modo que la sucesión correspondiente sea $O(n^p)$ o justificar que no existen.

- $a_n = n^3 + \sqrt{n^7}$

- $b_n = (-2)^{4n+1}$

- $c_n = \dfrac{n^5 \ln(n)}{\sqrt{4n^2+1}}$

1.4.2 Opción 2

(a) Justificar que los siguientes pares de sucesiones verifican las relaciones que se indican calculando los límites que sean necesarios:

- $n^7 \cdot 2^n \ll 3^n$

- $2^n \ln(n) \ll n!$
- $2^{3n+1} + 3^n \sim 8^n$
- $\ln(n^5 + n^2) \sim \ln(n)$
- $\dfrac{(3n+1)n!}{(n+1)^2} \sim (n-1)!$
- $n \ln(n^7) \in O(\sqrt{n^3})$
- $\dfrac{\sqrt{n^4+3}(n+1)!}{(n-1)!} \in O(n^4)$

(b) Para cada una de las siguientes sucesiones, hallar otra del mismo orden lo más simple posible:

- $a_n = \dfrac{\sqrt{n^5-1}}{\sqrt{n+1}} \quad \sim$
- $b_n = \sqrt{n^3} + \ln(n) \sim$
- $c_n = \ln(\frac{1}{n}) \quad \sim$
- $d_n = \dfrac{n^3 - n^2 + 1}{n^2+1} \ln(n) \quad \sim$
- $e_n = 3\ln(n) + 2^{3n} \quad \sim$
- $f_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{\ln(n^2+1)} \quad \sim$
- $g_n = \ln(n^2 + 2^n) \quad \sim$
- $h_n = \dfrac{n^{n-2}(n+1)!}{(n-1)!} \ln(n) \quad \sim$
- $i_n = 2^n \dfrac{(n+1)!}{1+2n} \quad \sim$

(c) Ordenar según su magnitud las sucesiones del apartado anterior.

(d) En cada uno de los casos siguientes, encontrar, si existen, todos los valores $p \in \mathbb{R}$ de modo que la sucesión correspondiente sea $O(n^p)$ o justificar que no existen.

- $a_n = n^2 + \sqrt{n^5}$
- $b_n = (-2)^{3n+1}$
- $c_n = \dfrac{n^3 \ln(n)}{\sqrt{n^2+1}}$

Tema 2

Ecuaciones en diferencias

Teoría

Como ya se ha visto, una forma usual de definir sucesiones es por recurrencia, escribiendo cada término en función de algunos anteriores y proporcionando condiciones iniciales, que son los casos base de la recurrencia.

La relación de recurrencia que aparece en este tipo de definición es un caso particular de lo que se conoce como ecuación en diferencias: una igualdad que liga los términos de una sucesión.

Estas definiciones tienen el inconveniente de que hacen más complicado el evaluar los términos de la sucesión (en especial para valores grandes de n), así como estudiar la convergencia, calcular el límite o el orden de magnitud de la sucesión.

En este tema se presentan algunos casos en los que es sencillo obtener la forma explícita de una sucesión a partir de una forma recurrente.

2.1 Ecuaciones en diferencias

Definición 2.1.1

- Una *ecuación en diferencias de orden* k es una igualdad de la forma

  $$f(x_{n+k}, x_{n+k-1}, \ldots, x_{n+1}, x_n, n) = 0$$

  donde la *incógnita* de la ecuación es la sucesión x_n.

- *Resolver la ecuación* es hallar la forma explícita de todas las sucesiones que satisfacen esa igualdad. Esto se llama *solución general* de la ecuación. Una solución concreta de la ecuación se llama *solución particular* y generalmente se obtiene imponiendo *condiciones iniciales* en la solución general.

- Una ecuación en diferencias de orden k se dice *lineal* si y sólo si se puede expresar de la forma

  $$x_{n+k} + a_{k-1}(n)x_{n+k-1} + \cdots + a_1(n)x_{n+1} + a_0(n)x_n + b(n) = 0$$

  donde a_0, a_1, ..., a_{k-1} y b son funciones de n y $a_0(n) \neq 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

  Si $b(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la ecuación se llama *homogénea*.

  Si las funciones a_i son constantes, la ecuación se llama *de coeficientes constantes*.

Ejemplo 2.1.2
La ecuación $x_n - x_{n-1} - n = 0$ es de orden 1, lineal, no homogénea, con coeficientes constantes. Admite, entre otras, la solución $x_n = 1 + 2 + \cdots + n$, esto es, x_n es la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de razón 1. El resultado de dicha suma es $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Nota 2.1.3
Se recuerda que la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética es:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n} = \frac{a_{k+1} + a_{k+n}}{2} n$$

que se lee: la semisuma de los extremos multiplicada por el número de términos.

Se recuerda que la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica de razón r es:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n} = \begin{cases} \dfrac{a_{k+1} - r\, a_{k+n}}{1-r} & \text{si} \quad r \neq 1 \\ \\ n\, a_{k+1} & \text{si} \quad r = 1. \end{cases}$$

Ejemplo 2.1.4
La ecuación en diferencias $x_n = x_{n-1} + 1$ es de orden 1, lineal, no homogénea, con coeficientes constantes.

Esta ecuación admite como solución la sucesión de los números naturales $[0, 1, 2, 3, \ldots]$, pero también cualquier sucesión de la forma $[a, a+1, a+2, a+3, \ldots]$, $a \in \mathbb{R}$. En este caso, $x_n = n$ es una solución particular de la ecuación, mientras que $x_n = a + n$, con $a \in \mathbb{R}$, es la solución general, a expensas de demostrar que no existen otras.

Ejemplo 2.1.5
La ecuación $x_{n+2} = (n+2)x_{n+1}$ es de orden 1, lineal y homogénea, pero no es de coeficientes constantes. Admite, entre otras, la solución $x_n = n!$.

Ejemplo 2.1.6
La ecuación $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ es de orden dos, lineal, homogénea, con coeficientes constantes. Admite como solución, entre otras, la sucesión de Fibonacci.

Ejemplo 2.1.7
La ecuación $x_n - x_{n-1}^2 = 0$ es de orden 1, no lineal. Su solución general es $x_n = c^{2^n}$, con $c \in \mathbb{R}$.

En este tema se van a resolver únicamente dos tipos de ecuaciones en diferencias: las de primer orden lineales y las de segundo orden lineales, homogéneas, con coeficientes constantes.

2.2 Ecuaciones lineales de primer orden

Una ecuación en diferencias lineal de primer orden es una ecuación del tipo

$$x_{n+1} = a(n)x_n + b(n).$$

El proceso se resolución de ecuaciones de primer orden lineales lo dividimos en tres fases. En primer lugar resolveremos las ecuaciones homogéneas, es decir, aquellas para las cuales $b(n) = 0$; en segundo lugar las ecuaciones no homogéneas para las que sea $a(n) = 1$, y finalmente procederemos a resolver el caso general, basándonos en los dos casos anteriores. La prueba de las tres proposiciones puede hacerse por inducción.

Proposición 2.2.1 (Ecuaciones homogéneas)
Una ecuación en diferencias lineal de primer orden homogénea se puede escribir en la forma

$$x_{n+1} = a(n)x_n$$

Aplicando la regla recursiva sucesivas veces se obtiene:

$$x_{n+1} = a(n)x_n = a(n)\,a(n-1)\,x_{n-1} \;=\; a(n)\,a(n-1)\,a(n-2)\,x_{n-2} = \dots$$

Así, el término n-ésimo se obtiene multiplicando el primer término por el producto acumulado de los $a(k)$ anteriores. Por lo tanto, la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $x_{n_0} = c$ es

$$x_n = a(n-1)\,\cdots\,a(n_0+1)\,a(n_0)\,c \;=\; c\prod_{j=n_0}^{n-1} a(j) \qquad \forall n \geq n_0$$

Nota 2.2.2

- Por convenio un producto sin factores vale 1.
- Si algún $a(i)$ es nulo entonces $x_n = 0$ para todo $n > i$.
- Si se usa directamente la fórmula del producto hay que tener cuidado con la forma en que está escrita la ecuación (no es lo mismo $x_{n+1} = a(n)x_n$ que $x_n = a(n)x_{n-1}$) y con el rango que debe recorrer el producto.

Ejemplo 2.2.3
La ecuación $x_n = 2x_{n-1}$, con condición inicial $x_0 = 3$, tiene por solución $x_n = 3\prod_{j=0}^{n-1} 2 = 3(2^n)$. La comprobación, por inducción, es trivial.

Proposición 2.2.4 (Ecuaciones de la forma $x_{n+1} = x_n + b(n)$)
Puesto que

$$x_{n+1} = x_n + b(n) = x_{n-1} + b(n-1) + b(n) = x_{n-2} + b(n-2) + b(n-1) + b(n) = \dots,$$

el término n-ésimo se obtiene sumando el primer término a la suma acumulada de los $b(k)$ anteriores. Por lo tanto, la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $x_{n_0} = c$ es

$$x_n = c + b(n_0) + b(n_0+1) + \cdots + b(n-1) = c + \sum_{j=n_0}^{n-1} b(j) \qquad \forall n \geq n_0$$

Ejemplo 2.2.5
La ecuación $x_n = x_{n-1} + n$, con condición inicial $x_3 = c$, tiene por solución

$$x_n = c + 4 + 5 + \cdots + n = c + \frac{(4+n)(n-3)}{2} \qquad \forall n \geq 3$$

(Obsérvese que $4 + 5 + \cdots + n$ es la suma de los términos de una progresión aritmética).

Comprobación por inducción sobre n:

Paso base: si $n = 3$, se tiene que $c + \frac{(4+n)(n-3)}{2} = c$.

Paso de inducción: supongamos que la expresión obtenida es válida para $n \geq 3$, esto es que

$$x_n = c + \frac{(4+n)(n-3)}{2}. \text{ (H.I.)}$$

Entonces, usando la relación de recurrencia y la hipótesis de inducción (H.I.) se tiene que:

$$x_{n+1} = x_n + n + 1 = c + \frac{(4+n)(n-3)}{2} + n + 1 = c + \frac{n^2 + 3n - 10}{2} = c + \frac{(5+n)(n-2)}{2}.$$

Es decir

$$x_{n+1} = c + \frac{(4 + (n+1))((n+1) - 3)}{2}$$

y la igualdad es válida para $n + 1$.

Proposición 2.2.6 (Caso general)
Una ecuación en diferencias lineal de primer orden de la forma

$$x_{n+1} = a(n)x_n + b(n)$$

se puede resolver por el llamado método de variación de las constantes, que consiste en:

- *Resolver la ecuación homogénea* $x_{n+1} = a(n)x_n$*, con lo que se obtiene una solución del tipo* $x_n = c\prod_{j=n_0}^{n-1} a(j)$.
- *Hacer variar la constante* c*, convirtiéndola en una sucesión* (c_n) *y buscar esta sucesión obligando a* $x_n = c_n \prod_{j=n_0}^{n-1} a(j)$ *a verificar la ecuación completa* $x_{n+1} = a(n)x_n + b(n)$*. Simplificando, se obtiene una ecuación, para la sucesión* c_n*, del tipo de las de la proposición 2.2.4.*
- *Resolver la ecuación en* c_n*, teniendo en cuenta que debe ser* $c_{n_0} = x_{n_0}$.
- *Una vez obtenida* (c_n)*, la solución de la ecuación completa vendrá dada por la sucesión* $x_n = c_n \prod_{j=n_0}^{n-1} a(j)$ *para* $n \geq n_0$.

Nota 2.2.7
Para la solución de la ecuación lineal completa $x_{n+1} = a(n)x_n + b(n)$, también se puede dar una fórmula, similar a la dada en los otros dos casos, pero que tiene el inconveniente de ser difícil de recordar.

Concretamente la solución de la ecuación con la condición inicial $x_1 = c$ es:

$$x_n = \prod_{i=1}^{n-1} a(i) \left(c + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{\prod_{j=1}^{i} a(j)} \right) \qquad (n > 1).$$

Como se ha comentado antes, si se usa esta fórmula hay que ser cuidadoso con la forma en que está escrita la ecuación y la condición inicial.

Ejemplo 2.2.8
Se trata de resolver la ecuación $x_n = (n-1)x_{n-1} + n!$, con condición inicial $x_1 = 2$.

Como es una ecuación completa seguimos los pasos del algoritmo general:

- La ecuación homogénea es $x_n = (n-1)x_{n-1}$ y su solución, con $x_1 = c$, es

$$x_n = (n-1)(n-2)\dots 1 \cdot c = c(n-1)!$$

(Nótese que

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 \cdot x_1 = 1 \cdot c, \\ x_3 &= 2 \cdot x_2 = 2 \cdot 1 \cdot c, \\ x_4 &= 3 \cdot x_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c \end{aligned}$$

etc.)

- Ahora se hace variar la constante c y se debe buscar una sucesión c_n que haga que $x_n = c_n(n-1)!$ sea solución de la completa. Para ello se debe cumplir la ecuación:

$$c_n(n-1)! = (n-1)c_{n-1}(n-2)! + n!$$

Dividiendo por $(n-1)!$ resulta

$$c_n = c_{n-1} + n.$$

- Se resuelve ahora esta ecuación, en c_n, teniendo en cuenta que debe ser $c_1 = x_1 = 2$, con lo que

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + 2 + 3 + \cdots + n = 2 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= 2 + \frac{2+n}{2} \cdot (n-1) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

- La solución de la ecuación lineal completa es $x_n = c_n(n-1)!$, es decir:

$$x_n = \left(1 + \frac{n(n+1)}{2}\right)(n-1)! = (n-1)! + \frac{(n+1)!}{2}.$$

Se puede probar por inducción que esta sucesión es solución de la ecuación propuesta.

2.3 Ecuaciones de segundo orden

Para finalizar, vamos a ver cómo se resuelven algunas ecuaciones en diferencias de orden dos, concretamente las lineales, homogéneas y con coeficientes constantes, es decir aquellas que se pueden escribir de la forma:

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0 \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Definición 2.3.1 (Polinomio característico de una ecuación homogénea)
Dada una ecuación en diferencias de segundo orden homogénea con coeficientes constantes

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0,$$

al polinomio $x^2 + ax + b$ se le llama *polinomio característico* de la ecuación.

Proposición 2.3.2
Sean z_1 y z_2 las raíces del polinomio característico de la ecuación en diferencias homogénea de segundo orden $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$.

(a) Si z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$, $z_1 \neq z_2$, la solución general es $x_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) Si $z_1 = z_2 \in \mathbb{R}$, la solución general es $x_n = \alpha z_1^n + \beta n z_1^{n-1}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(c) Si $z_1 = \overline{z_2} = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, la solución general es $x_n = r^n(\alpha \cos(n\varphi) + \beta \operatorname{sen}(n\varphi))$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

La solución particular que satisface las condiciones iniciales $x_{n_0} = c$, $x_{n_0+1} = d$ es única y se obtiene imponiendo éstas en la solución general y resolviendo el sistema lineal de dos ecuaciones en α y β que aparece.

Demostración.
Veamos algunos elementos de la demostración, aunque no la completaremos.

(a) Si z es una raíz del polinomio característico de la ecuación, entonces $x_n = z^n$ es una solución particular:

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = z^{n+2} + az^{n+1} + bz^n = z^n(z^2 + az + b) = z^n \cdot 0 = 0.$$

(b) Si el polinomio característico tiene una raíz doble, debe ser $z = -a/2$. En este caso, $x_n = nz^{n-1}$ es también una solución particular:

$$\begin{aligned} x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n &= (n+2)z^{n+1} + a(n+1)z^n + bnz^{n-1} \\ &= z^{n-1}\left(n(z^2+az+b) + z(2z+a)\right) = z^{n-1}(n \cdot 0 + z \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

(c) Si las raíces del polinomio característico son imaginarias, $z = re^{i\varphi}$ y $z = re^{-i\varphi}$, entonces

$$x_n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi))$$

y

$$x_n = \left(re^{-i\varphi}\right)^n = r^n e^{-in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) - i \operatorname{sen}(n\varphi))$$

son dos soluciones. Combinando ambas se pueden obtener otras dos soluciones que no tienen parte imaginaria y son $x_n = r^n \cos(n\varphi)$ y $x_n = r^n \operatorname{sen}(n\varphi)$.

En definitiva, en todos los casos se generan dos soluciones particulares de la ecuación. La demostración se completa probando que cualquier otra solución se obtiene como combinación lineal de estas dos. Ésta es la parte que omitiremos. □

Ejemplo 2.3.3
La ecuación $x_{n+2} = 4x_n$ tiene por polinomio característico $x^2 - 4$, cuyas raíces son -2 y 2. Su solución general es, por tanto, $x_n = \alpha(-2)^n + \beta 2^n$.

Si se imponen las condiciones iniciales $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x_2 &= 4\alpha + 4\beta = 1 \\ x_3 &= -8\alpha + 8\beta = 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $\alpha = \beta = 1/8$. La solución particular buscada es

$$x_n = \frac{1}{8}(-2)^n + \frac{1}{8}2^n = (-1)^n 2^{n-3} + 2^{n-3} = ((-1)^n + 1)2^{n-3} \qquad \text{si } n \geq 2.$$

En esta expresión se observa que todos los términos de índice impar son 0.

Vamos a comprobar que las soluciones obtenidas verifican tanto la ecuación $x_{n+2} = 4x_n$ como las condiciones iniciales.

- Si $n = 2$: $x_2 = ((-1)^2 + 1)2^{2-3} = (2)2^{-1} = 1$.
- Si $n = 3$: $x_3 = ((-1)^3 + 1)2^{3-3} = (0)2^{-1} = 0$.
- Si $n \geq 2$: x_n verifica la relación $x_{n+2} = 4x_n$ pues
  (a) $x_{n+2} = ((-1)^{n+2} + 1)2^{n+2-3} = ((-1)^{n+2} + 1)2^{n-1}$, y
  (b) $4\, x_n = 4\,((-1)^n + 1)2^{n-3} = 2^2\,((-1)^{n+2} + 1)2^{n-3} = ((-1)^{n+2} + 1)2^{n-3+2} = x_{n+2}$.

Ejemplo 2.3.4
Para resolver la ecuación $x_{n+1} - 4x_n + 4x_{n-1} = 0$ con condiciones iniciales $x_1 = 5$ y $x_2 = 8$, se calculan las raíces del polinomio característico $x^2 - 4x + 4$, resultando la raíz doble 2, luego la solución general es $x_n = \alpha 2^n + \beta n 2^{n-1}$. A continuación se imponen las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\alpha + \beta = 5 \\ x_2 &= 4\alpha + 4\beta = 8 \end{aligned}$$

obteniéndose $\alpha = 3$ y $\beta = -1$. La solución buscada es $x_n = 3 \cdot 2^n - n\,2^{n-1}$ si $n \geq 1$.

Ejemplo 2.3.5
El problema de valores iniciales $x_n + 4x_{n-2} = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ tiene por polinomio característico $x^2 + 4$, cuyas raíces son $-2i$ y $2i = 2e^{i\pi/2}$, luego la solución general es

$$x_n = 2^n \left(\alpha \cos \frac{n\pi}{2} + \beta \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right).$$

Las condiciones iniciales llevan al sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\beta = 1 \\ x_2 &= -4\alpha = 4 \end{aligned}$$

de donde $\alpha = -1$ y $\beta = 1/2$. La solución buscada es

$$x_n = 2^n \left(-\cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right)$$

si $n \geq 1$.

Problemas

Problema 2.1
Las sucesiones siguientes son convergentes:

(a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{2^n} \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \dfrac{n}{n+1} a_{n-1} \quad \text{si } n \geq 2. \end{cases}$

¿Es posible obtener el límite a partir de la ecuación que satisface dicho límite? Resolver la ecuación en diferencias y encontrar el límite.

Problema 2.2
Las sucesiones siguientes son convergentes:

(a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{3^n} \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \dfrac{n+1}{n+3} a_{n-1} \quad \text{si } n \geq 2. \end{cases}$

¿Es posible obtener el límite a partir de la ecuación que satisface dicho límite? Resolver la ecuación en diferencias y encontrar el límite.

Problema 2.3
Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias con las condiciones iniciales que se indican. Determinar, en cada caso, el orden de magnitud de la sucesión solución.

(a) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_n = n^2 \, x_{n-1} \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+2} = x_{n+1} + 2(n+1) \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_3 = 4 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 1 \quad \text{si } n \geq 3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_n = 3x_{n-1} + 2^n \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_0 = 1/2, \quad x_1 = 1 \\ 2x_n + 4x_{n-2} = 6x_{n-1} \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \\ x_{n+2} + x_n = 2x_{n+1} \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ 2x_{n+1} - 2x_n = x_{n+2} \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x_0 = 2, \quad x_1 = 1 \\ x_{n+2} + x_n = 0 \qquad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$

Problema 2.4
Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias con las condiciones iniciales que se indican.

Determinar, en cada caso, el orden de magnitud de la sucesión solución.

(a) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = (n-1)^2\, x_{n-1} \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_3 = 5 \\ x_{n+2} = x_{n+1} + 3n \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_2 = 3 \\ x_{n-1} = 2x_{n-2} + \dfrac{1}{5} \quad \text{si } n \geq 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = nx_{n-1} + 2^{n-1}n! \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_0 = 3, \quad x_1 = -1 \\ 2x_{n+2} + 3x_{n+1} = 2x_n \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \\ x_n = -\dfrac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_0 = 1, \quad x_1 = 0 \\ x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0 \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x_0 = 0, \quad x_1 = 3 \\ x_{n+2} + x_n = 0 \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$

Problema 2.5
Los números de Fibonacci están definidos por la relación de recurrencia

$$\begin{cases} F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

(a) *Obtener una fórmula explícita para* F_n *y determinar su orden de magnitud.*

(b) *Comprobar que* $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ *siendo* $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *y* $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(c) *Demostrar que* $\lim \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = a$ *(el número* a *se denomina* razón áurea*).*

Problema 2.6
Los números de Lucas están definidos por la relación de recurrencia

$$\begin{cases} L_1 = 1, \quad L_2 = 3 \\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

(a) *Obtener una fórmula explícita para* L_n *y determinar su orden de magnitud.*

(b) *Comprobar que* $L_n = a^n + b^n$ *siendo* $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *y* $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(c) *Demostrar que* $\lim \dfrac{L_{n+1}}{L_n} = a$ *(el número* a *se denomina* razón áurea*).*

Problema 2.7
Dada una lista de n *números reales,* $[r_1, ..., r_n]$*, que deben ordenarse de menor a mayor, el* método de la burbuja *consiste en lo siguiente: si* $r_n < r_{n-1}$*, se intercambian, y en caso contrario, se dejan como estaban. Después, se compara* r_{n-1} *con su predecesor,* r_{n-2}*, y se actúa de la misma manera. Tras* $n-1$ *comparaciones de este tipo, el número más pequeño de la lista figura en primer lugar. A continuación, se aplica el mismo proceso a la lista* $[r_2, ..., r_n]$ *y se continúa hasta que toda la lista esté ordenada.*

(a) *Si a_n representa el número de comparaciones necesarias para ordenar n elementos utilizando este algoritmo, definir la sucesión a_n de forma recursiva y obtener su forma explícita.*

(b) *Comparar este algoritmo con otro de complejidad $n \ln(n)$.*

Problema 2.8
Un algoritmo emplea una instrucción para resolver un problema cuando hay un solo dato de entrada. Si el número de datos es $n \geq 2$, usa $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo. Si a_n representa el número de instrucciones para n datos de entrada, hallar $p \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \sim n^p$.

Problema 2.9
El problema de las Torres de Hanoi *consiste en lo siguiente. Se dispone de una torre de n discos de diferentes diámetros, apilados en orden decreciente en una varilla. Se trata de trasferir todos los discos a una segunda varilla, con ayuda de una tercera, moviendo sólo un disco cada vez y sin colocar ningún disco sobre otro de menor diámetro. Determinar la forma explícita del número mínimo de movimientos para resolver el problema y calcular su orden de magnitud.*

Problema 2.10
Escribir la ecuación en diferencias que representa el número de puntos de corte creados por n rectas en el plano, supuesto que no hay rectas paralelas y que no hay más de dos rectas que se corten en un punto.

Obtener la foma explícita de la sucesión correspondiente, calcular su orden de magnitud y determinar el número de puntos de corte creados por 248 rectas.

Problema 2.11
Un estudio sobre la evolución de los ciervos en una determinada comarca andaluza demuestra que el incremento de población desde un mes n hasta el mes $n+1$ es el doble del incremento desde el mes $n-1$ al n. Si el primer mes había 200 ciervos y el segundo 220, ¿cuántos ciervos habrá al cabo de n meses? Hallar el orden de magnitud de la sucesión obtenida.

Problema 2.12
Una partícula se desplaza en línea recta, y siempre en el mismo sentido, de modo que la distancia que recorre en cada segundo es el triple de la recorrida durante el segundo anterior. Si x_n representa la posición de la partícula después de n segundos (al inicio del $(n+1)$-ésimo segundo), obtener las expresiones recursiva y explícita de x_n, sabiendo que $x_0 = 1$ y $x_1 = 5$.

Práctica

Objetivos

- Reconocer los distintos tipos de ecuaciones en diferencias.
- Manejar las funciones de DERIVE que permiten resolver ecuaciones en diferencias:
  - `LIN1_DIFFERENCE`
  - `LIN2_CCF_BV`
  - `GEOMETRIC1`
- Modelar y resolver problemas utilizando las ecuaciones en diferencias.

2.1 Resolución de ecuaciones en diferencias

2.1.1 Ecuaciones de primer orden

Un virus informático se expande de modo que la diferencia entre el número de infectados el día n-ésimo y el doble del número de infectados el día anterior es n. Sabiendo que el primer día se infectan dos ordenadores, se pretende estimar la velocidad de expansión de dicho virus.

Si x_n representa el número de ordenadores infectados el n-ésimo día, se quiere:

(a) Obtener una expresión recursiva para x_n y decir qué tipo de ecuación en diferencias verifica la relación de recurrencia obtenida.

(b) Para estimar la velocidad de expansión del virus calculamos el orden de magnitud de la sucesión x_n. Puesto que la expresión anterior no nos permite hallar fácilmente su orden de magnitud, obtenemos su expresión explícita. Para ello utilizaremos la siguiente función de DERIVE:

`LIN1_DIFFERENCE(`a`, `b`, `n`, `n_0`, `c`)`, que resuelve la ecuación en diferencias lineal de primer orden $x_{n+1} = a\,x_n + b$ con la condición inicial $x_{n_0} = c$.

- Reescribir la ecuación en diferencias para poder usar correctamente esta función, y calcular la forma explícita de x_n.

- Obtener el orden de magnitud de x_n:

(c) Comprobar que la sucesión dada por DERIVE es solución de la ecuación en diferencias del apartado (a).

2.1.2 Ecuaciones de segundo orden

Se quiere determinar el orden de magnitud de la sucesión que verifica:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \ x_2 = 1 \\ 5x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2} \quad \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Para ello seguimos los pasos siguientes:

(a) Decir qué tipo de ecuación en diferencias verifica la relación de recurrencia de x_n.

(b) Para obtener la forma explícita puedes utilizar la función de DERIVE

`LIN2_CCF_BV(`a`,` b`,` r`,` n`,` n_0`,` c`,` n_1`,` d`)`, que obtiene la solución particular de la ecuación de orden 2, lineal y con coeficientes constantes

$$x_{n+2} + a\,x_{n+1} + b\,x_n = r$$

que satisface las condiciones iniciales $x_{n_0} = c$ y $x_{n_1} = d$.

Reescribir la ecuación en diferencias anterior para poder usar correctamente esta función, y calcular la forma explícita de x_n.

(c) Obtener el orden de magnitud de x_n:

2.2 Ejercicios

2.2.1 Opción 1

(a) Para cada una de las ecuaciones en diferencias siguientes, obtener su forma explícita utilizando adecuadamente las funciones de DERIVE `LIN1_DIFFERENCE` o `LIN2_CCF_BV`. Indicar en los cuadros la expresión utilizada para hallar x_n y el resultado obtenido.

(i) $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = x_n + n^3 \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$

LIN $\Big(\qquad \Big)$
$x_n =$

(ii) $\begin{cases} x_1 = 1,\ x_2 = 0 \\ x_{n+2} + 2x_{n+1} - 15x_n = 0 \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

LIN $\Big($ $\Big)$
$x_n =$

(iii) $\begin{cases} x_2 = -1 \\ x_{n-1} = 2x_{n-2} + n^2 \quad \text{si } n \geq 4 \end{cases}$

LIN $\Big($ $\Big)$
$x_n =$

(iv) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ 2^n x_{n+1} - n2^n x_n = n! \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

LIN $\Big($ $\Big)$
$x_n =$

(v) $\begin{cases} x_1 = -1,\ x_2 = 1 \\ x_n = -\dfrac{9x_{n-1} + x_{n+1}}{6} \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

LIN $\Big($ $\Big)$
$x_n =$

(vi) $\begin{cases} x_0 = -2,\ x_1 = 3 \\ x_{n+2} + 3x_{n+1} + 9x_n = 0 \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$

LIN $\Big($ $\Big)$
$x_n =$

(b) Para cada una de las sucesiones del apartado anterior, hallar una sucesión a_n del tipo n^p o r^n que sea del mismo orden que x_n, o bien tal que $x_n \in O(a_n)$, o bien justificar que no es posible:

(i)	x_n		(ii)	x_n	
(iii)	x_n		(iv)	x_n	
(v)	x_n		(vi)	x_n	

2.2.2 Opción 2

(a) Para cada una de las ecuaciones en diferencias siguientes, obtener su forma explícita utilizando adecuadamente las funciones de DERIVE `LIN1_DIFFERENCE` o `LIN2_CCF_BV`. Indicar en los cuadros la expresión utilizada para hallar x_n y el resultado obtenido.

(i) $\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_{n+1} = x_n + 2n^2 \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$

LIN $\Big($ $\Big)$
$x_n =$

(ii) $\begin{cases} x_1 = -2,\ x_2 = 0 \\ x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = 0 \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

LIN $\Big($ $\Big)$
$x_n =$

(iii) $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_n = 2x_{n-1} + 5n^3 \quad \text{si } n \geq 3 \end{cases}$

LIN $\Big($ $\Big)$
$x_n =$

(iv) $\begin{cases} x_2 = 1 \\ (n+1)x_{n+1} - (n-1)x_n = 3\,(n+1) \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

LIN $\Big($ $\Big)$
$x_n =$

(v) $\begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 4 \\ 2x_{n+2} = -4x_{n+1} + 30x_n \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

LIN $\Big($ $\Big)$
$x_n =$

(vi) $\begin{cases} x_0 = -2,\ x_1 = 2 \\ 4x_n + 2x_{n+1} + x_{n+2} = 0 \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$

LIN $\Big($ $\Big)$
$x_n =$

(b) Para cada una de las sucesiones del apartado anterior, hallar una sucesión a_n del tipo n^p o r^n que sea del mismo orden que x_n, o bien tal que $x_n \in O(a_n)$, o bien justificar que no es posible:

(i)	x_n	$\square$		(ii)	x_n	$\square$	
(iii)	x_n	$\square$		(iv)	x_n	$\square$	
(v)	x_n	$\square$		(vi)	x_n	$\square$	

2.3 Problemas

2.3.1 Opción 1

(a) La última canción del verano, pegadiza donde las haya, se dio a conocer de modo que el número total de personas que la tarareaba se triplicaba cada día. Si la compañía discográfica “Magorricoyá” lanzó la canción al mercado el 1 de junio, y el primer día se la aprendieron 1000 personas, ¿cuántas se la sabían al cabo de n días?

(b) La compañía discográfica rival “Pozyotamién” no quiso perder la clientela de ese verano, así que contraatacó con una rumbita que lanzó el 3 de junio. La expresión recursiva del número de personas que se sabían esta canción al cabo de n días era:

$$c(n) = \begin{cases} 300 & \text{si } n = 3 \\ k \cdot c(n-1) & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

¿Cuántas personas se sabían la rumba el día n? Teniendo en cuenta los posibles valores de $k > 0$, justificar cuál de las dos canciones llegó a estar antes en boca de todos.

(c) Si $k = 4$, ¿a partir de qué día se cantó más la canción que se hizo más popular?

2.3.2 Opción 2

(a) Cierto algoritmo recursivo resuelve un problema de tamaño $n \geq 3$ reduciéndolo a un problema de tamaño $n-1$ y dos problemas de tamaño $n-2$. Si a_n representa el número de instrucciones empleadas por el algoritmo para resolver el problema de tamaño n, obtener una ecuación en diferencias que debe verificar a_n (se supone que no emplea ninguna instrucción en la reducción del problema).

(b) Sabiendo que se requieren 8 instrucciones para resolver un problema de tamaño 1 y 10 instrucciones cuando $n = 2$, obtener la forma explícita de la complejidad (número de instrucciones) de dicho algoritmo.

(c) Determinar el orden de magnitud de la sucesión a_n.

(d) Se dispone de otro algoritmo que resuelve el mismo problema y cuya complejidad viene dada por $2^{n-4} \cdot 3^{n-2} + 2^n \cdot \cos(n\pi)$. Determinar qué algoritmo es preferible para valores grandes de n.

Tema 3

Resolución numérica de ecuaciones

Teoría

En las aplicaciones prácticas de las Matemáticas es habitual tener que trabajar con datos aproximados. Por ejemplo, supongamos que queremos construir un depósito cilíndrico de volumen $V = 1000$ m^3 y con una altura de $h = 5$ metros, y necesitamos saber cuál debe ser el radio de la base. Despejando r en la fórmula del volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$ se obtiene:

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{1000}{5\pi}} = \sqrt{\frac{200}{\pi}} \text{ m.}$$

Si los datos de h o de V se han obtenido por mediciones, los valores correspondientes serán aproximaciones, que pueden tener errores debidos a los instrumentos de medida.

Pero, aunque V y h fuesen exactos, el cálculo de r requiere manejar el número π, que es irracional y que normalmente se aproxima, dando lugar a un **error de redondeo**. Igualmente el cociente se redondeará para trabajar con un valor aproximado.

Finalmente, si para calcular la raíz cuadrada utilizamos el algoritmo clásico, iremos obteniendo dígitos hasta que en un determinado paso dejemos de aplicar el algoritmo y nos quedemos con una aproximación de la solución. Se produce de nuevo un error, denominado **error de truncamiento**.

Un método numérico puede definirse (informalmente) como un algoritmo que permite obtener una aproximación de la solución de un problema con una precisión arbitraria en un número finito de pasos (el número de pasos depende de cuál sea la precisión que se desee). La parte de las Matemáticas que se ocupa del estudio de los métodos numéricos se llama *Análisis Numérico* o *Cálculo Numérico*.

En todos los métodos numéricos se pretende que la precisión del resultado aumente al aumentar el número de iteraciones, de manera que se pueda obtener la solución del problema con tanta precisión como se desee. Y como hemos comentado, y hemos visto en el anterior ejemplo del cilindro, en cualquier método numérico aparecen distintos tipos de errores, que pueden ser:

(a) Errores inherentes: son debidos a los datos. Puede tratarse bien de errores de planteamiento del problema ("modelos matemáticos" inexactos) o bien de errores de medida, debidos a la inexactitud de los aparatos de precisión.

(b) Errores de redondeo: son debidos al hecho de trabajar con números aproximados.

(c) Errores de truncamiento: son debidos a la necesidad de parar en algún momento el algoritmo que aplicamos para obtener la solución aproximada que buscamos.

Dados dos números $A, a \in \mathbb{R}$, de los cuales se considera que a es una aproximación de A, se consideran dos formas de medir el error cometido:

(a) **Error absoluto** de a: $|a - A|$. Si $a < A$ se dice que la aproximación es por defecto y si $a > A$ se dice que la aproximación es por exceso.

(b) **Error relativo** de a, con $A \neq 0$: $\left|\dfrac{a - A}{A}\right|$.

En general, el valor exacto de ambos errores no se conoce y hay que conformarse con conocer una cota superior de los mismos.

Por ejemplo, si $A = \pi$

- Una aproximación por defecto es 3'14.
- Una aproximación por exceso es 3'15.
- Una cota del error absoluto de estas aproximaciones es 10^{-2}.
- Y una cota del error relativo de ambas sería $4 * 10^{-3}$, ya que $\dfrac{10^{-2}}{\pi} \leq \dfrac{4}{10}10^{-2} = 4 * 10^{-3}$.

Los problemas numéricos que estudiaremos en este tema surgen al intentar obtener soluciones de ecuaciones. Por ejemplo, para la ecuación $e^x = 1/x$ no existe una fórmula que la resuelva de manera exacta, por lo que habrá que obtener soluciones aproximadas, que conllevarán unos ciertos errores. Aplicaremos determinados algoritmos garantizando una cota de error de truncamiento.

3.1 Resolución numérica de ecuaciones

El proceso de resolución numérica de ecuaciones se divide en varias etapas:

(a) Preparación de la ecuación:

Dada una ecuación, por ejemplo $f_1(x) = f_2(x)$, se trata de reescribirla como $f(x) = 0$, siendo f una función lo más "adecuada" posible.

(b) Localización de las raíces:

Consiste en establecer un intervalo en el que existan raíces de la ecuación. Cuando la función f es continua, se puede usar el teorema de Bolzano[1] (véase 3.1.1).

(c) Separación de raíces:

Consiste en establecer intervalos que contengan una y sólo una raíz de la ecuación. Para ello se puede usar el resultado, basado en el estudio de la monotonía o la convexidad de la función, que garantiza la existencia y unicidad de solución (véase 3.1.6).

[1] Bernard Bolzano, matemático, lógico, filósofo y teólogo checo (1781–1848).

(d) Aproximación de las raíces:

Consiste en hallar valores cada vez más próximos al valor exacto de la raíz, dando una cota del error cometido tras hacer n iteraciones del algoritmo de aproximación considerado.

Para aproximar las raíces se utiliza algún método numérico (bisección, Newton[2], etc.) y para acotar el error se usan resultados generales o criterios particulares de cada método.

3.1.1 Localización y separación de raíces de una ecuación

Para localizar los intervalos en donde se encuentran las soluciones de una ecuación del tipo $f(x) = 0$, utilizaremos el siguiente resultado:

Teorema 3.1.1 (de Bolzano)
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b]$ *y tal que* $f(a)f(b) < 0$*. Entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$*.*

El punto c es una raíz de f, es decir una solución de la ecuación $f(x) = 0$. En general, no es único (véase figura 3.1).

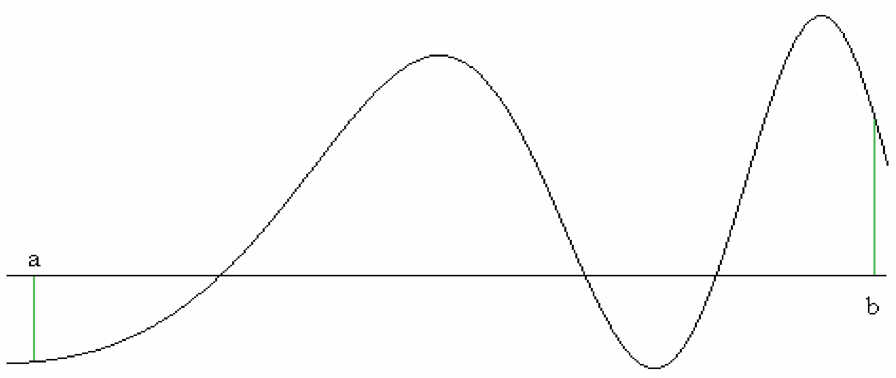

Figura 3.1: Raíces de una función.

Ejemplo 3.1.2
Para localizar las soluciones de la ecuación $3x^3 + 2x^2 - 2x = 1$, vamos a considerar la función $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 1$, que es polinómica, por lo que es continua y derivable cuantas veces sea necesario.

Como $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 2 > 1$, por el teorema de Bolzano, f tiene una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

Para saber si hay más de una raíz en ese intervalo y si la ecuación tiene más soluciones en otros intervalos, se necesitan otros resultados que se basan en el estudio de la monotonía (crecimiento o decrecimiento) o la concavidad de la función en un intervalo.

Para estudiar la monotonía (crecimiento o decrecimiento) de una función en un intervalo, puede ser útil el siguiente resultado:

Teorema 3.1.3
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b)*, entonces*

[2] Isaac Newton, científico, físico, filósofo, alquimista y matemático inglés (1643-1727).

(a) *Si* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in (a,b)$, *entonces* f *es estrictamente creciente en* $[a,b]$.

(b) *Si* $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in (a,b)$, *entonces* f *es estrictamente decreciente en* $[a,b]$.

Y para estudiar la convexidad o concavidad de f en un intervalo podemos usar:

Teorema 3.1.4
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua en* $[a,b]$ *y dos veces derivable en* (a,b), *entonces*

(a) *Si* $f''(x) \geq 0$ *para todo* $x \in (a,b)$, *entonces* f *es convexa en* $[a,b]$.

(b) *Si* $f''(x) \leq 0$ *para todo* $x \in (a,b)$, *entonces* f *es cóncava en* $[a,b]$.

Ejemplo 3.1.5
La función $f(x) = x^2$ es continua e infinitamente derivable en todo $\mathbb{R}$.

Su derivada es $f'(x) = 2x$, luego $f'(x) > 0 \iff x \in (0,\infty)$ y $f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0)$. Por lo tanto, f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0,\infty)$ (véase figura 3.2).

Como su derivada segunda es $f''(x) = 2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se deduce que f es convexa en $(-\infty,\infty)$.

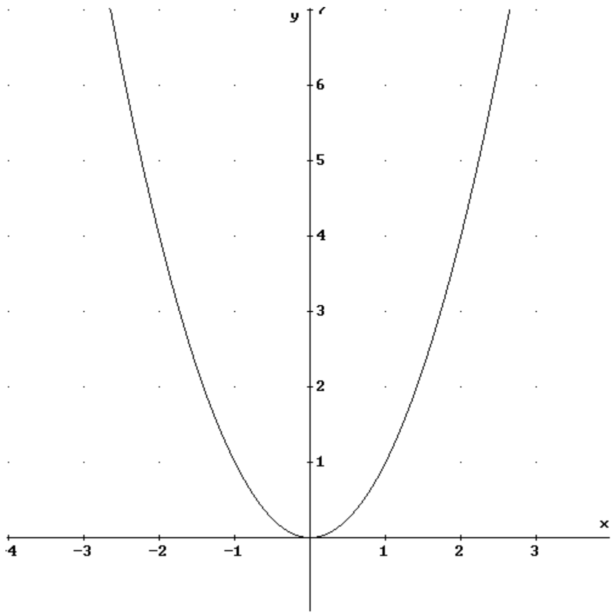

Figura 3.2: Crecimiento y convexidad.

Teorema 3.1.6
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $f(a)f(b) < 0$. *Si además se verifica una de las dos condiciones:*

(a) f *es estrictamente monótona en* $[a,b]$

(b) f *mantiene la convexidad en* $[a,b]$

entonces la ecuación $f(x) = 0$ *tiene una única solución en* (a,b).

Ejemplo 3.1.7
Se ha visto que $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 1)$. Para estudiar si es única, es fácil comprobar que $f'(x) = 9x^2 + 4x - 2$ cambia de signo en el intervalo $(0, 1)$, por lo que f no es monótona.

Sin embargo, $f''(x) = 18x + 4 > 0$ para todo $x > 0$. Entonces f es convexa en $(0, 1)$ y, como $f(0)f(1) < 0$, por el teorema 3.1.6 se puede asegurar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(0, 1)$.

Ejemplo 3.1.8
Se quiere localizar las soluciones de la ecuación $e^x = 1/x$.

En primer lugar hay que preparar la ecuación. En este caso, la ecuación dada equivale a $e^x - \frac{1}{x} = 0$ o bien a $xe^x - 1 = 0$. Se considera la segunda alternativa porque la función $f(x) = xe^x - 1$ es continua e infinitamente derivable en todo $\mathbb{R}$.

Como f es continua en $\mathbb{R}$, lo es en el intervalo $[0, 1]$. Además verifica que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$, por lo tanto el teorema de Bolzano asegura que existe una raíz de f en $(0, 1)$.

Para ver que en $[0, 1]$ esta raíz es única, basta observar que $f'(x) = e^x(1+x)$ es estrictamente positiva en $(0, 1)$ (ya que $e^x > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ y $1 + x > 0 \;\; \forall x \in [0, 1]$).

Por otra parte $f(x) < 0$ para todo $x < 0$ (ya que $xe^x < 0$ si $x < 0$, y por lo tanto $xe^x - 1 < 0$ $\forall x < 0$), luego f no tiene más raíces en $(-\infty, 0)$.

Finalmente se observa que $f'(x) = e^x(1+x) > 0$ para todo $x > 0$, en particular $\forall x > 1$, por lo tanto f es estrictamente creciente en $(1, \infty)$ y como $f(1) > 0$, se concluye que $f(x) > f(1) > 0$ $\forall x > 1$ y por tanto f tampoco tiene más raíces en $(1, \infty)$.

En definitiva f tiene una única raíz real, que está en $[0, 1]$, y por lo tanto la ecuación $e^x = \frac{1}{x}$ tiene una única solución, que está en el intervalo $[0, 1]$.

3.2 Método de bisección

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Por el teorema de Bolzano (véase 3.1.1) sabemos que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

El método de la bisección consiste en dividir por la mitad el intervalo de partida, $[a, b]$, iterando el proceso hasta encontrar la raíz o bien hasta localizarla en un intervalo de longitud menor que el error admisible. Se procede pues del siguiente modo:

- Se denota el intervalo $[a, b]$ como $[a_0, b_0]$ y se considera el punto medio, $c_0 = \dfrac{a + b}{2}$.
  - Si $f(c_0) = 0$, entonces $c = c_0$. (Hemos encontrado la solución.)
  - Si $f(c_0) \neq 0$, entonces se elige el subintervalo $[a_0, c_0]$ o $[c_0, b_0]$ en cuyos extremos f tome valores de signo opuesto. Ese intervalo se designa por $[a_1, b_1]$.
- A continuación se obtiene el punto medio del intervalo $[a_1, b_1]$ y se procede del mismo modo para obtener $[a_2, b_2]$ (véase figura 3.3).
- Reiterando el proceso se llega o bien a la raíz de la ecuación o bien a una sucesión de intervalos encajados: $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ en los cuales $f(a_i)f(b_i) < 0$, y con amplitud $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}(b - a)$.

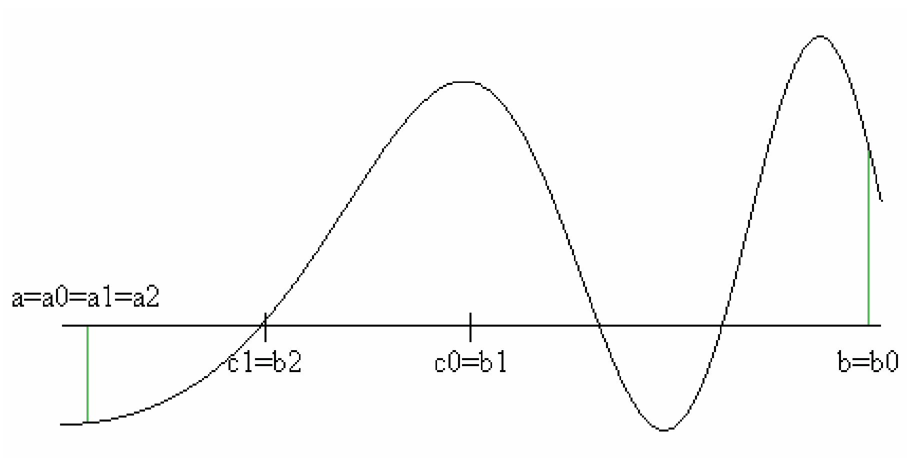

Figura 3.3: Método de bisección.

Para ver que el método converge a la raíz de la ecuación puede utilizarse el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, tal que $f(a)f(b) < 0$. Se definen recursivamente:

$$\begin{cases} a_0 = a, \quad b_0 = b & \\ c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} & \forall n \in \mathbb{N} \\ a_{n+1} = b_{n+1} = c_n & si\ f(c_n) = 0 \\ a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c_n & si\ f(c_n)f(a_n) < 0 \\ a_{n+1} = c_n, \quad b_{n+1} = b_n & si\ f(c_n)f(b_n) < 0 \end{cases}$$

En estas condiciones, las sucesiones a_n, b_n y c_n convergen al mismo límite c, que es raíz de f en $[a, b]$, y se verifican:

$$0 \le c - a_n,\ b_n - c \le \frac{b-a}{2^n} \quad y \quad |c_n - c| \le \frac{b-a}{2^{n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración.
De la definición de las sucesiones a_n, b_n y c_n se deduce que $a \le a_n \le c_n \le b_n \le b$ y que $f(a_n)f(b_n) \le 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Puesto que para cada n es $a_{n+1} = a_n$ o bien $a_{n+1} = c_n$, entonces $a_{n+1} \ge a_n$, Y análogamente, dado que $b_{n+1} = b_n$ o $b_{n+1} = c_n$, entonces $b_{n+1} \le b_n$. Por lo tanto a_n y b_n son sucesiones monótonas y acotadas. Luego ambas son convergentes.

Es fácil demostrar por inducción que $0 \le b_n - a_n \le \dfrac{b-a}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizando la regla del sandwich se obtiene que $\lim(b_n - a_n) = 0$, de donde $\lim b_n = \lim a_n$. Y teniendo en cuenta la desigualdad $a_n \le c_n \le b_n$ y aplicando de nuevo la regla del sandwich se deduce que c_n es convergente y $\lim c_n = \lim b_n = \lim a_n$.

Llamemos c a ese límite. Puesto que f es continua y $f(a_n)f(b_n) \le 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(c)f(c) = \big(f(c)\big)^2 \le 0,$$

y por lo tanto $f(c) = 0$, luego c es una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Además dado que $a_n \leq c \leq b_n$ para todo n, se tiene que:

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n} \quad \text{y} \quad 0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n},$$

o bien

$$|c - a_n| \leq \frac{b-a}{2^n} \quad \text{y} \quad |b_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n},$$

lo que significa que a_n y b_n son aproximaciones a c con un error menor que $\dfrac{b-a}{2^n}$.

Finalmente, si tomamos c_n como aproximación a la raíz c, por la definición de c_n se tiene que $|c_n - c| = |a_{n+1} - c|$ o bien $|c_n - c| = |b_{n+1} - c|$, por lo tanto

$$|c_n - c| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

$\square$

Observación 3.2.2
En las condiciones del teorema anterior, cualquier punto del intervalo $[a_n, b_n]$ es una aproximación a la solución con error menor que $\dfrac{b-a}{2^n}$, pero sólo si es el punto medio se puede asegurar que el error es menor que $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.

Ejemplo 3.2.3
Sea $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ la función del ejemplo 3.1.2. Sabemos que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución c en el intervalo $[0, 1] = [a_0, b_0]$. Si evaluamos en $c_0 = 1/2$ tenemos que

$$f(c_0) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - 1 - 1 = -\frac{9}{8} < 0,$$

por lo que $c \in [\frac{1}{2}, 1] = [a_1, b_1]$. Hacemos otros dos pasos del método de la bisección, obteniendo:

- $c_1 = \dfrac{3}{4}$, $f(c_1) = \dfrac{-7}{64} < 0$. Entonces $c \in [3/4, 1] = [a_2, b_2]$ y $c_2 = \dfrac{7}{8}$.
- $c_2 = \dfrac{7}{8}$, $f(c_2) = \dfrac{405}{512} > 0$. Entonces $c \in [3/4, 7/8] = [a_3, b_3]$ y $c_3 = \dfrac{13}{16} = 0'8125$.

Si damos $c_3 = \dfrac{13}{16}$ como aproximación de c, el error cometido será menor o igual que

$$\frac{1-0}{2^4} = \frac{1}{16} < 0'07.$$

O sea $c_3 = \dfrac{13}{16}$ es una solución aproximada de la ecuación $f(x) = 0$ con error menor que $0'07$. También se puede proponer $3/4$, $0'81$ o cualquier valor del intervalo $[a_3, b_3] = [3/4, 7/8]$ como aproximación, y la cota del error sería $1/2^3$.

Si se quiere obtener una aproximación con un error menor que 10^{-3}, basta que el número de iteraciones n verifique: $\dfrac{1-0}{2^n} < 10^{-3}$, o lo que es lo mismo, $2^n > 1000$, lo que se consigue con $n = 10$. Después de 10 iteraciones el intervalo obtenido es $[393/512, 787/1024] \approx [0'767578, 0'768554]$;

como podemos tomar como aproximación un valor cualquiera de dicho intervalo, consideramos $c \approx 0'768$.

Si se decide de antemano elegir como valor aproximado el punto medio del último intervalo, podemos ahorrar una iteración, ya que basta que $\frac{1-0}{2^{n+1}} < 10^{-3}$, lo que se consigue con $n = 9$. Esto puede ser particularmente interesante si la función es costosa de evaluar. En nuestro caso, después de 9 iteraciones el intervalo obtenido es $[393/512, 197/256]$ y el valor aproximado de la raíz será su punto medio, esto es $c_9 = 787/1024 \approx 0'7685$.

3.3 Método de Newton

Se basa en la idea de sustituir un arco pequeño de la curva $y = f(x)$ por la tangente trazada por un punto de la curva. Para presentar este método (ver figura 3.4) se eligen una función y un intervalo $[a, b]$ de modo que $f(a) < 0 < f(b)$, que la función f es convexa (con lo que se garantiza la existencia de una única raíz de f en el intervalo $[a, b]$) y que tenemos una primera aproximación x_0 a la raíz c de f.

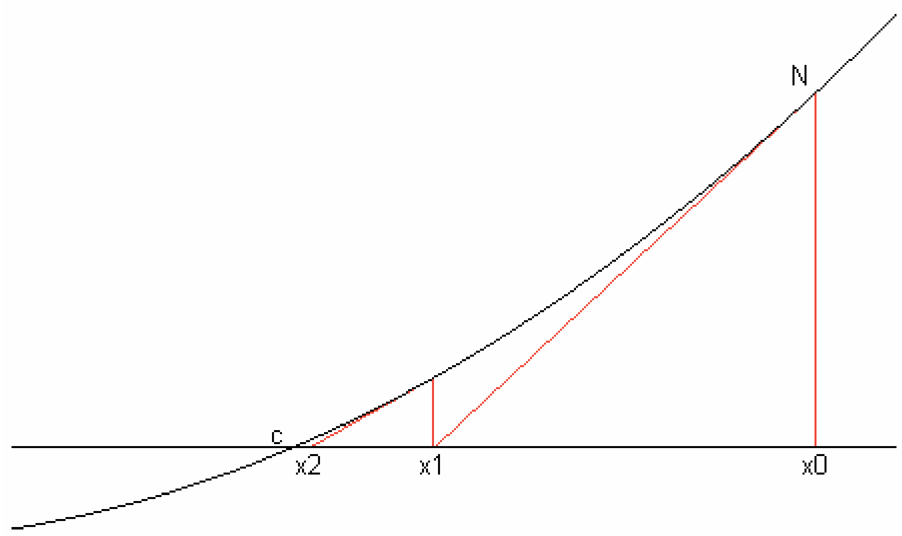

Figura 3.4: Aproximaciones por el método de Newton.

Por el punto N de abscisa x_0 se traza la tangente a la curva $y = f(x)$. Si la elección de x_0 es buena, el punto x_1 de intersección de la tangente con el eje OX estará más próximo a c que x_0. Para determinar x_1 hallamos dicha intersección:

$$\left\{ \begin{array}{c} y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Longrightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

obteniéndose el punto $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

En general, una vez hallada la aproximación x_n, para obtener la siguiente aproximación se razona como antes, obteniéndose:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Puede observarse que la sucesión (x_n) así definida es monótona y se aproxima a c.

El siguiente resultado, que damos sin demostración, asegura que el método de Newton converge si se dan unas ciertas condiciones iniciales:

Teorema 3.3.1
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es derivable dos veces, mantiene la convexidad en (a,b) y $f(a)f(b) < 0$, entonces la sucesión recursiva:

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] & \textit{tal que } f(x_0)f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} & \textit{si } n \geq 0 \end{cases}$$

está bien definida, es monótona y converge hacia la única raíz de f en $[a,b]$.

La mejora fundamental del método de Newton respecto al de bisección es que en general converge más rápido, si bien se necesitan más hipótesis.

Ejemplo 3.3.2
Sea $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ la función de los ejemplos 3.1.2, 3.1.7 y 3.2.3. Según se vio en el ejemplo 3.1.7, f es dos veces derivable en $[0,1]$, $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ y f'' no cambia de signo ($f''(x) > 0$) en dicho intervalo. Por lo tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución única en el intervalo $[0,1]$ y dicha solución se puede aproximar aplicando el método de Newton a f en $[0,1]$. Tomamos como valor inicial $x_0 = 1$ ya que $f''(x) > 0$ en $[0,1]$ y $f(1) = 2 > 0$ (por tanto, $f(1) \cdot f''(x) > 0$ para todo $x \in (0,1)$). Hallemos las dos primeras iteraciones del algoritmo:

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{2}{11} = \frac{9}{11} \approx 0'8181818181.$$
$$x_2 = 1 - \frac{f(9/11)}{f'(9/11)} = \frac{7487}{9713} \approx 0'7708226088.$$

Para obtener una aproximación a la solución $c \in [0,1]$ de la ecuación $f(x) = 0$ con un error "pequeño" se puede proceder del siguiente modo: por el teorema 3.3.1 sabemos que la sucesión $x_1, x_2, \ldots$ es monótona y converge a c. Haremos iteraciones hasta que dos valores aproximados que ofrece Derive para dos iteraciones consecutivas coincidan y daremos ese valor como aproximación a la raíz, y tomaremos como cota de error la precisión con la que estamos trabajando. Así pues, si hallamos (con Derive) las siguientes iteraciones:

$$x_3 \approx 0'7676063695, \quad x_4 \approx 0'7675918795, \quad x_5 \approx 0'7675918792, \quad x_6 \approx 0'7675918792,$$

para x_5 los 10 decimales que hemos obtenido coinciden con los de x_6, por lo que tomaremos x_5 como aproximación de c, con error menor que 10^{-10}.

Problemas

Problema 3.1
Analizar si es cierta o no la siguiente afirmación: Si f es una función continua que tiene una raíz en el punto s y $|f(x)| < \varepsilon$, entonces x es una aproximación a s con un error menor que ε.

Problema 3.2
Analizar si es cierta o no la siguiente afirmación: Si f es una función continua que tiene una única raíz $s \in \mathbb{R}$ y tal que $f(1) = 0'001$, entonces $|s-1| < 0'001$.

Problema 3.3
Demostrar que la ecuación $2^x = \dfrac{1}{x-1}$ tiene una única solución. Aproximarla, con un error menor que 10^{-3}, por el método de bisección.

Problema 3.4
Demostrar que la ecuación $\tan(x) = x + 1$ tiene dos soluciones en el intervalo $(0, 2\pi)$. Indicar el intervalo inicial y número de iteraciones que garantiza una aproximación de una de ellas, por el método de bisección, con un error menor que 10^{-4}.

Práctica

Objetivos

- Resolver ecuaciones numéricamente, usando las prestaciones gráficas, numéricas y de programación de DERIVE.

Instrucciones

- Cargar el fichero `AMyMN.mth`.

3.1 Método de bisección

(a) Localizar gráficamente todas las raíces del polinomio $P(x) = x^4 + x^2 + x - 2$. Separar las distintas raíces en intervalos disjuntos.

(b) Justificar analíticamente que el polinomio anterior no tiene más raíces que las encontradas en el apartado anterior.

(c) Para la menor de las raíces de P dar un intervalo $[a, b]$ de longitud 1 en el que se verifiquen las hipótesis de convergencia del método de la bisección, comprobar dichas hipótesis y ejecutar (en modo aproximado) la instrucción `BISECCION(P(x), x,` a, b, `5)`, para realizar cinco iteraciones de dicho metodo. ¿Qué intervalo se obtiene después de la quinta iteración?

(d) A partir del intervalo obtenido en el apartado anterior, dar una aproximación de la raíz y una cota de error.

(e) ¿Cuántas iteraciones serían necesarias para obtener una aproximación con error menor que 10^{-6}?

(f) Obtener una aproximación a la menor de las raíces de P con error menor que 10^{-6}.

(g) Es posible verificar con DERIVE el resultado, usando el menú `Resolver/Expresión`, con las opciones `Método:Numérico, Dominio:Intervalo, Límites del intervalo:` *(indicar los extremos del intervalo en el que exista una raíz)*, para resolver la ecuación $P(x) = 0$, de forma aproximada. En este caso la cota del error viene dada por la precisión del sistema.

3.2 Método de Newton

Vamos a usar el método de Newton para aproximar la solución positiva de la ecuación

$$e^x (x-1) + x^2 - x + 1/2 = 0.$$

Para ello, se deben dar los siguientes pasos:

(a) Encontrar un intervalo en el que se verifiquen las condiciones suficientes de convergencia del teorema anterior. A su vez, esto requiere:

(i) Definir y trazar la función $f(x) = e^x(x-1) + x^2 - x + 1/2$ para buscar un intervalo $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, de modo que contenga una solución positiva de la ecuación $f(x) = 0$.

$[a, b] = \boxed{}$.

(ii) Estudiar si f'' mantiene signo constante en el intervalo $[a, b]$ elegido. Si no es así, modificar el intervalo.

$[a, b] = \boxed{}$. Signo de f'': $\boxed{}$.

(iii) Elegir un valor inicial $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0)$ tenga el mismo signo que f'' en $[a, b]$.

$x_0 = \boxed{}$.

(b) Implementar la sucesión recurrente

$$\begin{cases} s(0) = x_0 & \text{el valor inicial elegido en el apartado (a)} \\ s(n+1) = s(n) - \dfrac{f(s(n))}{f'(s(n))} & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

y obtener $s(1)$, $s(2)$ y $s(3)$: $\boxed{}$.

Las condiciones del apartado (a) garantizan la convergencia de esta sucesión a la solución del problema.

(c) Iterar hasta que coincidan los 10 primeros decimales de dos iteraciones consecutivas:

n	$s(n)$
1	
2	
3	
4	
5	

Indicar el número de iteraciones realizadas, $n = \boxed{}$, y el último valor obtenido, $s(n) = \boxed{}$, que tomaremos como aproximación de la raíz.

Tema 4

Series numéricas

Teoría

En algunos sistemas de información, el tiempo empleado para procesar cada dato de una lista depende del lugar que éste ocupe. Así, si a_1 es el tiempo empleado para procesar el primer dato y a_2 el empleado para procesar el segundo, en general será $a_1 \neq a_2$. Si se quiere procesar una lista de n datos y a_k es el tiempo empleado al procesar el dato k-ésimo, el tiempo total empleado será $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Al trabajar con grandes masas de datos, interesa conocer el comportamiento de la expresión anterior cuando $n \to \infty$. En concreto, interesa saber si S_n es convergente o no. En caso de serlo interesa conocer el valor, exacto o aproximado, de su límite; y en caso de ser divergente interesa conocer su orden de magnitud. Nótese que puede ser difícil calcular el límite y estudiar el comportamiento asintótico de la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, ya que la expresión que la define no es una fórmula cerrada, sino que contiene sumandos cuyo número crece con n, y en general no es fácil transformarla en otra que sí lo sea. En consecuencia, interesa disponer de métodos alternativos para estudiar el comportamiento de S_n.

4.1 Definiciones y resultados generales

Definición 4.1.1 (Serie y serie convergente)
Dada una sucesión de números reales (a_n), se considera una nueva sucesión (S_n) de la forma:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(Si (a_n) está definida para $n \geq n_0$, la sucesión (S_n) también lo está a partir de ese índice.)

Al par ordenado de sucesiones así construido $((a_n), (S_n))$ se le llama *serie* de números reales. Llamaremos *término general* de la serie a la expresión a_n.

La serie $((a_n), (S_n))$ se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (o $\sum a_n$ si no hay lugar a confusión), y la sucesión (S_n) se denomina sucesión de las *sumas parciales* de la serie.

Se dice que una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es *convergente*, si la sucesión de sus sumas parciales (S_n) es convergente.

Así, si $\lim S_n = S \in \mathbb{R}$, la serie es convergente. Al número S se le llama *suma* de la serie y se denota $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Notas 4.1.2

(a) En general, con un abuso de notación, se suele denotar con el mismo símbolo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, a la serie y al valor de la suma.

(b) Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, también lo es la serie obtenida a partir de la anterior modificando o suprimiendo un número finito de sumandos. Nótese que, en general el valor de la suma sí se verá modificado.

Una forma directa de estudiar series consiste en hallar una fórmula explícita para la sucesión de sus sumas parciales, tal como se hace en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 4.1.3 (Serie aritmética)
La sucesión (S_n) de las sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$, es:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Como $\lim \dfrac{n(n+1)}{2} = \infty$, la serie no converge.

Ejemplo 4.1.4 (Serie geométrica)
Se denomina *serie geométrica* de razón x a una serie de la forma $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} x^n$. Se puede obtener una expresión explícita para la sucesión de las sumas parciales de esta serie sin más que usar la fórmula de la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica:

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^{n_0} - x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n - n_0 + 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

El límite de esta sucesión dependerá del valor de x, pues hay que calcular el límite de la sucesión geométrica (x^{n+1}) (estudiada en el Tema 1), como consecuencia se verifica que:

- Si $|x| < 1$, la sucesión (x^{n+1}) converge a 0, por lo tanto en este caso la serie $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} x^n$ es convergente y su suma es $S = \dfrac{x^{n_0}}{1-x}$.

- Si $x > 1$, la sucesión (x^{n+1}) tiende a ∞, por lo tanto $\lim S_n = \infty$ y la serie $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} x^n$ no es convergente.

- Si $x = 1$, $\lim S_n = \lim n - n_0 + 1 = \infty$, por lo que la serie no converge.

- Si $x = -1$ la serie es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, y la sucesión de sus sumas parciales, $(-1, 0, -1, 0, \cdots)$, no converge.
- Si $x < -1$, la serie tampoco converge, ya que la sucesión (x^{n+1}) no tiene límite.

Ejemplo 4.1.5 (Serie telescópica)
Para estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, se puede descomponer en fracciones simples el término general $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, y la sucesión de las sumas parciales se puede escribir

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

Por tanto la serie es convergente y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Nota: Esta serie es de las denominadas *telescópicas*. En una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de este tipo, se puede escribir a_n en la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$, con lo que la suma parcial será $S_n = b_1 - b_{n+1}$ y la serie converge si y sólo si la sucesión (b_n) converge. Además, en este caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim b_n.$$

Las series de los ejemplos anteriores se han estudiado obteniendo una expresión cerrada para la sucesión de las sumas parciales y calculando el límite de ésta. Esto generalmente es difícil de conseguir. Sin embargo, a veces se puede decir algo sobre la convergencia de una serie sin calcular explícitamente dichas sumas parciales. Para ello conviene deducir propiedades en las que apoyarse. Por ejemplo, es intuitivamente claro que si una suma infinita produce un resultado finito, entonces sus sumandos deben hacerse tan pequeños como se desee. Esta observación se traduce en la siguiente condición necesaria.

Proposición 4.1.6 (Condición necesaria de convergencia)
Si $\sum a_n$ es convergente, entonces el término general a_n tiende a 0.

Demostración.
Este resultado es inmediato, ya que $a_n = S_n - S_{n-1}$ y, dado que la serie es convergente, existe $\lim S_n = \lim S_{n-1}$. □

Nota 4.1.7
El recíproco no es cierto: Para la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ se tiene que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ y sin embargo la serie no es convergente ya que $\displaystyle S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} \to \infty$.

La proposición anterior se suele usar para demostrar la no convergencia de una serie. Por ejemplo, se puede afirmar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ no es convergente porque $\displaystyle\lim \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Otra forma de estudiar series es intentar descomponerlas en otras más sencillas. En ese sentido, disponemos del siguiente resultado.

Propiedades 4.1.8 (Operaciones con series)

(a) Suma de series:

Si las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes con sumas S_1 y S_2 respectivamente, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es convergente, siendo su suma $S_1 + S_2$.

(b) Multiplicación por un número:

Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y su suma es S y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$ es convergente y su suma es λS.

Ejemplo 4.1.9

Se puede afirmar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{3}{5^n} \right)$ es convergente porque lo son $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$. Su suma vale $1 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4}$.

4.2 Series de términos positivos

Se dice que la serie $\sum a_n$ es de términos positivos si $a_n \geq 0$ para todo n. En este caso, la sucesión de sumas parciales S_n es monótona creciente, por lo que para analizar su convergencia basta ver si está acotada.

Definición 4.2.1 (Serie divergente)

Si $a_n \geq 0$ para todo n, la serie $\sum a_n$ es *divergente* si el límite de la sucesión de sus sumas parciales es infinito. En este caso se escribe $\sum a_n = \infty$

Es obvio que toda serie de términos positivos es convergente o divergente. En concreto, se verifica el siguiente resultado (consecuencia de la monotonía de S_n).

Proposición 4.2.2

Si $a_n \geq 0$ para todo n, $\sum a_n$ es convergente si y sólo si la sucesión de las sumas parciales está acotada. En otro caso $\sum a_n = \infty$.

4.2.1 Criterio integral para la convergencia y divergencia de una serie

El siguiente resultado, basado en la interpretación de la integral como medida de áreas, se puede utilizar para ver si una serie de términos positivos es convergente o divergente y, en este caso, para analizar el orden de magnitud de la sucesión de las sumas parciales.

Proposición 4.2.3

Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 1$. Entonces:

(a) Si f es decreciente, $\displaystyle\int_1^n f \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f.$

(b) Si f es creciente, $\displaystyle\int_1^n f \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(n) + \int_1^n f.$

Demostración.

Cada uno de los sumandos que aparecen en la suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ puede interpretarse como el área de un rectángulo de base 1 y altura $f(k)$. Teniendo en cuenta que $\int_1^n f(x)\,dx$ mide el área de la región comprendida entre el eje de abscisas, la curva $y = f(x)$ y las rectas verticales $x = 1$ y $x = n$, si la función es decreciente (figura 4.1) se verifica que:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Como $f(n) \geq 0$, se tiene que

$$\int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

y además, que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx.$$

Con lo que se completa el apartado (a).

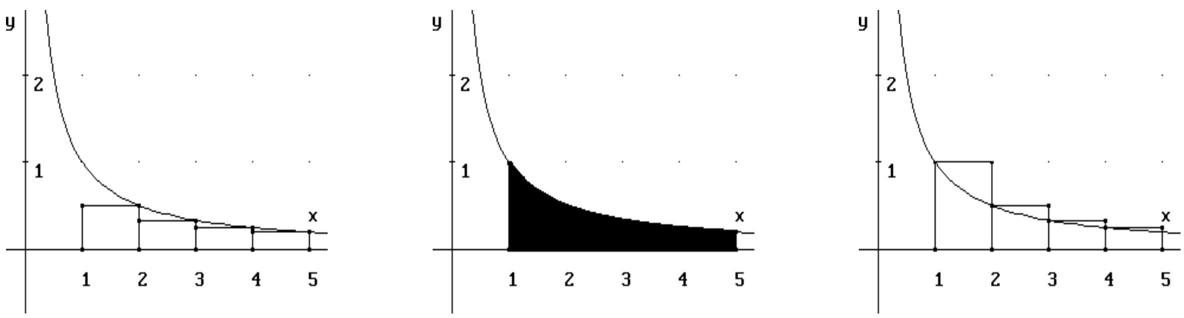

Figura 4.1: La integral mide el área encerrada por la curva.

En el caso de que la función sea creciente resulta que

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

de donde

$$\int_1^n f \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(n) + \int_1^n f.$$

□

Basándose en el resultado anterior se puede obtener la siguiente consecuencia:

Corolario 4.2.4 (Criterio integral)
Sea $\sum a_n$ una serie tal que $a_n = f(n)$ para cierta función $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ continua, positiva y no idénticamente nula. Si $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, entonces se verifica que:

(a) Si f es decreciente a partir de un punto, entonces $S_n \sim \int_1^n f$. En particular, la serie converge si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f \in \mathbb{R}$.

(b) Si f es creciente a partir de un punto y $f(n) \ll \int_1^n f$, entonces $S_n \sim \int_1^n f$.

Demostración.
Haremos la demostración en el caso particular de que f sea creciente (o decreciente) a partir de $x = 1$, es decir en $[1, \infty)$.

Dado que la función f es positiva, la sucesión $\int_1^n f$ es monótona creciente y por tanto tiene límite, finito o infinito.

(a) Si f es decreciente y $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ es convergente, ya que de las desigualdades se deduce que la sucesión S_n está acotada.

En el caso de que el límite sea infinito, basta considerar el apartado (a) de la proposición 4.2.3 y dividir por $\int_1^n f$ en los tres miembros de la desigualdad

$$\frac{\int_1^n f}{\int_1^n f} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)}{\int_1^n f} \leq \frac{f(1) + \int_1^n f}{\int_1^n f}$$

y usando la regla del sandwich se deduce que $S_n \sim \int_1^n f$, ya que el límite del cociente es 1.

(b) Si f es creciente, el límite de $\int_1^n f$ es infinito y dividiendo por $\int_1^n f$ en los tres miembros de la desigualdad correspondiente se tiene:

$$\frac{f(1) + \int_1^n f}{\int_1^n f} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)}{\int_1^n f} \leq \frac{f(n) + \int_1^n f}{\int_1^n f}.$$

Ahora, usando la regla del sandwich y que $f(n) \ll \int_1^n f$, se obtiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)}{\int_1^n f} = 1.$

Es decir $S_n \sim \int_1^n f$.

□

Ejemplo 4.2.5
Se puede usar el criterio integral para probar que la serie *armónica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Se considera $f(x) = 1/x$. Es inmediato comprobar que es continua, positiva y decreciente en el intervalo $[1, \infty)$. Dado que $\int_1^n \frac{1}{x}\, dx = \ln n$ y $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$ se deduce que la serie es divergente y que la sucesión de las sumas parciales es del orden de $\ln n$, es decir $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Ejemplo 4.2.6
Se puede determinar el orden de magnitud de la sucesión de las sumas parciales de la serie divergente $\sum \ln(n)$ usando la opción (b) del corolario anterior. La función $f(x) = \ln(x)$ es continua, positiva, y creciente en $[1, \infty)$. Integrando por partes, se obtiene que $\int_1^n \ln(x)\,dx = n\ln(n) - n + 1 \sim n\ln(n)$. Como además $f(n) = \ln(n) \ll n\ln(n)$, se deduce que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \sim n\ln(n).$$

Nota 4.2.7
Por las propiedades del logaritmo sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n) = \ln(n!)$$

luego, en el ejemplo anterior, se ha probado que $\ln(n!) \sim n\ln(n)$.

Proposición 4.2.8
Dado $p \geq 0$, se verifica que:

(a) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ es divergente y $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p \sim n^{p+1}$

(b) La serie armónica generalizada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

(c) Si $p = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ y si $p < 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \sim n^{1-p}$

Demostración.

(a) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ es divergente pues $\lim n^p \neq 0$ (el límite será ∞ para $p > 0$ y 1 para $p = 0$) y no se cumple la condición necesaria de convergencia.

Como $p \geq 0$ la función $f(x) = x^p$ es continua, creciente y positiva en $[1, \infty)$. Además,

$$\int_1^n x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^n = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sim n^{p+1} \qquad \text{y} \qquad n^p \ll n^{p+1}$$

de donde se concluye, por el apartado (b) del corolario 4.2.4 (Criterio integral), que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p \sim n^{p+1}$.

(b) Si $p = 1$ la serie es divergente, según se ha visto en el ejemplo 4.2.5.

Si $p \geq 0$ y $p \neq 1$, la función $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ es continua, decreciente y positiva en $[1, \infty)$. Además,

$$\int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^n = \frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p},$$

de donde se concluye, por el apartado (a) del corolario 4.2.4 (Criterio integral), que la serie es convergente si $p > 1$ y divergente si $0 \leq p < 1$.

(c) Si $p = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ según se ha visto en el ejemplo 4.2.5.

Si $0 \leq p < 1$ entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \sim \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \sim n^{1-p}$ según se ha visto en el apartado (b) de esta demostración.

□

4.2.2 Criterio de comparación

Proposición 4.2.9 (Criterio de comparación)
Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de términos positivos. Si $a_n \in O(b_n)$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

Demostración.
Si $a_n \in O(b_n)$, exiten k y n_0 tales que $a_n \leq kb_n$ para $n \geq n_0$. Como la serie $\sum b_n$ es convergente, la sucesión de sus sumas parciales está acotada y, de la desigualdad anterior, se deduce que también lo está la sucesión de las sumas parciales de $\sum a_n$. Con esto termina la demostración, ya que una serie de términos positivos converge si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales está acotada. □

Del resultado anterior se pueden obtener algunas consecuencias:

Proposición 4.2.10
Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos. En estas condiciones se verifica que:

(a) Si $a_n \in O(b_n)$ y $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ diverge.

(b) Si $a_n \ll b_n$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

(c) Si $a_n \ll b_n$ y $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ diverge.

(d) Si $a_n \sim b_n$, entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo carácter.

Demostración.

(a) Es evidente, por reducción al absurdo. Si $\sum b_n$ no fuera divergente, como es una serie de términos positivos, sería convergente y, por el criterio de comparación, también lo sería $\sum a_n$.

(b) Este resultado es inmediato, ya que $a_n \ll b_n$ implica $a_n \in O(b_n)$.

(c) Se deduce del apartado anterior, razonando como en (a).

(d) Basta observar que si $a_n \sim b_n$, entonces $a_n \in O(b_n)$ y $b_n \in O(a_n)$.

□

En cuanto al orden de magnitud de la sucesión de las sumas parciales, se dispone del siguiente resultado:

Proposición 4.2.11
Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos. En estas condiciones se verifica que:

(a) Si $a_n \in O(b_n)$ entonces $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \in O\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)$.

(b) Si $a_n \sim b_n$, entonces $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sim \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

(c) Si $a_n \ll b_n$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \ll \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

Ejemplo 4.2.12
Se puede afirmar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+5}$ es convergente ya que $\dfrac{n+1}{n^3+5} \sim \dfrac{1}{n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Ejemplo 4.2.13
Se puede afirmar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+5}} \ln n$ es divergente ya que $\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+5}} \ln n \sim \ln n$ y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ es divergente. Además, como consecuencia de 4.3.11 (b) y del ejemplo 4.3.6 se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{\sqrt{k^2+5}} \ln k \sim \sum_{k=1}^{n} \ln k \sim n \ln n.$$

Ejemplo 4.2.14
Puesto que se verifica que $\dfrac{1}{n} \ll \dfrac{1}{\ln(n)}$ y $\sum \dfrac{1}{n}$ es divergente, se puede afirmar que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ es divergente y además

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k} \gg \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n).$$

4.2.3 Criterios de la raíz y del cociente

Proposición 4.2.15 (Criterio de la raíz o de Cauchy[1])
Sea (a_n) una sucesión de términos positivos tal que existe $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$, entonces $\sum a_n$ converge si $l < 1$ y diverge si $l > 1$.

Demostración.
Supongamos que $\lim \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ y sea r tal que $l < r < 1$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{a_n} < r$ para todo $n \geq n_0$, con lo que $a_n \in O(r^n)$. Además, la serie $\sum r^n$ es convergente por ser geométrica de razón menor que 1. Entonces, por el criterio de comparación, $\sum a_n$ es convergente.

Si $l > 1$, la serie es divergente porque el término general no tiende a cero. □

[1]Augustin Louis Cauchy, matemático francés (1789-1857).

Nota 4.2.16
En el caso $l = 1$ no se puede afirmar nada. Por ejemplo la serie $\sum \frac{1}{n}$ es divergente, mientras que $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente y para ambas el límite de la raíz n-ésima del término general es 1.

Proposición 4.2.17 (Criterio del cociente o de D'Alembert[2])
Si (a_n) *es una sucesión de términos positivos tal que existe* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, *entonces* $\sum a_n$ *converge si* $l < 1$ *y diverge si* $l > 1$.

Nota 4.2.18
(a) Si $l = 1$ no se puede afirmar nada.

(b) El criterio del cociente se obtiene del de la raíz sin más que usar que si existe $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, entonces existe $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$. De hecho el criterio de la raíz es más general, aunque puede ser más difícil de aplicar.

Ejemplo 4.2.19
Se puede demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^n}$ es convergente por el criterio de la raíz, ya que

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)^n}} = \lim \frac{1}{2n+1} = 0 < 1.$$

Ejemplo 4.2.20
Se puede probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente por el criterio del cociente, ya que

$$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

4.3 Series de términos arbitrarios

Los criterios de la sección anterior son válidos para series cuyos términos sean todos positivos a partir de uno dado. Para series $\sum a_n$, con $a_n \leq 0$ a partir de un n_0, se pueden utilizar dichos criterios aplicándolos a la serie $\sum(-a_n)$. Sin embargo, cuando el signo de los términos es arbitrario el problema se complica.

Definición 4.3.1 (Convergencia absoluta)
Una serie $\sum a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Ejemplo 4.3.2
Para probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$ es absolutamente convergente, se considera $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(n)|}{n^2}$ y se usa el criterio de comparación. Como $\frac{|\operatorname{sen}(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, se puede afirmar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$ es absolutamente convergente.

[2]Jean le Rond d'Alembert, matemático y filósofo francés (1717-1783).

Proposición 4.3.3
Toda serie absolutamente convergente es convergente y $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.

Demostración.
Sea $\sum a_n$ una serie absolutamente convergente. Dado que $a_n \leq |a_n|$, la serie $\sum(|a_n| - a_n)$ es una serie de términos positivos a la que se le puede aplicar el criterio de comparación. Además $|a_n| - a_n \leq 2|a_n|$ para todo n y la serie $\sum 2|a_n|$ es convergente por ser $\sum a_n$ absolutamente convergente. Luego $\sum(|a_n| - a_n)$ es convergente. Por las propiedades de las series se concluye que $\sum a_n$ es convergente, ya que $\sum a_n = \sum |a_n| - \sum(|a_n| - a_n)$.

La desigualdad $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$ se obtiene de la última igualdad y del mismo resultado para $\sum(-a_n)$. $\square$

Nota 4.3.4
El recíproco de la proposición anterior no es cierto. Por ejemplo, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente, como se verá más adelante, pero no absolutamente convergente.

Para estudiar la convergencia de una serie $\sum a_n$ de términos arbitrarios, se puede intentar estudiar la convergencia absoluta, aplicando a $\sum |a_n|$ los criterios propios de series de términos positivos. Si la serie es absolutamente convergente, tendremos garantizada su convergencia. Las series no absolutamente convergentes pueden ser convergentes y sólo se pueden estudiar en casos particulares.

Ejemplo 4.3.5
Para conocer los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ es convergente, dado que es una serie de términos arbitrarios, se empieza estudiando su convergencia absoluta, considerando la serie de términos positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |nx^n|$, cuya convergencia se puede estudiar por el criterio de la raíz.

Dado que $\lim \sqrt[n]{|nx^n|} = \lim \sqrt[n]{n}|x| = |x|$, se puede afirmar que:

- Si $|x| < 1$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ es absolutamente convergente y por tanto convergente.

- Si $|x| > 1$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ no es absolutamente convergente. De hecho no es convergente ya que el término general no tiende a cero.

- Si $x = 1$ la serie es $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$, que es divergente.

- Si $x = -1$, la serie es $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$, que tampoco converge.

A continuación se presenta un criterio que permite estudiar la convergencia de un caso particular de series de términos arbitrarios.

Definición 4.3.6 (Serie alternada)
La serie $\sum a_n$ es *alternada* si $a_n a_{n+1} \leq 0$ para todo n.

La forma más común de escribir las series alternadas es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$ o $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} c_n$ donde $c_n \geq 0$ para todo n.

La condición suficiente más conocida de convergencia de series alternadas es la siguiente:

Proposición 4.3.7 (Criterio de Leibniz[3])
Si $\sum a_n$ es una serie alternada que verifica

$$i)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad\qquad ii)\ |a_{n+1}| \le |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces la serie es convergente.

Ejemplo 4.3.8
La serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente, por el criterio de Leibniz.

4.4 Aproximación numérica de la suma de una serie

Se quiere aproximar el valor de la suma de una serie convergente $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ por el valor de una de sus sumas parciales S_{n_0}. El error absoluto cometido en dicha aproximación será:

$$|S - S_{n_0}| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n \right| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \right|.$$

Este error se puede acotar en algunos casos, concretamente, si se sabe que la serie es absolutamente convergente por el criterio de la raíz o que converge por el de Leibniz.

4.4.1 Cálculo aproximado de la suma de una serie absolutamente convergente por el criterio de la raíz o del cociente

Si $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = l$ ó $\lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$, y $l < r < 1$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \le r^n$ para todo $n \ge n_0$ y por tanto:

$$|S - S_{n_0}| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n \right| \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} r^n = \frac{r^{n_0+1}}{1-r}$$

Por tanto, para aproximar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con un error menor que ε, se hallan r y n_0, tales que:

$$\text{i)} \quad l < r < 1 \qquad \text{ii)} \quad |a_n| \le r^n \quad \forall n \ge n_0 \qquad \text{iii)} \quad \frac{r^{n_0+1}}{1-r} < \varepsilon$$

y se calcula $\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0} a_n$.

Ejemplo 4.4.1
La serie de términos positivos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge por el criterio del cociente ya que $\lim \dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = 0 < 1$. Para obtener una aproximación de su suma con un error menor que 10^{-3} se procede como sigue:

[3] Gottfried Leibniz, filósofo, matemático, jurista y político alemán (1646-1716).

(a) Se elige r tal que $0 < r < 1$. Por ejemplo $r = \dfrac{1}{2}$.

(b) Se busca el valor de n_0 a partir del cual se verifica que $\dfrac{1}{n!} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ $\forall n \geq n_0$. Es fácil comprobar que la desigualdad es cierta para $n \geq 4$.

(c) Se busca el valor de n_0 a partir del cual se verifica que $\dfrac{(1/2)^{n_0+1}}{1-(1/2)} < 10^{-3}$. Resolviendo la desigualdad se obtiene que $n > 9.9657$; por tanto, basta tomar $n_0 \geq 10$.

A partir de lo visto en (b) y (c), se tiene que n_0 ha de verificar que $n_0 \geq 4$ y $n_0 \geq 10$. Por tanto, se puede elegir cualquier $n_0 \geq 10$. Por ejemplo, $n_0 = 10$.

(d) Se aproxima $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} \approx 2.718281$.

Se puede observar que el valor obtenido es una aproximación del número e con un error menor que 10^{-3}. De hecho, en el próximo tema se justificará que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = e$.

4.4.2 Cálculo aproximado de la suma de una serie convergente por el criterio de Leibniz

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie alternada que verifica las hipótesis del teorema de Leibniz, se tiene que:

$$|S - S_{n_0}| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n\right| = \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} (-1)^n |a_n|\right| = |a_{n_0+1}| - |a_{n_0+2}| + |a_{n_0+3}| - |a_{n_0+4}| + \cdots \leq |a_{n_0+1}|$$

(Se ha tenido en cuenta que la sucesión $(|a_n|)$ es decreciente.)

Por tanto, para aproximar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ con un error menor que ε, basta hallar n_0 tal que $|a_{n_0+1}| < \varepsilon$ y calcular $\sum\limits_{n=1}^{n_0} a_n$.

Ejemplo 4.4.2
La serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ verifica las hipótesis de convergencia del criterio de Leibniz. Para obtener su suma aproximada con un error menor que 10^{-3}, basta elegir n_0 tal que $\dfrac{1}{n_0+1} < 10^{-3}$ y calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. En este caso basta elegir $n_0 = 1000$, y se obtiene la aproximación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \approx \sum_{n=1}^{1000} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \approx 0.692647.$$

Se puede observar que el valor obtenido es una aproximación de $\ln(2)$ con un error menor que 10^{-3}. De hecho, en el próximo tema se justificará que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

Problemas

Problema 4.1
En un triángulo equilátero, cuyos lados miden 1, se unen los puntos medios de dichos lados para formar otro triángulo equilátero. A continuación, se repite el proceso con el nuevo triángulo y se continúa así indefinidamente, como se indica en la figura 4.2. Calcular la suma de las áreas de los infinitos triángulos inscritos obtenidos.

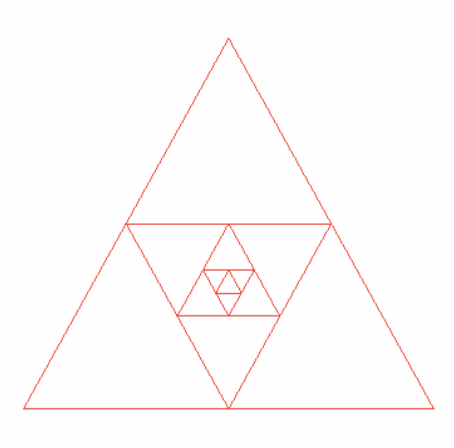

Figura 4.2: Triángulos inscritos.

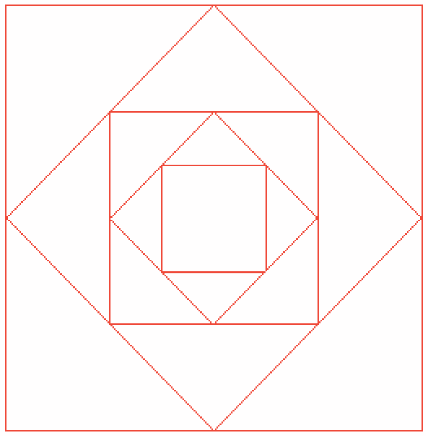

Figura 4.3: Cuadrados inscritos.

Problema 4.2
En un cuadrado, cuyos lados miden 1, se unen los puntos medios de dichos lados para formar otro cuadrado. A continuación, se repite el proceso con el nuevo cuadrado y se continúa así indefinidamente, como se indica en la figura 4.3. Calcular la suma de las áreas de los infinitos cuadrados inscritos obtenidos.

Problema 4.3
Determinar el carácter de las series siguientes y calcular su suma cuando proceda:

(a) $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{-2+(-2)^n}{5^n}$$ (b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n+\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{e^n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

Problema 4.4
Determinar el carácter de las series siguientes y calcular su suma cuando proceda:

(a) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n+8^n}{5^n}$$ (b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n\,(n+1)}$$

Problema 4.5
La información introducida cada día en el disco duro de un ordenador es la mitad que la introducida el día anterior. Si el primer día se almacenan 20 GB, ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener el disco para garantizar que no se satura?

Problema 4.6
La cantidad de papel que recicla cada año una planta de tratamiento de residuos es el 90 % de la que recicla el año anterior. Si recibe un único suministro de 50 toneladas y el primer

año de funcionamiento recicla 4 toneladas, ¿podrá reciclar todo el suministro si nunca deja de trabajar?

Problema 4.7
Determinar el carácter de las series siguientes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln(n))^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p p^n$ *con* $p > 0$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{n^2}}{n^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n\,(n+3)}}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3}$

Problema 4.8
Determinar el carácter de las series siguientes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln(n))^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+1/n)}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n^p}$ *con* $p > 0$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n e^{-n^2}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2\, 5^n}{(2n)!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$

Problema 4.9
Hallar $p \in \mathbb{R}$ *de modo que la sucesión de sumas parciales de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ *sea del mismo orden que* n^p.

Problema 4.10
Hallar $p \in \mathbb{R}$ *de modo que la sucesión de sumas parciales de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ *sea del mismo orden que* n^p.

Problema 4.11
Si T *es un árbol con raíz y ternario (cada nodo tiene a lo sumo tres hijos), con* k *nodos,* a_1, a_2, $\dots$, a_k, *y de altura* n, *se define la longitud de camino total de* T *como*

$$l_n := \sum_{i=1}^{k} d_i,$$

donde d_i *es la longitud del único camino dirigido desde la raíz hasta el nodo* a_i. *En estas condiciones, se pide:*

(a) *Demostrar que* $\sum_{i=0}^{n} i \le l_n \le \sum_{i=0}^{n} i\,3^i$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo árbol* T.

(b) *Probar que* $l_n \in O(n\,3^n)$.

Problema 4.12
Si T es un árbol con raíz y binario (cada nodo tiene a lo sumo dos hijos), con k nodos, a_1, a_2, $\ldots$, a_k, y de altura n, se define la longitud de camino total de T como

$$l_n := \sum_{i=1}^{k} d_i,$$

donde d_i es la longitud del único camino dirigido desde la raíz hasta el nodo a_i. En estas condiciones, se pide:

(a) *Demostrar que* $\sum_{i=0}^{n} i \leq l_n \leq \sum_{i=0}^{n} i\, 2^i$ *para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo árbol T.*

(b) *Probar que $l_n \in O(n\, 2^n)$.*

Problema 4.13
Hallar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$$

converge. Determinar su orden de magnitud cuando diverge.

Problema 4.14
Si $P(n)$ y $Q(n)$ son dos polinomios, probar que la serie

$$\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$$

converge si y sólo si $\operatorname{grado}(Q) \geq \operatorname{grado}(P) + 2$. *Determinar su orden de magnitud cuando diverge.*

Problema 4.15
Se ha observado que, desde la aparición de Internet, el número de nuevos usuarios en el n-ésimo día es $10^4 + n^2$ y el número de usuarios que se dan de baja en el mismo plazo es $100n$. Determinar el orden de magnitud del número total de usuarios en función de n.

Problema 4.16
Entre las curvas $y = 1/x$ e $y = 1/x^2$ se han construido segmentos paralelos al eje OY en los puntos de abscisa entera ($n \geq 1$). ¿Es finita la suma de las longitudes de dichos segmentos? Determinar el orden de magnitud de la sucesión S_n que expresa la suma de las longitudes de los n primeros segmentos.

Problema 4.17
Sabiendo que la sucesión a_n verifica:

$$\frac{1}{n^2} < a_n < \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

para todo $n \geq 1$, estudiar el carácter de las series $\sum a_n$, $\sum {a_n}^2$, $\sum \sqrt{a_n}$ y $\sum \dfrac{1}{1+a_n}$.

Problema 4.18

Sabiendo que $\sum a_n$ *es una serie de términos positivos convergente, estudiar el carácter de las series* $\sum \dfrac{1}{a_n}$, $\sum {a_n}^2$, $\sum {a_n}^n$ *y* $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$.

Problema 4.19

Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ *para los que converge cada una de las series siguientes:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} 3^n \frac{n}{n+1} x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-\pi)^n}{(2n)^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\,(x-2)^n$ (e) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n\,2^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$

Problema 4.20

Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ *para los que converge cada una de las series siguientes:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} 2^n \frac{n+1}{n} x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x+e)^n}{n^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\,(2\,(x-1))^n$ (e) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(2-x)^n}{n\,3^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n n^2}$

Práctica

Objetivos

- Determinar y comparar los órdenes de magnitud de algunas series.
- Aproximar la suma de series convergentes.

4.1 Orden de magnitud de la suma parcial de una serie

Determinados procesos se modelan por la sucesión de las sumas parciales de una serie y en ocasiones es necesario determinar el orden de magnitud de dicha sucesión. En esta sección veremos cómo hacer ésto.

(a) Se quiere almacenar los datos de una colección de individuos en una base de datos. Para ello se usa un algoritmo que va procesando la información correspondiente a cada uno de ellos. Supongamos que el número de instrucciones necesarias para almacenar los datos del k-ésimo individuo es $3k+1$. Entonces el número de instrucciones necesarias para almacenar los datos de n sujetos es $S_n = \sum_{k=1}^{n}(3k+1)$ y por tanto (S_n) es la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(3k+1)$.

Simplificar, con Derive la expresión de S_n y determinar su orden de magnitud.

$$S_n = \boxed{} \sim \boxed{}.$$

Luego el número de instrucciones necesarias para almacenar los datos de n individuos es del orden de $\boxed{}$

(b) ¿Qué ocurre si se intenta hacer lo mismo para determinar el orden de magnitud de la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$?

Para determinar el orden de magnitud de la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k}$ usaremos el **criterio integral**, llevando a cabo el siguiente proceso:

(i) Definir $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ y buscar un intervalo de la forma $[n_0, \infty)$ en el que f sea continua, positiva y monótona. Justificar la respuesta.

(ii) Teniendo en cuenta el tipo de monotonía, ¿qué afirma el criterio integral en este caso?

(iii) Calcular la integral $\int_{n_0}^{n} f(x)\,dx$ y determinar el orden de magnitud de la sucesión que se obtiene como resultado.

$$\int_{n_0}^{n} f(x)\,dx = \boxed{} \sim \boxed{}.$$

(iv) Usar los resultados anteriores para determinar el orden de magnitud de S_n.

$S_n \sim \boxed{}.$

4.2 Ejercicio

4.2.1 Opción 1

Dadas las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln(n^2+1)+\frac{2}{n}\right) \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n^2+3)\ln(n^2+3)},$$

se denotan por S_n y T_n las sucesiones de sumas parciales respectivas y se pide:

(a) Obtener sucesiones elementales del mismo orden que S_n y T_n.

(b) Ordenar según su magnitud S_n y T_n.

4.2.2 Opción 2

Sean S_n y T_n las sumas parciales respectivas de las siguientes series:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\ln(n^4)}{n}$$

(a) Obtener sucesiones elementales del mismo orden que S_n y T_n.

(b) Ordenar según su magnitud S_n y T_n.

4.3 Problema

(a) En una empresa dedicada a ensamblar ordenadores, el coste de montaje del primer equipo es 10 euros, y el de n equipos viene dado por la fórmula $a_n = a_{n-1} + 2n$ si $n \geq 2$. Obtener `A(n)`, la forma explícita de a_n.

(b) El empresario recibe una oferta para producir con la misma calidad, en la que el coste de la primera unidad es 1000 euros y el de la unidad número n es $\ln(n) + \frac{1}{n}$, si $n \geq 2$. Definir una función `B(n)` que represente el coste de producción de n unidades por el segundo procedimiento.

(c) Estudiar el interés de la oferta en función del número de unidades fabricadas.

4.4 Suma aproximada de una serie convergente

Para muchas series convergentes, no se puede obtener la forma explícita de las sumas parciales y por tanto no sabemos calcular el valor exacto de la suma usando la definición. Sin embargo, a veces, es fácil obtener una aproximación de su suma con un error tan pequeño como se desee.

4.4.1 Series absolutamente convergentes por el criterio de la raíz

Se trata de calcular aproximadamente la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2)}{3^n}$.

Usar el criterio de la raíz o el del cociente para probar que la serie converge.

Criterio empleado $\boxed{}$. Verificación:

$$l = \lim \boxed{} = \boxed{} < 1$$

Para aproximar el valor de la suma de la serie, con un error menor que 10^{-5}, daremos los siguientes pasos:

(a) Elegir $r \in \mathbb{R}$ tal que $l < r < 1$. $r = \boxed{}$.

(b) Hallar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| = \frac{\ln(n^2)}{3^n} \leq r^n$ para todo $n \geq n_1$.

$n_1 = \boxed{}$.

(c) Obtener $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{r^{n+1}}{1-r} < 10^{-5}$ para todo $n \geq n_2$.

$n_2 = \boxed{}$.

(d) Tomar $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y aproximar la suma de la serie por la suma parcial:

$$S_{n_0} = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\ln(k^2)}{3^k} \approx \boxed{}.$$

4.4.2 Series convergentes por el criterio de Leibniz

Vamos a calcular la suma aproximada de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n}{5n^4 - 1}$.

Probar que es convergente utilizando el criterio de Leibniz:

Aproximar la suma de la serie, con un error menor que 10^{-5}, dando los siguientes pasos:

(a) Hallar $m \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{m+1}| < 10^{-5}$.

$$m = \boxed{}.$$

(b) Aproximar la suma de la serie por la suma parcial $S_m \approx \boxed{}$.

4.5 Ejercicio

4.5.1 Opción 1

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3^n}{5n^n - 1}$, comprobar que se puede usar cualquiera de los dos métodos descritos en la sección anterior para aproximar el valor de su suma.

Calcular el valor aproximado de dicha suma con un error menor que 10^{-5}, por ambos métodos y contrastar los resultados obtenidos.

4.5.2 Opción 2

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2n+1}{5n-1}\right)^n$ comprobar que se puede usar cualquiera de los dos métodos descritos en la sección anterior para aproximar el valor de su suma.

Calcular el valor aproximado de dicha suma con un error menor que 10^{-5}, por ambos métodos y contrastar los resultados obtenidos.

4.6 Problema

Sabiendo que

$$\pi = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n}(2n+1)(n!)^2}$$

Obtener los 20 primeros decimales de π, calculando la suma aproximada de la serie.

Nota: Para cambiar la precisión del sistema se usa **Opciones/Ajustes de modo/Simplificación**.

Tema 5

Aproximación local de funciones: Polinomio de Taylor

Teoría

Los polinomios son las funciones reales más fáciles de evaluar, ya que todos los cálculos que precisan son sumas y productos de números reales. Por esta razón, cuando una función resulta difícil de evaluar con exactitud, se intenta buscar un polinomio que se le parezca y se usa dicho polinomio en su lugar. En este proceso es obvio que se pierde la exactitud de cálculo y se gana la operatividad.

Las aproximaciones de una función mediante polinomios pueden ser de dos tipos: locales y globales. Las aproximaciones locales se basan en la construcción de un polinomio que tenga un gran parecido con la función cerca de un punto determinado. En concreto se exige que los valores de la función y del polinomio en dicho punto sean iguales, y también que los valores de las primeras derivadas de la función y del polinomio coincidan en dicho punto. En las proximidades de ese punto el polinomio toma valores muy parecidos a los de la función, pero no necesariamente iguales, y lejos de ese punto el polinomio no tiene por qué parecerse a la función.

Las aproximaciones globales consisten en obtener polinomios que se parezcan bastante a la función de partida en todo un intervalo, pero sin destacar un punto especial. El polinomio coincide con la función, y a veces con su primera y/o segunda derivada en varios puntos del intervalo, pero no hay un punto del intervalo en que el polinomio se parezca mucho más a la función que en el resto. En este tema se estudian aproximaciones locales (polinomio de Taylor[1]) y en el tema siguiente aproximaciones globales (polinomio de interpolación).

5.1 Polinomio de Taylor

Se sabe que si una función es continua y derivable en un punto x_0, la recta más parecida a la función en un entorno de x_0 es la recta tangente y su ecuación es $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Dicha recta define un polinomio $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ que verifica $P_1(x_0) = f(x_0)$ y $P_1'(x_0) = f'(x_0)$. Geométricamente esto significa que la recta pasa por el mismo punto que la función en x_0 y además, la inclinación de la función en ese punto es la misma que la de la recta.

[1]Brook Taylor, matemático británico (1685-731).

El polinomio $P_1(x)$ es una primera aproximación de la función $f(x)$ y cabe esperar que al aumentar su grado de algún modo, es decir al construir un polinomio

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a(x - x_0)^2$$

con un valor de a adecuado, se tenga un polinomio que se parezca aún más a $f(x)$. En concreto, si $f(x)$ es dos veces derivable en x_0 y se calcula a imponiendo que $P_2(x_0) = f''(x_0)$, se tiene un polinomio de grado dos que verifica $P_2(x_0) = f(x_0)$, $P_2'(x_0) = f'(x_0)$ y $P_2''(x_0) = f''(x_0)$. Geométricamente, esto se traduce en que el polinomio $P_2(x)$ tiene una curvatura o concavidad muy parecida a la de $f(x)$ en un entorno de x_0.

Si $f(x)$ es n veces derivable en x_0 se puede repetir este proceso y obtener un polinomio de grado n según se indica en la siguiente proposición.

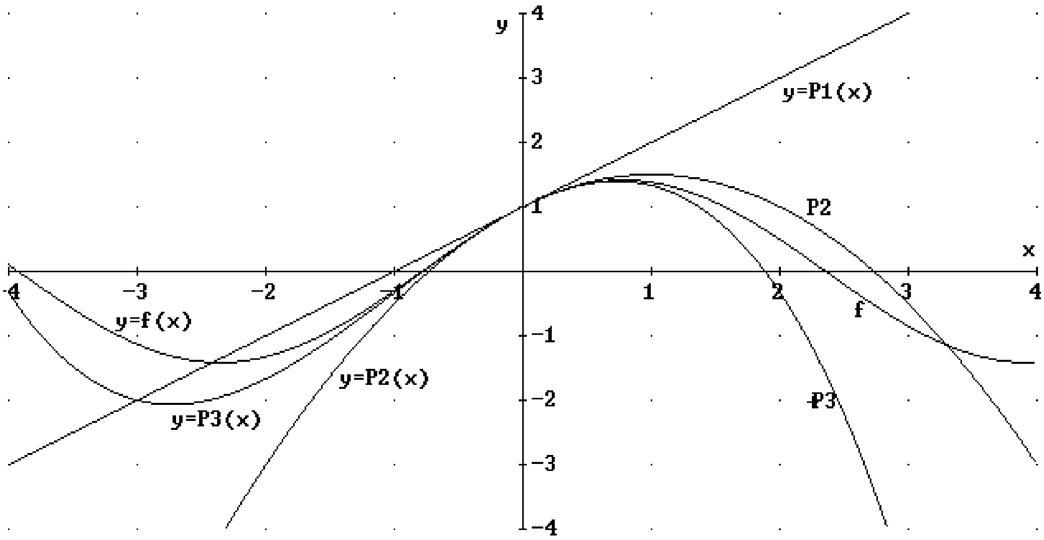

Figura 5.1: Polinomios de Taylor.

Proposición 5.1.1 (Existencia y unicidad del polinomio de Taylor)
Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en un punto $x_0 \in D$. Existe un único polinomio $P_n(x)$ de grado menor o igual que n que verifica: $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n'(x_0) = f'(x_0)$, $\ldots$, $P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$. Dicho polinomio es:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

con el convenio 0!=1 y $f^{(0)} = f$.

El polinomio anterior se denomina polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x)$ en x_0, y se denota $P_n(f, x_0)(x)$ o, si no hay lugar a confusión, simplemente $P_n(x)$.

Si $x_0 = 0$ se suele denominar polinomio de McLaurin.

Demostración.
Partimos de que todo polinomio de grado menor o igual que n se puede escribir de modo único en la forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

ya que el conjunto $\{1, (x - x_0), (x - x_0)^2, \cdots, (x - x_0)^n\}$ es una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n.

Para probar que existe un polinomio y sólo uno que verifique las condiciones pedidas, veremos que se pueden determinar unívocamente los coeficientes de $P_n(x)$ a partir de dichas condiciones.

Como $P_n(x_0) = a_0$, si queremos que $P_n(x_0) = f(x_0)$, debe ser $a_0 = f(x_0)$.

Si calculamos la derivada de P_n, tenemos:

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

y la condición $P_n'(x_0) = f'(x_0)$ se satisface si y sólo si $a_1 = f'(x_0)$.

Si calculamos la derivada segunda de P_n e imponemos la condición $P_n''(x_0) = f''(x_0)$ se obtiene que $a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2!}$.

Continuando este proceso, se concluye que $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ para $k \in \{0 \cdots n\}$. Luego existe un único polinomio que satisface las condiciones pedidas que es

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

□

Ejemplo 5.1.2
Para obtener el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ es necesario obtener la primera, segunda y tercera derivadas y evaluarlas en $x_0 = 0$.

Como $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo n, resulta que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, y por lo tanto el polinomio de orden 3 es:

$$P_3(x) = 1 + (x - 0) + \frac{(x - 0)^2}{2!} + \frac{(x - 0)^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

De modo análogo se puede obtener el polinomio de Taylor de orden n en $x_0 = 0$ y es:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

El polinomio de Taylor de una función en un punto x_0 proporciona valores parecidos a los de la función cerca de x_0, pero en general son diferentes. Para estimar la diferencia $f(x) - P_n(x)$ para un x distinto de x_0, se usa el siguiente resultado.

Teorema 5.1.3 (de Taylor)
Sea $f(x)$ una función $n+1$ veces derivable en un intervalo (a, b) que contiene a x_0 y sea x un punto cualquiera del intervalo. Se verifica:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

donde c es un punto situado entre x y x_0.

La diferencia $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ se denomina *resto de Taylor de* f y la expresión anterior es debida a *Lagrange*[2], por lo que se denomina *resto de Lagrange*.

El resto de Lagrange no permite saber con exactitud el valor de $f(x) - P_n(x)$ porque en general el punto c no se puede conocer, sin embargo es muy útil para obtener cotas de error en las aproximaciones de Taylor.

Aplicación 5.1.4 (Evaluaciones aproximadas)
Para obtener una aproximación de un número $f(a)$, cuyo valor exacto no se conoce, se elige un punto x_0 próximo a a en el que resulte fácil obtener $f(x_0)$,...,$f^{(n)}(x_0)$. A continuación se construye $P_n(f, x_0)(x)$, es decir el polinomio de Taylor de orden n de $f(x)$ en x_0, y por último se evalúa dicho polinomio en $x = a$.

Ejemplo 5.1.5
Para obtener una aproximación del número e mediante el polinomio de Taylor de orden 3 de $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ se procede del modo siguiente:

Se ha visto en el ejemplo anterior que el polinomio de orden 3 es:

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Como $e = e^1 = f(1)$, una aproximación del número e es

$$P_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$$

Estudiando el resto de Lagrange, se tiene que el error absoluto que se comete al aproximar e por $\frac{8}{3}$ es $\frac{|f^{(4)}(c)|}{4!}|1-0|^4 = \frac{e^c}{24}$, donde $c \in (0,1)$. Como e^x es una función positiva y creciente para todo x, y en este caso $c \in (0,1)$, el error es menor que $\frac{e}{24} < \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

Si se desea obtener una aproximación de e con un error menor que 10^{-3}, se procede del modo siguiente:

Para un polinomio de orden n, se sabe que la expresión del error será:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!},$$

donde $c \in (0,1)$ y n está aún por determinar.

Razonando como antes, se tiene que $e^c < e < 3$ cuando $c \in (0,1)$, luego $\frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Por último, para conseguir $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$ basta tomar $n \geq 6$. El polinomio de Taylor de orden 6 evaluado en $x = 1$ proporciona la aproximación deseada.

$$P_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!}$$

$$P_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720} \approx 2.71805$$

Nota: En los problemas en que hay que estimar o acotar el error, se trabaja con el valor absoluto del resto de Lagrange.

[2] Joseph Louis Lagrange, matemático, físico y astrónomo italiano (1736-1813).

5.2 Series de Taylor

Dada una función $f(x)$ suficientemente derivable, es posible construir sus polinomios de Taylor en un punto x_0 de un orden tan alto como se desee. Se sabe que dichos polinomios permiten aproximar los valores de la función para valores próximos a x_0 y por tanto cabe plantearse el siguiente problema:

> Dado un valor x_0 en el que es fácil evaluar la función y sus derivadas, ¿se puede saber para qué valores de x existe un polinomio de Taylor centrado en x_0 que proporcione una buena aproximación de $f(x)$?

Veamos cómo tratar este problema en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.2.1
La función e^x es infinitamente derivable, por tanto se puede construir su polinomio de Taylor de cualquier orden en cualquier punto. Como e^x coincide con su derivada n-ésima para todo n y $e^0 = 1$, su polinomio de Taylor de orden n en $x_0 = 0$ es:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Si ahora se hace tender n a infinito se obtiene la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

que, por su forma, es lo que se denomina una *serie de potencias* en la variable x.

A la serie anterior la llamaremos serie de Taylor de e^x centrada en $x_0 = 0$.

Si para cada x fijo, el resto de Lagrange $|R_n(x)|$ tiende a cero cuando n tiende a infinito entonces podemos asegurar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Se tiene que $R_n(x) = \dfrac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$ donde $c \in (0, x)$ si $x > 0$ y $c \in (x, 0)$ si $x < 0$.

Sea $x > 0$. Como la función exponencial es creciente se tiene que

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Si x es fijo, e^x es un valor finito y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} = 0.$$

Si $x < 0$, de nuevo usando que la función exponencial es creciente se tiene que

$$|R_n(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{e^0}{(n+1)!} |x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

y razonando como antes se ve que esta expresión tiende a cero cuando n tiende a infinito.

En definitiva se tiene que $|R_n(x)|$ tiende a cero para todo x real cuando n tiende a infinito y esto significa que: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo x real, por eso se dirá que e^x es desarrollable en serie de Taylor centrada en $x_0 = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

En resumen, esta igualdad garantiza que dado un valor real arbitrario x, los valores de la función y de la suma de la serie coinciden, y por tanto se puede aproximar el valor e^x por $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ para algún n suficientemente grande.

También se puede leer la igualdad en el otro sentido. Por ejemplo, la suma de la serie numérica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ es e^2.

Definición 5.2.2 (Desarrollo en serie de Taylor)
Sea I un intervalo de amplitud no nula. Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función indefinidamente derivable en el punto $x_0 \in I$, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se llama *serie de Taylor de f centrada en x_0*.

Desarrollar f en serie de Taylor centrada en x_0 consiste en calcular la expresión anterior y hallar los números $x \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

es decir, aquéllos que cumplen las tres condiciones siguientes:

- La función está definida (x pertenece al dominio de la función).
- La serie de Taylor converge.
- La suma de la serie coincide con el valor de la función.

El conjunto de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen estas tres condiciones se denomina *campo de validez* del desarrollo.

Ejemplo 5.2.3
Desarrollo en serie de Taylor en $x_0 = 0$ de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

La función $\operatorname{sen} x$ es infinitamente derivable, por lo tanto para construir su serie de Taylor basta obtener la expresión de su derivada n-ésima y evaluarla en $x = 0$.

Las derivadas de orden par son $\pm \operatorname{sen} x$ y por tanto se anulan en $x = 0$ y las derivadas de orden impar son $\pm \cos x$ y por tanto valen 1 ó -1.

La serie de potencias sólo contiene potencias impares de x (la función $\operatorname{sen} x$ es impar) y es de la forma: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

Buscamos ahora para qué valores de x se verifica que $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, para ello se estudia el resto de Lagrange.

En este caso $|R_n(x)| = \frac{|\operatorname{sen} c|}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ o bien $|R_n(x)| = \frac{|\cos c|}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, por tanto se tiene que:

$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ y de la jerarquía de infinitos se deduce que para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Por tanto, $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Análogamente, puede comprobarse que $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

El siguiente ejemplo muestra que no todas las funciones infinitamente derivables en un punto coinciden con su desarrollo de Taylor en un entorno de dicho punto.

Ejemplo 5.2.4
Desarrollo en serie de Taylor en $x_0 = 0$ de $f(x) = e^{-1/x^2}$.

La función $f(x)$ considerada no está definida en $x = 0$. Si se define $f(0) = 0$, la función es continua y derivable infinitas veces, por lo tanto se puede construir su serie de Taylor. Se puede comprobar que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n, por lo tanto la serie de Taylor de $f(x)$ en $x = 0$ es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n$.

La suma de esta serie es 0 para todo $x \in \mathbb{R}$, y por lo tanto sólo coincide con la función en $x = 0$, ya que si $x \neq 0$, $e^{-1/x^2} > 0$.

Ejemplo 5.2.5
Sabemos que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge si y sólo si $|x| < 1$ y que su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Por lo tanto, se puede asegurar que la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ sólo coincide con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ en el intervalo $(-1, 1)$.

A la vista de este resultado cabe plantearse si $f(x)$ es desarrollable en serie de Taylor en $(-1, 1)$ y si dicho desarrollo en serie es el ya obtenido, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Se puede asegurar que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es la serie de Taylor de $f(x) = \frac{1}{1-x}$, en $x = 0$, gracias al siguiente resultado:

Teorema 5.2.6 (Unicidad de la serie de Taylor)
Si para una función f existen x_0 y $R > 0$ de modo que se verifica $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ para todo $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, entonces

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, la serie de potencias tiene por coeficientes a_n los coeficientes de Taylor.

Ejemplo 5.2.7
Se ha visto que $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si $x \in (-1, 1)$. Por lo tanto:

(a) Según el teorema anterior, se puede asegurar que dicha serie es la serie de Taylor de $f(x)$ en $x_0 = 0$. Por tanto, cualquier truncamiento de la misma es un polinomio de Taylor de $f(x)$. Por ejemplo, el polinomio de Taylor de orden 25 de $f(x)$ en $x_0 = 0$ es $\sum_{n=0}^{25} x^n$.

(b) Para cualquier x del intervalo $(-1, 1)$ los valores de la función y la serie coinciden, por lo tanto para cualquier x de $(-1, 1)$ se puede obtener un polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$ que proporcione una aproximación de $f(x)$ tan buena como se desee.

(c) El punto $x = 2$ no pertenece al campo de validez, por lo tanto los valores de la función y la serie no coinciden. En particular, no se puede asegurar que exista algún polinomio de Taylor de $f(x)$ centrado en $x_0 = 0$ cuyo valor sea una aproximación aceptable de $f(x)$ para $x = 2$.

Ejemplo 5.2.8
Serie de Taylor en $x_0 = 0$ de $\ln(1 + x)$.

Se puede probar, aunque aquí no lo haremos, que $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ para $x \in (-1, 1]$, por lo tanto esta serie es la serie de Taylor de la función $f(x)$ y, en consecuencia, los polinomios de Taylor de $f(x)$ en $x_0 = 0$ son los truncamientos de la serie anterior.

Aplicación 5.2.9 (Aproximación de funciones)
Una de las aplicaciones más interesantes de las series de Taylor es aproximar los valores de una función usando la suma aproximada de una serie numérica. Vamos a ver algunos ejemplos. Si se considera, por ejemplo, la función $\ln(1 + x)$, se sabe que ella y sus derivadas son fáciles de evaluar en $x = 0$, pero no en todos los x reales. Para obtener valores de $\ln(1 + x)$ de manera aproximada se puede usar su serie de Taylor.

Ejemplo 5.2.10

(a) Para aproximar $\ln(\frac{3}{2})$, con un polinomio de Taylor de $f(x) = \ln(1+x)$ centrado en $x_0 = 0$, habría que evaluar dicho polinomio en $x = \frac{1}{2}$.

Sabemos que $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ para $x \in (-1, 1]$, y como $x = \frac{1}{2}$ es un punto del intervalo $(-1, 1]$, se puede asegurar que cualquier truncamiento de la serie de potencias evaluado en $x = \frac{1}{2}$ proporciona una aproximación de $f(\frac{1}{2})$. Es obvio que cuanto mayor sea el grado del polinomio considerado cabe esperar que la aproximación sea mejor.

Por ejemplo, si se considera un truncamiento de orden 10, es decir el polinomio de Taylor de grado 10 de $f(x)$ en $x_0 = 0$, se obtiene que una aproximación de $\ln(\frac{3}{2})$ es $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} \approx$ 0.40543465. Si se quiere estimar el error, se puede acotar el resto de Lagrange, R_{10}, o bien manejar otros resultados conocidos sobre series. En este caso, como la serie verifica las hipótesis de convergencia del criterio de Leibniz, se sabe que el error del truncamiento de orden n está acotado por $|a_{n+1}|$. Por tanto, el error estará acotado por $|a_{11}| \approx 4.4389 \cdot 10^{-5}$; es decir, es un error menor que 10^{-4}.

Si se desea obtener una aproximación de $\ln(\frac{3}{2})$ con un error menor que 10^{-6}, en este caso bastará con determinar n tal que $|a_{n+1}| = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}} < 10^{-6}$ y calcular S_n. El menor de los n que cumple esta desigualdad es $n = 15$, por lo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{15} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} \approx 0.40546576$ es la aproximación buscada.

(b) Para calcular $\ln(\frac{5}{2})$ de manera aproximada usando un polinomio de Taylor de $f(x) = \ln(1+x)$ centrado en $x_0 = 0$ habría que evaluar dicho polinomio en $x = \frac{3}{2}$.

Se sabe que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ para $x \in (-1, 1]$ y que los polinomios buscados son los truncamientos de esta serie, pero como el punto $x = \frac{3}{2}$ no pertenece al campo de validez del desarrollo, no se puede asegurar que exista algún polinomio que proporcione una aproximación aceptable.

Se pueden usar las propiedades de la función logaritmo para obtener la siguiente igualdad:

$$\ln(\frac{2}{5}) = -\ln(\frac{5}{2}).$$

Como además

$$\ln(\frac{2}{5}) = \ln(1 - \frac{3}{5})$$

y el punto $x = -3/5$ sí está en el campo de validez del desarrollo, se concluye que sí es posible aproximar $\ln(\frac{5}{2})$ mediante el polinomio de Taylor de $\ln(1+x)$.

Problemas

Problema 5.1
Dada la función $f(x) = e^{2x}$, *se pide:*

(a) *Hallar el polinomio de Taylor de* f *centrado en* $x_0 = 0$ *y de orden* 3.

(b) *Usar dicho polinomio para aproximar* e *y dar una cota del error cometido.*

(c) *Aproximar* e, *mediante un polinomio de Taylor de* f *centrado en* $x_0 = 0$, *con un error menor que* 10^{-2}.

Problema 5.2
Dada la función $f(x) = \ln(1 + x)$, *se pide:*

(a) *Hallar el polinomio de Taylor de* f *centrado en* $x_0 = 0$ *y de orden* 3.

(b) *Usar dicho polinomio para aproximar* $\ln(1'2)$ *y dar una cota del error cometido.*

(c) *Aproximar* $\ln(1'5)$, *mediante un polinomio de Taylor de* f *centrado en* $x_0 = 0$, *con un error menor que* 10^{-2}.

Problema 5.3
Dada la función $\operatorname{sen}(x)$, *se pide:*

(a) *Calcular su polinomio de Taylor centrado en* $x_0 = 0$ *y de orden* 3.

(b) *Usar dicho polinomio para aproximar* $\operatorname{sen}(1)$ *y* $\operatorname{sen}(2\pi + 1)$. *Obtener una cota del error cometido en cada aproximación. Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones trigonométricas, ¿cómo puede mejorarse la aproximación de* $\operatorname{sen}(2\pi + 1)$*?*

(c) *Determinar para qué valores de* x *se puede sustituir* $\operatorname{sen}(x)$ *por* $x - x^3/6$ *si el error permitido es* 10^{-3}.

(d) *Utilizando polinomios de Taylor y propiedades de las funciones trigonométricas, aproximar* $\operatorname{sen}(-1)$ *y* $\operatorname{sen}(-90)$ *con un error menor que* 10^{-3}.

(e) *Describir un procedimiento que permita aproximar el valor de* $\operatorname{sen}(x)$ *mediante un polinomio de Taylor con un error menor que* 10^{-3} *para cualquier valor de* x.

Problema 5.4
Dada la función $\cos(x)$, *se pide:*

(a) *Calcular su polinomio de Taylor centrado en* $x_0 = 0$ *y de orden* 2.

(b) *Usar dicho polinomio para aproximar* $\cos(0'5)$ *y* $\cos(2\pi + 0'5)$. *Obtener una cota del error cometido en cada aproximación. Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones trigonométricas, ¿cómo puede mejorarse la aproximación de* $\cos(2\pi + 0'5)$*?*

(c) *Determinar para qué valores de* x *se puede sustituir* $\cos(x)$ *por* $1 - x^2/2$ *si el error permitido es* 10^{-3}.

(d) *Utilizando polinomios de Taylor y propiedades de las funciones trigonométricas, aproximar* $\cos(-0'5)$ *y* $\cos(-90)$ *con un error menor que* 10^{-3}.

(e) *Describir un procedimiento que permita aproximar el valor de* $\cos(x)$ *mediante un polinomio de Taylor con un error menor que* 10^{-3} *para cualquier valor de* x.

Problema 5.5
Dada la función $f(x) = xe^x$, *se pide:*

(a) *Aproximar* $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, *mediante un polinomio de Taylor de* f *centrado en* $x_0 = 0$, *con un error menor que* 10^{-5}.

(b) *Utilizando el desarrollo en serie de Taylor de* e^x, *indicar razonadamente si es verdadera o falsa la siguiente igualdad:*

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}n!}$$

Problema 5.6
Se considera la función $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$ *y se pide:*

(a) *Aproximar* $\operatorname{sen}(2)$, *mediante un polinomio de Taylor de* f *centrado en* $x_0 = 0$, *con un error menor que* 10^{-4}.

(b) *Utilizando el desarrollo en serie de Taylor de* $\operatorname{sen} x$, *indicar razonadamente si es verdadera o falsa la siguiente igualdad:*

$$\operatorname{sen}(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Problema 5.7
(a) *Utilizar el desarrollo en serie de Taylor:*

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

válido si y sólo si $x \in (-1, 1)$, *para aproximar* $\ln(5)$ *con error menor que* 10^{-2}.

(b) *¿Se puede usar el mismo método para aproximar cualquier valor de* $\ln(y)$*?*

Problema 5.8
(a) *Utilizar el desarrollo en serie de Taylor:*

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

válido si y sólo si $x \in [-1, 1]$, *para aproximar* $\operatorname{arctg}(1)$ *con error menor que* 10^{-2}.

(b) *¿Se puede usar el mismo método para aproximar cualquier valor de* $\operatorname{arctg}(y)$*?*

Práctica

Objetivos

- Observar aproximaciones polinómicas de diversas funciones.
- Identificar los parámetros que influyen en la calidad de la aproximación por polinomios de Taylor.
- Conocer algunas limitaciones de las aproximaciones mediante polinomios de Taylor.

Convenio

Diremos que una función P es *fiable* para aproximar a otra función f en un punto x si las gráficas de P y f coinciden en x *a la escala en uso*.

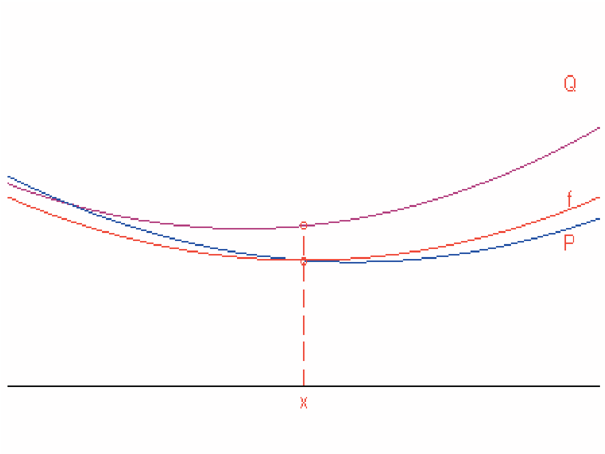

Figura 5.2: Concepto de fiabilidad.

Por ejemplo, en la figura 5.2 P es fiable para aproximar f en x, pero Q no lo es.

5.1 Aproximación mediante polinomios de Taylor

Se considera la función $f(x) = e^x$ y se quiere estudiar las aproximaciones que proporcionan sus polinomios de Taylor centrados en $x_0 = 0$. Se denotará por $T_n(x)$ el polinomio de Taylor de la función $f(x) = e^x$, centrado en $x_0 = 0$ y de orden n. Con Derive se pueden obtener dichos polinomios con la opción **Taylor** del menú de **Cálculo**.

(a) Usando escala 1:1, obtener la gráfica de la función $f(x)$ y representar sucesivamente los polinomios $T_1(x), T_2(x), ...$ hasta encontrar uno que sea fiable para aproximar el valor de $f(\frac{1}{2})$.

¿Cuál es el orden de dicho polinomio? $n = \boxed{}$

(b) Usar el polinomio $T_n(x)$ elegido en el apartado anterior para dar una aproximación numérica de $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{e}$.

$\sqrt{e} \simeq T_n(\frac{1}{2}) = \boxed{} \simeq \boxed{}$

(c) Acotar el error cometido en la aproximación anterior usando la expresión del resto de Lagrange:

$$|f(x) - T_n(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \text{ , con } c \text{ entre } x_0 \text{ y } x.$$

Obtener $f^{(n+1)}$ para el n determinado en el apartado anterior, acotar $\left|f^{(n+1)}(c)\right|$ en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ y concluir:

$\left|f(\frac{1}{2}) - T_n(\frac{1}{2})\right| \leq \boxed{}$

(d) ¿Es fiable el polinomio anterior para aproximar el valor de $\frac{1}{e}$?

Buscar otro polinomio de Taylor que sí lo sea. ¿Cuál es el orden de dicho polinomio?

$m = \boxed{}$

(e) Se quiere obtener una aproximación de $\frac{1}{e}$ con un error menor que 10^{-5}. Para ello se utiliza la expresión del resto de Lagrange con el siguiente método:

- En primer lugar, se obtiene la forma explícita de $f^{(n+1)}(x)$ para un n genérico, y a partir de ella se determina M, una cota superior de $\left|f^{(n+1)}(c)\right|$ en el intervalo adecuado (el determinado por x_0 y x).
  $f^{(n+1)}(x) =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $M =$
- En segundo lugar, se sustituyen en la expresión del resto de Lagrange M y el valor correspondiente de x y se resuelve la inecuación:

$$\frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1} < 10^{-5},$$

  El valor de n que se obtiene es: $n = \boxed{}$.
- Una vez determinado n, se define el polinomio $\mathtt{T(x) := TAYLOR(e^x, x, 0, n)}$ y se evalúa este polinomio en el valor de x correspondiente. En este caso, la aproximación ofrecida es:
  $\frac{1}{e} \simeq T(\quad) = \boxed{} \simeq \boxed{}$

5.2 Problemas

5.2.1 Opción 1

(a) Se considera la función $f(x) = \cos(\frac{x}{3})$. Se pide:

(i) Obtener los polinomios de Taylor de órdenes 4 y 5 centrados en $x_0 = 0$, calcular con ellos una aproximación de $\cos(1)$ y dar una cota de error.

(ii) Obtener una aproximación de $\cos(1)$, usando el resto de Lagrange, con un error menor que 10^{-5}.

(b) Se considera la función $f(x) = \arctan(x)$. Se pide:

(i) Calcular sus polinomios de Taylor centrados en $x_0 = 0$ y de órdenes 2, 5, 7 y 10. Usando escala 1:1, representar dichos polinomios junto con la propia función. Marcar con $\times$ los casos en que la aproximación dada por estos polinomios es fiable para los siguientes valores:

		Orden del desarrollo			
Valor a aproximar	Valor de x	2	5	7	10
$\arctan(0'25)$					
$\arctan(0'75)$					
$\arctan(1'5)$					

A la vista de las gráficas, valorar si se puede obtener una aproximación tan buena como se quiera de $\arctan(1'5)$ mediante un polinomio de Taylor de $\arctan(x)$ centrado en $x_0 = 0$.

(ii) Sabiendo que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ si y sólo si $x \in [-1, 1]$, buscar una explicación del resultado anterior.

(iii) Obtener una aproximación de $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ con un error menor que 10^{-5} evaluando la expresión $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ y calculando el valor aproximado de la suma de la serie numérica.

5.2.2 Opción 2

(a) Se considera la función $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$. Se pide:

(i) Obtener los polinomios de Taylor de órdenes 5 y 6 centrados en $x_0 = 0$, calcular con ellos una aproximación de $\operatorname{sen}(1)$ y dar una cota de error.

(ii) Obtener una aproximación de $\operatorname{sen}(1)$, usando el resto de Lagrange, con un error menor que 10^{-5}.

(b) Se considera la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Se pide:

(i) Calcular sus polinomios de Taylor centrados en $x_0 = 0$ y de órdenes 5, 10, 15 y 20. Usando escala 1:1, representar dichos polinomios junto con la propia función. Marcar con $\times$ los casos en que la aproximación dada por estos polinomios es fiable para los siguientes valores:

		Orden del desarrollo			
Valor a aproximar	Valor de x	5	10	15	20
$\ln(1'25)$					
$\ln(1'81)$					
$\ln(2'44)$					

A la vista de las gráficas, valorar si se puede obtener una aproximación tan buena como se quiera de $\ln(2'44)$ mediante un polinomio de Taylor de $\ln(1 + x^2)$ centrado en $x_0 = 0$.

(ii) Sabiendo que $\ln(1 + x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n}$ si y sólo si $x \in [-1, 1]$, buscar una explicación del resultado anterior.

(iii) Evaluando la expresión $\ln(1 + x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n}$ en el punto adecuado y calculando el valor aproximado de la suma de la serie numérica, obtener una aproximación de $\ln(1'64)$ con un error menor que 10^{-5}.

Tema 6

Aproximación global de funciones: Polinomio interpolador

Teoría

A veces es necesario aproximar funciones en un intervalo fijado de antemano y dentro de ese intervalo sólo es posible conocer los valores de la función en algunos puntos. En estos casos la construcción de polinomios de Taylor no resulta viable y la técnica más sencilla de obtención de polinomios aproximadores es la de *interpolación*, que consiste básicamente en construir un polinomio que coincida con la función en los puntos dados. Ejemplos claros de esta situación corresponden a fenómenos experimentales en los que se conoce el valor de una función en un conjunto de datos y se quiere predecir o estimar el valor de la función en otro dato sin realizar el experimento correspondiente. Por ejemplo la medición del tiempo de ejecución de un algoritmo en función del número de datos de entrada, el número de conexiones a una página web en un instante determinado del día, etc.

6.1 Polinomio interpolador

Proposición 6.1.1
Dados $n+1$ puntos de abscisas distintas $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ existe un único polinomio $P_n(x)$ de grado menor o igual que n de modo que $P_n(x_i) = y_i$ para todo $i \in \{0, .., n\}$.

Este polinomio $P_n(x)$ recibe el nombre de polinomio interpolador *en los puntos dados, y es el polinomio de menor grado que "pasa" por esos puntos.*

Demostración.
Se considera un polinomio de grado n escrito de la forma $P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, es decir, usando la base canónica $[1, x, \ldots, x^n]$ del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que n. Si se imponen las condiciones $P_n(x_i) = y_i$ para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, se obtiene un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas cuya matriz de coeficientes tiene por determinante el de Vandermonde, que es distinto de cero, y por tanto el sistema es compatible determinado y tiene solución única. En definitiva, dicho polinomio existe y como las coordenadas en un espacio vectorial son únicas, cualquier polinomio que verifique las condiciones requeridas tendrá las coordenadas definidas por la solución del sistema anterior, es decir el polinomio es único. □

Proposición 6.1.2 (Método de Lagrange)
Dados $n+1$ puntos de abscisas distintas $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$, si se define para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

el polinomio

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

es el polinomio interpolador de dichos puntos.

Demostración.
Los polinomios $L_i(x)$ son de grado n y verifican que $L_i(x_i) = 1$ y $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$. Por lo tanto, el polinomio

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

verifica que $P_n(x_i) = y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + \cdots + y_i \cdot 1 + \cdots + y_n \cdot 0 = y_i$ para todo $i \in \{0, 1, \dots n\}$, y como consecuencia, P_n es el polinomio interpolador.

□

Ejemplo 6.1.3
Para calcular el polinomio interpolador en los puntos de la siguiente tabla se puede trabajar como sigue:

i	0	1	2	3
x_i	2	3	-1	4
y_i	1	2	3	4

Usando el método de Lagrange, en primer lugar se calculan los polinomios L_i:

$$L_0(x) = \frac{(x-3)(x+1)(x-4)}{(2-3)(2+1)(2-4)} \qquad L_1(x) = \frac{(x-2)(x+1)(x-4)}{(3-2)(3+1)(3-4)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1-2)(-1-3)(-1-4)} \qquad L_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(4-2)(4-3)(4+1)}.$$

Después se construye la combinación lineal correspondiente:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1 \cdot \left(\frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4)\right) + 2 \cdot \left(\frac{-1}{4}(x-2)(x+1)(x-4)\right) \\ &+ 3 \cdot \left(\frac{-1}{60}(x-2)(x-3)(x-4)\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{10}(x-2)(x-3)(x+1)\right) \end{aligned}$$

y simplificando se tiene:

$$P_3(x) = \frac{1}{60}x^3 + \frac{7}{20}x^2 - \frac{16}{15}x + \frac{8}{5}.$$

Nota 6.1.4
Dada una función f, llamaremos polinomio interpolador de dicha función en los puntos de abscisas $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ al polinomio interpolador en los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$, siendo $y_i = f(x_i)$.

Ejemplo 6.1.5
Dada la función $f(x) = \cos(x) + x^2$ se puede calcular su polinomio interpolador en los puntos de abscisas $x_0 = -\frac{\pi}{4}, x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{4}$ trabajando como en el ejemplo anterior:

$$L_0(x) = \frac{8}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{4}), \quad L_1(x) = -\frac{16}{\pi^2}(x + \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) \quad \text{y} \quad L_2(x) = \frac{8}{\pi^2}(x + \frac{\pi}{4})x.$$

En consecuencia

$$P_2(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi^2}{16})\frac{8}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{16}{\pi^2}(x + \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) + (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi^2}{16})\frac{8}{\pi^2}(x + \frac{\pi}{4})x =$$

$$= \frac{\pi^2 + 8\sqrt{2} - 16}{\pi^2}x^2 + 1$$

El método de Lagrange para la obtención del polinomio interpolador es cómodo pero tiene algunos inconvenientes. Tal vez el más significativo sea que si se tiene el polinomio interpolador en un conjunto de n puntos y se necesita obtener el del conjunto obtenido al añadir un punto más, hay que iniciar los cálculos desde el principio.

Otra forma de obtener el polinomio interpolador, que evita este inconveniente, es la que se apoya en el uso de diferencias divididas y sus propiedades.

Definición 6.1.6 (Diferencias divididas)
Dada una función $y = f(x)$ y los puntos $\{(x_i, f(x_i)) : i = 0 \ldots n\}$, denominamos:

(a) *Diferencias divididas de primer orden* a las expresiones:

$$[x_i, x_{i+1}]_f = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \text{ con } i \in \{0, .., n-1\}$$

(b) *Diferencias divididas de segundo orden* a las expresiones:

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]_f = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}]_f - [x_i, x_{i+1}]_f}{x_{i+2} - x_i} \text{ con } i \in \{0, .., n-2\}$$

(c) *Diferencia dividida de orden n* a la expresión:

$$[x_0, x_1, ..., x_n]_f = \frac{[x_1, ..., x_n]_f - [x_0, ..., x_{n-1}]_f}{x_n - x_0}$$

Otra notación que se suele utilizar es $f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n}]$ o simplemente $[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n}]$.

Las diferencias divididas se suelen representar en tablas de la forma:

		Diferencias divididas		
x_i	y_i	1^{er} orden	2^o orden	3^{er} orden
x_0	y_0			
		$[x_0, x_1]$		
x_1	y_1		$[x_0, x_1, x_2]$	
		$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	y_2		$[x_1, x_2, x_3]$	
		$[x_2, x_3]$		
x_3	y_3			

Ejemplo 6.1.7
Dados los puntos de la tabla:

x_i	2	3	-1	4
y_i	1	2	3	4

vamos a obtener la diferencia dividida de orden 3.

		Diferencias divididas		
x_i	y_i	1^{er} orden	2^o orden	3^{er} orden
2	1			
		1		
3	2		$\frac{5}{12}$	
		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{60}$
-1	3		$\frac{9}{20}$	
		$\frac{1}{5}$		
4	4			

Proposición 6.1.8
El polinomio interpolador en los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ *se puede expresar en términos de las diferencias divididas de la forma:*

$$P_n(x) = y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + [x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

y recibe el nombre de fórmula de Newton en diferencias divididas*.*

Algebraicamente, esto significa que los primeros elementos de las columnas de la tabla de diferencias divididas son las coordenadas del polinomio interpolador respecto de la base

$$[1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \cdots , (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})]$$

del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que n.

Ejemplo 6.1.9
Dados los puntos de la tabla:

x_i	2	3	-1	4
y_i	1	2	3	4

vamos a obtener el polinomio interpolador mediante la fórmula de Newton.

De la tabla de diferencias divididas del ejercicio anterior se deduce:

$$P_3(x) = 1 + (x - 2) + \frac{5}{12}(x - 2)(x - 3) + \frac{1}{60}(x - 2)(x - 3)(x + 1).$$

Es decir

$$P_3(x) = \frac{1}{60}x^3 + \frac{7}{20}x^2 - \frac{16}{15}x + \frac{8}{5}$$

6.2 Error del polinomio interpolador

Una vez que se ha visto la forma de obtener el polinomio interpolador, surge la pregunta de analizar la calidad de la aproximación que proporciona. Igual que ocurría con los polinomios de Taylor se tiene garantizada la exactitud en los puntos que se usan en la construcción, en este caso $f(x_i) = P_n(x_i)$ para todo $i \in \{0, .., n\}$, pero en el resto no se sabe nada. Cuando se conocen las derivadas de la función que se está interpolando se tiene la siguiente igualdad.

Proposición 6.2.1 (Fórmula del error)
Sea $a = \min\{x_i\}, b = \max\{x_i\}$ con $i \in \{0, .., n\}$ y sea $f(x)$ una función definida sobre $[a, b]$, $n+1$ veces derivable en (a, b). Para cada $x \in [a, b]$ existe un $c \in (a, b)$ tal que:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

siendo $P_n(x)$ el polinomio interpolador en los puntos $(x_0, f(x_0)), ..., (x_n, f(x_n))$.

Proposición 6.2.2
En las condiciones anteriores una cota del error absoluto cometido, al aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$, viene dada por:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

siendo M una cota superior (si existe) de $\left|f^{(n+1)}\right|$ en (a, b).

Esta expresión del error guarda cierta similitud con la correspondiente a los polinomios de Taylor. En lugar de aparecer $|x - x_0|^{n+1}$, la potencia $(n+1)$-ésima de la distancia del punto x al x_0, aparece $\prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$ que mide el producto de distancias del punto x a los x_i. Este término indica que, sin contar con la influencia del valor de la derivada, el error será mayor en los puntos que maximicen este producto de distancias. En consecuencia, si hay que elaborar una tabla de $n+1$ puntos para aproximar los valores de una función en un intervalo dado, sería bueno poder elegirlos de modo que el máximo del producto anterior sea mínimo (tarea no trivial, pero tampoco imposible).

Ejemplo 6.2.3
Para calcular una cota del error que se comete, en el ejemplo 6.1.5, al aproximar $f(\frac{\pi}{6})$ utilizando el polinomio interpolador, se usa que $\left|f^{(3)}(x)\right| = |\text{sen}(x)| \leq 1$, y en consecuencia:

$$\left|R_2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| \leq \frac{1}{3!}\left|\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq 0.03$$

Ejemplo 6.2.4
Si, en el mismo ejemplo, se quiere calcular una cota del error que se comete al utilizar el polinomio interpolador en cualquier punto x del intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, habrá que dar una cota válida para todos los puntos del mismo. En general, la acotación más simple, aunque no la más fina, se obtiene mayorando cada factor del producto por la longitud del intervalo considerado, en este caso:

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{3!}\left|(x + \frac{\pi}{4})(x)(x - \frac{\pi}{4})\right| \leq \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \leq 0.65$$

Una cota más fina también válida para todo $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ puede ser la siguiente:

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{3!}\left|(x + \frac{\pi}{4})(x)(x - \frac{\pi}{4})\right| \leq \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{\pi}{2} \leq 0.162$$

que se obtiene usando que dos de las tres distancias que aparecen son menores que $\dfrac{\pi}{4}$.

6.3 Interpolación a trozos

El problema que se plantea es el siguiente: si el número de puntos de interpolación crece, ¿se rebaja el error cometido al aproximar una función $f(x)$ por su polinomio de interpolación?

Si en la expresión del error se considera la primera parte

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|, \text{ con } c \in (a,b),$$

sólo hay garantía de que decrece rápidamente para algunas funciones como $\operatorname{sen}(x)$ o e^x, para las cuales se puede obtener una cota de su derivada n-ésima que no depende de n. Pero para otras funciones, esta expresión crece de acuerdo con n.

La segunda parte está acotada por

$$\max_{a\le x\le b} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

y parece claro que, en general, este máximo puede aumentar al incrementar el número de puntos en el intervalo $[a,b]$ si $b-a>1$. Como el intervalo donde queremos aproximar $f(x)$ viene fijado normalmente de antemano, una solución sería dividir el intervalo en subintervalos suficientemente pequeños y aproximar $f(x)$ en cada uno de ellos por medio de un polinomio adecuado. Esto nos lleva a la interpolación polinómica a trozos.

Definición 6.3.1 (Interpolación lineal a trozos)
Sean los valores $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ las abscisas de $n+1$ puntos. Aproximamos entonces la función $f(x)$ en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ por la recta que une los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. La función definida a trozos de esta forma se denomina *función interpoladora lineal a trozos* (véase figura 6.1).

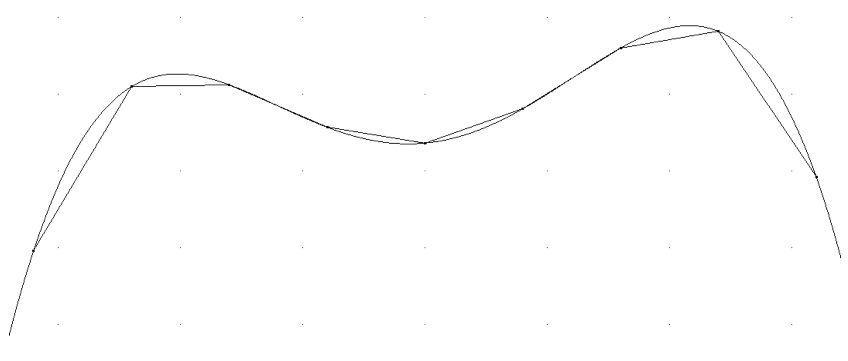

Figura 6.1: Interpolación lineal a trozos.

Ejemplo 6.3.2
Se considera la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0,\pi]$. Si se desea aproximar $f(\frac{\pi}{3})$ mediante interpolación lineal a trozos en 5 puntos, $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$, se deberá elegir el segmento de recta que une los puntos de abscisas $x=\frac{\pi}{4}$ y $x=\frac{\pi}{2}$, ya que $\frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Dicha recta es $P(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}(x - \frac{\pi}{4})$ y su evaluación en $x = \frac{\pi}{3}$ es $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$, por lo tanto

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{3} \approx 0'805$$

Proposición 6.3.3
Sea f dos veces derivable en (a, b) y $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in (a, b)$. Dado un punto cualquiera $x \in (a, b)$, si aproximamos $f(x)$ mediante interpolación lineal a trozos en $[a, b]$, una cota del error cometido es:

$$\frac{M}{8} \max_i |x_{i+1} - x_i|^2 .$$

Demostración.
Dado un punto arbitrario x del intervalo considerado, existen dos puntos x_i y x_{i+1} tales que $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Considerando el polinomio de grado uno correspondiente, y aplicando la fórmula de error general, se tiene que el error cometido en cualquier punto del intervalo (x_i, x_{i+1}) es:

$$|R(x)| = \frac{|f''(c)|}{2} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| .$$

Como el máximo de la función $|(x - x_i)(x - x_{i+1})|$ en dicho intervalo se alcanza en el punto $(x_i + x_{i+1})/2$ y toma el valor $|x_{i+1} - x_i|^2 /4$, resulta:

$$|R(x)| \leq \frac{|f''(c)|}{2} \frac{|x_{i+1} - x_i|^2}{4} \leq \frac{M}{8} |x_{i+1} - x_i|^2 .$$

Considerando un x genérico del intervalo $[a, b]$ se tiene que una cota del error es:

$$\frac{M}{8} \max_i |x_{i+1} - x_i|^2 .$$

□

Nota 6.3.4
Obsérvese que el error se puede hacer tan pequeño como se quiera sin más que ir dividiendo el intervalo $[a, b]$ en subintervalos más pequeños.

En el caso particular de que los puntos estén equiespaciados, se tiene que $|x_{i+1} - x_i| = h$ para todo i y por tanto la cota del error anterior queda:

$$M\frac{h^2}{8}.$$

Este tipo de aproximación es muy buena cuando la distancia entre los puntos de interpolación es pequeña, por lo que resulta muy útil para obtener aproximaciones numéricas, pero tiene el inconveniente de que la función interpoladora lineal a trozos no es derivable en los puntos de interpolación.

Ejemplo 6.3.5
Supongamos que queremos aproximar la función $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}(x)$ mediante interpolación lineal a trozos en 7 puntos (6 subintervalos) del intervalo $[0, 3]$. Para acotar el error, hallamos

una cota de la derivada segunda de f: $f''(x) = -2e^{-x}\cos(x)$, luego $|f''(x)| \leq 2$ para todo $x \in [0,3]$. Una cota del error será entonces

$$\frac{2}{8}\left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{16} < 0'07.$$

Si queremos saber en cuántos subintervalos n habrá que dividir el intervalo de partida para que el error sea menor que 10^{-3}, deberemos resolver la inecuación

$$\frac{2}{8}\left(\frac{3}{n}\right)^2 < 10^{-3}.$$

Despejando n se obtiene: $n > \sqrt{2250}$, lo que se verifica para $n = 48$, por lo tanto basta tomar 48 subintervalos, esto es, 49 puntos equiespaciados.

Problemas

Problema 6.1
Dada la tabla de valores de la función f siguiente,

x_i	0	2	-1	1	-2
$f(x_i)$	1	-1	-1	2	-1

se pide:

(a) *Calcular el polinomio interpolador de f en los cuatro primeros puntos de la tabla.*

(b) *Obtener el polinomio interpolador de f en los cinco puntos de la tabla.*

(c) *Utilizar los polinomios anteriores para aproximar $f(1/2)$.*

(d) *¿Es posible acotar el error cometido al utilizar dichos polinomios para evaluar la función f en puntos que no sean de la tabla?*

Problema 6.2
Se han tomado los tiempos de ejecución de un programa, en segundos, sobre entradas de tamaño n para diversos valores de n, obteniéndose los resultados siguientes:

n	10	20	30	40	50
$t(n)$	45	285	725	1365	2205

(a) *Usar estos datos para aproximar, mediante interpolación cuadrática, el tiempo de ejecución para $n = 25$.*

(b) *Obtener otra aproximación mediante interpolación cúbica.*

(c) *¿Es posible acotar el error cometido al utilizar estos polinomios para evaluar la función t en puntos que no sean de la tabla?*

Problema 6.3
Determinar el polinomio interpolador de la función $f(x) = -x^3 + x + 1$ en las abscisas

$$\{0'0017, 0'1325, 0'1379, 6'2417\}.$$

Dar una cota del error cometido.

Problema 6.4

(a) *¿Puede haber cuatro puntos del plano que definan un polinomio de interpolación de grado 2?*

(b) *Hallar tres puntos del plano que definan un polinomio interpolador de grado 1.*

Problema 6.5
Sabiendo que la función $P(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2$ es un polinomio en n de grado 3, usar interpolación para obtener dicho polinomio.

Problema 6.6
Sabiendo que la función $P(n) = \sum_{i=0}^{n} i^3$ *es un polinomio en* n *de grado* 4*, usar interpolación para obtener dicho polinomio.*

Problema 6.7
En una sucursal bancaria hay una caja fuerte cuya combinación, por razones de seguridad, se quiere distribuir entre el director, el subdirector y el cajero, de modo que ninguno de ellos pueda abrir la caja por sí solo, pero dos cualesquiera puedan hacerlo.

Para resolver el problema, la presidenta del banco, experta matemática, diseña un sistema de compartición de secretos*: elige, privadamente, un número natural,* $k \in \mathbb{N}$*, que será la combinación de la caja, y un polinomio,* $P(x) := k + ax$*, con* $a \in \mathbb{N}$*. A continuación, calcula* $P(1)$ *y se lo comunica al director, calcula* $P(2)$ *y se lo comunica al subdirector, y calcula* $P(3)$ *y se lo comunica al cajero. Además, informa a cada uno de ellos del proceso seguido, pero sin revelarles los valores de* k *y* a*.*

En estas condiciones, se pide:

(a) *Indicar qué deben hacer el subdirector, experto abogado que dispone de* $P(2) = 37836$*, y el cajero, experto economista que conoce* $P(3) = 41046$*, para obtener la combinación.*

(b) *Probar que ninguna de las tres personas citadas puede obtener la combinación por sí sola.*

(c) *Indicar cómo modificar el sistema de compartición de secretos para que sea imprescindible la presencia de las tres a la hora de abrir la caja. Puede utilizarse el dato adicional de que el director es informático experto.*

Problema 6.8
En una sucursal bancaria hay una caja fuerte cuya combinación, por razones de seguridad, se quiere distribuir entre el director, el subdirector, el secretario y el cajero, de modo que ninguno de ellos pueda abrir la caja por sí solo, por parejas tampoco puedan hacerlo, pero tres cualesquiera sí.

Para resolver el problema, la presidenta del banco, experta matemática, diseña un sistema de compartición de secretos*: elige, privadamente, un número entero,* $k \in \mathbb{Z}$*, que será la combinación de la caja, y un polinomio,* $P(x) := k + ax + bx^2$*, con* $a, b \in \mathbb{Z}$*. A continuación, calcula* $P(1)$ *y se lo comunica al director, calcula* $P(2)$ *y se lo comunica al subdirector, calcula* $P(3)$ *y se lo comunica al secretario y calcula* $P(4)$ *y se lo comunica al cajero. Además, informa a cada uno de ellos del proceso seguido, pero sin revelarles los valores de* k*,* a *y* b*.*

En estas condiciones, se pide:

(a) *Indicar qué deben hacer el subdirector, que dispone de* $P(2) = 37836$*, el secretario, que dispone de* $P(3) = 45356$ *y el cajero, que conoce* $P(4) = 41046$*, para obtener la combinación.*

(b) *Probar que, reunidas dos cualesquiera de las personas citadas, no pueden obtener la combinación.*

(c) *Indicar cómo modificar el sistema de compartición de secretos para que sea imprescindible la presencia de los cuatro directivos a la hora de abrir la caja. Puede utilizarse el dato adicional de que el director es informático experto.*

Problema 6.9
Dada la función $\log_3(x)$, *se pide:*

(a) *Obtener su polinomio interpolador en los puntos de abscisas* $\{1/3, 1, 3, 9\}$.

(b) *Aproximar* $\log_3(2)$ *usando el polinomio anterior y dar una cota del error cometido.*

(c) *Aproximar* $\log_3(2)$ *mediante interpolación lineal y dar una cota del error cometido.*

Problema 6.10
Dada la función $\log_2(x)$, *se pide:*

(a) *Obtener su polinomio interpolador en los puntos de abscisas* $\{1/2, 1, 2, 4\}$.

(b) *Aproximar* $\log_2(1'5)$ *usando el polinomio anterior y dar una cota del error cometido.*

(c) *Aproximar* $\log_2(1'5)$ *mediante interpolación lineal y dar una cota del error cometido.*

Problema 6.11
Se ha tabulado la función $\mathrm{sen}(x)$, *en el intervalo* $[0, \pi/2]$, *para valores de* x *que equidistan* $h = 0'05$.

(a) *Dar una cota del error que se comete al aproximar* $\mathrm{sen}(x)$, *mediante interpolación lineal y cuadrática, para un valor* x *cualquiera de dicho intervalo.*

(b) *Indicar qué abscisas hay que elegir para aproximar* $\mathrm{sen}(0'32)$ *con interpolación cuadrática y dar una cota del error de la aproximación que se obtenga.*

Problema 6.12
Se dispone de una tabla de valores de la función $f(x) = e^x + \mathrm{sen}(x)$ *con puntos equiespaciados en el intervalo* $[0, 5]$ *y una longitud de paso* $h = 0'5$.

(a) *Dar una cota del error que se comete al aproximar* $f(x)$, *mediante interpolación lineal y cuadrática, para un valor* x *cualquiera de dicho intervalo.*

(b) *Indicar qué abscisas hay que elegir para aproximar* $f(2'7)$ *con interpolación cuadrática y dar una cota del error de la aproximación que se obtenga.*

Problema 6.13
Se quiere preparar una tabla de valores equiespaciados para la función e^x *en el intervalo* $[0, 1]$. *Calcular la longitud del paso para que la interpolación lineal a trozos proporcione un error menor que* 10^{-3}.

Problema 6.14
Se quiere preparar una tabla de valores equiespaciados para la función $\cos(x)$ *en el intervalo* $[0, \pi]$. *Calcular la longitud del paso para que la interpolación lineal a trozos proporcione un error menor que* 10^{-4}.

Práctica

Objetivos

- Utilizar polinomios de interpolación para estimar valores de funciones a partir de una tabla de datos.
- Analizar la aproximación por medio de funciones interpoladoras, estudiando el error.
- Comparar la aproximación local dada por el polinomio de Taylor con la global obtenida mediante interpolación.

6.1 Interpolación en tablas

Se considera la tabla:

x_i	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$f(x_i)$	4	2.2	1.4	3.2	9	12.6	9.1	5	2.7

siendo $f(x_i)$ la temperatura (expresada en grados centígrados) en una ciudad C a las x_i horas de un día D.

Se quiere estimar la temperatura a cualquier hora de dicho día y para ello se emplearán polinomios de interpolación.

Una tabla de puntos se introduce en DERIVE como un vector de pares de números, en la forma `t:= [[x1,y1],[x2,y2],..,[xn,yn]]`, donde suele ser $y_i = f(x_i)$ para una cierta función f. Para obtener el polinomio interpolador en la tabla `t`, expresado en la variable x, se puede usar la instrucción `POLY_INTERPOLATE(`t`, `x`)`.

(a) Estimar la temperatura que había a las 2 de la tarde mediante interpolación lineal en los puntos adecuados. Estimarla también mediante interpolación cúbica, eligiendo adecuadamente los puntos en la tabla.

	Abscisas empleadas	Polinomio, P_n	Temperatura estimada
Interpolación lineal			
Interpolación cúbica			

(b) Estimar, mediante interpolación cuadrática, la temperatura que habría a la una de la madrugada del día siguiente.

Abscisas empleadas	Polinomio, P_2	Temperatura estimada

6.2 Interpolación de funciones

Se considera la función $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Hallar $P_2(x)$, polinomio interpolador de $f(x)$ en los puntos de abscisas $\{1, 4, 9\}$. (Para construir la tabla de puntos se puede utilizar: `VECTOR([x,f(x)],x,[1,4,9])` .) A partir de $P_2(x)$ obtener una aproximación de $\sqrt{2}$ y dar una cota del error cometido utilizando la siguiente expresión del error absoluto:

$$|f(x) - P_n(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \; .$$

	Polinomio P_2	Valor aproximado de $\sqrt{2}$	Cota del error
Interpolación cuadrática			

(b) Hallar $P_4(x)$, polinomio interpolador de $f(x)$ en los puntos de abscisas $\{0, 1, 4, 9, 16\}$ y representar gráficamente $f(x)$, $P_2(x)$ y $P_4(x)$ (situar el cursor en el punto $(4, 1)$, utilizar la opción de menú `Centrar en el cursor` y la escala `x:2`). ¿Se puede asegurar que al aumentar el número de puntos de interpolación se mejora la aproximación?

Obtener una aproximación de $\sqrt{2}$ a partir de $P_4(x)$: $\sqrt{2} \approx$

(c) Representar gráficamente $L(x)$, función interpoladora lineal a trozos de $f(x)$ en los puntos de abscisas $\{0, 1, 4, 9, 16\}$ (basta representar la tabla de puntos seleccionando la opción de menú `Opciones/pantalla/puntos/unir`). ¿En qué intervalos es mejor la aproximación dada por $L(x)$ que la obtenida mediante $P_4(x)$?

(d) Obtener una aproximación de $\sqrt{2}$ a partir de $L(x)$ y dar una cota del error cometido.

Abscisas empleadas	Polinomio P_1	Valor aproximado de $\sqrt{2}$	Cota del error

(e) Se quiere elaborar una tabla de puntos equiespaciados para la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[1, 9]$. Determinar una longitud de paso h para que la interpolación lineal a trozos proporcione un error menor que 10^{-2}.

Una vez elegido h, construir la tabla y representar gráficamente la interpolación lineal a trozos junto con la función $f(x) = \sqrt{x}$. (Para construir la tabla de puntos se puede utilizar: `VECTOR([x,f(x)],x,1,9,h)` .)

6.3 Problema

6.3.1 Opción 1

Dada la función $f(x) = \cos(2x)$, se quiere hallar una aproximación de $\cos(1)$ y $\cos(-4)$.

(a) Representar gráficamente $f(x)$ y:

$T_4(x)$: polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x)$ en $x_0 = 0$,

$P_4(x)$: polinomio interpolador de $f(x)$ en las abscisas $\{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ y

$L(x)$: función interpoladora lineal a trozos de $f(x)$ en las abscisas $\{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

A la vista de las gráficas, indicar cuál de dichas funciones da la mejor aproximación para $\cos(1)$ y $\cos(-4)$.

(b) Para cada caso, obtener el valor aproximado y dar una cota del error cometido.

6.3.2 Opción 2

Dada la función $f(x) = \log_2(x)$ (en DERIVE se escribe `LOG(x,2)`), se quiere hallar una aproximación de $\log_2(3)$, y $\log_2\left(\frac{1}{3}\right)$.

(a) Representar gráficamente $f(x)$ y:

$T_4(x)$: polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x)$ en $x_0 = 1$,

$P_4(x)$: polinomio interpolador de $f(x)$ en las abscisas $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\}$ y

$L(x)$: función interpoladora lineal a trozos de $f(x)$ en las abscisas $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\}$.

A la vista de las gráficas, indicar cuál de dichas funciones da la mejor aproximación para $\log_2(3)$, y $\log_2\left(\frac{1}{3}\right)$. (En algún caso será necesario utilizar las opciones de zoom.)

(b) Para cada caso, obtener el valor aproximado y dar una cota del error cometido.

Tema 7

Integración

Teoría

El concepto de integral está históricamente ligado al problema del cálculo del área de una región plana arbitraria. Si f es una función continua y positiva en un intervalo $[a, b]$, la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$ mide el área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ (véase figura 7.1).

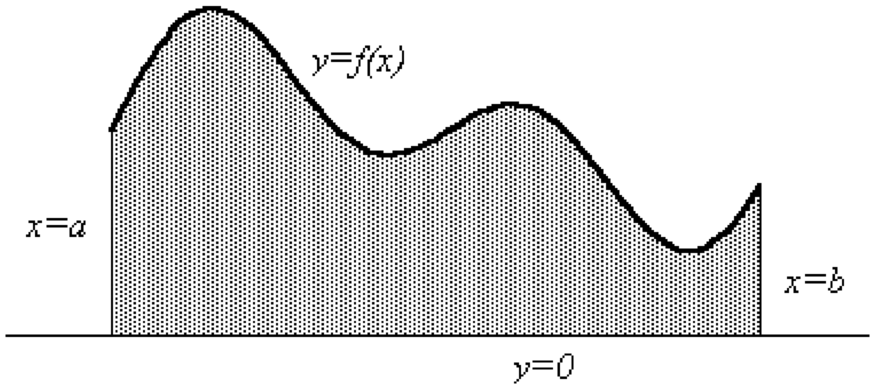

Figura 7.1: Área bajo una curva.

No obstante, para la definición de integral no es necesario que la función sea positiva ni continua. Además, la integral no solo sirve para calcular áreas. Son muchos los problemas en los que se conoce la variación de una determinada magnitud respecto del tiempo e interesa conocer el valor de esa magnitud en cada instante. Dicho valor también viene dado por una integral.

Actualmente, la integración es un campo del análisis matemático con infinidad de aplicaciones. La integral es básicamente un instrumento de medida y pueden usarse integrales para medir, entre otras cosas, los beneficios de una empresa, la probabilidad de que se produzca un determinado error en una medición, la intensidad de la corriente en un circuito eléctrico y de muchas otras magnitudes físicas.

El contenido de este tema incluye, en primer lugar, a modo de preliminares, la definición de la integral de Riemann[1] donde se pueden encontrar también las propiedades básicas de la

[1]Bernhard Riemann, matemático alemán (1826-1866).

integral y algunos ejemplos ilustrativos. En segundo lugar, ya dentro de la materia a impartir en el curso, se estudian las funciones definidas por integrales y el teorema fundamental del cálculo. A continuación se presentan los métodos del trapecio y de Simpson[2] compuestos para calcular integrales aproximadas, y para finalizar el tema, y el curso, se verá una introducción a las integrales impropias, incluyendo los ejemplos básicos y la definición de la función *gamma.*

7.0 Preliminares

A lo largo de esta sección vamos a desarrollar la teoría de la integral de Riemann, que consiste básicamente en aproximar el área por la suma de las áreas de unos rectángulos, que serán las llamadas sumas inferiores y sumas superiores.

Definición 7.0.1 (Partición)
Dado un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$, se llama *partición* de $[a, b]$ a una colección finita de puntos del intervalo, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tales que $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$.

El intervalo $[a, b]$ queda dividido en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1 \ldots n\}$.

Definición 7.0.2 (Sumas inferiores y superiores)
Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Las *sumas inferior* y *superior* de f en relación a P, denotadas $L(P, f)$ y $U(P, f)$, respectivamente, se definen (figuras 7.2 y 7.3) como:

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i \qquad \text{donde} \quad m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\},$$

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i \qquad \text{donde} \quad M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\},$$

donde $\inf A$ es el ínfimo del conjunto A, que se define como la mayor de las cotas inferiores de A, y $\sup A$ es el supremo del conjunto A, que se define como la menor de las cotas superiores de A.

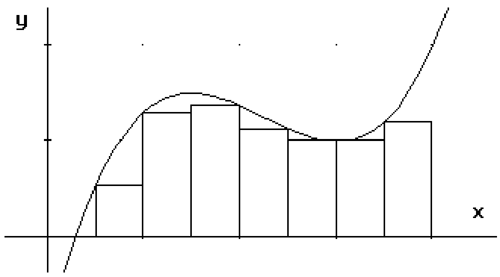

Figura 7.2: Una suma inferior.

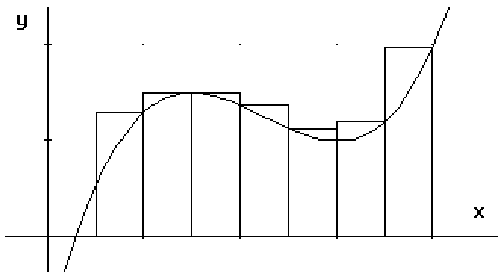

Figura 7.3: Una suma superior.

Ejemplo 7.0.3
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ una función constante, $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$. Se considera una partición cualquiera $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$. Entonces

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\} = c$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\} = c$$

[2]Thomas Simpson, inventor y matemático británico (1710-1761).

para todo $i \in \{1 \dots n\}$. Por lo tanto, las sumas inferiores y superiores de f respecto de P son

$$\begin{aligned} L(P,f) = U(P,f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})c &= (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \cdots + x_n - x_{n-1})c \\ &= c(x_n - x_0) = c(b-a). \end{aligned}$$

Ejemplo 7.0.4
Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función identidad, es decir $f(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$. Consideremos la partición $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, o lo que es lo mismo, $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i = \frac{i}{n}$ para $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Entonces, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\} = \inf\{x : x_{i-1} \le x \le x_i\} = x_{i-1} = \tfrac{i-1}{n} \quad \text{y} \\ M_i &= \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\} = \sup\{x : x_{i-1} \le x \le x_i\} = x_i = \tfrac{i}{n}, \end{aligned}$$

pues al ser f creciente el valor mínimo lo alcanza en el extremo inferior del intervalo, y el valor máximo, en el extremo superior. Teniendo en cuenta que $x_i - x_{i-1} = 1/n$, las sumas inferiores y superiores de f respecto de P_n son

$$\begin{aligned} L(P_n, f) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}, \\ U(P_n, f) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{i}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{(n+1)n}{2} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Para llegar a la definición de integral, necesitamos unas propiedades de las sumas superiores e inferiores:

Proposición 7.0.5
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ acotada.

(a) Si P y Q son particiones de $[a,b]$ tales que $P \subset Q$, entonces

$$L(P,f) \le L(Q,f) \le U(Q,f) \le U(P,f).$$

(b) Si P y Q son particiones cualesquiera de $[a,b]$, entonces $L(P,f) \le U(Q,f)$.

(c) $L(f) = \sup\{L(P,f) : P \text{ partición de } [a,b]\} \le U(f) = \inf\{U(P,f) : P \text{ partición de } [a,b]\}$

Definición 7.0.6
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ una función acotada. Se dice que f es *integrable* en $[a,b]$ si $L(f) = U(f)$.

Si f es integrable, se llama *integral* de f en $[a,b]$ (o integral de f entre a y b) al número real $L(f) = U(f)$, que se denota $\int_a^b f$, o bien $\int_a^b f(x)\,dx$.

Se define $\int_a^a f = 0$. Y si f es integrable en $[a,b]$, se define $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Ejemplo 7.0.7
Se considera la función constante $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$ (véase ejemplo 7.0.3). Según hemos visto antes, para toda partición P de $[a, b]$, las sumas inferiores y superiores son iguales a $c(b-a)$. Por lo tanto $L(f) = U(f) = c(b-a)$. Luego f es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$. Obsérvese que el valor de la integral coincide (para $c > 0$) con el área del rectángulo limitado por las rectas horizontales $y = c$ e $y = 0$ y las verticales $x = a$ y $x = b$ (véase figura 7.4).

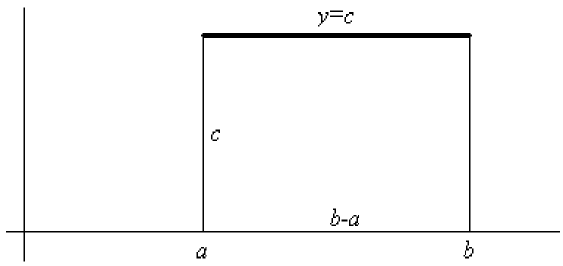

Figura 7.4: Una función constante.

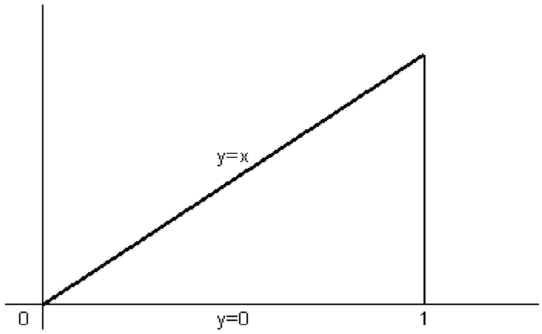

Figura 7.5: La función identidad.

Ejemplo 7.0.8
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ la función de Dirichlet[3], que se define como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (\mathbb{Q} = \{\text{números racionales}\}).$$

Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, teniendo en cuenta las propiedades de los números racionales e irracionales, en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es posible encontrar un número racional r_i y también un irracional α_i. Se tiene entonces que $r_i, \alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$ con $f(r_i) = 1$ y $f(\alpha_i) = 0$. Por lo tanto, para cada $i \in \{1 \ldots n\}$,

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = 0 \quad \text{y} \quad M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = 1,$$

con lo que las sumas inferior y superior serán respectivamente $L(P, f) = 0$ y

$$U(P, f) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Puesto que esto es válido para cualquier partición P, se tiene que $L(f) = 0 \neq U(f) = b - a$. Luego la función de Dirichlet no es integrable en ningún intervalo $[a, b]$ con $a < b$.

Proposición 7.0.9 (Caracterización)
Una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a, b]$ si y solo si existen y coinciden los límites:

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f)$$

siendo P_n la partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual amplitud. En este caso,

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f).$$

[3]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matemático alemán (1805-1859).

Ejemplo 7.0.10
Sea $f(x) = x$ la función identidad definida en el intervalo $[0, 1]$ (véase figura 7.5). Si se considera la partición $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ (véase ejemplo 7.0.4), las sumas inferiores y superiores de f respecto de P_n son

$$L(P_n, f) = \frac{n-1}{2n} \quad \text{y} \quad U(P_n, f) = \frac{n+1}{2n}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty} U(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Por la proposición 7.0.9 se tiene que f es integrable en el intervalo $[0, 1]$ y $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$. De modo análogo se puede probar que $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$

Pero para saber si una función es o no integrable, no siempre es necesario calcular las sumas inferiores ni las superiores. Esto se deduce del siguiente resultado, cuya demostración omitimos:

Teorema 7.0.11
Toda función continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.

Parece natural preguntarse ahora si será también cierto el recíproco del teorema anterior. La respuesta es no:

Ejemplo 7.0.12
Sea f la función definida a trozos por la fórmula:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

y sea P_n la partición del intervalo $[0, 2]$ dada por $P_n = \{0, 1, 1 + \frac{1}{n}, 2\}$. Es fácil comprobar que $L(P_n, f) = 1 - \frac{1}{n}$, y por lo tanto $L(f) \ge 1$. Por otra parte, $U(P_n, f) = \frac{1}{n} + (1 - \frac{1}{n}) = 1$, y por lo tanto $U(f) \le 1$. Entonces $L(f) = U(f) = 1$, y se concluye, por definición, que f es integrable en $[0, 2]$ e $\int_0^2 f = 1$. Sin embargo, f no es continua en el punto $1 \in [0, 2]$.

El siguiente resultado es de utilidad para estudiar la integrabilidad de funciones que no sean continuas:

Proposición 7.0.13
Toda función acotada en $[a, b]$ y continua en el intervalo salvo en un número finito de puntos es integrable en $[a, b]$.

Las siguientes propiedades básicas de la integral, que aquí enumeramos sin demostrar en su mayoría, las supondremos conocidas, y las usaremos más adelante:

Proposición 7.0.14 (Linealidad de la integral)
El conjunto de las funciones integrables en $[a, b]$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Además, si f y g son funciones integrables en $[a, b]$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\int_a^b (k_1 f + k_2 g) = k_1 \int_a^b f + k_2 \int_a^b g.$$

Proposición 7.0.15 (Aditividad respecto del intervalo)
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ una función acotada y sea $c \in [a,b]$. Entonces f es integrable en $[a,b]$ si y solo si f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Y en tal caso se verifica que:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Proposición 7.0.16 (Monotonía de la integral)
Si f es integrable y positiva en $[a,b]$ y $a \leq b$, entonces $\int_a^b f \geq 0$.

Como consecuencia:

(a) Si f y g son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(b) Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $(b-a)m \leq \int_a^b f \leq (b-a)M$.

Demostración.
Puesto que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, se deduce que $L(P,f) \geq 0$ para toda partición P del intervalo $[a,b]$. Por lo tanto, $L(f) \geq 0$. Y por ser f integrable, debe ser $\int_a^b f = L(f) \geq 0$.

La consecuencia (a) se obtiene ahora fácilmente observando que $g(x) - f(x) \geq 0$ y aplicando la linealidad de la integral.

Y claramente (b) se obtiene aplicando (a) y teniendo en cuenta el ejemplo 7.0.7 sobre la integral de una función constante. □

Ejemplo 7.0.17
La función $f(x) = e^{-x^2}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo que es integrable en el intervalo $[0,1]$. Como además $f(x) \geq 0$ para todo x, por la proposición anterior se tiene que $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \geq 0$.

Afinando un poco más, se puede observar que $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Aplicando la consecuencia (b) de la proposición anterior se deduce que

$$\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq 1.$$

Proposición 7.0.18
Si f es integrable en $[a,b]$ $(a < b)$, también lo es $|f|$, y además:

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Ejemplo 7.0.19
La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es continua para todo $x \neq 0$. Además, es conocido que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, por lo que $|f(x)| \leq 1$. De la proposición 7.0.13 se deduce que f es integrable en el intervalo $[-1,1]$. Además, por las proposiciones 7.0.18 y 7.0.16,

$$\left|\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right| \leq \int_{-1}^1 \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|\,dx \leq \int_{-1}^1 1 = 2.$$

7.1 Funciones definidas por integrales

Los problemas de hallar tangentes y calcular áreas encerradas por curvas dieron origen al Cálculo Infinitesimal. El primero de estos problemas se resuelve mediante la derivación y el segundo, según acabamos de ver, con la integración. Estos conceptos, derivada e integral, pueden así considerarse como los más importantes del Análisis Matemático. Y resulta que, a pesar de que surgen por caminos muy diferentes, ambos conceptos están íntimamente relacionados. La relación entre ellos viene dada por unos resultados que, en definitiva, vienen a presentar la integración y la diferenciación como operaciones inversas, y que constituyen lo que suele denominarse Teorema Fundamental del Cálculo.

La clave de estos resultados está en el estudio de la "función integral" definida a partir de una función integrable de la siguiente manera.

Sea f una función integrable en un intervalo $[a, b]$. Se considera una nueva función F definida también en el intervalo $[a, b]$ por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Ejemplo 7.1.1
Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ si $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 1$ si $1 < x \leq 2$. Como se puede ver en los preliminares (ejemplo 7.0.12), f es integrable en $[0, 2]$. Vamos a calcular la función F. Evidentemente, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Sin embargo, si $1 < x \leq 2$, entonces se tiene que $F(x) = \int_0^1 0 + \int_1^x 1 = x - 1$, es decir

$$F(x) = \int_0^x f = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

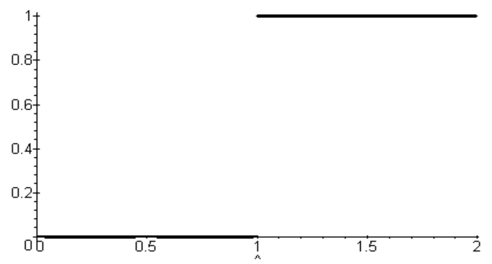

Figura 7.6: Una función integrable f.

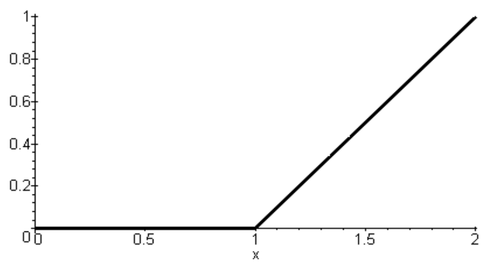

Figura 7.7: La función integral F.

Obsérvese que, en el ejemplo anterior, la función F es continua, aunque f no lo era (figuras 7.6 y 7.7). Además, F es derivable en todos los puntos excepto en los que f no es continua. Este tipo de relaciones entre las funciones f y F es lo que estudiamos a continuación.

Proposición 7.1.2 (Funciones definidas por integrales)
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a, b]$.

Demostración.
Sea $c \in [a, b]$ y sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $c + h \in [a, b]$. Entonces

$$F(c + h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt = \int_c^{c+h} f(t)\,dt.$$

Ahora bien, por ser f integrable, debe ser acotada, es decir existe $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Si además suponemos que $h > 0$ se obtiene que

$$|F(c+h) - F(c)| = \left| \int_c^{c+h} f(t)\, dt \right| \leq \int_c^{c+h} |f(t)|\, dt \leq \int_c^{c+h} K\, dt = Kh = K|h|.$$

De modo análogo puede comprobarse también que $|F(c+h) - F(c)| \leq K|h|$ para $h < 0$, de donde se llega a que $\lim_{h\to 0} F(c+h) = F(c)$ y F es continua en cualquier punto $c \in [a, b]$. □

Ejemplo 7.1.3
Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ la función definida a trozos por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Claramente $\int_0^x f = 0$ para todo $x \in [0, 1]$, mientras que para $x \in [1, 2]$ se tiene que

$$\int_0^x f = \int_0^1 0\, dt + \int_1^x (t-1)\, dt = \int_1^x t\, dt - \int_1^x 1\, dt.$$

Sustituyendo estas integrales por su valor se obtiene que

$$\int_0^x f = \frac{x^2 - 1}{2} - (x - 1) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2} = \frac{(x-1)^2}{2},$$

es decir

$$F(x) = \int_0^x f = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \\ \frac{(x-1)^2}{2} & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Obsérvese que la función f es continua en todo el intervalo $[0, 2]$, pero no es derivable en el punto 1. Sin embargo F sí que es derivable en el punto 1 (véanse figuras 7.8 y 7.9).

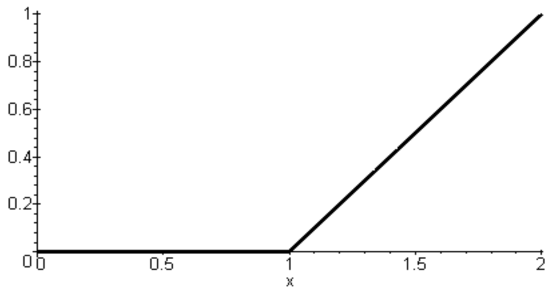

Figura 7.8: Una función continua f.

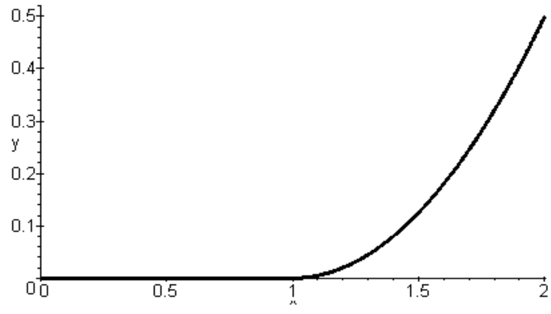

Figura 7.9: La función integral F.

Teorema 7.1.4 (Teorema fundamental del cálculo)
Sea f una función integrable en $[a, b]$ y sea $F(x) = \int_a^x f$. Si f es continua en un punto $c \in (a, b)$, entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

En particular, si f es continua en $[a, b]$, entonces F es una primitiva de f, es decir, F es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $F' = f$ en (a, b).

Demostración.
Se trata de comprobar que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(c+h)-F(c)}{h}=f(c)$. Lo haremos utilizando la definición de límite de una función (con ε y δ). Sea $\varepsilon>0$. Por ser f continua en c, existe $\delta>0$ tal que $|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon$. Supongamos que $0<h<\delta$. Entonces, razonando como en la proposición anterior,

$$\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h}-f(c)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,dt-\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\,dt\right|=\frac{1}{h}\left|\int_c^{c+h}(f(t)-f(c))\,dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h}|f(t)-f(c)|\,dt\leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h}\varepsilon\,dt=\varepsilon.$$

Por lo tanto, el límite cuando $h\to 0$ por la derecha de $\dfrac{F(c+h)-F(c)}{h}$ es igual a $f(c)$. Análoga igualdad se puede demostrar para el límite por la izquierda, sin más que tomar valores negativos de h, con lo que concluye la demostración. □

El siguiente resultado proporciona el método habitual (mucho más sencillo que el de las sumas superiores e inferiores) para calcular el valor de la integral de una función, siempre que conozcamos una primitiva de dicha función (¡cosa no siempre trivial!).

Teorema 7.1.5 (Regla de Barrow[4])
Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable y G es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f=G(b)-G(a)$.

Demostración.
Damos solo la demostración en el caso particular de que la función f sea continua en $[a,b]$:

Si f es continua, aplicando la proposición 7.1.4 se tiene que la función $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in(a,b)$. Entonces $F'(x)=G'(x)$ para todo $x\in(a,b)$, y F y G son continuas en $[a,b]$. Por lo tanto, existe una constante C tal que $F(x)=G(x)+C$ para todo $x\in[a,b]$. Entonces $\int_a^b f=F(b)=G(b)+C$. Como $F(a)=0=G(a)+C$, se llega a la fórmula $G(b)-G(a)=\int_a^b f$. □

Ejemplo 7.1.6
Para calcular la integral $\int_1^2 x^3\,dx$, se busca una primitiva de la función $f(x)=x^3$, como por ejemplo $g(x)=\frac{x^4}{4}$, y aplicando la regla de Barrow resulta:

$$\int_1^2 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{15}{4}.$$

Ejemplo 7.1.7
Para calcular $\int_0^\pi x\operatorname{sen}x\,dx$, se puede encontrar una primitiva integrando por partes:

$$\int x\operatorname{sen}x\,dx=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx=-x\cos x+\operatorname{sen}x.$$

Aplicando la regla de Barrow resulta:

$$\int_0^\pi x\operatorname{sen}x\,dx=\big[-x\cos x+\operatorname{sen}x\big]_0^\pi=-\pi\cos\pi=\pi.$$

[4]Isaac Barrow, teólogo, profesor y matemático inglés (1630-1677).

Ejemplo 7.1.8
Vamos a calcular el área de la región plana limitada por las curvas $y = x$ e $y = x^2$ (véase figura 7.10).

Si se halla la intersección de dichas curvas, se obtienen dos puntos, $x = 0$ y $x = 1$. Como entre dichos puntos se verifica que $x > x^2$, el área A vendrá dada por la diferencia de las integrales:

$$A = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

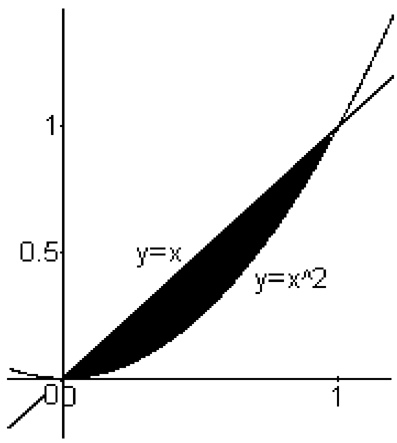

Figura 7.10: Área encerrada entre dos curvas.

Proposición 7.1.9
Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, g una función derivable en un punto x_0 tal que $g(x_0) \in [a, b]$ y $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$. Entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(g(x_0))g'(x_0)$.

Demostración.
Si consideramos la función $H(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, sabemos por el teorema Fundamental del Cálculo que H es derivable y que $H'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Además, es obvio que $F = H \circ g$. Como por hipótesis g es derivable en x_0 y H lo es en $g(x_0)$, aplicando la regla de la cadena se concluye que

$$F'(x_0) = H'(g(x_0))g'(x_0) = f(g(x_0))g'(x_0).$$

□

Ejemplo 7.1.10
Consideremos la función $F(x) = \int_0^{e^x} \frac{t^3}{1 + t^2}\,dt$.

La función $f(x) = \frac{x^3}{1 + x^2}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, y la función $g(x) = e^x$ es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$. Aplicando el resultado anterior se deduce que F es derivable en todo $\mathbb{R}$ y que

$$F'(x) = \frac{(e^x)^3}{1 + (e^x)^2}(e^x)' = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}e^x = \frac{e^{4x}}{1 + e^{2x}}.$$

7.2 Métodos numéricos de integración

En la sección 7.1 se ha visto una herramienta importante para el cálculo de integrales, la regla de Barrow, que se basa en la obtención de primitivas. Sin embargo, el cálculo de primitivas no es un problema trivial ni mucho menos. De hecho, existen bastantes funciones, como por ejemplo e^{x^2}, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, ..., para las cuales no es posible encontrar una primitiva que se pueda expresar en términos de funciones elementales (polinómicas, racionales, irracionales, trigonométricas, exponenciales, ...).

En tales casos, o bien para calcular otras integrales cuya primitiva sea muy costosa de obtener, o simplemente para aproximar integrales de las cuales no es imprescindible conocer el valor exacto, puede ser interesante hallar un valor aproximado de la integral. Puede ocurrir también que no se disponga de una expresión explícita de la función, sino solamente de su valor en una tabla de puntos. Supongamos por ejemplo que se ha elaborado una tabla con la velocidad de un coche, anotando el dato cada minuto, y se desea conocer el espacio recorrido en 15 minutos. Habría entonces que hallar $\int_0^{15} v(t)\,dt$, pero de $v(t)$ sólo se conoce su valor para $t \in \{0, 1, 2, \dots, 15\}$. Este problema también se puede resolver, de manera aproximada, recurriendo a un método numérico.

7.2.1 Método del trapecio compuesto

Consiste (figura 7.11) en dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual amplitud, y aproximar la integral de la función original por la integral de la función interpoladora lineal a trozos. Geométricamente, si f es positiva en $[a, b]$, se aproxima el valor de la integral por la suma de las áreas de los n trapecios que se obtienen.

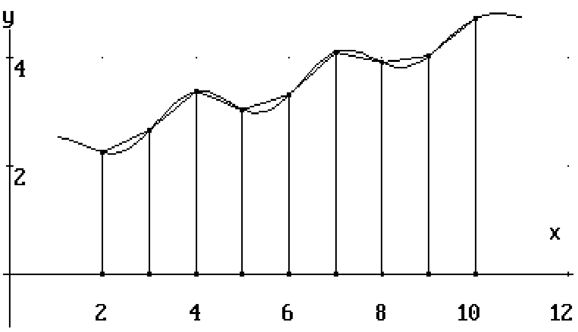

Figura 7.11: Método del trapecio.

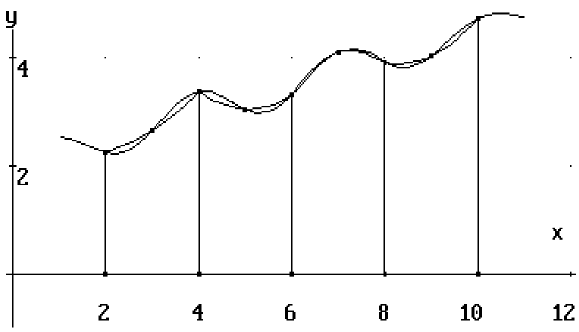

Figura 7.12: Método de Simpson.

Vamos a obtener el valor aproximado de la integral por este método:

Sea $h = \dfrac{b-a}{n}$ la longitud de cada subintervalo y sea $x_i = a + ih$, con $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la integral de una función f queda aproximada por el área del trapecio de "altura" h y "bases" $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$, o sea $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f \approx \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h$. Por lo tanto, el método del trapecio con $n+1$ puntos consiste en tomar como aproximación de $\int_a^b f$ la suma de las áreas de los trapecios, que es:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h = h\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right) =$$

$$h\left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).$$

El error en la aproximación viene dado por el siguiente resultado:

Teorema 7.2.1
Con la notación anterior, si $f \in C^2[a,b]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c).$$

En consecuencia, si $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$, entonces una cota del error absoluto cometido al aproximar $\int_a^b f$ por el método del trapecio con $n+1$ puntos es $\dfrac{(b-a)^3}{12n^2} M$.

7.2.2 Método de Simpson compuesto

Consiste (figura 7.12) en dividir el intervalo $[a,b]$ en $n = 2m$ subintervalos de igual amplitud, (con lo cual el número de puntos es $2m+1$, siempre impar), y aproximar la integral de la función original por la integral de la función interpoladora cuadrática a trozos, cada dos intervalos.

Si $h = \dfrac{b-a}{n}$ y $x_i = a+ih$, con $i \in \{0,1,\dots,n\}$, en cada subintervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ la integral de una función f queda aproximada por $\dfrac{f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})}{3} h$ para cada $i \in \{1,\dots,m\}$. Por lo tanto, el método de Simpson con $n+1$ puntos consiste en tomar como aproximación de $\int_a^b f$ el siguiente valor:

$$\frac{b-a}{3n}\Big(\big(f(a)+4f(x_1)+f(x_2)\big)+\big(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\big)+\dots$$
$$\dots+\big(f(x_{2m-2})+4f(x_{2m-1})+f(b)\big)\Big)$$

es decir,

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{3n}\left(f(a)+4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b)\right).$$

Teorema 7.2.2
Con la notación anterior, si $f \in C^4[a,b]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{3n}\left(f(a)+4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c)$$

En consecuencia, si $|f^{(4)}(x)| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$, entonces una cota del error absoluto cometido al aproximar $\int_a^b f$ por el método de Simpson con $n+1$ puntos es $\dfrac{(b-a)^5}{180n^4} M$.

Ejemplo 7.2.3
Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$. Vamos a aproximar por los métodos de trapecio y Simpson compuestos la integral $\int_0^1 f$. Tomemos 7 puntos equiespaciados del intervalo $[0,1]$: $\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\}$.

Aproximando por el método del trapecio se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)dx &\approx \frac{1}{6}\left(\frac{\operatorname{sen} 0+\operatorname{sen}\pi}{2}+\sum_{i=1}^{5}\operatorname{sen}\left(\pi\frac{i}{6}\right)\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{6}\approx 0'622,\end{aligned}$$

mientras que por el método de Simpson la aproximación será

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx \approx \frac{1}{18}\left(4\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)+2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\frac{4+\sqrt{3}}{9}\approx 0'6369.$$

Para obtener cotas de los errores cometidos al usar ambos métodos, habrá que calcular las cuatro primeras derivadas de f:

$$f'(x)=\pi\cos(\pi x),\quad f''(x)=-\pi^2\operatorname{sen}(\pi x),\quad f'''(x)=-\pi^3\cos(\pi x),\quad f^{(4)}(x)=\pi^4\operatorname{sen}(\pi x).$$

Se tiene entonces que $|f''(x)|\leq\pi^2$ y $|f^{(4)}(x)|\leq\pi^4$ para todo $x\in(0,1)$. Por tanto, una cota del error cometido con el método del trapecio es

$$\frac{1}{12\cdot 6^2}\pi^2=\frac{\pi^2}{432}\approx 0'0228<2'3\cdot 10^{-2}.$$

Y para el método de Simpson:

$$\frac{1}{180\cdot 6^4}\pi^4=\frac{\pi^4}{233280}\approx 0'000417<4'2\cdot 10^{-4}.$$

Se puede pensar que la aproximación que proporciona el método de Simpson es mejor que la del método del trapecio, aunque no tenemos garantizado nada, porque ambas son cotas del error, y no sabemos si el error real en cada caso está cerca de la cota o es mucho menor que ella.

Ejemplo 7.2.4

Supongamos ahora que queremos aproximar la integral del ejemplo anterior, usando los métodos de trapecio y Simpson compuestos, con un error menor que 10^{-4}. En primer lugar habrá que calcular, con ayuda de la fórmula de la cota del error, un número de puntos adecuado para cada uno de los métodos. Con el método del trapecio basta tomar n tal que

$$\frac{1}{12n^2}\pi^2<10^{-4},$$

lo que se consigue para $n=91$. La aproximación obtenida será entonces

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx\approx\frac{1}{91}\sum_{i=1}^{90}\operatorname{sen}\frac{\pi i}{91}\approx 0'636556.$$

Con el método de Simpson, el número de puntos se obtiene resolviendo la desigualdad:

$$\frac{1}{180n^4}\pi^4<10^{-4}$$

y teniendo en cuenta que n debe ser par. La solución es entonces $n=10$ (11 puntos) y la aproximación obtenida, $\int_0^1\operatorname{sen}(\pi x)\,dx\approx 0'636654$.

La integral exacta es

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx=\left.\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1=\frac{2}{\pi}\approx 0'636619,$$

con lo que puede comprobarse que el error real para cada una de las aproximaciones halladas es efectivamente menor que 10^{-4}.

7.3 Integración impropia en intervalos no acotados

Toda la teoría de la integral de Riemann que se ha visto en este tema está desarrollada para funciones acotadas definidas en intervalos $[a, b]$, cerrados y acotados. También puede definirse la integral cuando no se da alguna de las condiciones anteriores, y recibe el nombre de *integral impropia*. Hay integrales impropias de diferentes tipos, según se trate de integrales en intervalos infinitos o de funciones no acotadas. Nosotros solamente estudiaremos las integrales impropias de funciones acotadas en intervalos infinitos.

Geométricamente, si $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función positiva (y supongamos que continua), la integral $\int_a^\infty f$ debe medir el área de la región plana comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje OX y la recta vertical $x = a$. Obsérvese que este área corresponde a una región no acotada del plano. Dicha área puede ser infinita, como en el caso de una función constante (véase figura 7.13), o puede ser finita (convergente), como es el caso de algunas funciones que tienden a 0 en el ∞ (véase figura 7.14).

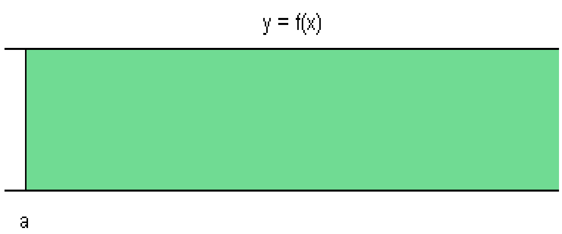

Figura 7.13: Integral impropia infinita.

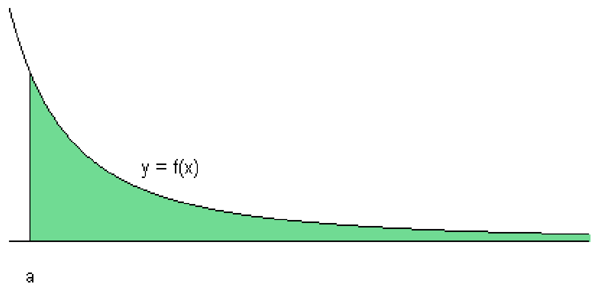

Figura 7.14: Integral impropia finita.

Definición 7.3.1 (Integrales impropias de funciones acotadas en intervalos infinitos) Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$ para todo $b > a$.

(a) Si existe el $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_a^b f = L \in \mathbb{R}$, entonces se dice que la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty f$ es *convergente* y se define $\displaystyle\int_a^\infty f = L$.

(b) Si el límite es infinito, se dice que la integral impropia es *divergente*.

Análogamente se definen la convergencia y divergencia de la integral impropia $\int_{-\infty}^b f$ para una función $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ para todo $a < b$.

Definición 7.3.2
Sea $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo $[a, b]$ con $a < b$.

Se dice que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f$ es *convergente* si convergen las integrales impropias:

$$\int_{-\infty}^c f \quad \text{y} \quad \int_c^\infty f,$$

para cualquier elección del punto $c \in \mathbb{R}$. En este caso, su valor es la suma de las integrales anteriores, y es independiente de la elección de c.

Ejemplo 7.3.3
Estudiemos la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\infty} e^{px}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$, según valores de $p \in \mathbb{R}$.

Para $p \neq 0$ se tiene que

$$\int_a^b e^{px}\,dx = \left[\frac{e^{px}}{p}\right]_a^b = \frac{e^{pb} - e^{pa}}{p}.$$

Tomando límite cuando b tiende a infinito,

$$\int_a^{\infty} e^{px}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b e^{px}\,dx = \begin{cases} \frac{-e^{pa}}{p} & \text{si } p < 0 \\ \infty & \text{si } p > 0. \end{cases}$$

En el caso $p = 0$ la integral impropia es claramente divergente pues

$$\int_a^{\infty} e^{0x}\,dx = \int_a^{\infty} 1\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b 1\,dx = \lim_{b\to\infty}(b-a) = \infty.$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\infty} e^{px}\,dx$ es convergente si y solo si $p < 0$.

Ejemplo 7.3.4
Estudiemos la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$, según valores de $p \in \mathbb{R}$.

Para el caso $p = 1$ obtenemos

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\Big[\ln(x)\Big]_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty,$$

mientras que si $p \neq 1$,

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-p+1}-1}{-p+1} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \infty & \text{si } p < 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ es convergente si y solo si $p > 1$.

Ejemplo 7.3.5
Para estudiar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x}\,dx$ la descomponemos en dos integrales, $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x}\,dx$ y $\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$, y estudiamos la convergencia de cada una de ellas:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^b - \int_0^b -e^{-x}\,dx\right) \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{-b}{e^b} + \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1.\end{aligned}$$

Luego una de las integrales es convergente. Miramos ahora la otra:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} xe^{-x}\,dx &= \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to-\infty}\left[e^{-x}(-x-1)\right]_b^0 \\ &= -1 - \lim_{b\to-\infty} e^{-b}(-b-1) = -1 - \infty\cdot\infty = -\infty.\end{aligned}$$

Esta segunda integral es divergente. Por lo tanto la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x}\,dx$ es divergente.

7.4 Función Gamma de Euler[5]

Definición 7.4.1 (Función Γ)
Se llama *función gamma* a la función real de variable real cuyo dominio es el intervalo $(0, \infty)$, y que viene dada por la fórmula:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

para todo $x > 0$. Su representación gráfica puede verse en la figura 7.15.

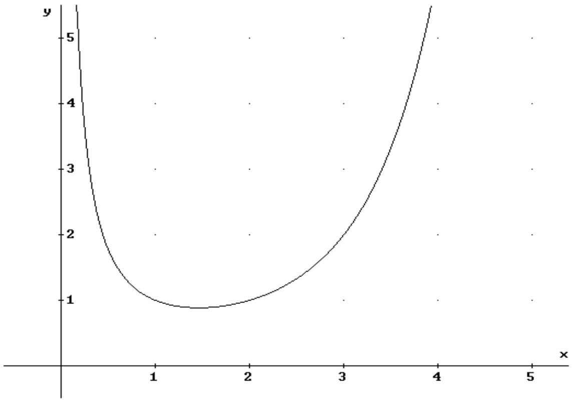

Figura 7.15: Función Γ.

Ejemplo 7.4.2
Si en el ejemplo 7.3.3 ponemos $a = 0$ y $p = 1$ obtenemos la integral impropia $\int_0^\infty e^{-t}\, dt$, que es convergente y vale 1. Teniendo en cuenta la definición anterior, se deduce que $\Gamma(1) = 1$.

Proposición 7.4.3
Para todo $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Demostración.
Por definición, $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t}\, dt$. Si en esta integral tomamos partes: $u = t^x$, $v' = e^{-t}$ (con lo que $v = -e^{-t}$ y $u' = xt^{x-1}$) se obtiene:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{b\to\infty} \left(\left[-t^x e^{-t}\right]_0^b + \int_0^b x t^{x-1} e^{-t}\, dt \right) = \lim_{b\to\infty} \frac{-b^x}{e^b} + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Pero $\lim_{b\to\infty} \dfrac{-b^x}{e^b} = 0$. Luego $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. □

Teniendo en cuenta este resultado y el ejemplo 7.4.2, es inmediato comprobar por inducción la siguiente propiedad:

Corolario 7.4.4
Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\Gamma(n+1) = n!$

Nota 7.4.5
No nos hemos parado en ningún momento a estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$, o sea en comprobar que $\Gamma(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x > 0$. Para el caso $x > 1$ esto se puede hacer, pero no es trivial, por lo que no incluiremos la demostración. Sin embargo,

[5]Leonhard Euler, matemático nacido en Basilea, Suiza, en 1707. Murió en 1783 en San Petersburgo, Rusia.

cuando $0 < x < 1$, se verifica que $\lim\limits_{t \to 0^+} e^{-t} t^{x-1} = \infty$, por lo que la función $f(t) = e^{-t} t^{x-1}$ no está acotada en el intervalo $[0, \infty)$, y la integral impropia $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$ no es del tipo de las que hemos estudiado. Observemos no obstante que, como consecuencia de la proposición 7.4.3, se tiene que $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ para todo $x > 0$. Por lo tanto, cuando $0 < x < 1$, $\Gamma(x)$ puede obtenerse a partir del valor de $\Gamma(x+1)$, siendo $x + 1 > 1$. Esto viene a decir que la convergencia de la integral impropia que define la función $\Gamma(x)$ para $0 < x < 1$ se puede deducir de la convergencia de la misma para $x > 1$, con lo que tendríamos garantizado que $\Gamma(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x > 0$.

Un caso particular es el de $x = \frac{1}{2}$, para el cual es posible, aunque no sencillo, calcular $\Gamma(x)$. Damos el resultado como una proposición, sin demostrar.

Proposición 7.4.6
$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Finalizamos con algunos ejemplos de cálculo de integrales impropias que pueden deducirse de las propiedades de la función Γ.

Ejemplo 7.4.7
La integral $\int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t}\, dt$ no se puede calcular por definición, ya que la función $f(t) = \sqrt{t} e^{-t}$ no tiene una primitiva que pueda expresarse en términos de funciones elementales. Sin embargo, aplicando las propiedades de la función Γ se tiene que:

$$\int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t}\, dt = \Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ejemplo 7.4.8
Para calcular $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx$ podemos ayudarnos de la función Γ, procediendo del siguiente modo:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\, dx + \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Es fácil comprobar que $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$, por lo que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$, y basta hallar el valor de la integral en $[0, \infty)$. Haciendo el cambio de variable $x^2 = t$ se obtiene

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Se concluye así que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. (En la figura 7.16 puede verse la gáfica de $f(x) = e^{-x^2}$. La gráfica de la función $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$, similar a ésta, es comúnmente conocida como *campana de Gauss*[6].)

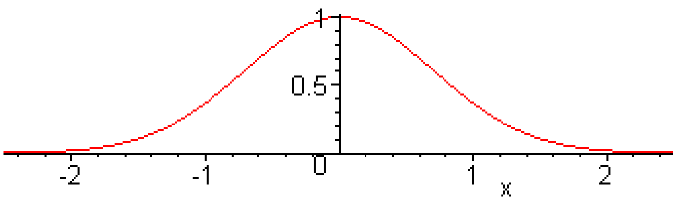

Figura 7.16: Función e^{-x^2}.

[6]Johann Carl Friedrich Gauss, matemático, astrónomo y físico alemán considerado el príncipe de las matemáticas (1777-1855).

Problemas

Problema 7.1

Calcular las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{1/2}(1-x)^7\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{1+4x^2}$ (f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$

Problema 7.2

(a) *Hallar el área de la región plana limitada por la curva* $y = |x^2 - x|$ *y las rectas* $y = 0$, $x = 0$ *y* $x = 2$.

(b) *Hallar el área de la región acotada del plano encerrada entre los ejes cartesianos y la curva* $y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$, *con* $a > 0$.

Problema 7.3

Sea f *una función continua en* $[a, b]$ $(a < b)$ *tal que* $\int_a^b f = 0$. *¿Cuáles de las siguientes afirmaciones se deducen necesariamente de estas hipótesis?*

(a) $f(x) = 0$ *para todo* $x \in [a, b]$ (b) $f(x) = 0$ *para algún* $x \in [a, b]$

(c) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = 0$ (d) $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$

(e) $\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx = 0$ (f) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+1)\,dx = b - a$

Problema 7.4

Sea f *una función continua en* $[a, b]$ $(a < b)$ *tal que* $\int_a^b f > 0$. *¿Cuáles de las siguientes afirmaciones se deducen necesariamente de estas hipótesis?*

(a) $f(x) > 0$ *para todo* $x \in [a, b]$ (b) $f(x) > 0$ *para algún* $x \in [a, b]$

(c) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| > 0$ (d) $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx > 0$

(e) $\displaystyle\int_a^b f(x)^4\,dx > 0$ (f) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+1)\,dx > b - a$

Problema 7.5

Para cada una de las funciones siguientes, hallar $F(x) = \int_{-2}^x f(t)\,dt$ *y calcular la derivada de* F *donde sea posible:*

(a) $f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{si } x \in [-2, 1] \\ 1 & \text{si } x \in (1, 3] \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Problema 7.6
Para cada una de las funciones siguientes, hallar $F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$ *y calcular la derivada de* F *donde sea posible:*

$$\text{(a)}\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-3,-1) \\ |2x-2| & \text{si } x \in [-1,2] \end{cases} \qquad \text{(b)}\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ xe^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Problema 7.7
Dada la función $F(x) := \int_0^x e^{-t^2}\,dt$*, se pide:*

(a) *Hallar el polinomio de Taylor de* F *centrado en el punto* $x_0 = 0$ *y de orden* 2.

(b) *Determinar si* $F(5)$ *es mayor, igual o menor que* $F(8)$.

(c) *Obtener la derivada de la función* $F(x^3 - 3x)$.

Problema 7.8
Dada la función

$$F(x) := \int_0^x \frac{1}{4+t^4}dt,$$

se pide:

(a) *Hallar el polinomio de Taylor de* F *centrado en el punto* $x_0 = 0$ *y de orden* 2.

(b) *Determinar si* $F(5)$ *es mayor, igual o menor que* $F(8)$.

(c) *Obtener la derivada de la función* $F(x^2 - e^x)$.

Problema 7.9
Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

y sabiendo que $|f''(x)| \le 0'4$ *y que* $\left|f^{(4)}(x)\right| \le 1'2$ *para todo* $x \in (0,2)$*, aproximar* $\int_0^2 f(x)\,dx$*, dando una cota del error cometido:*

(a) *Por el método del trapecio con* 5 *puntos.*

(b) *Por el método de Simpson con* 5 *puntos.*

Problema 7.10
Dada la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

y sabiendo que $|f''(x)| \le 0'3$ *y que* $\left|f^{(4)}(x)\right| \le 0'2$ *para todo* $x \in (\pi, 3\pi)$*, aproximar* $\int_\pi^{3\pi} f(x)\,dx$*, dando una cota del error cometido:*

(a) *Por el método del trapecio con* 5 *puntos.*

(b) *Por el método de Simpson con* 5 *puntos.*

Problema 7.11
Sabiendo que

$$\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t} dt,$$

proponer un método de integración numérica para aproximar $\ln(2)$ *con un error menor que* 10^{-3}. *Indicar el número de puntos a utilizar y dar la aproximación obtenida.*

Problema 7.12
Sabiendo que

$$\ln(3) = \int_1^3 \frac{1}{t} dt,$$

proponer un método de integración numérica para aproximar $\ln(3)$ *con un error menor que* 10^{-3}. *Indicar el número de puntos a utilizar y dar la aproximación obtenida.*

Problema 7.13
Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias, calculando su valor en caso de que converjan:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^{1/2}}$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ (c) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\,(\ln(x))^p}$ con $p > 1$

Problema 7.14
Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias, calculando su valor en caso de que converjan:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-2x}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\,(\ln(x))^p}$ con $p \leq 1$

Problema 7.15
Un estudio estadístico indica que el número de usuarios de Internet en España crece al ritmo de

$$3 \cdot 10^5 \cdot (1+x) \cdot e^{1-x/5}$$

usuarios cada año, donde x *es el tiempo en años transcurrido desde principios de 1996. Si en esa fecha había un millón de usuarios, ¿cuántos usuarios había al comenzar el año 2005? ¿Cuántos habrá en el año 2015? ¿Hacia qué cantidad tiende el número de usuarios en España?*

Problema 7.16
Una estadística muestra que la población de cierta ciudad crece al ritmo de

$$\frac{10\,000}{(1+x)^{3/2}}$$

habitantes cada año, donde x *es el tiempo en años transcurrido desde 1990. Si en 1993 había* $360\,000$ *habitantes, ¿cuántos tenía en 1990? ¿Cuántos tendrá en el año 2014? ¿Hacia qué cantidad tiende la población de la ciudad?*

Problema 7.17
Utilizando las propiedades de la función Γ, *calcular las siguientes integrales impropias:*

(a) $\displaystyle\int_0^\infty x^{3/2}e^{-x}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\, dx$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty 7x^{7/2}e^{-x}\, dx$

Problema 7.18
Utilizando las propiedades de la función Γ*, calcular las siguientes integrales impropias:*

(a) $\displaystyle\int_0^\infty x^{5/2} e^{-x}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{5/2}+x}{5} e^{-x}\, dx$

Práctica

Objetivos

- Utilizar métodos numéricos para aproximar el valor de integrales definidas.
- Resolver problemas que impliquen cálculo de integrales.

Instrucciones

- Cargar el fichero `AMyMN.MTH`.

7.1 Métodos numéricos de integración

(a) En este apartado se comparan numéricamente los métodos del trapecio y de Simpson.

Definir la función $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$, calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$, comprobando que vale exactamente π, y aproximar este resultado:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \boxed{} \simeq \boxed{}$$

Las funciones `TRAPECIO(`u`, `x`, `a`, `b`, `n`)` y `SIMPSON(`u`, `x`, `a`, `b`, `n`)`, contenidas en el fichero `AMyMN.MTH`, aproximan el valor de $\int_a^b u(x)\,dx$ por los métodos del trapecio y de Simpson, respectivamente, con $n+1$ puntos.

Utilizando las funciones `TRAPECIO` y `SIMPSON` aplicadas a $f(x)$, obtener aproximaciones de $\int_a^b f$, por los dos métodos, tomando los valores de n que se indican.

n	2	4	6	8
`TRAPECIO(f(x), x, 0, 1, `n`)`				
`SIMPSON(f(x), x, 0, 1, `n`)`				

Vistos los datos numéricos, ¿qué método aproxima mejor en este caso? $\boxed{}$

Calcular `SIMPSON(f(x), x, 0, 1, 37)` $\simeq \boxed{}$. ¿Qué ocurre y por qué?

$\boxed{}$

(b) En este apartado vamos a aproximar el valor de la integral por el método del trapecio con un error menor que 10^{-4}.

El error en el método del trapecio está acotado por $\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}M$, siendo M una cota superior de $|f''|$ en el intervalo (a,b).

A partir de la gráfica de $|f''(x)|$ obtener una cota superior de dicha función en el intervalo $[0,1]$. $M = \boxed{}$

Calcular n_1 para que el error cometido sea menor que 10^{-4}.

Para el n_1 obtenido, aproximar `TRAPECIO(f(x), x, 0, 1,` n_1`)` $\simeq \boxed{}$.

(c) En este apartado vamos a aproximar el valor de la integral por el método de Simpson con un error menor que 10^{-4}.

El error en el método de Simpson está acotado por $\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}M$, siendo M una cota superior de $\left|f^{(4)}\right|$ en el intervalo (a,b). Obtener gráficamente un valor para M, calcular n_2 para que el error cometido sea menor que 10^{-4} y aproximar `SIMPSON(f(x), x, 0, 1,` n_2`)`:

M	n_2	`SIMPSON(f(x), x, 0, 1,` n_2`)`

7.2 Problema

7.2.1 Opción 1

Un panel cuadrado de 5 metros de lado se quema por su borde superior y queda en él una silueta como la que describe la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} + 2$, donde x se mide en metros y se toman como ejes de coordenadas los lados inferior e izquierdo del panel.

(a) Aproximar el área de la porción que ha quedado sin quemar usando el método del trapecio con 20 puntos y dar una cota del error cometido.

(b) Aproximar el mismo área por el método de Simpson garantizando un error menor que un cm^2.

7.2.2 Opción 2

Luis Manitas acaba de pintar un muro rectangular de blanco y quiere darle un toque de color pintando una franja de color rojo en el borde superior del mismo. Como no es un pintor muy experto la pintura roja ha escurrido y la línea que delimita las zonas roja y blanca del muro no es recta sino curva.

Suponiendo que la parte del muro que finalmente queda de color blanco es la región bajo la curva $y = \dfrac{x^2 + \operatorname{sen}(5x)}{1 + x^2}$, sobre el intervalo $[3, 6]$, y que las unidades están expresadas en metros, se pide:

(a) Aproximar el área de la zona blanca usando el método del trapecio con 13 puntos y dar una cota del error cometido.

(b) Si el muro tiene una altura de 1.5 m, aproximar el área de la parte pintada en rojo por el método de Simpson garantizando un error menor que un dm^2.

Apéndice A

Preguntas de examen

A.1 Abril de 2008 (Examen parcial)

Preguntas de test (30%)

A.1 Se consideran las sucesiones $\dfrac{(-1)^n}{n} \leq a_n \leq b_n$. Entonces:

(a) Si b_n converge, entonces a_n también converge y sus límites coinciden.

(b) Si b_n converge, entonces a_n también converge y su límite es cero.

(c) Si b_n está acotada entonces a_n también.

A.2 Sea $a_n = \sqrt[4]{n^3} + \ln(n^6)$. Entonces se verifica que:

(a) $n^{\frac{3}{4}} \ll a_n$.

(b) $a_n \sim n^{\frac{3}{4}}$.

(c) $a_n \sim \ln(n^6)$.

A.3 Sea $f(x) = \frac{x^3-x^2+2}{x} - \frac{5}{2}$. Entonces podemos asegurar que:

(a) f tiene al menos una raíz en el intervalo $[-2,-1]$.

(b) f tiene al menos una raíz en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(c) f no tiene raíces por no ser continua.

A.4 La ecuación en diferencias $x_{n+2}+4x_n = 0$:

(a) no tiene soluciones reales.

(b) $x_n = 2^n \cos\frac{n\pi}{4}$ es una solución particular.

(c) $x_n = 2^n \sin\frac{n\pi}{2}$ es una solución particular.

A.5 Si $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ se verifica:

(a) $S_n \sim 1$.

(b) $S_n \sim \sqrt{n}$.

(c) $S_n \sim \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

A.6 Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^2}$ también diverge.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$ también diverge.

Teoría (10 %)

Estudiar la convergencia de la serie geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ para $r > 0$.

Problema 1 (20 %)

Sea $x_n = \dfrac{n}{e^n + e} + \dfrac{n}{e^n + e^2} + \cdots + \dfrac{n}{e^n + e^n}$

a) ($2'5$ *puntos*) Utilizar la regla del sandwich para calcular el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

b) ($2'5$ *puntos*) Demostrar que $x_n \in O(n^2 e^{-n})$, es decir está dominada asintótocamente por $n^2 e^{-n}$.

c) ($2'5$ *puntos*) Estudiar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$.

d) ($2'5$ *puntos*) Utilizar el resultado anterior para estudiar la convergencia de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Problema 2 (20 %)

a) (8 *puntos*) Obtener la forma explícita de las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \frac{2}{n} x_{n-1} + \frac{2^n}{(n-1)!}, \qquad n \geq 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1; \qquad y_2 = 0 \\ y_{n+1} - 4y_n + 4y_{n-1} = 0, \qquad n \geq 2. \end{cases}$$

b) (2 *puntos*) Comparar los órdenes de magnitud de x_n y de $\dfrac{y_n}{(n-1)!}$.

Problema con ordenador (20%)

Dada la ecuación $\dfrac{1}{4x^3 e^{-3x}} = -\dfrac{1}{120}$, se desea aproximar los valores de x que la resuelven. Para ello:

a) (4 *puntos*) Escribir la ecuación a resolver de la forma $f(x) = 0$ donde f sea una función continua.

b) (4 *puntos*) Demostrar que en el intervalo $(-\infty, 0]$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 en el que se encuentre dicha solución.

c) (2 *puntos*) Determinar cuantos pasos hay que dar para garantizar un error inferior a 10^{-5} usando el método de la bisección y dar una aproximación que garantice dicha cota de error (detallar el proceso seguido e indicar la última fila).

A.2 Junio de 2008

Preguntas de test (30%)

Preguntas correspondientes al primer parcial:

A.7 Dadas las sucesiones $a_n = \dfrac{e^{n^2}}{5n^3}$, $b_n = e^{6n}$, $c_n = \dfrac{e^n}{n\ln(n)}$ se tiene que:

(a) $a_n \ll b_n \ll c_n$
(b) $a_n \ll c_n \ll b_n$
(c) $c_n \ll b_n \ll a_n$

A.8 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en (a,b) y tal que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$, entonces podemos asegurar que:

(a) No puede existir ninguna raíz de f en $[a,b]$ ya que f no es continua en este intervalo.
(b) Podemos asegurar que existe una única raíz de f en $[a,b]$ ya que
$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$$
(c) No podemos asegurar nada respecto a la existencia de raíces de f en $[a,b]$.

A.9 La solución de la ecuación $x_n = x_{n-1} + n$, $x_1 = 1$ es:

(a) $x_n = n!$
(b) $x_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
(c) $x_n = n^n$

A.10 La sucesión $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 1 \end{cases}$

(a) Es monótona y acotada.
(b) Es monótona, pero no acotada.
(c) No es monótona.

A.11 La suma de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{7}\right)^n$ es:

(a) $-\dfrac{2}{5}$
(b) $-\dfrac{2}{9}$
(c) $\dfrac{1}{9}$

A.12 Se puede asegurar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$:

(a) Converge, puesto que $\dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
(b) Diverge, puesto que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ y la serie armónica diverge.
(c) Converge, puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n} = 0$.

Preguntas correspondientes al segundo parcial:

A.13 Recordando que $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, el desarrollo de e^{-x} en torno a $x_0 = 0$ es:

(a) $e^{-x} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$
(b) $e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}$
(c) $e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n!}$

A.14 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ tal que $f(a) < 0, f(b) < 0$ y $\int_a^b f = 0$ y sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Se puede asegurar que:

(a) existe $c \in (a,b)$ tal que $F'(c) = 0$.
(b) existe $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^c f < 0$ y $\int_c^b f < 0$.
(c) $\int_a^b |f| = 0$.

A.15 El polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ de la función $F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt$ es:

(a) $P_2(x) = x$.

(b) $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$.

(c) $P_2(x) = x - x^2$.

A.16 Dada la siguiente tabla de puntos

x	-1	0	1	2
y	0	3	1	0

su polinomio interpolador es:

(a) $-\frac{5}{2}x^2 + \frac{x}{2} + 3$

(b) $x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{x}{2} + 3$

(c) $\frac{3}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{x}{2} + 3$

A.17 Indicar cuál de los siguientes métodos de integración numérica daría el valor exacto de $\int_0^1 f(x)\,dx$ siendo $f(x) = 5x^2 - 6x + 20$:

(a) Método del trapecio en 6 puntos equiespaciados.

(b) Método de Simpson en 6 puntos equiespaciados.

(c) Método de Simpson en 5 puntos equiespaciados.

A.18 Si el polinomio de Taylor de orden 2 de una función f centrado en $x_0 = 1$ es $4-5x+x^2$ entonces el polinomio de Taylor de orden 1 de f centrado en $x_0 = 1$ es:

(a) $4 - 5x$.

(b) $4 - 5(x - 1)$.

(c) $3 - 3x$.

Teoría (10 %)

Obtener el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ y demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 1

Se considera la sucesión

$$a_n = 3n^2 e^{-n} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Se pide:

(a) (3 puntos) Estudiar la convergencia de a_n cuando $n \to \infty$.

(b) (3 puntos) Justificar que $a_n \in \mathrm{O}(n^2 e^{-n})$ ¿Se puede afirmar que $a_n \sim n^2 e^{-n}$? Justificar la respuesta.

(c) (4 puntos) Sea x_n definida mediante la ecuación en diferencias

$$x_{n+2} + \frac{x_n}{4} = 0\,,\ x_0 = 0\,,\ x_1 = \frac{1}{2}$$

Calcular la forma explícita de x_n y $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Problema 2

(a) (3 puntos) Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n^3}$.

(b) (3 puntos) Demostrar la divergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ y determinar el orden de magnitud de la sucesión de sumas parciales de la misma.

(c) (4 puntos) Estudiar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n+1}$.

Problema 3

Se consideran las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) (3.5 puntos) Estudiar en qué puntos F es continua y en cuáles derivable. Calcular $F'(x)$ en los puntos en los que sea posible.

(b) (3.5 puntos) Hallar una forma explícita de $F(x)$ para $x \in [-1, \infty)$.

(c) (3 puntos) Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ y calcular su valor en caso de que sea convergente.

Problema con ordenador 1

a. (3.5 puntos) Se quiere aproximar $\ln(1.5)$ mediante un polinomio de Taylor de orden 5 centrado en $x_0 = 1$ de la función $f(x) = \ln(x)$. Dar el valor de la aproximación y una cota del error cometido.

b. (4 puntos) Sabiendo que $\ln(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$ si $0 < x \leq 2$ aproximar $\ln(1.5)$ con un error menor que 10^{-4} utilizando técnicas de suma aproximadas de series.

c. (2.5 puntos) Determinar el paso h necesario para que utilizando interpolación lineal a trozos para aproximar f, el error global de la aproximación en el intervalo $(1, 2)$ sea menor que 10^{-2}. ¿Cuántos puntos habría que tomar?

Problema con ordenador 2

Para calcular la tasa (o razón) λ de natalidad de una población, es preciso resolver la ecuación siguiente, que depende del número de habitantes al comienzo del año, de las personas que llegan durante el mismo y el número de habitantes al final de año.

$$-1 + \frac{3}{\lambda + 1} = -\frac{870}{1859(\lambda + 1)^2}.$$

a. (1 punto) Escribir la ecuación anterior como una expresión $f(\lambda) = 0$ con f continua en $\mathbb{R}$.

b. (4 puntos) Separar las raíces de la ecuación en intervalos de amplitud 1 y justificar que no existen más raíces.

c. (5 puntos) Aproximar la raíz que representa la tasa de natalidad con un error menor que 10^{-6}, usando el método de la bisección. (Indicar razonadamente el numero de iteraciones, el intervalo final y la solución propuesta).

Nota: Tasa de natalidad$= 1000 \cdot \dfrac{\text{número total de nacimientos}}{\text{población total}}$.

A.3 Septiembre de 2008

Preguntas de test (30%)

A.19 Si a_n y b_n son sucesiones de números reales tales que $|a_n| \leq 2|b_n|$ a partir de un n. Entonces se puede asegurar que:

(a) $a_n \ll b_n$
(b) $a_n \sim b_n$
(c) $a_n \in O(b_n)$

A.20 El valor de $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$ es:

(a) 1
(b) $\dfrac{1}{4}$
(c) Dicha integral diverge.

A.21 Una expresión de la ecuación

$$-1 + \frac{3}{\lambda+1} = \frac{-870}{1859(\lambda+1)^2}$$

de la forma $f(\lambda) = 0$, con f continua en $\mathbb{R}$, es:

(a) $f(\lambda) = \dfrac{3 \cdot 1859(\lambda+1)}{1859(\lambda+1)^2} - 1$
(b) $f(\lambda) = \dfrac{870}{1859(\lambda+1)^2}(\lambda+1) + 3$
(c) $f(\lambda) = -(\lambda+1)^2 + 3(\lambda+1) + \dfrac{870}{1859}$

A.22 Sean a_n y b_n sucesiones acotadas de números reales. Entonces:

(a) La sucesión $k_1a_n + k_2b_n$ está acotada para todos $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
(b) La sucesión $k_1a_n + k_2b_n$ está acotada sólo si k_1 y k_2 son positivos.
(c) La sucesión $k_1a_n + k_2b_n$ puede no estar acotada.

A.23 El desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x) = e^{-2x}$ centrado en $x_0 = 0$ es:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2^n}{n!}x^n$
(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n!}x^n$
(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}x^n$

A.24 Si $p(x) = x^2+1$ es el polinomio de Taylor de orden 3 de una función $f(x)$ en $x_0 = 0$, podemos asegurar que:

(a) $f'''(0) = 0\,,\ f'(0) = 0$
(b) $f''(0) = 1\,,\ f(0) = 1$
(c) $f(1) = 2\,,\ f(0) = 1$

A.25 Sea la serie convergente $S_1 = \displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} f(n)$ donde $f(n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$

(a) Se puede afirmar que la serie $S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es también convergente y $S_1 \leq S_2$.
(b) Se puede afirmar que la serie S_2 es convergente y $S_1 \geq S_2$.
(c) Aunque S_1 es convergente no se puede afirmar que S_2 siempre lo sea.

A.26 Dada la siguiente tabla de puntos

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	2

, se quiere aproximar el valor en $\frac{1}{2}$.

(a) El menor error se comete al utilizar interpolación lineal a trozos.
(b) El menor error se comete al utilizar interpolación cúbica.
(c) Si no se tiene más información sobre $f(x)$, no se puede asegurar en qué caso se comete el menor error.

A.27 La solución general de la ecuación en diferencias $x_{n+2} - 4x_n = 0$ es:

(a) $c_1 2^n + c_2 n 2^n$
(b) $c_1 2^n + c_2(-2)^n$
(c) $2^n(c_1\cos(n\frac{\pi}{2}) + c_2\,\mathrm{sen}(n\frac{\pi}{2}))$

A.28 Sea la ecuación $f(x) = 0$ siendo f una función real de variable real continua y derivable. Sabiendo que f tiene una solución única en el intervalo $(4,5)$, después de hacer 15 iteraciones por el método de la bisección, podemos asegurar que dicha solución está en el intervalo $[4.69, 4.72]$:

(a) si $f(4.69) = 0.01\,,\ f(4.72) = 0.07$.
(b) si $f(4.69) = 1\,,\ f(4.72) = 1$.
(c) si $f(4.69) = 0.01\,,\ f(4.72) = -0.21$.

Teoría (10 %)

Demostrar las siguientes desigualdades de la jerarquía de infinitos:

(a) (7 puntos) $n^p \ll r^n$ para $p, r \in \mathbb{R}$ tales que $p > 0$ y $r > 1$.

(b) (3 puntos) $r^n \ll n^p$ para $p, r \in \mathbb{R}$ tales que $p > 0$ y $0 < r \leq 1$.

Problema 1 (12 %)

(a) (3.5 puntos) Estudiar la convergencia de la sucesión

$$a_n = \frac{n}{n^3 - 1} + \frac{n}{n^3 - 2} + \cdots \frac{n}{n^3 - n}$$

(b) (3.5 puntos) Resolver la ecuación en diferencias

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = kx_n + k^n \ , \ n \geq 0 \end{cases}$$

siendo $k \in \mathbb{R}$ y $k \neq 0$.

(c) (3 puntos) Calcular el orden de magnitud de la solución x_n del apartado (b).

Problema 2 (12 %)

(a) (3 puntos) Estudiar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n^3)}{n}$.

(b) (3 puntos) Utilizar adecuadamente el criterio integral para calcular el orden de magnitud de la sucesión de sumas parciales de la serie anterior y determinar si dicha sucesión está acotada. Justificar la respuesta.

(c) (4 puntos) Dada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n3^n}$, estudiar la convergencia de dicha serie para los distintos valores de $x \in \mathbb{R}$.

Problema 3 (12 %)

Se consideran las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{2}{x^2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

(a) (3 puntos) Estudiar la derivabilidad de $F(x)$ hallando $F'(x)$ en los puntos en los que exista.

(b) (3 puntos) Hallar la forma explícita de $F(x)$.

(c) (4 puntos) Dar una expresión del polinomio interpolador de $F(x)$ en los puntos de abscisas $\{0, 2, 4\}$.

Problema con ordenador 1 (12%)

Se considera la función $f(x) = \ln(1+x)$ y se pide:

(a) (4 puntos) Calcular su polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$. Utilizarlo para dar un valor aproximado de $\ln(1.25)$ y calcular una cota del error cometido, utilizando el resto de Lagrange.

(b) (6 puntos) Calcular una aproximación de $\ln(1.25)$ mediante un polinomio de Taylor en $x_0 = 0$ con un error menor que 10^{-5}.

NOTA: Este último apartado puede hacerse obteniendo una expresión general para $f^{(n+1)}(x)$ y hallando un $n \in \mathbb{N}$ que garantice $|R_n(x)| < 10^{-5}$, o bien utilizando que $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ si $x \in (-1, 1]$ y técnicas de suma aproximada de series.

Problema con ordenador 2 (12%)

Dos hermanos mal avenidos heredan un gran olivar que deciden repartir en dos partes lo más iguales posible. Una frontera natural la daría el río que corta la finca en dos mitades. Para que la división sea equilibrada, acuerdan que si una de las partes fuera más de un 5% mayor que la mitad de la finca, el que heredara la parte más pequeña recibiría como compensación una cantidad en metálico durante los primeros 50 años. El olivar puede considerarse como un rectángulo de 2 km de base por 3 km de altura y el río responde aproximadamente a la gráfica de la expresión:

$$f(x) = \frac{x^5 \ln(x) - 3x^3}{1 + e^x} + 2$$

(a) (4 puntos) Aproximar el área de la superficie por debajo del río utilizando el método de Simpson con 13 puntos y dar una cota del error cometido.
(Cota del error del método de Simpson: $\frac{M(b-a)^5}{180n^4}$ siendo $|f^{(IV)}(x)| \leq M$ para todo $x \in (a, b)$)

(b) (4 puntos) Calcular el número de puntos que hay que tomar para aproximar el área anterior con un error menor que 10 m^2 utilizando el método del trapecio y dar una aproximación del área con esa cota de error.
(Cota del error del método del trapecio: $\frac{M(b-a)^3}{12n^2}$ siendo $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in (a, b)$)

(c) (2 puntos) De acuerdo con el resultado obtenido, ¿habrá que compensar a alguno de los hermanos?

A.4 Diciembre de 2008

Preguntas de test (30 %)

A.29 La sucesión $a_n = \dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$ verifica:

(a) $a_n \sim \dfrac{1}{n}$.
(b) $a_n \in O\left(\frac{1}{n}\right)$.
(c) a_n es una sucesión no convergente.

A.30 Sabiendo que el polinomio de Taylor de orden 2 de cierta función $f(x)$ centrado en $x_0 = 1$ es $T_2(x) = 2\,(x-1)\,(7x-5)$ entonces, el polinomio de Taylor de orden 1 de la misma función centrado en $x_0 = 1$ es:

(a) $2 + (x-1)$.
(b) $4\,(x-1)$.
(c) $2 + 2\,(x-2)$.

A.31 Se utiliza el método de bisección para aproximar una solución de una función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$. Tras 6 pasos, una cota del error cometido al aproximar dicha solución por un valor cualquiera del intervalo obtenido es:

(a) $\frac{1}{2^5}$.
(b) $\frac{1}{2^4}$.
(c) $\frac{1}{2^6}$.

A.32 Indicar cuál de las siguientes integrales impropias es divergente:

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.
(b) $\int_1^\infty e^{-2x}\,dx$.
(c) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.

A.33 La sucesión $a_n = n^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{(n!)^2}$ verifica:

(a) Es divergente.
(b) Es monótona.
(c) Su límite es 1.

A.34 La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{3n+1}\right)$,

(a) Converge.
(b) Diverge.
(c) Converge o diverge dependiendo del criterio elegido.

A.35 Si $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \sin(t)\,dt$, entonces $F'(x)$ es:

(a) $\sin\left(x^2\right) \cdot 2x$.
(b) $\cos\left(x^2\right) \cdot 2x$.
(c) $\left(\cos(1) - \cos\left(x^2\right)\right) \cdot 2x$.

A.36 La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n2^n}$ converge si y sólo si:

(a) $x \in (-4, 0)$.
(b) $x \in [-4, 0)$.
(c) $x \in [-4, 0]$.

A.37 Dada la ecuación $e^x = -x$, podemos asegurar que:

(a) No tiene solución porque e^x siempre toma valores positivos.
(b) Tiene una única solución y dicha solución está en el intervalo $[-1, 0]$.
(c) Tiene más de una solución.

A.38 El polinomio interpolador de orden 3 de la función $f(x) = x^4$ en los puntos de abscisas $\{-1, 0, 1, 2\}$ es:

(a) x^2.
(b) $x^3 + x^2 - x$.
(c) $2x^3 + x^2 - 2x$.

Teoría (10 %)

Demostrar que $\ln(n) \ll n^p \ll n^q$, para $0 < p < q$.

Problema 1 (15 %)

(a) Dada la ecuación en diferencias $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, obtener la solución general de la ecuación y la solución particular para el caso $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. (3 *puntos*)

(b) Encontrar todos los valores de $r \in R$ tales que $x_n \in O(r^n)$. ($1'5$ *puntos*)

(c) Estudiar si la sucesión $a_n = (-1)^n \dfrac{e^n}{n^2+1}$ es convergente. (2 *puntos*)

(d) Calcular el límite de la sucesión $b_n = \dfrac{ne^n}{4^n+1}$. (2 *puntos*)

(e) Ordenar por orden de magnitud las sucesiones a_n, b_n y $c_n = 4^n + 1$. ($1'5$ *puntos*)

Problema 2 (20 %)

(a) Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, obtener los polinomios de Taylor de órdenes 1 y 2 de $f(x)$ centrados en $x_0 = 0$. (2 *puntos*)

(b) Usar el polinomio de orden 1 del apartado enterior para aproximar $\sqrt{1.25}$. ($0'5$ *puntos*)

(c) Justificar que, en el intervalo adecuado, $|f''(x)| \leq 1$ y usar ese resultado para dar una cota del error cometido en la aproximación anterior. (2 *puntos*)

(d) Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\, n^3}{e^{n^2}}$. (3 *puntos*)

(e) Estudiar si se puede usar el criterio integral para asegurar que $\sum_{k=1}^{n} k\, e^{k^2} \sim \int_1^n x\, e^{x^2}\, dx$. Para ello, estudiar si se verifican todas las hipótesis necesarias para poder aplicar dicho criterio y, en caso que así sea, aplicarlo. ($2'5$ *puntos*)

Problema 3 (25%)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 2 \\ \frac{1}{x-1}, & x \geq 2. \end{cases}$ y sea $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\, dt$. Se pide:

(a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $F(x)$. ($1'5$ *puntos*)

(b) Hallar la expresión explícita de $F(x)$, $\forall x \in R$. ($2'5$ *puntos*)

(c) Aproximar el valor de $\displaystyle\int_2^5 f(x)\, dx$ con un error menor que 10^{-5} usando el método de Simpson. [1] ($2'5$ *puntos*)

[1] Cota del error: $\frac{M}{180n^4}(b-a)^5$, con $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M\, \forall x \in (a, b)$

(d) Se quiere aproximar $F(x)$ en el intervalo $[2,10]$ mediante interpolación lineal a trozos. Calcular una longitud de paso h que garantice que el error de aproximación para cualquier $x \in [2,10]$ es menor que 10^{-4}. Explicar detalladamente el proceso seguido para determinar h. ($2'5$ *puntos*)

(e) ¿Sería suficiente dividir el intervalo $[2,10]$ en 300 subintervalos para garantizar un error menor que 10^{-4}? Justificar la respuesta. (1 *punto*)

A.5 Junio de 2007

Preguntas de test (25%)

A.39 La sucesión $\dfrac{n^3+2n}{n^2+\sqrt{n}}\ln(n^2+1)$ es del mismo orden que

(a) n.
(b) $n\ln(n)$.
(c) n^3.

A.40 Sea (a_n) una sucesión monótona decreciente con $a_n \geq 0$ para todo n. Se puede asegurar que

(a) (a_n) es convergente y $\lim a_n = 0$.
(b) (a_n) puede no ser convergente.
(c) (a_n) es convergente pero su límite puede no ser 0.

A.41 Las sucesión $a_n = n(-3)^n + 3^n$ verifica

(a) $a_n \sim n3^n$.
(b) $a_n \ll n3^n$.
(c) $a_n \in O(n3^n)$ pero $a_n \not\sim n3^n$ y $a_n \not\ll n3^n$.

A.42 La sucesión $x_n = n2^n$ es solución de la ecuación en diferencias:

(a) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$.
(b) $x_{n+2} - 4x_n = 0$.
(c) $x_{n+2} + 4x_n = 0$.

A.43 La ecuación $x^3 + 5x + 1 = 0$

(a) no tiene ninguna solución real.
(b) tiene una única solución real.
(c) tiene tres soluciones reales.

A.44 La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{x}{3}\right)^n(n^2+1)$ verifica:

(a) No converge para ningún valor de x, ya que su término general no tiende a 0.
(b) Es convergente para cualquier $x > 0$.
(c) Es convergente para cualquier x con $|x| < 3$.

A.45 ¿Cuál de las siguientes series converge?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{2n+1}}{n}$.
(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{2n-1}}{n\sqrt{n}}$.
(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{2n}}{\sqrt{n}}$.

A.46 El polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ en $x_0 = 0$ es:

(a) $P_2(x) = 1$.
(b) $P_2(x) = x$.
(c) $P_2(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

A.47 Sea $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 15$ y $P(x)$ polinomio interpolador de $f(x)$ en los puntos de abscisas $\{0,1,2,3,4,5\}$. Se puede asegurar que el grado del polinomio $P(x)$ es:

(a) 3.
(b) 4.
(c) 5.

A.48 La integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x)^{3p}}\,dx$ es convergente:

(a) Si y sólo si $p > 1$.
(b) Si y sólo si $p > 0$.
(c) Si y sólo si $p > 1/3$.

Teoría (10 %)

Sea a_n una sucesión convergente a $-\dfrac{1}{2}$. Demostrar que existe n_0 tal que $a_n < 0$ para todo $n \geq n_0$.

Problema 1 (10 %)

Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Problema 2 (12 %)

Sea $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Se pide:

(a) *(5 puntos)* Aproximar $\sqrt[3]{2}$ mediante el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x)$ en $x_0 = 0$ y dar una cota del error cometido.

(b) *(5 puntos)* Hallar la longitud de paso h que garantice un error menor que 10^{-2} al aproximar $f(x)$ mediante interpolación lineal a trozos en el intervalo $[0, 100]$ con puntos equiespaciados a distancia h.

Problema 3 (18 %)

Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ |2x-1| & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Se pide:

(a) *(3 puntos)* Estudiar la continuidad y derivabilidad de F en los puntos $x = 0$ y $x = 1/2$, y hallar $F'(0)$ y $F'(1/2)$ si existen.

(b) *(3 puntos)* Calcular $F(0)$, $F(1/2)$ y $F(1)$.

(c) *(3 puntos)* Hallar el polinomio interpolador de $F(x)$ en los puntos de abscisas $\{0, 1/2, 1\}$.

(d) *(1 puntos)* Estudiar el crecimiento de F en $[0, \infty)$.

Problema con ordenador 1 (12,5%)

Sabiendo que $f(x) = \ln(1 + x^3) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{3n}}{n}$ si y solo si $x \in (-1, 1]$ se pide:

(a) *(2 puntos)* Justificar que es posible aproximar $\ln(\frac{28}{27})$ con la precisión que se desee usando polinomios de Taylor de $f(x)$ centrados en $x_0 = 0$ y determinar el punto x en que hay que evaluar $f(x)$ para obtener dicha aproximación.

(b) *(8 puntos)* Obtener una aproximación de $\ln(\frac{28}{27})$ con un error menor que 10^{-6} evaluando la expresión dada inicialmente en el punto adecuado.

Problema con ordenador 2 (12,5 %)

(a) *(4 puntos)* Un algoritmo que recibe n datos utiliza $2n^2$ operaciones para reducir el problema a cinco problemas de tamaño $n-1$ y ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo. Sabiendo que con un dato realiza 2 operaciones, definir una sucesión a_n que represente el número de operaciones que se realizan cuando se reciben n datos, obtener su forma explícita y dar su orden de magnitud.

(b) *(4 puntos)* Se tiene otro algoritmo que con un dato también realiza 2 operaciones, con dos datos realiza 40 y para $n \geq 3$ reduce cada problema de n datos a cinco problemas de $n-1$ datos y seis problemas de $n-2$ datos sobre los que se aplica el mismo algoritmo. Definir una sucesión b_n que represente el número de operaciones que se realizan cuando se reciben n datos, obtener su forma explícita y dar su orden de magnitud.

(c) *(2 puntos)* Proponer sucesiones c_n, d_n y e_n cuyos órdenes de magnitud se correspondan, respectivamente, con el de un algoritmo menos eficiente que a_n y b_n, el de uno intermedio entre a_n y b_n y el de otro más eficiente que cualquiera de los dos. Justificar las respuestas.

A.6 Septiembre de 2007

Test (25%)

A.49 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^{an}}$

(a) Es convergente $\forall\, a \in \mathbb{R}$.
(b) Es convergente $\iff a \geq 0$.
(c) Es convergente $\iff a \leq 0$.

A.50 Dada una función f continua en $[a,b]$ y tal que $f(a)f(b) < 0$, se le aplica el método de la bisección en dicho intervalo 3 veces y se obtiene que $[a_3, b_3] = [1, 1.25]$. El intervalo inicial $[a,b]$ podría ser:

(a) $[1,2]$
(b) $[0,2]$
(c) $[-1,1]$

A.51 Si a_n es una sucesión tal que $|a_n| \leq \dfrac{n+1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se puede asegurar que:

(a) $\lim a_n = 1$
(b) $\lim |a_n| = 1$
(c) $\lim \dfrac{a_n}{n} = 0$

A.52 Si $a_n = n \ln(n^n)$ entonces:

(a) $\forall\, p > 1 \quad a_n \in \mathbf{O}\left(n^p\right)$
(b) $\forall\, p > 2 \quad a_n \in \mathbf{O}\left(n^p\right)$
(c) $\forall\, p \in \mathbb{R} \quad a_n \notin \mathbf{O}\left(n^p\right)$

A.53 La sucesión $a_n = \sqrt[n]{2^{n^2} + 5^n}$

(a) Es convergente a 5.
(b) Es convergente a 2.
(c) Es divergente.

A.54 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{3^{2n}}$

(a) Es convergente y su suma es $\dfrac{7}{2}$.
(b) Es convergente y su suma es $\dfrac{9}{2}$.
(c) Es divergente.

A.55 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $c \in (a,b)$. Si $f(a) > 0$, $f(b) > 0$, f es estrictamente decreciente en $[a,c]$ y f es estrictamente creciente en $[c,b]$, entonces se puede asegurar que:

(a) Si $f(c) < 0$ entonces f tiene exactamente 2 raíces en (a,b).
(b) Si $f(c) < 0$ entonces f puede tener más de 2 raíces en (a,b).

(c) f tiene al menos 2 raíces en (a, b) independientemente del valor de $f(c)$.

A.56 Sean x_n e y_n sucesiones convergentes que satisfacen:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces se puede asegurar que:

(a) Ambas tienen el mismo límite.

(b) Sus límites son distintos.

(c) No hay suficiente información para asegurar ni (a) ni (b).

Teoría (10 %)

Demostrar que toda sucesión convergente está acotada.

Problema 1 (25 %)

Se consideran las sucesiones definidas por:

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ \dfrac{n}{2} x_{n-1} & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \qquad\qquad y_n = \sqrt[n]{2^{n^2} + 7^n}$$

(a) *(3 puntos)* Estudiar la monotonía de x_n. Calcular su límite y obtener su orden de magnitud.

(b) *(3 puntos)* Justificar que y_n es divergente y que $y_n \sim 2^n$.

(c) *(2 puntos)* Comparar los órdenes de magnitud de x_n e y_n.

(d) *(2 puntos)* Estudiar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x_n}$.

Problema 2 (10 %)

Se considera la sucesión x_n definida por

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + 3(n+1)^2 & n \geq 1 \end{cases}$$

(a) *(2 puntos)* Hallar una expresión explícita para x_n (si no se puede simplificar, es válido dejarlo en función de una suma).

(b) *(8 puntos)* Utilizar el criterio integral para obtener el orden de magnitud de x_n.

Problema con ordenador 1 (15%)

Una gaceta por Internet lanza una noticia sobre la inminente colisión de un meteorito contra la Tierra. Para leer las noticias relacionadas con la catástrofe, es preciso registrarse como lector. El primer día hay registradas 300 personas, el segundo, 1000 y a partir del tercero el número de usuarios registrados es igual a 6 veces la suma de los que había registrados los dos días anteriores menos 15 veces los que había registrados dos días antes, porque se dan de baja.

(a) *(3 puntos)* Escribir una sucesión x_n que modelice el número de lectores registrados al cabo de n días.

(b) *(2 puntos)* Dar la expresión explícita para x_n.

(c) *(3 puntos)* Encontrar, si existen, todos los valores $r \in \mathbb{R}^+$ de modo que la sucesión del apartado anterior sea $O(r^n)$ o justificar que no es posible.

(d) *(2 puntos)* Si la gaceta promete que regalará un kit completo de supervivencia al registrado número 10^6, ¿qué día se ha registrado el ganador?

Problema con ordenador 2 (15%)

Determinar razonadamente cuántas soluciones reales tiene la ecuación

$$\frac{x^5 - 40x^4 + 70x^3 + 300x^2 - 500}{x} = 300,$$

localizar cada una de ellas en un intervalo de amplitud 1 y aproximar la más cercana al origen, por el método de la bisección, con un error menor que 10^{-3}. Detallar el proceso seguido.

A.7 Diciembre de 2007

Preguntas de test (25%)

A.57 La expresión explícita de la sucesión recurrente $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \frac{n-1}{2} a_{n-1}, & n > 1, \end{cases}$ es:

(a) $a_n = \frac{(n-1)!}{2}$,

(b) $a_n = \frac{(n-1)!}{2^n}$,

(c) $a_n = \frac{(n-1)!}{2^{n-2}}$.

A.58 La sucesión $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(a) Es monótona creciente y acotada,

(b) Es acotada pero no es monótona,

(c) Es monótona pero no acotada.

A.59 Se considera la ecuación en diferencias $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ para $n \geq 3$ para ciertos valores iniciales a_1 y a_2. La solución general de la ecuación es de la forma:

(a) $a_n = \alpha 3^n - \beta 3^{-n}$,

(b) $a_n = 3^n(\alpha cos\frac{n\pi}{3} + \beta sen\frac{n\pi}{3})$,

(c) $a_n = \alpha 3^n + \beta n 3^{n-1}$.

A.60 Se utiliza el método de la bisección para aproximar una raíz del polinomio $P(x) = \frac{1}{12}(x+2)^3(3x+10) - 3$ en $[-1, 1]$. Tras 5 pasos, una cota del error cometido al aproximar dicha raíz por un valor cualquiera del intervalo obtenido es:

(a) $\frac{1}{2^5}$,

(b) $\frac{1}{2^4}$,

(c) $\frac{1}{2^6}$.

A.61 Se considera la serie $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$, $b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$, entonces:

(a) ambas convergen,

(b) solo b_n converge,

(c) ambas divergen.

A.62 La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ es convergente si y solo si:

(a) $x \in (-1, 1)$,

(b) $x \in [-1, 1)$,

(c) $x \in (-1, 1]$.

A.63 Dada $f(x) = \cos(x)$ la serie de Taylor de $f(x)$ centrada en $x_0 = 0$ es:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!}$.

A.64 Para aproximar los valores de una función $f(x)$ en un intervalo $[0, 5]$ se utiliza la aproximación lineal a trozos en dicho intervalo con un paso $h = 0,1$. Se desea obtener una cota óptima (la más pequeña) del error cometido para aproximar $f(\pi)$ y ésta se obtiene utilizando:

(a) la expresión $\frac{M}{2!}|3.1-\pi||3.2-\pi|$ siendo M una cota de f'' en $[3.1, 3.2]$,

(b) la expresión $\frac{M}{8}(0.1)^2$ siendo M una cota de f'' en $[3.1, 3.2]$,

(c) ambas expresiones dan la misma cota.

A.65 El valor de $\int_0^{\pi} \sin^2(x)dx$ aproximado por el método del trapecio con 5 puntos equiespaciados es:

(a) $\frac{3}{8}\pi$,

(b) $\frac{1}{2}\pi$,

(c) $\frac{5}{4}\pi$.

A.66 La integral impropia $\int_0^{\infty} e^{-t}dt$,

(a) es convergente y vale 1,

(b) es convergente y vale $e - 1$,

(c) es divergente.

Teoría (10 %)

Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente a un valor positivo $l = \lim_{n\to\infty} a_n > 0$. Demostrar que existe un número natural n_0 tal que $a_n > 0$ para todo $n > n_0$.

Problema 1 (13 %)

Se considera la sucesión $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{3 + 4a_n}$ para $n > 1$. Se pide demostrar que la sucesión es convergente y calcular su límite.

Problema 2 (13 %)

Sea $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$. Se pide:

(a) Demostrar, utilizando el criterio integral, que $S_n \sim n^3$.

(b) Obtener el único polinomio interpolador $P(n)$ de grado menor o igual a 3 tal que $P(0) = S_0$, $P(1) = S_1$, $P(2) = S_2$ y $P(3) = S_3$.

Problema 3 (13 %)

Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & -1 \le x \le 1, \\ 2 - x & 1 < x \le 2, \end{cases}$$

y se considera la función $F(x) = \int_{-1}^{x} f(s)ds$.

(a) Calcular de forma explícita $F(x)$,

(b) Justificar en qué puntos F es continua.

(c) Calcular, si es posible, $F(0)$, $F'(0)$ y $F'(1)$.

Problema con ordenador 1 (13%)

Se quiere obtener una aproximación de $ln(2)$ mediante polinomios de Taylor.

a. Dada $g(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

   a1. Obtener una aproximación de $ln(2)$ a partir de Taylor de orden 2 de $g(x)$ en $x_0 = 0$.

   a2. Dar una cota del error cometido y justificar que dicho error es menor que 10^{-1}.

b. Dado $f(x) = ln(x+1)$, obtener una aproximación de $ln(2)$ con un error menor que 10^{-1} a partir de un polinomio de Taylor de $f(x)$ en $x_0 = 0$ (indicar los pasos seguidos).

c. A la vista de los resultados anteriores, ¿cuál de las dos funciones es más adecuada para obtener aproximaciones de $ln(x)$ a partir de sus polinomios de Taylor? Justificar la respuesta.

Problema con ordenador 2 (13%)

Sea $f(x) = 150e^{-6x}x^9 - \dfrac{1}{15}$ se pide:

a. Estudiar el número de raíces reales de $f(x)$, justificando adecuadamente cuántas son y localizarlas en sendos intervalos de longitud 1.

b. Mediante el método de la bisección, dar una aproximación de la mayor de las raíces con un error inferior a 10^{-3}. Indicar el proceso seguido, incluyendo las instrucciones de DERIVE utilizadas y el resultado de las mismas.

A.8 Soluciones a las preguntas de test

Curso 2007-08				Curso 2006-07			
A.1	c	A.19	c	A.39	b	A.57	c
A.2	b	A.20	a	A.40	c	A.58	c
A.3	a	A.21	c	A.41	c	A.59	c
A.4	c	A.22	a	A.42	a	A.60	b
A.5	b	A.23	c	A.43	b	A.61	c
A.6	c	A.24	a	A.44	c	A.62	b
A.7	c	A.25	a	A.45	b	A.63	a
A.8	c	A.26	c	A.46	b	A.64	a
A.9	b	A.27	b	A.47	a	A.65	b
A.10	a	A.28	c	A.48	c	A.66	a
A.11	b	A.29	b	A.49	b		
A.12	b	A.30	b	A.50	b		
A.13	b	A.31	b	A.51	c		
A.14	a	A.32	a	A.52	b		
A.15	a	A.33	c	A.53	c		
A.16	b	A.34	a	A.54	a		
A.17	c	A.35	a	A.55	a		
A.18	c	A.36	b	A.56	a		
		A.37	b				
		A.38	c				

Bibliografía

Bibliografía básica

[1] Abellanas, L.; Galindo, A.: "Métodos de Cálculo". McGraw-Hill. 1990.

[2] Bradley, G.L.; Smith, K.J.: "Cálculo de una variable. Volumen 1". Prentice Hall. 1998.

[3] Faires, J.D.; Burden, R.: "Métodos Numéricos". Tercera edición. Thomson. 2004.

[4] García, A.; García, F. y otros: "Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable". Tercera edición. Clagsa. 2007.

[5] Rincón, F.: "Análisis Matemático y Métodos Numéricos para Informática". Departamento de Publicaciones de la E.U. de Informática de la U.P.M. 2001.

[6] Salas, S.L.; Hille, E.; Etgen, G.J.: "Calculus. Una y varias variables. Volúmenes 1 y 2". Cuarta edición. Reverté. 2002.

[7] Sanz Serna, J.M.: "Diez Lecciones de Cálculo Numérico". Universidad de Valladolid. 1998.

[8] Spivak, M.: "Calculus". Reverté. 1988.

Bibliografía complementaria

[9] Apostol, T.: "Calculus I y II". Reverté. 1988.

[10] Bartle, R.G.; Sherbert, D.: "Introducción al Análisis Matemático de una variable". Limusa. 1984.

[11] Burden, R.L.; Faires, J.D.: "Análisis Numérico". Séptima edición. Thomson. 2002.

[12] Larson, R.E.; Hostetler, R.P.; Edwards: "Cálculo y Geometría Analítica. Volúmenes 1 y 2". Sexta edición. McGraw-Hill. 1999.

[13] Marsden, J.E.; Weinstein, A.: "Calculus I, II, III". Springer-Verlag. 1985.

[14] Rubio, B.: "Funciones de variable real". Madrid. 2006.

[15] Rubio, B.: "Números y convergencia". Madrid. 2006.

[16] Thomas, G.B.; Finney, R.L.: "Cálculo una variable". Novena edición. Addison Wesley Longman. 1998.

Libros de problemas

[17] Demidovich, B.P.: "Problemas y ejercicios de Análisis Matemático". Paraninfo. 1985.

[18] Pastor, E.; Varela, V.: "Teoría y Problemas de Cálculo Integral". Crisser. 1974.

[19] Scheid, F.; Di Costanzo, R.E.: "Métodos Numéricos". Segunda Edición. McGraw-Hill. 1991.

Libro de prácticas

[20] García, A. (Ed.): "Prácticas de Matemáticas con DERIVE". Clagsa. 1994.