Ejercicios Hoja 2

Curso 2020/2021

1. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, en $\mathbb{Z}_7^3$

b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, en $\mathbb{Z}_5^4$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, en $\mathbb{Z}_3^5$

2. Hallar una base $\mathcal{B}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ tal que se verifiquen las siguientes igualdades:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

3. Dadas las aplicaciones

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$

b) $f_2 : \mathbb{Z}_3^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^2$ definida por $f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}$.

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $f_4 : P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ definida por $f_4(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = a_1+2a_2x+3a_3x^2$.

Estudiar si son aplicaciones lineales y, en su caso determinar su matriz asociada $\mathcal{M}(f)$.

4. Dado el sistema de vectores, sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Comprobar si son base y caso de serlo calcular las matrices de paso $\mathcal{P}_{\mathcal{B}I_3}$ y $\mathcal{P}_{I_3\mathcal{B}}$

(**Nota.-** La matriz I_3 denota la matriz identidad de tamaño 3×3.)

5. Dados los siguientes conjuntos de vectores, sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$,

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Comprobar si son base y, caso de serlo calcula la matriz de paso $\mathcal{P}_{B_1B_2}$.

6. Sea la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{Z}_5^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^4 \text{ definida por } f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1-3x_2 \\ 4x_1+2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y las bases:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{Z}_5^2$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{Z}_5^4$$

Calcular las siguientes matrices:

a) $\mathcal{M}_{B_1 I_4}(f)$.

b) $\mathcal{M}_{I_2 B_2}(f)$.

c) $\mathcal{M}_{B_1 B_2}(f)$.

(**Nota.-** Las matrices I_2 y I_4 denotan la matriz identidad de tamaño 2×2 y 4×4 respectivamente.)

7. Dadas las aplicaciones lineales:

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \text{ y } \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

definidas por:

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} \text{ y } f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

y las bases

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

Calcular:

a) $\mathcal{M}_{B_1 B_2}(f)$

b) $\mathcal{M}_{B_3 B_1}(g)$

c) $\mathcal{M}_{B_2 B_3}(f \circ g)$

8. Calcular el núcleo, $\mathrm{Ker}(f)$, y el espacio imagen, $\mathrm{Im}(f)$, de las siguientes aplicaciones lineales:

   a) la aplicación dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

   b) la aplicación lineal $f : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$$

   (**Nota.** $p(x)$ denota en general al polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$)

9. Sean las bases de $\mathbb{Z}_5^3$,

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

   y la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^3$ cuya matriz asociada en bases $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_1$ es:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   a) Calcula la matriz del cambio de base $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$

   b) Dado el espacio $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$. Hallar una base de U cuyos vectores estén expresados en base canónica.

   c) Calcular $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

10. Dado el espacio $V = C(B)$ siendo B la matriz, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

   a) Estudia si los vectores son generadores, linealmente independientes o base.
   b) Si no son base extrae una base de entre ellos.
   c) Calcula unas ecuaciones implícitas de V.
   d) Ampliar la base del espacio V, encontrada en el apartado b), añadiéndole los vectores que se necesiten para obtener una base del espacio $\mathbb{R}^4$.

11. Dados los espacios $U = N(B)$ y $V = N(C)$ siendo B y C las matrices, sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5^5$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Se pide:

   a) Estudiar si ambos espacios son iguales o si alguno está contenido en el otro.
   b) Ecuaciones implícitas del espacio suma $U + V$ y del espacio intersección $U \cap V$.
   c) Bases de los espacios $U + V$ y $U \cap V$.

12. Dados los espacios de $P_3(\mathbb{R})$

$$U = < 1 - x + x^2 + x^3, x - x^2, -1 + x^2, 2 + x - 2x^2 + x^3 >$$

y

$$V = < 1 - x - x^2 + 2x^3, 2x - 2x^2, 3 - 3x^2, 3 + 2x - 5x^2 > .$$

Se pide:

   a) Base y dimensión de U y V.
   b) Ecuaciones implícitas de U y V.

c) Estudia si son iguales o si alguno está contenido en el otro.

d) Encuentra un polinomio que esté en V pero no en U. Comprueba que ese polinomio junto con los de la base de U forman una base de $P_3(\mathbb{R})$.

e) Ecuaciones paramétricas de $U + V$ y de $U \cap V$.