FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA INFORMÁTICA

Quinta sesión de prácticas

PRIMER CURSO DEL GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

PRIMER CUATRIMESTRE

2020-21

Índice del documento

Las Técnicas SAT (I)

- **Las Técnicas SAT son Métodos Semánticos**:
  - Las técnicas SAT que hemos estudiado se engloban en lo que llamamos MÉTODOS SEMÁNTICOS. Lo son, pues se establecen a partir de la aplicación de las dos relaciones semánticas entre oraciones: la relación de EQUIVALENCIA LÓGICA y la relación de CONSECUENCIA LÓGICA.
  - En la base de estos métodos están los dos principios epistemológicos de la Lógica Proposicional y de la Lógica de Predicados: EL PRINCIPIO DEL TERCIO EXCLUIDO Y EL PRINCIPIO DE NO CONTRADICCIÓN.
  - Asimismo, manejamos los conceptos de INTERPRETACIÓN Y DE EVALUACIÓN de oraciones lógicas.
- Las Técnicas SAT se clasifican en función del tipo de oración de partida al aplicarla. Básicamente, tenemos dos tipos de técnicas: el primero, aquellas que parten de oraciones expresadas en su FORMA CLAUSAL (previa transformación en FNC); y el segundo, aquellas que parten de la fórmula original sin necesidad de transformar en FNC.
  - Las Técnicas SAT aplicables a partir de FORMAS CLAUSALES:
    - Algoritmo DPLL
    - Algoritmo de Resolución
  - Las Técnicas SAT aplicables a fórmulas cualesquiera:
    - Tablas de Verdad
    - Árboles Semánticos
    - Tableaux Semánticos

Las Técnicas SAT (II)

- Las dos técnicas SAT con formas clausales, son: **el algoritmo DPLL y el método de Resolución**
- El **algoritmo DPLL está basado en el método de propagación de literales**. Se aplica tratando de simplificar la forma clausal, o conjunto de cláusulas, hasta llegar, o bien al conjunto vacío de cláusulas, o bien, a la cláusula vacía.
- Encontrar **el conjunto vacío de cláusulas** es llegar a un punto de satisfacibilidad, y de parada del algoritmo, que indica que el conjunto de cláusulas (y la expresión de partida) es **SATISFACIBLE**. Además, los valores asignados a los literales propagados para encontrar dicho conjunto vacío de cláusulas constituyen la interpretación modelo de dicho conjunto de cláusulas.
- Encontrar **en DPLL la cláusula vacía significa haber llegado a un punto de FALSEABILIDAD**. Lo que quiere decir que los valores asignados a los literales propagados para encontrar la cláusula vacía constituyen la interpretación que hace FALSO la evaluación de la expresión de partida.
- Pero encontrar la cláusula vacía no significa que el conjunto de cláusulas (y la expresión de partida) sea INSATISFACIBLE. Para ello, deberemos comprobar que todas las propagaciones conducen a la cláusula vacía. De esta forma, deberemos hacer backtraking (vuelta atrás) para recorrer todas las ramas de las propagaciones realizadas aplicando la regla de ramificación. **Tan sólo cuando en todas las propagaciones de las ramas se obtiene la cláusula vacía, se puede decir que el conjunto de cláusulas (y la expresión de partida) es INSATISFACIBLE.**
- Aplicando el algoritmo DPLL podemos responder a si una expresión es de un tipo de oración cualquiera. Encontramos las interpretaciones que lo corroboran.

Las Técnicas SAT (III)

- Las dos técnicas SAT con formas clausales, son: **el algoritmo DPLL y el método de Resolución**
- El Método de Resolución está basado en la aplicación de una regla que proviene de instrumentalizar las consecuencias lógicas, o bien del dilema constructivo, o bien del silogismo disyuntivo. Con la aplicación de dicha regla se pretenden ir obteniendo cláusulas resolventes de dos cláusulas que contengan literales opuestos, uno en cada una de las cláusulas.
- Si aplicando el método de Resolución, **se obtiene la cláusula vacía** como resolvente de dos cláusulas unitarias de literales opuestos, se dirá que el conjunto clausulado de origen (y la expresión de partida) es INSATISFACIBLE.
- Si tras aplicar la regla de forma reiterada no encontramos la cláusula vacía, entonces podremos decir que el conjunto clausulado de origen es SATISFACIBLE.
- Si un conjunto de más de dos cláusulas de origen es SATISFACIBLE, no se podrá obtener por Resolución la cláusula vacía, es decir, no tendremos el grafo de Refutación.
- Si un conjunto de cláusulas de origen es INSATISFACIBLE, en alguna de las resoluciones se encontrará el grafo de Refutación y, por tanto, la cláusula vacía como resolvente. Pero ello, no significa que no podamos obtener resolventes de parejas de cláusulas satisfacibles que sean, asimismo, satisfacibles.

Las Técnicas SAT (IV)

- Las tres técnicas SAT con expresiones no clausales, son: **Tablas de Verdad, Árboles Semánticos y Tableaux Semánticos**.
- Las **Tablas de verdad** ya las hemos visto con suficiente extensión y ejemplos al tratar de la evaluación de oraciones y de conjuntos de oraciones.
- En cuanto a los **Árboles Semánticos y los Tableaux Semánticos**, a modo de resumen, es conveniente resaltar algunas cuestiones relevantes de dichas técnicas:
  - Con los Tableaux Semánticos podemos encontrar si una oración es **CONTRADICCIÓN**, si una vez completado el mismo **todos los nodos hoja quedan cerrados**, es decir, encierran una contradicción.
  - Si en un Tableaux Semántico Completado **un nodo hoja queda abierto**, diremos que la oración evaluada es **SATISFACIBLE**. Las proposiciones atómicas o las negadas que compongan dicho nodo hoja representan la interpretación que hace a la oración SATISFACIBLE.
  - Con la técnica de los Tableaux Semánticos no podemos saber directamente si una oración es una TAUTOLOGÍA. Para comprobarlo, debemos negar la oración y comprobar que dicha oración negada es una CONTRADICCIÓN, mediante lo dicho anteriormente.

Las Técnicas SAT (V)

- Los Tableaux Semánticos NO determinan todas las posibles interpretaciones de una oración dada. Los Árboles Semánticos SI determinan todas las posibles interpretaciones de la misma.
- Con los Árboles Semánticos podemos encontrar si una oración es una TAUTOLOGÍA, si todos los nodos hoja son ÉXITO. Si una oración es CONTRADICCIÓN, si todos los nodos hoja son FALLO. Y podemos saber todas las interpretaciones que hacen SATISFACIBLE a una oración, y todas las interpretaciones que hacen FALSEABLE a una oración dada.
- Si en un Tableaux Semántico completado todos sus nodos hoja quedan abiertos, no podemos decir por ello que la oración evaluada sea una TAUTOLOGÍA.
- Tenemos un nodo hoja en un Árbol Semántico cuando la expresión del nodo es equivalente a la constante VERDAD o a la constante FALSO.
- En L0, para los Tableaux Semánticos, los nodos hoja son los formados únicamente por literales. No pueden existir en un nodo hoja **α-fórmulas** ni **β-fórmulas**.
- **La toma de decisión de la Satisfacibilidad, tanto en Árboles Semánticos, como en Tableaux Semánticos, se toma al nivel de los nodos hoja**.

Las Técnicas SAT (y VI)

- Hemos visto que las Técnicas SAT mantienen la SATISFACIBILIDAD o la INSATISFACIBILIDAD.
- **L0 como Lógica Formal es totalmente DECIDIBLE**, es decir, siempre disponemos de una técnica o método para demostrar tanto la Satisfacibilidad como, en su caso, la Insatisfacibilidad de una determinada oración, si bien las Técnicas SAT estudiadas no son todas ellas COMPLETAS. Es decir, aún sabiendo que una oración es Satisfacible con algunas técnicas no estamos seguros de poderlo demostrar: es el caso de algunas de las estrategias del Algoritmo de Resolución. Y hemos visto que en el caso de las Tautologías no lo son directamente la técnica del Algoritmo de Resolución, ni la de Tableaux Semánticos.
- Por último, **si queremos saber si un CONJUNTO DE ORACIONES (como puede ser el conjunto de premisas de un razonamiento) es SATISFACIBLE o INSATISFACIBLE**:
    - Construimos la oración formada por la Conjunción de todas las oraciones del conjunto, y sobre esta oración nos preguntamos si es Satisfacible o Insatisfacible.
    - Con DPLL o Resolución basta con transformar todas las oraciones a su Forma Clausal, generar el conjunto de cláusulas formado por todas ellas, y aplicar la técnica como sabemos. En general, será aconsejable utilizar DPLL si queremos comprobar que el conjunto es Satisfacible; en cambio, será aconsejable Resolución para el caso de Insatisfacible.
    - Con Tablas de Verdad, Árboles Semánticos o Tableaux Semánticos, se aplica la técnica seleccionada a la oración conjunción de todas las oraciones y se resuelve como hemos visto.

Validez de los Razonamientos (I)

Validez de los Razonamientos con Técnicas SAT:

- Cuando nos planteamos demostrar si un Razonamiento Lógico es VÁLIDO, lo hacemos a través del concepto de CONSECUENCIA LÓGICA, teniendo en cuenta dos planteamiento: **el Directo y el de Refutación**. Vamos a resumir los aspectos claves y las Técnicas SAT óptimas para resolver cada uno de estos planteamientos.

- Si queremos comprobar si la oración β es conclusión del conjunto de premisas **$\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\}$**, es decir, si se establece entre ellas un Razonamiento Válido, lo hacemos demostrando la siguiente Consecuencia Lógica **$\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\} \vDash \beta$.**

  - Y para hacerlo, por **el planteamiento directo**, hemos de demostrar que la oración: **$(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \wedge \alpha 3 \wedge \ldots. \wedge \alpha n \rightarrow \beta)$** es una **TAUTOLOGÍA**.

  - Por otro lado, mediante **el planteamiento por Refutación**, demostraremos si la oración: **$(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \wedge \alpha 3 \wedge \ldots. \wedge \alpha n \wedge \neg \beta)$** es una **CONTRADICCIÓN**.

Validez de los Razonamientos (II)

- En el planteamiento directo, $\boldsymbol{(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \wedge \alpha 3 \wedge .... \wedge \alpha n \rightarrow \beta)}$ será una Tautología, si aplicando:
  - El algoritmo DPLL, una vez transformada la oración citada a su FNC (o su Forma Clausal) aplicando SÓLO la regla de la Tautología, con todas las cláusulas triviales, nos queda el CONJUNTO VACÍO DE CLÁUSULAS.
  - Tablas de Verdad, se obtiene que la evaluación de la oración para todas sus Interpretaciones es VERDADERO.
  - El Árbol Semántico a la oración, se obtienen todos sus nodos hoja como nodos ÉXITO, es decir, equivalentes a la constante VERDAD.
  - NO son aplicables directamente la técnica del Algoritmo de Resolución, ni la técnica de los Tableaux Semánticos, dado que con ellas no podemos determinar directamente si una oración es una TAUTOLOGÍA.

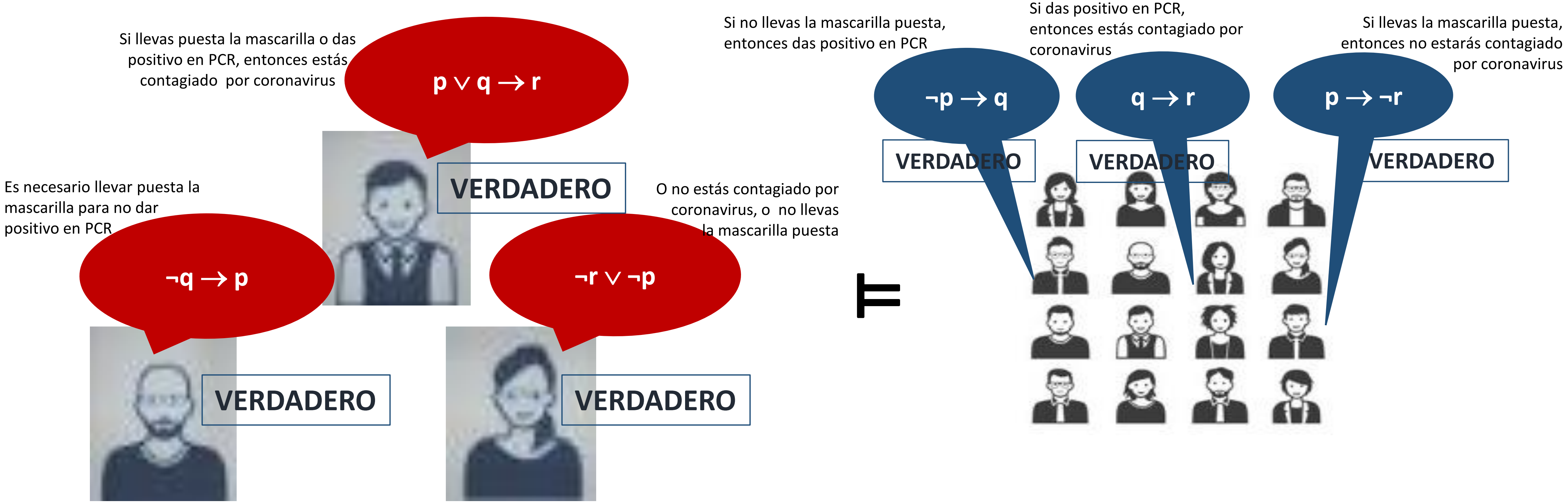
Validez de los Razonamientos (III)

- En el planteamiento por Refutación, **($\alpha 1 \wedge \alpha 2 \wedge \alpha 3 \wedge .... \wedge \alpha n \wedge \neg \beta$)** será una CONTRADICCIÓN, si aplicando:

  - El algoritmo DPLL, una vez transformada la oración citada a su FNC (o su Forma Clausal) aplicando las Reglas de Propagación, se obtienen en todas las propagaciones la CLÁUSULA VACÍA. Recordemos que al aplicar la Regla de Ramificación debemos comprobar si se requiere hacer Backtraking o vuelta atrás.
  - El Algoritmo de Resolución , una vez transformada la oración en su Forma Clausal, el Grafo de Resolución Completo contiene un Grafo de Refutación, es decir, obtenemos como resolvente la CLÁUSULA VACÍA.
  - Tablas de Verdad, se obtiene que la evaluación de la oración para todas sus Interpretaciones es FALSO.
  - El Árbol Semántico a la oración, se obtienen todos sus nodos hoja como nodos FALLO, es decir, equivalentes a la constante FALSO.
  - Tableaux Semántico, se obtiene el Tableaux Semántico Completado y Cerrado con todos sus nodos hoja CERRADOS, es decir, con literales opuestos o contradictorios.

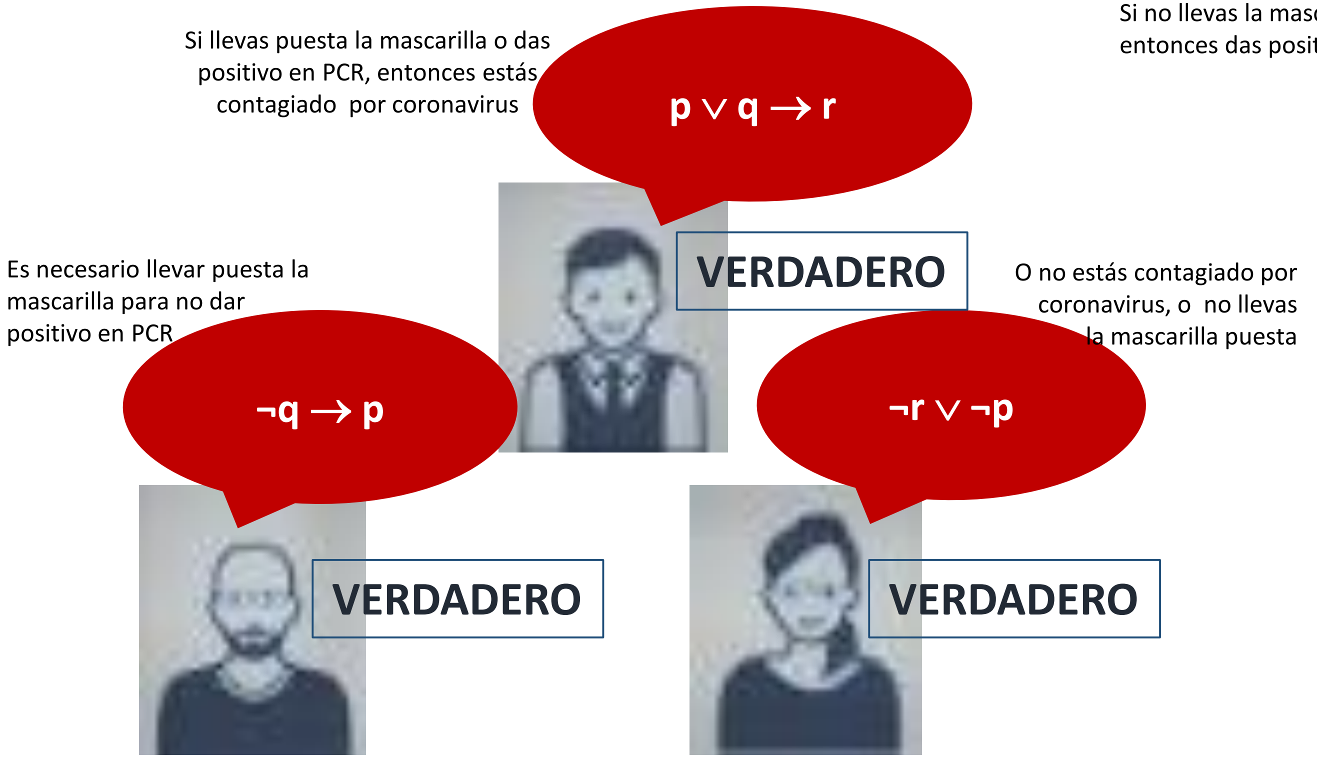
Validez de los Razonamientos (IV)

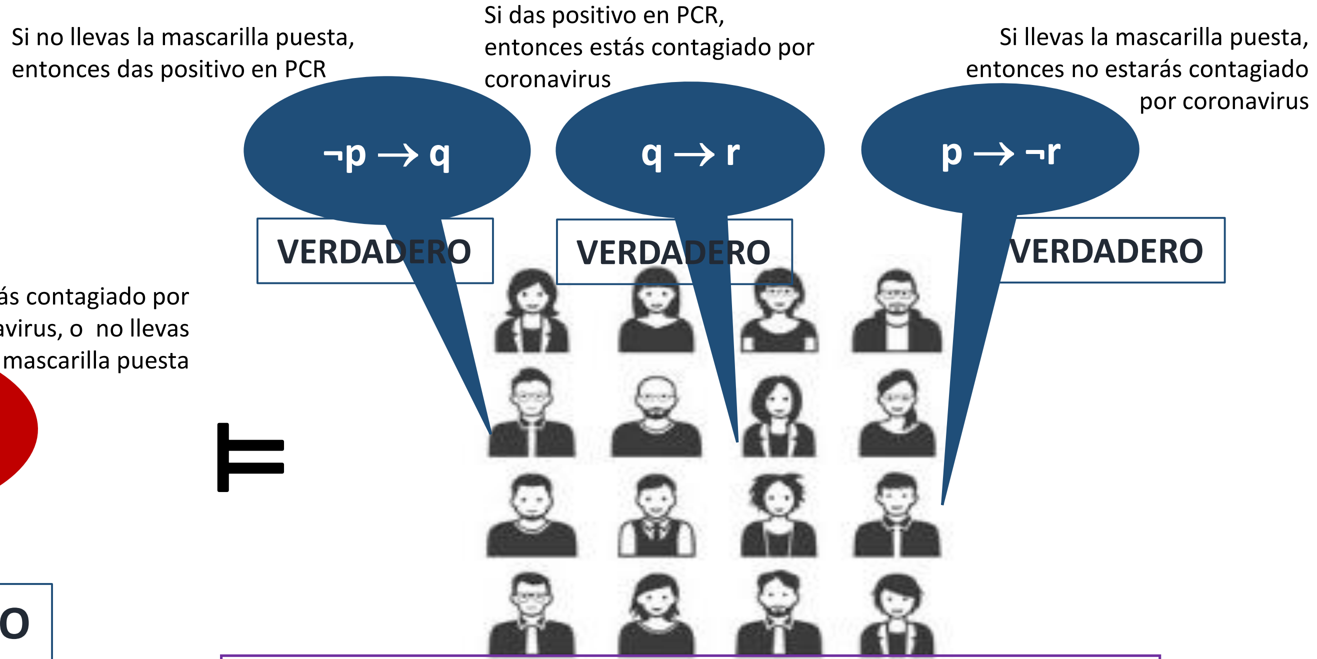
- ¿Qué conclusiones podemos extraer de un conjunto de premisas?
  - Para empezar un conjunto de premisas es un conjunto de oraciones lógicas.
  - Dicho conjunto puede ser satisfacible, como es el conjunto de tres oraciones de este ejemplo.
  - Diremos que de la VERDAD de las tres premisas, se puede obtener la VERDAD de la conclusión, si el Razonamiento es VÁLIDO.



Validez de los Razonamientos (V)

- ¿Qué conclusiones podemos extraer de un conjunto de premisas?
  - Cómo sabemos, y cómo formalizamos, si el Razonamiento es VÁLIDO.
  - Podemos formalizarlo como aparece en la representación de la figura





$\{(p \vee q \rightarrow r); (\neg q \rightarrow p); (\neg r \vee \neg p)\} \vDash (\neg p \rightarrow q)$

$\{(p \vee q \rightarrow r); (\neg q \rightarrow p); (\neg r \vee \neg p)\} \vDash (q \rightarrow r)$

$\{(p \vee q \rightarrow r); (\neg q \rightarrow p); (\neg r \vee \neg p)\} \vDash (p \rightarrow \neg r)$

Validez de los Razonamientos (VI)

- ¿Qué conclusiones podemos extraer de un conjunto de premisas?
  - Para empezar el conjunto de premisas es un conjunto satisfacible de oraciones lógicas, según la Tabla de Verdad.
  - Lo comprobamos con el razonamiento: $\mathbf{\{(p \lor q \to r); (\neg q \to p); (\neg r \lor \neg p)\} \vDash (\neg p \to q)}$
  - Si el Razonamiento es VÁLIDO, **el método directo** nos dice que la oración formada por: $\boldsymbol{\phi = (p \lor q \to r) \land (\neg q \to p) \land (\neg r \lor \neg p) \to (\neg p \to q)}$ debe ser una **TAUTOLOGÍA. Y LO ES!!!!!**

Validez de los Razonamientos (VII)

- ¿Qué conclusiones podemos extraer de un conjunto de premisas?
  - Para empezar el conjunto de premisas es un conjunto satisfacible de oraciones lógicas, según la Tabla de Verdad.
  - Lo comprobamos con el razonamiento: $\{(p \vee q \rightarrow r); (\neg q \rightarrow p); (\neg r \vee \neg p)\} \vDash (\neg p \rightarrow q)$
  - Si el Razonamiento es VÁLIDO, **el método directo** nos dice que la oración formada por: $\phi = (p \vee q \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge (\neg r \vee \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ debe ser una **TAUTOLOGÍA. Y LO ES!!!!!**

INTERPRETACIONES			EVALUACIÓN DE $\phi = (p \vee q \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge (\neg r \vee \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$									
p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow r$	$\neg q \rightarrow p$	$\neg r \vee \neg p$	(A)	$\neg p \rightarrow q$	ϕ
V	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V	F	V	F	F	V

Validez de los Razonamientos (VIII)

- ¿Qué conclusiones podemos extraer de un conjunto de premisas?
  - Para empezar el conjunto de premisas es un conjunto satisfacible de oraciones lógicas, según la Tabla de Verdad.
  - Lo comprobamos con el razonamiento: $\mathbf{\{(p \lor q \to r); (\neg q \to p); (\neg r \lor \neg p)\} \vDash (\neg p \to q)}$
  - Si el Razonamiento es VÁLIDO, **el método de Refutación** nos dice que la oración formada por: $\boldsymbol{\psi = (p \lor q \to r) \land (\neg q \to p) \land (\neg r \lor \neg p) \land \neg(\neg p \to q)}$ debe ser una **CONTRADICCIÓN. Y LO ES!!!!!**

Validez de los Razonamientos (IX)

- ¿Qué conclusiones podemos extraer de un conjunto de premisas?
  - Para empezar el conjunto de premisas es un conjunto satisfacible de oraciones lógicas, según la Tabla de Verdad.
  - Lo comprobamos con el razonamiento: $\{(p \lor q \to r); (\neg q \to p); (\neg r \lor \neg p)\} \vDash (\neg p \to q)$
  - Si el Razonamiento es VÁLIDO, **el método de Refutación** nos dice que la oración formada por: $\psi = (p \lor q \to r) \land (\neg q \to p) \land (\neg r \lor \neg p) \land \neg(\neg p \to q)$ debe ser una **CONTRADICCIÓN. Y LO ES!!!!!**

INTERPRETACIONES			EVALUACIÓN DE $\psi = (p \lor q \to r) \land (\neg q \to p) \land (\neg r \lor \neg p) \land \neg(\neg p \to q)$										
p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \lor q$	$p \lor q \to r$	$\neg q \to p$	$\neg r \lor \neg p$	(A)	$\neg p \to q$	$\neg(\neg p \to q)$	ψ
V	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V	F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F	V	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F	V	F	V	F	F	V	F

Validez de los Razonamientos (X)

- Veamos el ejemplo, pero ahora apliquemos la Técnica del Algoritmo DPLL a la comprobación de la **validez del razonamiento por el método directo**. Según esto debemos comprobar que la Forma Normal Conjuntiva de la expresión: $\phi = (p \lor q \to r) \land (\neg q \to p) \land (\neg r \lor \neg p) \to (\neg p \to q)$ sea el CONJUNTO VACÍO DE CLÁUSULAS, con lo que el razonamiento $\{(p \lor q \to r); (\neg q \to p); (\neg r \lor \neg p)\} \vDash (\neg p \to q)$ será **VÁLIDO**

Vamos a convertir la expresión $\phi = (p \lor q \to r) \land (\neg q \to p) \land (\neg r \lor \neg p) \to (\neg p \to q)$ en su FNC

- Aplicamos la equivalencia de la interdefinición de la implicación:

  $\neg((p \lor q \to r) \land (\neg q \to p) \land (\neg r \lor \neg p)) \lor (\neg p \to q)$

- Aplicamos la equivalencia de D'Morgan de la negación de la conjunción:

  $(\neg(p \lor q \to r) \lor \neg(\neg q \to p) \lor \neg(\neg r \lor \neg p)) \lor (\neg p \to q)$

- Aplicamos la equivalencia de la negación de la implicación:

  $(((p \lor q) \land \neg r)) \lor (\neg q \land \neg p) \lor \neg(\neg r \lor \neg p)) \lor (\neg p \to q)$

- Aplicamos la equivalencia de D'Morgan de la negación de la disyunción:

  $(((p \lor q) \land \neg r)) \lor (\neg q \land \neg p) \lor (r \land p)) \lor (\neg p \to q)$

- Aplicamos la equivalencia de la interdefinición de la implicación:

  $(((p \lor q) \land \neg r)) \lor (\neg q \land \neg p) \lor (r \land p)) \lor (p \lor q)$

- Aplicamos la equivalencia de la asociatividad de la disyunción:

  $(((p \lor q) \land \neg r)) \lor (\neg q \land \neg p)) \lor ((r \land p) \lor (p \lor q))$

Validez de los Razonamientos (XI)

- Veamos el ejemplo, pero ahora apliquemos la Técnica del Algoritmo DPLL a la comprobación de la **validez del razonamiento por el método directo**. Según esto debemos comprobar que la Forma Normal Conjuntiva de la expresión: $\phi = (p \vee q \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge (\neg r \vee \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ sea el CONJUNTO VACÍO DE CLÁUSULAS, con lo que el razonamiento $\{(p \vee q \rightarrow r); (\neg q \rightarrow p); (\neg r \vee \neg p)\} \vDash (\neg p \rightarrow q)$ será **VÁLIDO**

  - Aplicamos la distributiva de la disyunción respecto a la conjunción entre los dos primeros paréntesis:

    $((p \vee q \vee \neg q) \wedge (p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg p)) \vee ((r \wedge p) \vee (p \vee q))$

  - Aplicamos la distributiva de la disyunción con respecto a la conjunción entre los dos últimos:

    $((p \vee q \vee \neg q) \wedge (p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg p)) \vee ((r \vee p \vee q) \wedge (p \vee p \vee q))$

  - Aplicamos las equivalencias de $(\alpha \vee \neg\alpha = V)$, de $(\alpha \wedge V = \alpha)$ y de $(\alpha \vee \alpha = \alpha)$:

    $(V \wedge V \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg p)) \vee ((r \vee p \vee q) \wedge (p \vee p \vee q)) = ((\neg r \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg p)) \vee ((r \vee p \vee q) \wedge (p \vee q))$

  - Aplicamos la distributiva de la disyunción respecto a la conjunción:

    $((\neg r \vee \neg q \vee r \vee p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee r \vee p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee p \vee q))$

- $((\neg r \vee \neg q \vee r \vee p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee r \vee p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee p \vee q))$
- **Esta es la FNC de la expresión ϕ. Y como vemos, las cuatro cláusulas son triviales pues aparecen literales opuestos en todas ellas. Por tanto, tenemos una FNC que, al aplicar la regla de la tautología del algoritmo DPLL, nos quedará como el CONJUNTO VACÍO DE CLÁUSULAS. Así, la expresión es una TAUTOLOGÍA, y el razonamiento es VÁLIDO.**

Validez de los Razonamientos (XII)

- Veamos el ejemplo, pero ahora apliquemos la Técnica de los Tableaux Semánticos a la comprobación de la **validez del razonamiento por Refutación**. Según esto debemos comprobar que el Tableau Semántico de la expresión: $\boldsymbol{\psi = (p \lor q \to r) \land (\neg q \to p) \land (\neg r \lor \neg p) \land \neg(\neg p \to q)}$ resulta ser **CERRADO,** con lo que el razonamiento $\boldsymbol{\{(p \lor q \to r); (\neg q \to p); (\neg r \lor \neg p)\} \models (\neg p \to q)}$ será **VÁLIDO**

$\boldsymbol{(p \lor q \to r) \land (\neg q \to p) \land (\neg r \lor \neg p) \land \neg(\neg p \to q)}$

La expresión $\boldsymbol{\psi}$ conforma el nodo raíz del Tableau

Validez de los Razonamientos (XIII)

- Veamos el ejemplo, pero ahora apliquemos la Técnica de los Tableaux Semánticos a la comprobación de la **validez del razonamiento por Refutación**. Según esto debemos comprobar que el Tableau Semántico de la expresión: **$\psi = (p \vee q \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge (\neg r \vee \neg p) \wedge \neg(\neg p \rightarrow q)$** resulta ser **CERRADO,** con lo que el razonamiento **$\{(p \vee q \rightarrow r); (\neg q \rightarrow p); (\neg r \vee \neg p)\} \vDash (\neg p \rightarrow q)$** será **VÁLIDO**

La expresión ψ es una conjunción que constituye una **α-fórmula.** Se construye un nodo nuevo desdoblando en serie las cuatro partes conjuntadas

$(p \vee q \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge (\neg r \vee \neg p) \wedge \neg(\neg p \rightarrow q)$

$(p \vee q \rightarrow r)$
$(\neg q \rightarrow p)$
$(\neg r \vee \neg p)$
$\neg(\neg p \rightarrow q)$

La expresión ψ conforma el nodo raíz del Tableau

Validez de los Razonamientos (XIV)

- Veamos el ejemplo, pero ahora apliquemos la Técnica de los Tableaux Semánticos a la comprobación de la **validez del razonamiento por Refutación**. Según esto debemos comprobar que el Tableau Semántico de la expresión: **$\psi = (p \lor q \to r) \land (\neg q \to p) \land (\neg r \lor \neg p) \land \neg(\neg p \to q)$** resulta ser **CERRADO,** con lo que el razonamiento **$\{(p \lor q \to r); (\neg q \to p); (\neg r \lor \neg p)\} \vDash (\neg p \to q)$** será **VÁLIDO**

La expresión **ψ** es una conjunción que constituye una **α-fórmula.** Se construye un nodo nuevo desdoblando en serie las cuatro partes conjuntadas

La expresión **ψ** conforma el nodo raíz del Tableau

La expresión **$(p \lor q \to r)$** es una implicación que constituye una **β -fórmula** equivalente a **$(\neg(p \lor q) \lor r)$.** Se abren dos ramas con nuevos nodos, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas

$(p \lor q \to r) \land (\neg q \to p) \land (\neg r \lor \neg p) \land \neg(\neg p \to q)$

$(p \lor q \to r)$
$(\neg q \to p)$
$(\neg r \lor \neg p)$
$\neg(\neg p \to q)$

Rama izquierda:

$\neg(p \lor q)$
$(\neg q \to p)$
$(\neg r \lor \neg p)$
$\neg(\neg p \to q)$

Rama derecha:

r
$(\neg q \to p)$
$(\neg r \lor \neg p)$
$\neg(\neg p \to q)$

Validez de los Razonamientos (XV)

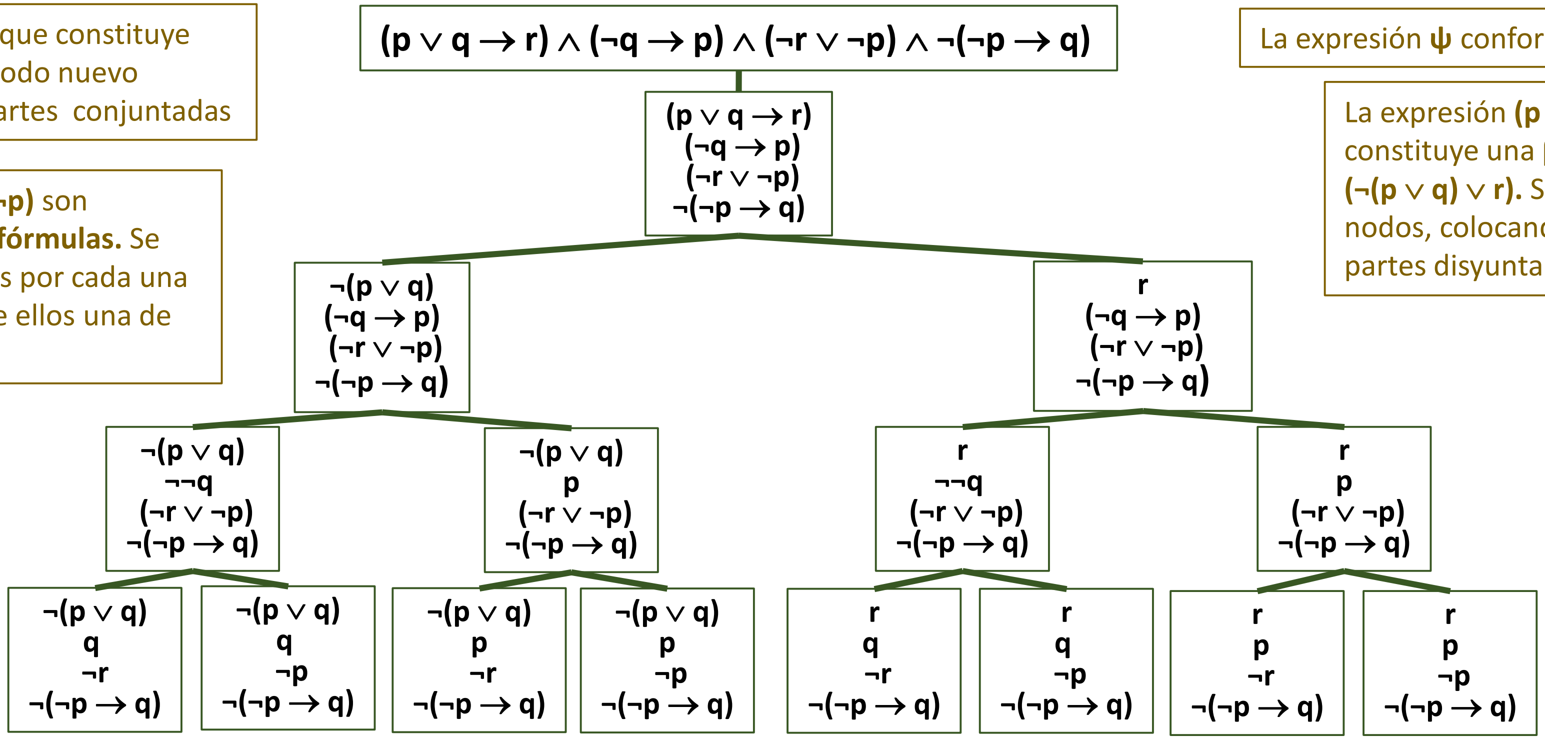
- Veamos el ejemplo, pero ahora apliquemos la Técnica de los Tableaux Semánticos a la comprobación de la **validez del razonamiento por Refutación**. Según esto debemos comprobar que el Tableau Semántico de la expresión: **$\psi = (p \vee q \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge (\neg r \vee \neg p) \wedge \neg(\neg p \rightarrow q)$** resulta ser **CERRADO,** con lo que el razonamiento **$\{(p \vee q \rightarrow r); (\neg q \rightarrow p); (\neg r \vee \neg p)\} \vDash (\neg p \rightarrow q)$** será **VÁLIDO**

La expresión **ψ** es una conjunción que constituye una **α-fórmula.** Se construye un nodo nuevo desdoblando en serie las cuatro partes conjuntadas

La expresión **ψ** conforma el nodo raíz del Tableau

Las expresiones **$(\neg q \rightarrow p)$ y $(\neg r \vee \neg p)$** son implicaciones que constituyen **β -fórmulas.** Se abren dos ramas con nuevos nodos por cada una de ellas, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas

La expresión **$(p \vee q \rightarrow r)$** es una implicación que constituye una **β -fórmula** equivalente a **$(\neg(p \vee q) \vee r)$.** Se abren dos ramas con nuevos nodos, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas



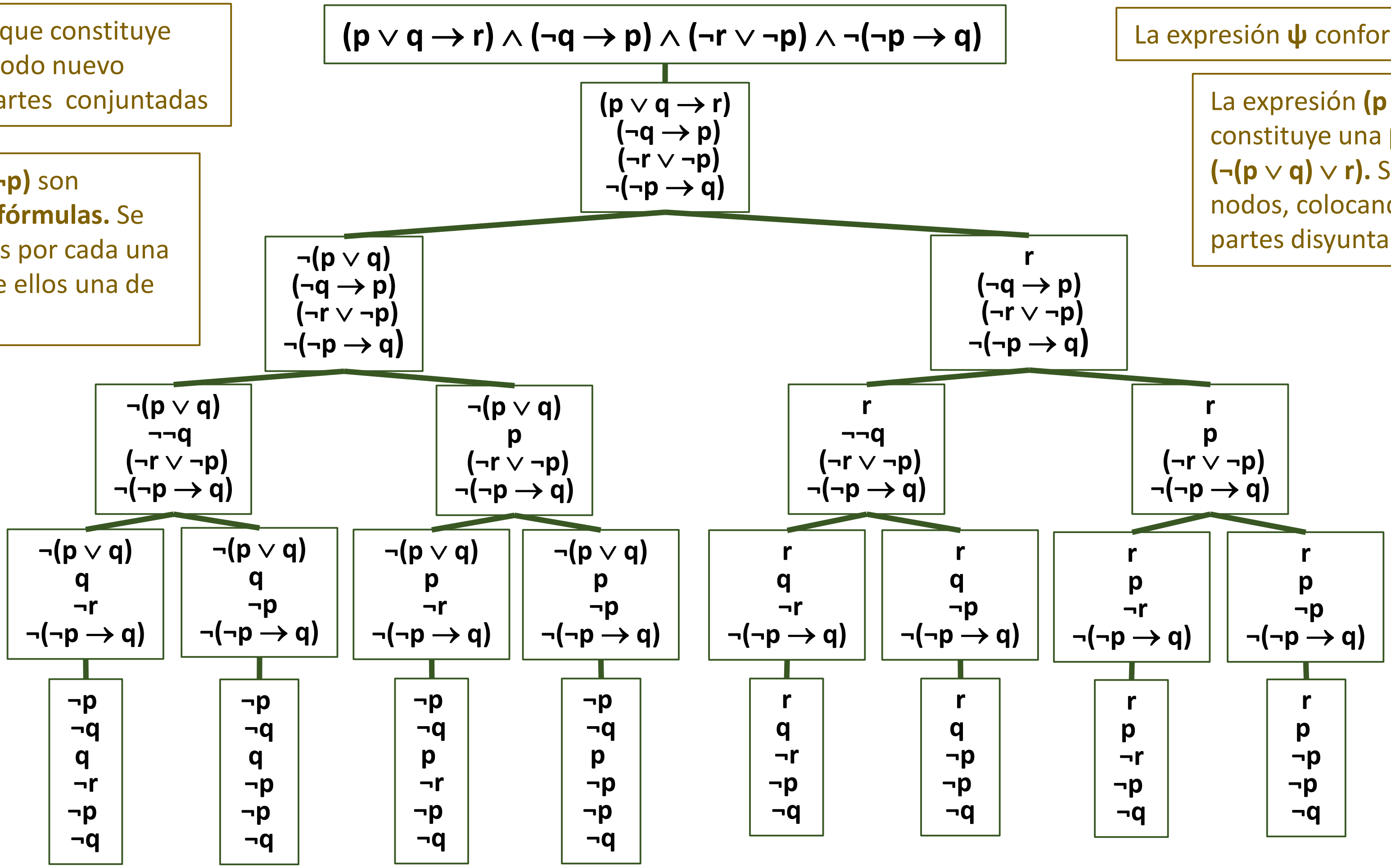
Validez de los Razonamientos (XVI)

- Veamos el ejemplo, pero ahora apliquemos la Técnica de los Tableaux Semánticos a la comprobación de la **validez del razonamiento por Refutación**. Según esto debemos comprobar que el Tableau Semántico de la expresión: **ψ = (p ∨ q → r) ∧ (¬q → p) ∧ (¬r ∨ ¬p) ∧ ¬(¬p → q)** resulta ser **CERRADO,** con lo que el razonamiento **{(p ∨ q → r); (¬q → p); (¬r ∨ ¬p)} ⊨ (¬p → q)** será **VÁLIDO**

La expresión **ψ** es una conjunción que constituye una **α-fórmula.** Se construye un nodo nuevo desdoblando en serie las cuatro partes conjuntadas

Las expresiones **(¬q → p) y (¬r ∨ ¬p)** son implicaciones que constituyen **β -fórmulas.** Se abren dos ramas con nuevos nodos por cada una de ellas, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas

La expresión **(¬¬q)** es una **α –fórmula** que se transforma en **(q).**
La expresión **¬ (p ∨ q)** es la negación de una disyunción que constituye una **α -fórmula** equivalente a **(¬p ∧ ¬q)** por lo que se construye un nuevo nodo desdoblando en serie las dos partes conjuntadas



La expresión **ψ** conforma el nodo raíz del Tableau

La expresión **(p ∨ q → r)** es una implicación que constituye una **β -fórmula** equivalente a **(¬(p ∨ q) ∨ r).** Se abren dos ramas con nuevos nodos, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas

La expresión **¬(¬p → q)** es una conjunción que constituye una **α -fórmula** por lo que se construye un nuevo nodo desdoblando en serie las dos partes conjuntadas: **(¬p)** y **(¬q)**

Validez de los Razonamientos (y XVII)

- Veamos el ejemplo, pero ahora apliquemos la Técnica de los Tableaux Semánticos a la comprobación de la **validez del razonamiento por Refutación**. Según esto debemos comprobar que el Tableau Semántico de la expresión: **$\psi = (p \lor q \rightarrow r) \land (\neg q \rightarrow p) \land (\neg r \lor \neg p) \land \neg(\neg p \rightarrow q)$** resulta ser **CERRADO,** con lo que el razonamiento **$\{(p \lor q \rightarrow r); (\neg q \rightarrow p); (\neg r \lor \neg p)\} \vDash (\neg p \rightarrow q)$** será **VÁLIDO**

La expresión **ψ** es una conjunción que constituye una **α-fórmula.** Se construye un nodo nuevo desdoblando en serie las cuatro partes conjuntadas

Las expresiones **$(\neg q \rightarrow p)$ y $(\neg r \lor \neg p)$** son implicaciones que constituyen **β -fórmulas.** Se abren dos ramas con nuevos nodos por cada una de ellas, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas

La expresión **$(\neg\neg q)$** es una **α –fórmula** que se transforma en **(q).**
La expresión **$\neg(p \lor q)$** es la negación de una disyunción que constituye una **α -fórmula** equivalente a **$(\neg p \land \neg q)$** por lo que se construye un nuevo nodo desdoblando en serie las dos partes conjuntadas

- $(p \lor q \rightarrow r) \land (\neg q \rightarrow p) \land (\neg r \lor \neg p) \land \neg(\neg p \rightarrow q)$
  - $(p \lor q \rightarrow r)$, $(\neg q \rightarrow p)$, $(\neg r \lor \neg p)$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
    - $\neg(p \lor q)$, $(\neg q \rightarrow p)$, $(\neg r \lor \neg p)$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
      - $\neg(p \lor q)$, $\neg\neg q$, $(\neg r \lor \neg p)$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
        - $\neg(p \lor q)$, q, $\neg r$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
          - $\neg p$, $\neg q$, q, $\neg r$, $\neg p$, $\neg q$
        - $\neg(p \lor q)$, q, $\neg p$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
          - $\neg p$, $\neg q$, q, $\neg p$, $\neg p$, $\neg q$
      - $\neg(p \lor q)$, p, $(\neg r \lor \neg p)$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
        - $\neg(p \lor q)$, p, $\neg r$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
          - $\neg p$, $\neg q$, p, $\neg r$, $\neg p$, $\neg q$
        - $\neg(p \lor q)$, p, $\neg p$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
          - $\neg p$, $\neg q$, p, $\neg p$, $\neg p$, $\neg q$
    - r, $(\neg q \rightarrow p)$, $(\neg r \lor \neg p)$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
      - r, $\neg\neg q$, $(\neg r \lor \neg p)$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
        - r, q, $\neg r$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
          - r, q, $\neg r$, $\neg p$, $\neg q$
        - r, q, $\neg p$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
          - r, q, $\neg p$, $\neg p$, $\neg q$
      - r, p, $(\neg r \lor \neg p)$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
        - r, p, $\neg r$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
          - r, p, $\neg r$, $\neg p$, $\neg q$
        - r, p, $\neg p$, $\neg(\neg p \rightarrow q)$
          - r, p, $\neg p$, $\neg p$, $\neg q$

La expresión **ψ** conforma el nodo raíz del Tableau

La expresión **$(p \lor q \rightarrow r)$** es una implicación que constituye una **β -fórmula** equivalente a **$(\neg(p \lor q) \lor r)$.** Se abren dos ramas con nuevos nodos, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas

La expresión **$\neg(\neg p \rightarrow q)$** es una conjunción que constituye una **α -fórmula** por lo que se construye un nuevo nodo desdoblando en serie las dos partes conjuntadas: **$(\neg p)$** y **$(\neg q)$**

Todos los nodos hoja quedan CERRADOS al contener literales opuestos (**en rojo**). Por lo tanto, el Tableau Semántico es **COMPLETADO Y CERRADO**, y el razonamiento es **VÁLIDO.**

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (I)

- **Demostrar por Refutación por Tablas de Verdad, DPLL, Tableaux y Resolución (por conjunto soporte) si los siguientes razonamientos son válidos:**
  1. $\{p \rightarrow q, \ \neg r, q \rightarrow t, \neg r \rightarrow p\} \vDash t$
  2. $\{p \vee q, q \rightarrow p, \neg p \vee \neg q\} \vDash p$
  3. $\{p \rightarrow q, q \rightarrow p, \neg p \vee \neg q\} \vDash \neg p$
- Nos plantea el ejercicio que comprobemos (o demostremos) por Refutación si los razonamientos son Válidos, para ello, en cada uno de los casos, debemos comprobar con una (o con cada una) de las técnicas SAT que se citan si las expresiones siguientes son INSATISFACIBLES:
  1. $\Psi = (p \rightarrow q) \wedge \neg r \wedge (q \rightarrow t) \wedge (\neg r \rightarrow p) \wedge \neg t$
  2. $\phi = (p \vee q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg p$
  3. $\Phi = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg\neg p$
- Para llevarlo a cabo, vamos a comprobar dichas afirmaciones con las siguientes técnicas SAT:
  - Con el algoritmo DPLL y Resolución por conjunto soporte para la primera
  - Con Tableaux Semántico y Tablas de Verdad para la segunda
  - Con Resolución por conjunto soporte y Tablas de Verdad para la tercera

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (II)

- **Demostrar por Refutación,** por el algoritmo DPLL y Resolución por conjunto soporte, **si el siguiente razonamiento es válido:**

  1.- $\{p \rightarrow q,\ \neg r, q \rightarrow t, \neg r \rightarrow p\} \vDash t$

- Para ello, debemos comprobar con cada una las técnicas SAT que se citan si la expresión siguiente es INSATISFACIBLE:

  $\Psi = (p \rightarrow q) \wedge \neg r \wedge (q \rightarrow t) \wedge (\neg r \rightarrow p) \wedge \neg t$

- Para llevarlo a cabo, vamos a transformar la expresión a su FNC.
  - Aplicando la equivalencia de interdefinición de la implicación:
  - **$(\neg p \vee q) \wedge \neg r \wedge (\neg q \vee t) \wedge (r \vee p) \wedge \neg t$**
  - Esta es la FNC, la conjunción de disyunciones. Pasemos ahora a la forma clausal:
  - **$\Psi = \{\{\neg p, q\}; \{\neg r\}; \{\neg q, t\}; \{r, p\}; \{\neg t\}\}$**

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (III)

- Para aplicar el algoritmo DPLL, no tenemos cláusulas triviales, ni subsumidas. Tenemos dos cláusulas unitarias, podemos propagar cualquiera de los literales de las mismas.

  $\boldsymbol{\Psi(\neg t) = \{\{\neg p, q\}; \{\neg r\}; \{\neg q\}; \{r, p\}\}}$

- Ahora podemos propagar el literal **(¬r)**

  $\boldsymbol{\Psi(\neg t, \neg r) = \{\{\neg p, q\}; \{\neg q\}; \{p\}\}}$

- Propagamos el literal **(p)**

  $\boldsymbol{\Psi(\neg t, \neg r, p) = \{\{q\}; \{\neg q\}\}}$

- Y ahora, propaguemos el literal **(q)** o el literal **(¬q)**, el resultado es **la cláusula vacía**

  $\boldsymbol{\Psi(\neg t, \neg r, p, q) = \Psi(\neg t, \neg r, p, \neg q) = \{\square\}}$

- No hace falta hacer backtraking dado que la propagación de los **literales (q)** y **(¬q)** es la primera aplicación de la regla de ramificación.

- Por tanto, hemos comprobado que la expresión $\boldsymbol{\Psi = (p \to q) \land \neg r \land (q \to t) \land (\neg r \to p) \land \neg t}$ **es INSATISFACIBLE, Y QUE EL RAZONAMIENTO ES VÁLIDO**

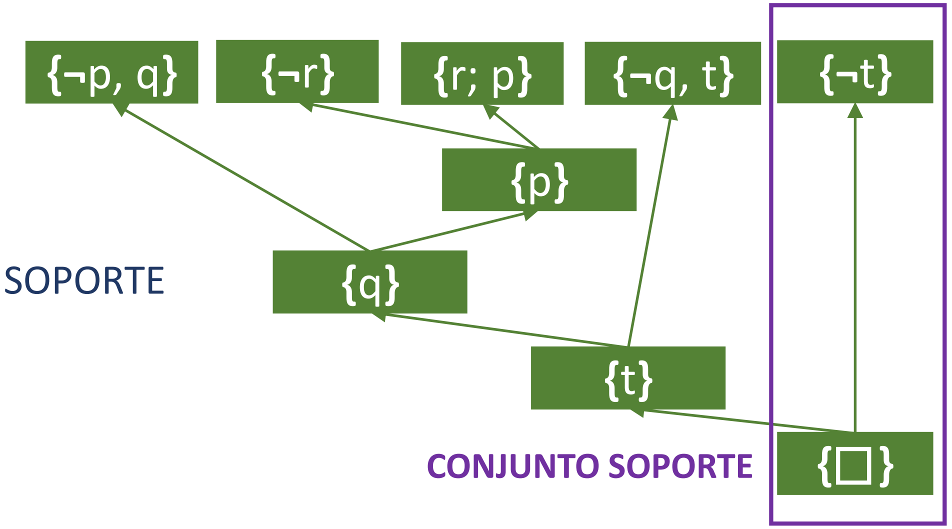
Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (IV)

- **Vamos a determinar ahora si el primer razonamiento es válido por Refutación haciendo uso de la técnica de Resolución por conjunto soporte. si el siguiente conjunto de oraciones es satisfacible utilizando el algoritmo de Resolución:**
  - La expresión en su forma clausal, es: **$\Psi = \{\{\neg p, q\}; \{\neg r\}; \{\neg q, t\}; \{r, p\}; \{\neg t\}\}$**

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (V)

- **Vamos a determinar ahora si el primer razonamiento es válido por Refutación haciendo uso de la técnica de Resolución por conjunto soporte. si el siguiente conjunto de oraciones es satisfacible utilizando el algoritmo de Resolución:**
  - La expresión en su forma clausal, es: **Ψ = {{¬p, q}; {¬r}; {¬q, t}; {r, p}; {¬t}}**

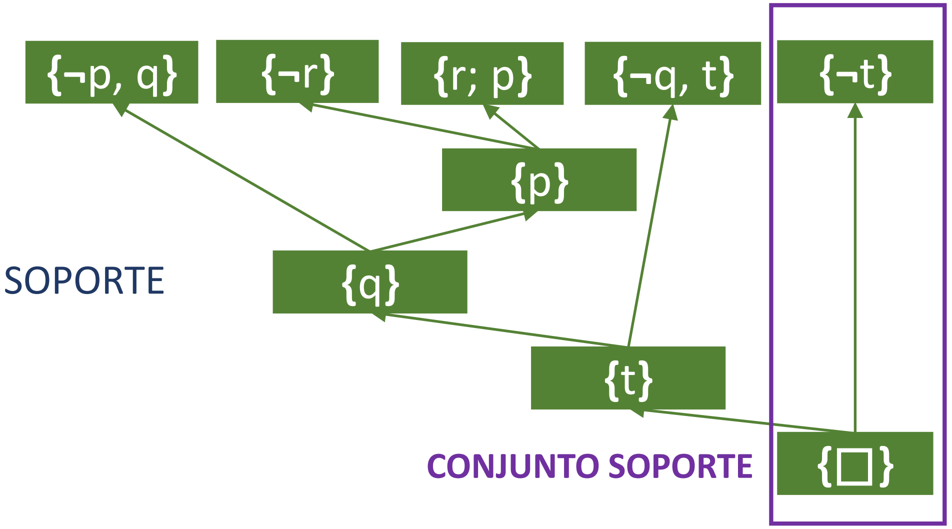
1.	{¬p, q}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0
2.	{¬r}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0
3.	{r, p}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0
4.	{¬q, t}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0
5.	{¬t}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0 CONJUNTO SOPORTE



Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (VI)

- **Vamos a determinar ahora si el primer razonamiento es válido por Refutación haciendo uso de la técnica de Resolución por conjunto soporte. si el siguiente conjunto de oraciones es satisfacible utilizando el algoritmo de Resolución:**
  - La expresión en su forma clausal, es: **Ψ = {{¬p, q}; {¬r}; {¬q, t}; {r, p}; {¬t}}**

1.	{¬p, q}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
2.	{¬r}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
3.	{r, p}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
4.	{¬q, t}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
5.	{¬t}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	CONJUNTO SOPORTE
6.	{p}	R_{r} ({¬r}; {r, p}) = **{p} // R 2,3**	NIVEL 1	

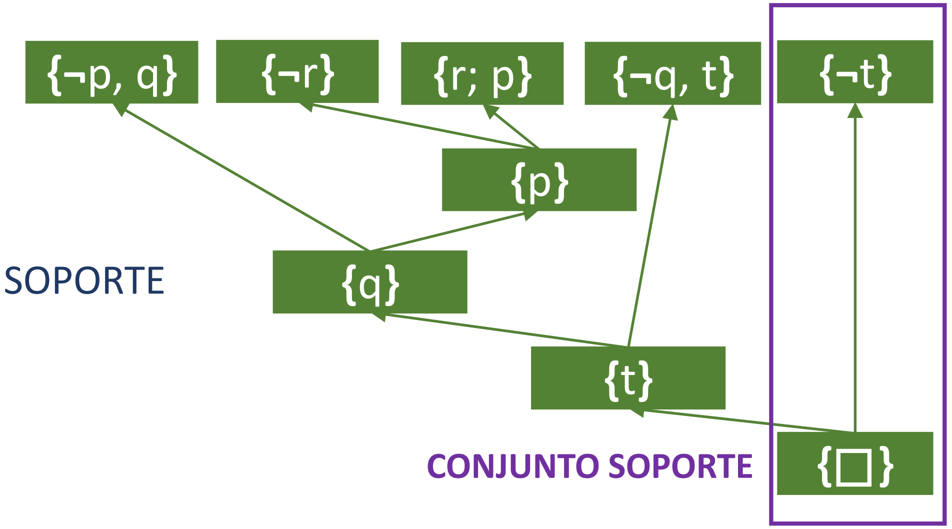


Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (VII)

Facultad de Informática

- **Vamos a determinar ahora si el primer razonamiento es válido por Refutación haciendo uso de la técnica de Resolución por conjunto soporte. si el siguiente conjunto de oraciones es satisfacible utilizando el algoritmo de Resolución:**
  - La expresión en su forma clausal, es: **Ψ = {{¬p, q}; {¬r}; {¬q, t}; {r, p}; {¬t}}**

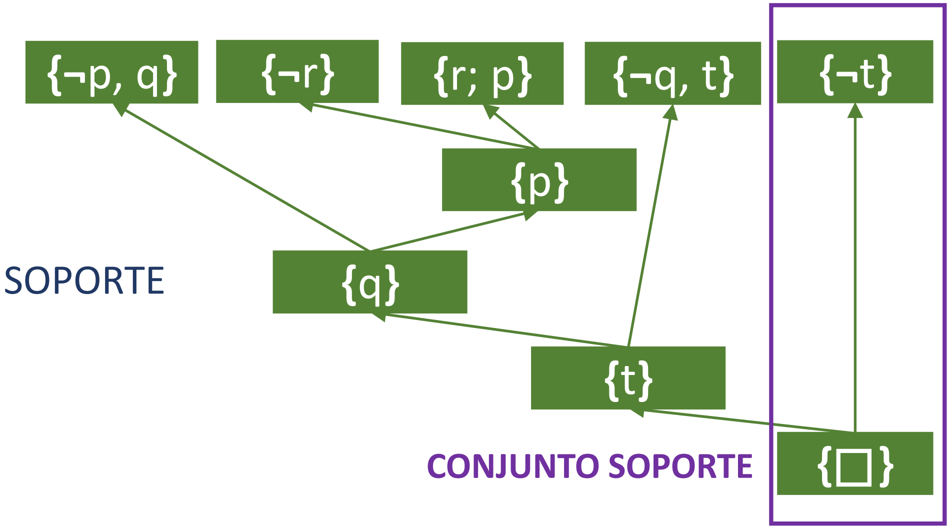
1.	{¬p, q}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
2.	{¬r}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
3.	{r, p}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
4.	{¬q, t}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
5.	{¬t}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	CONJUNTO SOPORTE
6.	{p}	$R_{\cancel{r}}$ ({¬r}; {r, p}) = **{p} // R 2,3**	NIVEL 1	
7.	{q}	$R_{\cancel{p}}$ ({¬p, q}; {p}) = **{q} // R 1,6**	NIVEL 2	



Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (VII)

- **Vamos a determinar ahora si el primer razonamiento es válido por Refutación haciendo uso de la técnica de Resolución por conjunto soporte. si el siguiente conjunto de oraciones es satisfacible utilizando el algoritmo de Resolución:**
  - La expresión en su forma clausal, es: **Ψ = {{¬p, q}; {¬r}; {¬q, t}; {r, p}; {¬t}}**

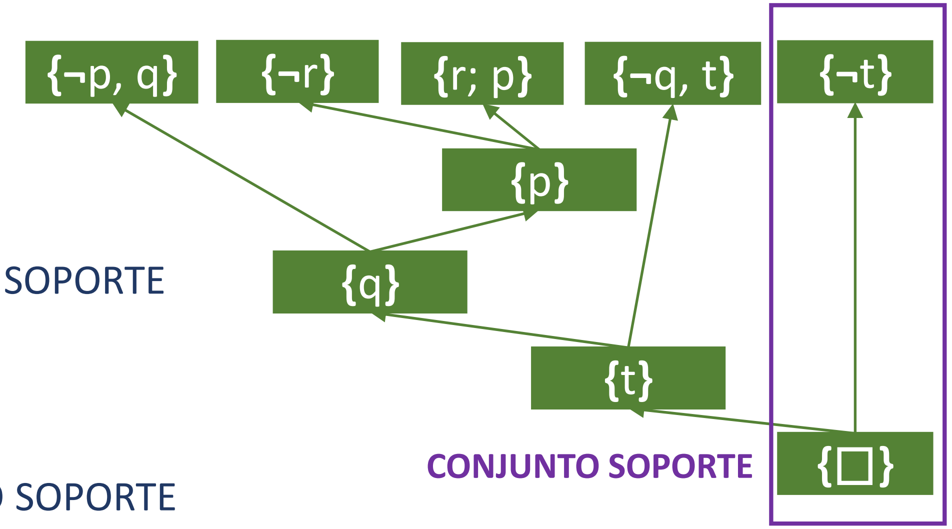
1.	{¬p, q}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
2.	{¬r}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
3.	{r, p}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
4.	{¬q, t}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
5.	{¬t}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	CONJUNTO SOPORTE
6.	{p}	R_r ({¬r}; {r, p}) = **{p} // R 2,3**	NIVEL 1	
7.	{q}	R_p ({¬p, q}; {p}) = **{q} // R 1,6**	NIVEL 2	
8.	**{t}**	R_q ({¬q, t}; {q}) = **{t} // R 4,7**	NIVEL 3	



Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (VIII)

- **Vamos a determinar ahora si el primer razonamiento es válido por Refutación haciendo uso de la técnica de Resolución por conjunto soporte. si el siguiente conjunto de oraciones es satisfacible utilizando el algoritmo de Resolución:**
  - La expresión en su forma clausal, es: **Ψ = {{¬p, q}; {¬r}; {¬q, t}; {r, p}; {¬t}}**

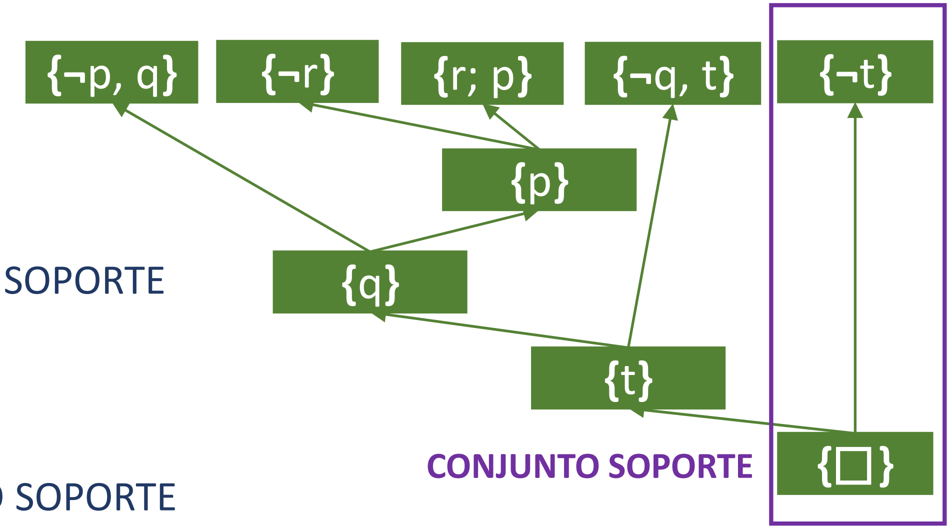
1.	{¬p, q}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0
2.	{¬r}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0
3.	{r, p}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0
4.	{¬q, t}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0
5.	{¬t}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0 CONJUNTO SOPORTE
6.	{p}	R ({¬r}; {r, p}) = **{p} // R 2,3**	NIVEL 1
7.	{q}	R ({¬p, q}; {p}) = **{q} // R 1,6**	NIVEL 2
8.	**{t}**	R ({¬q, t}; {q}) = **{t} // R 4,7**	NIVEL 3
9.	**{□}**	R ({¬t}; {t}) = **{□} // R 5,8**	NIVEL 4 CONJUNTO SOPORTE



Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (IX)

- **Vamos a determinar ahora si el primer razonamiento es válido por Refutación haciendo uso de la técnica de Resolución por conjunto soporte. si el siguiente conjunto de oraciones es satisfacible utilizando el algoritmo de Resolución:**
  - La expresión en su forma clausal, es: **Ψ = {{¬p, q}; {¬r}; {¬q, t}; {r, p}; {¬t}}**

1.	{¬p, q}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0
2.	{¬r}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0
3.	{r, p}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0
4.	{¬q, t}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0
5.	{¬t}	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0 CONJUNTO SOPORTE
6.	{p}	R_r ({¬r}; {r, p}) = **{p} // R 2,3**	NIVEL 1
7.	{q}	R_p ({¬p, q}; {p}) = **{q} // R 1,6**	NIVEL 2
8.	**{t}**	R_q ({¬q, t}; {q}) = **{t} // R 4,7**	NIVEL 3
9.	**{□}**	R_t ({¬t}; {t}) = **{□} // R 5,8**	NIVEL 4 CONJUNTO SOPORTE



- Hemos obtenido la cláusula vacía, dentro del Conjunto Soporte; por lo tanto, hemos comprobado que la expresión dada es INSATISFACIBLE. Con ello, comprobamos que **el razonamiento propuesto es VÁLIDO**.
- Lo que ya sabíamos por aplicación del algoritmo DPLL.

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (X)

- **Demostrar por Refutación,** mediante la aplicación de Tableaux Semánticos y Tablas de Verdad, **si el siguiente razonamiento es válido:**

  2.- $\{p \vee q,\ q \rightarrow p,\ \neg p \vee \neg q\} \models p$

- Para ello, debemos comprobar con cada una las técnicas SAT que se citan si la expresión siguiente es INSATISFACIBLE:

  $\phi = (p \vee q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg p$
- Para llevarlo a cabo, realizando su Tabla de Verdad.

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (XI)

- **Demostrar por Refutación** mediante la aplicación de Tableaux Semánticos y Tablas de Verdad **si el siguiente razonamiento es válido:**

  2.- $\{p \lor q, q \to p, \neg p \lor \neg q\} \vDash p$

- Para ello, debemos comprobar con cada una las técnicas SAT que se citan si la expresión siguiente es INSATISFACIBLE:

  $\phi = (p \lor q) \land (q \to p) \land (\neg p \lor \neg q) \land \neg p$

- Para llevarlo a cabo, realizando su Tabla de Verdad. Y como vemos, la evaluación nos dice que es INSATISFACIBLE. Por lo tanto, **el razonamiento es VÁLIDO**

INTERPRET		EVALUACIÓN DE $\phi = (p \lor q) \land (q \to p) \land (\neg p \lor \neg q) \land \neg p$							
p	**q**	**$\neg p$**	**$\neg q$**	**$p \lor q$**	**$q \to p$**	**$\neg p \lor \neg q$**	**(1)**	**(2)**	**ϕ**
V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	F	F	F

$(p \lor q) \land (q \to p) = (1)$

$((p \lor q) \land (q \to p)) \land (\neg p \lor \neg q) = (2)$

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (XII)

- **Demostrar por Refutación** mediante la aplicación de Tableaux Semánticos y Tablas de Verdad **si el siguiente razonamiento es válido:**

  2.- $\{p \vee q,\ q \rightarrow p,\ \neg p \vee \neg q\} \vDash p$

- Para ello, debemos comprobar con cada una las técnicas SAT que se citan si la expresión siguiente es INSATISFACIBLE:

  $\phi = (p \vee q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg p$

- Para llevarlo a cabo, realizando su Tableaux Semántico.

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (XIII)

Realicemos el Tableaux Semántico de la oración: $\boldsymbol{\phi = (p \lor q) \land (q \rightarrow p) \land (\neg p \lor \neg q) \land \neg p}$

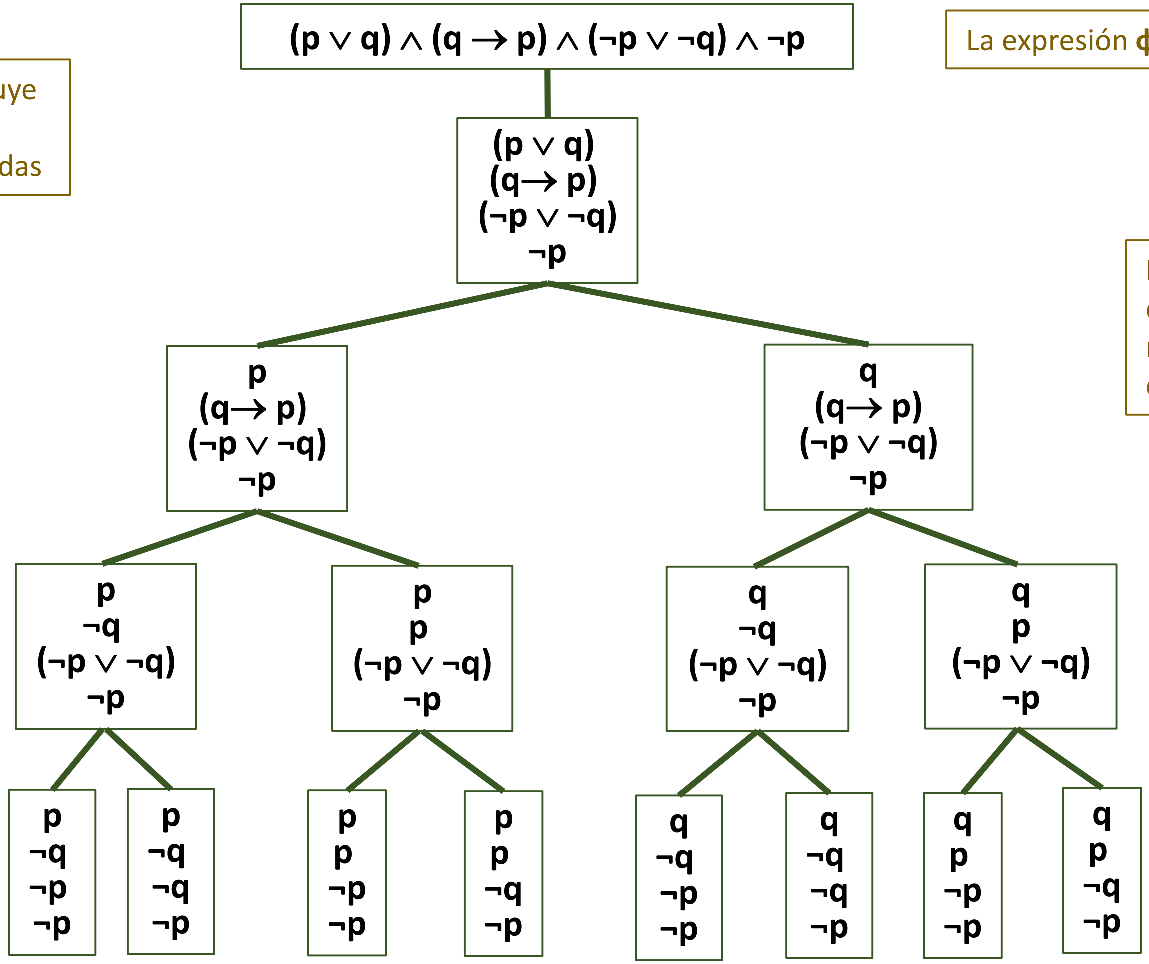
La expresión ϕ conforma el nodo raíz del Tableau

La expresión ϕ es una conjunción que constituye una **α-fórmula.** Se construye un nodo nuevo desdoblando en serie las dos partes conjuntadas

La expresión **$(p \lor q)$** es una disyunción que constituye una **β -fórmula.** Se abren dos ramas con nuevos nodos, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas

La expresión **$(q \rightarrow p)$** es una implicación que constituye una **β -fórmula** equivalente a **$(\neg q \lor p)$.** Se abren dos ramas con nuevos nodos, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas

La expresión **$(\neg p \lor \neg q)$** es una disyunción que constituye una **β – fórmula.** Se abren dos ramas con nuevos nodos, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas

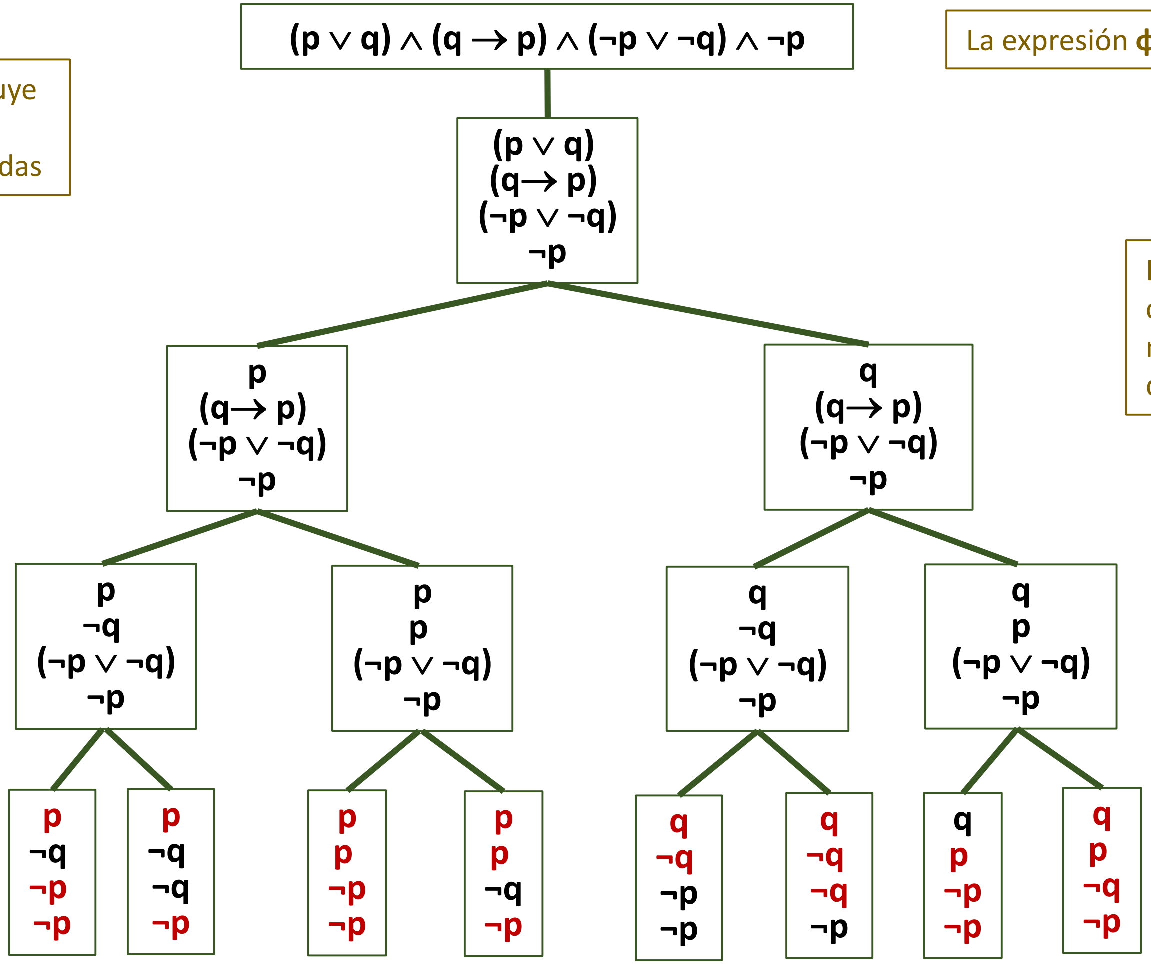


Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (XIV)

Realicemos el Tableaux Semántico de la oración: $\phi = (p \vee q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg p$

La expresión ϕ conforma el nodo raíz del Tableau

La expresión ϕ es una conjunción que constituye una **α-fórmula.** Se construye un nodo nuevo desdoblando en serie las dos partes conjuntadas



La expresión **(p ∨ q)** es una disyunción que constituye una **β -fórmula.** Se abren dos ramas con nuevos nodos, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas

La expresión **(q→ p)** es una implicación que constituye una **β -fórmula** equivalente a **(¬q ∨ p).** Se abren dos ramas con nuevos nodos, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas

La expresión **(¬p ∨ ¬q)** es una disyunción que constituye una **β – fórmula.** Se abren dos ramas con nuevos nodos, colocando en cada uno de ellos una de las partes disyuntadas

Tableaux Semántico COMPLETADO. Y todos sus nodos hoja contienen literales opuestos (en rojo). Por tanto la expresión **ϕ es INSATISFACIBLE y el razonamiento VÁLIDO**

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (XV)

- **Demostrar por Refutación,** mediante la aplicación de Tablas de Verdad y de Resolución por conjunto soporte, **si el siguiente razonamiento es válido:**

  3.- $\{p \rightarrow q, q \rightarrow p, \neg p \vee \neg q\} \vDash \neg p$

- Para ello, debemos comprobar con cada una las técnicas SAT que se citan si la expresión siguiente es INSATISFACIBLE:

  $\Phi = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge p$

- Para llevarlo a cabo, realizando su Tabla de Verdad.

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (XVI)

- **Demostrar por Refutación,** mediante la aplicación de Tablas de Verdad y de Resolución por conjunto soporte, **si el siguiente razonamiento es válido:**

  3.- $\{p \rightarrow q,\ q \rightarrow p,\ \neg p \vee \neg q\} \vDash \neg p$

- Para ello, debemos comprobar con cada una las técnicas SAT que se citan si la expresión siguiente es INSATISFACIBLE:

  $\Phi = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge p$

- Para llevarlo a cabo, realizando su Tabla de Verdad. Y como vemos, la evaluación nos dice que es INSATISFACIBLE. Por lo tanto, **el razonamiento es VÁLIDO**

INTERPRET		EVALUACIÓN DE $\phi = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge p$							
p	**q**	**$\neg p$**	**$\neg q$**	**$p \rightarrow q$**	**$q \rightarrow p$**	**$\neg p \vee \neg q$**	**(1)**	**(2)**	**ϕ**
V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V	F

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) = (1)$

$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \wedge (\neg p \vee \neg q) = (2)$

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (XVII)

- **Demostrar por Refutación,** mediante la aplicación de Tablas de Verdad y de Resolución por conjunto soporte, **si el siguiente razonamiento es válido:**

  3.- $\{p \rightarrow q,\ q \rightarrow p,\ \neg p \vee \neg q\} \vDash \neg p$

- Para ello, debemos comprobar con cada una las técnicas SAT que se citan si la expresión siguiente es INSATISFACIBLE:

  $\Phi = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge p$

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (XVIII)

- **Demostrar por Refutación,** mediante la aplicación de Tablas de Verdad y de Resolución por conjunto soporte, **si el siguiente razonamiento es válido:**

  3.- $\{p \rightarrow q, q \rightarrow p, \neg p \vee \neg q\} \models \neg p$

- Para ello, debemos comprobar con cada una las técnicas SAT que se citan si la expresión siguiente es INSATISFACIBLE:

  $\Phi = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge p$

- Para llevarlo a cabo, aplicando Resolución por conjunto soporte. Lo primero es transformar la expresión **Φ en su FNC, y formalizarla en su forma clausal**, **para aplicarle resolución por conjunto soporte:**

  $\Phi = \{\{\neg p, q\}; \{\neg q, p\}; \{\neg p, \neg q\}; \{p\}\}$

Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (XIX)

- **Demostrar por Refutación,** mediante la aplicación de Tablas de Verdad y de Resolución por conjunto soporte, **si el siguiente razonamiento es válido:**

  3.- $\{p \rightarrow q, q \rightarrow p, \neg p \vee \neg q\} \vDash \neg p$

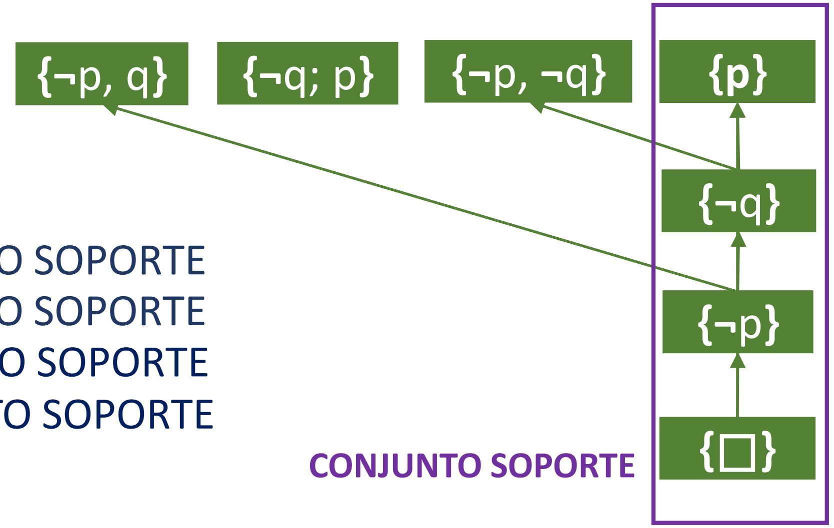
- Para ello, debemos comprobar con cada una las técnicas SAT que se citan si la expresión siguiente es INSATISFACIBLE:

  $\Phi = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge p$

- Para llevarlo a cabo, aplicando Resolución por conjunto soporte. Lo primero es transformar la expresión **Φ en su FNC, y formalizarla en su forma clausal, para aplicarle resolución por conjunto soporte:**

  $\Phi = \{\{\neg p, q\}; \{\neg q, p\}; \{\neg p, \neg q\}; \{p\}\}$

1.	$\{\neg p, q\}$	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
2.	$\{\neg q, p\}$	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
3.	$\{\neg p, \neg q\}$	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
4.	$\{p\}$	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	CONJUNTO SOPORTE
5.	$\{\neg q\}$	$R_{\mathscr{p}}$ **(**$\{\neg p, \neg q\}; \{p\}$**)** = **$\{\neg q\}$ // R 3,4**	NIVEL 1	CONJUNTO SOPORTE
6.	$\{\neg p\}$	$R_{\mathscr{q}}$ $(\{\neg p, q\}; \{\neg q\})$ = **$\{\neg p\}$ // R 1,5**	NIVEL 2	CONJUNTO SOPORTE
7.	$\{\square\}$	$R_{\mathscr{p}}$ $(\{p\}; \{\neg p\})$ = **$\{\square\}$ // R 4,6**	NIVEL 3	CONJUNTO SOPORTE



Ejercicio 11: Demostrar razonamientos por Refutación (y XX)

- **Demostrar por Refutación,** mediante la aplicación de Tablas de Verdad y de Resolución por conjunto soporte, **si el siguiente razonamiento es válido:**

  3.- $\{p \rightarrow q,\ q \rightarrow p,\ \neg p \vee \neg q\} \vDash \neg p$

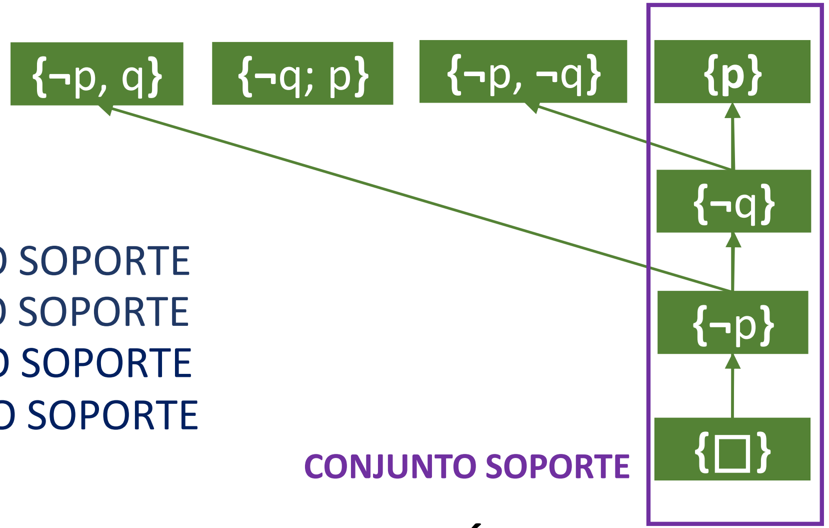
- Para ello, debemos comprobar con cada una las técnicas SAT que se citan si la expresión siguiente es INSATISFACIBLE:

  $\Phi = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge p$

- Para llevarlo a cabo, aplicando Resolución por conjunto soporte. Lo primero es transformar la expresión **Φ en su FNC, y formalizarla en su forma clausal**, **para aplicarle resolución por conjunto soporte:**

  $\Phi = \{\{\neg p, q\}; \{\neg q, p\}; \{\neg p, \neg q\}; \{p\}\}$

1.	$\{\neg p, q\}$	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
2.	$\{\neg q, p\}$	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
3.	$\{\neg p, \neg q\}$	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	
4.	$\{p\}$	Cláusula del conjunto inicial	NIVEL 0	CONJUNTO SOPORTE
5.	$\{\neg q\}$	$R_{\cancel{p}}$ $(\{\neg p, \neg q\}; \{p\}) = \{\neg q\}$ // **R 3,4**	NIVEL 1	CONJUNTO SOPORTE
6.	$\{\neg p\}$	$R_{\cancel{q}}$ $(\{\neg p, q\}; \{\neg q\}) = \{\neg p\}$ // **R 1,5**	NIVEL 2	CONJUNTO SOPORTE
7.	$\{\square\}$	$R_{\cancel{p}}$ $(\{p\}; \{\neg p\}) = \{\square\}$ // **R 4,6**	NIVEL 3	CONJUNTO SOPORTE



- Se obtiene la cláusula vacía, por lo tanto, **la expresión es INSATISFACIBLE y el razonamiento VÁLIDO**

Ejercicio 12: Razonamiento lógico, consistencia de premisas (I)

- **El inspector Clouseau considera que los autores del robo de la Pantera Rosa se encuentran entre María, Rosa, Luís y Carlos. Plantea que: “o fue María o fue Rosa”; “o fue Luís o fue Carlos”; si fue Luís, no fue Carlos”; si fue Luís, lo fue María”; “si fue María, lo fue Carlos”. Suponiendo que Clouseau no se equivoca: ¿quiénes deberían ser culpables e inocentes del robo?**
- El inspector Clouseau elabora “una teoría” basada en una serie de afirmaciones, que de no estar equivocado quiere decir que debe existir al menos una interpretación en la que todas ellas sean ciertas o evaluadas como VERDADERO.
- Por tanto, el planteamiento del problema es encontrar un MODELO para el conjunto de afirmaciones del inspector Clouseau como un conjunto de oraciones SATISFACIBLE.

Ejercicio 12: Razonamiento lógico, consistencia de premisas (II)

- **El inspector Clouseau considera que los autores del robo de la Pantera Rosa se encuentran entre María, Rosa, Luís y Carlos. Plantea que: "o fue María o fue Rosa"; "o fue Luís o fue Carlos"; si fue Luís, no fue Carlos"; si fue Luís, lo fue María"; "si fue María, lo fue Carlos". Suponiendo que Clouseau no se equivoca: ¿quiénes deberían ser culpables e inocentes del robo?**
- El inspector Clouseau elabora "una teoría" basada en una serie de afirmaciones, que de no estar equivocado quiere decir que debe existir al menos una interpretación en la que todas ellas sean ciertas o evaluadas como VERDADERO.
- Por tanto, el planteamiento del problema es encontrar un MODELO para el conjunto de afirmaciones del inspector Clouseau, como un conjunto de oraciones SATISFACIBLE.

La signatura del conjunto de oraciones, es:

fue María = p

fue Rosa = q

fue Luís = r

fue Carlos = s

La formalización del conjunto de oraciones, es:

O fue María o fue Rosa = $\mathbf{p \vee q}$

O fue Luís o fue Carlos = $\mathbf{r \vee s}$

Si fue Luís, no fue Carlos = $\mathbf{r \rightarrow \neg s}$

Si fue Luís, lo fue María = $\mathbf{r \rightarrow p}$

Si fue María, lo fue Carlos = $\mathbf{p \rightarrow s}$

Ejercicio 12: Razonamiento lógico, consistencia de premisas (III)

- **El inspector Clouseau considera que los autores del robo de la Pantera Rosa se encuentran entre María, Rosa, Luís y Carlos. Plantea que: "o fue María o fue Rosa"; "o fue Luís o fue Carlos"; si fue Luís, no fue Carlos"; si fue Luís, lo fue María"; "si fue María, lo fue Carlos". Suponiendo que Clouseau no se equivoca: ¿quiénes deberían ser culpables e inocentes del robo?**
- El inspector Clouseau elabora "una teoría" basada en una serie de afirmaciones, que de no estar equivocado quiere decir que debe existir al menos una interpretación en la que todas ellas sean ciertas o evaluadas como VERDADERO.
- Por tanto, el planteamiento del problema es encontrar un MODELO para el conjunto de afirmaciones del inspector Clouseau, como un conjunto de oraciones SATISFACIBLE.

La signatura del conjunto de oraciones, es:

fue María = p

fue Rosa = q

fue Luís = r

fue Carlos = s

La formalización del conjunto de oraciones, es:

O fue María o fue Rosa = $\mathbf{p \vee q}$

O fue Luís o fue Carlos = $\mathbf{r \vee s}$

Si fue Luís, no fue Carlos = $\mathbf{r \rightarrow \neg s}$

Si fue Luís, lo fue María = $\mathbf{r \rightarrow p}$

Si fue María, lo fue Carlos = $\mathbf{p \rightarrow s}$

- **El conjunto de oraciones, es: $\{(p \vee q), (r \vee s), (r \rightarrow \neg s), (r \rightarrow p), (p \rightarrow s)\}$ que debe ser SATISFACIBLE**
- Este conjunto en su forma clausal, es: $\boldsymbol{\phi = \{\{p, q\}; \{r, s\}; \{\neg r, \neg s\}; \{\neg r, p\}; \{\neg p, s\}\}}$

Ejercicio 12: Razonamiento lógico, consistencia de premisas (IV)

- **El inspector Clouseau considera que los autores del robo de la Pantera Rosa se encuentran entre María, Rosa, Luís y Carlos. Plantea que: "o fue María o fue Rosa"; "o fue Luís o fue Carlos"; si fue Luís, no fue Carlos"; si fue Luís, lo fue María"; "si fue María, lo fue Carlos". Suponiendo que Clouseau no se equivoca: ¿quiénes deberían ser culpables e inocentes del robo?**
- **El conjunto de oraciones, es: $\{(p \vee q), (r \vee s), (r \to \neg s), (r \to p), (p \to s)\}$ que debe ser SATISFACIBLE**
- Este conjunto en su forma clausal, es: $\boldsymbol{\phi = \{\{p, q\}; \{r, s\}; \{\neg r, \neg s\}; \{\neg r, p\}; \{\neg p, s\}\}}$
- **Aplicamos el algoritmo DPLL, porque es la técnica que, sobre formas clausales, nos permite encontrar un MODELO de manera eficiente.**

- Propagamos **(q)** al ser un literal puro: $\boldsymbol{\phi(q) = \{\{r, s\}; \{\neg r, \neg s\}; \{\neg r, p\}; \{\neg p, s\}\}}$
- Propagamos **(r)**: $\boldsymbol{\phi(q, r) = \{\{\neg s\}; \{p\}; \{\neg p, s\}\}}$
- Propagamos **(p)**: $\boldsymbol{\phi(q, r, p) = \{\{\neg s\}; \{s\}\}}$
- Si propagamos **(s)**, o si propagamos **(¬s)**: $\boldsymbol{\phi(q, r, p, s) = \phi(q, r, p, \neg s) = \{\square\}}$

Ejercicio 12: Razonamiento lógico, consistencia de premisas (V)

- El inspector Clouseau considera que los autores del robo de la Pantera Rosa se encuentran entre María, Rosa, Luís y Carlos. Plantea que: "o fue María o fue Rosa"; "o fue Luís o fue Carlos"; si fue Luís, no fue Carlos"; si fue Luís, lo fue María"; "si fue María, lo fue Carlos". Suponiendo que Clouseau no se equivoca: ¿quiénes deberían ser culpables e inocentes del robo?
- **El conjunto de oraciones, es: {$(p \vee q)$, $(r \vee s)$, $(r \rightarrow \neg s)$, $(r \rightarrow p)$, $(p \rightarrow s)$} que debe ser SATISFACIBLE**
- Este conjunto en su forma clausal, es: **ϕ = {{p, q}; {r, s}; {¬r, ¬s}; {¬r, p}; {¬p, s}}**
- **Aplicamos el algoritmo DPLL, porque es la técnica que, sobre formas clausales, nos permite encontrar un MODELO de manera eficiente.**

- Tenemos que hacer backtraking, y propagar **(¬p): ϕ(q, r, ¬p) = {{¬s}; {□}}**
- Tenemos que hacer backtraking, y propagar **(¬r): ϕ(q, ¬r) = {{s}; {¬p, s}}**
- Propagamos **(s)**: **ϕ(q, ¬r, s) = {Ø}**
- Y, finalmente, encontramos el **{Ø} lo que nos da la SATISFACIBILIDAD**

Ejercicio 12: Razonamiento lógico, consistencia de premisas (VI)

- **El inspector Clouseau considera que los autores del robo de la Pantera Rosa se encuentran entre María, Rosa, Luís y Carlos. Plantea que: "o fue María o fue Rosa"; "o fue Luís o fue Carlos"; si fue Luís, no fue Carlos"; si fue Luís, lo fue María"; "si fue María, lo fue Carlos". Suponiendo que Clouseau no se equivoca: ¿quiénes deberían ser culpables e inocentes del robo?**
- **El conjunto de oraciones, es: {$(p \vee q)$, $(r \vee s)$, $(r \rightarrow \neg s)$, $(r \rightarrow p)$, $(p \rightarrow s)$} que debe ser SATISFACIBLE**
- Este conjunto en su forma clausal, es: **ϕ = {{p, q}; {r, s}; {¬r, ¬s}; {¬r, p}; {¬p, s}}**
- Aplicamos el algoritmo DPLL, porque es la técnica que, sobre formas clausales, nos permite encontrar un MODELO de manera eficiente.

- Así: **$\phi(q, \neg r, s)$ = {Ø}**
- **No hace falta propagar, en esta ramificación, (p) ó (¬p)**
- **Esto nos indica que la asignación de valores de Verdad a dicha proposición atómica es indistinta, por tanto podemos concluir que María puede ser culpable o inocente**

La interpretación que hace al conjunto de oraciones SATISFACIBLE, es:

SI fue Rosa (CULPABLE): **v(q) = V**

NO fue Luís (INOCENTE): **v(r) = F**

SI fue Carlos (CULPABLE): **v(s) = V**

Ejercicio 12: Razonamiento lógico, consistencia de premisas (VII)

- **El inspector Clouseau considera que los autores del robo de la Pantera Rosa se encuentran entre María, Rosa, Luís y Carlos. Plantea que: "o fue María o fue Rosa"; "o fue Luís o fue Carlos"; si fue Luís, no fue Carlos"; si fue Luís, lo fue María"; "si fue María, lo fue Carlos". Suponiendo que Clouseau no se equivoca: ¿quiénes deberían ser culpables e inocentes del robo?**
- **El conjunto de oraciones, es: $\{(p \vee q), (r \vee s), (r \rightarrow \neg s), (r \rightarrow p), (p \rightarrow s)\}$ que debe ser SATISFACIBLE**
- Este conjunto en su forma clausal, es: $\phi = \{\{p, q\}; \{r, s\}; \{\neg r, \neg s\}; \{\neg r, p\}; \{\neg p, s\}\}$
- Aplicamos el algoritmo DPLL, porque es la técnica que, sobre formas clausales, nos permite encontrar un MODELO de manera eficiente.

- **¿Qué hubiésemos obtenido si, tras la propagación del literal puro, propagásemos el literal (p)?:**
- $\phi(q, p) = \{\{r, s\}; \{\neg r, \neg s\}; \{s\}\}$
- Si propagamos el literal **(s)** de la cláusula unitaria:
- $\phi(q, p, s) = \{\{\neg r\}\}$

Ejercicio 12: Razonamiento lógico, consistencia de premisas (y VIII)

- **El inspector Clouseau considera que los autores del robo de la Pantera Rosa se encuentran entre María, Rosa, Luís y Carlos. Plantea que: "o fue María o fue Rosa"; "o fue Luís o fue Carlos"; si fue Luís, no fue Carlos"; si fue Luís, lo fue María"; "si fue María, lo fue Carlos". Suponiendo que Clouseau no se equivoca: ¿quiénes deberían ser culpables e inocentes del robo?**
- **El conjunto de oraciones, es: {(p ∨ q), (r ∨ s), (r → ¬s), (r → p), (p → s)} que debe ser SATISFACIBLE**
- Este conjunto en su forma clausal, es: **ϕ = {{p, q}; {r, s}; {¬r, ¬s}; {¬r, p}; {¬p, s}}**
- Aplicamos el algoritmo DPLL, porque es la técnica que, sobre formas clausales, nos permite encontrar un MODELO de manera eficiente.

- **Y, finalmente, si propagamos el literal (¬r):**
- **ϕ(q, p, s, ¬r) = {∅}**
- **Esto nos indica que la asignación de valores de verdad a las proposiciones atómicas, tal y como aparecen reflejadas en el conjunto de las propagaciones, nos aporta otra solución al problema planteado. En este caso, podemos concluir que María es culpable**

La interpretación que hace al conjunto de oraciones SATISFACIBLE, es:

SI fue María (CULPABLE): **v(p) = V**

SI fue Rosa (CULPABLE): **v(q) = V**

NO fue Luís (INOCENTE): **v(r) = F**

SI fue Carlos (CULPABLE): **v(s) = V**