Tema 1: SUCESIONES

CÁLCULO

(Grado en Ingeniería Informática - UMU)

Curso 2019/20

Contenidos del tema

1. Método de inducción.
2. Introducción a las sucesiones.
3. Límites.
4. Sucesiones divergentes. Indeterminaciones.
5. Órdenes de magnitud.
6. Resolución numérica de ecuaciones.

Contenidos del tema

1. **Método de inducción.**
2. Introducción a las sucesiones.
3. Límites.
4. Sucesiones divergentes. Indeterminaciones.
5. Órdenes de magnitud.
6. Resolución numérica de ecuaciones.

MÉTODO DE INDUCCIÓN

¿ Cómo se demuestra que una afirmación $P(n)$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$?

- Paso 1 .- Se demuestra que:
  La afirmación es cierta cuando $n = 1$.
- Paso 2 .- Se demuestra que:
  SI se supone que la afirmación es cierta para n,
  ENTONCES también es cierta para $n + 1$.

Ejercicio

Demuestra por inducción que las afirmaciones siguientes son ciertas para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, para todo $r \neq 1$.

Contenidos del tema

1. Método de inducción.
2. **Introducción a las sucesiones.**
3. Límites.
4. Sucesiones divergentes. Indeterminaciones.
5. Órdenes de magnitud.
6. Resolución numérica de ecuaciones.

Definición

Una **sucesión de números reales** es una aplicación $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

- Se representa mediante alguna de las formas: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ a_n
- Los números a_1, a_2, ... se llaman **términos** de la sucesión.

Sucesiones definidas explícitamente

- $[2, 4, 6, 8, \dots]$ ►► el término general es $\boxed{a_n = 2n}$
- $[-1, 1, -1, 1, \dots]$ ►► el término general es $\boxed{a_n = (-1)^n}$

Sucesiones definidas por recurrencia

Expresando **cada término en función de los anteriores** y dando los términos iniciales necesarios. Por ejemplo:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = (n+1)b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sucesiones acotadas

Definición

Se dice que una sucesión a_n está:

1. **Acotada Inferiormente** si existe $I \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{I \leq a_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. **Acotada Superiormente** si existe $S \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{a_n \leq S}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. **Acotada** si está acotada inferior y superiormente, es decir, si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{|a_n| \leq C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos

1. $\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right]$ $a_n = \frac{1}{n}$ ▶▶ acotada
2. $[1, 3, 5, 7, 9, \ldots]$ $a_n = 2n - 1$ ▶▶ no acotada superiormente
3. $[-2, -4, -8, -16, \ldots]$ $a_n = -2^n$ ▶▶ no acotada inferiormente
4. $[-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots]$ $a_n = (-1)^n n$
   ▶▶ no acotada inferiormente ni superiormente

Sucesiones monótonas

Definición

Se dice que una sucesión a_n es:

1. **Monótona Creciente** si $\boxed{a_n \leq a_{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. **Monótona Estrictamente Creciente** si $\boxed{a_n < a_{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. **Monótona Decreciente** si $\boxed{a_n \geq a_{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
4. **Monótona Estrictamente Decreciente** si $\boxed{a_n > a_{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos

1. $[1, 3, 5, 7, 9, \ldots]$ ►► estrictamente creciente
2. $\left[1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots\right]$ ►► decreciente pero no estrictamente
3. $[-1, 2, -3, 4, \ldots]$ ►► ni creciente ni decreciente

Ejercicio

Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 1 \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Demuestra por inducción que $1 \leq a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   (Por tanto, a_n está **acotada**.)
2. Demuestra por inducción que $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   (Por tanto, a_n es **monótona estrictamente decreciente**.)

Contenidos del tema

1. Método de inducción.
2. Introducción a las sucesiones.
3. **Límites.**
4. Sucesiones divergentes. Indeterminaciones.
5. Órdenes de magnitud.
6. Resolución numérica de ecuaciones.

Sucesiones convergentes

Definición

Decimos que un número real L es el **límite** de la sucesión a_n si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\boxed{|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0}$$

En tal caso, decimos que a_n es **convergente** a L, y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Ejemplos básicos

1. Toda sucesión constante, $a_n = c$, es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.
2. La sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ es convergente, con límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Propiedades básicas de los límites

Propiedades algebraicas

Sean a_n y b_n dos sucesiones convergentes. Sean $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Entonces:

1. $a_n + b_n$ converge a $a + b$.
2. αa_n converge a αa para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $a_n b_n$ converge a ab.
4. Si $b \neq 0$, entonces $b_n \neq 0$ a partir de cierto término y $\dfrac{a_n}{b_n}$ converge a $\dfrac{a}{b}$.

Límites y desigualdades

Sean a_n y b_n dos sucesiones convergentes tales que $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n}$$

Regla del sandwich

Regla del sandwich

Sean a_n y b_n dos sucesiones convergentes y sea c_n otra sucesión.

Si $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$, entonces

$$c_n \text{ es convergente } \text{ y } \lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

Ejemplo

$$a_n = 0, \quad c_n = \frac{n!}{n^n} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n} \quad \text{cumplen} \quad a_n \leq c_n \leq b_n.$$

$$\text{Por tanto: } \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}.$$

Multiplicando... una sucesión acotada por otra sucesión con límite 0

Propiedad

Si a_n está acotada y b_n converge a 0, entonces $a_n b_n$ converge a 0.

Ejemplo

$a_n = \operatorname{sen} n$ está acotada y $b_n = \dfrac{1}{n}$ converge a 0.

Por tanto: $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0}$.

Convergencia de sucesiones recurrentes

Teorema

(1) Toda sucesión convergente está acotada.

(2) **Toda sucesión monótona y acotada es convergente.**

Ejercicio

Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Demuestra que a_n es convergente y calcula $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Contenidos del tema

1. Método de inducción.
2. Introducción a las sucesiones.
3. Límites.
4. **Sucesiones divergentes. Indeterminaciones.**
5. Órdenes de magnitud.
6. Resolución numérica de ecuaciones.

Sucesiones divergentes

Definición

Decimos que una sucesión a_n es:

- **Divergente** si no es convergente.
- **Divergente a** ∞ si para todo $K \in \mathbb{R}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\boxed{a_n > K \quad \forall n \geq n_0}$$

En tal caso, escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

- **Divergente a** $-\infty$ si para todo $K \in \mathbb{R}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\boxed{a_n < K \quad \forall n \geq n_0}$$

En tal caso, escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Ejemplos

- $\boxed{a_n = 2n}$ es divergente a ∞.
- $\boxed{a_n = -3n}$ es divergente a $-\infty$.
- $\boxed{a_n = (-1)^n}$ es divergente, pero no es divergente a ∞ ni a $-\infty$.

Ejemplo importante: la sucesión geométrica

Llamamos **sucesión geométrica** a una sucesión de la forma

$$a_n = r^n$$

con $r \in \mathbb{R}$.

Se cumple:

1. $\boxed{r = 1} \implies r^n$ es constante, $r^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\boxed{0 < r < 1} \implies r^n$ es monótona estrictamente decreciente.
3. $\boxed{|r| < 1} \implies \lim_{n \to \infty} r^n = 0$.
4. $\boxed{r > 1} \implies \lim_{n \to \infty} r^n = \infty$.
5. $\boxed{r \leq -1} \implies r^n$ diverge (pero no diverge a ∞ ni a $-\infty$).

Indeterminaciones - Regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital

Sean $f, g : (c, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $g'(x) \neq 0$ y

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0} \quad \text{ó} \quad \boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \ \text{ y } \ \lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty}.$$

Si existe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

entonces también existe $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Ejemplo

Calculamos los siguientes límites utilizando la Regla de L'Hôpital:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n}$ (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n}$

Contenidos del tema

1. Método de inducción.
2. Introducción a las sucesiones.
3. Límites.
4. Sucesiones divergentes. Indeterminaciones.
5. **Órdenes de magnitud.**
6. Resolución numérica de ecuaciones.

Normalmente, para resolver un mismo "problema", se pueden usar distintos algoritmos. **¿Cómo decidimos cuál es mejor?**

Ejemplo de "problema"

Ordenar una lista de n números.

$n = 100 \Rightarrow n^2 = 10^4$ y $n \log n \simeq 460$

$n = 10^3 \Rightarrow n^2 = 10^6$ y $n \log n \simeq 6907$

$n = 10^4 \Rightarrow n^2 = 10^8$ y $n \log n \simeq 92103$

- Parece mejor el algoritmo que utiliza aproximadamente $n \log n$ operaciones.

Hay algoritmos que lo resuelven usando aproximadamente:

- n^2 operaciones

y otros lo resuelven usando aproximadamente:

- $n \log n$ operaciones

¿Qué pasa si n es grande?

Definición

Una sucesión a_n es **mucho menor** que otra sucesión b_n si:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0}$$

En tal caso, escribimos $a_n \ll b_n$.

Ejemplos sencillos

$\boxed{1 \ll 1000n}$ $\boxed{1000n \ll n^2}$ $\boxed{1 \ll n^2}$

Propiedad transitiva

$a_n \ll b_n$ y $b_n \ll c_n \implies a_n \ll c_n$

Jerarquía de infinitos

Teorema (Jerarquía de infinitos)

Para todo $0 < c < d$ y todo $1 < r < s$ se cumple:

$$\log n \ll n^c \ll n^d \ll r^n \ll s^n \ll n! \ll n^n$$

Por ejemplo ...

$$\boxed{\log n \ll n^{1/2} = \sqrt{n}} \quad \boxed{n^2 \ll n^5} \quad \boxed{n^{1000} \ll 2^n}$$

$$\boxed{2^n \ll 3^n} \quad \boxed{10^n \ll n!}$$

Definición

Una sucesión a_n es **del mismo orden** que otra sucesión b_n si:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = L \in \mathbb{R}, \quad \text{con } L \neq 0.$$

En tal caso, escribimos $a_n \sim b_n$.

Definición

Se llama **orden de magnitud** de una sucesión a otra sucesión del mismo orden "cuya expresión sea lo más sencilla posible".

Observaciones

- $a_n \sim b_n \iff b_n \sim a_n$ (propiedad simétrica)
- $a_n \sim b_n$ y $b_n \sim c_n \implies a_n \sim c_n$ (propiedad transitiva)
- $a_n \ll b_n \implies a_n \not\sim b_n$

Propiedades de la relación “ser del mismo orden”

Propiedades

(o1) Si $a_n \neq 0$ entonces $a_n \sim |a_n| \sim \alpha a_n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0.$

(o2) Si $a_n \sim a'_n$ y $b_n \sim b'_n$ entonces: $a_n b_n \sim a'_n b'_n$ y $\dfrac{a_n}{b_n} \sim \dfrac{a'_n}{b'_n}$.

(o3) Si $a_n \ll b_n$ entonces $a_n + b_n \sim b_n$.

(o4) Si $a_n \sim a'_n$ y $b_n \sim b'_n$ entonces:

$$a_n \ll b_n \iff a'_n \ll b'_n$$

Ejemplos

1. $2 \log n \sim \log n$
2. $(n+1)(2^n+1) \sim n2^n$
3. $n + \log n \sim n$
4. $n + \log n \ll n^2 + 1$

Contenidos del tema

1. Método de inducción.
2. Introducción a las sucesiones.
3. Límites.
4. Sucesiones divergentes. Indeterminaciones.
5. Órdenes de magnitud.
6. **Resolución numérica de ecuaciones.**

Ciertas ecuaciones no se pueden resolver de forma exacta:

$$\boxed{x^6 + 100x^5 - 2x^4 + 341x^3 + 6x^2 - 1 = 0}$$

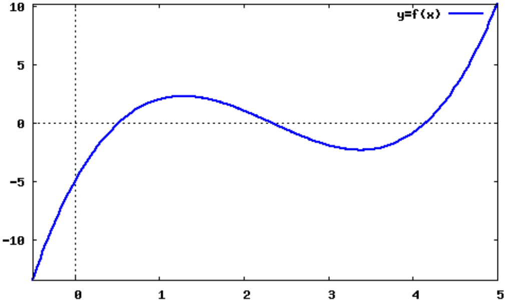
$$\boxed{\operatorname{sen}(x) = x}$$

$$\boxed{e^x = 1/x}$$

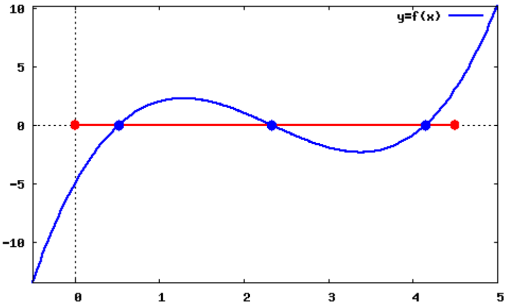
etc.

¿Podemos resolverlas de forma **aproximada**?

Etapas de la resolución numérica de ecuaciones



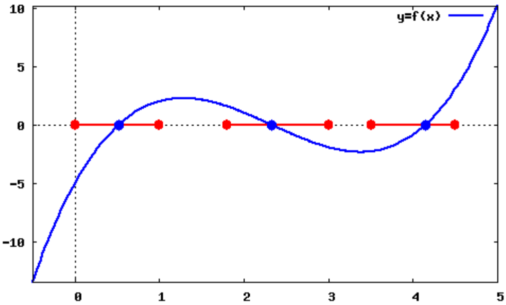
1. **Preparación de la ecuación.**
   Se reescribe como $\boxed{f(x) = 0}$ siendo f una función adecuada.



1. **Preparación de la ecuación.**
2. **Localización de las raíces.**

   Se encuentra un intervalo que contiene las raíces de la ecuación.

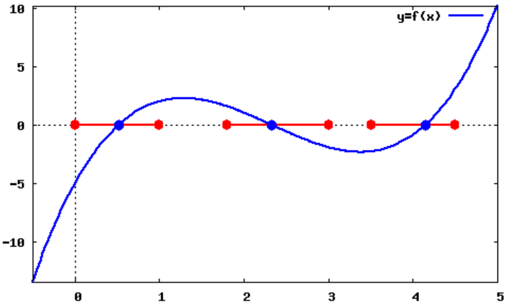
Etapas de la resolución numérica de ecuaciones



1. **Preparación de la ecuación.**
2. **Localización de las raíces.**
3. **Separación de las raíces.**

   Se encuentran intervalos que contienen una sola raíz de la ecuación.

Etapas de la resolución numérica de ecuaciones



1. **Preparación de la ecuación.**
2. **Localización de las raíces.**
3. **Separación de las raíces.**
4. **Aproximación de las raíces.**

   Se hallan valores cada vez más próximos al valor exacto de la raíz, mediante un algoritmo de aproximación, dando una cota del error.

   ▶▶ Para esto, nosotros usaremos los métodos de **bisección** y **Newton**.

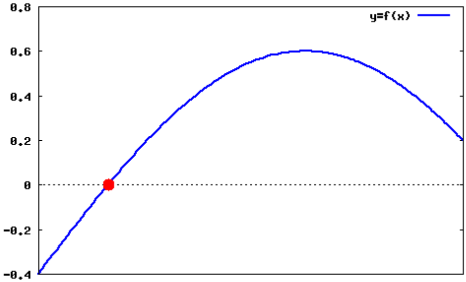
Localización y separación de raíces (I)

Teorema de Bolzano

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple $\boxed{f(a)f(b) < 0}$.

Entonces:

existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

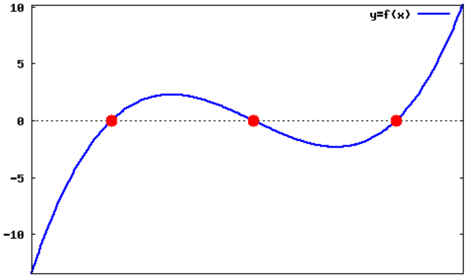


Localización y separación de raíces (I)

Teorema de Bolzano

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple $\boxed{f(a)f(b) < 0}$.

Entonces:
existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

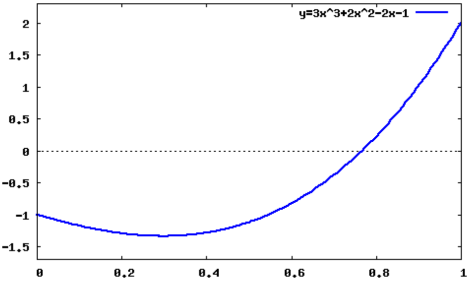


Localización y separación de raíces (I)

Teorema de Bolzano

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple $\boxed{f(a)f(b) < 0}$.

Entonces:
existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



Ejemplo: la ecuación $3x^3 + 2x^2 - 2x = 1$.

- Es equivalente a $\boxed{f(x) = 0}$ donde $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 1$.
- $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 2 > 0$.
- Por tanto, la ecuación tiene al menos una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

Teorema (unicidad de raíces)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple $\boxed{f(a)f(b) < 0}$.

Si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

entonces existe un único $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Localización y separación de raíces (II)

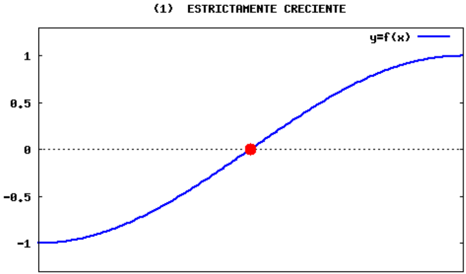
Teorema (unicidad de raíces)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple $\boxed{f(a)f(b) < 0}$.

Si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$

entonces existe un único $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



Localización y separación de raíces (II)

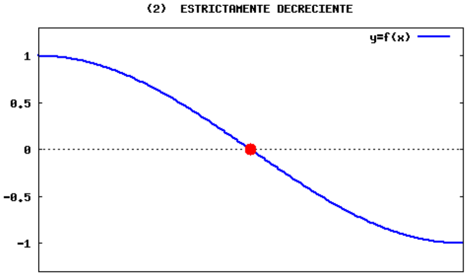
Teorema (unicidad de raíces)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple $\boxed{f(a)f(b) < 0}$.

Si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$
2. $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$

entonces existe un único $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



Localización y separación de raíces (II)

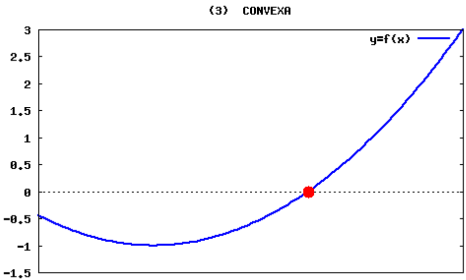
Teorema (unicidad de raíces)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple $\boxed{f(a)f(b) < 0}$.

Si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$
2. $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$
3. $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

entonces existe un único $c \in (a,b)$ **tal que** $f(c) = 0$.



Localización y separación de raíces (II)

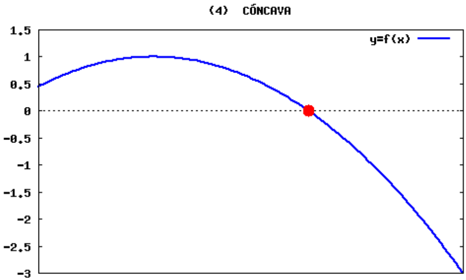
Teorema (unicidad de raíces)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple $\boxed{f(a)f(b) < 0}$.

Si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$
2. $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$
3. $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
4. $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

entonces existe un único $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



Localización y separación de raíces (II)

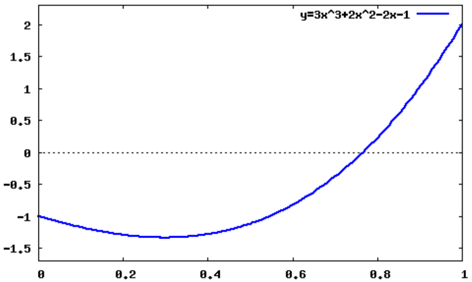
Teorema (unicidad de raíces)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple $\boxed{f(a)f(b) < 0}$.

Si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$
2. $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$
3. $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
4. $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

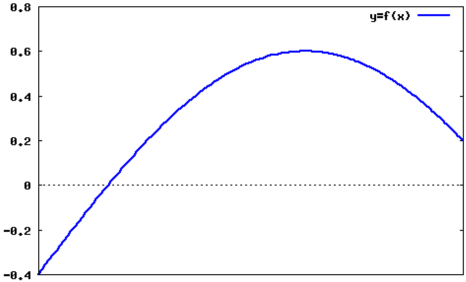
entonces existe un único $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



Ejemplo: la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 1$.

- $f''(x) = 18x + 4 > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$.
- Por tanto, la ecuación tiene una **única** raíz en el intervalo $(0, 1)$.

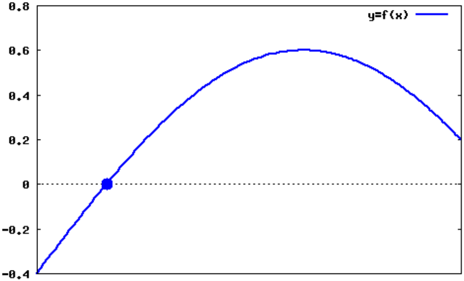
Método de BISECCIÓN



Consideramos una ecuación $\boxed{f(x) = 0}$ tal que:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua que cumple $f(a)f(b) < 0$,
- la ecuación tiene una única raíz $c \in (a, b)$.

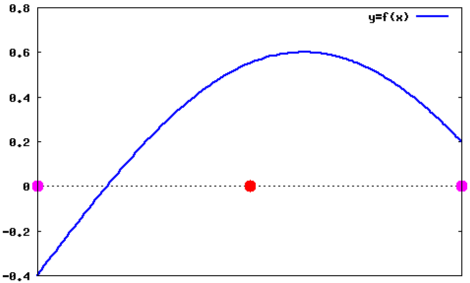
Método de BISECCIÓN



Consideramos una ecuación $\boxed{f(x) = 0}$ tal que:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua que cumple $f(a)f(b) < 0$,
- la ecuación tiene una única raíz $c \in (a, b)$.

Método de BISECCIÓN



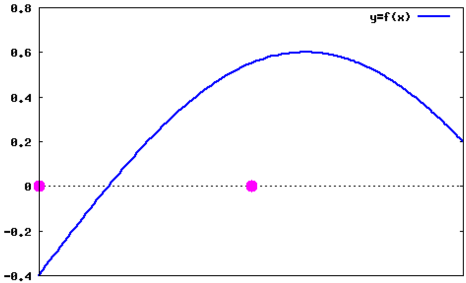
PASO 0. ▶▶▶ Definimos $a_0 = a$ y $b_0 = b$.

Definimos $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ (el punto medio del intervalo $[a_0, b_0]$).

Se pueden dar 3 casos:

- Si $f(c_0) = 0$ entonces $c_0 = c$ es la raíz de la ecuación. ¡PARAMOS!
- Si $f(c_0)f(a_0) < 0$ entonces definimos $a_1 = a_0$ y $b_1 = c_0$ y vamos al **PASO 1**.
- Si $f(c_0)f(b_0) < 0$ entonces definimos $a_1 = c_0$ y $b_1 = b_0$ y vamos al **PASO 1**.

Método de BISECCIÓN



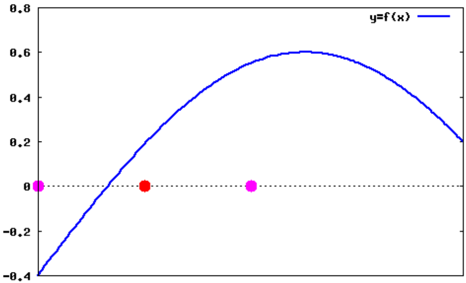
PASO 0. ▶▶▶ Definimos $a_0 = a$ y $b_0 = b$.

Definimos $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ (el punto medio del intervalo $[a_0, b_0]$).

Se pueden dar 3 casos:

- Si $f(c_0) = 0$ entonces $c_0 = c$ es la raíz de la ecuación. ¡PARAMOS!
- Si $f(c_0)f(a_0) < 0$ entonces definimos $a_1 = a_0$ y $b_1 = c_0$ y vamos al **PASO 1**.
- Si $f(c_0)f(b_0) < 0$ entonces definimos $a_1 = c_0$ y $b_1 = b_0$ y vamos al **PASO 1**.

Método de BISECCIÓN

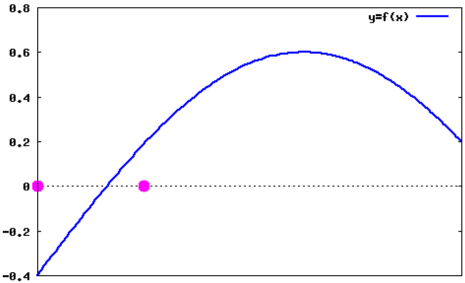


PASO 1. Definimos $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ (el punto medio del intervalo $[a_1, b_1]$).

Se pueden dar 3 casos:

- Si $f(c_1) = 0$ entonces $c_1 = c$ es la raíz de la ecuación. ¡PARAMOS!
- Si $f(c_1)f(a_1) < 0$ entonces definimos $a_2 = a_1$ y $b_2 = c_1$ y vamos al **PASO 2**.
- Si $f(c_1)f(b_1) < 0$ entonces definimos $a_2 = c_1$ y $b_2 = b_1$ y vamos al **PASO 2**.

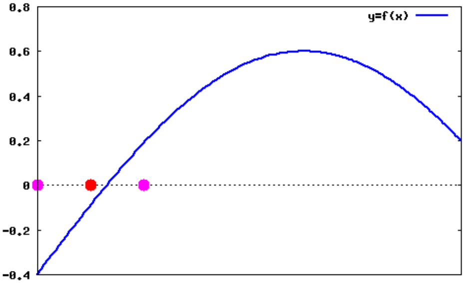
Método de BISECCIÓN



PASO 1. Definimos $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ (el punto medio del intervalo $[a_1, b_1]$).
Se pueden dar 3 casos:

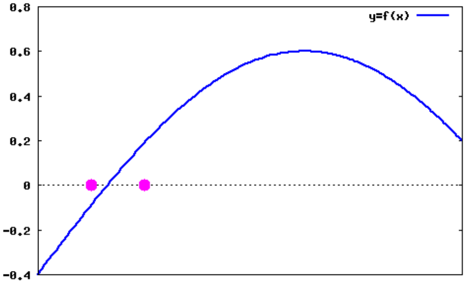
- Si $f(c_1) = 0$ entonces $c_1 = c$ es la raíz de la ecuación. ¡PARAMOS!
- Si $f(c_1)f(a_1) < 0$ entonces definimos $a_2 = a_1$ y $b_2 = c_1$
  y vamos al **PASO 2**.
- Si $f(c_1)f(b_1) < 0$ entonces definimos $a_2 = c_1$ y $b_2 = b_1$
  y vamos al **PASO 2**.

Método de BISECCIÓN



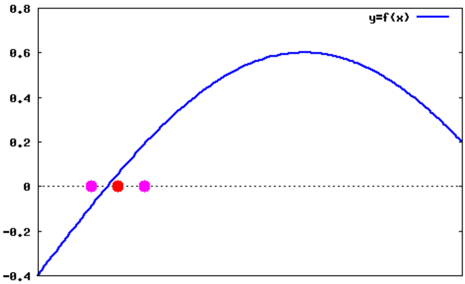
SE REPITE EL PROCESO...

Método de BISECCIÓN



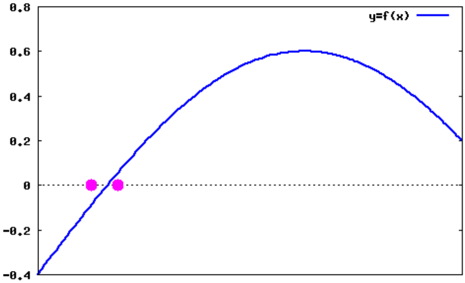
SE REPITE EL PROCESO...

Método de BISECCIÓN



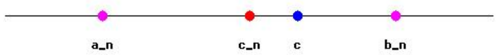
SE REPITE EL PROCESO...

Método de BISECCIÓN



SE REPITE EL PROCESO...

Acotación del ERROR en el método de bisección



1. Las sucesiones a_n, b_n y c_n convergen a c.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\boxed{|c - c_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}}$$

3. Para cada $\varepsilon > 0$ se cumple:

$$n > \frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log(2)} - 1 \implies \boxed{|c - c_n| < \varepsilon}$$

Ejercicio

Localiza y separa las soluciones de la ecuación

$$e^x = \frac{1}{x}.$$

Calcula aproximadamente las soluciones mediante el **método de bisección**, con error menor que 10^{-5}.

- Tiene una única solución, que está en el intervalo $[0, 1]$.
- Podemos aproximarla aplicando el método de bisección a la función $f(x) = xe^x - 1$ en el intervalo $[0, 1]$.
- Son necesarios $n = 16$ pasos para conseguir una aproximación con error menor que 10^{-5}.
- La solución aproximada es $c_{16} = 0.567146301269531$.

Método de NEWTON

Es un método iterativo que se aplica a ecuaciones de la forma $\boxed{f(x) = 0}$ donde f es una función derivable que cumple ciertas condiciones.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Método de NEWTON

Es un método iterativo que se aplica a ecuaciones de la forma $\boxed{f(x) = 0}$ donde f es una función derivable que cumple ciertas condiciones.

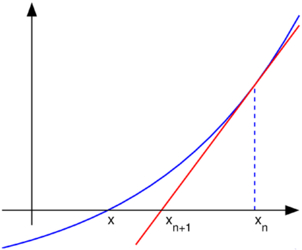
DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

PASO 0. Elegimos un punto inicial x_0 (una primera "aproximación" a la raíz).

PASO 1. Calculamos $x_1 =$ intersección del eje OX y la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

PASO 2. Calculamos $x_2 =$ intersección del eje OX y la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$.

Y en los siguientes pasos vamos repitiendo el proceso...



ALGORITMO DEL MÉTODO DE NEWTON

Se genera una sucesión recurrente x_n de aproximaciones de la raíz mediante

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

donde x_0 es una aproximación inicial.

Teorema de CONVERGENCIA GLOBAL del método de Newton

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ cumpliendo las condiciones:

1. $f(a)f(b) < 0$,
2. $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$,
3. $f''(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$,
4. $\max\left\{\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\} \leq b - a$.

Entonces, **para cualquier** $x_0 \in [a, b]$, el método de Newton genera una sucesión que **converge** a la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$.