Algunos temas de Cálculo

para el Grado en Ingeniería Informática

José Rodríguez Ruiz

Departamento de Ingeniería y Tecnología de Computadores

Universidad de Murcia

v1.0 (28 de enero de 2017)

Contenidos

Introducción

Estas notas están destinadas a ayudar a los alumnos de la asignatura "CÁLCULO" del *Grado en Ingeniería Informática* de la Universidad de Murcia. Tienen su origen en nuestra experiencia docente en la asignatura, ininterrumpida desde su implantación en el curso 2009/10 hasta el pasado curso 2015/16.

El material incluye explicaciones teóricas (con ejemplos y algunas demostraciones) y ejercicios resueltos (más de cien).

Según el plan de estudios de la titulación, los contenidos de la asignatura son: sucesiones de números reales, resolución numérica de ecuaciones, series numéricas, aproximación local de funciones, aproximación global de funciones y cálculo integral. En estas notas hemos optado por agrupar los contenidos en tres grandes bloques o temas (sucesiones, integrales y series), divididos a su vez en distintas lecciones.

Capítulo 1

Sucesiones

«OBJETIVOS»

- Distinguir entre sucesiones definidas explícita o recursivamente.
- Utilizar la inducción para el estudio de sucesiones.
- Manejar las propiedades básicas de los límites.
- Estudiar la convergencia de sucesiones recursivas sencillas.
- Determinar el orden de magnitud de una sucesión.
- Resolver ecuaciones numéricamente (método de bisección).

Este primer capítulo se dedica a las SUCESIONES de números reales. Las sucesiones son un instrumento muy valioso en Matemáticas y se utilizan de manera natural en Informática. Por ejemplo, al analizar teóricamente la eficiencia de un algoritmo, se le asocia una sucesión cuyo término general t_n es el tiempo de ejecución de dicho algoritmo cuando el conjunto de datos de entrada es de tamaño n. Es importante determinar la velocidad de crecimiento (orden de magnitud) de t_n cuando n crece. Este orden de magnitud se suele utilizar para comparar algoritmos que resuelven un mismo problema.

En la *Lección 1.1* explicamos cómo las sucesiones se pueden definir explícita o recursivamente y presentamos su clasificación en términos de acotación y monotonía. También recordamos el método de demostración por inducción y lo utilizamos para estudiar sucesiones definidas recursivamente.

En la *Lección 1.2* introducimos las sucesiones convergentes y estudiamos propiedades básicas de los límites, como la "regla del sandwich". Presentamos el teorema de convergencia de sucesiones que son simultáneamente acotadas y monótonas, utilizándolo para analizar la convergencia de sucesiones definidas recursivamente.

En la *Lección 1.3* estudiamos las sucesiones divergentes a infinito. Para la resolución de indeterminaciones nos apoyamos en la regla de L'Hôpital para el cálculo de límites de funciones de una variable real. Nos centramos en la comparación asintótica de sucesiones divergentes a infinito. Establecemos una "jerarquía de infinitos" y explicamos cómo determinar el orden de magnitud de una sucesión.

Finalmente, la *Lección 1.4* está dedicada a presentar el método de bisección para la resolución aproximada de ecuaciones. Antes damos algunas herramientas para localizar y separar raíces de ecuaciones, como el Teorema de Bolzano.

1.1. Propiedades básicas

Contenidos

- Sucesiones definidas explícita o recursivamente.
- Sucesiones acotadas y sucesiones monótonas.
- Método de inducción.

Teoría

Comenzamos la lección recordando el concepto de sucesión de números reales:

Definición 1.1.1. *Una* **sucesión** *de números reales es una aplicación* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$$1 \mapsto a_1 \qquad 2 \mapsto a_2 \qquad \dots \qquad n \mapsto a_n \qquad \dots$$

Se representa mediante los símbolos: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ *ó simplemente* a_n. *Los números reales* $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ *se llaman* **términos** *de la sucesión.*

Por ejemplo, algunas sucesiones sencillas son:

- $[2,4,6,8,\dots]$ (números naturales pares), $a_n = 2n$.
- $[-1,-1,-1,\dots]$ (una sucesión constante), $a_n = -1$.
- $[1,0,1,0,1,0,1,0,\dots]$, $a_n = 1$ si n es impar, $a_n = 0$ si n es par.

Una sucesión se puede definir de dos formas:

1. EXPLÍCITAMENTE. Dando la expresión explícita de su *término general*. Por ejemplo:
    - $[2,4,6,8,\dots]$ tiene término general $a_n = 2n$.
    - $[1,0,1,0,\dots]$ tiene término general $a_n = \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$.
2. POR RECURRENCIA. Expresando *cada término en función de los anteriores* y dando los términos iniciales necesarios. Por ejemplo:
    - $[1!,2!,3!,4!,\dots]$ se define como

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = n a_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

- $[1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots]$ (sucesión de Fibonacci) se define como

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{para todo } n \geq 3. \end{cases}$$

A continuación vamos a *clasificar* las sucesiones en función de dos criterios: acotación y monotonía. Comenzamos con las sucesiones *acotadas*:

Definición 1.1.2. *Se dice que una sucesión a_n está:*

(i) **acotada inferiormente** *si existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$k \leq a_n \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N};$$

(ii) **acotada superiormente** *si existe una constante $K \in \mathbb{R}$ tal que*

$$a_n \leq K \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N};$$

(iii) **acotada** *si está acotada inferior y superiormente, es decir, si existe una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|a_n| \leq M \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Veamos algunos ejemplos de sucesiones acotadas y no acotadas:

- *Acotada*: $\left[-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right]$, con término general $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
- *No acotada superiormente*: $[1,3,5,7,9,\ldots]$, con término general $a_n = 2n-1$.
- *No acotada inferiormente*: $[-1,-2,-4,-8,-16,\ldots]$, $a_n = -2^{n-1}$.
- *No acotada inferiormente ni superiormente*: $[-1,2,-3,4,-5,6,\ldots]$, con término general $a_n = (-1)^n n$.

A veces, cuando queremos estudiar propiedades (por ejemplo, la acotación) de una sucesión que está definida por recurrencia, conveniente utilizar el *método de inducción*, que recordamos[1] a continuación:

[1]Es un contenido de la asignatura del primer cuatrimestre *Fundamentos Lógicos de la Informática*.

DEMOSTRACIONES POR INDUCCIÓN

¿Cómo se demuestra que una propiedad $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$?

- PASO 1.- Se demuestra que: "la propiedad es cierta cuando $n = 1$".
- PASO 2.- Se demuestra que: "SI se supone que la propiedad es cierta para n, ENTONCES también es cierta para $n + 1$".

Veamos un par de ejemplos ilustrando el método:

Ejemplo 1.1.3. *Demostramos por inducción que la sucesión a_n definida por*

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2} + 1 \quad \textit{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

cumple $1 \leq a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, a_n está acotada.

Demostración.

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 3$ por definición, así que evidentemente $1 \leq a_1 \leq 3$.

PASO 2.- Vamos a demostrar que: *"Si $1 \leq a_n \leq 3$ entonces $1 \leq a_{n+1} \leq 3$"*.

En efecto, tenemos:

$$1 \leq a_n \leq 3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{2} \leq \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} + 1 \leq \frac{a_n}{2} + 1 \leq \frac{3}{2} + 1.$$

Como $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 1$, deducimos que $\dfrac{3}{2} \leq a_{n+1} \leq \dfrac{5}{2}$. Teniendo en cuenta que $1 \leq \frac{3}{2}$ y $\frac{5}{2} \leq 3$, concluimos que $1 \leq a_{n+1} \leq 3$, como se quería demostrar en el PASO 2. Esto completa la demostración por inducción. $\square$

Ejemplo 1.1.4. *Demostramos por inducción que la sucesión a_n definida por*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad \textit{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

cumple $a_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, a_n no está acotada superiormente.

Demostración.

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 1$ por definición, así que evidentemente $a_1 \geq 1$.

PASO 2.- Vamos a demostrar que: *"Si $a_n \geq n$ entonces $a_{n+1} \geq n+1$"*.

En efecto, tenemos:

$$a_n \geq n \quad \Longrightarrow \quad 2a_n \geq 2n \quad \Longrightarrow \quad 2a_n + 1 \geq 2n + 1.$$

Como $a_{n+1} = 2a_n + 1$, la última desigualdad nos dice que $a_{n+1} \geq 2n + 1$. Claramente, tenemos $2n + 1 \geq n + 1$, luego $a_{n+1} \geq n + 1$, como se quería demostrar en el PASO 2. Esto completa la demostración por inducción. □

Finalizamos la lección introduciendo el concepto de sucesión *monótona*:

Definición 1.1.5. *Se dice que una sucesión a_n es:*

(i) **monótona creciente** *si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*
(ii) **monótona estrictamente creciente** *si $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*
(iii) **monótona decreciente** *si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*
(iv) **monótona estrictamente decreciente** *si $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Por ejemplo:

- $[1,3,5,7,9,\ldots]$ es monótona estrictamente creciente;
- $\left[1,1,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\ldots\right]$ es monótona decreciente pero no estrictamente;
- $\left[-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right]$ no es monótona creciente ni decreciente.

Observación 1.1.6.

(i) Toda sucesión monótona creciente está acotada inferiormente.
(ii) Toda sucesión monótona decreciente está acotada superiormente.

El método de inducción también puede ser útil a la hora de estudiar la monotonía de sucesiones definidas por recurrencia. Veámoslo con las sucesiones de los Ejemplos 1.1.3 y 1.1.4.

Ejemplo 1.1.7. *Demostramos por inducción que la sucesión a_n definida por*

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2} + 1 \quad \textit{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

cumple $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, a_n es monótona estrictamente decreciente.

Demostración.

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 3$ y $a_2 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$, luego $a_1 > a_2$.

PASO 2.- Vamos a demostrar que: *"Si $a_n > a_{n+1}$ entonces $a_{n+1} > a_{n+2}$"*.

En efecto, tenemos:

$$a_n > a_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_n}{2} > \frac{a_{n+1}}{2} \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 > \frac{a_{n+1}}{2} + 1 = a_{n+2}.$$

Luego $a_{n+1} > a_{n+2}$, como se quería demostrar en el PASO 2. Esto completa la prueba por inducción. $\square$

Ejemplo 1.1.8. *Demostramos por inducción que la sucesión a_n definida por*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad \text{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

cumple $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, a_n es monótona estrictamente creciente.

Demostración.

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 1$ y $a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, luego $a_2 > a_1$.

PASO 2.- Vamos a demostrar que: *"Si $a_{n+1} > a_n$ entonces $a_{n+2} > a_{n+1}$"*.

En efecto, tenemos:

$$a_{n+1} > a_n \quad \Longrightarrow \quad 2a_{n+1} > 2a_n \quad \Longrightarrow \quad 2a_{n+1} + 1 > 2a_n + 1.$$

Teniendo en cuenta que $a_{n+1} = 2a_n + 1$ y $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 1$, deducimos que $a_{n+2} > a_{n+1}$. La demostración ha finalizado. $\square$

Ejercicios

Ejercicio 1.1.9. *Demuestra por inducción las siguientes igualdades:*

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(ii) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

(iii) $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, *para todo* $r \neq 1$.

SOLUCIÓN. (i) La demostración por inducción se divide en dos pasos:

PASO 1.- Para $n=1$ la igualdad es cierta evidentemente.

PASO 2.- Demostramos que:
"Si $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ *entonces* $1+2+\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$*".*

En efecto, basta observar que

$$1+2+\ldots+n+(n+1)=(1+2+\ldots+n)+(n+1)=$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

lo que completa la demostración.

(ii) El PASO 1 de la demostración es inmediato.

PASO 2.- Vamos a demostrar que: *"Si* $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ *entonces* $1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$*".*

En efecto:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=$$
$$=(1+3+5+\ldots+(2n-1))+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2,$$

como se quería demostrar.

(iii) La demostración por inducción se divide en dos pasos:

PASO 1.- Para $n=1$ la igualdad es cierta, ya que

$$\frac{r^2-1}{r-1}=\frac{(r+1)(r-1)}{r-1}=r+1.$$

PASO 2.- Vamos a demostrar que:
"Si $1+r+r^2+\ldots+r^n=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ *entonces* $1+r+r^2+\ldots+r^{n+1}=\frac{r^{n+2}-1}{r-1}$*".*

En efecto, podemos hacerlo como en los apartados anteriores:

$$1+r+r^2+\ldots+r^n+r^{n+1}=(1+r+r^2+\ldots+r^n)+r^{n+1}=$$
$$=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}+r^{n+1}=\frac{(r^{n+1}-1)+r^{n+1}(r-1)}{r-1}=\frac{r^{n+2}-1}{r-1},$$

lo que finaliza la demostración. $\square$

Ejercicio 1.1.10. *Encuentra una fórmula explícita para el término general de las siguientes sucesiones:*

$$[2,5,8,11,14,\ldots]\quad\left[1,-\frac{1}{3},\frac{1}{5},-\frac{1}{7},\frac{1}{9},\ldots\right]\quad\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\ldots\right]\quad\left[1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},5,\frac{1}{6},\ldots\right]$$

SOLUCIÓN. Los términos generales son respectivamente:

$$a_n = 2+3(n-1), \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}, \quad c_n = \frac{2^n-1}{2^n}, \quad d_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

□

Ejercicio 1.1.11. *Determina si las siguientes sucesiones son acotadas o monótonas:*

$$a_n = \frac{2}{n} \quad b_n = \frac{n+(-1)^n}{n} \quad c_n = \sqrt{n^2+1} \quad d_n = \operatorname{sen}\Big(\frac{1}{n+1}\Big) \quad e_n = \ln\Big(\frac{n+2}{n}\Big)$$

SOLUCIÓN. Claramente, la sucesión a_n es monótona estrictamente decreciente.

Los primeros términos de b_n son $\big[0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\big]$, luego b_n no es monótona.

La sucesión c_n es monótona estrictamente creciente, ya que n^2+1 lo es y la función $f(x) = \sqrt{x}$ es estrictamente creciente en $[0,\infty)$.

La sucesión d_n es monótona estrictamente decreciente, ya que $\frac{1}{n+1}$ lo es y la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es estrictamente creciente en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

Finalmente, la sucesión e_n es monótona estrictamente decreciente, ya que $\frac{n+2}{n} = 1+\frac{2}{n}$ lo es y la función $f(x) = \ln x$ es estrictamente creciente en $(0,\infty)$. □

Ejercicio 1.1.12. *Se considera la sucesión a_n del Ejemplo 1.1.4, definida por:*

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1}+1 \quad \textit{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

Demuestra por inducción que $a_n = 2^n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN. La demostración por inducción se divide en dos pasos:

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 1$ por definición, así que $a_1 = 2^1 - 1$.

PASO 2.- Vamos a demostrar que: *"Si $a_n = 2^n - 1$ entonces $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$"*.

En efecto, por la fórmula de recurrencia tenemos $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Utilizando la igualdad $a_n = 2^n - 1$, deducimos que

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1,$$

como se quería demostrar en el PASO 2. Esto completa la prueba por inducción. □

Ejercicio 1.1.13. *La sucesión a_n está definida por recurrencia:*

$$\begin{cases} a_1 = 0, \quad a_2 = \dfrac{1}{3}, \\ a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{9} \qquad \text{para todo } n \geq 3. \end{cases}$$

(i) Evalúa unos cuantos términos de la sucesión y conjetura cuál es la expresión explícita de su término general.

(ii) Demuestra por inducción que dicha expresión coincide con a_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN. (i) Evaluando los primeros términos, tenemos:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = -\frac{a_1}{9} = 0, \quad a_4 = -\frac{a_2}{9} = -\frac{1}{27} = \frac{(-1)^1}{3^3}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{9} = 0, \quad a_6 = -\frac{a_4}{9} = -\frac{(-1)^1}{3^3 \cdot 9} = \frac{(-1)^2}{3^5}, \quad \cdots$$

Parece entonces que los términos de la sucesión cumplen:

$$a_{2n-1} = 0 \qquad \text{y} \qquad a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{3^{2n-1}} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Vamos a demostrar por inducción que, efectivamente, la conjetura del apartado (i) es cierta. Distinguimos dos casos: términos impares y términos pares.

Términos impares: Vamos a demostrar por inducción que $a_{2n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1º) Para $n = 1$ se cumple $a_1 = 0$, por definición.

2º) Demostramos que: *"Si $a_{2n-1} = 0$ entonces $a_{2(n+1)-1} = a_{2n+1} = 0$".*

En efecto, basta utilizar la fórmula de recurrencia:

$$a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{9} = -\frac{0}{9} = 0.$$

Términos pares: Vamos a demostrar por inducción que $a_{2n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{2n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1º) Para $n = 1$ tenemos, por definición, que $a_2 = \dfrac{1}{3} = \dfrac{(-1)^0}{3^1}$.

2º) Demostramos que: *"Si $a_{2n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{2n-1}}$ entonces $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \dfrac{(-1)^n}{3^{2n+1}}$".*

De nuevo, basta utilizar la fórmula de recurrencia:

$$a_{2n+2} = -\frac{a_{2n}}{9} = -\frac{(-1)^{n-1}}{3^{2n-1} \cdot 3^2} = \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}}.$$

Por tanto, la conjetura que hemos hecho en el apartado (i) es cierta. □

Ejercicio 1.1.14. *La sucesión a_n está definida por recurrencia:*

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n} \quad \textit{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

(i) Evalúa unos cuantos términos de la sucesión y conjetura cuál es la expresión explícita de su término general.

(ii) Demuestra por inducción que dicha expresión coincide con a_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN. (i) Los primeros términos de la sucesión son: $\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots\right]$, así que conjeturamos que el término general es $\dfrac{1}{n!}$.

(ii) Vamos a demostrar por inducción que $a_n = \dfrac{1}{n!}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 1$ por definición, así que $a_1 = \frac{1}{1!}$.

PASO 2.- Vamos a demostrar que: *"Si $a_n = \dfrac{1}{n!}$ entonces $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$"*.

En efecto, por la fórmula de recurrencia tenemos $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$. Utilizando la igualdad $a_n = \dfrac{1}{n!}$, deducimos que

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n!}}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!},$$

como se quería demostrar en el PASO 2. Esto completa la prueba por inducción. □

Ejercicio 1.1.15. *Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por:*

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n-1}} \quad \textit{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

(i) Demuestra por inducción que $1 \leq a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Demuestra que es monótona estrictamente decreciente.

SOLUCIÓN. (i) La demostración por inducción se divide en dos pasos:

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 2$ por definición, así que $1 \leq a_1 \leq 2$.

PASO 2.- Vamos a demostrar que: *"Si* $1 \leq a_n \leq 2$ *entonces* $1 \leq a_{n+1} \leq 2$*"*.

En efecto, tenemos:

$$1 \leq a_n \leq 2 \implies 1 \geq \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{2} \implies -1 \leq -\frac{1}{a_n} \leq -\frac{1}{2} \implies 2-1 \leq 2-\frac{1}{a_n} \leq 2-\frac{1}{2}.$$

Como $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$, deducimos que $1 \leq a_{n+1} \leq \dfrac{3}{2}$, luego $1 \leq a_{n+1} \leq 2$, como se quería demostrar en el PASO 2. Esto completa la demostración por inducción.

(ii) Vamos a demostrar por inducción que $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 2$ y $a_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, así que $a_2 < a_1$.

PASO 2.- Demostramos que: *"Si* $a_{n+1} < a_n$ *entonces* $a_{n+2} < a_{n+1}$*"*.

En efecto:

$$a_{n+1} < a_n \overset{a_{n+1}>0}{\implies} \frac{1}{a_{n+1}} > \frac{1}{a_n} \implies -\frac{1}{a_{n+1}} < -\frac{1}{a_n} \implies 2-\frac{1}{a_{n+1}} < 2-\frac{1}{a_n}.$$

Pero $a_{n+2} = 2 - \dfrac{1}{a_{n+1}}$ y $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$, luego $a_{n+2} < a_{n+1}$, finalizando el PASO 2.

Hemos demostrado así que $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión es monótona estrictamente decreciente. □

Ejercicio 1.1.16. *Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por:*

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_n = \dfrac{1}{3 - a_{n-1}} & \textit{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

(i) Demuestra por inducción que $0 \leq a_n \leq 2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Demuestra que es monótona estrictamente decreciente.

SOLUCIÓN. (i) La demostración por inducción se divide en dos etapas:

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 2$ por definición, así que $0 \leq a_1 \leq 2$.

PASO 2.- Vamos a demostrar que: *"Si* $0 \leq a_n \leq 2$ *entonces* $0 \leq a_{n+1} \leq 2$*"*.

En efecto, tenemos:

$$0 \leq a_n \leq 2 \implies 0 \geq -a_n \geq -2 \implies 3 \geq 3 - a_n \geq 1 \implies \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3-a_n} \leq 1.$$

Como $a_{n+1} = \dfrac{1}{3-a_n}$, deducimos que $\dfrac{1}{3} \leq a_{n+1} \leq 1$, luego $0 \leq a_{n+1} \leq 2$, como se quería demostrar en el PASO 2. Esto completa la demostración por inducción.

(ii) Vamos a demostrar por inducción que $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 2$ y $a_2 = \frac{1}{3-a_1} = 1$, así que $a_2 < a_1$.

PASO 2.- Demostramos que: *"Si $a_{n+1} < a_n$ entonces $a_{n+2} < a_{n+1}$"*.

En efecto:

$$a_{n+1} < a_n \implies -a_{n+1} > -a_n \implies 3 - a_{n+1} > 3 - a_n \overset{3-a_n>0}{\implies} \frac{1}{3-a_{n+1}} < \frac{1}{3-a_n}.$$

Como $a_{n+2} = \dfrac{1}{3-a_{n+1}}$ y $a_{n+1} = \dfrac{1}{3-a_n}$, deducimos que $a_{n+2} < a_{n+1}$, lo que finaliza el PASO 2. Hemos demostrado así que $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, a_n es monótona estrictamente decreciente. □

Ejercicio 1.1.17. *Se considera la sucesión definida recurrentemente por:*

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2}, \\ a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \quad \textit{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

Demuestra que es monótona estrictamente creciente y acotada.

SOLUCIÓN. Comenzamos demostrando que es *monótona estrictamente creciente*. Vamos a probar por inducción que $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_2 = \sqrt{2a_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$, así que $a_1 < a_2$.

PASO 2.- Demostramos que: *"Si $a_n < a_{n+1}$ entonces $a_{n+1} < a_{n+2}$"*.

En efecto:

$$a_n < a_{n+1} \implies 2a_n < 2a_{n+1} \implies a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{2a_{n+1}} = a_{n+2},$$

ya que la función $\sqrt{x}$ es estrictamente creciente. Esto finaliza el PASO 2 y queda demostrado que la sucesión a_n es monótona estrictamente creciente.

Ahora vamos a demostrar que a_n está acotada. Como es monótona creciente, está acotada inferiormente. Para ver que está acotada superiormente, comenzamos evaluando algunos términos:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1.414213562373095\\
a_2 &= 1.681792830507429\\
a_3 &= 1.834008086409342\\
a_4 &= 1.915206561397147\\
a_5 &= 1.9571441241754\\
a_6 &= 1.978456026387951\\
a_7 &= 1.989198846967266\\
a_8 &= 1.99459211217094\\
a_9 &= 1.99729422578194\\
a_{10} &= 1.998646655005302
\end{aligned}$$

En vista de los resultados, podemos conjeturar que $a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos a demostrarlo por inducción.

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $a_1 = \sqrt{2} < 2$, claramente.

PASO 2.- Demostramos que: *"Si $a_n < 2$ entonces $a_{n+1} < 2$"*.

En efecto: multiplicando por 2 la desigualdad $a_n < 2$ obtenemos $2a_n < 4$ y, como la función $\sqrt{x}$ es estrictamente creciente, concluimos

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{4} = 2,$$

como se quería demostrar en el PASO 2. Esto prueba que la sucesión está acotada. □

Ejercicio 1.1.18. *Se considera la sucesión a_n definida por $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ y*

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad \textit{para todo } n \geq 3.$$

(i) Demuestra por inducción que $a_n - a_{n-1} = \dfrac{(-1)^n}{2^{n-2}}$ para todo $n \geq 2$.

(ii) Utiliza el apartado (i) para demostrar que la sucesión a_{2n-1} es monótona estrictamente creciente.

(iii) Utiliza el apartado (i) para demostrar que la sucesión a_{2n} es monótona estrictamente decreciente.

SOLUCIÓN. (i) La demostración se hace en dos pasos:

PASO 1.- Para $n=2$ tenemos $a_2=1$ y $a_1=0$ por definición, así que

$$a_2-a_1=1=\frac{(-1)^2}{2^0}.$$

PASO 2.- Demostramos que: *"Si* $a_n-a_{n-1}=\dfrac{(-1)^n}{2^{n-2}}$ *entonces* $a_{n+1}-a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$*".*
En efecto:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}-a_n=\frac{a_n+a_{n-1}-2a_n}{2}=\frac{-a_n+a_{n-1}}{2}=$$
$$=-\frac{1}{2}\big(a_n-a_{n-1}\big)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}.$$

Esto finaliza el PASO 2 y completa la demostración por inducción.

(ii) Vamos a demostrar que $a_{2n-1}<a_{2n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Para ello observamos que

$$a_{2n+1}-a_{2n-1}=\frac{a_{2n}+a_{2n-1}}{2}-a_{2n-1}=\frac{a_{2n}+a_{2n-1}-2a_{2n-1}}{2}=\frac{a_{2n}-a_{2n-1}}{2}=$$
$$\overset{(i)}{=}\frac{(-1)^{2n}}{2^{2n-2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{2n-1}}>0,$$

luego $a_{2n+1}>a_{2n-1}$, como se quería demostrar.

(iii) Ahora vamos a demostrar que $a_{2n}>a_{2n+2}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. En efecto:

$$a_{2n+2}-a_{2n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n}}{2}-a_{2n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n}-2a_{2n}}{2}=\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{2}=$$
$$\overset{(i)}{=}\frac{(-1)^{2n+1}}{2^{2n-1}}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2^{2n}}<0,$$

luego $a_{2n+2}<a_{2n}$. □

1.2. Límites

Contenidos

- Convergencia y límite de sucesiones.
- Regla del Sandwich.
- Monotonía, acotación y convergencia.

Teoría

En esta lección estudiamos el concepto de *límite* de una sucesión:

Definición 1.2.1. *Decimos que $L \in \mathbb{R}$ es el* **límite** *de la sucesión a_n si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \textit{para todo } n \geq n_\varepsilon.$$

En tal caso, decimos que la sucesión **converge** *(o es* **convergente***) a L, y escribimos*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Observación 1.2.2. *La condición $|a_n - L| < \varepsilon$ es equivalente a*

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

Observación 1.2.3. *Sea a_n una sucesión. Entonces*

$$a_n \textit{ converge a } 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |a_n| \textit{ converge a } 0.$$

Las sucesiones convergentes más sencillas son:

Ejemplo 1.2.4.

- *Toda sucesión constante, digamos $a_n = c$, es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.*
- *La sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ es convergente, con límite 0.*

La convergencia y el límite de una sucesión no dependen de sus primeros términos, sólo de lo que ocurre a partir de un término. Más concretamente:

Observación 1.2.5.

(i) *Sea a_n una sucesión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *a_n es convergente;*
2. *para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $a_{n+k} = [a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]$ es convergente;*
3. *existe $k \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $a_{n+k} = [a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]$ es convergente.*

En tal caso, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(ii) *Sean a_n y b_n dos sucesiones. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = b_n$ para todo $n > n_0$, entonces a_n converge si y sólo si b_n converge. En tal caso, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.*

La siguiente proposición explica lo que ocurre cuando realizamos operaciones aritméticas con sucesiones.

Proposición 1.2.6. *Sean a_n y b_n dos sucesiones convergentes, con límites a y b, respectivamente. Entonces:*

(i) *$a_n + b_n$ converge a $a + b$;*

(ii) *αa_n converge a αa para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$;*

(iii) *$a_n b_n$ converge a ab;*

(iv) *si $b \neq 0$, entonces $b_n \neq 0$ a partir de cierto término y $\frac{a_n}{b_n}$ converge a $\frac{a}{b}$.*

Veamos ahora qué ocurre con los límites y las desigualdades:

Proposición 1.2.7. *Sean a_n y b_n dos sucesiones convergentes.*

(i) *Si $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.*

(ii) **(Regla del Sandwich)**

Si una sucesión c_n cumple $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, entonces c_n es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ejemplo 1.2.8. *Las sucesiones*

$$a_n = 0, \quad c_n = \frac{n!}{n^n} \quad y \quad b_n = \frac{1}{n}$$

cumplen $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, por la Regla del Sandwich, $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Demostración. Es evidente que $a_n = 0 \leq c_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Por otro lado, tenemos $c_1 = b_1$. Veamos ahora que, dado cualquier $n \geq 2$, se cumple $c_n < b_n$. En efecto, podemos escribir:

$$c_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}{\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{n \text{ factores}}} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Como $0 < \dfrac{k}{n} \leq 1$ para todo $k = n, n-1, \ldots, 2$, deducimos que

$$\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{n} \leq 1$$

y multiplicando por $\dfrac{1}{n} > 0$ esta desigualdad obtenemos

$$c_n = \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} = b_n,$$

como se quería demostrar. □

El siguiente resultado es útil para detectar sucesiones convergentes a 0.

Proposición 1.2.9. *Si la sucesión a_n está acotada y la sucesión b_n converge a 0, entonces la sucesión $a_n b_n$ converge a 0.*

Ejemplo 1.2.10. La sucesión $a_n = \operatorname{sen} n$ está acotada, porque

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Como la sucesión $b_n = \dfrac{1}{n}$ converge a 0, deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Vamos a establecer las relaciones que existen entre las nociones de *acotación* y *monotonía* estudiadas en la lección anterior y la noción de *convergencia*. Es sencillo demostrar que toda sucesión convergente está acotada. Sin embargo, hay sucesiones acotadas que no son convergentes, como $[1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots]$. En cambio, sí son convergentes las sucesiones que son a la vez acotadas y monótonas:

Teorema 1.2.11.

(i) *Toda sucesión convergente está acotada.*

(ii) *Toda sucesión monótona y acotada es convergente.*

Ejemplo 1.2.12 (Sucesiones geométricas convergentes)**.** *Llamamos* **sucesión geométrica** *a una sucesión de la forma $a_n = r^n$, donde $r \in \mathbb{R}$ es un número fijo. Se cumple:*

(i) *Si $r = 1$, entonces r^n es constante, $r^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Si $0 < r < 1$, entonces r^n es monótona estrictamente decreciente.*

(iii) *Si $|r| < 1$, entonces r^n es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.*

Demostración.

(i) Es inmediato.

(ii) Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ tenemos $r^{n+1} = r^n \cdot r < r^n$, ya que $r^n > 0$ y $r < 1$.

(iii) El caso $r = 0$ es evidente (en este caso, la sucesión r^n es constante, igual a 0). Suponemos ahora que $r \neq 0$. Por el apartado (i) aplicado a la sucesión $b_n = |r|^n$, sabemos que b_n es monótona estrictamente decreciente. En particular, $0 < b_n \leq b_1 = |r|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego b_n está acotada. Por el Teorema 1.2.11, b_n es convergente. Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Como se cumple

$$b_{n+1} = |r|^{n+1} = |r| \cdot |r|^n = |r| b_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

y la sucesión b_{n+1} también tiene límite L (véase la Observación 1.2.5), deducimos

$$L = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} |r| b_n = |r| \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = |r| L.$$

Es decir, $L = |r|L$. Esta ecuación equivale a

$$0 = |r|L - L = (|r| - 1)L,$$

de donde se deduce que $L = 0$ (porque $|r| \neq 1$).

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} |r|^n = 0$. Como $|r^n| = |r|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que la sucesión r^n también es convergente a 0 (véase la Observación 1.2.3) □

Ejemplo 1.2.13. *En los Ejemplos 1.1.3 y 1.1.7 vimos que la sucesión a_n definida por*

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2} + 1 \quad \textit{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

es monótona estrictamente decreciente y acotada. Por tanto, es convergente. Vamos a demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Demostración. Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Como se cumple

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

y la sucesión a_{n+1} también tiene límite L (véase la Observación 1.2.5), deducimos

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} a_n + 1 = \frac{L}{2} + 1,$$

luego $L = \frac{L}{2} + 1$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos $L = 2$. □

Es frecuente construir sucesiones evaluando *funciones* sobre los términos de otra sucesión. Para estudiar la convergencia de sucesiones definidas de esta forma, tenemos:

Proposición 1.2.14. *Sean:*

- a_n *una sucesión convergente a* $L \in \mathbb{R}$*,*
- f *una función continua definida en un intervalo abierto* I*, con* $L \in I$*.*

Entonces la sucesión $f(a_n)$ *(que está definida a partir de cierto término) converge a* $f(L)$*.*

Ejemplo 1.2.15. *Consideramos la sucesión* $a_n = \frac{n-1}{2n}$*, que es convergente a* $\frac{1}{2}$*, y la función* $f(x) = \ln x$*, que está definida y es continua en el intervalo* $(0,\infty)$*. La sucesión*

$$f(a_n) = \ln\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

está definida sólo para $n \geq 2$ *(ya que* $a_1 = 0$*). Por la Proposición 1.2.14, tenemos*

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n-1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2,$$

véase la Figura 1.1.

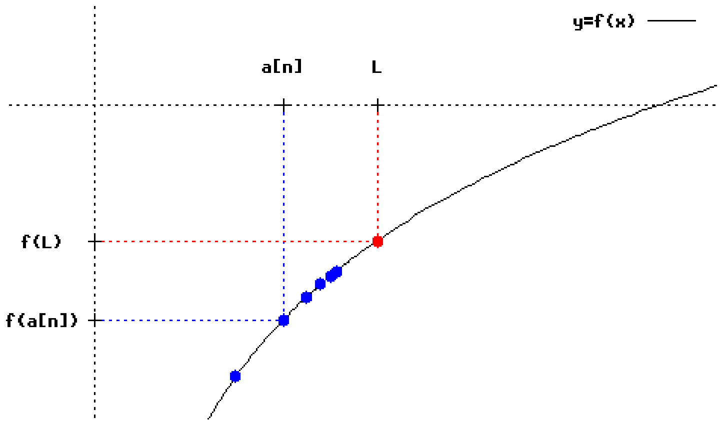


Figura 1.1: Gráficas de la función $f(x) = \ln x$ y la sucesión $a(n) = \dfrac{n-1}{2n}$.

Ejercicios

Ejercicio 1.2.16. *Para cada una de las siguientes condiciones, encuentra la expresión del término general de una sucesión que la cumpla, o bien justifica que tal sucesión no puede existir:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ *y* $a_n < 3$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ *y* $a_n > \frac{2}{3}$ *a partir de un término.*

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ *y* $a_n < \frac{5}{4}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *y* a_n *no es monótona.*

SOLUCIÓN. (i) La sucesión $a_n = 3 - \dfrac{1}{n}$ cumple los requisitos.

(ii) Cualquier sucesión a_n convergente a 1 satisface que $a_n > \frac{2}{3}$ a partir de un término.

(iii) No existe ninguna sucesión en tales condiciones, ya que si una sucesión convergente a_n cumple $a_n < \frac{5}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces su límite satisface $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \frac{5}{4}$ (véase la Proposición 1.2.7).

(iv) La sucesión $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ cumple los requisitos. $\square$

Ejercicio 1.2.17. *Sean*

$$P(x) = A_p x^p + A_{p-1}x^{p-1} + \ldots + A_1 x + A_0$$
$$Q(x) = B_q x^q + B_{q-1}x^{q-1} + \ldots + B_1 x + B_0$$

dos polinomios de grados p y q, respectivamente, con $q \geq 1$. Se consideran las sucesiones $a_n = P(n)$ y $b_n = Q(n)$. Demuestra que:

(i) $b_n \neq 0$ a partir de cierto término;

(ii) $\dfrac{a_n}{b_n}$ converge a 0 si $p < q$;

(iii) $\dfrac{a_n}{b_n}$ converge a $\dfrac{A_p}{B_p}$ si $p = q$.

SOLUCIÓN. (i) Existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n = Q(n) \neq 0$ para todo $n > n_0$, porque $Q(x)$ tiene sólo un número finito de raíces (¡es un polinomio no nulo!).

(ii) Fijamos $n > n_0$ y en el cociente

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{A_p n^p + A_{p-1}n^{p-1} + \ldots + A_1 n + A_0}{B_q n^q + B_{q-1}n^{q-1} + \ldots + B_1 n + B_0}$$

dividimos numerador y denominador por n^q, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{A_p \frac{n^p}{n^q} + A_{p-1}\frac{n^{p-1}}{n^q} + \ldots + A_1 \frac{n}{n^q} + A_0 \frac{1}{n^q}}{B_q \frac{n^q}{n^q} + B_{q-1}\frac{n^{q-1}}{n^q} + \ldots + B_1 \frac{n}{n^q} + B_0 \frac{1}{n^q}} = \\ &= \frac{A_p \frac{1}{n^{q-p}} + A_{p-1}\frac{1}{n^{q-p+1}} + \ldots + A_1 \frac{1}{n^{q-1}} + A_0 \frac{1}{n^q}}{B_q + B_{q-1}\frac{1}{n} + \ldots + B_1 \frac{1}{n^{q-1}} + B_0 \frac{1}{n^q}}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por otro lado, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^k = 0,$$

así que la sucesión del numerador de (1.1) converge a 0 (porque $q > p$), mientras que la sucesión del denominador de (1.1) converge a $B_q \neq 0$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{0}{B_q} = 0.$$

(iii) Se razona como en el apartado (ii), observando que en este caso ($q = p$) la sucesión que aparece en el numerador de (1.1) converge a A_p. □

Ejercicio 1.2.18. *Justifica por qué las siguientes sucesiones son convergentes y calcula su límite:*

$$\left(-\frac{7}{9}\right)^n \qquad -\frac{3n}{n+1} \qquad \frac{n-1}{n^2+1} \qquad \frac{(n^2+6)\,\mathrm{sen}(n!)}{n^4} \qquad \frac{\cos n}{2^n}$$

SOLUCIÓN. La sucesión $\left(-\frac{7}{9}\right)^n$ converge a 0, ya que es una sucesión geométrica y $\left|-\frac{7}{9}\right| = \frac{7}{9} < 1$ (Proposición 1.2.12). Por otro lado, según el Ejercicio 1.2.17, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{3n}{n+1} = -3 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+1} = 0.$$

La sucesión $\mathrm{sen}(n!)$ está acotada, ya que $-1 \leq \mathrm{sen}\, x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como además $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+6}{n^4} = 0$ (Ejercicio 1.2.17), podemos aplicar la Proposición 1.2.9 para deducir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+6)\,\mathrm{sen}(n!)}{n^4} = 0.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ y que la sucesión $\cos n$ está acotada (porque $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$), obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{2^n} = 0$$

(aquí aplicamos de nuevo la Proposición 1.2.9). □

Ejercicio 1.2.19. *Demuestra que la sucesión* $\frac{\ln(n!)}{n \ln n}$ *está acotada y deduce que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n(\ln n)^2} = 0.$$

SOLUCIÓN. Fijamos $n \geq 2$ arbitrario. Observamos que

$$\ln(n!) = \ln(1 \cdot 2 \cdots n) = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \underbrace{\ln 2 + \ldots + \ln n}_{n-1 \text{ sumandos}} \leq (n-1)\ln n,$$

ya que $\ln k \leq \ln n$ para todo $k = 2, \ldots, n$ (la función $\ln x$ es creciente). Por tanto:

$$0 < \frac{\ln n!}{n \ln n} \leq \frac{(n-1)\ln n}{n \ln n} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Esto demuestra que la sucesión $\dfrac{\ln(n!)}{n\ln n}$ está acotada.

Por tanto, como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$, podemos aplicar la Proposición 1.2.9 para deducir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n(\ln n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n\ln n} \cdot \frac{1}{\ln n} = 0,$$

como se quería demostrar. □

Ejercicio 1.2.20. *Utiliza la Regla del Sandwich para calcular el límite de las sucesiones cuyos términos generales son:*

$$(i)\ \sqrt[n]{3^n+7^n} \qquad (ii)\ \frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}$$

SOLUCIÓN. (i) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$7 = \sqrt[n]{7^n} < \sqrt[n]{3^n+7^n} < \sqrt[n]{3^n+7^n} = \sqrt[n]{2\cdot 7^n} = \sqrt[n]{2}\cdot 7$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 2^0 = 1$, resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\cdot 7 = 7$.

Finalmente, como la sucesión $\sqrt[n]{3^n+7^n}$ tiene sus términos comprendidos entre 7 y $\sqrt[n]{2}\cdot 7$ y estas dos sucesiones convergen a 7, aplicando la Regla del Sandwich (Proposición 1.2.7) se deduce que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+7^n} = 7.$$

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se observa que en la suma

$$\underbrace{\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}}_{n \text{ sumandos}}$$

el menor sumando es $\dfrac{1}{n^2+n}$, mientras que el mayor sumando es $\dfrac{1}{n^2+1}$, luego

$$\frac{n}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n} < \frac{n}{n^2+1}.$$

Por otro lado, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

(véase el Ejercicio 1.2.17). Por tanto, la sucesión dada tiene todos sus términos comprendidos entre los de dos sucesiones convergentes a 0. Aplicando la Regla del Sandwich (Proposición 1.2.7) se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}\right]=0.$$

$\square$

Ejercicio 1.2.21. *La sucesión a_n definida recurrentemente por*

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_n = 2-\dfrac{1}{a_{n-1}} \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

es monótona estrictamente decreciente y acotada (entre 1 *y* 2*), véase el Ejercicio 1.1.15. Por tanto, a_n es convergente. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?*

SOLUCIÓN. Llamamos $L=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Como $1\leq a_n\leq 2$ para todo $n\in\mathbb{N}$, tenemos las desigualdades $1\leq L\leq 2$ (véase la Proposición 1.2.7). Ahora, como $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y la sucesión a_{n+1} también tiene límite L, se sigue que

$$L=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{a_n}\right)=2-\frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}=2-\frac{1}{L}.$$

Observamos que

$$L=2-\frac{1}{L} \iff L(L-2)=-1 \iff L^2-2L+1=0 \iff L=1.$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$. $\square$

Ejercicio 1.2.22. *La sucesión a_n definida recurrentemente por*

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \dfrac{1}{3-a_{n-1}} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

es monótona estrictamente decreciente y acotada (entre 0 *y* 2*), véase el Ejercicio 1.1.16. Por tanto, a_n es convergente. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?*

SOLUCIÓN. Llamamos $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Como $0 \le a_n \le 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos las desigualdades $0 \le L \le 2$ (Proposición 1.2.7). Teniendo en cuenta que $a_{n+1} = \dfrac{1}{3-a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que la sucesión a_{n+1} también tiene límite L, deducimos

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-a_n} = \frac{1}{3-\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{3-L},$$

luego $L = \dfrac{1}{3-L}$. Equivalentemente:

$$L = \frac{1}{3-L} \iff L(3-L) = 1 \iff -L^2 + 3L - 1 = 0.$$

Es decir, L es solución de la ecuación de segundo grado $x^2 - 3x + 1 = 0$, cuyas dos soluciones son $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. ¿Con cuál de ellas coincide L? Por un lado, ya hemos visto que $L \le 2$. Por otro lado,

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} > \frac{3+1}{2} = 2,$$

así que $L = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. □

Ejercicio 1.2.23. *La sucesión a_n definida recurrentemente por*

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \quad \textit{para todo } n \ge 2 \end{cases}$$

es monótona estrictamente creciente y acotada, véase el Ejercicio 1.1.17. Por tanto, a_n es convergente. ¿Cuánto vale $\lim_{n\to\infty} a_n$?

SOLUCIÓN. Llamamos $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Teniendo en cuenta la fórmula de recurrencia y que la sucesión a_{n+1} también tiene límite L, deducimos

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} \overset{(*)}{=} \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2L},$$

donde la igualdad $(*)$ se obtiene aplicando la Proposición 1.2.14 a la función continua $\sqrt{2x}$. Por tanto, $L = \sqrt{2L}$. Elevando al cuadrado esta igualdad, nos queda $L^2 = 2L$, o equivalentemente: $L(L-2) = 0$. Como $a_n \ge \sqrt{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (porque a_n es monótona creciente y $a_1 = \sqrt{2}$), tenemos $L \ge \sqrt{2}$ (Proposición 1.2.7) y, por tanto, $L = 2$. □

Ejercicio 1.2.24. *Se considera la sucesión b_n definida recurrentemente por:*

$$\begin{cases} b_1 = 1, \\ b_n = \dfrac{1}{n2^{b_{n-1}}} & \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

(i) Demuestra que $2^{b_n} > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Demuestra que b_n es convergente a 0.

SOLUCIÓN. (i) Por las propiedades de las funciones exponenciales, sabemos que

$$2^x > 1 \iff x > 0.$$

Por tanto, basta demostrar que $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y esto último se puede hacer inmediatamente por inducción (¡compruébalo!).

(ii) Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Se cumple $2^{b_n} > 1$ (visto en el apartado (i)), luego $\frac{1}{2^{b_n}} < 1$. Multiplicando esta última desigualdad por $\frac{1}{n} > 0$, obtenemos $b_{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{b_n}} < \frac{1}{n}$. Por tanto:

$$0 < b_{n+1} < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, la Regla del Sandwich (Proposición 1.2.7) garantiza que la sucesión $[b_2, b_3, \ldots]$ es convergente a 0. Así que b_n también es convergente a 0. □

Ejercicio 1.2.25 (Sucesiones contractivas)**.** *Se dice que una sucesión a_n es* **contractiva** *si existe una constante $0 \leq K < 1$ tal que*

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq K|a_{n+1} - a_n| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se puede demostrar que **toda sucesión contractiva es convergente**. *Por ejemplo, son contractivas todas las sucesiones a_n definidas recurrentemente por*

$$a_n = f(a_{n-1})$$

donde $f : [c,d] \to [c,d]$ es una función continua en el intervalo $[c,d]$, derivable en (c,d) y tal que existe una constante $0 \leq K < 1$ cumpliendo $|f'(x)| \leq K$ para todo $x \in (c,d)$.

Demuestra que las sucesiones siguientes son contractivas:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = \cos(a_{n-1}) & \text{para todo } n \geq 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = 2 + \dfrac{b_{n-1}}{3b_{n-1}+1} & \text{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN. (i) La sucesión está definida recurrentemente por la fórmula $a_n = f(a_{n-1})$, siendo $f(x) = \cos x$. Tenemos que $f(x) \in [0,1]$ para todo $x \in [0,1]$ y

$$|f'(x)| = |-\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x < \operatorname{sen} 1 \quad \text{para todo } x \in (0,1).$$

Por tanto, eligiendo $K = \operatorname{sen} 1$, se cumple $0 < K < 1$ y $|f'(x)| < K$ para todo $x \in (0,1)$. Luego la sucesión a_n es contractiva.

(ii) La sucesión está definida recurrentemente por la fórmula $b_n = f(b_{n-1})$, siendo $f(x) = 2 + \dfrac{x}{3x+1}$. Su derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{(3x+1)^2} > 0$ para todo $x \neq -\frac{1}{3}$, así que f es estrictamente creciente en el intervalo $(-\frac{1}{3}, \infty)$. Por tanto:

$$\frac{16}{7} = f(2) \leq f(x) \leq f(3) = \frac{23}{10} \quad \text{para todo } 2 \leq x \leq 3,$$

así que $f(x) \in [2,3]$ para todo $x \in [2,3]$. Además:

$$|f'(x)| = \frac{1}{(3x+1)^2} < \frac{1}{(3\cdot 2+1)^2} = \frac{1}{49} < 1 \quad \text{para todo } x \in (2,3).$$

Por tanto, b_n es contractiva. □

Ejercicio 1.2.26. *Se considera la sucesión a_n definida por $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ y*

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad \textit{para todo } n \geq 3$$

(i) Demuestra que a_n es contractiva (utiliza el apartado (i) del Ejercicio 1.1.18).
(ii) Demuestra por inducción que $a_n = 1 - \dfrac{a_{n-1}}{2}$ para todo $n \geq 2$.
(iii) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

SOLUCIÓN. (i) Según vimos en el Ejercicio 1.1.18, se cumple la igualdad

$$a_n - a_{n-1} = \frac{(-1)^n}{2^{n-2}} \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Por tanto:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot |a_{n+1} - a_n| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

así que la sucesión a_n es contractiva (podemos tomar $K = \frac{1}{2}$).

(ii) La demostración se divide en dos pasos:

PASO 1.- Para $n = 2$ tenemos claramente $a_2 = 1 = 1 - \frac{a_1}{2}$.

PASO 2.- Vamos a demostrar que: *"Si $a_n = 1 - \frac{a_{n-1}}{2}$ entonces $a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{2}$"*.

En efecto, aplicando primero la fórmula de recurrencia y utilizando a continuación la igualdad $a_n = 1 - \frac{a_{n-1}}{2}$ (dos veces, señaladas con (*)), tenemos

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \overset{(*)}{=} \frac{\left(1 - \frac{a_{n-1}}{2}\right) + a_{n-1}}{2} = \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{2}}{2} \overset{(*)}{=} \frac{1 + (1 - a_n)}{2} = 1 - \frac{a_n}{2},$$

como se quería demostrar en el PASO 2. Esto completa la prueba por inducción.

(iii) Llamamos $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Como $a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (según hemos visto en el apartado (ii)) y la sucesión a_{n+1} también tiene límite L, tenemos

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{a_n}{2}\right) = 1 - \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{2} = 1 - \frac{L}{2}.$$

De la igualdad $L = 1 - \frac{L}{2}$ se obtiene inmediatamente que $L = \frac{2}{3}$. $\square$

1.3. Sucesiones divergentes

Contenidos

- Sucesiones divergentes.
- Jerarquía de infinitos.
- Órdenes de magnitud.

Teoría

Esta lección se dedica a analizar y comparar sucesiones *con límite infinito*, según su orden de magnitud, que informalmente podemos definir como *velocidad* de crecimiento. Por ejemplo, el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

(véase el Ejemplo 1.3.7) puede interpretarse diciendo que "la sucesión $\ln n$ se acerca a ∞ más lentamente que la sucesión n".

Definición 1.3.1. *Decimos que una sucesión a_n es:*

(i) **divergente** *si no es convergente;*

(ii) **divergente a** ∞ *si para todo $K \in \mathbb{R}$ existe un $n_K \in \mathbb{N}$ tal que*

$$a_n > K \quad \textit{para todo } n \geq n_K;$$

en tal caso, escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$;

(iii) **divergente a** $-\infty$ *si para todo $K \in \mathbb{R}$ existe un $n_K \in \mathbb{N}$ tal que*

$$a_n < K \quad \textit{para todo } n \geq n_K;$$

en tal caso, escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Veamos algunos ejemplos sencillos de sucesiones divergentes:

- $a_n = n$ es divergente a ∞.
- $a_n = -3n$ es divergente a $-\infty$.
- $a_n = (-1)^n$ es divergente (pero no es divergente a ∞ ni a $-\infty$).

Observación 1.3.2. *Sea a_n una sucesión tal que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

El siguiente ejemplo completa el estudio de las sucesiones geométricas iniciado en el Ejemplo 1.2.12.

Ejemplo 1.3.3 (Sucesiones geométricas divergentes)**.** *Sea $r \in \mathbb{R}$. Se cumple:*

(i) Si $r > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$.
(ii) Si $r \leq -1$, entonces r^n es divergente (pero no es divergente a ∞ ni a $-\infty$).

Demostración.

(i) La sucesión $\dfrac{1}{r^n} = \left(\dfrac{1}{r}\right)^n$ converge a 0 porque $0 < \dfrac{1}{r} < 1$ (Ejemplo 1.2.12). Por tanto, la sucesión r^n diverge a ∞ (véase la Observación 1.3.2).

(ii) Para ver que r^n no es convergente basta demostrar por inducción que

$$\begin{cases} r^n \geq 1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ r^n \leq -1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \tag{1.2}$$

PASO 1.- Para $n = 1$ tenemos $r^1 = r \leq -1$ por hipótesis.

PASO 2.- Vamos a demostrar dos cosas:

(a) *"Si $r^n \geq 1$ entonces $r^{n+1} \leq -1$"*. En efecto:

$$r^n \geq 1 \quad \overset{-r\geq 1}{\Longrightarrow} \quad (-r)\cdot r^n = -r^{n+1} \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad r^{n+1} \leq -1.$$

(b) *"Si $r^n \leq -1$ entonces $r^{n+1} \geq 1$"*. En efecto:

$$r^n \leq -1 \quad \Longrightarrow \quad -r^n \geq 1 \quad \overset{-r\geq 1}{\Longrightarrow} \quad (-r)\cdot(-r^n) = r^{n+1} \geq 1.$$

Esto completa la demostración por inducción de (1.2). □

En la lección anterior hemos visto que toda sucesión monótona y acotada es convergente (Teorema 1.2.11). Por otra parte, las sucesiones monótonas y no acotadas son divergentes a ∞ ó $-\infty$, como destacamos a continuación.

Proposición 1.3.4.

(i) Sea a_n una sucesión monótona creciente. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad a_n \text{ no está acotada.}$$

(ii) *Sea b_n una sucesión monótona decreciente. Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad b_n \text{ no está acotada.}$$

La siguiente proposición permite analizar la convergencia de sucesiones obtenidas evaluando funciones en los números naturales.

Proposición 1.3.5. *Sea f una función definida en un intervalo del tipo (c,∞) tal que existe el límite $\lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$. Entonces la sucesión $f(n)$ (que está definida a partir de cierto término) cumple:*

(i) *Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, entonces $f(n)$ converge a L.*

(ii) *Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, entonces $f(n)$ diverge a ∞.*

(iii) *Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, entonces $f(n)$ diverge a $-\infty$.*

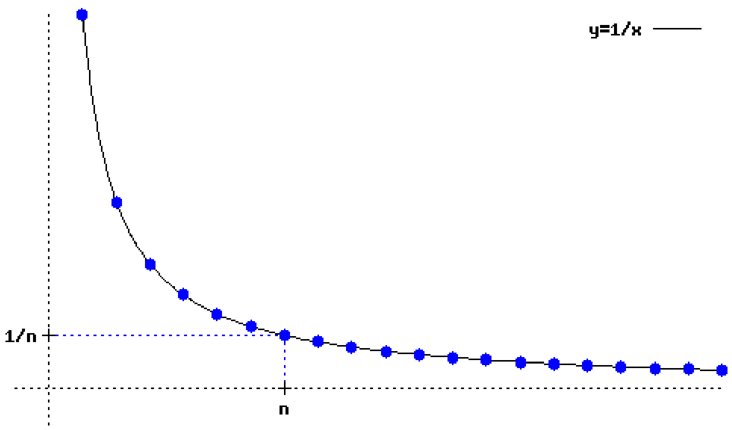


Figura 1.2: Gráficas de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y la sucesión $f(n) = \frac{1}{n}$.

Sean a_n y b_n dos sucesiones, siendo al menos alguna de ellas divergente a ∞ ó $-\infty$, o bien siendo ambas convergentes a 0. Si realizamos ciertas operaciones con ambas sucesiones (cociente, diferencia, etc.) y queremos estudiar la convergencia de la nueva sucesión, las reglas de la aritmética de límites finitos (Proposición 1.2.6) dejan de ser válidas y podemos encontrar *indeterminaciones*, como explicamos a continuación.

INDETERMINACIONES

- $\boxed{\infty - \infty}$ Surge al estudiar $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$.
  EJEMPLO: $a_n = n$ y $b_n = \ln n$.
- $\boxed{0 \cdot \infty}$ Surge al estudiar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$.
  EJEMPLO: $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = \ln n$.
- $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$ Surge al estudiar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$.
  EJEMPLO: $a_n = n$ y $b_n = \ln n$.
- $\boxed{\dfrac{0}{0}}$ Surge al estudiar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
  EJEMPLO: $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = \frac{1}{\ln n}$.
- $\boxed{1^\infty}$ Surge al estudiar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.
  EJEMPLO: $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ y $b_n = n$.
- $\boxed{0^0}$ Surge al estudiar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
  EJEMPLO: $a_n = b_n = \frac{1}{n}$.
- $\boxed{\infty^0}$ Surge al estudiar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
  EJEMPLO: $a_n = n$ y $b_n = \frac{1}{n}$.

El siguiente resultado, combinado con la Proposición 1.3.5, es muy útil para calcular límites de sucesiones *resolviendo indeterminaciones*.

Teorema 1.3.6 (Regla de L'Hôpital)**.** *Sean f y g dos funciones derivables definidas en un intervalo del tipo (c,∞), con $g'(x) \neq 0$ para todo $x > c$, tales que*

$$\textit{o bien } \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \qquad \textit{o bien } \lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \textit{ y } \lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty.$$

Si existe el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, entonces también existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Veamos un ejemplo donde se puede aplicar la Regla de L'Hôpital:

Ejemplo 1.3.7. *Se cumple* $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Demostración. Según la Proposición 1.3.5, basta demostrar que $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Esto lo vamos a hacer aplicando la Regla de L'Hôpital a las funciones

$$f(x) = \ln x \qquad \text{y} \qquad g(x) = x,$$

que cumplen $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Derivando, tenemos $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g'(x) = 1$, luego

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

y la Regla de L'Hôpital asegura entonces que $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. $\square$

Finalizamos la sección resolviendo algunas indeterminaciones con ayuda del límite calculado en el Ejemplo 1.3.7.

Ejemplo 1.3.8. *Se cumple:*

$$\lim_{n\to\infty} (n - \ln n) = \infty \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Demostración.

(i) Llamamos $a_n = n - \ln n$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n - \ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 1.$$

En particular, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_n}{n} > \frac{1}{2}$ para todo $n > n_0$. Equivalentemente:

$$a_n > \frac{n}{2} \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Como la sucesión $\frac{n}{2}$ es divergente a ∞, la desigualdad anterior garantiza que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(ii) Llamamos $b_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$ y definimos

$$c_n = \ln(b_n).$$

Por las propiedades de los logaritmos, tenemos $c_n = \frac{\ln n}{n}$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Y como la función e^x es continua, deducimos

$$\lim_{n\to\infty} e^{c_n} = e^0 = 1$$

(véase la Proposición 1.2.14). Esto completa la prueba, ya que $b_n = e^{\ln(b_n)} = e^{c_n}$. $\square$

En la segunda parte de la lección nos centramos en la comparación de sucesiones divergentes a ∞.

Definición 1.3.9. *Una sucesión a_n es* **mucho menor** *que otra sucesión b_n si se cumple:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

En tal caso, escribimos $a_n \ll b_n$.

Observación 1.3.10. *Si $a_n \ll b_n$ y $b_n \ll c_n$, entonces $a_n \ll c_n$. Es decir, "$\ll$" es una relación transitiva.*

El teorema siguiente resume las relaciones "$\ll$" que se dan entre las principales sucesiones divergentes a ∞. Como consecuencia, por ejemplo, tenemos:

$$\ln n \ll n^{1/2} = \sqrt{n} \qquad n^2 \ll n^5 \qquad n^{1000} \ll 2^n \qquad 2^n \ll 3^n \qquad 10^n \ll n!$$

Teorema 1.3.11 (Jerarquía de Infinitos)**.** *Para todo $0 < c < d$ y todo $1 < r < s$ se cumple:*

$$\ln n \ll n^c \ll n^d \ll r^n \ll s^n \ll n! \ll n^n$$

Demostración.

$\boxed{\ln n \ll n^c}$ Vamos a calcular el límite de funciones

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^c}$$

utilizando la Regla de L'Hôpital (Teorema 1.3.6). Derivando y tomando límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{cx^{c-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{cx^c} = \frac{1}{c} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^c} = \frac{1}{c} \cdot 0 = 0,$$

luego $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^c} = 0$. En virtud de la Proposición 1.3.5, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0$.

$\boxed{n^c \ll n^d}$ En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^c}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{d-c}} = 0$$

porque $d - c > 0$.

$\boxed{n^d \ll r^n}$ En primer lugar, observamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^d}{r^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{r^{n/d}}\right)^d. \tag{1.3}$$

Vamos a calcular el límite de funciones

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{r^{x/d}}$$

utilizando la Regla de L'Hôpital (Teorema 1.3.6):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{r^{x/d}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{\ln r}{d} r^{x/d}} = 0.$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{r^{n/d}} = 0$ (aplicamos la Proposición 1.3.5). Finalmente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^d}{r^n} \overset{(1.3)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{r^{n/d}}\right)^d = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{r^{n/d}}\right)^d = 0^d = 0,$$

ya que la función x^d es continua (aplicamos la Proposición 1.2.14).

$\boxed{r^n \ll s^n}$ En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{s^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^n = 0$$

porque $0 < \frac{r}{s} < 1$ (véase el Ejemplo 1.2.12).

$\boxed{s^n \ll n!}$ Veamos en primer lugar que la sucesión $a_n = \frac{s^n}{n!}$ es convergente:

- Tenemos
$$a_{n+1} = \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{s \cdot s^n}{(n+1)\cdot n!} = \frac{s}{n+1} a_n < a_n$$
para todo $n \in \mathbb{N}$ que cumpla $n > s-1$ (equivalentemente, $\frac{s}{n+1} < 1$), ya que $a_n > 0$. Por tanto, a_n es monótona estrictamente decreciente a partir de un término.
- Como $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión a_n está acotada.

Deducimos (por el Teorema 1.2.11) que a_n es convergente a cierto $L \in \mathbb{R}$. Además:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{s}{n+1} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{s}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \cdot L = 0.$$

Así que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, como se quería demostrar.

$\boxed{n! \ll n^n}$ Esta relación ya se comprobó en el Ejemplo 1.2.8.

La demostración del Teorema 1.3.11 ha finalizado. $\square$

Dadas dos sucesiones divergentes a infinito, puede ocurrir que lo hagan “a la misma velocidad”. En este sentido, damos la siguiente definición.

Definición 1.3.12. *Una sucesión a_n es* **del mismo orden** *que otra sucesión b_n si se cumple:*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = L \in \mathbb{R}, \quad \text{con } L \neq 0.$$

En tal caso, escribimos $a_n \sim b_n$.

Observación 1.3.13. *Sean a_n y b_n dos sucesiones tales que existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}$. Como la función $|x|$ es continua, podemos aplicar la Proposición 1.2.14 para deducir*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\right|.$$

Por tanto:

$$a_n \not\ll b_n \iff a_n \sim b_n.$$

Definición 1.3.14. *Se llama* **orden de magnitud** *de una sucesión a otra sucesión del mismo orden “cuya expresión sea lo más sencilla posible”.*

Veamos algunos ejemplos sencillos ilustrando estas definiciones.

Ejemplo 1.3.15.

(i) $n^2+5n-7 \sim n^2$ *porque*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n-7}{n^2} = 1 \neq 0.$$

Luego el orden de magnitud de n^2+5n-7 es n^2.

(ii) $10\ln n + n \sim n$ *porque*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10\ln n + n}{n} = 10\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}+1 = 10\cdot 0+1 = 1 \neq 0.$$

Luego el orden de magnitud de $10\ln n + n$ es n.

Observación 1.3.16. *La relación "$\sim$" es simétrica y transitiva, es decir:*

(i) la condición $a_n \sim b_n$ es equivalente a $b_n \sim a_n$;

(ii) si $a_n \sim b_n$ y $b_n \sim c_n$, entonces $a_n \sim c_n$.

En la proposición siguiente recopilamos varias propiedades de la relación "$\sim$" que serán de utilidad al estudiar el orden de magnitud de una sucesión. Estas propiedades permiten deducir el orden de magnitud de sucesiones definidas como sumas, productos o cocientes de sucesiones cuyo orden de magnitud es conocido.

Proposición 1.3.17 (Propiedades de la relación "ser del mismo orden")**.**

(o1) Si $a_n \neq 0$ a partir de cierto término, entonces

$$a_n \sim |a_n| \sim \alpha a_n \quad \textit{para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

(o2) Si $a_n \sim a'_n$ y $b_n \sim b'_n$, entonces:

$$a_n b_n \sim a'_n b'_n \qquad y \qquad \frac{a_n}{b_n} \sim \frac{a'_n}{b'_n}.$$

(o3) Si $a_n \ll b_n$, entonces $a_n + b_n \sim b_n$.

(o4) Si $a_n \sim a'_n$ y $b_n \sim b'_n$, entonces

$$a_n \ll b_n \quad \Longleftrightarrow \quad a'_n \ll b'_n.$$

Demostración.

(o1) Basta observar que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{|a_n|}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha a_n}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} |\alpha| = |\alpha| \neq 0.$$

(o2) Para el producto tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n b_n}{a'_n b'_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a'_n} \right| \cdot \left| \frac{a'_n}{b'_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a'_n} \right| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_n}{b'_n} \right| \neq 0.$$

El cociente se razona de forma similar.

(o3) Se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n + b_n}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} + 1 \right| \overset{(*)}{=} \left| \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} + 1 \right| = |0+1| = 1 \neq 0,$$

donde la igualdad marcada con $(*)$ es consecuencia de la continuidad de la función $|x|$ y la Proposición 1.2.14.

(o4) Basta observar que
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a'_n}{b'_n} \cdot \left(\frac{a_n}{a'_n} \cdot \frac{b'_n}{b_n}\right).$$
Esto completa la demostración de la Proposición 1.3.17. □

A continuación ilustramos las propiedades (o1)–(o4) con ejemplos concretos.

Ejemplo 1.3.18. *Determinamos el orden de magnitud de las siguientes sucesiones:*

$$\text{(i) } 3\ln(n^n) + 2n^2 \qquad \text{(ii) } \frac{\sqrt{n^7+1}}{4n+\sqrt{n^5}} \qquad \text{(iii) } \frac{n!+n^n}{n^3}$$

Solución.

(i) Comenzamos observando que $\ln(n^n) = n\ln n$. Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\ln(n^n)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n\ln n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\ln n}{2n} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{3}{2} \cdot 0 = 0.$$

Luego $3\ln(n^n) \ll 2n^2$. La propiedad (o3) implica que

$$3\ln(n^n) + 2n^2 \sim 2n^2,$$

mientras que la propiedad (o1) nos dice que $2n^2 \sim n^2$. Por tanto, $3\ln(n^n) + 2n^2 \sim n^2$ y el orden de magnitud de la sucesión es n^2.

(ii) Vamos a determinar el orden de magnitud del numerador y el denominador. Para el numerador, observamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^7+1}}{n^{7/2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^7}} = 1 \neq 0,$$

luego $\sqrt{n^7+1} \sim n^{7/2}$. Por otro lado, el denominador cumple

$$4n + \sqrt{n^5} \sim n^{5/2}$$

porque $4n \ll \sqrt{n^5} = n^{5/2}$ (usamos la propiedad (o3)). Ahora, para el cociente, (o2) asegura que

$$\frac{\sqrt{n^7+1}}{4n+\sqrt{n^5}} \sim \frac{n^{7/2}}{n^{5/2}} = n$$

y, por tanto, el orden de magnitud de la sucesión es n.

(iii) El numerador cumple

$$n! + n^n \sim n^n$$

por la propiedad (o3) y el hecho de que $n! \ll n^n$, según hemos visto en la Jerarquía de Infinitos (Teorema 1.3.11). Ahora, para el cociente, la propiedad (o2) asegura que

$$\frac{n! + n^n}{n^3} \sim \frac{n^n}{n^3} = n^{n-3}.$$

El orden de magnitud de la sucesión es n^{n-3}. □

Ejercicios

Ejercicio 1.3.19. *Sean*

$$P(x) = A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} + \ldots + A_1 x + A_0$$
$$Q(x) = B_q x^q + B_{q-1} x^{q-1} + \ldots + B_1 x + B_0$$

dos polinomios de grados p y q, respectivamente ($Q \neq 0$). Se consideran las sucesiones $a_n = P(n)$ y $b_n = Q(n)$. Demuestra que si $p > q$ entonces:

(i) $\frac{a_n}{b_n}$ diverge a ∞ si A_p y B_q tienen el mismo signo;

(ii) $\frac{a_n}{b_n}$ diverge a $-\infty$ si A_p y B_q tienen distinto signo.

[Véase el Ejercicio 1.2.17.]

Ejercicio 1.3.20. *Calcula los límites de las siguientes sucesiones:*

$$\text{(a)} \ \frac{\sqrt{7n^3+1}}{5n^2+n-1} \qquad \text{(b)} \ \frac{n}{2^n} \qquad \text{(c)} \ \frac{\ln n}{n^2+3n}$$

$$\text{(d)} \ \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n \qquad \text{(e)} \ \left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)^{2/n}$$

SOLUCIÓN. (a) Dividiendo el numerador y el denominador entre n^2, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{7n^3+1}}{5n^2+n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{7}{n} + \frac{1}{n^4}}}{5 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{7}{n} + \frac{1}{n^4}}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{0}}{5} = 0.$$

(b) Tanto el numerador como el denominador son sucesiones divergentes a ∞, así que tenemos una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Vamos a calcular el límite de funciones $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{2^x}$ utilizando la Regla de L'Hôpital (Teorema 1.3.6). Si derivamos y tomamos límites, se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln 2 \cdot 2^x} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{\ln 2} \cdot 0 = 0,$$

luego

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^x} = 0.$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ (aplicamos la Proposición 1.3.5).

(c) El numerador y el denominador son sucesiones divergentes a ∞, así que tenemos otra vez una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Vamos a calcular el límite de funciones $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2+3x}$ utilizando la Regla de L'Hôpital (Teorema 1.3.6). Si derivamos y tomamos límites, se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2+3x} = 0,$$

luego

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2+3x} = 0.$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2+3n} = 0$ (aplicamos la Proposición 1.3.5).

(d) Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+2} = 1$, tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Llamamos

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n$$

y definimos

$$b_n = \ln(a_n) = n \ln\left(\frac{n-1}{n+2}\right) \quad \text{para todo } n \geq 3.$$

Al intentar calcular $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n-1}{n+2}\right)$, nos encontramos ante una indeterminación $\infty \cdot 0$, que podemos transformar en una del tipo $\frac{0}{0}$ escribiendo

$$b_n = \frac{\ln\left(\frac{n-1}{n+2}\right)}{\frac{1}{n}}.$$

Ahora vamos a calcular el límite de funciones

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)}{\dfrac{1}{x}} \tag{1.4}$$

utilizando la Regla de L'Hôpital (Teorema 1.3.6). Derivando y tomando límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\dfrac{x+2-(x-1)}{(x+2)^2}}{\dfrac{x-1}{x+2}}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3}{x^2+x-2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2}{x^2+x-2} = -3,$$

luego el límite de (1.4) vale -3. Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -3$ (aplicamos la Proposición 1.3.5).

Finalmente, como $a_n = e^{b_n}$ y la función e^x es continua, podemos usar la Proposición 1.2.14 para deducir que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{\lim_{n\to\infty} b_n} = e^{-3}$.

(e) Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n+1} = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, tenemos una indeterminación del tipo ∞^0. Definimos

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)^{2/n} \qquad \text{y} \qquad b_n = \ln(a_n) = \frac{2\ln\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}\right)}{n}.$$

Vamos a calcular $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\ln\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}\right)}{n}$. Tanto el numerador como el denominador son sucesiones divergentes a ∞, así que tenemos una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para resolverla, vamos a calcular el límite de funciones

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)}{x} \tag{1.5}$$

mediante la Regla de L'Hôpital (Teorema 1.3.6). Derivando y tomando límites:

$$\lim_{x\to\infty} 2\frac{\dfrac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}}{\dfrac{x^2+1}{x+1}} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^3+x^2+x+1} = 2\cdot 0 = 0,$$

luego el límite (1.5) vale 0. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (aplicamos la Proposición 1.3.5).

Finalmente, como $a_n = e^{b_n}$ y la función e^x es continua, podemos usar la Proposición 1.2.14 para deducir que $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim_{n\to\infty} b_n} = e^0 = 1$. □

El siguiente criterio es otra herramienta útil para resolver indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$:

Criterio de Stolz. *Sean a_n y b_n dos sucesiones de números positivos tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

y supongamos que:

- *o bien $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ y b_n es monótona estrictamente decreciente,*
- *o bien $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ y b_n es monótona estrictamente creciente.*

Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Ejercicio 1.3.21. *Calcula los siguientes límites utilizando el Criterio de Stolz:*

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{r^n}$ *con $r > 1$ y $k \in \mathbb{N}$* (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$

SOLUCIÓN. (a) Tomamos $a_n = \ln n$ y $b_n = n$, que es monótona estrictamente creciente y diverge a ∞. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1-\ln n}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln 1 = 0,$$

podemos aplicar el Criterio de Stolz para concluir que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

(b) Vamos a demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{r^n} = 0$ por inducción en $k \in \mathbb{N}$.

PASO 1.- Para $k = 1$, tomamos $a_n = n$ y $b_n = r^n$, que es monótona estrictamente creciente y diverge a ∞. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{r^{n+1}-r^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(r-1)r^n} = 0,$$

podemos usar el Criterio de Stolz para deducir que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{r^n} = 0$.

PASO 2.- Demostramos que: "*Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{r^n}=0$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{k+1}}{r^n}=0$".

Definimos $a_n=n^{k+1}$ y $b_n=r^n$. Aplicando la fórmula del *binomio de Newton*:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}{r^{n+1}-r^n}=\frac{1}{(r-1)r^n}\cdot\left(\sum_{j=0}^{k+1}\frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!}n^j-n^{k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{(r-1)r^n}\cdot\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!}n^j\right)=\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!(r-1)n^{k-j}}\right)\cdot\frac{n^k}{r^n}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{r^n}=0$, tomando límites cuando $n\to\infty$ se obtiene $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=0$. El Criterio de Stolz garantiza que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{k+1}}{r^n}=0$.

(c) Tomamos $a_n=1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}$ y $b_n=n^{3/2}$ (monótona estrictamente creciente y divergente a ∞). Observamos que

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^{3/2}-n^{3/2}}=\frac{\sqrt{n+1}\cdot\left((n+1)^{3/2}+n^{3/2}\right)}{(n+1)^3-n^3}=$$

$$=\frac{\sqrt{n+1}\cdot\left((n+1)^{3/2}+n^{3/2}\right)}{3n^2+3n+1}=\frac{(n+1)^2+n^2\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{3n^2+3n+1}.$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{2}{3}$ y, por el Criterio de Stolz, concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{2}{3}$. $\square$

Ejercicio 1.3.22. *Se considera la sucesión a_n definida recurrentemente por*

$$\begin{cases} a_1=1, \\ a_n=a_{n-1}+\dfrac{1+a_{n-1}}{1+2a_{n-1}} \quad \textit{para todo } n\geq 2. \end{cases}$$

(i) Demuestra que es monótona estrictamente creciente.

(ii) Demuestra que

$$a_n>a_{n-1}+\frac{1}{2} \quad \textit{para todo } n\geq 2.$$

(iii) Demuestra por inducción que

$$a_n>1+\frac{n-1}{2} \quad \textit{para todo } n\geq 2.$$

[Idea: utiliza la desigualdad del apartado (ii).]

(iv) Deduce que a_n es divergente a ∞.

SOLUCIÓN. (i) Es sencillo demostrar por inducción que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1+a_n}{1+2a_n} > 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Luego a_n es monótona estrictamente creciente.

(ii) Para cualquier $n \geq 2$ tenemos

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1+a_{n-1}}{1+2a_{n-1}} > \frac{1}{2},$$

ya que $2(1+a_{n-1}) = 2+2a_{n-1} > 1+2a_{n-1}$. Por tanto, $a_n > a_{n-1} + \frac{1}{2}$.

(iii) Vamos a demostrar por inducción que $a_n > 1 + \frac{n-1}{2}$ para todo $n \geq 2$.

PASO 1.- Para $n = 2$ tenemos $a_2 = \frac{5}{3} > a_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

PASO 2.- Demostramos que: *“Si $a_n > 1 + \frac{n-1}{2}$ entonces $a_{n+1} > 1 + \frac{n}{2}$”.*

En efecto:

$$a_{n+1} \overset{(ii)}{>} a_n + \frac{1}{2} > 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Esto finaliza la demostración.

(iv) Como la sucesión $b_n = 1 + \frac{n-1}{2}$ es divergente a ∞ y además se cumple la desigualdad $a_n > b_n$ para todo $n \geq 2$, deducimos que a_n también es divergente a ∞. □

Ejercicio 1.3.23. *Determina el orden de magnitud de las sucesiones siguientes y ordénalas según dicho orden:*

(a) $2^n + n^2$	(b) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}(n!)+n}$	(c) $\dfrac{(n+3)!}{\ln(n^n)+n^3}$
(d) $\dfrac{\ln(n^{n-1})+\sqrt{n+1}}{n^2+n}$	(e) $n2^{3n} - 3^n$	(f) $2^n - n2^{n-2}$
(g) $\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}$	(h) $\dfrac{\sqrt{n^5+10}}{\sqrt{n^3}+10n^2}$	

SOLUCIÓN. Vamos a usar las propiedades (o1)–(o4) mencionadas en la Proposición 1.3.17.

(a) Según la Jerarquía de Infinitos (Teorema 1.3.11), tenemos $n^2 \ll 2^n$. Por la propiedad (o3), se cumple $2^n + n^2 \sim 2^n$. Orden de magnitud: 2^n.

(b) Como $\operatorname{sen}(n!)$ es una sucesión acotada y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n!)}{n} = 0$$

(véase la Proposición 1.2.9), es decir, $\operatorname{sen}(n!) \ll n$. Por la propiedad (o3), se cumple $\operatorname{sen}(n!) + n \sim n$. Finalmente, para el cociente, podemos aplicar la propiedad (o2):

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(n!) + n} \sim \frac{1}{n}.$$

Orden de magnitud: $\frac{1}{n}$.

(c) Comenzamos con el denominador. Como se cumple $\ln(n^n) = n \ln n \ll n^3$ (porque $\ln n \ll n^2$ según la Jerarquía de Infinitos, Teorema 1.3.11), la propiedad (o3) garantiza que $\ln(n^n) + n^3 \sim n^3$. Por otro lado, el numerador cumple

$$(n+3)! = (n+3)(n+2)(n+1) \cdot n! \sim n^3 \cdot n!$$

ya que $(n+3)(n+2)(n+1) \sim n^3$. Finalmente, para el cociente, la propiedad (o2) implica

$$\frac{(n+3)!}{\ln(n^n) + n^3} \sim \frac{n^3 \cdot n!}{n^3} = n!.$$

Orden de magnitud: $n!$.

(d) El denominador cumple $n^2 + n \sim n^2$. Para determinar el orden de magnitud del numerador, primero observamos que $\ln(n^{n-1}) = (n-1)\ln n \sim n \ln n$ (ya que $n - 1 \sim n$). Por otro lado, se cumple

$$\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n} \ll n \ll n \ln n \sim \ln(n^{n-1}),$$

luego $\sqrt{n+1} \ll \ln(n^{n-1})$ (por la propiedad (o4)). Aplicando (o3) tenemos

$$\ln(n^{n-1}) + \sqrt{n+1} \sim \ln(n^{n-1}).$$

Para el cociente, la propiedad (o2) garantiza que

$$\frac{\ln(n^{n-1}) + \sqrt{n+1}}{n^2 + n} \sim \frac{\ln(n^{n-1})}{n^2} \sim \frac{n \ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n}.$$

Orden de magnitud: $\dfrac{\ln n}{n}$.

(e) Podemos escribir $n2^{3n} - 3^n = n(2^3)^n - 3^n = n8^n - 3^n$. Según la Jerarquía de Infinitos (Teorema 1.3.11), tenemos $3^n \ll 8^n$, así que $-3^n \ll n8^n$. La propiedad (o3) nos dice que $n2^{3n} - 3^n \sim n8^n$. Orden de magnitud: $n8^n$.

(f) Podemos sacar factor común 2^n y escribir

$$2^n - n2^{n-2} = \left(1 - \frac{n}{4}\right) 2^n \sim n2^n,$$

ya que $1 - \dfrac{n}{4} \sim n$. Orden de magnitud: $n2^n$.

(g) Calculamos el límite de funciones

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \tag{1.6}$$

utilizando la Regla de L'Hôpital (Teorema 1.3.6). Si derivamos y tomamos límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1,$$

luego el límite (1.6) vale 1. Aplicando la Proposición 1.3.5 obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1 \neq 0,$$

y por tanto $\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)} \sim 1$. Orden de magnitud: 1.

(h) Claramente tenemos $\sqrt{n^5+10} \sim n^{5/2}$. Por otro lado, $\sqrt{n^3} = n^{3/2} \ll 10n^2$, así que $\sqrt{n^3} + 10n^2 \sim 10n^2 \sim n^2$ (usamos (o3) y (o1)). Ahora, para el cociente, (o2) implica

$$\frac{\sqrt{n^5+10}}{\sqrt{n^3}+10n^2} \sim \frac{n^{5/2}}{n^2} = n^{1/2} = \sqrt{n}.$$

Orden de magnitud: $n^{1/2}$.

ORDENACIÓN.- Es sencillo comprobar que los órdenes de magnitud obtenidos satisfacen las relaciones siguientes:

$$\frac{1}{n} \ll \frac{\ln n}{n} \ll 1 \ll n^{1/2} \ll 2^n \ll n2^n \ll n8^n \ll n!$$

Por la propiedad (o4), las sucesiones originales verifican las mismas relaciones:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(n!)+n} \ll \frac{\ln(n^{n-1})+\sqrt{n+1}}{n^2+n} \ll \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \ll \frac{\sqrt{n^5+10}}{\sqrt{n^3}+10n^2} \ll$$
$$\ll 2^n+n^2 \ll 2^n-n2^{n-2} \ll n2^{3n}-3^n \ll \frac{(n+3)!}{\ln(n^n)+n^3}$$

El ejercicio está resuelto. □

Ejercicio 1.3.24. *Determina el orden de magnitud de las sucesiones siguientes y ordénalas según dicho orden:*

(a) $\dfrac{\sqrt{n^5+n^3+1}}{2n+3\sqrt{n^3}}$ (b) $\dfrac{-n^2-n+1}{\sqrt{n^2+1}}\ln(n^2)$ (c) $\dfrac{(n-1)!+n^n}{n^2+100n+2}$

(d) $\left(n^3+3^n\right)\ln(2n^2)$ (e) $3^{n-1}+(-3)^n n$ (f) $n-\cos n$

(g) $\dfrac{\ln(n^n)}{(n+\ln n)(\ln n+1)}$ (h) $\dfrac{1}{2^n}+n^2$

SOLUCIÓN. Vamos a usar las propiedades (o1)–(o4) mencionadas en la Proposición 1.3.17.

(a) Tenemos $\sqrt{n^5+n^3+1} \sim n^{5/2}$, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5+n^3+1}}{n^{5/2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^5+n^3+1}{n^5}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^5}} = 1 \neq 0.$$

Como $2n \ll 3\sqrt{n^3} = 3n^{3/2}$, la propiedad (o3) implica $2n+3\sqrt{n^3} \sim 3\sqrt{n^3} \sim n^{3/2}$. Ahora podemos aplicar (o2) para deducir

$$\frac{\sqrt{n^5+n^3+1}}{2n+3\sqrt{n^3}} \sim \frac{n^{5/2}}{n^{3/2}} = n.$$

Orden de magnitud: n.

(b) Razonando como en el apartado (a), obtenemos:

$$\frac{-n^2-n+1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{n^2}{n} = n.$$

Por otro lado, $\ln(n^2) = 2\ln n \sim \ln n$. La propiedad (o2) garantiza ahora que

$$\frac{-n^2-n+1}{\sqrt{n^2+1}}\ln(n^2) \sim n\ln n.$$

Orden de magnitud: $n\ln n$.

(c) Por un lado, tenemos $(n-1)! \ll n!$, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Como $n! \ll n^n$ (Jerarquía de Infinitos, Teorema 1.3.11), deducimos que $(n-1)! \ll n^n$. La propiedad (o3) nos asegura entonces que $(n-1)! + n^n \sim n^n$.

Por otro lado, $n^2 + 100n + 2 \sim n^2$. Usando la propiedad (o2), deducimos que

$$\frac{(n-1)! + n^n}{n^2 + 100n + 2} \sim \frac{n^n}{n^2} = n^{n-2}.$$

Orden de magnitud: n^{n-2}.

(d) Como $n^3 \ll 3^n$ (Jerarquía de Infinitos, Teorema 1.3.11), la propiedad (o3) garantiza que $n^3 + 3^n \sim 3^n$. Por otro lado, $\ln(2n^2) = \ln 2 + 2\ln n \sim \ln n$. Ahora, podemos usar (o2) para concluir $\left(n^3 + 3^n\right)\ln(2n^2) \sim 3^n \ln n$. Orden de magnitud: $3^n \ln n$.

(e) Tenemos $3^{n-1} \ll (-3)^n n$, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}}{(-3)^n n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{3n} = 0.$$

Por la propiedad (o3), $3^{n-1} + (-3)^n n \sim (-3)^n n \sim 3^n n$. Orden de magnitud: $3^n n$.

(f) Como $\cos n$ es una sucesión acotada, tenemos $\lim_{n\to\infty} \frac{-\cos}{n} = 0$ (véase la Proposición 1.2.9), es decir, $-\cos n \ll n$. Utilizando (o3), deducimos que $n - \cos n \sim n$. Orden de magnitud: n.

(g) Como $\ln n \ll n$, tenemos $n + \ln n \sim n$ (usamos (o3)). Por otro lado, $\ln n + 1 \sim \ln n$. La propiedad (o2) nos garantiza que $(n + \ln n)(\ln n + 1) \sim n\ln n$ y

$$\frac{\ln(n^n)}{(n+\ln n)(\ln n + 1)} = \frac{n\ln n}{(n+\ln n)(\ln n + 1)} \sim \frac{n\ln n}{n\ln n} = 1.$$

Orden de magnitud: 1.

(h) Claramente, $\frac{1}{n^2} + n^2 \sim n^2$. Orden de magnitud: n^2.

ORDENACIÓN.- Es sencillo comprobar que los órdenes de magnitud obtenidos satisfacen las relaciones siguientes:

$$1 \ll n \ll n\ln n \ll n^2 \ll 3^n \ln n \ll 3^n n \ll n^{n-2}.$$

Por la propiedad (o4), las sucesiones originales verifican las mismas relaciones:

$$\frac{\ln(n^n)}{(n+\ln n)(\ln n+1)} \ll \frac{\sqrt{n^5+n^3+1}}{2n+3\sqrt{n^3}} \sim n-\cos n \ll \frac{-n^2-n+1}{\sqrt{n^2+1}}\ln(n^2) \ll$$
$$\ll \frac{1}{n^2}+n^2 \ll \left(n^3+3^n\right)\ln(2n^2) \ll 3^{n-1}+(-3)^n n \ll \frac{(n-1)!+n^n}{n^2+100n+2}.$$

□

Ejercicio 1.3.25. *Demuestra que* $(n+1)\ln(n+1)-n\ln n \sim \ln n$.

SOLUCIÓN. Tenemos

$$(n+1)\ln(n+1)-n\ln n = n\big(\ln(n+1)-\ln n\big)+\ln(n+1) =$$
$$= n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\ln(n+1) = \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]+\ln(n+1).$$

Como $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, resulta que $\lim_{n\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \ln e = 1$ y, por tanto,

$$(n+1)\ln(n+1)-n\ln n \sim \ln(n+1).$$

Por otro lado, según vimos en el apartado (g) del Ejercicio 1.3.23, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1$, luego $\ln n \sim \ln(n+1)$ y así

$$(n+1)\ln(n+1)-n\ln n \sim \ln n,$$

como se quería demostrar. □

Ejercicio 1.3.26. *Los tiempos de ejecución de dos algoritmos que resuelven el mismo problema con n datos de entrada son* 2^n *y* $3n^7+n^5+1$, *respectivamente. ¿Qué algoritmo es más rápido para valores grandes de n?*

SOLUCIÓN. Como $3n^7+n^5+1 \sim n^7 \ll 2^n$ (Jerarquía de Infinitos, Teorema 1.3.11), el algoritmo más rápido para valores grandes de n es el que tiene tiempo de ejecución $3n^7+n^5+1$. □

Ejercicio 1.3.27. *Un computador procesa n datos en* n^2 *segundos. Alternativamente, una preparación previa de los datos, que tarda* 1 *hora, permite procesar n datos en* $(n+2)\ln n$ *segundos. ¿Interesa la preparación para valores grandes de n?*

SOLUCIÓN. Un método permite procesar n datos en $a_n = n^2$ segundos, mientras que el otro lo hace en $b_n = 3600 + (n+2)\ln n$ segundos (¡sumamos el tiempo de preparación!). Como $3600 \ll (n+2)\ln n$, aplicando (o3) tenemos

$$b_n \sim (n+2)\ln n \sim n\ln n$$

(ya que $n+2 \sim n$). Por otro lado, según la Jerarquía de Infinitos (Teorema 1.3.11) se cumple $\ln n \ll n$, luego $n\ln n \ll n^2$. Aplicando (o4) deducimos que $b_n \ll a_n$. Esto indica que, para valores grandes de n, interesa hacer la preparación previa de los datos. □

Ejercicio 1.3.28. *Si depositamos un capital C en un banco, a un tipo de interés anual I, el capital resultante después de n años es:*

(a) con interés simple:

$$a_0 = C, \qquad a_n = a_{n-1} + C\cdot\frac{I}{100} \quad \textit{para todo } n \geq 1,$$

(b) con interés compuesto:

$$b_0 = C, \qquad b_n = b_{n-1}\cdot\left(1+\frac{I}{100}\right) \quad \textit{para todo } n \geq 1.$$

Deduce con cuál de las dos fórmulas el capital resultante crece más rápido, dando el orden de magnitud de cada una de ellas.

SOLUCIÓN. Se puede demostrar fácilmente por inducción (¡hazlo!) que

$$a_n = C\cdot\left(1+\frac{I}{100}\cdot n\right) \quad \text{y} \quad b_n = C\cdot\left(1+\frac{I}{100}\right)^n$$

para todo $n = 0,1,2,\ldots$, luego $a_n \sim n$ y $b_n \sim r^n$, siendo $r = 1+\frac{I}{100} > 1$. Según la Jerarquía de Infinitos (Teorema 1.3.11), tenemos $n \ll r^n$ y, por tanto, $a_n \ll b_n$ (aquí aplicamos la propiedad (o4) de la Proposición 1.3.17). Así, el capital resultante crece más rápido con la fórmula del interés compuesto. □

Ejercicio 1.3.29. *Sea a_n el número de instrucciones de un determinado algoritmo para su ejecución sobre n datos de entrada. Dicho algoritmo actúa del siguiente modo:*

- *Con un sólo dato de entrada resuelve el problema con una instrucción.*

- *Con $n \geq 2$ datos de entrada usa $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y después se ejecuta el mismo algoritmo sobre estos $n-1$ datos.*

Se pide:

(a) Define la sucesión recurrente a_n.
(b) Estudia la monotonía y acotación de a_n.
(c) Demuestra que $|a_n - 2n^2| < 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(d) Deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n^2} = 1$.
(e) Determina el orden de magnitud de a_n.

SOLUCIÓN. (a) La sucesión a_n está definida por la fórmula de recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 4n + a_{n-1} & \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

(b) Se cumple $a_{n+1} = 4n + a_n > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego a_n es monótona estrictamente creciente. En particular, $a_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, tenemos la desigualdad $a_n = 4n + a_{n-1} \geq 4n + 1$ para todo $n \geq 2$, de donde se deduce que la sucesión a_n no está acotada superiormente. Luego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(c) Vamos a realizar la demostración por inducción.

PASO 1.- Para $n = 1$ es evidente que $|a_1 - 2| < 2$.

PASO 2.- Vamos a demostrar que:

“Si $|a_n - 2n^2| < 2n$ entonces $|a_{n+1} - 2(n+1)^2| < 2(n+1)$”.

En efecto, por la fórmula de recurrencia, tenemos:

$$|a_{n+1} - 2(n+1)^2| = |4n + a_n - 2(n+1)^2| = |4n + a_n - 2n^2 - 4n - 2| =$$
$$= |a_n - 2n^2 - 2| \overset{(*)}{\leq} |a_n - 2n^2| + 2 < 2n + 2 = 2(n+1),$$

donde (*) es consecuencia de la *desigualdad triangular*.[2] Esto completa la prueba.

(d) Dividiendo entre “$2n^2$” la desigualdad del apartado (c), tenemos

$$\left| \frac{a_n}{2n^2} - 1 \right| < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

[2]Recordamos que la *desigualdad triangular* afirma que $|u+v| \leq |u| + |v|$ para todo $u, v \in \mathbb{R}$.

Esta última desigualdad y la Regla del Sandwich (Proposición 1.2.7) garantizan que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{2n^2}-1\right|=0$, es decir, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n^2}=1$.

(e) Por el apartado (d), $a_n \sim 2n^2 \sim n^2$, así que a_n tiene orden de magnitud n^2. $\square$

1.4. Resolución numérica de ecuaciones

Contenidos

- Existencia y unicidad de soluciones.
- Método de bisección.

Teoría

Algunos problemas de ciencias experimentales e ingeniería conducen a ecuaciones que no se pueden resolver de forma exacta. Por ejemplo, ecuaciones como

$$x^6 + 100x^5 - 2x^4 + 341x^3 + 6x^2 - 1 = 0, \quad \operatorname{sen} x = x, \quad e^{-x} = x, \quad \text{etc.}$$

En esta lección vamos a estudiar cómo resolverlas de forma *aproximada*. Comenzamos con una breve descripción de las etapas a seguir:

(0) *Preparación de la ecuación.*
La ecuación se reescribe en la forma $f(x) = 0$, siendo f una función adecuada.
[Las raíces de la ecuación son las abscisas de los puntos del plano donde la gráfica de f corta al eje OX.]

(1) *Localización y separación de las raíces.*
Se determina el número de raíces (*soluciones*) de la ecuación y, para cada raíz, se encuentra un intervalo donde esté dicha raíz, pero donde no esté ninguna otra raíz.
[Para ciertas ecuaciones, las etapas (0) y (1) se pueden cambiar de orden.]

(2) *Aproximación de las raíces.*
Para cada raíz c de la ecuación, se hallan valores cada vez más próximos al valor exacto de c, dando una cota del error cometido en cada aproximación. Como "algoritmo de aproximación" nosotros vamos a utilizar el *método de bisección*, que genera una sucesión de aproximaciones $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots$ convergente a c.

El siguiente teorema es muy útil para demostrar la *existencia de raíces* de ecuaciones del tipo $f(x) = 0$ en un intervalo.

Teorema 1.4.1 (Bolzano)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

En otras palabras, el Teorema de Bolzano afirma que si $f(a)$ y $f(b)$ tienen *signos opuestos* (bien $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, o bien $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$), entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo (a,b). Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1.4.2. *Se considera la ecuación* $3x^3 + 2x^2 - 2x = 1$. *Se cumple:*

- *la ecuación es equivalente a* $f(x) = 0$, *donde* $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 1$;
- $f(0) = -1 < 0$ *y* $f(1) = 2 > 0$;
- *por tanto, la ecuación tiene al menos una raíz en el intervalo* $(0,1)$.

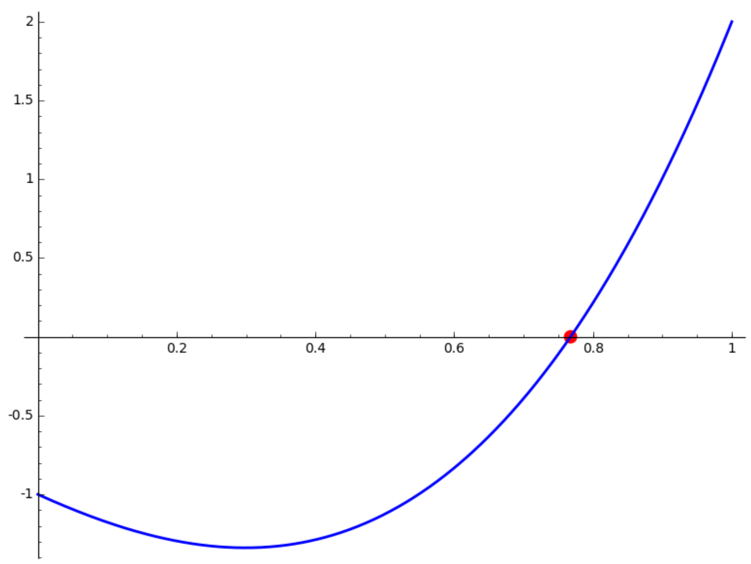


Figura 1.3: Gráfica de la función $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ y raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

Para separar las raíces de una ecuación del tipo $f(x) = 0$, necesitamos decidir si un intervalo contiene una *única* raíz. A continuación damos algunos criterios que involucran propiedades de crecimiento y convexidad de f.

Observación 1.4.3. *Si f es una función estrictamente creciente o decreciente, entonces la ecuación $f(x) = 0$ puede tener, como mucho, una única raíz.*

Proposición 1.4.4 (Unicidad de Raíces)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$ y además cumple* alguna *de las siguientes condiciones:*

(i) f es estrictamente creciente (por ejemplo, si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$),
(ii) f es estrictamente decreciente (por ejemplo, si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$),
(iii) f es convexa (por ejemplo, si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$),
(iv) f es cóncava (por ejemplo, si $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$).

Entonces existe un único $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Demostración.

Casos (i) y (ii). Se deducen de la Observación 1.4.3.

Caso (iii). Vamos a demostrarlo por *reducción al absurdo*. Supongamos que existen $c_1 < c_2$ en el intervalo (a,b) cumpliendo $f(c_1) = f(c_2) = 0$. Distinguimos dos situaciones:

- $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Entonces definimos
$$t = \frac{b - c_2}{b - c_1} \in (0,1).$$
Un sencillo cálculo muestra que $tc_1 + (1-t)b = c_2$. Como f es convexa, deducimos
$$0 = f(c_2) = f(tc_1 + (1-t)b) \leq tf(c_1) + (1-t)f(b) = (1-t)f(b),$$
es decir, $0 \leq (1-t)f(b)$, contradiciendo que $1-t > 0$ y $f(b) < 0$.
- $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Ahora definimos
$$t = \frac{c_2 - c_1}{c_2 - a} \in (0,1).$$
Entonces $ta + (1-t)c_2 = c_1$. La convexidad de f nos permite deducir
$$0 = f(c_1) = f(ta + (1-t)c_2) \leq tf(a) + (1-t)f(c_2) = tf(a),$$
es decir, $0 \leq tf(a)$, contradiciendo que $t > 0$ y $f(a) < 0$.

Finalmente, el caso (iv) se deduce inmediatamente del (iii) aplicado a la función $-f$, que es convexa si f es cóncava. □

La ecuación del Ejemplo 1.4.2 tiene una única raíz en el intervalo $(0,1)$, ya que en ese ejemplo f es convexa ($f''(x) = 18x + 4 > 0$ para todo $x \in (0,1)$), véase la Figura 1.3.

Ejemplo 1.4.5. *Localizamos y separamos las raíces de la ecuación* $e^x = \dfrac{1}{x^3}$.

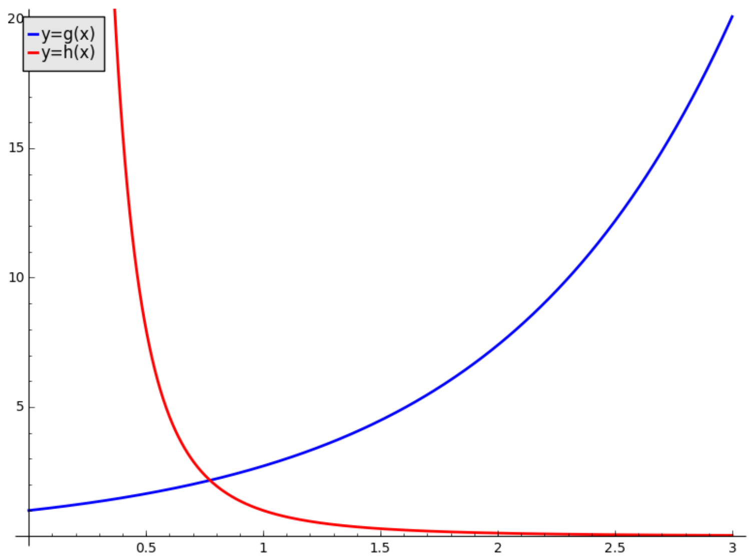


Figura 1.4: Gráfica de las funciones $g(x) = e^x$ y $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Solución. Primero observamos que

$$e^x = \frac{1}{x^3} \iff x^3 e^x = 1 \iff x^3 e^x - 1 = 0.$$

Es decir, la ecuación es equivalente a $f(x) = 0$, siendo f la función $f(x) = x^3 e^x - 1$. Calculamos su derivada:

$$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x).$$

Por tanto, $f'(x)$ sólo se anula en $x = -3$ y $x = 0$, cumpliéndose además:

- $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, -3)$,
- $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-3, 0)$,
- $f'(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$.

Luego f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -3]$ y estrictamente creciente en $[-3, \infty)$. Aplicando la Observación 1.4.3, deducimos que la ecuación $f(x) = 0$ tiene como mucho una raíz en cada uno de los intervalos $(-\infty, -3]$ y $[-3, \infty)$.

Para cualquier $x \leq 0$, tenemos $x^3 \leq 0$, mientras que $e^x > 0$ (independientemente del signo de x), luego $x^3 e^x \leq 0$ y por tanto $f(x) = x^3 e^x - 1 < 0$. Como consecuencia, la ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces en el intervalo $(-\infty, 0]$, ¡y tampoco en $(-\infty, -3]$!

Para buscar una posible raíz en el intervalo $(0,\infty)$, vamos a evaluar la función f en varios puntos, buscando un *cambio de signo*. Por ejemplo:

$$f(0) = 0^3 e^0 - 1 = -1 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1^3 e^1 - 1 = e - 1 > 0.$$

Por el Teorema de Bolzano 1.4.1, la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz en $(0,1)$.

CONCLUSIÓN: la ecuación $e^x = \dfrac{1}{x^3}$ tiene una única raíz. Además, dicha raíz está en el intervalo $(0,1)$. Véase la Figura 1.4 en la página 57. □

Ejemplo 1.4.6. *Localizamos y separamos las raíces de la ecuación* $x^2 = \cos x$.

Solución. La ecuación es equivalente a $f(x) = 0$, siendo f la función $f(x) = x^2 - \cos x$. Observamos que f es una función *par*:

$$f(-x) = (-x)^2 - \cos(-x) = x^2 - \cos x = f(x).$$

Por tanto, un número $c \in \mathbb{R}$ es raíz de la ecuación si y sólo si lo es $-c$. Así, bastará encontrar las raíces positivas de la ecuación (si las hay).

Para buscar una posible raíz en el intervalo $(0,\infty)$, vamos a evaluar la función f en varios puntos, buscando un *cambio de signo*. Por ejemplo:

$$f(0) = 0^2 - \cos 0 = -1 < 0 \qquad \text{y} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} > 0.$$

Por el Teorema de Bolzano 1.4.1, la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz en $(0, \frac{\pi}{2})$. La derivada $f'(x) = 2x + \operatorname{sen} x$ es positiva para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ($\operatorname{sen} x > 0$ para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$). Por la Proposición 1.4.4, deducimos que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una *única* raíz en $(0, \frac{\pi}{2})$.

Por otro lado:

$$x \geq \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 > 1 \geq \cos x \quad \Longrightarrow \quad f(x) = x^2 - \cos x > 0.$$

Por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \infty)$.

CONCLUSIÓN: la ecuación $x^2 = \cos x$ sólo tiene dos raíces, c_1 y c_2. Además

$$c_1 = -c_2, \quad c_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad c_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Véase la Figura 1.5 en la página 59. □

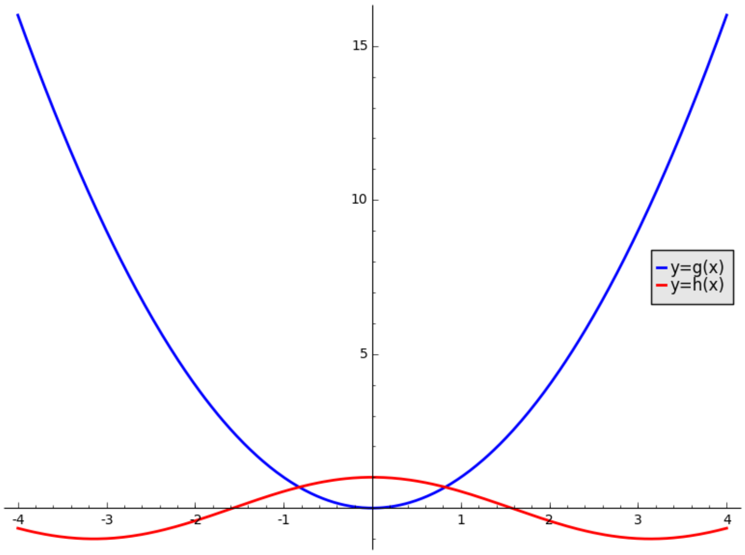


Figura 1.5: Gráfica de las funciones $g(x) = x^2$ y $h(x) = \cos x$.

A continuación vamos a explicar en qué consiste el **MÉTODO DE BISECCIÓN** para la aproximación de raíces de ecuaciones del tipo $f(x) = 0$.

Los *datos de entrada* de este algoritmo son una función f y un intervalo $[a,b]$, que deben cumplir las condiciones siguientes:

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a)f(b) < 0$,
- la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz $c \in (a,b)$.

Los *pasos* del algoritmo son:

PASO 0. Definimos $a_0 = a$ y $b_0 = b$.

Calculamos $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ (el punto medio del intervalo $[a_0,b_0]$).

Se pueden dar 3 casos:

- Si $f(c_0) = 0$ entonces $c_0 = c$ es la raíz de la ecuación. ¡PARAMOS!
- Si $f(c_0)f(a_0) < 0$ entonces definimos $a_1 = a_0$ y $b_1 = c_0$, y vamos al PASO 1.
- Si $f(c_0)f(b_0) < 0$ entonces definimos $a_1 = c_0$ y $b_1 = b_0$, y vamos al PASO 1.

PASO 1. Calculamos $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ (el punto medio del intervalo $[a_1,b_1]$).

Se pueden dar 3 casos:

- Si $f(c_1) = 0$ entonces $c_1 = c$ es la raíz de la ecuación. ¡PARAMOS!

- Si $f(c_1)f(a_1) < 0$ entonces definimos $a_2 = a_1$ y $b_2 = c_1$, y vamos al PASO 2.
- Si $f(c_1)f(b_1) < 0$ entonces definimos $a_2 = c_1$ y $b_2 = b_1$, y vamos al PASO 2.

ETC. ETC.

Mediante este algoritmo se genera una sucesión de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ y una sucesión c_n de aproximaciones de la raíz c, que cumplen:

- I_{n+1} está contenido en I_n y la longitud de I_{n+1} es la mitad de la longitud de I_n;
- c_n y c pertenecen a I_n.

Se puede demostrar fácilmente por inducción que la longitud de I_n es $\dfrac{b-a}{2^n}$.

Observación 1.4.7. *En la práctica, es necesario dar algún* **criterio de parada** *para detener el algoritmo (cuando $f(c_n) \neq 0$ en los sucesivos pasos). Por ejemplo, podemos fijar el número de pasos a realizar. En la proposición siguiente veremos que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, siempre podemos encontrar de forma efectiva un número n de pasos tal que*

$$|c - c_n| < \varepsilon.$$

En esta desigualdad:

- *$|c - c_n|$ es el error absoluto de c_n como aproximación de c;*
- *ε representa el error absoluto máximo permitido.*

Proposición 1.4.8.

(i) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las desigualdades:

$$0 \leq c - a_n \leq \frac{b-a}{2^n} \qquad 0 \leq b_n - c \leq \frac{b-a}{2^n} \qquad |c - c_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

(ii) Las sucesiones a_n, b_n y c_n convergen a c.

(iii) Para cada $\varepsilon > 0$ se cumple:

$$|c - c_n| < \varepsilon \quad \textit{para todo} \;\; n > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1.$$

Demostración.

(i) El punto c pertenece al intervalo $I_n = [a_n, b_n]$. Por tanto, la distancia de c a cualquiera de los extremos de I_n es menor o igual que la longitud de I_n. Es decir:

$$|c - a_n| = c - a_n \leq \frac{b-a}{2^n} \qquad \text{y} \qquad |c - b_n| = b_n - c \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Por otro lado, como c_n es el punto medio del intervalo I_n, la distancia entre c y c_n es menor o igual que la mitad de la longitud de I_n. Es decir:

$$|c - c_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

(ii) Como $0 \leq c - a_n \leq \dfrac{b-a}{2^n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$, la Regla del Sandwich (Proposición 1.2.7) asegura que $\lim\limits_{n\to\infty}(c - a_n) = 0$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. La demostración de que las sucesiones b_n y c_n convergen a c es análoga.

(iii) Por un lado, tenemos la desigualdad $|c - c_n| \leq \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$, y por otro lado:

$$n > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1 \iff n+1 > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \overset{(*)}{\iff} 2^{n+1} > \frac{b-a}{\varepsilon} \iff \varepsilon > \frac{b-a}{2^{n+1}},$$

ya que la función 2^x es estrictamente creciente. □

Vamos a ilustrar el método de bisección con un ejemplo concreto.

Ejemplo 1.4.9. *Aproximación de la raíz de la ecuación* $3x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$ *en el intervalo* $[0,1]$ *(véase el Ejemplo 1.4.2) mediante el método de bisección.*

Solución. Aplicamos varios pasos del método de bisección.

PASO 0. Tenemos:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \qquad & f(a_0) &= -1 < 0 \\ b_0 &= 1 \qquad & f(b_0) &= 2 > 0 \\ c_0 &= 0.5 \qquad & f(c_0) &= -1.125 < 0 \end{aligned}$$

Como $f(c_0)f(b_0) < 0$, elegimos $a_1 = c_0 = 0.5$ y $b_1 = b_0 = 1$.

PASO 1. Tenemos:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.5 \qquad & f(a_1) &= -1.125 < 0 \\ b_1 &= 1 \qquad & f(b_1) &= 2 > 0 \\ c_1 &= 0.75 \qquad & f(c_1) &= -0.109375 < 0 \end{aligned}$$

Como $f(c_1)f(b_1) < 0$, elegimos $a_2 = c_1 = 0.75$ y $b_2 = b_1 = 1$.

PASO 2. Tenemos:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0.75 & f(a_2) &= -0.109375 < 0 \\ b_2 &= 1 & f(b_2) &= 2 > 0 \\ c_2 &= 0.875 & f(c_2) &= 0.791015625 > 0 \end{aligned}$$

Como $f(c_2)f(a_2) < 0$, elegimos $a_3 = a_2 = 0.75$ y $b_3 = c_2 = 0.875$.

PASO 3. Tenemos:

$$\begin{aligned} a_3 &= 0.75 & f(a_3) &= -0.109375 < 0 \\ b_3 &= 0.875 & f(b_3) &= 0.791015625 > 0 \\ c_3 &= 0.8125 & f(c_3) &= 0.304443359375 > 0 \end{aligned}$$

Como $f(c_3)f(a_3) < 0$, elegimos $a_4 = a_3 = 0.75$ y $b_4 = c_3 = 0.8125$.

Por ejemplo, tras 10 pasos obtenemos $c_{10} = 0.76806640625$. Si llamamos c a la raíz de la ecuación, el error absoluto de c_{10} como aproximación de c verifica la acotación:

$$|c_{10} - c| \leq \frac{1-0}{2^{11}} = 4.8828125 \cdot 10^{-4},$$

según hemos visto en la Proposición 1.4.8. □

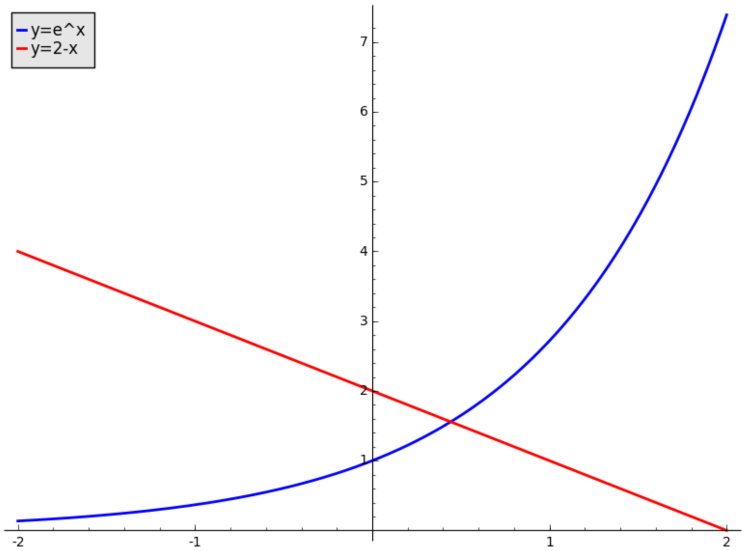
Ejercicios

Ejercicio 1.4.10. *Se considera la ecuación $e^x = 2 - x$.*

(i) Demuestra que tiene una única raíz y da un intervalo de longitud 1 *donde se encuentre dicha raíz.*

(ii) A partir de dicho intervalo, ¿cuántos pasos del método de bisección son necesarios para obtener una aproximación de la raíz con error absoluto menor que 0.04*?*

SOLUCIÓN. (i) La existencia de una única raíz se puede "razonar gráficamente". La representación gráfica de las funciones e^x y $2 - x$ en el intervalo $[-2, 2]$ es



Dentro del dibujo, las gráficas de ambas funciones se cortan en un único punto, así que la ecuación $e^x = 2 - x$ tiene una única raíz en el intervalo $(-2,2)$. Como la función e^x es estrictamente creciente y la función $2-x$ es estrictamente decreciente, fuera del intervalo $(-2,2)$ las gráficas de ambas funciones no se vuelven a cortar, es decir, la ecuación $e^x = 2 - x$ sólo tiene una raíz.

Esto también podemos demostrarlo "analíticamente". Observamos primero que la ecuación $e^x = 2 - x$ es equivalente a $f(x) = 0$, siendo f la función $f(x) = 2 - x - e^x$. Calculamos su derivada: $f'(x) = -1 - e^x$. Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, deducimos que $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego la función f es estrictamente decreciente en todo $\mathbb{R}$ y la ecuación $f(x) = 0$ tiene como mucho una raíz (Observación 1.4.3).

Veamos que, efectivamente, la ecuación tiene una raíz. Como la función f es continua y cumple

$$f(0) = 2 - 0 - e^0 = 2 - 1 = 1 > 0, \qquad f(1) = 2 - 1 - e^1 = 1 - e < 0,$$

el Teorema de Bolzano 1.4.1 garantiza que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(0,1)$ (que tiene longitud 1).

(ii) Si llamamos $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ a las sucesivas aproximaciones que proporciona el método de bisección aplicado a la función f en el intervalo $[0,1]$, y llamamos c a la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$, sabemos (véase la Proposición 1.4.8) que el error absoluto de c_n como aproximación de c cumple:

$$|c_n - c| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Tenemos que encontrar un n tal que $\frac{1}{2^{n+1}} < 0.04$. Vamos probando con $n = 0, 1, 2, \ldots$ y observamos que $n = 4$ ya la cumple ($2^{-5} = 0.03125$). Por tanto, bastan 4 pasos del método de bisección para obtener una aproximación con error absoluto menor que 0.04. $\square$

Ejercicio 1.4.11. *Demuestra que todo polinomio de grado impar tiene, al menos, una raíz.*

SOLUCIÓN. Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n impar. Sabemos que si $a_n > 0$ entonces

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} P(x) = \infty,$$

mientras que si $a_n < 0$ entonces

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} P(x) = -\infty.$$

En cualquier caso, podemos encontrar dos números reales $a < b$ tales que $P(a)P(b) < 0$. Como cualquier función polinómica es continua, el Teorema de Bolzano 1.4.1 nos dice que la ecuación $P(x) = 0$ tiene, al menos, una raíz en el intervalo (a, b). $\square$

Ejercicio 1.4.12. *Se considera la ecuación $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$.*

(i) Demuestra que tiene una única raíz y da un intervalo de longitud 2 donde se encuentre dicha raíz.

(ii) A partir de dicho intervalo, ¿cuántos pasos del método de bisección son necesarios para obtener una aproximación de la raíz con error absoluto menor que 10^{-5}?

SOLUCIÓN. (i) La ecuación es de la forma $f(x) = 0$, siendo f la función polinómica

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5.$$

Según hemos visto en el Ejercicio 1.4.11, la ecuación tiene al menos una raíz. Para localizarla, evaluamos f en varios puntos buscando un *cambio de signo*. Por ejemplo:

$$f(0) = -5 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(2) = 1 > 0.$$

Por el Teorema de Bolzano 1.4.1, la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0,2)$.

Para demostrar que sólo hay una raíz, vamos a comprobar que $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ es positiva para todo $x \in \mathbb{R}$. Efectivamente, la ecuación de *segundo grado* $f'(x) = 0$ no tiene soluciones reales, así que $f'(x)$ no cambia de signo en todo $\mathbb{R}$. Como $f'(0) = 3 > 0$, deducimos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego f es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$ y así la ecuación $f(x) = 0$ sólo tiene una raíz (Observación 1.4.3).

(ii) Si llamamos $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ a las sucesivas aproximaciones que proporciona el método de bisección aplicado a la función f en el intervalo $[0,2]$, y llamamos c a la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$, sabemos (Proposición 1.4.8) que el error absoluto de c_n como aproximación de c cumple:

$$|c_n - c| < 10^{-5} \qquad \text{para todo } \; n > \log_2\left(\frac{2}{10^{-5}}\right) - 1 \approx 16.60964047443681.$$

Así que 17 pasos del método de bisección serían suficientes para conseguir una aproximación (c_{17}) de c con error absoluto menor que 10^{-5}. $\square$

Ejercicio 1.4.13. *Demuestra que la ecuación* $\ln(x^2+1) - e^x\cos(\pi x) = 0$ *tiene infinitas raíces.*

SOLUCIÓN. Consideramos la función continua $f(x) = \ln(x^2+1) - e^x\cos(\pi x)$. Observamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$f(n) = \begin{cases} \ln(n^2+1) + e^n & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \ln(n^2+1) - e^n & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Por otro lado, afirmamos que $\ln(x^2+1) - e^x < 0$ para todo $x \geq 0$. En efecto, basta tener en cuenta que la función $g(x) = \ln(x^2+1) - e^x$ cumple $g(0) = \ln 1 - e^0 = -1$ y es estrictamente decreciente en el intervalo $[0,\infty)$, ya que

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - e^x < 1 - e^x < 0 \quad \text{para todo } x > 0$$

(la desigualdad $\frac{2x}{x^2+1} < 1$ equivale a $(x-1)^2 > 0$).

Así, resulta que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$f(n) = \begin{cases} \ln(n^2+1) + e^n > 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \ln(n^2+1) - e^n < 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Por el Teorema de Bolzano 1.4.1, la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en cada uno de los siguientes intervalos:

$$(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ \ldots$$

Por tanto, la ecuación tiene infinitas raíces. □

Ejercicio 1.4.14. *Se considera la ecuación* $x\,\mathrm{sen}\,x = 1$.

(i) Determina cuántas soluciones tiene.

(ii) Demuestra que tiene una única solución en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(iii) ¿Cuántos pasos del método de bisección son necesarios para calcular aproximadamente dicha solución con error absoluto menor que 0.01*?*

SOLUCIÓN. (i) La ecuación es equivalente a $f(x) = 0$, siendo $f(x) = x\,\mathrm{sen}\,x - 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$f\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = \begin{cases} \frac{(2n-1)\pi}{2} - 1 > 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ -\frac{(2n-1)\pi}{2} - 1 < 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Como la función f es continua, el Teorema de Bolzano 1.4.1 garantiza que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en cada uno de los siguientes intervalos:

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right),\ \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right), \ldots$$

Por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene *infinitas* soluciones.

(ii) Evaluando la función, observamos que $f(0) = -1 < 0$ y $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, luego la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Por otro lado, la derivada $f'(x) = \mathrm{sen}\,x + x\cos x$ es positiva para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, ya que

$$\mathrm{sen}\,x > 0 \quad \text{y} \quad \cos x > 0 \qquad \text{para todo } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Por tanto, f es estrictamente creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en $(0, \frac{\pi}{2})$ (véase la Observación 1.4.3).

(iii) Si llamamos $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ a las sucesivas aproximaciones que proporciona el método de bisección aplicado a la función f en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, y llamamos c a la única raíz de la ecuación $f(x)=0$ en dicho intervalo, sabemos que el error absoluto de c_n como aproximación de c cumple:

$$|c_n - c| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

(véase la Proposición 1.4.8). Buscamos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\pi}{2^{n+2}} < 0.01$. Probando con $n = 0, 1, \ldots$ observamos que $n = 3$ ya cumple la desigualdad. Por tanto, bastan 3 pasos del método para obtener una aproximación con error absoluto menor que 0.01. $\square$

Ejercicio 1.4.15. *Determina cuántas soluciones tiene la ecuación* $2 - 2x = \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN. La ecuación equivale a $f(x) = 0$, eligiendo la función $f(x) = 2 - 2x - \operatorname{sen} x$. Su derivada cumple $f'(x) = -2 - \cos x < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (ya que $\cos x \geq -1$ para todo $x \in \mathbb{R}$), así que f es estrictamente decreciente en todo $\mathbb{R}$ y la ecuación $f(x) = 0$ puede tener, como mucho, una solución en $\mathbb{R}$ (Observación 1.4.3). Por otro lado,

$$f(0) = 2 > 0 \quad \text{y} \quad f(\pi) = 2 - 2\pi < 0.$$

Aplicando el Teorema de Bolzano 1.4.1 a la función continua f en el intervalo $[0, \pi]$, deducimos que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución en $(0, \pi)$. Por lo tanto, la ecuación tiene una única solución en $\mathbb{R}$. $\square$

Ejercicio 1.4.16. *Demuestra que la ecuación* $x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x = 0$ *tiene exactamente dos raíces.*

SOLUCIÓN. En primer lugar, observamos que la función $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$ es par. En efecto, como el seno (resp. coseno) es una función impar (resp. par), tenemos

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x)\operatorname{sen}(-x) - \cos(-x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x.$$

Por tanto, un número $c \in \mathbb{R}$ es raíz de la ecuación si y sólo si lo es $-c$. Así, decir que la ecuación tiene exactamente dos raíces es equivalente a decir que sólo tiene una raíz en el intervalo $(0, \infty)$ (claramente, 0 no es raíz, ya que $f(0) = -1$).

La derivada de f es

$$f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x - x \cos x + \operatorname{sen} x = x(2 - \cos x).$$

Como $2 - \cos x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$, luego f es estrictamente creciente en $(0, \infty)$ y así la ecuación $f(x) = 0$ sólo puede tener una raíz en el intervalo $(0, \infty)$ (Observación 1.4.3).

Vamos a evaluar f en algunos puntos buscando un *cambio de signo*. Por ejemplo, $f(0) = -1 < 0$ y

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) > 0.$$

El Teorema de Bolzano 1.4.1 asegura que existe una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en $(0, \frac{\pi}{2})$. Por tanto, la ecuación tiene una única raíz en $(0, \infty)$. □

Ejercicio 1.4.17. *Determina cuántas soluciones tiene la ecuación* $(x-2)^2 = \ln x$.

SOLUCIÓN. La ecuación es equivalente a $f(x) = 0$, siendo $f(x) = (x-2)^2 - \ln x$. La derivada de esta función es

$$f'(x) = 2(x-2) - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{x}.$$

Las soluciones de la ecuación $2x^2 - 4x - 1 = 0$ son $a = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$ y $b = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$, luego

$$f'(x) = \frac{2(x-a)(x-b)}{x}.$$

En vista de esta expresión, teniendo en cuenta que $a > 0$ y $b < 0$, deducimos que

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } x \in (0, a), \\ f'(x) > 0 & \text{si } x \in (a, \infty). \end{cases}$$

Por tanto, f es estrictamente decreciente en $(0, a]$ y estrictamente creciente en $[a, \infty)$, así que la ecuación $f(x) = 0$ puede tener como mucho una solución en cada uno de esos intervalos (Observación 1.4.3). Veamos que, efectivamente, las tiene.

Evaluando, $f(a) = -0.749\ldots < 0$. Por otro lado, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, así que podemos elegir números reales $0 < b_1 < a$ y $a < b_2$ tales que $f(b_1) > 0$ y $f(b_2) > 0$. Como f es continua, el Teorema de Bolzano 1.4.1 garantiza que la ecuación $f(x) = 0$ tiene soluciones en los intervalos (b_1, a) y (a, b_2).

Por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones en $(0, \infty)$. □

Capítulo 2

Integrales

«OBJETIVOS»

- Conocer la interpretación geométrica del concepto de integral.
- Aplicar la Regla de Barrow para el cálculo de integrales.
- Calcular primitivas sencillas.
- Estudiar la convergencia de integrales impropias y calcular su valor.
- Utilizar métodos numéricos básicos para aproximar integrales.
- Manejar técnicas básicas de interpolación para aproximar funciones.

Este segundo capítulo se centra en el estudio de las INTEGRALES de funciones reales de una variable real. El cálculo integral es una herramienta fundamental en ciencias e ingeniería. En Informática, por ejemplo, se utiliza para estudiar el orden de magnitud del tiempo de ejecución de ciertos algoritmos (como veremos en el capítulo siguiente).

En la *Lección 2.1* introducimos el concepto de integral de una función continua y lo interpretamos geométricamente, en términos de áreas. Además de las propiedades básicas de las integrales, presentamos la Regla de Barrow como herramienta "teórica" para el cálculo de integrales.

En la *Lección 2.2* repasamos algunas primitivas inmediatas y estudiamos dos técnicas básicas de cálculo de primitivas: el cambio de variable (sustitución) y el método de integración por partes. También explicamos cómo calcular primitivas de fracciones racionales sencillas.

En la *Lección 2.3* estudiamos el concepto de integral impropia de una función continua definida en todo $\mathbb{R}$ o en un intervalo de la forma $(-\infty, b]$ ó $[a, \infty)$. Estas integrales impropias se van a utilizar en la asignatura del segundo cuatrimestre *Estadística*.

La *Lección 2.4* está dedicada a presentar algunos métodos numéricos para el cálculo aproximado de integrales. Concretamente, nos centramos en los métodos del Trapecio y Simpson, como ejemplos de métodos de cuadratura. En dos anexos presentamos un par de métodos de Monte Carlo (como ejemplos de algoritmos probabilistas). En ciencias e ingeniería, a la hora de calcular integrales se utilizan métodos numéricos, ya que en la práctica calcular una primitiva de la función a integrar suele ser mucho más costoso o incluso imposible.

Como apéndice al capítulo, en la *Lección 2.5* realizamos una breve introducción a la interpolación (polinomial y a trozos). Las técnicas de interpolación son una herramienta muy útil para aproximar funciones globalmente y se aplican, por ejemplo, al cálculo aproximado de integrales.

2.1. Propiedades básicas y Regla de Barrow

Contenidos

- Sumas superiores e inferiores y definición de la integral.
- Propiedades básicas de la integral.
- Regla de Barrow.

Teoría

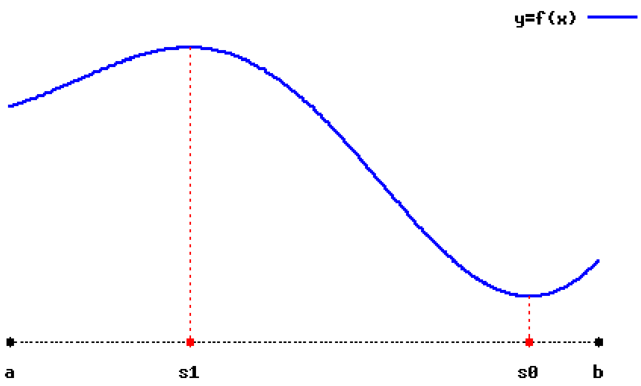
Comenzamos recordando el Teorema de Weierstrass. A lo largo de la lección $[a,b]$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.1 (Weierstrass)**.** *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces existen $s_0, s_1 \in [a,b]$ tales que*

$$f(s_0) \le f(x) \le f(s_1) \quad \textit{para todo } x \in [a,b].$$

Escribimos

- $f(s_0) = \min f([a,b])$ *(valor mínimo de f en $[a,b]$);*
- $f(s_1) = \max f([a,b])$ *(valor máximo de f en $[a,b]$).*



A continuación definimos las sumas inferiores y superiores de una función continua utilizando el Teorema de Weierstrass.

Definición 2.1.2. *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Escribimos*

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

(i) Se llama n-ésima **suma inferior** *de f al número*

$$I_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \text{mín}\, f\big([x_{k-1}, x_k]\big).$$

(ii) Se llama n-ésima **suma superior** *de f al número*

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \text{máx}\, f\big([x_{k-1}, x_k]\big).$$

Si además $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces la suma inferior $I_n(f)$ es una aproximación *por defecto* del área del recinto delimitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ (véase la Figura 2.1), mientras que la suma superior $S_n(f)$ es una aproximación *por exceso* de dicha área (véase la Figura 2.2 en la página 73).

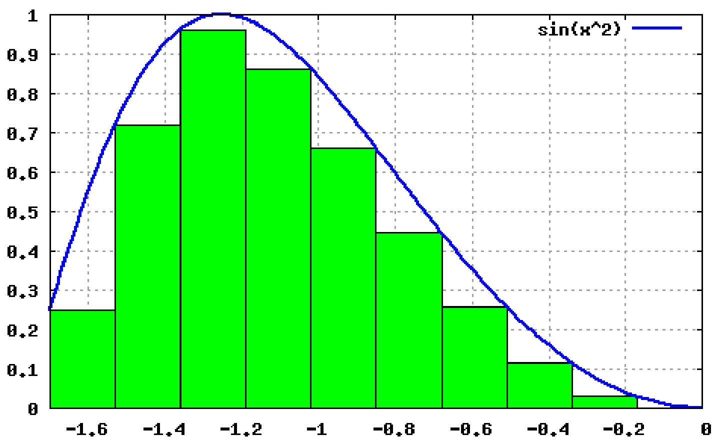


Figura 2.1: La suma inferior $I_{10}(f)$ de la función $f(x) = \text{sen}(x^2)$ en el intervalo $[-1.7, 0]$ es la suma de las áreas de los rectángulos verdes.

El cálculo de las sumas superiores e inferiores es inmediato cuando la función es constante, creciente o decreciente, como observamos a continuación.

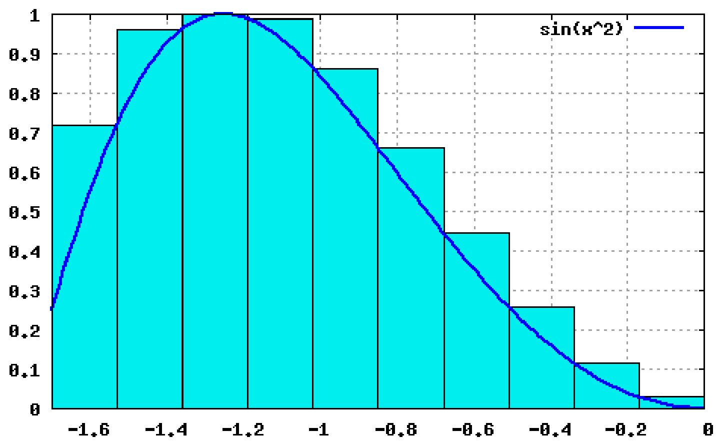


Figura 2.2: La suma superior $S_{10}(f)$ de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ en el intervalo $[-1.7, 0]$ es la suma de las áreas de los rectángulos azules.

Observación 2.1.3. *Si f es* constante *con valor $C \in \mathbb{R}$ (es decir, $f(x) = C$ para todo $x \in [a,b]$), entonces $I_n(f) = S_n(f) = (b-a)C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. En este caso tenemos $\operatorname{mín} f([x_{k-1}, x_k]) = C$ para todo $k = 1, \dots, n$, luego $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{mín} f\big([x_{k-1}, x_k]\big) = nC$ y así

$$I_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{mín} f\big([x_{k-1}, x_k]\big) = (b-a)C.$$

Para la suma superior el razonamiento es análogo. □

Observación 2.1.4. *Si f es* creciente*, entonces*

$$I_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \quad \text{y} \quad S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Basta observar que, como f es creciente, tenemos

$$\operatorname{mín} f\big([x_{k-1}, x_k]\big) = f(x_{k-1}) \quad \text{y} \quad \operatorname{máx} f\big([x_{k-1}, x_k]\big) = f(x_k)$$

para $k = 0, 1, \dots, n$. □

Observación 2.1.5. *Si f es* decreciente*, entonces*

$$I_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \quad y \quad S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Basta observar que, como f es decreciente, tenemos

$$\text{mín}\, f\big([x_{k-1},x_k]\big) = f(x_k) \quad \text{y} \quad \text{máx}\, f\big([x_{k-1},x_k]\big) = f(x_{k-1})$$

para $k = 0,1,\ldots,n$. $\square$

Las Figuras 2.3 y 2.4 ilustran gráficamente las observaciones anteriores.

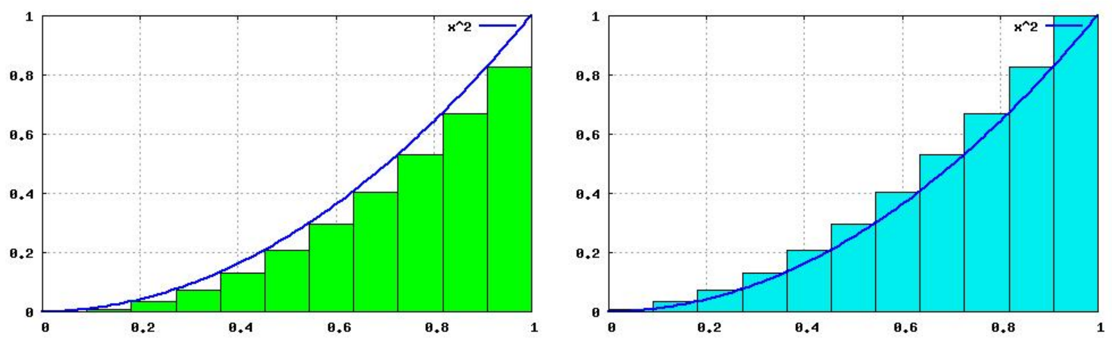


Figura 2.3: Sumas inferior y superior de $f(x) = x^2$ en $[0,1]$ con $n = 11$.

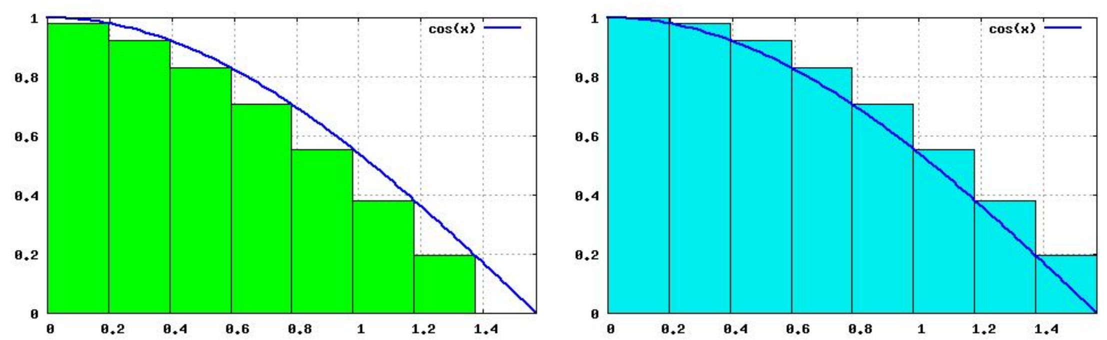


Figura 2.4: Sumas inferior y superior de $f(x) = \cos x$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ con $n = 8$.

Ejemplo 2.1.6. *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función "identidad", es decir, $f(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos:*

$$I_n(f) = \frac{n-1}{2n} \qquad y \qquad S_n(f) = \frac{n+1}{2n}.$$

Demostración. En este ejemplo $[a,b] = [0,1]$, así que

$$x_k = \frac{k}{n} \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Como f es creciente, podemos aplicar las fórmulas de la Observación 2.1.4 para obtener

$$I_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k \quad (2.1)$$

y

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k. \quad (2.2)$$

Por otro lado, es sencillo demostrar[1] que

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Utilizando esta fórmula en (2.1) y (2.2), obtenemos

$$I_n(f) = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n} \qquad \text{y} \qquad S_n(f) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n},$$

como se quería demostrar. □

Estamos ya en condiciones de introducir el concepto de integral:

---

[1] Se puede demostrar por inducción, véase el Ejercicio 1.1.9. Alternativamente:

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \Big(1 + 2 + \ldots + (n-1) + n\Big) + \Big(n + (n-1) + \ldots + 2 + 1\Big) =$$
$$= \Big(1+n\Big) + \Big(2 + (n-1)\Big) + \ldots + \Big((n-1) + 2\Big) + \Big(n+1\Big) = \underbrace{(n+1) + \ldots + (n+1)}_{n \text{ sumandos}} = n(n+1).$$

Teorema 2.1.7. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces las sucesiones $I_n(f)$ y $S_n(f)$ son convergentes y se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

Llamamos **integral** *de f en $[a,b]$ a dicho límite, que se representa mediante*

$$\int_a^b f \qquad ó \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Además,

$$I_n(f) \le \int_a^b f \le S_n(f) \qquad \textit{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Si $f(x)\ge 0$ para todo $x\in[a,b]$, entonces la integral $\int_a^b f$ es el área del recinto comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x=a$ y $x=b$.

Ejemplo 2.1.8. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función constante con valor C, es decir, $f(x)=C$ para todo $x\in[a,b]$. Como $I_n(f)=S_n(f)=(b-a)C$ para todo $n\in\mathbb{N}$ (véase la Observación 2.1.3), tenemos:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)C.$$

Ejemplo 2.1.9. *Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ la función "identidad", $f(x)=x$ para todo $x\in[0,1]$. Como $I_n(f)=\dfrac{n-1}{2n}$ y $S_n(f)=\dfrac{n+1}{2n}$ (véase el Ejemplo 2.1.6), tenemos:*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

A continuación presentamos dos propiedades básicas de la integral que son bastante útiles a la hora de efectuar cálculos.

Proposición 2.1.10 (Linealidad de la integral)**.** *Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones continuas y sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Entonces*

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g) = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g.$$

Proposición 2.1.11 (Aditividad de la integral)**.** *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y sea $c\in(a,b)$. Entonces*

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

La pregunta fundamental que se plantea ahora es:

Dada una función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, ¿cómo podemos calcular $\int_a^b f$?

En general, trabajar con las sumas superiores e inferiores es complicado y para responder a la pregunta tenemos dos posibilidades:

(1ª) Aplicar la *Regla de Barrow*, calculando previamente una *primitiva* de f, como veremos a continuación.

(2ª) Utilizar *métodos numéricos*, obteniendo una *aproximación* del valor exacto de la integral, como veremos en la Lección 2.4.

Definición 2.1.12. *Sean $f,F:I\to\mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I\subseteq\mathbb{R}$. Decimos que F es una* **primitiva** *de f en I si F es derivable en I y $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in I$.*

Teorema 2.1.13 (Regla de Barrow)**.** *Sean $f,F:[a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones. Si f es continua y F es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f=F(b)-F(a).$$

Escribimos $\big[F(x)\big]_a^b=F(b)-F(a)$.

Veamos un par de ejemplos sencillos ilustrando la Regla de Barrow.

Ejemplo 2.1.14. *Para calcular $\int_0^1 x\,dx$ necesitamos una primitiva de $f(x)=x$ en $[0,1]$, por ejemplo, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$. Aplicando la Regla de Barrow:*

$$\int_0^1 x\,dx=F(1)-F(0)=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2},$$

como habíamos visto en el Ejemplo 2.1.9.

Ejemplo 2.1.15. *Para calcular* $\int_1^2 x^3\,dx$ *necesitamos una primitiva de* $f(x)=x^3$ *en* $[1,2]$*, por ejemplo,* $F(x)=\dfrac{x^4}{4}$*. Aplicando la Regla de Barrow:*

$$\int_1^2 x^3\,dx = F(2)-F(1) = \frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}.$$

Ejercicios

Ejercicio 2.1.16. *Se considera la función* $f(x)=-x^2+1$ *en el intervalo* $[0,1]$*. Calcula la suma inferior* $I_4(f)$ *y la suma superior* $S_4(f)$*.*

SOLUCIÓN. En este caso $[a,b]=[0,1]$ y $n=4$, así que $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{3}{4}$ y $x_4=1$. Como f es decreciente en el intervalo $[0,1]$, podemos aplicar las fórmulas de la Observación 2.1.5, obteniendo

$$\begin{aligned} I_4(f) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} f(x_k) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(-\left(\frac{1}{4}\right)^2+1\right)+\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right)+\left(-\left(\frac{3}{4}\right)^2+1\right)+\left(-1^2+1\right)\right) = \frac{17}{32} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S_4(f) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} f(x_{k-1}) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(-0^2+1\right)+\left(-\left(\frac{1}{4}\right)^2+1\right)+\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right)+\left(-\left(\frac{3}{4}\right)^2+1\right)\right) = \frac{25}{32}. \end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.1.17. *Se considera la función* $f(x)=x^3$ *en el intervalo* $[0,2]$*. Calcula la suma inferior* $I_3(f)$ *y la suma superior* $S_3(f)$*.*

SOLUCIÓN. Trabajamos con $[a,b]=[0,2]$ y $n=3$, así que los puntos intermedios son $x_0=0$, $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{4}{3}$ y $x_3=2$. Como f es creciente en el intervalo $[0,2]$, las fórmulas de la Observación 2.1.4 nos permiten obtener

$$I_3(f) = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{3} f(x_{k-1}) = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{4}{3}\right)^3\right) = \frac{16}{9}$$

y

$$S_3(f) = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{3} f(x_k) = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2^3\right) = \frac{64}{9}.$$

$\square$

Ejercicio 2.1.18.

(i) Demuestra por inducción que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Se considera la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$. Con la ayuda de la fórmula del apartado (i), demuestra que

$$I_n(f) = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} \qquad y \qquad S_n(f) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(iii) Calcula $\int_0^1 x^2\,dx$ utilizando las fórmulas del apartado (ii).

(iv) Comprueba que $F(x) = \frac{x^3}{3}$ es una primitiva de $f(x) = x^2$ en $[0,1]$ y utilízala para calcular $\int_0^1 x^2\,dx$ mediante la Regla de Barrow.

SOLUCIÓN. (i) Es evidente que la fórmula es valida para $n = 1$. Vamos a demostrar ahora que:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6},\end{aligned}$$

y por otro lado $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$, luego

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Esto completa la demostración por inducción.

(ii) Para el cálculo de $I_n(f)$ y $S_n(f)$ tenemos que usar los puntos

$$x_k = \frac{k}{n} \qquad \text{con } k = 0,1,\dots,n.$$

La función $f(x) = x^2$ es creciente en $[0,1]$, así que podemos utilizar las fórmulas de la Observación 2.1.4:

$$I_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \tag{2.3}$$

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2. \tag{2.4}$$

Por otro lado, según hemos visto en el apartado (i), se cumple

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sustituyendo en (2.3) y (2.4), obtenemos

$$I_n(f) = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$$

y

$$S_n(f) = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2},$$

como se quería demostrar.

(iii) Por la definición de integral,

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(iv) La función cumple $F'(x) = x^2 = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así que F es primitiva de f en *cualquier* intervalo. Si aplicamos la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13), obtenemos el mismo resultado que en el apartado (iii):

$$\int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

□

Ejercicio 2.1.19.

(i) Demuestra por inducción que

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \textit{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

(ii) Se considera la función $f(x)=x^3$ en el intervalo $[0,1]$. Con la ayuda de la fórmula del apartado (i), demuestra que

$$I_n(f)=\frac{n^2-2n+1}{4n^2} \qquad y \qquad S_n(f)=\frac{n^2+2n+1}{4n^2}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$.

(iii) Calcula $\int_0^1 x^3\,dx$ utilizando las fórmulas del apartado (ii).

(iv) Comprueba que $F(x)=\frac{x^4}{4}$ es una primitiva de $f(x)=x^3$ en $[0,1]$ y utilízala para calcular $\int_0^1 x^3\,dx$ mediante la Regla de Barrow.

SOLUCIÓN. (i) Obviamente, la fórmula se cumple para $n=1$. Vamos a demostrar ahora que:

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=1}^{n+1}k^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

En efecto, basta observar que

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Esto completa la prueba por inducción.

(ii) Para el cálculo de $I_n(f)$ y $S_n(f)$ usaremos los puntos

$$x_k=\frac{k}{n} \qquad \text{con } k=0,1,\ldots,n.$$

Como la función $f(x)=x^3$ es creciente en $[0,1]$, podemos utilizar las fórmulas de la Observación 2.1.4 para obtener:

$$I_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^3=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1}k^3 \tag{2.5}$$

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3. \tag{2.6}$$

Por otro lado, según hemos visto en el apartado (i), tenemos

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2n^2}{4} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Sustituyendo en (2.5) y (2.6), obtenemos

$$I_n(f) = \frac{1}{n^4}\cdot\frac{(n-1)^2n^2}{4} = \frac{n^2-2n+1}{4n^2}$$

y

$$S_n(f) = \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2},$$

como se quería demostrar.

(iii) De la definición de integral se sigue que:

$$\int_0^1 x^3\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2} = \frac{1}{4}.$$

(iv) $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ cumple $F'(x) = x^3 = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así que F es primitiva de f en *cualquier* intervalo. Si aplicamos la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) en el intervalo $[0,1]$, obtenemos el resultado del apartado (iii):

$$\int_0^1 x^3\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

□

Ejercicio 2.1.20. *Calcula las integrales siguientes aplicando la Regla de Barrow:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx \qquad \int_0^1 e^x\,dx \qquad \int_1^e \frac{1}{x}\,dx$$

SOLUCIÓN. La función $\operatorname{sen} x$ tiene primitiva $-\cos x$, luego

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = \big[-\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) = -0+1 = 1.$$

La función $\cos x$ tiene primitiva $\operatorname{sen} x$, así que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = \left[\operatorname{sen} x\right]_{-\pi}^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}(-\pi) = 0 - 0 = 0.$$

La función e^x tiene primitiva e^x, luego

$$\int_0^1 e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Finalmente, la función $\dfrac{1}{x}$ tiene primitiva $\ln x$, luego

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln x\right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

□

Ejercicio 2.1.21. *Calcula el área de la región plana limitada por las parábolas* $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ *y la recta* $y = 2x$.

SOLUCIÓN. Definimos las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y $h(x) = 2x$. Los puntos de corte de sus gráficas son $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$ (véase la Figura 2.5). El área del recinto señalado es

$$A = \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\, dx + \int_2^4 \big(h(x) - g(x)\big)\, dx.$$

La función $f(x) - g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ tiene primitiva $\dfrac{x^3}{6}$. Aplicando la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) se obtiene

$$\int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Por otro lado, la función $h(x) - g(x) = 2x - \dfrac{x^2}{2}$ tiene primitiva $x^2 - \dfrac{x^3}{6}$. Usando otra vez la Regla de Barrow tenemos

$$\int_2^4 \big(h(x) - g(x)\big)\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_2^4 = \frac{8}{3}.$$

Luego el área pedida es $A = \dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{3} = 4$. □

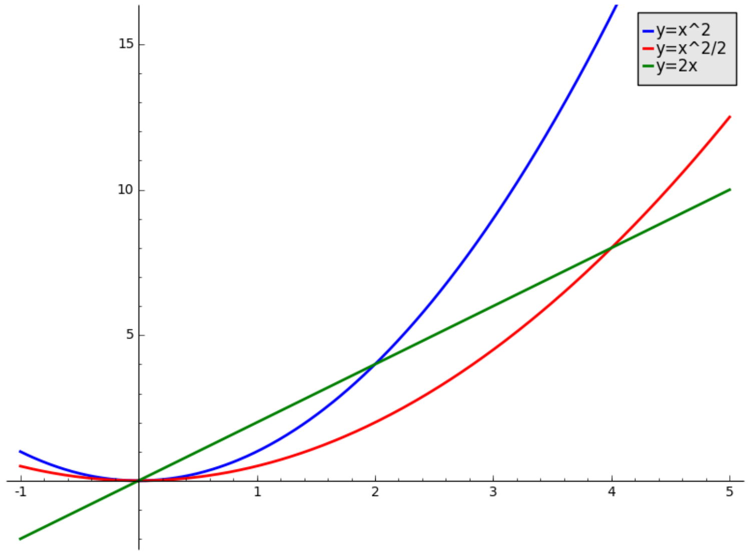


Figura 2.5: Ejercicio 2.1.21.

Ejercicio 2.1.22. *Calcula el área de la región plana limitada la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x$ y su recta tangente en el punto de abscisas $x = -1$.*

SOLUCIÓN. La recta tangente pasa por el punto $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$. La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 1$, luego la pendiente de la recta tangente vale $f'(-1) = 2$. Por tanto, la ecuación de dicha recta es $y = 2x + 2$. Las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = 2x + 2$ se cortan en los puntos cuyas abscisas son las soluciones de la ecuación:

$$x^3 - x = 2x + 2 \iff x^3 - 3x - 2 = 0 \iff x \in \{-1, 2\}.$$

En la Figura 2.6 podemos ver una representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. El área pedida es

$$A = \int_{-1}^{2} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx.$$

La función $g(x) - f(x) = -x^3 + 3x + 2$ tiene primitiva $-\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{3x^2}{2} + 2x$. Usamos ahora la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) para calcular el área:

$$A = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}.$$

□

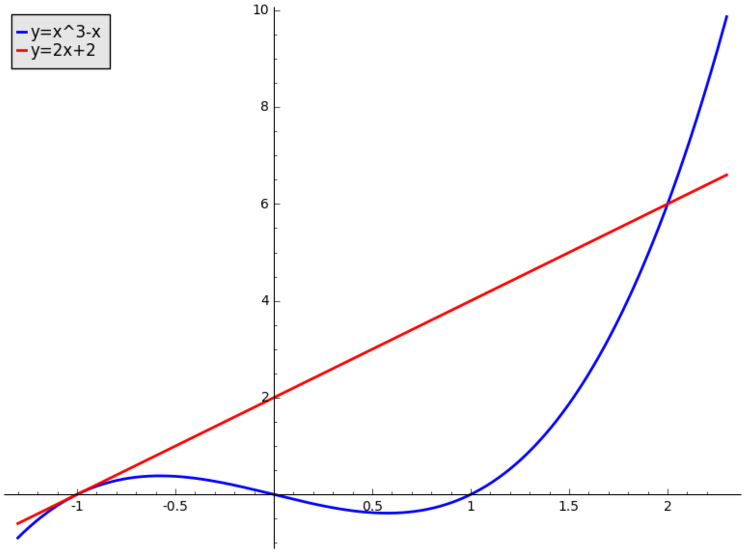


Figura 2.6: Ejercicio 2.1.22.

Ejercicio 2.1.23. *Calcula el área del recinto plano limitado por la parábola de ecuación $y = 4x - x^2$ y las rectas tangentes a la misma en los puntos de corte con el eje OX.*

SOLUCIÓN. Las soluciones de la ecuación $4x - x^2 = 0$ son $x = 0$ y $x = 4$. La derivada de la función $f(x) = 4x - x^2$ es $f'(x) = 4 - 2x$. Calculamos las dos rectas tangentes:

- La tangente en el punto de abscisas $x = 0$ (cuyas coordenadas son $(0, f(0)) = (0,0)$) tiene pendiente $f'(0) = 4$. Luego la ecuación de dicha recta es $y = 4x$.
- La tangente en el punto de abscisas $x = 4$ (cuyas coordenadas son $(4, f(4)) = (4,0)$) tiene pendiente $f'(4) = -4$. Así que la ecuación de dicha recta es $y = -4x + 16$.

La Figura 2.7 muestra una representación gráfica de la parábola y las dos rectas tangentes anteriores (que se cortan en $x = 2$). Si llamamos $g(x) = 4x$ y $h(x) = -4x + 16$, el área del recinto considerado es

$$A = \int_0^2 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx + \int_2^4 \big(h(x) - f(x)\big)\,dx = 2\int_0^2 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx,$$

donde la última igualdad es consecuencia de la simetría que hay respecto de la recta $x = 2$. La función $g(x) - f(x) = x^2$ tiene primitiva $\frac{x^3}{3}$. Aplicando la Regla de Barrow

(Teorema 2.1.13) obtenemos el valor del área:

$$A = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

□

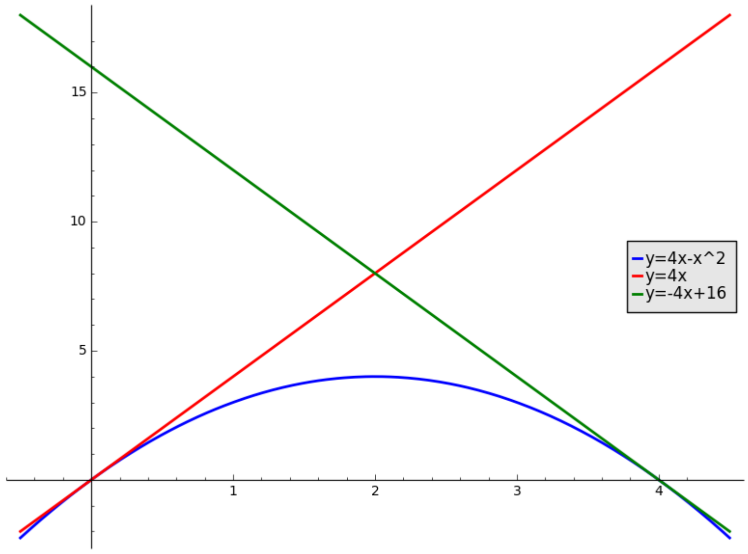


Figura 2.7: Ejercicio 2.1.23.

Ejercicio 2.1.24. *Calcula los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que el área de la región plana limitada por la parábola $y = -3x^2 + 3a^4$ y el eje OX es* 256*.*

SOLUCIÓN. Resolviendo la ecuación $-3x^2 + 3a^4 = 0$ vemos que la parábola corta al eje OX en los puntos de abscisas $x = -a^2$ y $x = a^2$. Como la parábola es convexa, está por encima del eje OX entre dichos puntos. Así que el área de la región plana limitada por la parábola y el eje OX se calcula mediante la integral siguiente:

$$A(a) = \int_{-a^2}^{a^2} \left(-3x^2 + 3a^4\right) dx.$$

Una primitiva de la función $-3x^2 + 3a^4$ es $-x^3 + 3a^4x$. Usando la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) tenemos:

$$A(a) = \left[-x^3 + 3a^4x\right]_{-a^2}^{a^2} = 4a^6.$$

Finalmente, resolvemos la ecuación

$$256 = A(a) = 4a^6 \iff 64 = a^6,$$

cuyas únicas soluciones son $a = 2$ y $a = -2$. $\square$

2.2. Cálculo de primitivas

Contenidos

- Cambio de variable.
- Integración por partes.
- Primitivas de fracciones racionales.

Teoría

Para hallar la integral de una función mediante la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) es necesario encontrar previamente una primitiva de dicha función. En general, el cálculo de primitivas es complicado y sólo es posible en casos particulares. En esta lección estudiamos algunos métodos elementales para calcular primitivas.

Definición 2.2.1. *Si una función $F(x)$ es primitiva de otra función $f(x)$ en algún intervalo, entonces escribimos:*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

A la constante C (llamada "constante de integración") se le puede asignar cualquier valor real. Para cada valor particular de C, la función $F(x)+C$ es una primitiva de $f(x)$.

La siguiente tabla recoge algunas primitivas inmediatas:

PRIMITIVAS INMEDIATAS

$\int \alpha\,dx = \alpha x + C$ si $\alpha \in \mathbb{R}$	$\int x^s\,dx = \dfrac{x^{s+1}}{s+1} + C$ si $s \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\int \alpha^x\,dx = \dfrac{\alpha^x}{\ln\alpha} + C$ si $\alpha > 0$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

Observación 2.2.2.

(i) $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$ *si* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

La primera técnica de cálculo de primitivas que vamos a estudiar es el *cambio de variable* (o método de *sustitución*):

Proposición 2.2.3 (Fórmula del cambio de variable)**.** *Se cumple*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

si F es una primitiva de f.

Demostración. Por la *Regla de la Cadena*, la derivada de la función compuesta $F(g(x))$ es precisamente $F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$. □

Observación 2.2.4. *En la práctica se suele definir*

$$t = g(x) \qquad dt = g'(x)\,dx$$

y entonces el "cambio de variable" se escribe así:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

Veamos algunos ejemplos concretos donde se puede aplicar el método:

Ejemplo 2.2.5. *Calculamos las primitivas siguientes por cambio de variable:*

$$\text{(i)} \int e^{2x}\,dx \qquad \text{(ii)} \int x\operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad \text{(iii)} \int \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

Solución.

(i) La función e^{2x} puede escribirse como $e^{2x} = f(g(x))g'(x)$, siendo

$$g(x) = 2x \qquad \text{y} \qquad f(t) = \frac{e^t}{2}.$$

Una primitiva de $f(t) = \frac{e^t}{2}$ es $F(t) = \frac{e^t}{2}$. Aplicando la fórmula del cambio de variable obtenemos

$$\int e^{2x}\,dx = \int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = \frac{e^{2x}}{2} + C.$$

Habitualmente, cuando se calculan primitivas por cambio de variable, se procede del modo indicado en la Observación 2.2.4. En este ejemplo, eligiendo como “nueva variable” $t = 2x$, tenemos $dt = 2\,dx$ (derivamos $2x$ respecto de la variable x) y, sustituyendo en la primitiva a calcular, se obtiene

$$\int e^{2x}\,dx = \int e^t \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int e^t\,dt.$$

Esta última primitiva (respecto de la variable t) es inmediata:

$$\frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{e^t}{2} + C.$$

Finalmente, en esta última expresión sustituimos la variable t para que todo quede en función de la variable x:

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + C.$$

(ii) Ahora elegimos como “nueva variable” $t = x^2$. Entonces $dt = 2x\,dx$ (derivamos x^2 respecto de la variable x) y, sustituyendo en la primitiva, nos queda

$$\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\,dt = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} t\,dt.$$

Esta última primitiva (respecto de la variable t) es inmediata:

$$\int \operatorname{sen} t\,dt = -\cos t + C.$$

Finalmente, sustituimos la variable t para que todo quede en función de la variable x:

$$\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C.$$

(iii) Tomamos como “nueva variable” $t = \ln x$. Entonces $dt = \frac{1}{x}\,dx$ (derivamos $\ln x$ respecto de la variable x) y, sustituyendo, nos queda

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt,$$

que es una primitiva inmediata (respecto de la variable t):

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C.$$

Sustituyendo la variable t, obtenemos

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \ln|\ln x| + C.$$

$\square$

El segundo método de cálculo de primitivas que vamos a estudiar es el método de *integración por partes*:

Proposición 2.2.6 (Fórmula de integración por partes)**.**

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

Demostración. La derivada de la función producto $f(x)g(x)$ es $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Por tanto:

$$\int f'(x)g(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx = \int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\, dx = f(x)g(x) + C.$$

Despejando, obtenemos $\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx.$ $\square$

Observación 2.2.7. *En la práctica se suele escribir*

$$u = f(x) \qquad dv = g'(x)\, dx \qquad du = f'(x)\, dx \qquad v = g(x)$$

con lo que la fórmula de integración por partes queda así:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

A continuación vemos algunos ejemplos ilustrando el método.

Ejemplo 2.2.8. *Calculamos las primitivas siguientes mediante integración por partes:*

$$\text{(i)} \int x \cos x\, dx \qquad \text{(ii)} \int x e^x\, dx \qquad \text{(iii)} \int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$$

Solución.

(i) Podemos escribir $x \cos x = f(x)g'(x)$ eligiendo $f(x) = x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ (una primitiva de $\cos x$). Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int x \cos x\, dx = \int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx.$$

Esta última primitiva es inmediata:

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C.$$

Por tanto:

$$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

[En este ejemplo, hemos elegido $u = x$ y $dv = \cos x\, dx$, con lo que $du = dx$ (derivamos x) y $v = \operatorname{sen} x$ (escogemos una primitiva de $\cos x$).]

(ii) Podemos escribir $\int xe^x\, dx = \int u\, dv$ eligiendo

$$u = x \qquad \text{y} \qquad dv = e^x\, dx.$$

Entonces $du = dx$ (derivamos x) y $v = e^x$ (primitiva de e^x). Aplicando la fórmula de integracion por partes, obtenemos

$$\int xe^x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = xe^x - \int e^x\, dx.$$

Como $\int e^x\, dx = e^x + C$, deducimos que

$$\int xe^x\, dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

(iii) Escribimos $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = \int u\, dv$ eligiendo

$$u = x^2 \qquad \text{y} \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx.$$

Entonces $du = 2x\, dx$ (derivamos x^2) y $v = -\cos x$ (primitiva de $\operatorname{sen} x$). Aplicando la fórmula de integracion por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen} x\, dx &= \int u\, dv = uv - \int v\, du = \\ &= -x^2 \cos x - \int 2x(-\cos x)\, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx. \end{aligned}$$

Según hemos visto en el apartado (i), esta última primitiva es

$$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C,$$

luego

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2\big(x \operatorname{sen} x + \cos x\big) + C = (2 - x^2) \cos x + 2x \operatorname{sen} x + C.$$

$\square$

Finalizamos la lección explicando cómo se pueden calcular primitivas de *fracciones racionales* sencillas. Lo vemos sobre algunos ejemplos concretos. Recordamos que una fracción racional es el cociente de dos polinomios. Por ejemplo:

$$\frac{10x^6-5x^4+3x^3-2x+1}{x^{10}-7x^4+2x^3+x^2-20x+7} \qquad \frac{-2x}{(x+1)(x^2+1)} \qquad \text{etc.}$$

En general, para poder calcular la primitiva de una fracción racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es necesario que el grado del numerador $P(x)$ sea estrictamente menor que el grado del denominador $Q(x)$. Si no es así, podemos realizar la división de ambos polinomios y escribir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde $C(x)$ es el cociente y $R(x)$ es el resto de dicha división.

Ejemplo 2.2.9. *Calculamos las primitivas siguientes:*

$$\textit{(i)} \int \frac{1}{x^2-4}\,dx \qquad \textit{(ii)} \int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx \qquad \textit{(iii)} \int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}\,dx$$

Solución.

(i) El denominador se descompone como producto de dos factores lineales distintos:

$$x^2-4 = (x-2)(x+2).$$

Por tanto, la fracción racional se puede escribir como suma de dos *fracciones simples*:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \tag{2.7}$$

para ciertas constantes $A, B \in \mathbb{R}$. Para calcularlas, operamos

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4}$$

e igualamos numeradores: $1 = A(x+2)+B(x-2)$. Sustituyendo en esta identidad $x=-2$ y $x=2$ obtenemos las ecuaciones $1=-4B$ y $1=4A$, luego $A=\frac{1}{4}$ y $B=-\frac{1}{4}$. Sustituyendo estos valores en (2.7) y tomando primitivas deducimos:

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \int \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C.$$

(ii) En este caso, el denominador es el cuadrado de un factor lineal y, por tanto, la fracción racional se puede escribir como suma de dos fracciones simples de la forma siguiente:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \tag{2.8}$$

para ciertas constantes $A, B \in \mathbb{R}$. Para calcularlas, operamos

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

e igualamos numeradores: $x = A(x-1)+B$. En esta identidad podemos sustituir $x = 1$ y $x = 0$ obteniendo $1 = B$ y $0 = -A+B$, de donde deducimos que $A = 1$. Reemplazando estos valores y tomando primitivas en (2.8) resulta que

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx =$$
$$= \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

(iii) El denominador es el producto de un factor lineal (x) y el cuadrado de otro factor lineal distinto ($x-1$). En esta situación, podemos escribir la fracción racional como suma de tres fracciones simples, de la manera siguiente:

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} \tag{2.9}$$

para ciertas constantes $A, B, D \in \mathbb{R}$ que vamos a determinar. Para ello, operamos e igualamos numeradores:

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Dx}{x(x-1)^2},$$

luego $2x^2+3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Dx$. En esta identidad sustituimos x por tres valores distintos:

- $x = 1 \Longrightarrow 5 = D$.
- $x = 0 \Longrightarrow 3 = A$.
- $x = 2 \Longrightarrow 11 = A + 2B + 2D$, de donde obtenemos $B = -1$.

Finalmente, sustituimos estos valores en (2.9) y tomamos primitivas:

$$\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}\right) dx =$$
$$= 3\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + 5\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = 3\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C.$$

□

Ejemplo 2.2.10. *Calculamos las primitivas siguientes:*

$$\text{(i)} \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx \qquad \text{(ii)} \int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx \qquad \text{(iii)} \int \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,dx$$

Solución.

(i) El denominador es un polinomio de grado 2 sin raíces reales. Como el numerador es una constante, vamos a relacionar la primitiva con una que ya conocemos:

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t) + C.$$

Operamos

$$\frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

y tomamos primitivas, obteniendo

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx.$$

En esta última primitiva realizamos el cambio de variable $t = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$. Entonces $dt = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,dx$ y al sustituir nos queda:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

(ii) El denominador es el mismo que en el apartado (i), pero en esta ocasión el numerador no es constante. Realizamos la siguiente transformación para "hacer aparecer" la derivada del denominador en el numerador:

$$\frac{x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{2}{x^2+2x+3}\right).$$

Tomando primitivas nos queda:

$$\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx.$$

La primera primitiva se resuelve de forma inmediata (aplicando el cambio de variable $t = x^2+2x+3$), mientras que la segunda es la que hemos calculado en el apartado (i). Así, tenemos

$$\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

(iii) El denominador es el producto de una factor lineal (x) y un polinomio de grado 2 sin raíces reales (x^2+x+1). En esta situación, la fracción racional se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{x^2+x+1} \tag{2.10}$$

para ciertas constantes $A,B,D \in \mathbb{R}$ a determinar. Para ello, operamos

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+D)x}{x(x^2+x+1)}$$

e igualamos numeradores: $1 = A(x^2+x+1)+(Bx+D)x$. Sustituimos tres valores de x en la identidad anterior:

- $x = 0 \Longrightarrow 1 = A$.
- $x = 1 \Longrightarrow 1 = 3A+B+D \Longrightarrow B+D = -2$.
- $x = -1 \Longrightarrow 1 = A+B-D \Longrightarrow B = D$.

Por tanto, $A = 1$, $B = D = -1$. Sustituyendo en (2.10) y tomando primitivas, nos queda

$$\int \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx. \tag{2.11}$$

La primera de estas primitivas es inmediata, mientras que la segunda se puede resolver por el método del apartado (ii). En efecto:

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx. \tag{2.12}$$

Por otro lado,

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

donde en el último paso hemos realizado el cambio de variable $t=\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$. Finalmente, sustituimos en (2.11) y (2.12):

$$\int \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

□

Como ya hemos comentado, calcular primitivas puede ser una tarea muy difícil. Incluso hay primitivas que *no* se pueden expresar en términos de "funciones elementales" mediante una fórmula sencilla, por ejemplo:

$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \qquad \int \cos(x^2)\,dx \qquad \text{etc.}$$

En ciencias experimentales e ingeniería, las integrales se suelen calcular de forma aproximada mediante *métodos numéricos*, como veremos en la Lección 2.4.

Ejercicios

Ejercicio 2.2.11. *Encuentra una función $f(x)$ que cumpla las siguientes tres propiedades:*

$$(a)\ \ f''(x) = \frac{1}{(x+1)^3} \qquad\qquad (b)\ \ f(0)=0 \qquad\qquad (c)\ \ f'(0)=0$$

SOLUCIÓN. En primer lugar, calculamos la primitiva de la función $\dfrac{1}{(x+1)^3}$ realizando el cambio de variable $t=x+1$. Entonces $dt=dx$ (derivamos $x+1$ respecto de la variable x) y al sustituir queda:

$$\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \int t^{-3}\,dt = -\frac{t^{-2}}{2}+C = -\frac{1}{2(x+1)^2}+C.$$

Por tanto, la función buscada debe cumplir

$$f'(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2}+C$$

para una contante C apropiada. Debe cumplirse lo siguiente:

$$0 = f'(0) = -\frac{1}{2} + C,$$

luego $C = \frac{1}{2}$. Por tanto, $f'(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}$. A continuación calculamos la primitiva de la función $-\frac{1}{2(x+1)^2}$ realizando el mismo cambio de variable $t = x+1$:

$$\int -\frac{1}{2(x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int t^{-2}\,dt = \frac{1}{2t} + D = \frac{1}{2(x+1)} + D.$$

Luego $f(x) = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{x}{2} + D$ para una cierta constante D, que debe cumplir

$$0 = f(0) = \frac{1}{2} + D.$$

Por tanto, la función pedida es $f(x) = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. □

Ejercicio 2.2.12. *Calcula las primitivas siguientes por cambio de variable:*

(i) $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx$ *(ii)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ *(iii)* $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ *(iv)* $\int x^3 e^{2x^4+1}\,dx$

SOLUCIÓN. (i) Hacemos el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$. Entonces $dt = \cos x\,dx$ (derivamos $\operatorname{sen} x$ respecto de la variable x) y, sustituyendo, nos queda

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx = \int t^5\,dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C.$$

(ii) Tomamos como “nueva variable” $t = 1 + x^4$. Entonces $dt = 4x^3\,dx$ (derivamos $1 + x^4$ respecto de la variable x) y, sustituyendo, obtenemos

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \int \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{t} + C = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} + C.$$

(iii) Hacemos el cambio de variable $t = e^x$, luego $dt = e^x\,dx$. Sustituyendo:

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t + C = \arctan(e^x) + C.$$

(iv) Tomamos $t = 2x^4 + 1$, luego $dt = 8x^3\,dx$. Entonces:

$$\int x^3 e^{2x^4+1}\,dx = \int \frac{1}{8} e^t\,dt = \frac{1}{8}\int e^t\,dt = \frac{e^t}{8} + C = \frac{e^{2x^4+1}}{8} + C.$$

□

Ejercicio 2.2.13. *Calcula las primitivas siguientes por cambio de variable:*

$$\text{(i)} \int \frac{x}{(1+x^2)^4}\,dx \qquad \text{(ii)} \int \sqrt{3x+1}\,dx$$

$$\text{(iii)} \int x^2\cos(x^3+1)\,dx \qquad \text{(iv)} \int \operatorname{sen} x \cos^3 x\,dx$$

SOLUCIÓN. (i) Haciendo el cambio de variable $t = 1 + x^2$, nos queda $dt = 2x\,dx$ y al sustituir obtenemos:

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^4}\,dx = \int \frac{1}{2t^4}\,dt = -\frac{1}{6t^3} + C = -\frac{1}{6(1+x^2)^3} + C.$$

(ii) Tomamos $t = 3x + 1$, de manera que $dt = 3\,dx$ y así

$$\int \sqrt{3x+1}\,dx = \int \frac{\sqrt{t}}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{2t^{3/2}}{9} + C = \frac{2(3x+1)^{3/2}}{9} + C.$$

(iii) Eligiendo la "nueva variable" $t = x^3 + 1$, tenemos $dt = 3x^2\,dx$ y entonces

$$\int x^2\cos(x^3+1)\,dx = \int \frac{\cos t}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{\operatorname{sen} t}{3} + C = \frac{\operatorname{sen}(x^3+1)}{3} + C.$$

(iv) Hacemos el cambio $t = \cos x$, que da $dt = -\operatorname{sen} x\,dx$ y al sustituir nos queda:

$$\int \operatorname{sen} x \cos^3 x\,dx = -\int t^3\,dt = -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C.$$

□

Ejercicio 2.2.14. *Calcula las primitivas siguientes mediante el método de integración por partes:*

$$\text{(i)} \int \ln x\,dx \qquad \text{(ii)} \int x\ln x\,dx \qquad \text{(iii)} \int x^2 e^x\,dx \qquad \text{(iv)} \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

SOLUCIÓN. (i) Podemos escribir $\int \ln x\, dx = \int u\, dv$ eligiendo

$$u = \ln x \qquad \text{y} \qquad dv = dx.$$

Entonces $du = \frac{1}{x}dx$ (derivamos $\ln x$) y $v = x$ (primitiva de la función constante 1). Aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int \ln x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du =$$
$$= x\ln x - \int x\frac{1}{x}\, dx = x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

(ii) Ahora escribimos $\int x\ln x\, dx = \int u\, dv$ eligiendo

$$u = \ln x \qquad \text{y} \qquad dv = x\, dx.$$

Entonces $du = \frac{1}{x}dx$ (derivamos $\ln x$) y $v = \frac{x^2}{2}$ (primitiva de x). Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int x\ln x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

(iii) Comenzamos escribiendo $\int x^2 e^x\, dx = \int u\, dv$ con la elección:

$$u = x^2 \qquad \text{y} \qquad dv = e^x\, dx.$$

Entonces $du = 2x\, dx$ (derivamos x^2) y $v = e^x$ (primitiva de e^x). Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int x^2 e^x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = \; = x^2 e^x - \int e^x 2x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx.$$

Según el Ejemplo 2.2.8 (ii), $\int x e^x\, dx = e^x(x-1) + C$ (se obtiene mediante integración por partes), luego

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

(iv) Escribimos $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \int u\, dv$ eligiendo

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad dv = e^x\, dx.$$

Entonces $du = \cos x\, dx$ (derivamos $\operatorname{sen} x$) y $v = e^x$ (primitiva de e^x). Por tanto:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx. \tag{2.13}$$

Aparece así la primitiva $\int e^x \cos x\, dx$, a la que vamos a aplicar la fórmula de integración por partes tomando

$$u = \cos x \qquad \text{y} \qquad dv = e^x\, dx,$$

de manera que $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ y $v = e^x$. Entonces

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = \\ = e^x \cos x - \int e^x(-\operatorname{sen} x)\, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx.\end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión de $\int e^x \cos x\, dx$ en (2.13), obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx\right) = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx,$$

de donde podemos despejar:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + C.$$

□

Ejercicio 2.2.15. *Calcula las primitivas siguientes mediante integración por partes:*

$$\text{(i)} \int xe^{-x}\, dx \qquad \text{(ii)} \int x^3 \cos(x^2)\, dx$$

$$\text{(iii)} \int e^{2x} \cos(3x)\, dx \qquad \text{(iv)} \int x(x+1)^{10}\, dx$$

SOLUCIÓN. (i) Aplicando el cambio de variable $t = -x$, tenemos $dt = -dx$ y al sustituir obtenemos $\int xe^{-x}\, dx = \int te^t\, dt$. Esta última primitiva ya la hemos calculado en el apartado (ii) del Ejemplo 2.2.8:

$$\int te^t\, dt = (t-1)e^t + C.$$

Por tanto:
$$\int xe^{-x}\,dx = (t-1)e^t + C = -(x+1)e^{-x} + C.$$
Alternativamente, se puede calcular esta primitiva de manera directa mediante integración por partes, eligiendo $u = x$ y $dv = e^{-x}\,dx$.

(ii) Escribimos $\int x^3\cos(x^2)\,dx = \int u\,dv$ eligiendo
$$u = x^2 \quad \text{y} \quad dv = x\cos(x^2)\,dx.$$
Entonces $du = 2x\,dx$ (derivamos x^2) y $v = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{2}$ (primitiva de la función $x\cos(x^2)$). Aplicamos ahora la fórmula de integración por partes:
$$\int x^3\cos(x^2)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du =$$
$$= \frac{x^2\operatorname{sen}(x^2)}{2} - \int x\operatorname{sen}(x^2)\,dx = \frac{x^2\operatorname{sen}(x^2)}{2} + \frac{\cos(x^2)}{2} + C = \frac{x^2\operatorname{sen}(x^2) + \cos(x^2)}{2} + C.$$

(iii) Podemos escribir $\int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \int u\,dv$ tomando
$$u = e^{2x} \quad \text{y} \quad dv = \cos(3x)\,dx.$$
Entonces $du = 2e^{2x}\,dx$ (derivamos e^{2x}) y $v = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)$ (primitiva de la función $\cos(3x)$). Aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos:
$$\int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{e^{2x}\operatorname{sen}(3x)}{3} - \frac{2}{3}\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx. \qquad (2.14)$$
En esta última primitiva volvemos a aplicar integración por partes eligiendo
$$u = e^{2x} \quad \text{y} \quad dv = \operatorname{sen}(3x)\,dx,$$
de manera que $du = 2e^{2x}\,dx$ y $v = -\frac{1}{3}\cos(3x)$, luego
$$\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = -\frac{e^{2x}\cos(3x)}{3} + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx.$$
Sustituyendo en (2.14) deducimos:
$$\int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \frac{e^{2x}\operatorname{sen}(3x)}{3} - \frac{2}{3}\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx =$$
$$= \frac{e^{2x}\operatorname{sen}(3x)}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{e^{2x}\cos(3x)}{3} + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx\right) =$$
$$= \frac{e^{2x}}{3}\left(\operatorname{sen}(3x) + \frac{2}{3}\cos(3x)\right) - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx.$$

De aquí podemos despejar $\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$ obteniendo

$$\int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \frac{3e^{2x}}{13}\left(\operatorname{sen}(3x)+\frac{2}{3}\cos(3x)\right)+C.$$

(iv) En este caso escribimos $\int x(x+1)^{10}\,dx = \int u\,dv$ eligiendo

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = (x+1)^{10}\,dx.$$

Entonces $du = dx$, $v = \dfrac{(x+1)^{11}}{11}$ y la fórmula de integración por partes nos da

$$\int x(x+1)^{10}\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du =$$
$$= \frac{x(x+1)^{11}}{11} - \frac{1}{11}\int (x+1)^{11}\,dx = \frac{x(x+1)^{11}}{11} - \frac{(x+1)^{12}}{132} + C = \frac{(x+1)^{11}(11x-1)}{132} + C.$$

□

Ejercicio 2.2.16. *Calcula las siguientes primitivas:*

(i) $\int 2^x \operatorname{sen} x\,dx$ *(ii)* $\int \dfrac{\ln(3x)}{x^2}\,dx$ *(iii)* $\int 2^{-x}(x+1)^2\,dx$ *(iv)* $\int 5^x \operatorname{sen}(x+1)\,dx$

SOLUCIÓN. (i) Si aplicamos el método de integración por partes eligiendo $u = 2^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$, tenemos $du = \ln 2\cdot 2^x\,dx$, $v = -\cos x$ y nos queda:

$$\int 2^x \operatorname{sen} x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = -2^x\cos x + \ln 2 \int 2^x \cos x\,dx. \tag{2.15}$$

A esta última primitiva le podemos aplicar de nuevo el método de integración por partes eligiendo $u = 2^x$ y $dv = \cos x\,dx$, de manera que $du = \ln 2\cdot 2^x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$ y así:

$$\int 2^x \cos x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = 2^x \operatorname{sen} x - \ln 2 \int 2^x \operatorname{sen} x\,dx. \tag{2.16}$$

Llamando $I = \int 2^x \operatorname{sen} x\,dx$ y sustituyendo (2.16) en (2.15), obtenemos la ecuación:

$$I = -2^x\cos x + \ln 2\cdot\left(2^x \operatorname{sen} x - \ln 2\cdot I\right).$$

Despejando I en esta ecuación, deducimos que

$$\int 2^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{2^x\left(\ln 2\cdot \operatorname{sen} x - \cos x\right)}{1+(\ln 2)^2} + C.$$

(ii) Ahora aplicamos el método de integración por partes con la elección $u = \ln(3x)$ y $dv = \frac{1}{x^2}\,dx$, de manera que $du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = -\frac{1}{x}$ y así:

$$\int \frac{\ln(3x)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(3x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(3x)}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{\ln(3x)+1}{x} + C.$$

(iii) Vamos a utilizar la fórmula de integración por partes eligiendo $u = (x+1)^2$ y $dv = 2^{-x}\,dx$. Entonces $du = 2(x+1)\,dx$, $v = -\dfrac{2^{-x}}{\ln 2}$ y nos queda:

$$\int 2^{-x}(x+1)^2\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = -\frac{2^{-x}(x+1)^2}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 2}\int 2^{-x}(x+1)\,dx.$$

A esta última primitiva también le podemos aplicar el método de integración por partes tomando $u = x+1$ y $dv = 2^{-x}\,dx$, de manera que $du = dx$, $v = -\dfrac{2^{-x}}{\ln 2}$ y así:

$$\int 2^{-x}(x+1)\,dx = -\frac{2^{-x}(x+1)}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}\int 2^{-x}\,dx = -\frac{2^{-x}(x+1)}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2} + C.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\int 2^{-x}(x+1)^2\,dx &= -\frac{2^{-x}(x+1)^2}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 2}\left(-\frac{2^{-x}(x+1)}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2}\right) + C = \\ &= \frac{-2^{-x}}{\ln 2}\left((x+1)^2 + \frac{2}{\ln 2}(x+1) + \frac{2}{(\ln 2)^2}\right) + C\end{aligned}$$

(iv) Podemos escribir $\int 5^x \operatorname{sen}(x+1)\,dx = \int u\,dv$ eligiendo

$$u = 5^x \quad \text{y} \quad dv = \operatorname{sen}(x+1)\,dx.$$

Entonces $du = \ln 5 \cdot 5^x\,dx$, $v = -\cos(x+1)$ y la fórmula de integración por partes nos da

$$\int 5^x \operatorname{sen}(x+1)\,dx = -5^x\cos(x+1) + \ln 5 \int 5^x \cos(x+1)\,dx. \tag{2.17}$$

A esta primitiva le podemos aplicar de nuevo el método de integración por partes tomando $u = 5^x$ y $dv = \cos(x+1)\,dx$, de manera que $du = \ln 5 \cdot 5^x\,dx$, $v = \operatorname{sen}(x+1)$ y así:

$$\int 5^x \cos(x+1)\,dx = 5^x \operatorname{sen}(x+1) - \ln 5 \int 5^x \operatorname{sen}(x+1)\,dx. \tag{2.18}$$

Llamando $I = \displaystyle\int 5^x \operatorname{sen}(x+1)\,dx$ y sustituyendo (2.18) en (2.17), obtenemos la ecuación:

$$I = -5^x \cos(x+1) + \ln 5 \cdot (5^x \operatorname{sen}(x+1) - \ln 5 \cdot I).$$

Finalmente, despejando I en esta ecuación, deducimos:

$$\int 5^x \operatorname{sen}(x+1)\,dx = \frac{5^x (\ln 5 \cdot \operatorname{sen}(x+1) - \cos(x+1))}{1+(\ln 5)^2} + C.$$

□

Ejercicio 2.2.17. *Calcula las siguientes integrales:*

$$\textit{(i)} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) dx \qquad \textit{(ii)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$\textit{(iii)} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{e^{2\cos x}}\,dx \qquad \textit{(iv)} \int_{-\sqrt[8]{2}}^{0} \frac{x^3}{2+x^8}\,dx$$

SOLUCIÓN. En cada apartado, vamos a calcular primero una primitiva de la funcion a integrar, para aplicar después la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13).

(i) Buscamos la primitiva mediante el cambio de variable $t = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, de manera que $dt = -\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ y así:

$$\int \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) dx = \int \frac{\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Ahora calculamos la integral mediante la Regla de Barrow:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) dx = \left[-\ln\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = -\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln|\cos 0| = \frac{\ln 2}{2}.$$

(ii) Para la primitiva usamos el cambio de variable $t = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, así $dt = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$ y entonces

$$\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\int t^3\,dt = \frac{t^4}{2} + C = \frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + C.$$

Ahora calculamos la integral con la Regla de Barrow:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \left[\frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} - \frac{\operatorname{sen}^4\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2} = 0,$$

ya que $\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{4}) = -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})$.

(iii) Primero hallamos la primitiva mediante el cambio de variable $t = 2\cos x$, de manera que $dt = -2\operatorname{sen} x\,dx$ y nos queda:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{e^{2\cos x}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{e^t}\,dt = -\frac{1}{2}\int e^{-t}\,dt = \frac{e^{-t}}{2} + C = \frac{e^{-2\cos x}}{2} + C.$$

Calculamos la integral mediante la Regla de Barrow:

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{e^{2\cos x}}\,dx = \left[\frac{e^{-2\cos x}}{2}\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{e^{-2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}}{2} - \frac{e^{-2\cos(\pi)}}{2} = \frac{1-e^2}{2}.$$

(iv) Para hallar la primitiva tomamos como “nueva variable” $t = \dfrac{x^4}{\sqrt{2}}$, así $dt = \dfrac{4x^3}{\sqrt{2}}\,dx$ y además $2t^2 = x^8$. Sustituyendo:

$$\int \frac{x^3}{2+x^8}\,dx = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{2+2t^2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{8}\arctan t + C = \frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Calculamos ahora la integral pedida con la Regla de Barrow:

$$\int_{-\sqrt[8]{2}}^{0} \frac{x^3}{2+x^8}\,dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\sqrt[8]{2}}^{0} = \frac{\sqrt{2}}{8}\arctan 0 - \frac{\sqrt{2}}{8}\arctan 1 = -\frac{\sqrt{2}\pi}{32}.$$

□

Ejercicio 2.2.18. *Calcula las siguientes integrales:*

$$\textit{(i)} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} \frac{\ln(3x)}{x}\,dx \qquad \textit{(ii)} \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}$$

$$\textit{(iii)} \int_0^2 x2^x\,dx \qquad \textit{(iv)} \int_1^2 x^2\ln x\,dx \qquad \textit{(v)} \int_1^e x(\ln x)^2\,dx$$

SOLUCIÓN.

En cada apartado, vamos a calcular primero una primitiva de la funcion a integrar, para aplicar después la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13).

(i) Calculamos la primitiva $\displaystyle\int \frac{\ln(3x)}{x}\,dx$ mediante el cambio de variable $t = \ln(3x)$. Entonces $dt = 3\dfrac{1}{3x}\,dx = \dfrac{1}{x}\,dx$ y, sustituyendo, tenemos:

$$\int \frac{\ln(3x)}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln(3x))^2}{2} + C.$$

Aplicamos ahora la Regla de Barrow para calcular la integral pedida:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} \frac{\ln(3x)}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln(3x))^2}{2}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Calculamos la primitiva $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ mediante el cambio de variable $t = x^2+1$. Entonces $dt = 2x\,dx$ y así

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Utilizamos la Regla de Barrow para calcular la integral pedida:

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \left[\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = \frac{(1^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(0^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

(iii) Vamos a calcular la primitiva $\int x2^x\,dx$ mediante integración por partes, eligiendo

$$u = x \qquad \text{y} \qquad dv = 2^x\,dx.$$

Entonces $du = dx$ y $v = \dfrac{2^x}{\ln 2}$ (primitiva de 2^x), luego

$$\int x2^x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du =$$
$$= \frac{x2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2}\,dx = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,dx = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + C = \frac{2^x}{\ln 2}\left(x - \frac{1}{\ln 2}\right) + C.$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_0^2 x2^x\,dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\left(x - \frac{1}{\ln 2}\right)\right]_0^2 = \frac{2^2}{\ln 2}\left(2 - \frac{1}{\ln 2}\right) - \frac{2^0}{\ln 2}\left(0 - \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{8}{\ln 2} - \frac{3}{(\ln 2)^2}.$$

(iv) Calculamos la primitiva $\int x^2 \ln x\,dx$ mediante integración por partes, eligiendo

$$u = \ln x \qquad \text{y} \qquad dv = x^2\,dx.$$

Entonces $du = \dfrac{1}{x}\,dx$, $v = \dfrac{x^3}{3}\,dx$ y

$$\int x^2 \ln x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du =$$
$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C.$$

Finalmente, para calcular la integral pedida, utilizamos la Regla de Barrow:

$$\int_1^2 x^2 \ln x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)\right]_1^2 =$$
$$= \frac{2^3}{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1^3}{3}\left(\ln 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9} = \frac{8\ln 2}{3} - \frac{7}{9}.$$

(v) En primer lugar, calculamos la primitiva aplicando el método de integración por partes eligiendo $u = (\ln x)^2$ y $dv = x\,dx$. Entonces $du = \dfrac{2\ln x}{x}dx$ y $v = \dfrac{x^2}{2}$. Por tanto:

$$\int x(\ln x)^2\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du =$$
$$= \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{2\ln x}{x}\,dx = \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int x\ln x\,dx.$$

Y esta última primitiva también se calcula mediante integración por partes (véase el apartado (ii) del Ejercicio 2.2.14):

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\int x(\ln x)^2\,dx = \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C = \frac{x^2}{2}\left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C.$$

Ahora podemos aplicar la Regla de Barrow para calcular la integral pedida:

$$\int_1^e x(\ln x)^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right)\right]_1^e =$$
$$= \frac{e^2}{2}\left((\ln e)^2 - \ln e + \frac{1}{2}\right) - \frac{1^2}{2}\left((\ln 1)^2 - \ln 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right),$$

ya que $\ln e = 1$ y $\ln 1 = 0$. □

Ejercicio 2.2.19. *Calcula las siguientes primitivas:*

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$ *(ii)* $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2-1)}\,dx$ *(iii)* $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$

SOLUCIÓN. (i) El denominador se descompone como producto de dos factores lineales distintos:

$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Por tanto, podemos escribir la fracción racional como suma de dos fracciones simples del modo siguiente:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

para ciertas constantes $A,B\in\mathbb{R}$ a determinar. Operando

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

e igualando numeradores, tenemos: $1=A(x+1)+B(x-1)$. Sustituyendo en esta identidad $x=-1$ y $x=1$ obtenemos $1=-2B$ y $1=2A$, luego $A=\frac{1}{2}$ y $B=-\frac{1}{2}$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-1}\,dx&=\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx=\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.\end{aligned}$$

(ii) En la fracción racional dada, el numerador y el denominador tienen el mismo grado. Así que en primer lugar debemos realizar la división de x^3+x+1 entre $x(x^2-1)$, que da como cociente 1 y como resto $2x+1$. Por tanto:

$$\frac{x^3+x+1}{x(x^2-1)}=1+\frac{2x+1}{x(x^2-1)}. \tag{2.19}$$

Tenemos que calcular la primitiva de la fracción racional $\frac{2x+1}{x(x^2-1)}$, cuyo denominador es el producto de tres factores lineales distintos: x, $x-1$ y $x+1$. En esta situación, podemos escribir la fracción racional como suma de tres fracciones simples:

$$\frac{2x+1}{x(x^2-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{x+1}$$

para ciertas constantes $A,B,D\in\mathbb{R}$ a determinar. Para ello, operamos e igualamos numeradores:

$$\frac{2x+1}{x(x^2-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{x+1}=\frac{A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Dx(x-1)}{x(x^2-1)},$$

luego $2x+1=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Dx(x-1)$. Damos valores a x:

- $x = 0 \Longrightarrow A = -1.$
- $x = 1 \Longrightarrow B = \dfrac{3}{2}.$
- $x = -1 \Longrightarrow D = -\dfrac{1}{2}.$

Sustituimos y tomamos primitivas:

$$\int \frac{2x+1}{x(x^2-1)}\,dx = \int \Big(-\frac{1}{x} + \frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\Big)\,dx =$$
$$= -\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx = -\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

Finalmente, teniendo en cuenta (2.19) obtenemos la primitiva buscada:

$$\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2-1)}\,dx = x + \int \frac{2x+1}{x(x^2-1)}\,dx = x - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

(iii) El denominador es el producto de un factor lineal (x) y el cuadrado de otro factor lineal distinto ($x+1$). Entonces podemos escribir la fracción racional como suma de tres fracciones simples:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

para ciertas constantes $A, B, D \in \mathbb{R}$ que vamos a determinar. Operamos

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Dx}{x(x+1)^2}$$

e igualamos numeradores: $1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Dx$. En esta identidad sustituimos x por tres valores:

- $x = 0 \Longrightarrow A = 1.$
- $x = -1 \Longrightarrow D = -1.$
- $x = 1 \Longrightarrow 1 = 4A + 2B + D$, de donde $B = -1$.

Para terminar, sustituimos y tomamos primitivas:

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx = \int \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\Big)\,dx = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

□

Ejercicio 2.2.20. *Calcula las siguientes primitivas:*

$$(i) \int \frac{1}{4x^2-4x+5}\,dx \qquad (ii) \int \frac{2x}{x^2+2x+10}\,dx$$

SOLUCIÓN. (i) El denominador de la fracción racional dada es un polinomio de grado 2 sin raíces reales. Tenemos:

$$\frac{1}{4x^2-4x+5} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2-x+\frac{5}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1},$$

luego

$$\int \frac{1}{4x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\arctan\left(x-\frac{1}{2}\right)+C,$$

donde la última primitiva la hemos resuelto mediante el cambio de variable $t = x - \dfrac{1}{2}$.

(ii) El denominador de la fracción racional es de nuevo un polinomio de grado 2 sin raíces reales. A diferencia del apartado (i), en este caso el numerador no es constante y operamos de la manera siguiente:

$$\frac{2x}{x^2+2x+10} = \frac{2x+2}{x^2+2x+10} - \frac{2}{x^2+2x+10},$$

luego

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,dx - \int \frac{2}{x^2+2x+10}\,dx =$$
$$= \ln(x^2+2x+10) - \int \frac{2}{x^2+2x+10}\,dx.$$

Esta última primitiva la calculamos mediante el procedimiento del apartado (i):

$$\int \frac{2}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{2}{(x+1)^2+9}\,dx = \frac{2}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}\,dx.$$

Realizamos el cambio de variable $t = \dfrac{x+1}{3}$ ($dt = \dfrac{1}{3}dx$) y queda:

$$\int \frac{2}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{2}{9}\int \frac{3}{t^2+1}\,dx = \frac{2}{3}\arctan(t)+C = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)+C.$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+10}\,dx = \ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)+C.$$

□

2.3. Integrales impropias

Contenidos

- Integrales impropias en intervalos no acotados.
- Criterios de Comparación.

Teoría

En esta lección estudiamos las integrales impropias de funciones continuas definidas en intervalos cerrados pero no acotados.

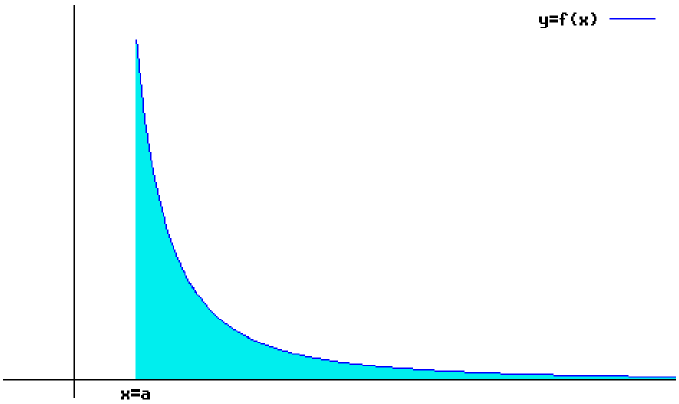
Definición 2.3.1. *Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua. Para cada $b > a$ podemos considerar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Si existe el límite*

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = L \in \mathbb{R}$$

entonces escribimos

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = L$$

y decimos que la integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **converge**. *En caso contrario, decimos que dicha integral impropia* **diverge**.



Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$ y la integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge, entonces el valor de dicha integral impropia es el área del recinto comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y la recta $x = a$.

Observación 2.3.2. *Sean $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y $c > a$. Entonces:*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_c^\infty f(x)\,dx \text{ converge.}$$

En tal caso, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx.$

Demostración. Basta observar que para cualquier $b > c$ se cumple

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

según la Proposición 2.1.11. □

Veamos un primer ejemplo de integral impropia convergente:

Ejemplo 2.3.3. *La integral impropia* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ *converge y vale* 1.

Demostración. Vamos a calcular la integral $\displaystyle\int_0^b e^{-x}\,dx$ para $b > 0$, buscando primero una primitiva de la función e^{-x} y aplicando después la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13). Con el cambio de variable $t = -x$ tenemos $dt = -dx$ y

$$\int e^{-x}\,dx = \int -e^t\,dt = -\int e^t\,dt = -e^t + C = -e^{-x} + C,$$

así que

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b} - (-e^0) = 1 - e^{-b}.$$

Como $\displaystyle\lim_{b\to\infty} e^{-b} = 0$, obtenemos

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-b}) = 1 - 0 = 1.$$

Por tanto, la integral impropia converge y $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$ □

El siguiente ejemplo será útil más adelante.

Ejemplo 2.3.4. *La integral impropia*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

converge para $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$.

Demostración. Calculamos primero la integral $\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx$ para $b>0$. La primitiva $\displaystyle\int \frac{1}{x^p}\,dx$ es inmediata:

$$\int \frac{1}{x^p}\,dx = \int x^{-p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1} + C & \text{si } p \neq 1, \\ \ln|x| + C & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Aplicando la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13), deducimos:

$$\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1} = \frac{b^{-p+1}-1}{-p+1} \quad \text{si } p \neq 1,$$

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b.$$

Distinguimos ahora los dos casos.

$\boxed{p \neq 1}$ Teniendo en cuenta que

$$\lim_{x\to\infty} x^c = \begin{cases} 0 & \text{si } c<0 \\ \infty & \text{si } c>0 \end{cases}$$

concluimos que

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{-p+1}-1}{-p+1} = \begin{cases} \dfrac{-1}{-p+1} & \text{si } p>1, \\ \infty & \text{si } p<1. \end{cases}$$

Por tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ converge para $p>1$ y diverge para $p<1$.

$\boxed{p = 1}$ La integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverge, ya que

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty.$$

Esto completa la demostración. □

A veces, estudiar la convergencia de una integral impropia directamente (es decir, usando una primitiva) puede ser complicado o incluso imposible, como ocurre con la función e^{-x^2} (véase el Ejemplo 2.3.6 de abajo). En tales casos, se necesitan métodos indirectos, como los que presentamos en las dos proposiciones siguientes.

Proposición 2.3.5 (Criterio de Comparación I)**.** *Sean $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $0\leq f(x)\leq g(x)$ para todo $x\geq a$. Se cumple:*

(i) Si $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ también converge.

(ii) Si $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ también diverge.

Ejemplo 2.3.6. *La integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente. Utilizando matemáticas más avanzadas se puede demostrar que dicha integral impropia vale $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.*

Demostración. Según la Observación 2.3.2, basta demostrar que la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge. Para ello, vamos a aplicar el Criterio de Comparación I a las funciones $f(x)=e^{-x^2}$ y $g(x)=e^{-x}$. En primer lugar, veamos que

$$0<e^{-x^2}\leq e^{-x}\quad\text{para todo } x\geq 1. \tag{2.20}$$

En efecto, la desigualdad $0<e^{-x^2}$ se cumple porque $e^t>0$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Por otro lado, tenemos

$$x\geq 1 \quad\overset{I}{\Longrightarrow}\quad x^2\geq x \quad\Longrightarrow\quad -x^2\leq -x \quad\overset{II}{\Longrightarrow}\quad e^{-x^2}\leq e^{-x},$$

donde $\overset{I}{\Longrightarrow}$ es consecuencia de multiplicar por x la desigualdad $x\geq 1$, mientras que $\overset{II}{\Longrightarrow}$ se deduce del hecho de que la función e^t es creciente.

Por otro lado, la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ converge (véase el Ejemplo 2.3.3 y la Observación 2.3.2). En vista de (2.20), podemos aplicar el Criterio de Comparación I (Proposición 2.3.5) para deducir que la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ también converge, como se quería demostrar. □

Proposición 2.3.7 (Criterio de Comparación II)**.** *Sean $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ dos funciones continuas no negativas tales que existe:*

$$C=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}.$$

Se cumple:

(i) Si $C=0$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ también converge.

(ii) *Si* $C = \infty$ *y* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *converge, entonces* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *también converge.*

(iii) *Si* $C \in (0,\infty)$ *entonces*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge} \iff \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ converge.}$$

Ejemplo 2.3.8. *La integral impropia* $\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx$ *es convergente, mientras que la integral impropia* $\int_1^\infty \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$ *es divergente.*

Demostración. Según hemos visto en el Ejemplo 2.3.4, $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ converge. Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^4+1}}{\frac{1}{x^3}} = 1,$$

el Criterio de Comparación II garantiza que $\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx$ converge. Por otro lado, la integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverge (Ejemplo 2.3.4). Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2+x+1}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

el Criterio de Comparación II nos dice que $\int_1^\infty \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$ diverge. □

Finalizamos la lección introduciendo el concepto de integral impropia para funciones definidas en todo $\mathbb{R}$ o en intervalos de la forma $(-\infty, b]$.

Definición 2.3.9. *Sea* $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Para cada* $a < b$ *podemos considerar la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$*. Si existe el límite*

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx = L \in \mathbb{R}$$

entonces escribimos

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = L$$

y decimos que la integral impropia $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ **converge**. *En caso contrario, decimos que dicha integral impropia* **diverge**.

Definición 2.3.10. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua. Decimos que la integral impropia* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ **converge** *si las integrales impropias* $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ *y* $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ *convergen. En tal caso, escribimos*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

En caso contrario, decimos que la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ **diverge**.

Ejemplo 2.3.11. *La integral impropia* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ *converge y vale* π.

Demostración. Vamos a comenzar estudiando la integral impropia $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ con la ayuda de la primitiva (inmediata)

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C.$$

Dado $a<0$, podemos aplicar la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) obteniendo

$$\int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \big[\arctan x\big]_a^0 = \arctan 0 - \arctan a = -\arctan a.$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, deducimos que

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \big(-\arctan a\big) = \frac{\pi}{2},$$

luego la integral impropia $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ converge y vale $\frac{\pi}{2}$.

De manera similar, se puede comprobar que la integral impropia $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ converge y vale $\frac{\pi}{2}$. Por tanto, la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ converge y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

□

Ejercicios

Ejercicio 2.3.12. *Determina si las siguientes integrales impropias convergen y, en tal caso, calcula su valor:*

$$\text{(i)} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx \qquad \text{(ii)} \int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx \qquad \text{(iii)} \int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \qquad \text{(iv)} \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

SOLUCIÓN. (i) Comenzamos calculando una primitiva de $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ mediante el cambio de variable $t = x+2$, de manera que $dt = dx$ y así:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx = \int t^{-1/2}\,dt = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x+2} + C.$$

Ahora aplicamos la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) para calcular $\displaystyle\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$ en función de $b > 1$:

$$\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx = \left[2\sqrt{x+2}\right]_1^b = 2\sqrt{b+2} - 2\sqrt{1+2} = 2\left(\sqrt{b+2} - \sqrt{3}\right).$$

Finalmente, como $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$, obtenemos

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx = \lim_{b\to\infty} 2\left(\sqrt{b+2} - \sqrt{3}\right) = \infty,$$

luego la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$ diverge.

(ii) Calculamos la primitiva $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$ mediante integración por partes, tomando

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = e^{-x}\,dx.$$

Entonces $du = dx$ y $v = -e^{-x}$. Aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C.$$

Ahora utilizamos la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) para calcular la integral de la función xe^{-x} en el intervalo $[0,b]$, siendo $b > 0$ arbitrario:

$$\int_0^b xe^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^b = -e^{-b}(b+1) + e^0(0+1) = -e^{-b}(b+1) + 1 = -\frac{b+1}{e^b} + 1.$$

Como $\lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{b+1}{e^b} = 0$ (por la Regla de L'Hôpital, Teorema 1.3.6), deducimos:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b+1}{e^b}+1\right) = \lim_{b\to\infty} -\frac{b+1}{e^b}+1 = 0+1 = 1.$$

Por tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$ converge y vale 1.

(iii) En primer lugar, hallamos la primitiva de $\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ mediante el cambio de variable $t = \ln x$. Entonces $dt = \dfrac{1}{x}\,dx$ y, sustituyendo, nos queda

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}+C = -\frac{1}{\ln x}+C.$$

En segundo lugar, dado cualquier $b > e$, calculamos $\displaystyle\int_e^b \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$ mediante la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13):

$$\int_e^b \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_e^b = -\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln e} = -\frac{1}{\ln b}+1.$$

Finalmente, tomamos límites cuando $b\to\infty$:

$$\lim_{b\to\infty} \int_e^b \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+1\right) = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{\ln b}+1 = 0+1 = 1.$$

Luego la integral impropia $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$ converge y vale 1.

(iv) Calculamos la primitiva $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ mediante el cambio de variable $t = 1+x^2$. En efecto, tenemos $dt = 2x\,dx$ y, sustituyendo, queda:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t|+C = \frac{\ln(1+x^2)}{2}+C.$$

Fijado $a < 0$, podemos aplicar la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) obteniendo:

$$\int_a^0 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_a^0 = \frac{\ln(1+0^2)}{2} - \frac{\ln(1+a^2)}{2} = -\frac{\ln(1+a^2)}{2}.$$

Tomando límites cuando $a\to-\infty$, tenemos:

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} -\frac{\ln(1+a^2)}{2} = -\infty,$$

así que la integral impropia $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ diverge. $\square$

Ejercicio 2.3.13. *Determina si las siguientes integrales impropias convergen y, en tal caso, calcula su valor:*

(i) $\int_{e}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ *(ii)* $\int_{0}^{\infty} e^{-3x}\,dx$ *(iii)* $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx$ *(iv)* $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2}\,dx$

SOLUCIÓN. (i) Para calcular la primitiva utilizamos el cambio de variable $t = \ln x$. Entonces $dt = \frac{1}{x}\,dx$ y sustituyendo obtenemos:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

En segundo lugar, para cada $b > e$ calculamos la integral $\int_{e}^{b} \frac{\ln x}{x}\,dx$ mediante la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13):

$$\int_{e}^{b} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{e}^{b} = \frac{(\ln b)^2}{2} - \frac{(\ln e)^2}{2} = \frac{(\ln b)^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Finalmente, tomamos límites cuando $b \to \infty$:

$$\lim_{b\to\infty} \int_{e}^{b} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{(\ln b)^2}{2} - \frac{1}{2} = \infty,$$

luego la integral impropia $\int_{e}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ diverge.

(ii) Haciendo el cambio de variable $t = -3x$, tenemos $dt = -3\,dx$ y

$$\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int e^{t}\,dt = -\frac{e^t}{3} + C = -\frac{e^{-3x}}{3} + C.$$

Para cada $b > 0$, calculamos la integral $\int_{0}^{b} e^{-3x}\,dx$ aplicando la Regla de Barrow:

$$\int_{0}^{b} e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{e^{-3x}}{3}\right]_{0}^{b} = -\frac{e^{-3b}}{3} + \frac{e^0}{3} = \frac{1-e^{-3b}}{3}.$$

Tomando límites cuando $b \to \infty$, obtenemos:

$$\lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1-e^{-3b}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, la integral impropia converge y $\int_0^\infty e^{-3x}\,dx = \dfrac{1}{3}$.

(iii) La primitiva $\int e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx$ se puede calcular mediante el método de integración por partes. Alternativamente, vamos a utilizar la primitiva

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + C \tag{2.21}$$

que ya habíamos obtenido en el Ejercicio 2.2.14(iv) (usando integración por partes).

Aplicamos el cambio de variable $t = -x$ a la primitiva original. Entonces $dt = -dx$ y sustituyendo nos queda:

$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx = -\int e^t \operatorname{sen}(-t)\,dt \overset{(*)}{=} \int e^t \operatorname{sen} t\,dt \overset{(2.21)}{=}$$
$$\overset{(2.21)}{=} \frac{e^t(\operatorname{sen} t - \cos t)}{2} + C = \frac{e^{-x}(\operatorname{sen}(-x) - \cos(-x))}{2} + C \overset{(*)}{=} -\frac{e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)}{2} + C,$$

donde las igualdades con $(*)$ son consecuencia de que la función seno es impar y la función coseno es par, es decir, $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ahora, para cada $b > 0$, aplicamos la Regla de Barrow para obtener

$$\int_0^b e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx = \left[-\frac{e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)}{2}\right]_0^b =$$
$$= -\frac{e^{-b}(\operatorname{sen} b + \cos b)}{2} + \frac{e^0(\operatorname{sen} 0 + \cos 0)}{2} = \frac{1 - e^{-b}(\operatorname{sen} b + \cos b)}{2}.$$

Como $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-b} = 0$ y

$$|\operatorname{sen} b + \cos b| \le |\operatorname{sen} b| + |\cos b| \le 2 \quad \text{para todo } b \in \mathbb{R},$$

también se cumple $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-b}(\operatorname{sen} b + \cos b) = 0$. Por tanto:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1 - e^{-b}(\operatorname{sen} b + \cos b)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Así, la integral impropia converge y $\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx = \dfrac{1}{2}$.

(iv) Aplicamos el cambio de variable $t = \dfrac{x}{2}$, de manera que $dt = \dfrac{1}{2}dx$ y

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = 2\int \frac{1}{4+4t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Dado cualquier $a<0$, calculamos la integral $\displaystyle\int_a^0 \frac{1}{4+x^2}\,dx$ mediante la Regla de Barrow:

$$\int_a^0 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_a^0 = \frac{1}{2}\arctan(0) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{a}{2}\right).$$

Finalmente, tomamos límites cuando $a \to -\infty$:

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Luego la integral impropia converge y $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$. □

Ejercicio 2.3.14. *Estudia la convergencia de la siguiente integral impropia en función del valor del parámetro p, que puede ser un número real cualquiera:*

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$$

SOLUCIÓN. En primer lugar, hallamos la primitiva $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$ mediante el cambio de variable $t=\ln x$. Entonces $dt = \frac{1}{x}\,dx$ y al sustituir obtenemos:

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \int \frac{1}{t^p}\,dt = \begin{cases} \dfrac{t^{-p+1}}{-p+1} & \text{si } p\neq 1 \\ \ln|t| & \text{si } p=1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1} & \text{si } p\neq 1 \\ \ln|\ln x| & \text{si } p=1 \end{cases}$$

En vista de este resultado, vamos a distinguir dos casos.

CASO $p\neq 1$. Para cada $b>e$, aplicamos la Regla de Barrow para calcular

$$\int_e^b \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1}\right]_e^b = \frac{(\ln b)^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(\ln e)^{-p+1}}{-p+1} = \frac{(\ln b)^{-p+1}}{-p+1} + \frac{1}{p-1}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{b\to\infty}(\ln b)^{-p+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } p>1 \\ \infty & \text{si } p<1 \end{cases}$$

deducimos:

$$\lim_{b\to\infty}\int_e^b \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{si } p>1 \\ \infty & \text{si } p<1 \end{cases}$$

Por tanto, la integral impropia $\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$ converge si $p > 1$ y diverge si $p < 1$.

CASO $p = 1$. Para cada $b > e$, aplicamos la Regla de Barrow para calcular

$$\int_e^b \frac{1}{x\ln x}\,dx = [\ln(\ln x)]_e^b = \ln(\ln b) - \ln(\ln e) = \ln(\ln b).$$

Tomando límites cuando $b \to \infty$, resulta que

$$\lim_{b\to\infty} \int_e^b \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln b) = \infty,$$

luego la integral impropia $\int_e^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ diverge. $\square$

Ejercicio 2.3.15. *Demuestra que las siguientes integrales impropias convergen y calcula su valor:*

$$\text{(i)} \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{3x}\,dx \qquad\qquad \text{(ii)} \int_0^{\infty} 3^{-x}\cos x\,dx$$

SOLUCIÓN. (i) Calculamos la primitiva mediante integración por partes eligiendo $u = x^2$ y $dv = e^{3x}\,dx$, de manera que $du = 2x\,dx$, $v = \frac{e^{3x}}{3}$ y así:

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int x e^{3x}\,dx.$$

A esta última primitiva le aplicamos el método de integración por partes tomando $u = x$ y $dv = e^{3x}\,dx$, así que $du = dx$, $v = \frac{e^{3x}}{3}$ y nos queda:

$$\int x e^{3x}\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C.$$

Por tanto:

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}\right) + C = \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right) + C.$$

A continuación, para cualquier $a < 0$, calculamos la integral en el intervalo $[a, 0]$:

$$\int_a^0 x^2 e^{3x}\,dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right)\right]_a^0 = \frac{2}{27} - \frac{e^{3a}}{3}\left(a^2 - \frac{2a}{3} + \frac{2}{9}\right).$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital (Teorema 1.3.6), se comprueba fácilmente que

$$\lim_{a\to-\infty} \frac{e^{3a}}{3}\left(a^2-\frac{2a}{3}+\frac{2}{9}\right)=0$$

y, por tanto,

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x^2e^{3x}\,dx=\frac{2}{27}.$$

Luego la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^2e^{3x}\,dx$ converge y vale $\dfrac{2}{27}$.

(ii) Para calcular la primitiva, aplicamos el método de integración por partes eligiendo $u=3^{-x}$ y $dv=\cos x\,dx$, de manera que $du=-\ln 3\cdot 3^{-x}\,dx$, $v=\operatorname{sen} x$ y nos queda:

$$\int 3^{-x}\cos x\,dx=\int u\,dv=uv-\int v\,du=3^{-x}\operatorname{sen} x+\ln 3\int 3^{-x}\operatorname{sen} x\,dx. \tag{2.22}$$

A esta última primitiva le podemos aplicar de nuevo el método de integración por partes eligiendo $u=3^{-x}$ y $dv=\operatorname{sen} x\,dx$. Entonces $du=-\ln 3\cdot 3^{-x}\,dx$, $v=-\cos x$ y así:

$$\int 3^{-x}\operatorname{sen} x\,dx=-3^{-x}\cos x-\ln 3\int 3^{-x}\cos x\,dx. \tag{2.23}$$

Llamando $I=\displaystyle\int 3^{-x}\cos x\,dx$ y sustituyendo (2.23) en (2.22), deducimos la ecuación:

$$I=3^{-x}\operatorname{sen} x+\ln 3\cdot\left(-3^{-x}\cos x-\ln 3\cdot I\right).$$

Despejando I en esta ecuación, obtenemos la primitiva buscada:

$$\int 3^{-x}\cos x\,dx=\frac{3^{-x}(\operatorname{sen} x-\ln 3\cdot\cos x)}{1+(\ln 3)^2}+C.$$

A continuación, para cualquier $b>0$, calculamos la integral en el intervalo $[0,b]$:

$$\int_0^b 3^{-x}\cos x\,dx=\left[\frac{3^{-x}(\operatorname{sen} x-\ln 3\cdot\cos x)}{1+(\ln 3)^2}\right]_0^b=\frac{3^{-b}(\operatorname{sen} b-\ln 3\cdot\cos b)}{1+(\ln 3)^2}+\frac{\ln 3}{1+(\ln 3)^2}.$$

Finalmente, como $\lim\limits_{b\to\infty}3^{-b}=0$ y

$$|\operatorname{sen} b-\ln 3\cdot\cos b|\le|\operatorname{sen} b|+\ln 3|\cos b|\le 1+\ln 3\quad\text{para todo } b>0,$$

también tenemos $\lim\limits_{b\to\infty}3^{-b}(\operatorname{sen} b-\ln 3\cdot\cos b)=0$ y así deducimos que

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b 3^{-x}\cos x\,dx=\frac{\ln 3}{1+(\ln 3)^2}.$$

Por tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty 3^{-x}\cos x\,dx$ es convergente y vale $\dfrac{\ln 3}{1+(\ln 3)^2}$. $\square$

Ejercicio 2.3.16. *Utiliza los Criterios de Comparación para determinar si las siguientes integrales impropias convergen:*

$$\textit{(i)} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \qquad \textit{(ii)} \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$\textit{(iii)} \int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^7}}\,dx \qquad \textit{(iv)} \int_\pi^\infty \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx$$

SOLUCIÓN. (i) Tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}}{x^{-3/2}} = 1 \in (0,\infty).$$

Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ converge (Ejemplo 2.3.4), el Criterio de Comparación II (Proposición 2.3.7) asegura que la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$ también converge.

(ii) Observamos en primer lugar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{x}} = 2 \in (0,\infty).$$

Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverge (Ejemplo 2.3.4), podemos aplicar el Criterio de Comparación II (Proposición 2.3.7) para deducir que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ también diverge. Según la Observación 2.3.2, esto último equivale a decir que la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ diverge.

(iii) Tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^7}}}{x^{-5/2}} = 1 \in (0,\infty).$$

Teniendo en cuenta que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{5/2}}\,dx$ converge (Ejemplo 2.3.4), el Criterio de Comparación II (Proposición 2.3.7) nos asegura que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^7}}\,dx$ converge.

(iv) Para cualquier $x \neq 0$ tenemos:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \implies (\operatorname{sen} x)^2 \leq 1 \implies \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Como $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (Ejemplo 2.3.4 y Observación 2.3.2), el Criterio de Comparación I (Proposición 2.3.7) garantiza la convergencia de $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx$. □

Ejercicio 2.3.17. *Justifica razonadamente si es cierta o falsa la siguiente afirmación: "La región a la derecha del eje OY, comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x^3}$ y el eje OX, tiene un área infinita."*

SOLUCIÓN. Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$, la pregunta es equivalente a determinar si la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ diverge. Si intentamos calcular la primitiva de $f(x)$ nos encontramos con dificultades, así que vamos a abordar el problema mediante el Criterio de Comparación I (Proposición 2.3.5). Observamos que

$$x \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x^3 \geq x^2 \quad \Longrightarrow \quad e^{-x^3} \leq e^{-x^2} \quad \Longrightarrow \quad xe^{-x^3} \leq xe^{-x^2}. \tag{2.24}$$

Definimos la función $g(x) = xe^{-x^2}$. Vamos a comprobar, usando la definición, que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} g(x)\,dx$ es *convergente*. En efecto, mediante el cambio de variable $t = -x^2$ ($dt = -2x\,dx$) calculamos la primitiva:

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Para cualquier $b > 1$, la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) nos da

$$\int_1^b xe^{-x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_1^b = \frac{e^{-1} - e^{-b^2}}{2}.$$

Tomando límites cuando $b \to \infty$, como $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-b^2} = 0$, obtenemos

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-1} - e^{-b^2}}{2} = \frac{1}{2e}.$$

Por tanto, $\displaystyle\int_1^{\infty} g(x)\,dx$ converge. Teniendo en cuenta (2.24) y el Criterio de Comparación I, deducimos que $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge. Luego $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ también converge (aplicamos la Observación 2.3.2). Así que la afirmación del enunciado es *falsa*. □

2.4. Aproximación mediante métodos numéricos

Contenidos

- Método del Trapecio.
- Método de Simpson.
- Anexos: Métodos de Monte Carlo.

Teoría

Esta lección se dedica al estudio de algunos métodos numéricos que permiten calcular *aproximadamente* la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Método del Trapecio

- Dado $n\in\mathbb{N}$, sea $\ell(x)$ la función interpoladora *lineal* a trozos de $f(x)$ en los puntos de abscisas
$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \qquad k = 0,1,\ldots,n,$$
que dividen el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos $[x_{k-1},x_k]$ de longitud $\frac{b-a}{n}$.
- Fijado uno de estos subintervalos, podemos aproximar
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \int_{x_{k-1}}^{x_k} \ell(x)\,dx.$$
Es sencillo comprobar que
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \ell(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\big(f(x_{k-1})+f(x_k)\big).$$
Si $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[x_{k-1},x_k]$, entonces $\int_{x_{k-1}}^{x_k}\ell(x)\,dx$ es el área de un *trapecio* de altura $\frac{b-a}{n}$ y bases $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, véase la Figura 2.8 en la página 128.
- Si repetimos el procedimiento en cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$, obtenemos la siguiente estimación de la integral de f en $[a,b]$:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\ell(x)\,dx =$$
$$= \frac{b-a}{2n}\big(f(a)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(b)\big).$$

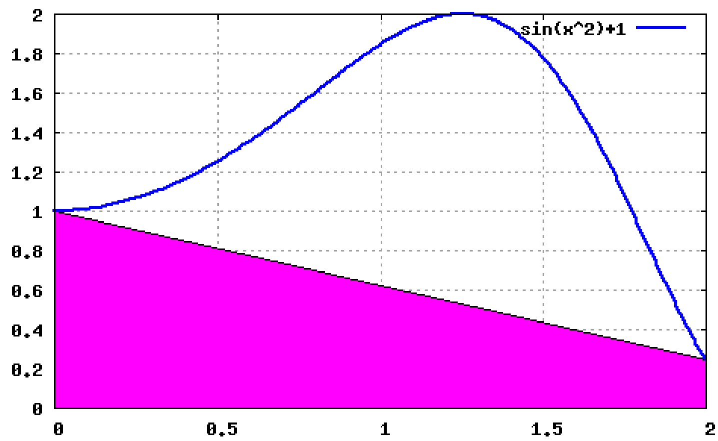


Figura 2.8: Gráficas de $f(x) = \text{sen}(x^2) + 1$ y la función lineal que coincide con f en 0 y 2. En violeta, el trapecio delimitado por la gráfica de dicha función lineal, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, la estimación anterior es la suma de las áreas de n *trapecios*, véase la Figura 2.9.

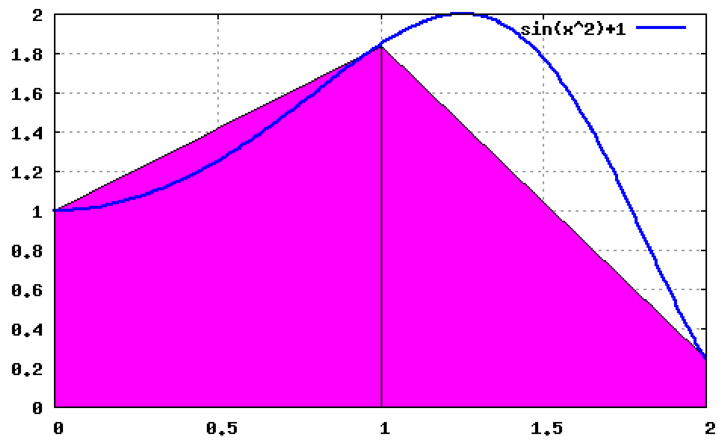


Figura 2.9: Método del Trapecio aplicado a $f(x) = \text{sen}(x^2) + 1$ en $[0,2]$ con $n = 2$ subintervalos.

Proposición 2.4.1 (Fórmula del Método del Trapecio)**.** *La aproximación de* $\int_a^b f(x)\,dx$ *que se obtiene mediante el Método del Trapecio con n subintervalos es:*

$$\text{Trapecio}_n(f) = \frac{b-a}{2n}\big(f(a) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\big).$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2.4.2. *Calculamos aproximadamente* $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ *mediante el Método del Trapecio con* 3 *y* 5 *subintervalos, respectivamente.*

Solución. Trabajamos con $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Comenzamos con $n = 3$ subintervalos. Entonces

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{3}, \quad x_3 = 2$$

y la aproximación obtenida aplicando la fórmula del Método del Trapecio es

$$\begin{aligned}\text{Trapecio}_3(f) &= \frac{2-1}{2\cdot 3}\left(f(1) + 2f\left(\frac{4}{3}\right) + 2f\left(\frac{5}{3}\right) + f(2)\right) = \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + 2\frac{3}{4} + 2\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{10} = 0.7.\end{aligned}$$

Por otro lado, en el caso de $n = 5$ subintervalos tenemos

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{6}{5}, \quad x_2 = \frac{7}{5}, \quad x_3 = \frac{8}{5}, \quad x_4 = \frac{9}{5}, \quad x_5 = 2.$$

La aproximación que da la fórmula del Método del Trapecio es

$$\begin{aligned}\text{Trapecio}_5(f) &= \frac{2-1}{2\cdot 5}\left(f(1) + 2f\left(\frac{6}{5}\right) + 2f\left(\frac{7}{5}\right) + 2f\left(\frac{8}{5}\right) + 2f\left(\frac{9}{5}\right) + f(2)\right) = \\ &= \frac{1}{10}\left(1 + 2\frac{5}{6} + 2\frac{5}{7} + 2\frac{5}{8} + 2\frac{5}{9} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1753}{2520} = 0.69563492063492.\end{aligned}$$

Esta aproximación es mejor que la obtenida con $n = 3$: el valor *exacto* (redondeado a 14 cifras decimales) de $\ln 2$ es 0.69314718055995. $\square$

A la hora de aproximar $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ mediante el Método del Trapecio, surgen algunas preguntas que debemos responder:

(1ª) ¿Podemos dar una *cota* superior del *error* absoluto $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \text{Trapecio}_n(f)\right|$ para valores concretos de n?

(2ª) Fijado cualquier $\varepsilon > 0$, ¿podemos determinar un número n de subintervalos para que dicho error sea menor que ε?

La proposición siguiente ayuda a responder estas preguntas.

Proposición 2.4.3 (Error en el Método del Trapecio)**.** *Si f es de clase $\mathscr{C}^2$ en $[a,b]$ y $M > 0$ es una constante tal que $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \mathrm{Trapecio}_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^2} \cdot M \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Trapecio}_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Vamos a ilustrar este resultado con un par de ejemplos.

Ejemplo 2.4.4. *Determinamos el número n de subintervalos necesarios para aproximar $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ mediante el Método del Trapecio con error absoluto menor que 10^{-4}.*

Solución. La segunda derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ es $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, así que $|f''(x)| = f''(x)$ para todo $x > 0$. Como $|f''(x)|$ es estrictamente decreciente en $(0,\infty)$, tenemos

$$|f''(x)| \leq |f''(1)| = 2 \quad \text{para todo } x \geq 1.$$

Por tanto, $M = 2$ cumple $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in [1,2]$.

Según la acotación del error en el Método del Trapecio (Proposición 2.4.3), tenemos

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \mathrm{Trapecio}_n(f) \right| \leq \frac{(2-1)^3}{12n^2} M = \frac{1}{6n^2} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Así, para encontrar un $n \in \mathbb{N}$ que cumpla

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \mathrm{Trapecio}_n(f) \right| < 10^{-4}$$

sólo necesitamos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}$. Observamos que

$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-4} \iff \frac{10^4}{6} < n^2 \iff \frac{5000}{3} < n^2 \iff \sqrt{\frac{5000}{3}} < n.$$

Como $\sqrt{\frac{5000}{3}} \approx 40.8$, podemos tomar $n = 41$ para obtener

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \mathrm{Trapecio}_{41}(f) \right| < 10^{-4}.$$

Aplicando la fórmula del Método del Trapecio con $n = 41$ (Proposición 2.4.1), podemos calcular $\text{Trapecio}_{41}(f) = 0.69318435804588$. $\square$

Ejemplo 2.4.5. *Calculamos aproximadamente* $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ *mediante el Método del Trapecio con error absoluto menor que* 10^{-3}.

Solución. Trabajamos con la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. Derivando dos veces, tenemos:

$$f'(x) = 2x\cos(x^2), \qquad f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\operatorname{sen}(x^2).$$

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\begin{aligned}|f''(x)| = |2\cos(x^2) - 4x^2\operatorname{sen}(x^2)| &\overset{(1)}{\leq} |2\cos(x^2)| + |4x^2\operatorname{sen}(x^2)| = \\ &= 2|\cos(x^2)| + 4x^2|\operatorname{sen}(x^2)| \overset{(2)}{\leq} 2 + 4x^2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

En efecto, (1) es consecuencia de la desigualdad triangular, mientras que (2) es consecuencia de que $|\operatorname{sen}\alpha| \leq 1$ y $|\cos\alpha| \leq 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Combinando (2.25) con el hecho de que $2 + 4x^2 \leq 6$ para todo $x \in [0,1]$, deducimos que $|f''(x)| \leq 6$ para todo $x \in [0,1]$, así que podemos tomar $M = 6$ en este ejemplo.

En vista de la Proposición 2.4.3, tenemos

$$\left| \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx - \text{Trapecio}_n(f) \right| \leq \frac{(1-0)^3}{12n^2} M = \frac{1}{2n^2} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, para encontrar un $n \in \mathbb{N}$ que cumpla

$$\left| \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx - \text{Trapecio}_n(f) \right| < 10^{-3}$$

basta encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2n^2} < 10^{-3}$. Observamos que

$$\frac{1}{2n^2} < 10^{-3} \iff \frac{10^3}{2} < n^2 \iff \sqrt{500} < n.$$

Así, podemos tomar $n = 23$ ($\sqrt{500} \approx 22.3$) para obtener

$$\left| \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx - \text{Trapecio}_{23}(f) \right| < 10^{-3}.$$

Finalmente, calculamos la aproximación aplicando la fórmula del Método del Trapecio con $n = 23$ (Proposición 2.4.1): $\text{Trapecio}_{23}(f) = 0.31043860088117$. $\square$

Método de Simpson

El método se basa en la aproximación de $f(x)$ mediante interpolación a trozos utilizando polinomios de grado 2. Para ello introducimos la siguiente definición:

Definición 2.4.6. *Llamamos* **función interpoladora cuadrática a trozos** *de f en los puntos de abscisas*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} = b$$

a la función $\mathscr{C} : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida a trozos que, para cada $k = 1,\ldots,n$, coincide en todo el intervalo $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ con el polinomio interpolador de f en los puntos de abscisas $\{x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}\}$.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE SIMPSON:

- Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathscr{C}(x)$ la función interpoladora *cuadrática* a trozos de $f(x)$ en los puntos de abscisas

$$x_i = a + i\frac{b-a}{2n}, \qquad i = 0,1,\ldots,2n.$$

- Fijado un subintervalo de la forma $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, podemos aproximar

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \approx \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \mathscr{C}(x)\,dx.$$

  La expresión de $\mathscr{C}(x)$ en este subintervalo se puede calcular fácilmente y, a partir de dicha expresión, se puede evaluar la integral

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \mathscr{C}(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\big(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\big).$$

- Si repetimos el procedimiento en cada subintervalo $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, obtenemos la siguiente estimación de la integral de f en $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \mathscr{C}(x)\,dx =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b) \right).$$

Véanse las Figuras 2.10 en la página 133 para una ilustración gráfica del método.

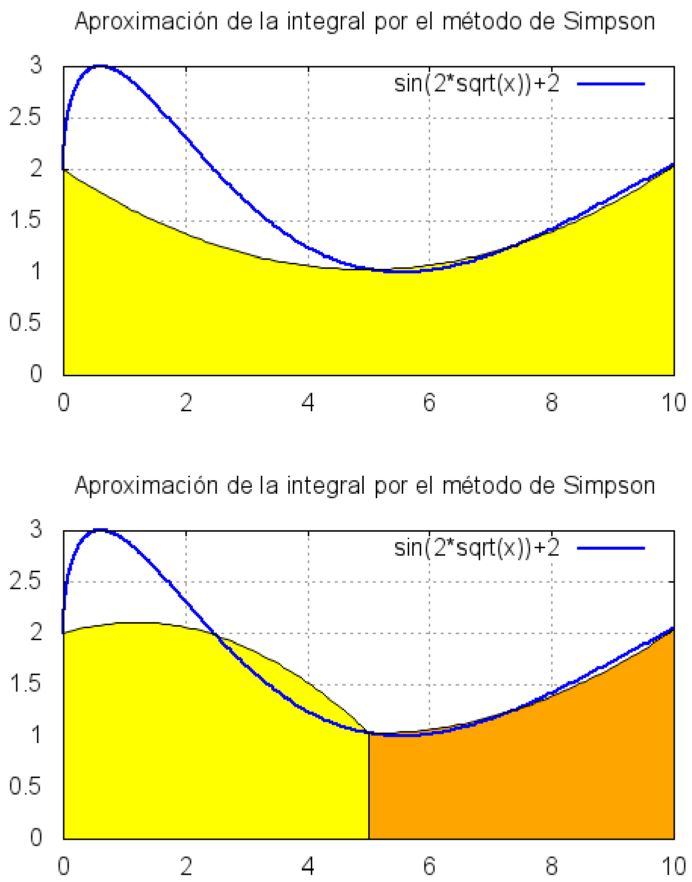


Figura 2.10: Método de Simpson aplicado a $f(x) = \operatorname{sen}(2\sqrt{x}) + 2$ en $[0,10]$ con $n = 1$ y $n = 2$.

Proposición 2.4.7 (Fórmula del Método de Simpson)**.** *La aproximación de* $\int_a^b f(x)\,dx$ *que se obtiene mediante el Método de Simpson con n parábolas es:*

$$\operatorname{Simpson}_n(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right).$$

A continuación aplicamos el Método de Simpson a la integral del Ejemplo 2.4.2.

Ejemplo 2.4.8. *Calculamos aproximadamente* $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ *mediante el Método de Simpson con* 2 *y* 4 *parábolas, respectivamente.*

Solución. Sea $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Tomando $n=2$, tenemos

$$x_0=1,\quad x_1=\frac{5}{4},\quad x_2=\frac{3}{2},\quad x_3=\frac{7}{4},\quad x_4=2,$$

y la aproximación obtenida aplicando la fórmula del Método de Simpson es

$$\begin{aligned}\mathrm{Simpson}_2(f)&=\frac{2-1}{6\cdot 2}\left(f(1)+4f\left(\frac{5}{4}\right)+4f\left(\frac{7}{4}\right)+2f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)\right)=\\&=\frac{1}{12}\left(1+4\cdot\frac{4}{5}+4\cdot\frac{4}{7}+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1747}{2520}=0.693253968253968.\end{aligned}$$

Por otro lado, en el caso de $n=4$ tenemos

$$x_0=1,\quad x_1=\frac{9}{8},\quad x_2=\frac{5}{4},\quad x_3=\frac{11}{8},\quad \dots\quad x_7=\frac{15}{8},\quad x_8=2.$$

Calculamos la aproximación que nos da el Método de Simpson:

$$\begin{aligned}\mathrm{Simpson}_4(f)=\frac{2-1}{6\cdot 4}\big(&f(1)+4f(x_1)+4f(x_3)+4f(x_5)+4f(x_7)+\\&+2f(x_2)+2f(x_4)+2f(x_6)+f(2)\big)=0.693154530654531.\end{aligned}$$

Esta aproximación es mejor que la obtenida con $n=2$: el valor *exacto* (redondeado a 14 cifras decimales) de $\ln 2$ es 0.69314718055995. Observamos además que la aproximación $\mathrm{Simpson}_2(f)$ (que requiere 5 evaluaciones de f) ya es bastante mejor que la aproximación $\mathrm{Trapecio}_5(f)$ (obtenida en el Ejemplo 2.4.2 y que requiere 6 evaluaciones de f). □

Disponemos del siguiente resultado para controlar el error cometido al aproximar integrales mediante el Método de Simpson.

Proposición 2.4.9 (Error en el Método de Simpson)**.** *Si f es de clase $\mathscr{C}^4$ en $[a,b]$ y $M>0$ es una constante tal que $|f^{(4)}(x)|\le M$ para todo $x\in[a,b]$, entonces*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\mathrm{Simpson}_n(f)\right|\le\frac{(b-a)^5}{180\cdot(2n)^4}\cdot M\qquad \textit{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Simpson}_n(f)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo 2.4.10. *Calculamos aproximadamente la integral* $\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$ *mediante el Método de Simpson:*

(i) con 3 *parábolas, dando una cota superior del error absoluto cometido;*

(ii) con error absoluto menor que 10^{-4}.

Solución. (i) En este caso $n = 3$ y necesitamos evaluar la función $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ en

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{3}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{1}{3}, \quad x_5 = \frac{2}{3}, \quad x_6 = 1.$$

La aproximación pedida es

$$\begin{aligned} \text{Simpson}_3(f) = \frac{1-(-1)}{6 \cdot 3} \big(f(1) + 4f(x_1) + 4f(x_3) + 4f(x_5) + 2f(x_2) + 2f(x_4)\big) = \\ = 1.273789068348639. \end{aligned}$$

Para hallar una cota superior del error absoluto de dicha aproximación, calculamos la derivada cuarta de $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{\pi^3}{8} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad f^{(4)}(x) = \frac{\pi^4}{16} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Observamos entonces que la constante $M = \frac{\pi^4}{16}$ cumple $|f^{(4)}(x)| \leq M$ para todo $x \in [-1,1]$ (porque $|\cos\alpha| \leq 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$). Por tanto, la Proposición 2.4.9 garantiza que

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\, dx - \text{Simpson}_3(f) \right| \leq \frac{(1-(-1))^5}{180 \cdot 6^4} \cdot \frac{\pi^4}{16} = \frac{\pi^4}{116640} \approx 0.835 \cdot 10^{-3}.$$

Así, por ejemplo, una cota del error cometido con 3 parábolas es $0.84 \cdot 10^{-3}$.

(ii) Según la Proposición 2.4.9, se cumple

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\, dx - \text{Simpson}_n(f) \right| \leq \frac{(1-(-1))^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot \frac{\pi^4}{16} = \frac{\pi^4}{1440 \cdot n^4} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Buscamos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\pi^4}{1440 \cdot n^4} < 10^{-4}$ o, equivalentemente

$$n > \sqrt[4]{\frac{10^4 \cdot \pi^4}{1440}} \approx 5.09987.$$

Luego es suficiente con tomar $n = 6$. En este caso, tenemos que evaluar f en

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{5}{6}, \quad x_2 = -\frac{2}{3}, \quad \ldots \quad x_{11} = \frac{5}{6}, \quad x_{12} = 1,$$

y la aproximación que proporciona el Método de Simpson es

$$\begin{aligned}\text{Simpson}_6(f) = \frac{1-(-1)}{6\cdot 6}\big(f(-1) + 4f(x_1) + \ldots + 4f(x_{11}) + \\ + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{10}) + f(2)\big) = 1.273273046431269.\end{aligned}$$

□

Los **métodos de Monte Carlo** de integración numérica se basan en la utilización de *números aleatorios* para obtener aproximaciones de la integral. A diferencia de los métodos del Trapecio y Simpson, que son deterministas, los métodos de Monte Carlo son probabilistas y generalmente proporcionan aproximaciones distintas en cada ejecución del algoritmo, aunque se utilicen los mismos datos de entrada.

Anexo A: Método de Monte Carlo I (*“acertar o fallar”*)

Se puede aplicar cuando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

En primer lugar, necesitamos elegir un número $d > 0$ tal que $f(x) \leq d$ para todo $x \in [a,b]$. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ (dato de entrada del algoritmo) y PROCEDEMOS:

1. Se toman *al azar* n puntos (x_i, y_i) en el rectángulo $[a,b] \times [0,d]$. Es decir,

$$x_i \in [a,b] \quad \text{e} \quad y_i \in [0,d] \qquad \text{para todo } 1,\ldots,n.$$

2. Para cada $i = 1,\ldots,n$ comprobamos si se cumple la desigualdad “$y_i \leq f(x_i)$”. Llamamos p al número de índices i tales que $y_i \leq f(x_i)$.
3. Entonces

$$\boxed{\frac{p}{n}(b-a)d} \qquad \text{(dato de salida del algoritmo)}$$

es una aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$.

IDEA DEL MÉTODO: Para valores grandes de n, tenemos

$$\frac{p}{n} \approx \frac{\text{área bajo la gráfica de } f}{\text{área del rectángulo } [a,b]\times[0,d]} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)d},$$

véase la Figura 2.11 en la página 137.

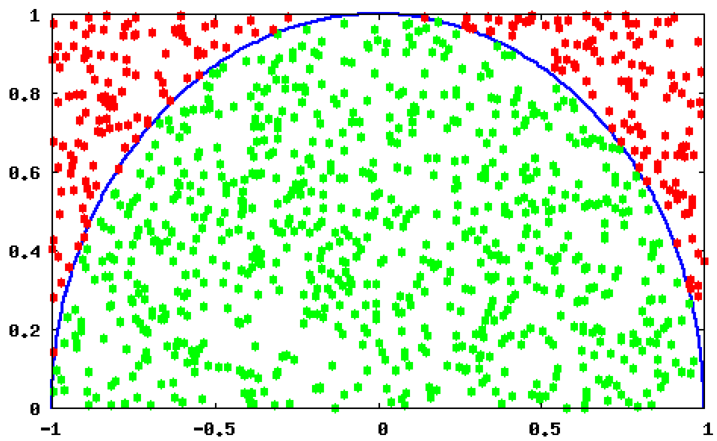


Figura 2.11: Aproximación de la integral de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $[-1,1]$ mediante el *Método de Monte Carlo I* con $n = 1000$ puntos y tomando $d = 1$. Los puntos verdes (resp. rojos) quedan por debajo (resp. encima) de la gráfica de f.

Anexo B: Método de Monte Carlo II (*"media de la muestra"*)

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ (dato de entrada del algoritmo) y PROCEDEMOS:

1. Se toman *al azar* n números x_i en el intervalo $[a,b]$. Es decir,
$$x_i \in [a,b] \qquad \text{para todo } i = 1,\ldots,n.$$

2. Entonces
$$\boxed{\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}(b-a)} \qquad \text{(dato de salida del algoritmo)}$$
es una aproximación de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

IDEA DEL MÉTODO: Para valores grandes de n,
$$\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \approx \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejercicios

Ejercicio 2.4.11. *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que*
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha.$$

Determina el valor de α *sabiendo que* $\mathrm{Trapecio}_2(f) = 2$ *y* $\mathrm{Trapecio}_4(f) = \frac{7}{4}$.

SOLUCIÓN. Para $n = 2$, la fórmula del Método del Trapecio (Proposición 2.4.1) es

$$2 = \mathrm{Trapecio}_2(f) = \frac{1-0}{2\cdot 2}\left(f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right) = \frac{1}{4}\left(f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right),$$

de donde

$$8 = f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1). \tag{2.26}$$

Por otro lado, la fórmula del Método del Trapecio para $n = 4$ es

$$\begin{aligned}\frac{7}{4} = \mathrm{Trapecio}_4(f) &= \frac{1-0}{2\cdot 4}\left(f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right) = \\ &= \frac{1}{8}\left(f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + 4\alpha\right),\end{aligned}$$

luego

$$14 = f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + 4\alpha. \tag{2.27}$$

Sustituyendo la igualdad (2.26) en (2.27), obtenemos $14 = 8 + 4\alpha$, así que $\alpha = \frac{3}{2}$. □

Ejercicio 2.4.12. *Al aplicar el Método del Trapecio con* 2 *subintervalos para aproximar la integral* $\int_0^2 f(x)\,dx$ *(donde* $f(x)$ *es una función desconocida), obtenemos el valor* 2. *Si por el contrario aplicamos el Método de Simpson con una parábola, obtenemos el valor* 4. *¿Cuánto vale* $f(1)$*?*

SOLUCIÓN. Si llamamos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$, entonces

$$2 = \mathrm{Trapecio}_2(f) = \frac{2-0}{2\cdot 2}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)\big) = \frac{1}{2}\cdot\big(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)\big),$$

luego

$$4 = f(0) + 2f(1) + f(2). \tag{2.28}$$

Por otro lado, tenemos

$$4 = \mathrm{Simpson}_1(f) = \frac{2-0}{3\cdot 1}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big) = \frac{2}{3}\cdot\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big),$$

así que

$$6 = f(0) + 4f(1) + f(2). \tag{2.29}$$

Si restamos (2.28) a (2.29), obtenemos la igualdad $2 = 2f(1)$, por lo que $f(1) = 1$. □

Ejercicio 2.4.13. *Demuestra que*

$$\text{Simpson}_1(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

para cualquier polinomio $f(x)$ de grado menor o igual que 3 *y cualquier intervalo* $[a,b]$.

SOLUCIÓN. Escribimos $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + d$. Definiendo las funciones $g(x) = x^3$ y $h(x) = Bx^2 + Cx + d$, de manera que $f(x) = Ag(x) + h(x)$. Es sencillo comprobar que

$$\text{Simpson}_1(f) = A \cdot \text{Simpson}_1(g) + \text{Simpson}_1(h). \tag{2.30}$$

Por la propia definición, el Método de Simpson proporciona el valor exacto de la integral para polinomios de grado menor o igual que 2. En particular,

$$\text{Simpson}_1(h) = \int_a^b h(x)\,dx. \tag{2.31}$$

Por otro lado, aplicando la Regla de Barrow obtenemos

$$\int_a^b x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_a^b = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Y ahora el Método de Simpson aplicado a $g(x)$ nos da:

$$\begin{aligned}
\text{Simpson}_1(g) &= \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \\
&= \frac{b-a}{6}\left(a^3 + 4\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right) = \frac{b-a}{12}\left(2a^3 + \left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) + 2b^3\right) = \\
&= \frac{b-a}{4}\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right) = \frac{1}{4}\left(a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 - a^4 - a^3b - a^2b^2 - ab^3\right) = \\
&= \frac{b^4 - a^4}{4} = \int_a^b x^3\,dx.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Sustituyendo (2.31) y (2.32) en la igualdad (2.30), deducimos

$$\text{Simpson}_1(f) = A \cdot \int_a^b x^3\,dx + \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b \left(Ax^3 + h(x)\right)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

como se quería demostrar. □

Ejercicio 2.4.14. *Se considera la función $f(x) = \operatorname{sen}^2(N!\pi x)$, con $N \in \mathbb{N}$ fijo.*

(i) Utiliza la Regla de Barrow para demostrar que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

[Nota: recuerda que $\operatorname{sen}^2 \alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.]

(ii) Demuestra que, si aplicamos el Método del Trapecio para aproximar esta integral, entonces

$$\text{Trapecio}_n(f) = 0 \qquad \textit{para todo } n \le N.$$

(iii) En vista de lo anterior, ¿qué ocurre cuando N es muy grande?

SOLUCIÓN. (i) Comenzamos calculando la primitiva

$$\int \operatorname{sen}^2(N!\pi x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2N!\pi x)}{2}\,dx$$

mediante el cambio de variable $t = 2N!\pi x$. Entonces $dt = 2N!\pi\,dx$ y nos queda

$$\int \frac{1-\cos(2N!\pi x)}{2}\,dx = \int \frac{1-\cos t}{4N!\pi}\,dt = \frac{1}{4N!\pi}\int (1-\cos t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{4N!\pi}\big(t - \operatorname{sen} t\big) + C = \frac{1}{4N!\pi}\big(2N!\pi x - \operatorname{sen}(2N!\pi x)\big) + C = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2N!\pi x)}{4N!\pi} + C.$$

Ahora aplicamos la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) para calcular la integral:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2N!\pi x)}{4N!\pi}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2N!\pi\cdot 1)}{4N!\pi}\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2N!\pi\cdot 0)}{4N!\pi}\right) = \frac{1}{2},$$

ya que $\operatorname{sen}(m\pi) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

(ii) Fijamos $n \in \mathbb{N}$ con $n \le N$. Para calcular $\text{Trapecio}_n(f)$ evaluamos f en los puntos $x_k = \dfrac{k}{n}$ para $k = 0, 1, \ldots, n$, obteniendo

$$f(x_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \operatorname{sen}^2\left(N!\pi\frac{k}{n}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{N!}{n}k\pi\right) = 0,$$

ya que $\dfrac{N!}{n} \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{sen}(m\pi) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora aplicamos la fórmula del Método del Trapecio (Proposición 2.4.1):

$$\text{Trapecio}_n(f) = \frac{1-0}{2n}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\big) = 0,$$

como se quería demostrar.

(iii) Según lo que hemos visto en los apartados (i) y (ii), el Método del Trapecio proporciona un resultado (0) bastante alejado del valor exacto de la integral ($\frac{1}{2}$) cuando se utiliza un número n de subintervalos menor o igual que N. Así, para valores grandes de N necesitaremos utilizar muchos subintervalos para conseguir una buena aproximación de la integral mediante el Método del Trapecio. □

Ejercicio 2.4.15. *Determina, en cada uno de los casos siguientes, el número n de subintervalos necesarios para obtener, mediante el Método del Trapecio, una aproximación de la integral dada con error absoluto menor que* $5 \cdot 10^{-6}$*:*

$$\textit{(i)} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x \, dx \qquad\qquad \textit{(ii)} \int_{2}^{3} \frac{1}{5-x} \, dx$$

SOLUCIÓN.

(i) La segunda derivada de $f(x) = \cos x$ es $f''(x) = -\cos x$, así que

$$|f''(x)| = |\cos x| \leq 1 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $M = 1$ cumple $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in \left[\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$. Ahora, según la acotación del error en el Método del Trapecio (Proposición 2.4.3), tenemos

$$\left| \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x \, dx - \text{Trapecio}_n(f) \right| \leq \frac{(\pi/6 + \pi/6)^3}{12n^2} M = \frac{\pi^3}{324n^2} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, para determinar un $n \in \mathbb{N}$ que cumpla

$$\left| \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x \, dx - \text{Trapecio}_n(f) \right| < 5 \cdot 10^{-6}$$

sólo necesitamos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\pi^3}{324n^2} < 5 \cdot 10^{-6}$. Como

$$\frac{\pi^3}{324n^2} < 5 \cdot 10^{-6} \iff \frac{\pi^3 \cdot 10^6}{324 \cdot 5} < n^2 \iff 138.3 \approx \sqrt{\frac{\pi^3 \cdot 10^6}{324 \cdot 5}} < n,$$

podemos tomar $n = 139$ para obtener el grado de precisión deseado.

(ii) Derivamos $f(x) = \dfrac{1}{5-x}$ dos veces:

$$f'(x) = \frac{1}{(5-x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(5-x)^3}.$$

La función $f''(x)$ es positiva y estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 5)$. En particular, $M = f''(3) = \dfrac{1}{4}$ cumple $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in [2,3]$. La acotación del error en el Método del Trapecio (Proposición 2.4.3) es

$$\left| \int_2^3 \frac{1}{5-x}\, dx - \text{Trapecio}_n(f) \right| \leq \frac{(3-2)^3}{12n^2} M = \frac{1}{48n^2} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Así, para determinar un $n \in \mathbb{N}$ que cumpla

$$\left| \int_2^3 \frac{1}{5-x}\, dx - \text{Trapecio}_n(f) \right| < 5 \cdot 10^{-6}$$

sólo hay que encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{48n^2} < 5 \cdot 10^{-6}$ o, equivalentemente, $\dfrac{12500}{3} < n^2$. Como $\sqrt{\dfrac{12500}{3}} \approx 64.5$, podemos tomar $n = 65$. □

Ejercicio 2.4.16. *Determina el número n de parábolas necesarias para obtener, mediante el Método de Simpson, una aproximación de cada una de las integrales del Ejercicio 2.4.15 con error absoluto menor que* $5 \cdot 10^{-6}$.

SOLUCIÓN. (i) Comenzamos con la integral $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x\, dx$. Observamos que la derivada cuarta de $f(x) = \cos x$ es $f^{(4)}(x) = \cos x$, así que

$$|f^{(4)}(x)| = |\cos x| \leq 1 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Podemos tomar $M = 1$ en la acotación del error de la Proposición 2.4.9, obteniendo

$$\left| \int_{-\pi/6}^{\pi/6} f(x)\, dx - \text{Simpson}_{2n}(f) \right| \leq \frac{(\pi/6 - (-\pi/6))^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot 1 = \frac{\pi^5}{699840 \cdot n^4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, para determinar un $n \in \mathbb{N}$ que cumpla

$$\left| \int_{-\pi/6}^{\pi/6} f(x)\, dx - \text{Simpson}_n(f) \right| < 5 \cdot 10^{-6}$$

sólo tenemos que encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\pi^5}{699840 \cdot n^4} < 5 \cdot 10^{-6}$. Como

$$\frac{\pi^5}{699840 \cdot n^4} < 5 \cdot 10^{-6} \iff \frac{\pi^5 \cdot 10^6}{699840 \cdot 5} < n^4 \iff 3.058 \approx \sqrt[4]{\frac{\pi^5 \cdot 10^6}{699840 \cdot 5}} < n,$$

podemos tomar $n = 4$ para obtener la precisión requerida.

(ii) Pasamos ahora a estudiar $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{5-x}\,dx$. Derivamos $f(x) = \dfrac{1}{5-x}$ cuatro veces:

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(5-x)^5}.$$

Teniendo en cuenta que la función $f^{(4)}(x)$ es positiva y estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 5)$, deducimos que la constante $M = f^{(4)}(3) = \frac{3}{4}$ cumple $|f^{(4)}(x)| \leq M$ para todo $x \in [2,3]$. En vista de la Proposición 2.4.3, tenemos

$$\left| \int_2^3 f(x)\,dx - \text{Simpson}_n(f) \right| \leq \frac{(3-2)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3840 \cdot n^4} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Así, para determinar un $n \in \mathbb{N}$ que cumpla

$$\left| \int_2^3 f(x)\,dx - \text{Simpson}_{2n}(f) \right| < 5 \cdot 10^{-6}$$

sólo hay que encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{3840 \cdot n^4} < 5 \cdot 10^{-6}$ o, equivalentemente,

$$n > \sqrt[4]{\frac{10^6}{3840 \cdot 5}} \approx 2.686.$$

Luego podemos tomar $n = 3$. $\square$

2.5. Apéndice: Interpolación

Contenidos

- Polinomio interpolador.
- Interpolación a trozos.

Teoría

En esta lección presentamos una breve introducción a los aspectos más básicos de la teoría de *aproximación global* de funciones. En ocasiones se conocen los valores de una función en un conjunto de datos y se quiere estimar otro valor de la función a partir de esos datos. Para resolver este problema, los métodos de *interpolación* proporcionan polinomios aproximadores que coinciden con la función en el conjunto de datos conocidos.

El teorema siguiente garantiza la existencia de dichos polinomios y proporciona una fórmula para calcularlos:

Teorema 2.5.1. *Se consideran $n+1$ puntos del plano con abscisas distintas dos a dos:*

$$(x_0,y_0),\ (x_1,y_1),\ \ldots,\ (x_n,y_n).$$

Entonces existe un único polinomio $P(x)$ de grado menor o igual que n tal que

$$P(x_i)=y_i \quad \textit{para todo } i=0,1,\ldots,n.$$

Dicho polinomio se llama **polinomio interpolador** *en los puntos dados y se puede calcular mediante la fórmula*

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x), \qquad \textit{donde} \quad L_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad \textit{para todo } i=0,1,\ldots,n.$$

Veamos un primer ejemplo de polinomio interpolador:

Ejemplo 2.5.2. *Cálculo del polinomio interpolador en los puntos $(0,-1)$, $(1,2)$, $(2,-7)$ y $(3,1)$.*

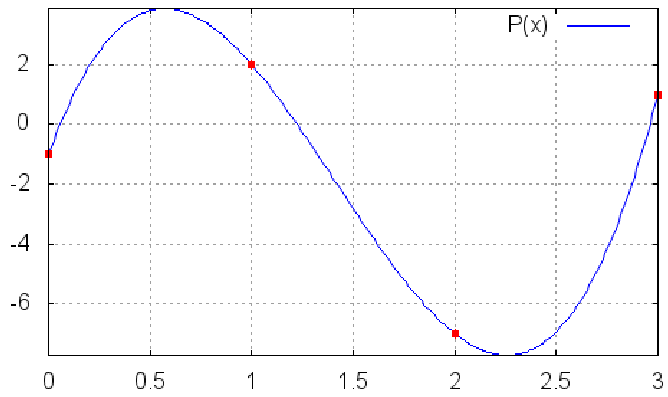


Figura 2.12: Polinomio interpolador en los puntos $(0,-1)$, $(1,2)$, $(2,-7)$ y $(3,1)$.

Demostración. En este caso $n = 3$ y $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_0-x_3} = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)\\
L_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{1}{2}x(x-2)(x-3)\\
L_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x-x_3}{x_2-x_3} = -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)\\
L_3(x) &= \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos polinomios y los valores $y_0 = -1$, $y_1 = 2$, $y_2 = -7$, $y_3 = 1$ en la fórmula del Teorema 2.5.1, obtenemos el polinomio interpolador en el conjunto de puntos dado:

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) = \frac{29x^3 - 123x^2 + 112x - 6}{6},$$

véase la Figura 2.12. □

Los polinomios interpoladores son una herramienta útil para aproximar funciones, como veremos a continuación.

Definición 2.5.3. *Sea f una función definida, al menos, en $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$. Llamamos* **polinomio interpolador** *de f en los puntos de abscisas $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ al polinomio interpolador en los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$.*

Ejemplo 2.5.4. *Calculamos el polinomio interpolador de la función* $f(x) = \operatorname{sen} x + x^4$ *en los puntos de abscisas* $\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}\}$.

Demostración. En este ejemplo $n = 2$ y $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$. Así:

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{8}{3\pi^2} x \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
L_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -\frac{8}{\pi^2} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
L_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{16}{3\pi^2} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) x
\end{aligned}
$$

Sustituyendo estos polinomios y los valores

$$
y_0 = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{\pi^4}{16}, \quad y_1 = f(0) = 0, \quad y_1 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi^4}{256},
$$

en la fórmula del Teorema 2.5.1, obtenemos el polinomio interpolador:

$$
P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = \\
\frac{\left(9 \cdot 2^{3/2} \cdot \pi^4 - 2^{17/2} + 512\right) x^2 + \left(\left(2^{13/2} + 256\right) \cdot \pi - 3 \cdot \sqrt{2}\,\pi^5\right) x}{3 \cdot 2^{11/2} \cdot \pi^2}
$$

véase la Figura 2.13 para una representación conjunta de $P(x)$ y $f(x)$. □

Por definición, el polinomio interpolador coincide con la función en el conjunto de puntos que se han usado para construirlo. Para analizar el *error* absoluto cometido al aproximar en el resto de puntos, disponemos de la siguiente acotación:

Proposición 2.5.5 (Error del polinomio interpolador)**.** *Sean* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$,

$$
a = \text{mín}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \quad y \quad b = \text{máx}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}.
$$

Sea f *una función de clase* $\mathscr{C}^{n+1}$ *definida, al menos, en el intervalo* $[a,b]$ *y sea* $P(x)$ *el polinomio interpolador de* f *en los puntos de abscisas* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. *Si* $M > 0$ *es una constante tal que* $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ *para todo* $x \in [a,b]$, *entonces*

$$
|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \quad \text{para todo } x \in [a,b]. \tag{2.33}
$$

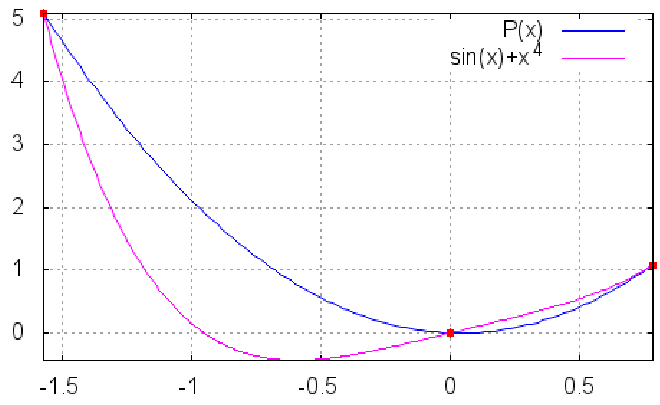


Figura 2.13: Polinomio interpolador de $f(x) = \operatorname{sen} x + x^4$ en los puntos de abscisas $\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}\}$.

Ejemplo 2.5.6. *Se puede comprobar que el polinomio interpolador de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en los puntos de abscisas $\{-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{8}\}$ es*

$$P(x) = \frac{\left(64 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) - 2^{9/2}\right)x^2 + \left(16\pi \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2^{3/2} \cdot \pi\right)x}{3\pi^2}.$$

Este polinomio cumple:

$$|f(x) - P(x)| < 0.182 \quad \textit{para todo } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\right].$$

Demostración. En este ejemplo $n = 2$. La tercera derivada $f^{(3)}(x) = -\cos x$ cumple $|f^{(3)}(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando $M = 1$, la acotación del error que nos da la Proposición 2.5.5 es:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{3!} \cdot \left|x + \frac{\pi}{4}\right| \cdot |x| \cdot \left|x - \frac{\pi}{8}\right| \quad \text{para todo } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\right]. \tag{2.34}$$

Si ahora tenemos en cuenta que

$$\left|x + \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{3\pi}{8}, \quad |x| \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \left|x - \frac{\pi}{8}\right| \leq \frac{3\pi}{8} \quad \text{para todo } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$

($\frac{3\pi}{8}$ es la longitud del intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\right]$), de la desigualdad (2.34) se sigue que

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi^3}{512} \approx 0.181677402423632$$

para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\right]$. □

Para aproximar una función definida en un intervalo, a veces es conveniente dividir dicho intervalo en subintervalos más pequeños y aplicar, en cada uno de ellos por separado, un método de interpolación: esto se conoce como *interpolación a trozos*.

Definición 2.5.7. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Llamamos* **función interpoladora lineal a trozos** *de f en los puntos de abscisas*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

a la función $\ell : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida a trozos que, para cada $i = 1,\ldots,n$, coincide en todo el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con el polinomio interpolador de f en los puntos de abscisas $\{x_{i-1}, x_i\}$.

Ejemplo 2.5.8. *Sea $\ell(x)$ la función interpoladora lineal a trozos de $f(x) = \cos x$ en los puntos de abscisas $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$ (véase la Figura 2.14). Entonces*

$$f(0.2) = \cos(0.2) = 0.98006\ldots \quad y \quad \ell(0.2) = 0.92541\ldots$$

Demostración. Sea P el polinomio interpolador de f en los puntos de abscisas $\{0, \frac{\pi}{4}\}$. Es sencillo comprobar que dicho polinomio (de grado 1) es

$$P(x) = \frac{2\sqrt{2}-4}{\pi}x + 1.$$

Como $0.2 \in [0, \frac{\pi}{4}]$, tenemos que $\ell(0.2) = P(0.2) = 0.92541\ldots$ □

La siguiente proposición nos da una cota superior del error absoluto cometido al aproximar los valores de una función mediante una función interpoladora lineal a trozos.

Proposición 2.5.9 (Error de la función interpoladora lineal a trozos)**.** *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^2$ y $\ell : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función interpoladora lineal a trozos de f en los puntos de abscisas $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Si $M > 0$ es una constante tal que $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces*

$$|f(x) - \ell(x)| \leq \frac{M}{8} \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}|^2 \quad \text{para todo } x \in [a,b]. \tag{2.35}$$

Ejemplo 2.5.10. *Cálculo de una cota superior del error cometido al aproximar la función $f(x) = x^2 \cos x$ en el intervalo $[0,3]$ mediante interpolación lineal a trozos, utilizando 6 subintervalos de la misma longitud.*

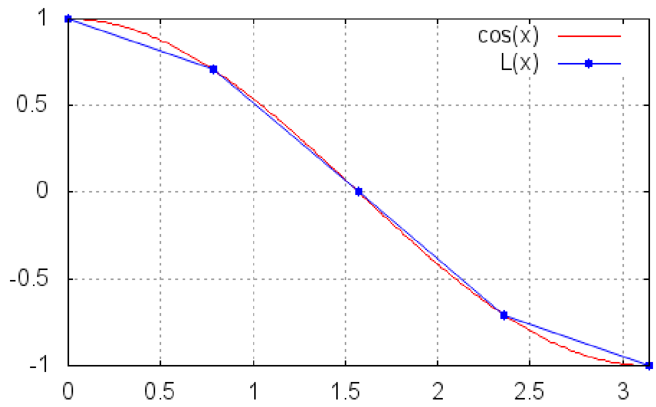


Figura 2.14: Función interpoladora lineal a trozos de $f(x) = \cos x$ en los puntos de abscisas $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$.

Demostración. En este ejemplo $n = 6$ y los puntos a utilizar para construir la función interpoladora lineal a trozos $\ell(x)$ tienen abscisas

$$x_i = \frac{i}{2} \quad (i = 0, 1, \ldots, 6)$$

de manera que $|x_i - x_{i-1}|^2 = \dfrac{1}{4}$ para todo $i = 0, 1, \ldots, 6$. Por otro lado,

$$f''(x) = (2 - x^2)\cos x - 4x \operatorname{sen} x.$$

Como $|2 - x^2| \leq 7$ para todo $x \in [0, 3]$ y además

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1,$$

podemos aplicar la desigualdad triangular para deducir que

$$|f''(x)| \leq |(2 - x^2)\cos x| + |4x \operatorname{sen} x| = |2 - x^2| \cdot |\cos x| + 4x|\operatorname{sen} x| \leq 7 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1 = 19$$

para todo $x \in [0, 3]$. Tomando ahora $M = 19$ en la desigualdad (2.35) de la Proposición 2.5.9, obtenemos:

$$|f(x) - \ell(x)| \leq \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{4} = 0.59375 \quad \text{para todo } x \in [0, 3].$$

Por tanto, 0.59375 es una cota superior del error cometido al aproximar $f(x)$ mediante $\ell(x)$ para cualquier $x \in [0, 3]$. $\square$

La cota del error obtenida en el ejemplo anterior no garantiza una buena precisión en la aproximación. Para obtener aproximaciones razonables necesitamos aumentar bastante el número de subintervalos, como ilustramos a continuación.

Ejemplo 2.5.11. *Cálculo del número n de subintervalos necesarios para que, al aproximar la función* $f(x) = x^2 \cos x$ *en el intervalo* $[0,3]$ *mediante interpolación lineal a trozos, utilizando n subintervalos de la misma longitud, el error cometido sea menor que* 0.01.

Demostración. Para un $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, los puntos que usamos para construir la correspondiente función interpoladora lineal a trozos $\ell_n(x)$ tienen abscisas

$$x_i = i \cdot \frac{3}{n} \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

y tenemos $|x_i - x_{i-1}|^2 = \dfrac{9}{n^2}$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$. Tomando (como en el ejemplo anterior) $M = 19$, la Proposición 2.5.9 nos dice que

$$|f(x) - \ell_n(x)| \leq \frac{19}{8} \cdot \frac{9}{n^2} = \frac{171}{8n^2} \quad \text{para todo } x \in [0,3].$$

Ahora necesitamos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{171}{8n^2} < 0.01$ o, equivalentemente,

$$n > \sqrt{\frac{17100}{8}} \approx 46.2.$$

Por tanto, $n = 47$ garantiza un error absoluto menor que 0.01. □

Ejercicios

Ejercicio 2.5.12. *Sea* $P(x)$ *el polinomio interpolador en los puntos* $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, \alpha)$, $(1,3)$ *y* $(2,2)$. *Calcula el valor de* α *sabiendo que el coeficiente de* x^3 *en* $P(x)$ *es* 6.

SOLUCIÓN. Como $P(x)$ tiene grado 3, lo podemos escribir como

$$P(x) = 6x^3 + ax^2 + bx + c$$

para ciertos coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned} P(0) = 0 &\quad \Longrightarrow \quad c = 0 \\ P(1) = 3 &\quad \Longrightarrow \quad 6 + a + b + c = 3 \\ P(2) = 2 &\quad \Longrightarrow \quad 48 + 4a + 2b + c = 2 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, concluimos que $a = -20$ y $b = 17$. Por tanto, el polinomio interpolador es $P(x) = 6x^3 - 20x^2 + 17x$ y así

$$\alpha = P\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 20\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 17\cdot\frac{1}{2} = \frac{17}{4}.$$

□

Ejercicio 2.5.13. *Dada la función $f(x) = \log_3(x)$ se pide:*

(i) Calcula su polinomio interpolador en los puntos de abscisas $\{\frac{1}{3}, 1, 3, 9\}$.

(ii) Aproxima $log_3(2)$ mediante dicho polinomio y da una cota del error cometido.

(iii) Aproxima $log_3(2)$ mediante la función interpoladora lineal a trozos de f en los puntos de abscisas $\{\frac{1}{3}, 1, 3, 9\}$ y da una cota superior del error cometido.

SOLUCIÓN. (i) En este caso $n = 3$ y $x_0 = \frac{1}{3}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 9$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_0-x_3} = -\frac{27}{416}(x-1)(x-3)(x-9)\\
L_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{3}{32}\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)(x-9)\\
L_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x-x_3}{x_2-x_3} = -\frac{1}{32}\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)(x-9)\\
L_3(x) &= \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{1}{416}\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)(x-3)
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos polinomios y los valores

$$y_0 = f\left(\frac{1}{3}\right) = -1, \quad y_1 = f(1) = 0, \quad y_2 = f(3) = 1, \quad y_3 = f(9) = 2,$$

en la fórmula del Teorema 2.5.1, obtenemos el polinomio interpolador pedido:

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) = \frac{12x^3 - 169x^2 + 676x - 519}{312}.$$

(ii) La aproximación de $f(2) = \log_3(2)$ que da el polinomio anterior es

$$P(2) = \frac{253}{312} = 0.810897\ldots$$

Para dar una cota superior del error absoluto $|f(2)-P(2)|$ necesitamos la derivada cuarta de $f(x)=\log_3(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 3}$. Derivando sucesivas veces:

$$f'(x)=\frac{1}{(\ln 3)x},\quad f''(x)=\frac{-1}{(\ln 3)x^2},\quad f^{(3)}(x)=\frac{2}{(\ln 3)x^3},\quad f^{(4)}(x)=-\frac{6}{(\ln 3)x^4}.$$

Observamos que

$$|f^{(4)}(x)|=\frac{6}{(\ln 3)x^4}\leq\frac{6}{(\ln 3)\left(\frac{1}{3}\right)^4}=\frac{486}{\ln 3}<486 \quad \text{para todo } x\in\left[\frac{1}{3},9\right].$$

Tomando $M=486$ y $x=2$ en la desigualdad (2.33) de la Proposición 2.5.5:

$$|f(2)-P(2)|\leq\frac{486}{4!}\cdot\left|2-\frac{1}{3}\right|\cdot|2-1|\cdot|2-3|\cdot|2-9|=\frac{945}{4}=236.25.$$

(iii) Si llamamos $\ell(x)$ a la función interpoladora lineal a trozos de f en los puntos de abscisas $\{\frac{1}{3},1,3,9\}$, entonces $\ell(2)=Q(2)$, siendo Q el polinomio interpolador de f en los puntos de abscisas $\{1,3\}$ (usamos dicho polinomio porque $2\in[1,3]$). Es fácil ver que

$$Q(x)=\frac{x-1}{2}$$

y así $\ell(2)=Q(2)=0.5$.

Para dar una cota superior del error absoluto $|f(2)-\ell(2)|$ vamos a aplicar la Proposición 2.5.5 al polinomio interpolador $Q(x)$ (es decir, tomando $n=2$, $x_0=1$ y $x_1=3$). La segunda derivada de f cumple

$$|f''(x)|=\left|\frac{-1}{(\ln 3)x^2}\right|=\frac{1}{(\ln 3)x^2}\leq\frac{1}{(\ln 3)1^2}=\frac{1}{\ln 3}<1 \quad \text{para todo } x\in[1,3],$$

así que podemos elegir $M=1$ en la desigualdad (2.33) de la Proposición 2.5.5:

$$|f(2)-\ell(2)|=|f(2)-Q(2)|\leq\frac{1}{2!}\cdot|2-1|\cdot|2-3|=0.5.$$

□

Ejercicio 2.5.14. *Se dispone de una tabla de valores de la función* $f(x)=e^{-x}+\cos x$ *en los puntos de abscisas* $\{0,0.5,\ldots,3.5,4\}$. *Da una cota superior del error cometido al aproximar* $f(x)$ *mediante interpolación lineal a trozos, para cualquier* $x\in[0,4]$.

SOLUCIÓN. Derivando $f'(x) = -e^{-x} - \operatorname{sen} x$ y $f''(x) = e^{-x} - \cos x$. Por tanto:

$$|f''(x)| \leq |e^{-x}| + |-\cos x| = e^{-x} + |\cos x| \leq e^0 + 1 = 2 \quad \text{para todo } x \in [0,4]$$

(ya que la función e^{-x} es decreciente y $|\cos x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Tomando $M = 2$ en la desigualdad (2.35) de la Proposición 2.5.9, deducimos que la función interpoladora lineal a trozos $\ell(x)$ cumple

$$|f(x) - \ell(x)| \leq \frac{2}{8}(0.5)^2 = \frac{1}{16} = 0.0625$$

para todo $x \in [0,4]$. □

Ejercicio 2.5.15. *Calcula el número n de subintervalos necesarios para que, al aproximar la función* $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ *en el intervalo* $[0,2]$ *mediante interpolación lineal a trozos, utilizando n subintervalos de la misma longitud, el error cometido sea menor que* 10^{-3}.

SOLUCIÓN. Comenzamos calculando la segunda derivada de la función a interpolar:

$$f'(x) = 2x\cos(x^2), \qquad f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\operatorname{sen}(x^2).$$

Por tanto, $|f''(x)| \leq 2|\cos(x^2)| + 4x^2|\operatorname{sen}(x^2)| \leq 2 + 4\cdot 2^2 = 18$ para todo $x \in [0,2]$. Podemos tomar entonces $M = 18$ en la Proposición 2.5.9. Si llamamos $\ell_n(x)$ a la función interpoladora lineal a trozos de f en los puntos de abscisas

$$x_i = i \cdot \frac{2}{n} \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

deducimos que

$$|f(x) - \ell_n(x)| \leq \frac{18}{8}\left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{9}{n^2} \quad \text{para todo } x \in [0,2].$$

Por tanto, necesitamos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{9}{n^2} < 10^{-3}$. Esta desigualdad equivale a $n > \sqrt{9000} = 94.868\ldots$ y, por tanto, $n = 95$ subintervalos serían suficientes para garantizar un error menor que 10^{-3}. □

Ejercicio 2.5.16. *Calcula el número n de subintervalos necesarios para que, al aproximar la función* $f(x) = e^{-x^2}$ *en el intervalo* $[0,5]$ *mediante interpolación lineal a trozos, utilizando n subintervalos de la misma longitud, el error cometido sea menor que* 0.01.

SOLUCIÓN. Calculamos la segunda derivada de la función:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \qquad f''(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$|f''(x)| = 2|2x^2-1|e^{-x^2} \leq 2 \cdot 49 \cdot e^0 = 98 \quad \text{para todo } x \in [0,5]$$

(ya que $|2x^2-1| \leq 49$ para todo $x \in [0,5]$ y la función e^{-x^2} es decreciente en $[0,\infty)$). Vamos a aplicar la Proposición 2.5.9 tomando $M = 98$. Si llamamos $\ell_n(x)$ a la función interpoladora lineal a trozos de f en los puntos de abscisas

$$x_i = i \cdot \frac{5}{n} \quad (i = 0,1,\ldots,n)$$

tenemos

$$|f(x) - \ell_n(x)| \leq \frac{98}{8}\left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{1225}{4n^2} \quad \text{para todo } x \in [0,5].$$

Buscamos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1225}{4n^2} < 0.01$ o, equivalentemente, $n > \sqrt{30625} = 175$. Así, $n = 176$ subintervalos garantizan un error menor que 0.01. $\square$

Capítulo 3

Series

«OBJETIVOS»

- Analizar la convergencia de series de términos no negativos.
- Determinar el orden de magnitud de las sumas parciales de series divergentes.
- Estudiar la convergencia de series alternadas.
- Calcular aproximadamente la suma de series convergentes.
- Utilizar polinomios y series de Taylor para aproximar funciones.

El tercer capítulo está dedicado a estudiar SERIES de números reales. Las series son herramientas valiosas en Informática a la hora de estudiar la eficiencia de algoritmos. Por ejemplo, si tenemos una lista de datos y llamamos t_k al tiempo que se tarda en procesar el k-ésimo dato, entonces el tiempo que se tarda en procesar los n primeros datos de la lista (uno detrás de otro) es

$$T_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

Normalmente interesa conocer el orden de magnitud de T_n cuando n crece. Por ejemplo, las técnicas de análisis de series mediante integrales (que estudiaremos en la Lección 3.2) permiten deducir que el algoritmo *quicksort* requiere un tiempo medio $O(n \ln n)$ para ordenar una lista de n elementos.

En la *Lección 3.1* introducimos los conceptos de serie convergente, serie divergente y suma de una serie convergente. Estudiamos sus propiedades básicas (por ejemplo, la convergencia hacia 0 del término general de una serie convergente) y los primeros ejemplos, como las series geométricas.

En la *Lección 3.2* mostramos cómo las integrales pueden ser una herramienta útil en el estudio de las series. Comenzamos analizando las series armónicas generalizadas y después estudiamos el Criterio Integral para series de términos no negativos. Además de examinar la convergencia–divergencia de series, nos centramos en determinar el orden de magnitud de la sucesión de sumas parciales (para series divergentes) y en el cálculo aproximado de la suma de series convergentes.

En la *Lección 3.3* damos algunos criterios de "comparación" para determinar la convergencia de series de términos no negativos y el orden de magnitud de la sucesión de sus sumas parciales. Además, estudiamos la convergencia (y suma aproximada) de series alternadas mediante el Criterio de Leibniz.

Para terminar, en la *Lección 3.4* presentamos el concepto de polinomio y serie de Taylor de una función, calculamos los polinomios y series de Taylor de algunas funciones elementales y mostramos cómo se pueden utilizar para aproximar *localmente* dichas funciones.

3.1. Propiedades básicas

Contenidos

- Series convergentes y divergentes.
- Series geométricas.

Teoría

El concepto de serie aparece al intentar definir la suma de una sucesión (infinita) de números reales. La definición siguiente formaliza dicha idea.

Definición 3.1.1. *Sea a_n una sucesión.*

(i) Se llaman **sumas parciales** *de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a los números:*

$$S_1 = a_1 \qquad S_2 = a_1 + a_2 \qquad \dots \qquad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \dots$$

(ii) Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** *si la sucesión de sumas parciales S_n es convergente. En tal caso, el límite $\lim_{n\to\infty} S_n$ se llama* **suma de la serie** *y escribimos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

(iii) Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge** *si la sucesión S_n es divergente.*

Observación 3.1.2. *La sucesión de sumas parciales S_n también se puede definir recurrentemente por:*

$$\begin{cases} S_1 = a_1, \\ S_n = S_{n-1} + a_n \quad \textit{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.1.3. *Se considera la sucesión a_n definida por: $a_1 = 5$, $a_2 = 2$ y $a_n = 0$ para todo $n \geq 3$. Las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son $S_1 = 5$ y $S_n = 7$ para todo $n \geq 2$. Así, la serie converge y su suma vale 7.*

Ejemplo 3.1.4. *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge.*

Demostración. La suma parcial n-ésima de la serie es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

como vimos en el Ejemplo 2.1.6. Así, vemos que la sucesión S_n es divergente y, por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge. $\square$

Ejemplo 3.1.5 (Serie geométrica)**.** *Se llama* **serie geométrica** *de razón $r \in \mathbb{R}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$. Esta serie converge si y sólo si $|r| < 1$. En tal caso, su suma es*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}.$$

Demostración. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y comenzamos calculando la suma parcial n-ésima de la serie, es decir, $S_n = r^1 + r^2 + \ldots + r^n$. Distinguimos dos casos:

- *Caso $r = 1$.* Entonces $r^k = 1^k = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y así

$$S_n = r^1 + r^2 + \ldots + r^n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ sumandos}} = n. \tag{3.1}$$

- *Caso $r \neq 1$.* Multiplicando S_n por r obtenemos:

$$\begin{aligned} rS_n = r\left(r^1 + r^2 + \ldots + r^n\right) &= r^2 + r^3 + \ldots + r^{n+1} = \\ &= \left(r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n\right) + r^{n+1} - r = S_n + r^{n+1} - r, \end{aligned}$$

  es decir, $rS_n = S_n + r^{n+1} - r$. Equivalentemente, $(r-1)S_n = r^{n+1} - r$. Como $r \neq 1$, en esta última igualdad podemos despejar S_n para deducir que

$$S_n = \frac{r^{n+1} - r}{r - 1}. \tag{3.2}$$

Ahora estudiamos la convergencia de la sucesión S_n en función de los valores de r:

- Si $|r| \geq 1$ tenemos dos posibilidades:
  - Si $r = 1$ entonces $S_n = n$ (por (3.1)), luego la sucesión S_n es divergente.
  - Si $|r| \geq 1$ pero $r \neq 1$, entonces la sucesión r^{n+1} es divergente (véase el Ejemplo 1.3.3). Como $r^{n+1} = (r-1)S_n + r$ (por (3.2)), deducimos que la sucesión S_n también es divergente.

  Por tanto, cuando $|r| \geq 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ diverge.
- Si $|r| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ (Ejemplo 1.2.12) y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n \overset{(3.2)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1} - r}{r-1} = \frac{0-r}{r-1} = \frac{r}{1-r}.$$

  Así que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge, con suma $\frac{r}{1-r}$.

Esto completa la demostración. □

A continuación damos un ejemplo de *serie telescópica*.

Ejemplo 3.1.6. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ *converge y su suma vale* 1.

Demostración. Descomponemos el término general en fracciones simples:

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Ahora calculamos las sumas parciales utilizando la fórmula anterior:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 - \frac{1}{2} \\
S_2 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} \\
S_3 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} \\
&\dots \\
S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 1-0 = 1$. Por tanto, la serie converge y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n} = 1$. □

En general, dada una serie, puede ser difícil o incluso imposible dar una fórmula explícita para la sucesión de sus sumas parciales (a diferencia de lo que ocurría en los ejemplos anteriores). Como consecuencia, para estudiar la convergencia de series se suelen utilizar métodos indirectos, que estudiaremos más adelante.

Ahora damos algunas propiedades básicas de las series. Comenzamos estudiando la suma de series y el producto de una serie por un número real:

Proposición 3.1.7 (Operaciones con series)**.**

(i) Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge y* $\alpha\in\mathbb{R}$*, entonces* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha a_n$ *también converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha a_n = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(ii) Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convergen, entonces* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ *también converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ejemplo 3.1.8. *Las series* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ *y* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ *convergen, con sumas* 1 *y* $\frac{1}{2}$*, respectivamente (Ejemplo 3.1.5). Por tanto, la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{7}{3^n}\right)$ *también converge, con suma*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{7}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = 1+7\frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

El siguiente tipo de series juega un papel importante en la teoría:

Definición 3.1.9. *Decimos que una serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* **de términos no negativos** *si* $a_n\geq 0$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$.

Proposición 3.1.10. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos no negativos. Entonces:*

(i) La sucesión de sus sumas parciales S_n *es monótona creciente.*

(ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* $\iff$ *la sucesión* S_n *está acotada.*

Escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ *cuando la serie diverge.*

Demostración.

(i) Para cada $n \geq 2$ tenemos $S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$ ya que $a_n \geq 0$.

(ii) es consecuencia inmediata de (i) y el Teorema 1.2.11. □

La convergencia o divergencia de una serie no depende de sus primeros términos, como ponemos de manifiesto a continuación.

Observación 3.1.11. *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series cuyos términos a partir del m-ésimo coinciden, es decir,* $a_n = b_n$ *para todo* $n > m$*. Entonces:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge.}$$

Demostración. Si llamamos S_n y T_n a las n-ésimas sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente, para cualquier $n > m$ tenemos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = S_m + \sum_{k=m+1}^{n} b_k,$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{m} b_k + \sum_{k=m+1}^{n} b_k = T_m + \sum_{k=m+1}^{n} b_k.$$

Luego $S_n - T_n = S_m - T_m$ (¡constante!) para todo $n > m$. Por tanto, la sucesión S_n es convergente si y sólo si la sucesión T_n es convergente. □

En las condiciones de la observación anterior, las sumas de ambas series pueden ser distintas, naturalmente. Por ejemplo, en 3.1.5 hemos visto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, con suma 1. Por tanto, la serie

$$10^6 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

también converge, pero su suma vale $10^6 + \frac{1}{2}$.

Definición 3.1.12. *Sea a_n una sucesión definida para $n \geq n_0$. Entonces podemos considerar la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ y las sumas parciales $a_{n_0} + \ldots + a_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ para $n \geq n_0$.*

(i) Decimos que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **converge** *si la sucesión $\sum_{k=n_0}^{n} a_k$ es convergente. En tal caso, escribimos*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k.$$

(ii) Decimos que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **diverge** *si la sucesión $\sum_{k=n_0}^{n} a_k$ es divergente.*

Observación 3.1.13. *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie y $n_0 \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Demostración. La diferencia $\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=n_0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k$ es constante para todo $n \geq n_0$. Por tanto, la sucesión $\sum_{k=1}^{n} a_k$ converge si y sólo si la sucesión $\sum_{k=n_0}^{n} a_k$ converge. □

Veamos un ejemplo ilustrando la definición y observación anteriores:

Ejemplo 3.1.14. *En general, también llamamos* **serie geométrica** *de razón $r \in \mathbb{R}$ a cualquier serie de la forma $\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n$, donde $n_0 \in \mathbb{N}$. Esta serie converge si y sólo si $|r| < 1$. En tal caso:*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n = \frac{r^{n_0}}{1-r}.$$

Demostración. La convergencia o divergencia se puede deducir combinando el Ejemplo 3.1.5 con la Observación 3.1.13. Para calcular la suma cuando $|r| < 1$ y $n_0 > 1$, basta observar que para todo $n > n_0$ tenemos:

$$\sum_{k=n_0}^{n} r^k = r^{n_0} + r^{n_0+1} + \ldots + r^n =$$

$$= r^{n_0-1}\left(r^1 + r^2 + \ldots + r^{n-n_0+1}\right) \overset{(*)}{=} r^{n_0-1} \cdot \frac{r^{n-n_0+2} - r}{r-1} = \frac{r^{n+1} - r^{n_0}}{r-1},$$

donde la igualdad (*) se deduce de la fórmula (3.2) en la página 158. Tomando límites:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} r^k = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1} - r^{n_0}}{r-1} = \frac{0 - r^{n_0}}{r-1} = \frac{r^{n_0}}{1-r}.$$

Esto completa la demostración. □

Finalizamos la lección presentando el primer método indirecto para demostrar la *divergencia* de series. A saber, si para una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie diverge. En otras palabras:

Proposición 3.1.15. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración. Llamamos S_n a la suma parcial n-ésima de la serie, es decir, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Entonces, para cada $n \geq 2$ tenemos $S_n = S_{n-1} + a_n$ (Observación 3.1.2), luego

$$a_n = S_n - S_{n-1}. \tag{3.3}$$

Si llamamos $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$ y tomamos límites en (3.3), obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

como se quería demostrar. □

Ejemplo 3.1.16. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3}$ *diverge, porque* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+3} = 1 \neq 0$.

Sin embargo, la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no garantiza la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.1.17. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *diverge, aunque* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Demostración. Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Para cada $k = 1, 2, \dots, n$ tenemos $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$, luego

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Entonces la suma parcial n-ésima de la serie cumple:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ sumandos}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Como $S_n \geq \sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, deducimos que la sucesión S_n es divergente. Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. □

Ejercicios

Ejercicio 3.1.18. *La sucesión S_n de las sumas parciales de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es*

$$S_n = \ln\left(\frac{3n+2}{n+4}\right).$$

(i) ¿Es convergente la serie? En caso afirmativo, calcula su suma.

(ii) Encuentra la expresión del término general a_n.

SOLUCIÓN. (i) Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n+4} = 3 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{3n+2}{n+4}\right) = \ln 3$$

(aquí aplicamos la Proposición 1.2.14 ya que $\ln x$ es una función continua). Como la sucesión S_n es convergente, con límite $\ln 3$, de la definición deducimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y su suma vale $\ln\ 3$.

(ii) Sabemos que $a_n = S_n - S_{n-1}$. Operando:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \ln\left(\frac{3n+2}{n+4}\right) - \ln\left(\frac{3(n-1)+2}{(n-1)+4}\right) = \ln\left(\frac{3n+2}{n+4}\right) - \ln\left(\frac{3n-1}{n+3}\right) =$$
$$= \ln\left(\frac{\frac{3n+2}{n+4}}{\frac{3n-1}{n+3}}\right) = \ln\left(\frac{(3n+2)(n+3)}{(3n-1)(n+4)}\right) = \ln\left(\frac{3n^2+11n+6}{3n^2+11n-4}\right).$$

□

Ejercicio 3.1.19. *La sucesión de las sumas parciales de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$.

(i) ¿Es convergente la serie? En tal caso, calcula la suma.

(ii) Calcula el término general de la serie a_n.

SOLUCIÓN. (i) Como $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, con suma $\frac{1}{2}$.

(ii) Para calcular la expresión del término general a_n sólo hay que observar que

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} =$$
$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n^2+3n+2}.$$

□

Ejercicio 3.1.20. *La sucesión* S_n *de las sumas parciales de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es*

$$S_{2n} = \frac{2n}{2n+3}, \qquad S_{2n-1} = \frac{2n-1}{2n+3}.$$

(i) ¿Es convergente la serie? En caso afirmativo, calcula su suma.

(ii) Encuentra la expresión del término general a_n.

SOLUCIÓN. (i) Observamos que

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{2k+3} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{2k+3} = 1,$$

por lo que la sucesión S_n es convergente, con límite 1. Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, con suma 1.

(ii) Vamos a determinar la expresión de a_n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Comenzamos suponiendo que n es par. Podemos escribirlo como $n = 2k$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$a_n = S_n - S_{n-1} = S_{2k} - S_{2k-1} = \frac{2k}{2k+3} - \frac{2k-1}{2k+3} = \frac{1}{2k+3} = \frac{1}{n+3}.$$

Suponemos ahora que n es impar y lo escribimos como $n = 2k-1$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Si $n = 1$ entonces $a_1 = S_1 = \frac{1}{5}$, mientras que para $n \neq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} = S_{2k-1} - S_{2(k-1)} = \\ = \frac{2k-1}{2k+3} - \frac{2(k-1)}{2(k-1)+3} = \frac{-2k+5}{(2k+3)(2k+1)} = \frac{-n+4}{(n+4)(n+2)}. \end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.1.21. *Demuestra que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ *diverge, a pesar de que su término general cumple* $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$.

SOLUCIÓN. Naturalmente, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \overset{(*)}{=} \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\right) = \ln 1 = 0,$$

donde la igualdad (*) se sigue de la Proposición 1.2.14. Por otro lado, la suma parcial n-ésima de la serie es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\frac{1+1}{1} \cdot \frac{2+1}{2} \cdots \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ diverge. □

Ejercicio 3.1.22. *Determina si las series siguientes convergen y, en tal caso, calcula su suma:*

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n + 7^n}{5^n}$ *(ii)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1} n(n+1)}$

SOLUCIÓN. (i) El término general se puede escribir así:

$$\frac{(-3)^n+7^n}{5^n}=\frac{(-3)^n}{5^n}+\frac{7^n}{5^n}=\left(\frac{-3}{5}\right)^n+\left(\frac{7}{5}\right)^n,$$

luego

$$\left(\frac{7}{5}\right)^n=\frac{(-3)^n+7^n}{5^n}-\left(\frac{-3}{5}\right)^n.$$

Como la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-3}{5}\right)^n$ converge y la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^n$ diverge (Ejemplo 3.1.14), podemos aplicar la Proposición 3.1.7 para deducir que la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^n+7^n}{5^n}$ *diverge.*

(ii) Reescribimos el término general:

$$\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\frac{2^n}{2^{n+1}n(n+1)}+\frac{n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\frac{1}{2(n^2+n)}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}\right).$$

Como las series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ convergen, ambas con suma 1 (véase los Ejemplos 3.1.6 y 3.1.5), podemos utilizar la Proposición 3.1.7 para concluir que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$$

converge y su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1.$$

□

Ejercicio 3.1.23. *La información introducida cada día en el disco duro de un ordenador es la mitad que la introducida en el día anterior. Si el primer día se almacenan* 300 *GB, ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener el disco duro para garantizar que no se va a saturar?*

SOLUCIÓN. Llamamos a_n a la cantidad de información (en GB) que se introduce en el disco duro en el n-ésimo día. La sucesión a_n está definida recurrentemente por:

$$\begin{cases} a_1=300, \\ a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2} \quad \text{para todo } n\geq 2. \end{cases}$$

Ahora es sencillo demostrar por inducción que $a_n = \dfrac{300}{2^{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, la cantidad de información almacenada en el disco duro al cabo de n días es:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

es decir, la suma parcial n-ésima de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esta serie es convergente, con suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{300}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{600}{2^n} = 600 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 600$$

(Ejemplo 3.1.5 y Proposición 3.1.7). Es decir, $\lim_{n\to\infty} S_n = 600$. Por tanto, el tamaño mínimo que debe tener el disco duro para que no llegue a saturarse es de 600 GB. □

Ejercicio 3.1.24. *Se deja caer una pelota desde una altura de* 6 *metros. Al golpear en el suelo rebota hasta una altura igual al* 60 % *de la altura desde la que ha caído, y continúa rebotando así indefinidamente. Determina la distancia total recorrida por la pelota.*

SOLUCIÓN. Llamamos h_n a la altura (en metros) desde la que cae la pelota antes del rebote n-ésimo, de manera que $h_1 = 6$ y $h_n = \dfrac{6}{10} h_{n-1}$ para cada $n \geq 2$. La distancia total recorrida por la pelota será entonces la suma (que llamamos S) de la serie

$$h_1 + 2h_2 + 2h_3 + \ldots = h_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2h_n.$$

Se puede demostrar por inducción que

$$h_n = 6 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^{n-1} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto:

$$S = 6 + \sum_{n=2}^{\infty} 12 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^{n-1} = 6 + 12 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{10}\right)^{n} = 6 + 12 \cdot \frac{\frac{6}{10}}{1 - \frac{6}{10}} = 24$$

(véase el Ejemplo 3.1.5). Luego la distancia total recorrida es de 24 metros. □

Ejercicio 3.1.25. *La cantidad que recicla cada año una planta de tratamiento de residuos es el 90 % de lo que recicla el año anterior. Si recibe un único suministro de* 50 *toneladas de residuos y el primer año de funcionamiento recicla* 4 *toneladas, ¿podría reciclar todo el suministro si nunca dejara de trabajar?*

SOLUCIÓN. Si llamamos a_n a la cantidad (en toneladas) de residuos reciclados durante el año n-ésimo, los datos del ejercicio se traducen en

$$a_1 = 4, \quad a_n = \frac{9}{10} a_{n-1} \text{ para todo } n \geq 2.$$

Se puede demostrar por inducción que $a_n = 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, en vista del Ejemplo 3.1.5, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y su suma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = \frac{40}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n} = \frac{40}{9} \cdot \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{9}{10}} = 40.$$

Así, aunque la planta trabajara indefinidamente, a ese ritmo sería imposible reciclar 50 toneladas (pero se podría llegar a reciclar cualquier cantidad inferior a 40 toneladas). $\square$

Ejercicio 3.1.26. *Demuestra que las series siguientes divergen utilizando el criterio de la Proposición 3.1.15:*

$$\textit{(i)}\ 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots \qquad \textit{(ii)}\ \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots \qquad \textit{(iii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! - n!}{4^n}$$

SOLUCIÓN. (i) La serie $2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene término general $a_n = \frac{2^n}{n}$. Según la Jerarquía de Infinitos (Teorema 1.3.11) tenemos $n \ll 2^n$, luego $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0$. Por la Proposición 3.1.15, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ diverge.

(ii) La serie $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene término general $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

la Proposición 3.1.15 garantiza que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$ diverge.

(iii) El término general de la serie es:

$$a_n = \frac{(n+1)! - n!}{4^n} = \frac{(n+1)n! - n!}{4^n} = \frac{\big((n+1) - 1\big)n!}{4^n} = \frac{n \cdot n!}{4^n}.$$

Según la Jerarquía de Infinitos (Teorema 1.3.11) tenemos $4^n \ll n!$, luego $4^n \ll n \cdot n!$ y así $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0$. Por la Proposición 3.1.15, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!-n!}{4^n}$ diverge. $\square$

3.2. Series e integrales

Contenidos

- Series armónicas generalizadas.
- Criterio Integral.

Teoría

Comenzamos la lección estudiando con detalle la convergencia de las *series armónicas generalizadas*. Este ejemplo nos servirá como introducción al Criterio Integral.

Ejemplo 3.2.1. *La* **serie armónica generalizada**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converge para $p > 1$ *y diverge para* $0 < p \leq 1$*. Además, llamando* S_n *a la sucesión de sus sumas parciales, tenemos*

$$S_n \sim \begin{cases} n^{1-p} & si\ 0 < p < 1, \\ \ln n & si\ p = 1. \end{cases}$$

Demostración.

Consideramos la función continua $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ y fijamos $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Llamamos A_n y B_n a las sumas inferior y superior $(n-1)$-ésimas de f en el intervalo $[1,n]$. Naturalmente, se cumple:

$$A_n \leq \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx \leq B_n \tag{3.4}$$

(Teorema 2.1.7). Como f es *decreciente*, tenemos:

$$A_n = f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} = S_n - 1$$

$$B_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} = S_n - \frac{1}{n^p}$$

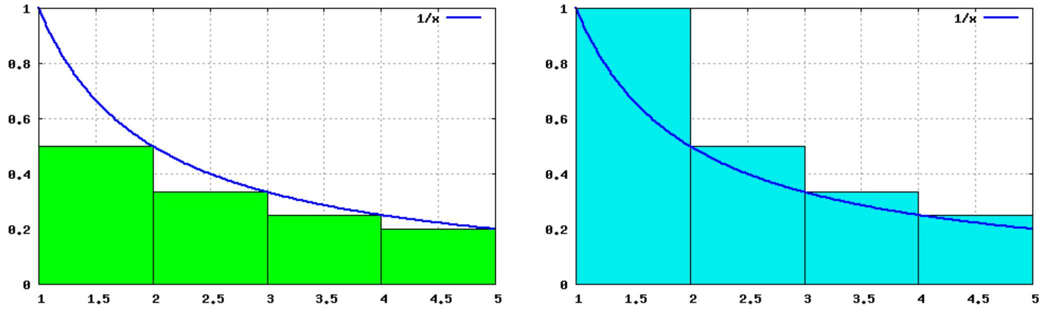


Figura 3.1: Sumas inferior (A_5) y superior (B_5) de la función $f(x) = 1/x$ (con $n = 5$).

(Observación 2.1.5, véase la figura anterior), con lo que (3.4) se transforma en:

$$S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx \leq S_n - \frac{1}{n^p}. \tag{3.5}$$

Distinguimos ahora distintos casos en función de los valores de p.

$\boxed{p > 1}$ Entonces la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ converge (Ejemplo 2.3.4) y, por tanto, la sucesión de integrales $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$ está acotada. Por (3.5) tenemos

$$S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{para todo } n \geq 2,$$

luego la sucesión S_n también está acotada y, aplicando la Proposición 3.1.10, deducimos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ converge.

$\boxed{p = 1}$ Entonces $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx = \ln n$ (véase la prueba del Ejemplo 2.3.4) y (3.5) queda:

$$S_n - 1 \leq \ln n \leq S_n - \frac{1}{n},$$

luego

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq S_n \leq 1 + \ln n. \tag{3.6}$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\ln n + \frac{1}{n}\right) = \infty$, la primera desigualdad de (3.6) garantiza que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, así que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ diverge. Por otro lado, dividiendo (3.6) por $\ln n$ obtenemos:

$$1 + \frac{1}{n\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1. \tag{3.7}$$

Aplicando la Regla del Sandwich (Proposición 1.2.7) en (3.7), deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1 \neq 0.$$

Por tanto, $S_n \sim \ln n$.

$\boxed{0 < p < 1}$ Entonces $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{n^{1-p}-1}{1-p}$ (véase la prueba del Ejemplo 2.3.4) y, sustituyendo en (3.5), nos queda:

$$S_n - 1 \leq \frac{n^{1-p}-1}{1-p} \leq S_n - \frac{1}{n^p},$$

luego

$$\frac{n^{1-p}-1}{1-p} + \frac{1}{n^p} \leq S_n \leq 1 + \frac{n^{1-p}-1}{1-p} = \frac{n^{1-p}-p}{1-p} \tag{3.8}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-p}-1}{1-p} + \frac{1}{n^p} = \infty,$$

la primera desigualdad de (3.8) garantiza que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, así que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge. Por otro lado, para determinar el orden de magnitud de S_n, dividimos (3.8) por n^{1-p}, obteniendo:

$$\frac{1}{1-p}\left(1 - \frac{1}{n^{1-p}}\right) + \frac{1}{n} \leq \frac{S_n}{n^{1-p}} \leq \frac{1}{1-p}\left(1 - \frac{p}{n^{1-p}}\right). \tag{3.9}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{1-p}} = 0$, podemos aplicar la Regla del Sandwich (Proposición 1.2.7) en (3.9) para concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n^{1-p}} = \dfrac{1}{1-p} \neq 0$. Por tanto, $S_n \sim n^{1-p}$. □

Ejemplo 3.2.2. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ *diverge para todo* $p \geq 0$. *Además, llamando* S_n *a la sucesión de sus sumas parciales, tenemos* $S_n \sim n^{p+1}$.

Demostración.

La divergencia se deduce inmediatamente de la Proposición 3.1.15. Para determinar el orden de magnitud de S_n, consideramos la función continua $f(x) = x^p$. Fijamos $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ y llamamos A_n y B_n a las sumas inferior y superior $(n-1)$-ésimas de f en el intervalo $[1,n]$. Entonces:

$$A_n \leq \int_1^n x^p\,dx = \frac{n^{p+1}-1}{p+1} \leq B_n \tag{3.10}$$

(Teorema 2.1.7). Como ahora f es *creciente*, tenemos:

$$A_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k^p = S_n - n^p$$

$$B_n = f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = \sum_{k=2}^{n} k^p = S_n - 1$$

(Observación 2.1.5, véase la figura siguiente).

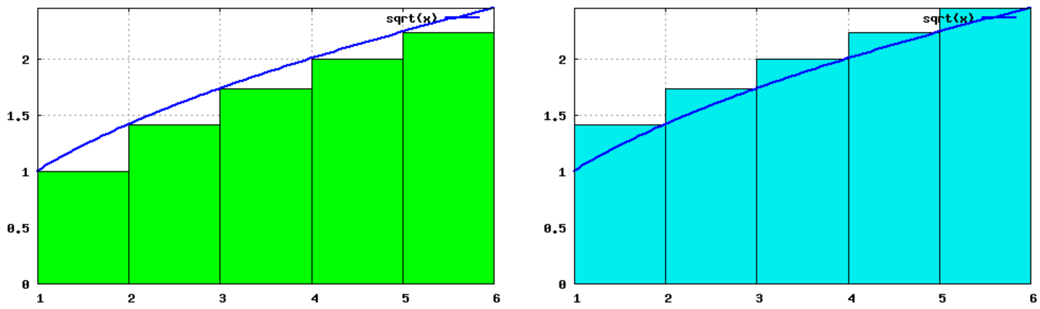


Figura 3.2: Sumas inferior (A_6) y superior (B_6) de $f(x) = \sqrt{x}$ (con $n = 6$).

Luego (3.10) se transforma en:

$$S_n - n^p \le \frac{n^{p+1} - 1}{p+1} \le S_n - 1.$$

Por tanto:

$$\frac{n^{p+1} - 1}{p+1} + 1 = \frac{n^{p+1} + p}{p+1} \le S_n \le \frac{n^{p+1} - 1}{p+1} + n^p.$$

Razonando como en el Ejemplo 3.2.1, concluimos que $S_n \sim n^{p+1}$. □

Las ideas de los ejemplos anteriores se pueden abstraer para obtener el siguiente resultado, que muestra cómo se pueden utilizar integrales para estudiar series: convergencia, orden de magnitud de la sucesión de sumas parciales y cálculo aproximado de la suma.

Teorema 3.2.3 (Criterio Integral)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie cuyo término general es*

$$a_n = f(n)$$

para cierta función continua $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [1,\infty)$ *y* f *no es idénticamente nula. Sean* S_n *y* J_n *las sucesiones definidas por:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad y \qquad J_n = \int_1^n f(x)\,dx.$$

(i) Si f *es* decreciente*, entonces:*

(1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* $\Longleftrightarrow$ *la integral impropia* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ *converge.*

(2) Se cumplen las desigualdades

$$a_n + J_n \leq S_n \leq a_1 + J_n \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $S_n \sim J_n$*.*

(3) Si la serie converge y f *es positiva, entonces*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_m \right| < \int_m^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

(ii) Si f *es* creciente*, entonces:*

(1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

(2) Se cumplen las desigualdades

$$a_1 + J_n \leq S_n \leq a_n + J_n \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, si $a_n \ll J_n$ *entonces* $S_n \sim J_n$*.*

Observación 3.2.4. *Para series de la forma* $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$*, donde* $f : [n_0,\infty) \to \mathbb{R}$ *es una función (continua, no negativa y no idénticamente nula), se verifica un resultado análogo considerando las sucesiones*

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \qquad y \qquad J_n = \int_{n_0}^n f(x)\,dx,$$

que están definidas para $n \geq n_0$*.*

Veamos algunos ejemplo ilustrando el Criterio Integral.

Ejemplo 3.2.5. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ *converge.*

Demostración.

La serie es de la forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, siendo $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Esta función es continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Como la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ converge (véase el Ejemplo 2.3.11), el Criterio Integral (Teorema 3.2.3(i)) garantiza que la serie converge.

□

Ejemplo 3.2.6. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ *diverge y la sucesión de sus sumas parciales*

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$$

tiene orden de magnitud $\ln(\ln n)$.

Demostración.

Esta serie es de la forma $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$, siendo $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$, que es continua, positiva y decreciente en $[2,\infty)$. Veamos que la integral impropia

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

diverge. En efecto, la primitiva

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + C$$

se puede calcular mediante el cambio de variable "$t = \ln x$" (véase el Ejemplo 2.2.5(iii)). Aplicando ahora la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13), obtenemos:

$$\int_2^{b} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \big[\ln(\ln x)\big]_2^b = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) \quad \text{para todo } b > 2.$$

Como $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \ln(\ln x) = \infty$, la integral impropia $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ diverge. Por el Criterio Integral (Teorema 3.2.3(i)), la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ diverge y

$$S_n \sim \int_2^{n} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \sim \ln(\ln n).$$

□

La *Fórmula de Stirling* nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1.$$

En particular, las sucesiones $n!$ y $\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ son del mismo orden. La demostración de la fórmula queda fuera del alcance de este curso. Sin embargo, en el siguiente ejemplo obtenemos unas estimaciones más básicas de $n!$ utilizando el Criterio Integral.

Ejemplo 3.2.7.

(i) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ *diverge y la sucesión de sus sumas parciales*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln(n!)$$

tiene orden de magnitud $n \ln n$*.*

(ii) Se cumplen las desigualdades

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\left(\frac{n}{e}\right)^n n \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

(i) La serie es de la forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, siendo

$$f : [1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x,$$

que es una función continua, creciente y cumple $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1,\infty)$. Calculamos ahora las integrales $J_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \ln x\,dx$ en función de $n \in \mathbb{N}$. La primitiva

$$\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$$

se obtiene mediante integración por partes (véase el Ejercicio 2.2.14). Aplicando ahora la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13), obtenemos:

$$J_n = \int_1^n \ln x\,dx = \big[x(\ln x - 1)\big]_1^n = n(\ln n - 1) - (\ln 1 - 1) = n\ln n - n + 1.$$

Es claro ahora[1] que $J_n \sim n\ln n$. Por tanto, la sucesión $\ln n$ (término general de la serie) cumple $\ln n \ll J_n$. Podemos aplicar el Criterio Integral (Teorema 3.2.3(ii)) para concluir que

$$S_n \sim J_n \sim n\ln n.$$

Luego el orden de magnitud de S_n es $n\ln n$.

(ii) En este ejemplo, las desigualdades

$$f(1)+J_n \leq S_n \leq f(n)+J_n$$

del Teorema 3.2.3(ii) nos dan:

$$n\ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq \ln n + n\ln n - n + 1.$$

Como la función exponencial e^x es creciente,

$$e^{n\ln n - n+1} \leq e^{\ln(n!)} = n! \leq e^{\ln n + n\ln n - n+1}. \tag{3.11}$$

Simplificamos los extremos:

$$e^{n\ln n-n+1} = e^{n\ln n}e^{-n}e = \left(e^{\ln n}\right)^n e^{-n}e = n^n e^{-n} e = e\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

$$e^{\ln n+n\ln n-n+1} = e^{n\ln n-n+1}e^{\ln n} = e\left(\frac{n}{e}\right)^n n.$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.11) obtenemos

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\left(\frac{n}{e}\right)^n n,$$

como se quería demostrar. □

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente (Ejemplo 3.2.1) y, utilizando matemáticas más avanzadas, se puede demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En el último ejemplo de la lección mostramos cómo se pueden obtener aproximaciones de esta suma mediante el Criterio Integral.

[1] Basta aplicar la propiedad (o3) de la Proposición 1.3.17 teniendo en cuenta que $-n+1 \ll n\ln n$.

Ejemplo 3.2.8. *Calculamos aproximadamente la suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *con error absoluto menor que* 10^{-3}.

Solución. Fijado cualquier $m \in \mathbb{N}$, calculamos la integral impropia:

$$\int_m^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_m^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_m^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{m}.$$

Según el apartado (i)(3) del Teorema 3.2.3, tenemos la siguiente cota del error absoluto cometido al aproximar la suma de la serie mediante la suma parcial m-ésima:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}\right| < \frac{1}{m} \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Elegimos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} \leq 10^{-3}$ (por ejemplo, $m = 1000$) y calculamos la suma parcial m-ésima:

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2} = 1.64393456668156.$$

En vista de (3.12), el número 1.64393456668156 es una aproximación de la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ con error absoluto menor que 10^{-3}. □

Ejercicios

Ejercicio 3.2.9. *Estudia si las series siguientes convergen y determina el orden de magnitud de la sucesión de sumas parciales de las series que sean divergentes:*

$$\textit{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \qquad\qquad \textit{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$$

SOLUCIÓN. (i) La serie es $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, siendo $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, que es continua y cumple $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1,\infty)$. Afirmamos que f es estrictamente decreciente en el intervalo $[e,\infty)$. En efecto, basta observar que su derivada

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

satisface $f'(x) < 0$ para todo $x \in (e, \infty)$ (ya que $\ln x > 1$ para todo $x > e$). En particular, f es estrictamente decreciente en el intervalo $[3, \infty)$.

Vamos a demostrar que la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge utilizando el Criterio Integral (Teorema 3.2.3(i)), es decir, comprobando que la integral impropia $\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$ diverge. Para calcular la primitiva, hacemos el cambio de variable $t = \ln x$, de manera que $dt = \frac{1}{x}\, dx$ y, sustituyendo, nos queda

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

Aplicando la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13), obtenemos:

$$\int_3^b \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_3^b = \frac{(\ln b)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} \quad \text{para todo } b > 3.$$

Luego

$$\lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{(\ln b)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}\right) = \infty,$$

así que la integral impropia $\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$ diverge. Por el Criterio Integral, la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge y la sucesión de sus sumas parciales cumple

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \sim \int_3^n \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} \sim (\ln n)^2.$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge y $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \sim \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \sim (\ln n)^2$.

(ii) La serie es $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, siendo $f(x) = xe^{-x^2}$. Esta función es continua, positiva y estrictamente decreciente en el intervalo $[1, \infty)$, ya que

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) < 0 \quad \text{para todo } x > 1.$$

La integral impropia $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$ converge (véase la resolución del Ejercicio 2.3.17). Por el Criterio Integral (Teorema 3.2.3(i)), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ converge. □

Ejercicio 3.2.10. *Estudia si las series siguientes convergen y determina el orden de magnitud de la sucesión de sumas parciales de las series que sean divergentes:*

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+1} \qquad\qquad \text{(ii)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

SOLUCIÓN. (i) La serie es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, donde $f(x)=\dfrac{1}{4x^2+1}$, que es una función continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$.

Mediante el cambio de variable $t=2x$, $dt=2\,dx$, obtenemos la primitiva

$$\int\frac{1}{4x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{\operatorname{atan}(t)}{2}+C=\frac{\operatorname{atan}(2x)}{2}+C.$$

Aplicando la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) y tomando límites:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{4x^2+1}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\operatorname{atan}(2b)}{2}-\frac{\operatorname{atan}(2)}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\operatorname{atan}(2)}{2}.$$

Por tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{4x^2+1}\,dx$ converge y el Criterio Integral (Teorema 3.2.3(i)) nos garantiza que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+1}$ converge.

(ii) La serie es del tipo $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$, donde $f:[2,\infty)\to\mathbb{R}$ es la función continua, positiva y decreciente definida por la fórmula $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$. Como la integral impropia $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ diverge (lo vimos en el Ejercicio 2.3.14), el Criterio Integral (Teorema 3.2.3(i)) nos dice que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ diverge. Además, la sucesión de sumas parciales

$$S_n=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$$

es del mismo orden que la sucesión de integrales

$$J_n=\int_2^n\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx=2\sqrt{\ln n}-2\sqrt{\ln 2}$$

(el cálculo de J_n se hace como en el Ejercicio 2.3.14). Por tanto:

$$S_n\sim J_n\sim\sqrt{\ln n}.$$

Luego el orden de magnitud de S_n es precisamente $\sqrt{\ln n}$. □

Ejercicio 3.2.11. *Demuestra que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln n$ *diverge y determina el orden de magnitud de la sucesión de sus sumas parciales.*

SOLUCIÓN. La serie diverge porque la sucesión $n \ln n$ no converge a 0 (Proposición 3.1.15). Para encontrar el orden de magnitud de la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \ln k$, observamos que la serie se puede escribir como $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, siendo $f(x) = x \ln x$. La función f es continua, mayor o igual que 0 y *creciente* en el intervalo $[1, \infty)$. En el Ejercicio 2.2.14(ii) vimos que

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

Aplicando la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13):

$$J_n = \int_1^n x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]_1^n = \frac{n^2}{2}\left(\ln n - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Es claro entonces que $J_n \sim n^2 \ln n$. Como el término general de la serie $n \ln n$ es *mucho menor* que J_n, el Criterio Integral (Teorema 3.2.3(ii)) nos dice que $S_n \sim J_n \sim n^2 \ln n$. Por tanto, la sucesión S_n tiene orden de magnitud $n^2 \ln n$. $\square$

Ejercicio 3.2.12. *Demuestra que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{n^2+3}$ *diverge y determina el orden de magnitud de la sucesión de sus sumas parciales.*

SOLUCIÓN. La serie diverge porque la sucesión $n\sqrt{n^2+3}$ no converge a 0 (Proposición 3.1.15). Para encontrar el orden de magnitud de la sucesión

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k^2+3},$$

observamos que la serie es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, donde $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$, que es continua, positiva y creciente en $[1, \infty)$. Intentaremos usar el Criterio Integral (Teorema 3.2.3(ii)).

Vamos a calcular la primitiva $\int x\sqrt{x^2+3}\, dx$ con el cambio de variable $t = x^2+3$, de manera que $dt = 2x\, dx$ y al sustituir nos queda

$$\int x\sqrt{x^2+3}\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = \frac{t^{3/2}}{3} + C = \frac{(x^2+3)^{3/2}}{3} + C.$$

Aplicando la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13):

$$J_n = \int_1^n x\sqrt{x^2+3}\,dx = \left[\frac{(x^2+3)^{3/2}}{3}\right]_1^n = \frac{(n^2+3)^{3/2}}{3} - \frac{8}{3} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Observamos así que $J_n \sim n^3$. Como el término general de la serie cumple

$$n\sqrt{n^2+3} \sim n^2 \ll n^3 \sim J_n,$$

el Criterio Integral nos dice que $S_n \sim J_n \sim n^3$. Por tanto, la sucesión S_n tiene orden de magnitud n^3. □

Ejercicio 3.2.13. *Dada la serie divergente* $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{n^2}$*, se consideran las sucesiones:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ke^{k^2} \quad y \quad J_n = \int_1^n xe^{x^2}\,dx.$$

(i) Demuestra que $S_n \geq ne^{n^2}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Demuestra que $J_n \sim e^{n^2}$.
(iii) Utiliza (i) y (ii) para deducir que $J_n \ll S_n$.
(iv) Compara las conclusiones de (iii) y del apartado (ii)(2) del Teorema 3.2.3.

SOLUCIÓN. (i) Como todos los términos de la serie son positivos, tenemos

$$S_n = e + 2e^4 + \ldots + ne^{n^2} \geq ne^{n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Calculamos la primitiva $\int xe^{x^2}\,dx$ mediante el cambio de variable $t = x^2$, de manera que $dt = 2x\,dx$ y sustituyendo nos queda:

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{e^t}{2} + C = \frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

Aplicando la Regla de Barrow (Teorema 2.1.13) obtenemos

$$J_n = \int_1^n xe^{x^2}\,dx = \frac{e^{n^2}}{2} - \frac{e}{2}$$

y, por tanto, $J_n \sim e^{n^2}$.

(iii) A partir de la desigualdad de (i) obtenemos

$$\frac{1}{n} \geq \frac{e^{n^2}}{S_n} > 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En vista de estas desigualdades, podemos aplicar la Regla del Sandwich (Proposición 1.2.7) para concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{n^2}}{S_n} = 0$, es decir, $e^{n^2} \ll S_n$. Por otro lado, en (ii) hemos visto que $J_n \sim e^{n^2}$, luego $J_n \ll S_n$ (usamos aquí la propiedad (o4) de la Proposición 1.3.17). □

Ejercicio 3.2.14. *Sea $p > 1$. Demuestra que*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^p} \right| < \frac{1}{(p-1)m^{p-1}} \qquad \textit{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

SOLUCIÓN. Basta aplicar el apartado (i)(3) del Teorema 3.2.3 a la función $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, que es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$. Dado cualquier $m \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\int_m^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \int_m^{\infty} x^{-p}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_m^b x^{-p}\, dx =$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_m^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{m^{-p+1}}{-p+1} \right) = \frac{m^{-p+1}}{p-1} = \frac{1}{(p-1)m^{p-1}},$$

ya que $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-p+1} = 0$ cuando $p > 1$. □

Ejercicio 3.2.15. *Estudia la convergencia de la siguiente serie en función del valor del parámetro $p > 0$:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}.$$

SOLUCIÓN. Ya hemos visto en el Ejercicio 3.2.9 que la serie diverge para $p = 1$. De ahora en adelante suponemos que $p \neq 1$.

Observamos que la serie es de la forma $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f(n)$, siendo $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^p}$. Esta función es continua y positiva en $[2, \infty)$. Para estudiar su crecimiento, calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{x^{-1} \cdot x^p - p x^{p-1} \ln x}{x^{2p}} = \frac{1 - p \ln x}{x^{p+1}}.$$

Como $p > 0$ y $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$, existe un número natural $K > 2$ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x > K$ y, por tanto, f es decreciente en el intervalo $[K,\infty)$. En vista del comentario que sigue al Criterio Integral (Observación 3.2.4), tenemos:

$$\sum_{n=K}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_K^{\infty} \frac{\ln x}{x^p}\, dx \text{ converge.}$$

Para estudiar la convergencia de la integral impropia necesitamos calcular una primitiva de $f(x)$. Lo hacemos aplicando la fórmula de integración por partes eligiendo $u = \ln x$ y $dv = \frac{1}{x^p}\, dx$. De esta manera tenemos $du = \frac{1}{x}\, dx$, $v = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}$ (aquí usamos que $p \neq 1$) y al sustituir obtenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^p}\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = \\ = \frac{x^{-p+1}\ln x}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\int x^{-p}\, dx == \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\left(\ln x - \frac{1}{-p+1}\right) + C.\end{aligned}$$

Para cualquier $b > K$, podemos aplicar la Regla de Barrow en el intervalo $[b,K]$:

$$\int_K^b \frac{\ln x}{x^p}\, dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\left(\ln x - \frac{1}{-p+1}\right)\right]_K^b = \frac{b^{-p+1}}{-p+1}\left(\ln b - \frac{1}{-p+1}\right) - A,$$

siendo $A = \frac{K^{-p+1}}{-p+1}\left(\ln K - \frac{1}{-p+1}\right)$ (constante fija independiente de b). Es fácil comprobar (usando la Regla de L'Hôpital, Teorema 1.3.6) que $\lim_{b\to\infty} b^{-p+1}\ln b = 0$ si $p > 1$. Por tanto:

$$\lim_{b\to\infty}\int_K^b \frac{\ln x}{x^p}\, dx = \begin{cases} -A & \text{si } p > 1, \\ \infty & \text{si } p < 1. \end{cases}$$

Luego la integral impropia $\int_K^{\infty} \frac{\ln x}{x^p}\, dx$ converge si $p > 1$ y diverge si $p < 1$.

CONCLUSIÓN: la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leq 1$. □

3.3. Otros criterios de convergencia

Contenidos

- Criterios de Comparación.
- Criterios de la Raíz y del Cociente.
- Series alternadas y Criterio de Leibniz.

Teoría

Estudiar la convergencia de una serie mediante el Criterio Integral puede ser complicado debido al cálculo de las integrales involucradas. En la primera parte de esta lección vamos a estudiar un par de criterios que permiten decidir si una serie de términos no negativos converge o diverge, comparando asintóticamente su término general con el de otra serie cuya convergencia o divergencia es conocida de antemano.

Definición 3.3.1. *Una sucesión a_n es una* **O grande** *de la sucesión b_n si existen $M > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$|a_n| \leq M|b_n| \quad \textit{para todo } n \geq n_0.$$

En tal caso, escribimos $a_n \in O(b_n)$.

Proposición 3.3.2 (Criterio de Comparación I)**.** *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos no negativos tales que*

$$\boxed{a_n \in O(b_n)}.$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

Demostración. Como la sucesión a_n es una *O grande* de la sucesión b_n, existen $M > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$a_n \leq Mb_n \quad \text{para todo } n > n_0. \tag{3.13}$$

Para demostrar que la serie de términos no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, sólo hay que comprobar que la sucesión de sus sumas parciales está acotada (véase la Proposición 3.1.10).

Si llamamos

$$C = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + M\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) \in \mathbb{R},$$

entonces para cada $n > n_0$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \overset{(3.13)}{\leq} \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} M b_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n_0} a_k + M\left(\sum_{k=n_0+1}^{n} b_k\right) \overset{(*)}{\leq} \sum_{k=1}^{n_0} a_k + M\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \overset{(*)}{\leq} \sum_{k=1}^{n_0} a_k + M\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = C,$$

donde las desigualdades (*) se satisfacen porque $b_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, también se cumple $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq C$ para todo $n = 1, 2, \ldots, n_0$, ya que $a_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $M\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) \geq 0$. Así, $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que la sucesión de sumas parciales $\sum_{k=1}^{n} a_k$ está acotada. □

Ejemplo 3.3.3.

(i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}$ *converge, porque* $\frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2} \in O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

(ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+\cos n}{n}$ *diverge, porque* $\frac{1}{n} \in O\left(\frac{5+\cos n}{n}\right)$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge.*

El segundo criterio de comparación hace uso de los conceptos de “sucesiones del mismo orden” y “sucesión mucho menor que otra”:

Proposición 3.3.4 (Criterio de Comparación II)**.** *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series de términos no negativos. Se cumple:*

(i) Si $\boxed{a_n \sim b_n}$ *entonces:*

(1) $\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \sum_{k=1}^{n} b_k$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge.*

(ii) Si $\boxed{a_n \ll b_n}$ *entonces:*

(1) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *también converge.*

(2) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge, entonces* $\sum_{k=1}^{n} a_k \ll \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Vamos a ilustrar este criterio con algunos ejemplos:

Ejemplo 3.3.5.

(i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+7n+1}$ *converge, porque* $\frac{n+1}{n^3+7n+1} \sim \frac{1}{n^2}$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

(ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+10}}$ *diverge, porque* $\frac{1}{\sqrt{n^2+10}} \sim \frac{1}{n}$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *diverge. Además, la sucesión de sumas parciales cumple:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+10}} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

(véase el Ejemplo 3.2.1).

(iii) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ *converge, porque* $\frac{1}{n^2 \ln n} \ll \frac{1}{n^2}$ *y* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

(iv) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ *diverge, porque* $\frac{1}{n} \ll \frac{1}{\ln n}$ *y* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge. Además, la sucesión de sumas parciales cumple:*

$$\ln n \sim \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \ll \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}$$

(véase el Ejemplo 3.2.1).

A continuación damos un par de criterios que permiten estudiar la convergencia de series de términos no negativos sin necesidad de compararlas con otras series.

Proposición 3.3.6 (Criterio de la Raíz). *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos no negativos tal que existe*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

(i) Si $L < 1$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

(ii) Si $L > 1$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Ejemplo 3.3.7. *(i) La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)^n}$ *converge.*

(ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$ *diverge.*

Demostración. Ambas series se pueden estudiar con el Criterio de la Raíz, ya que en el apartado (i) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+3)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} = 0 < 1,$$

mientras que en el apartado (ii) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1.$$

□

Proposición 3.3.8 (Criterio del Cociente)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos no negativos tal que existe*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

(i) Si $L < 1$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

(ii) Si $L > 1$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Ejemplo 3.3.9. *(i) La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *converge.*

(ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ *diverge.*

Demostración. Ambas series se pueden analizar usando el Criterio del Cociente. En efecto, para la primera serie tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

mientras que para la segunda tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^n}{n!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

$\square$

Observación 3.3.10. *En general, en los criterios de la raíz y el cociente, si $L = 1$ no se puede concluir nada, como ponen de manifiesto las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Hasta ahora nos hemos centrado en estudiar la convergencia de series de términos no negativos. En la última parte de la lección vamos a analizar otro tipo de series de gran importancia, cuyos sucesivos términos van cambiando de signo:

Definición 3.3.11. *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es* **alternada** *si $a_n a_{n+1} \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2-1}$ son series alternadas. Para decidir si una serie alternada converge disponemos del siguiente resultado, que además proporciona un método para calcular aproximadamente la suma de la serie (si ésta converge).

Proposición 3.3.12 (Criterio de Leibniz)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie alternada tal que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad y \quad |a_{n+1}| \leq |a_n| \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Además, para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m} a_n \right| \leq |a_{m+1}|$$

y el signo de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m} a_n$ coincide con el signo de $(-1)^m a_1$.

Observación 3.3.13. *Si además* $|a_{n+1}| < |a_n|$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m} a_n \right| < |a_{m+1}| \qquad \textit{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Por ejemplo, usando el Criterio de Leibniz es fácil ver que la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Con más esfuerzo se puede demostrar que su suma vale $-\ln 2$. A continuación indicamos cómo calcular dicha suma de forma aproximada.

Ejemplo 3.3.14. *La suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *es aproximadamente* -0.69364743055982 *(aproximación por defecto y con error absoluto menor que* 10^{-3}*).*

Demostración. En este ejemplo $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ y $|a_n| = \frac{1}{n}$. La serie cumple los requisitos de la Proposición 3.3.12 y la Observación 3.3.13, así que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n} \right| < \frac{1}{m+1} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, para calcular aproximadamente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ con error absoluto menor que 10^{-3}, sólo tenemos que calcular una suma parcial $\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n}$ siendo $m \in \mathbb{N}$ cualquier número tal que $\frac{1}{m+1} \leq 10^{-3}$. Por ejemplo, $m = 999$ es suficiente. Calculando:

$$\sum_{n=1}^{999} \frac{(-1)^n}{n} = -0.69364743055982.$$

Como $a_1 < 0$ y $m = 999$ es impar, tenemos $(-1)^m a_1 = -a_1 > 0$ y, por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{999} \frac{(-1)^n}{n} > 0,$$

es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} > \sum_{n=1}^{999} \frac{(-1)^n}{n} = -0.69364743055982$. Luego

$$-0.69364743055982 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < -0.69264743055982.$$

Por tanto, $(-0.69364743055982, -0.69264743055982)$ es un intervalo de longitud 10^{-3} donde se encuentra la suma de la serie. $\square$

Ejercicios

Ejercicio 3.3.15. *Sabiendo que la sucesión a_n cumple*

$$\frac{1}{n^2} < a_n < \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{3.14}$$

estudia si las series siguientes convergen:

$$\textit{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \textit{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \qquad \textit{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} \qquad \textit{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$$

SOLUCIÓN. (i) Aplicando el Criterio de Comparación I (Proposición 3.3.2), observamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*. En efecto, por la segunda desigualdad en (3.14) tenemos

$$a_n \in O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

y además la serie armónica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Ejemplo 3.2.1).

(ii) Elevando al cuadrado la segunda desigualdad de (3.14), deducimos que $a_n^2 < \frac{1}{n^3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $a_n^2 \in O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Teniendo en cuenta que la serie armónica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge (Ejemplo 3.2.1), podemos aplicar el Criterio de Comparación I (Proposición 3.3.2) para deducir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ también *converge*.

(iii) Tomando raíces cuadradas en la primera desigualdad de (3.14), obtenemos que $\frac{1}{n} < \sqrt{a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\frac{1}{n} \in O(\sqrt{a_n}).$$

Como la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (Ejemplo 3.2.1), el Criterio de Comparación I (Proposición 3.3.2) garantiza que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ *diverge*.

(iv) Aplicando la Regla del Sandwich (Proposición 1.2.7) en (3.14), deducimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0,$$

luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$ *diverge* (usamos la Proposición 3.1.15). □

Ejercicio 3.3.16. *Para cada una de las siguientes series de términos no negativos, determina si converge y, en caso contrario, encuentra (si es posible) el orden de magnitud de la sucesión de sus sumas parciales:*

(i) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots$ *(ii)* $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\dots$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\frac{7}{2^2}+\dots$ *(iv)* $\frac{1}{2-1}+\frac{1}{4-1}+\frac{1}{8-1}+\dots$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ *(vi)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n\ln n)^2}$

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}$ *(viii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2\ln n}$

SOLUCIÓN. (i) El término general de la serie es $a_n = \frac{1}{2n-1}$. Como $a_n \sim \frac{1}{n}$ y la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (Ejemplo 3.2.1), podemos aplicar el Criterio de Comparación II (Proposición 3.3.4(i)) para deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ también *diverge* y, además, su sucesión de sumas parciales verifica

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

(ii) El término general de la serie es $a_n = \frac{1}{10n+1}$. Como en el apartado (i), tenemos $a_n \sim \frac{1}{n}$. Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$ *diverge* y, además, su sucesión de sumas parciales cumple

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10k+1} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

(iii) En este caso, el término general de la serie es $a_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$. Afirmamos que

$$a_n \ll \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n. \tag{3.15}$$

En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}}{\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{\left(\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)^n} = 0,$$

ya que $2n-1 \sim n \ll \left(\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)^n$ (según la Jerarquía de Infinitos, Teorema 1.3.11). Como la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n$ converge (Ejemplo 3.1.5) y se cumple la relación (3.15), el Criterio de Comparación II (Proposición 3.3.4(ii)) asegura que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ *converge*.

(iv) El término general de la serie es $a_n = \dfrac{1}{2^n-1}$, que cumple $a_n \sim \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Como la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge (Ejemplo 3.1.5), podemos utilizar el Criterio de Comparación II (Proposición 3.3.4(i)) para deducir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ *converge*.

(v) Tenemos $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}+1 = \sqrt{1+0}+1 = 2 \neq 0.$$

Como la serie armónica generalizada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Ejemplos 3.1.17 y 3.2.1), podemos aplicar el Criterio de Comparación II (Proposición 3.3.4(i)) para deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

diverge y, además, su sucesión de sumas parciales cumple

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \sqrt{n}.$$

(vi) Como $\dfrac{1}{(n\ln n)^2}=\dfrac{1}{n^2(\ln n)^2}\ll\dfrac{1}{n^2}$ y la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ converge (Ejemplo 3.2.1), el Criterio de Comparación II (Proposición 3.3.4(ii)) garantiza que $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n\ln n)^2}$ *converge*.

(vii) Sabemos que $-1\le\operatorname{sen}\alpha\le 1$ para todo $\alpha\in\mathbb{R}$, luego $\dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}\le\dfrac{1}{n^3}$ para todo $n\in\mathbb{N}$, así que

$$\frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}\in O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Por tanto, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ converge, lo mismo ocurre con $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}$ (aquí usamos el Criterio de Comparación I, Proposición 3.3.2).

(viii) El término general de la serie cumple $\dfrac{1}{1+2\ln n}\sim\dfrac{1}{\ln n}$. Como la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ diverge (Ejemplo 3.3.5(iv)), lo mismo ocurre con $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{1+2\ln n}$ (Criterio de Comparación II, Proposición 3.3.4(i)). Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+2\ln n}$ *diverge*. □

Ejercicio 3.3.17. *Para cada una de las siguientes series de términos no negativos, determina si converge y, en caso contrario, encuentra (si es posible) el orden de magnitud de la sucesión de sus sumas parciales:*

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}\qquad \text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2-n}}\qquad \text{(iii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}\qquad \text{(iv)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{\sqrt{n^3+1}}$$

SOLUCIÓN. (i) El término general cumple $\dfrac{n}{n^3+1}\sim\dfrac{1}{n^2}$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ converge (Ejemplo 3.2.1), el Criterio de Comparación II (Proposición 3.3.4(i)) asegura que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+1}$ también *converge*.

(ii) En este caso tenemos $\dfrac{1}{\sqrt{2n^2-n}}\sim\dfrac{1}{n}$. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{\sqrt{2n^2-n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{n}}=\sqrt{2}\neq 0.$$

Teniendo en cuenta que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge y $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ (Ejemplo 3.2.1), el Criterio de Comparación II (Proposición 3.3.4(i)) nos permite concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2-n}}$ *diverge* y que su sucesión de sumas parciales cumple

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k^2-k}} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

(iii) El término general verifica $\frac{\ln n}{n^3} \ll \frac{1}{n^2}$, ya que $\ln n \ll n$ (Teorema 1.3.11). De nuevo, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, podemos usar el Criterio de Comparación II (Proposición 3.3.4(ii)) para deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ *converge*.

(iv) Es fácil ver que $\frac{2n^2+1}{\sqrt{n^3+1}} \sim n^{1/2}$. Por el el Criterio de Comparación II (Proposición 3.3.4(i)), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{\sqrt{n^3+1}}$ *diverge* y su sucesión de sumas parciales cumple

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2+1}{\sqrt{k^3+1}} \sim \sum_{k=1}^{n} k^{1/2} \sim n^{3/2}.$$

(véase el Ejemplo 3.2.2). □

Ejercicio 3.3.18. *Sabiendo que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie de términos positivos convergente, estudia si las series siguientes convergen:*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^n \qquad (iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n} \qquad (v)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + 5a_n^3 - a_n^4\right).$$

SOLUCIÓN. (i) De la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se sigue que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (Proposición 3.1.15) y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ *diverge* (Proposición 3.1.15).

(ii) Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq 1$ para todo $n \geq n_0$. Teniendo en cuenta que $a_n > 0$, deducimos que $a_n^2 \leq a_n$ para todo $n \geq n_0$. En particular, esto implica que $a_n^2 \in O(a_n)$. La convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y el Criterio de Comparación I (Proposición 3.3.2) garantizan que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *converge*.

(iii) Eligiendo $n_0 \in \mathbb{N}$ como en (ii), también se cumple $a_n^n \leq a_n$ para todo $n \geq n_0$, así que $a_n^n \in O(a_n)$ y de nuevo el Criterio de Comparación I nos asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ *converge*.

(iv) El término general de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$ converge a 1, luego dicha serie *diverge* (Proposición 3.1.15).

(v) La condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ implica que $a_n^3 \ll a_n$ y $a_n^4 \ll a_n$. Aplicando el Criterio de Comparación II (Proposición 3.3.4) deducimos que las series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ son convergentes. Por tanto, teniendo en cuenta que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + 5a_n^3 - a_n^4\right)$ también *converge* (aplicamos la Proposición 3.1.7). □

Ejercicio 3.3.19. *Dado $p \in \mathbb{R}$, se considera la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n+1)(n+2)(n+3)}. \tag{3.16}$$

(i) ¿Para qué valores de p converge?

(ii) Determina el orden de magnitud de la sucesión de las sumas parciales de la serie, en los casos en que ésta sea divergente.

SOLUCIÓN. El término general de la serie cumple

$$\frac{n^p}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sim \frac{n^p}{n^3} = n^{p-3} = \frac{1}{n^{3-p}}.$$

Vamos a aplicar ahora el Criterio de Comparación II (Proposición 3.3.4(i)). En vista de los Ejemplos 3.2.1 y 3.2.2, tenemos:

- Si $\boxed{p<2}$ entonces $3-p>1$ y así la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-p}}$ converge. Por tanto, la serie (3.16) *converge*.

- Si $\boxed{p=2}$ entonces $3-p=1$, así que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-p}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge y la sucesión de sus sumas parciales cumple $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$. Por tanto, la serie (3.16) *diverge* y la sucesión de sus sumas parciales satisface

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{(k+1)(k+2)(k+3)}\sim\ln n.$$

- Si $\boxed{p>2}$ entonces tenemos dos posibilidades:

$$2<p<3 \qquad \text{ó} \qquad p\geq 3.$$

En el primer (resp. segundo) caso, el Ejemplo 3.2.1 (resp. Ejemplo 3.2.2) nos dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-p}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-3}$ diverge y $\sum_{k=1}^{n}k^{p-3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{3-p}}\sim n^{p-2}$. Por tanto, la serie (3.16) *diverge* y la sucesión de sus sumas parciales satisface

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{(k+1)(k+2)(k+3)}\sim n^{p-2}.$$

□

Ejercicio 3.3.20. *Determina si las series siguientes son convergentes o divergentes:*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n!)^2} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!-(n+1)!}{2^n} \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$$

$$(iv)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n \qquad (v)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$$

SOLUCIÓN. (i) Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{3^n}{(n!)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+1)^2}=0<1,$$

el Criterio del Cociente 3.3.8 asegura que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n!)^2}$ *converge*.

(ii) Extrayendo $(n+1)!$ como factor común en el numerador, el término general se puede escribir así:

$$a_n = \frac{(n+2)! - (n+1)!}{2^n} = \frac{(n+1)!(n+1)}{2^n}.$$

Usamos la expresión anterior para calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+2)!(n+2)}{2^{n+1}}}{\dfrac{(n+1)!(n+1)}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{2(n+1)} = \infty.$$

Por el Criterio del Cociente, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge*.

(iii) Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^2}{(n+2)!}}{\dfrac{n^2}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)n^2} = 0 < 1,$$

la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)!}$ *converge* (aplicamos una vez más el Criterio del Cociente).

(iv) Calculamos el límite de la *raíz n-ésima* del término general, obteniendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right) = 0 < 1.$$

Por el Criterio de la Raíz (Proposición 3.3.6), la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$ *converge*.

(v) Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^n\cdot 2\cdot(n+1)\cdot n!}{(n+1)^n\cdot(n+1)}}{\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1,$$

el Criterio del Cociente garantiza que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$ *converge*. □

Ejercicio 3.3.21. *Da una cota del error absoluto cometido al utilizar la suma parcial S_n para aproximar la suma de las siguientes series alternadas:*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad S_{80}; \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}; \quad S_9.$$

En cada caso, determina si la aproximación S_n es por defecto o por exceso.

SOLUCIÓN. (i) La serie cumple las hipótesis del Criterio de Leibniz (Proposición 3.3.12 y Observación 3.3.13) y tenemos la siguiente acotación

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - S_{80} \right| < \frac{1}{\sqrt{80+1}} = \frac{1}{9}.$$

Además, el signo de la diferencia $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - S_{80}$ coincide con el signo del primer término de la serie, que es negativo. Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} < S_{80}$, luego S_{80} es una aproximación por exceso.

(ii) La serie cumple las hipótesis del Criterio de Leibniz (Proposición 3.3.12 y Observación 3.3.13) y tenemos la siguiente acotación

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} - S_9 \right| < \frac{1}{(9+1)^3} = 10^{-3}.$$

Además, el signo de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} - S_9$ es contrario al del primer término de la serie (que es positivo), luego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} < S_9$. Así, S_9 es una aproximación por exceso. □

Ejercicio 3.3.22. *Da una cota del error absoluto cometido al utilizar la suma parcial S_n para aproximar la suma de las siguientes series alternadas:*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n+1}, \quad S_4; \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \quad S_{20}.$$

En cada caso, determina si la aproximación S_n es por defecto o por exceso.

Ejercicio 3.3.23. *Determina dos números $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=1}^{m_1} \frac{(-1)^n}{n!} \right| < 10^{-2},$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=1}^{m_2} \frac{(-1)^n}{n!} \right| < 10^{-3}.$$

SOLUCIÓN. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ cumple los requisitos del Criterio de Leibniz (Proposición 3.3.12 y Observación 3.3.13), así que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n!} \right| < \frac{1}{(m+1)!} \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, sólo tenemos que elegir $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ cumpliendo

$$\frac{1}{(m_1+1)!} \leq 10^{-2} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{(m_2+1)!} \leq 10^{-3}.$$

Estas desigualdades equivalen a:

$$(m_1+1)! \geq 100 \qquad \text{y} \qquad (m_2+1)! \geq 1000.$$

Probando con $m_1 = 1, 2, \ldots$ observamos que $m_1 = 4$ es suficiente ($5! = 120$). Del mismo modo, también observamos que $m_2 = 6$ nos sirve ($7! = 5040$). □

Ejercicio 3.3.24. *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice* **absolutamente convergente** *si la serie de términos no negativos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

es convergente. Toda serie absolutamente convergente es convergente. El recíproco no es cierto: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *es convergente pero no absolutamente convergente.*

Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de las series siguientes en función del valor de k, que puede ser un número real cualquiera:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^2} \qquad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3k)^n}{n+1} \qquad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-k)^n}{n2^n}$$

SOLUCIÓN. (i) Vamos a estudiar en primer lugar la convergencia absoluta. Para aplicar el Criterio de la Raíz (Proposición 3.3.6) a la serie de términos no negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{k^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|k|^n}{n^2}$$

calculamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|k|^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|k|}{(\sqrt[n]{n})^2} = |k|,$$

ya que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (Ejemplo 1.3.8). Por tanto, el Criterio de la Raíz nos dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|k|^n}{n^2}$ es convergente si $|k| < 1$ y divergente si $|k| > 1$. Para $|k| = 1$ la serie es precisamente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, luego converge (Ejemplo 3.2.1).

Como toda serie absolutamente convergente es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^2}$ converge si $|k| \leq 1$. Por otro lado, antes también hemos visto que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^2}$ diverge si $k > 1$. Finalmente, si $k < -1$ entonces la serie diverge, ya que su término general $\frac{k^n}{n^2}$ no converge a 0 (Proposición 3.1.15). En efecto, para cualquier número par n tenemos

$$\frac{k^n}{n^2} = \frac{(-k)^n}{n^2}$$

y además $n^2 \ll (-k)^n$ si $-k > 1$ (Teorema 1.3.11).

En resumen: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^2}$ es absolutamente convergente si $|k| \leq 1$, mientras que es divergente si $|k| > 1$.

(ii) Primero analizamos la convergencia absoluta. Para aplicar el Criterio de la Raíz (Proposición 3.3.6) a la serie de términos no negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n(3k)^n}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3|k|)^n}{n+1}$$

calculamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n(3|k|)^n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cdot 3|k|}{\sqrt[n]{n+1}} = 3|k|,$$

donde hemos usado que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ (este último límite se obtiene fácilmente comprobando primero que $\lim_{n\to\infty} \ln(\sqrt[n]{n+1}) = 0$). Según el Criterio de la Raíz, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3|k|)^n}{n+1}$ converge si $|k| < \frac{1}{3}$ y diverge si $|k| > \frac{1}{3}$. Por otro lado, si $|k| = \frac{1}{3}$ entonces el término general cumple $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3|k|)^n}{n+1}$ diverge.

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3k)^n}{n+1}$ converge si $|k| < \frac{1}{3}$. Para $|k| > \frac{1}{3}$ el término general no converge a 0 y, por tanto, la serie diverge (Proposición 3.1.15). En efecto, para cualquier número natural par n se cumple

$$\frac{n(3k)^n}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot (3|k|)^n$$

y además $\lim_{n\to\infty}(3|k|)^n = \infty$ si $|k| > \frac{1}{3}$. Por otro lado, ya hemos visto que la serie diverge si $k = \frac{1}{3}$. Finalmente, si $k = -\frac{1}{3}$ entonces el término general de la serie es $\frac{(-1)^n n}{n+1}$, que tampoco converge a 0, así que en este caso la serie también diverge.

En resumen: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3k)^n}{n+1}$ es absolutamente convergente si $|k| < \frac{1}{3}$ y divergente si $|k| > \frac{1}{3}$.

(iii) Comenzamos estudiando la convergencia absoluta. Calculamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|1-k|^n}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-k|}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{|1-k|}{2}.$$

Por el Criterio de la Raíz (Proposición 3.3.6), la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(1-k)^n}{n2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1-k|^n}{n2^n}$$

converge si $\frac{|1-k|}{2} < 1$ y diverge si $\frac{|1-k|}{2} > 1$. Observamos que

$$\frac{|1-k|}{2} < 1 \iff k \in (-1,3) \qquad \text{y} \qquad \frac{|1-k|}{2} > 1 \iff k \in (-\infty,-1) \cup (3,\infty).$$

Por otro lado, para $k = -1$ ó $k = 3$ el término general es $\frac{|1-k|^n}{n2^n} = \frac{1}{n}$, luego la serie diverge (Ejemplo 3.2.1).

Vamos a estudiar ahora la convergencia de la serie en los casos en los que no es absolutamente convergente.

- Naturalmente, si $k \leq -1$ entonces $1-k > 0$ y ya hemos visto antes que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-k)^n}{n2^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1-k|^n}{n2^n}$ diverge.

- Si $k = 3$ entonces $\dfrac{(1-k)^n}{n2^n} = \dfrac{(-1)^n}{n}$, luego la serie converge (por el Criterio de Leibniz, Proposición 3.3.12).
- Finalmente, si $k > 3$ entonces el término general $\dfrac{(1-k)^n}{n2^n}$ no converge a 0 y, por tanto, la serie diverge (Proposición 3.1.15). En efecto, basta tener en cuenta que para cualquier número natural par n se cumple

$$\frac{(1-k)^n}{n2^n} = \left(\frac{|1-k|}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$$

  y además $n \ll \left(\dfrac{|1-k|}{2}\right)^n$ si $\dfrac{|1-k|}{2} > 1$ (Teorema 1.3.11).

En resumen, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-k)^n}{n2^n}$ es absolutamente convergente si $k \in (-1,3)$, convergente pero no absolutamente convergente si $k = 3$ y divergente si $k \in (-\infty,-1] \cup (3,\infty)$. $\square$

3.4. Series de Taylor

Contenidos

- Polinomios de Taylor.
- Series de Taylor de funciones elementales.

Teoría

En esta última lección damos una breve introducción a las *series de Taylor* y a las técnicas de aproximación de funciones mediante las sumas parciales de dichas series (*polinomios de Taylor*).

Definición 3.4.1. *Sea f una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ en un intervalo abierto I y sea $x_0 \in I$.*

(i) Se llama **serie de Taylor** *de f, centrada en el punto x_0, a la serie "formal":*

$$f(x_0)+f'(x_0)\big(x-x_0\big)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\big(x-x_0\big)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\big(x-x_0\big)^3+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\big(x-x_0\big)^n.$$

En la expresión anterior, a la variable x se le puede asignar cualquier valor real, obteniendo una serie numérica.

(ii) Se llama **polinomio de Taylor** *de f, de orden $m \in \mathbb{N}$ centrado en el punto x_0, al polinomio $P_{m,f,x_0}(x)$ definido mediante la expresión:*

$$f(x_0)+f'(x_0)\big(x-x_0\big)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\big(x-x_0\big)^2+\ldots+\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\big(x-x_0\big)^m=$$
$$=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\big(x-x_0\big)^n.$$

Aquí $f^{(n)}$ denota la derivada n-ésima de f, con el convenio $f^{(0)}=f$.

Veamos algunos ejemplos de series de Taylor de funciones elementales:

Ejemplo 3.4.2. *La serie de Taylor de $f(x)=e^x$, centrada en $x_0=0$, es:*

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Demostración. Basta observar que $f^{(n)}(x) = e^x$ y, por tanto, $f^{(n)}(x_0) = e^0 = 1$ para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$ □

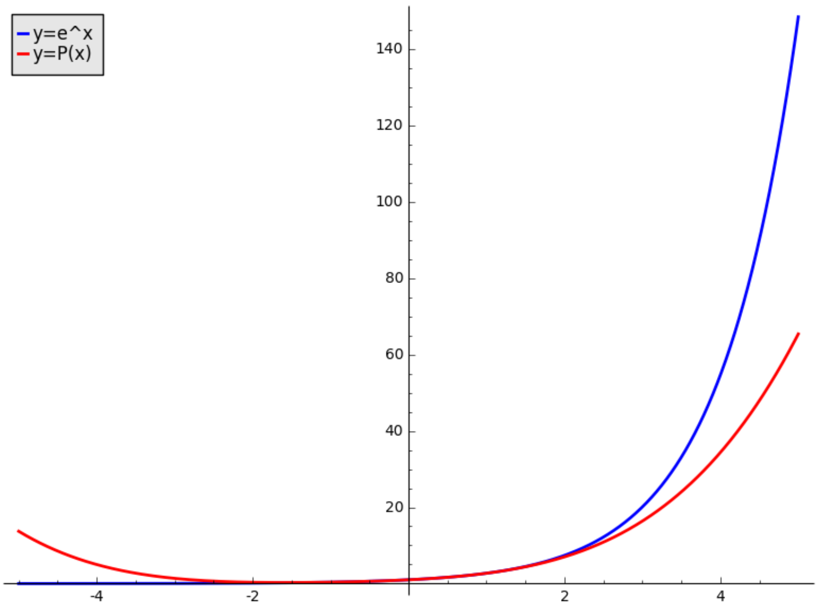


Figura 3.3: Gráficas de la función $f(x) = e^x$ y su polinomio de Taylor de orden 4 centrado en 0.

Ejemplo 3.4.3. *La serie de Taylor de* $f(x) = \operatorname{sen} x$*, centrada en* $x_0 = 0$*, es:*

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Demostración. El primer término de la serie es $f^{(0)}(x_0) = \operatorname{sen} 0 = 0$. Calculando las sucesivas derivadas de $f(x) = \operatorname{sen} x$, obtenemos:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \cos x, & f^{(2)}(x) &= -\operatorname{sen} x, \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x, & f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x = f(x), \quad \ldots \end{aligned}$$

Sustituyendo en $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(0) &= \cos 0 = 1, & f^{(2)}(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0, \\ f^{(3)}(0) &= -\cos 0 = -1, & f^{(4)}(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0, \quad \ldots \end{aligned}$$

Es decir, $f^{(2k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$f^{(2k-1)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es impar,} \\ -1 & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases}$$

Por tanto, la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$, centrada en $x_0 = 0$, es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

como se quería demostrar. □

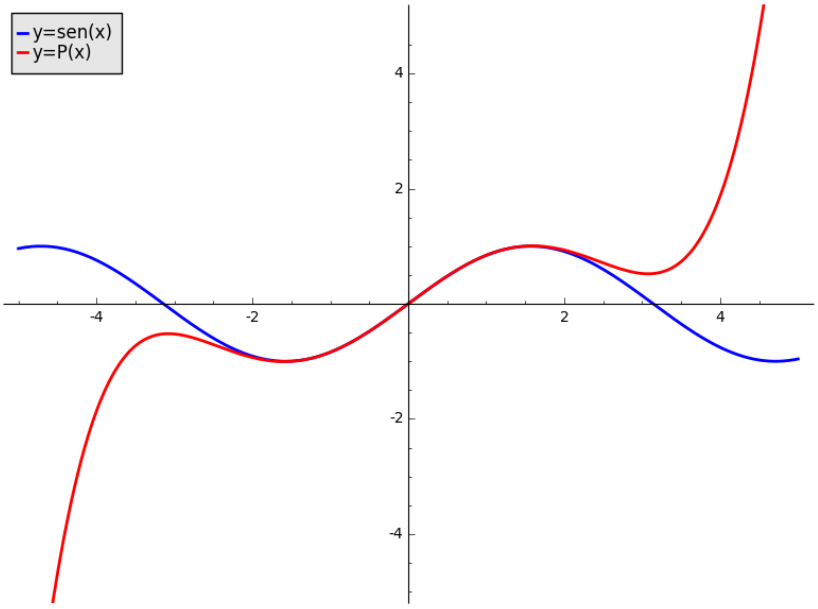


Figura 3.4: Gráficas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y su polinomio de Taylor de orden 5 centrado en 0.

Ejemplo 3.4.4. *La serie de Taylor de $f(x) = \cos x$, centrada en $x_0 = 0$, es:*

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Demostración. El primer término de la serie es $f^{(0)}(x_0) = \cos 0 = 1$. Calculando las sucesivas derivadas de $f(x) = \cos x$, obtenemos:

$$\begin{aligned} &f^{(1)}(x) = -\operatorname{sen} x, \quad &&f^{(2)}(x) = -\cos x, \\ &f^{(3)}(x) = \operatorname{sen} x, \quad &&f^{(4)}(x) = \cos x = f(x), \quad \ldots \end{aligned}$$

Sustituyendo en $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} &f^{(1)}(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0, \quad &&f^{(2)}(0) = -\cos 0 = -1, \\ &f^{(3)}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0, \quad &&f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1, \quad \ldots \end{aligned}$$

Es decir, $f^{(2k-1)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$f^{(2k)}(0) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \text{ es impar}, \\ 1 & \text{si } k \text{ es par}. \end{cases}$$

Así, la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$, centrada en $x_0 = 0$, es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

□

Ejemplo 3.4.5. *La serie de Taylor de $f(x) = \ln(x+1)$, centrada en $x_0 = 0$, es:*

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Demostración. El primer término de la serie es $f^{(0)}(x_0) = \ln 1 = 0$. Vamos a calcular ahora las derivadas $f^{(n)}(x)$ para $n \in \mathbb{N}$. Comenzamos con las primeras:

$$\begin{aligned} &f^{(1)}(x) = \frac{1}{x+1} \qquad &&f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \\ &f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad &&f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

Es sencillo demostrar por inducción que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sustituyendo en $x_0 = 0$, deducimos que

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

y, por tanto, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

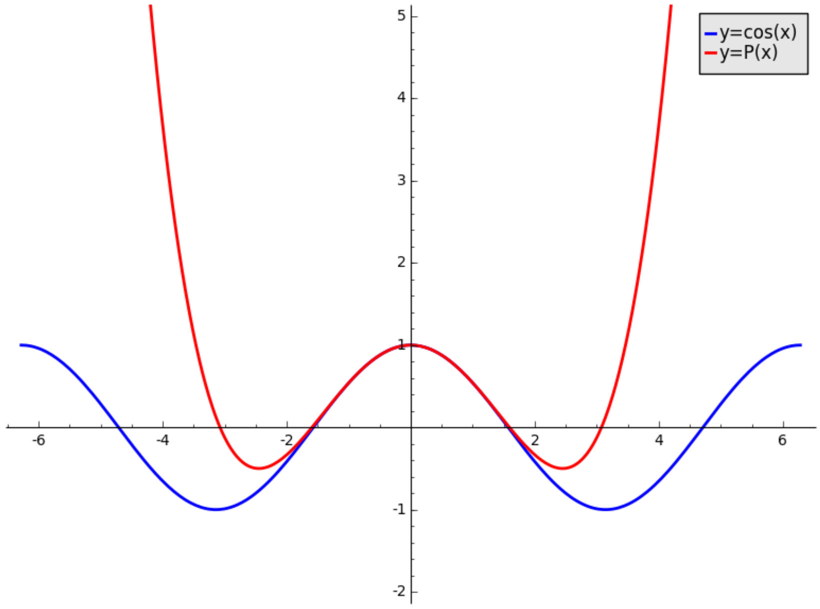


Figura 3.5: Gráficas de la función $f(x) = \cos x$ y su polinomio de Taylor de orden 4 centrado en 0.

En las gráficas anteriores se observa que los polinomios de Taylor aproximan bien a la función cerca del punto donde están centrados, es decir:

$$f(x) \approx P_{m,f,x_0}(x) \quad \text{si} \quad x \approx x_0.$$

La siguiente proposición permite controlar el error cometido en dicha aproximación.

Proposición 3.4.6 (Error del polinomio de Taylor)**.** *En las condiciones de la Definición 3.4.1, sean $x \in I$ y $m \in \mathbb{N}$. Si $M > 0$ es una constante tal que $|f^{(m+1)}(t)| \leq M$ para todo t situado entre x y x_0, entonces:*

$$\left| f(x) - P_{m,f,x_0}(x) \right| \leq \frac{M}{(m+1)!} \left| x - x_0 \right|^{m+1}.$$

Veamos dos ejemplos ilustrativos:

Ejemplo 3.4.7. *Cálculo aproximado del número e utilizando el polinomio de Taylor de la función $f(x) = e^x$, de orden 4, centrado en $x_0 = 0$, dando una cota superior del error absoluto cometido.*

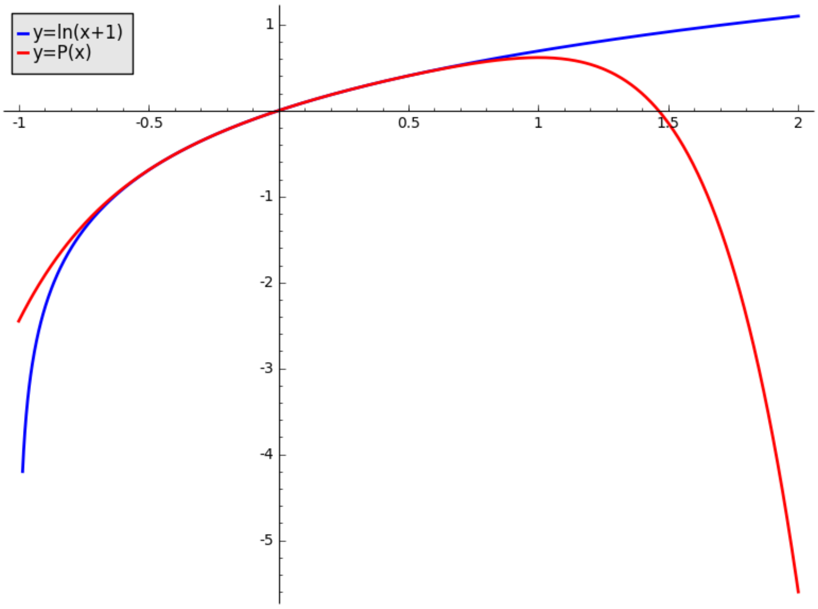


Figura 3.6: Gráficas de la función $f(x) = \ln(x+1)$ y su polinomio de Taylor de orden 6 centrado en 0.

Solución. Según hemos visto en el Ejemplo 3.4.2, dicho polinomio es

$$P(x) = P_{4,f,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$

Observamos que $e = f(1)$, así que tenemos que calcular $P(1)$ y dar una cota superior de $|f(1) - P(1)|$. Sustituyendo $x = 1$, obtenemos:

$$P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24} = 2.708333\ldots$$

Por otro lado, la derivada *quinta* de la función es $f^{(5)}(x) = e^x$ y cumple

$$|f^{(5)}(x)| = e^x < 3 \quad \text{para todo } x \in [0,1].$$

Tomando entonces $M = 1$ en la desigualdad de la Proposición 3.4.6, obtenemos la siguiente acotación del error:

$$\left| e - \frac{65}{24} \right| = |f(1) - P(1)| \leq \frac{1}{5!}|1-0|^5 = \frac{1}{120} = 0.008333\ldots$$

□

Ejemplo 3.4.8. *Cálculo aproximado del número e utilizando el polinomio de Taylor de la función* $f(x) = e^x$*, centrado en* $x_0 = 0$*, con error absoluto menor que* 10^{-5}.

Solución. Tenemos que determinar el orden m del polinomio a utilizar. Para ello observamos que, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, la derivada m-ésima es $f^{(m)}(x) = e^x$, cumple

$$|f^{(m)}(x)| = e^x < 3 \quad \text{para todo } x \in [0,1],$$

y así podemos tomar $M = 1$ en la desigualdad de la Proposición 3.4.6, independientemente del valor de m. Por tanto:

$$\left|e - P_{m,f,0}(1)\right| = |f(1) - P_{m,f,0}(1)| \leq \frac{1}{(m+1)!}\left|1-0\right|^{m+1} = \frac{1}{(m+1)!} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Probando con $m = 1, 2, \ldots$ vemos que para $m = 8$ ya se cumple $\dfrac{1}{(m+1)!} < 10^{-5}$, luego $\left|e - P_{8,f,0}(1)\right| < 10^{-5}$. Para calcular $P_{8,f,0}(1)$, recordamos (Ejemplo 3.4.2) que

$$P_{8,f,0}(x) = \sum_{n=0}^{8} \frac{x^n}{n!}$$

y sustituimos $x = 1$, obteniendo la aproximación pedida del número e:

$$P_{8,f,0}(1) = \sum_{n=0}^{8} \frac{1}{n!} = \frac{109601}{40320} = 2.7182787\ldots$$

□

La pregunta que se plantea ahora es:

Dada una función f infinitamente derivable en un intervalo abierto I y $x_0 \in I$, ¿para qué valores de x la serie de Taylor de f, centrada en x_0, converge y tenemos la igualdad:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x - x_0\right)^n \ ?$$

La respuesta a la pregunta anterior es *"para todo $x \in \mathbb{R}$"* cuando $f(x)$ es cualquiera de las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$:

Proposición 3.4.9. *Para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \operatorname{sen} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

En cambio, para la función $\ln(x+1)$ no tenemos un comportamiento tan bueno:

Ejemplo 3.4.10. *Para cada $x \in (-1,1]$ se cumple:*

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Sin embargo, si $x \notin (-1,1]$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ diverge.

Los resultados anteriores sobre convergencia de series de Taylor se pueden utilizar para aproximar las correspondientes funciones mediante polinomios de Taylor.

Ejemplo 3.4.11. *Cálculo aproximado de $\operatorname{sen}(\frac{1}{3})$ con error absoluto menor que 10^{-6}, utilizando la serie de Taylor de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ centrada en $x_0 = 0$ y el Criterio de Leibniz para series alternadas.*

Solución. En vista de la Proposición 3.4.9, tenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n-1}(2n-1)!}. \tag{3.17}$$

Vamos a aproximar $\operatorname{sen}(\frac{1}{3})$ mediante una suma parcial

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n-1}(2n-1)!},$$

eligiendo un $m \in \mathbb{N}$ adecuado. La serie alternada (3.17) cumple los requisitos del Criterio de Leibniz (Proposición 3.3.12 y Observación 3.3.13), así que tenemos la siguiente acotación del error:

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\right) - S_m\right| < \frac{1}{3^{2(m+1)-1}(2(m+1)-1)!} = \frac{1}{3^{2m+1}(2m+1)!} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Ahora sólo tenemos que encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{3^{2m+1}(2m+1)!} \leq 10^{-6}.$$

Probando con $m = 1, 2, \ldots$ observamos que $m = 3$ ya cumple la desigualdad. Luego

$$S_3 = \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n-1}(2n-1)!} = 0.32719478737997$$

es una aproximación de $\operatorname{sen}(\frac{1}{3})$ con error absoluto menor que 10^{-6}. Observamos que S_3 es precisamente el valor que toma en $x = \frac{1}{3}$ el polinomio

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

(polinomio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$, de orden 5 centrado en $x_0 = 0$). $\square$

Ejemplo 3.4.12. *Cálculo aproximado de* $\ln(\frac{3}{2})$ *con error absoluto menor que* 10^{-5}*, utilizando la serie de Taylor de la función* $f(x) = \ln(x+1)$ *centrada en* $x_0 = 0$ *y el Criterio de Leibniz para series alternadas.*

Solución. Según el Ejemplo 3.4.10, tenemos

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}. \tag{3.18}$$

Vamos a aproximar $\ln(\frac{3}{2})$ mediante una suma parcial

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n},$$

eligiendo un $m \in \mathbb{N}$ adecuado. Como la serie alternada (3.18) cumple los requisitos del Criterio de Leibniz (Proposición 3.3.12 y Observación 3.3.13), tenemos:

$$\left|\ln\left(\frac{3}{2}\right) - S_m\right| < \frac{1}{(m+1)2^{m+1}} \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Buscamos un $m \in \mathbb{N}$ que cumpla $\dfrac{1}{(m+1)2^{m+1}} \leq 10^{-5}$, es decir, $(m+1)2^{m+1} \geq 10^5$. Probando con $m = 1, 2, \ldots$ observamos que $m = 12$ ya cumple la desigualdad. Por tanto,

$$S_{12} = \sum_{n=1}^{12} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} = 0.40545869196992$$

es una aproximación de $\ln(\frac{3}{2})$ con error absoluto menor que 10^{-5}. Nótese que S_{12} es el valor que toma en $x = \frac{1}{2}$ el polinomio

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{12}}{12}$$

(polinomio de Taylor de $f(x) = \ln(x+1)$, de orden 12 centrado en $x_0 = 0$). $\square$

Ejercicios

Ejercicio 3.4.13. *Calcula la serie de Taylor, centrada en el punto $x_0 = 0$, de las funciones siguientes:*

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad y \qquad g(x) = \frac{1}{1-x}.$$

SOLUCIÓN. Comenzamos calculando las derivadas de f:

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad f''(x) = f(x), \quad \text{etc.}$$

Por tanto, sustituyendo en $x_0 = 0$, obtenemos

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Luego la serie de Taylor de la función f, centrada en $x_0 = 0$, es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Por otro lado, las sucesivas derivadas de g son:

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad \text{etc.}$$

Se puede demostrar por inducción que $g^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $g^{(n)}(0) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie de Taylor de la función g, centrada en $x_0 = 0$, es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$\square$

Ejercicio 3.4.14. *Calcula la serie de Taylor de la función* $f(x) = \sqrt{x+1}$*, centrada en el punto* $x_0 = 0$.

SOLUCIÓN. El primer término de la serie de Taylor pedida es $f(x_0) = f(0) = 1$. Las primeras derivadas de $f(x) = \sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2}$ son:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \qquad f^{(2)}(x) = \frac{-1}{4}(x+1)^{-3/2} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}$$

Estos cálculos nos permiten *conjeturar* que, si definimos la sucesión

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = (2n-3)a_1 \quad \text{para } n \geq 2, \end{cases}$$

entonces

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}a_n}{2^n}(x+1)^{-n+1/2} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

La igualdad (3.19) se puede *demostrar* fácilmente por inducción. En efecto, si suponemos que se cumple

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}a_n}{2^n}(x+1)^{-n+1/2}$$

y derivamos en esta expresión, obtenemos

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-n + \frac{1}{2}\right)\frac{(-1)^{n+1}a_n}{2^n}(x+1)^{-n-1/2} =$$
$$= \frac{(-1)^{n+2}(2n-1)a_n}{2^{n+1}}(x+1)^{-(n+1)+1/2} = \frac{(-1)^{n+2}a_{n+1}}{2^{n+1}}(x+1)^{-(n+1)+1/2}.$$

Utilizando (3.19), obtenemos la expresión del término general de la serie de Taylor:

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{\frac{(-1)^{n+1}a_n}{2^n}}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n+1}a_n}{2^n n!}x^n.$$

□

Ejercicio 3.4.15. *Calcula la serie de Taylor de la función* $f(x) = \ln x$*, centrada en el punto* $x_0 = 1$.

SOLUCIÓN. El primer término de la serie es $f(1) = \ln 1 = 0$. Para determinar la expresión del término general de la serie, calculamos las sucesivas derivadas de $f(x) = \ln x$:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} \qquad f^{(2)}(x) = \frac{-1}{x^2} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}$$

Es sencillo demostrar por inducción que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sustituyendo en $x_0 = 1$, obtenemos $f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, la serie de Taylor de la función $f(x) = \ln x$, centrada en el punto $x_0 = 1$, es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

□

Ejercicio 3.4.16. *Dada la función* $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$*, se pide:*

(i) Halla su polinomio de Taylor de orden 5 centrado en $x_0 = 0$.

(ii) Calcula una aproximación de $\cos(0.1) + \operatorname{sen}(0.1)$ *utilizando el polinomio anterior.*

(iii) Da una cota superior del error absoluto de la aproximación hallada en (ii).

SOLUCIÓN. (i) Evaluamos la función y sus primeras 5 derivadas en $x_0 = 0$. Naturalmente, $f(0) = \cos 0 + \operatorname{sen} 0 = 1$. Calculamos las derivadas y las evaluamos en $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\operatorname{sen} x + \cos x &&\Rightarrow\quad f'(0) = 1\\
f''(x) &= -\cos x - \operatorname{sen} x &&\Rightarrow\quad f''(0) = -1\\
f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen} x - \cos x &&\Rightarrow\quad f^{(3)}(0) = -1\\
f^{(4)}(x) &= \cos x + \operatorname{sen} x &&\Rightarrow\quad f^{(4)}(0) = 1\\
f^{(5)}(x) &= -\operatorname{sen} x + \cos x &&\Rightarrow\quad f^{(5)}(0) = 1
\end{aligned}$$

Así que el polinomio de Taylor pedido es:

$$\begin{aligned}
P_{5,f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 &= \\
= 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}&.
\end{aligned}$$

(ii) La aproximación pedida es:

$$P_{5,f,0}(0.1) = 1 + 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2!} - \frac{(0.1)^3}{3!} + \frac{(0.1)^4}{4!} + \frac{(0.1)^5}{5!} = \frac{3775}{3448} = 1.094837587\ldots$$

(iii) Una cota superior de $\left|f(0.1) - P_{5,f,0}(0.1)\right|$ es

$$\frac{M}{6!}(0.1)^6 \tag{3.20}$$

siendo M cualquier constante que cumpla

$$|f^{(6)}(t)| \leq M \quad \text{para todo } t \in [0, 0.1]$$

Para determinar una tal M calculamos la derivada sexta, $f^{(6)}(t) = -\cos t - \operatorname{sen} t$. Teniendo en cuenta que

$$-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \cos t \leq 1 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

deducimos que $|f^{(6)}(t)| = |-\cos t - \operatorname{sen} t| \leq 2$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego podemos tomar $M = 2$. Por tanto, sustituyendo en (3.20), una cota superior de la aproximación obtenida en (ii) es: $\frac{2}{6!}(0.1)^6 \approx 2.78 \cdot 10^{-9}$. □

Ejercicio 3.4.17. *Calcula aproximadamente* $\operatorname{sen}(0.15)$ *con error absoluto menor que* 10^{-6}, *utilizando un polinomio de Taylor de la función* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *centrado en* $x_0 = 0$.

SOLUCIÓN. En el Ejemplo 3.4.3 hemos visto que los polinomios de Taylor de f centrados en $x_0 = 0$ son de la forma

$$P_{2k-1,f,0}(x) = P_{2k,f,0}(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

Tenemos que determinar el orden del polinomio a utilizar. Las derivadas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ son todas de la forma $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $-\operatorname{sen} x$ o $-\cos x$. Por tanto, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y cada $t \in \mathbb{R}$ se cumple $|f^{(m+1)}(t)| \leq 1$. En vista de la Proposición 3.4.6, se cumple la siguiente desigualdad:

$$|\operatorname{sen}(0.15) - P_{m,f,0}(0.15)| \leq \frac{1}{(m+1)!} |0.15 - 0|^{m+1} = \frac{(0.15)^{m+1}}{(m+1)!} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Buscamos un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{(0.15)^{m+1}}{(m+1)!} < 10^{-6}$ probando con $m = 1, 2\ldots$ Esta desigualdad ya se cumple para $m = 4$ y, por tanto, tenemos

$$|\operatorname{sen}(0.15) - P_{4,f,0}(0.15)| < 10^{-6}.$$

Como $P_{4,f,0}(x) = P_{3,f,0}(x)$, la desigualdad anterior se escribe como

$$|\operatorname{sen}(0.15) - P_{3,f,0}(0.15)| < 10^{-6}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $P_{3,f,0}(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$, la aproximación pedida es

$$P_{3,f,0}(0.15) = 0.15 - \frac{(0.15)^3}{6} = 0.1494375.$$

$\square$

Ejercicio 3.4.18. *Determina para qué valores de x se puede sustituir* $\operatorname{sen} x$ *por* $x - \dfrac{x^3}{6}$ *si el error absoluto máximo permitido es* 10^{-3}.

SOLUCIÓN. Escribiendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, sabemos que $P_{3,f,0}(x) = P_{4,f,0}(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$ y

$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| = \left|f(x) - P_{4,f,0}(x)\right| \leq \frac{1}{5!}|x|^5$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ (por la Proposición 3.4.6, teniendo en cuenta que $|f^{(5)}(t)| = |\operatorname{sen} t| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$). Observamos que

$$\frac{1}{5!}|x|^5 < 10^{-3} \quad \Longleftrightarrow \quad |x|^5 < 0.12 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < \sqrt[5]{0.12}.$$

Luego $\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)\right| < 10^{-3}$ para todo x tal que $|x| < \sqrt[5]{0.12} = 0.654389389\ldots$ $\square$

Ejercicio 3.4.19. *Determina para qué valores de x se puede sustituir* $\cos x$ *por* $1 - \dfrac{x^2}{2}$ *si el error absoluto máximo permitido es* 10^{-4}.

SOLUCIÓN. Para $f(x) = \cos x$ tenemos $P_{2,f,0}(x) = P_{3,f,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ (Ejemplo 3.4.4) y se cumple

$$\left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| = \left|f(x) - P_{3,f,0}(x)\right| \leq \frac{1}{4!}|x|^4$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ (por la Proposición 3.4.6, ya que $|f^{(4)}(t)| = |\operatorname{sen} t| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$). Observamos que

$$\frac{1}{4!}|x|^4 < 10^{-4} \quad \Longleftrightarrow \quad |x|^4 < \frac{3}{1250} \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < \sqrt[4]{\frac{3}{1250}}.$$

Luego $\left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| < 10^{-4}$ para todo x tal que $|x| < \sqrt[4]{\frac{3}{1250}} = 0.221336\ldots$ □

Ejercicio 3.4.20. *Dada la función $f(x) = xe^x$, calcula aproximadamente $f(-0.5)$ mediante un polinomio de Taylor de f centrado en $x_0 = 0$, con error absoluto menor que* 10^{-4}.

SOLUCIÓN. Calculamos las sucesivas derivadas:

$$f'(x) = (x+1)e^x, \quad f''(x) = (x+2)e^x, \quad f^{(3)}(x) = (x+3)e^x, \quad \ldots$$

Es sencillo comprobar que $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, tenemos $f^{(n)}(0) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie de Taylor de f centrada en $x_0 = 0$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n.$$

Para determinar el orden m del polinomio de Taylor que debemos utilizar, observamos que para cualquier $m \in \mathbb{N}$ se cumple la acotación:

$$|f^{(m+1)}(t)| = |(t+m+1)e^t| \leq m+1 \quad \text{para todo } t \in [-0.5, 0]$$

(ya que $e^t \leq 1$ si $t \leq 0$). Por la Proposición 3.4.6, tenemos:

$$\left|f(-0.5) - P_{m,f,0}(-0.5)\right| \leq \frac{m+1}{(m+1)!}|0-(-0.5)|^{m+1} = \frac{1}{m!}(0.5)^{m+1} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Para $m = 6$ ya se cumple $\frac{1}{m!}(0.5)^{m+1} < 10^{-4}$. Por tanto, necesitamos el polinomio de Taylor de orden 6, es decir, $P_{6,f,0}(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24} + \frac{x^5}{120}$. Evaluando este polinomio en $x = -0.5$ obtenemos la aproximación pedida:

$$P_{6,f,0}(-0.5) = -0.5 + (-0.5)^2 + \frac{(-0.5)^3}{2} + \frac{(-0.5)^4}{6} + \frac{(-0.5)^5}{24} + \frac{(-0.5)^6}{120} = \\ = -\frac{2329}{7680} = -0.30325520833\ldots$$

□

Ejercicio 3.4.21. *Calcula aproximadamente* $\cos(\frac{2}{3})$ *con error absoluto menor que* 10^{-7}*, utilizando la serie de Taylor de la función* $f(x) = \cos x$ *centrada en* $x_0 = 0$ *y el Criterio de Leibniz para series alternadas.*

SOLUCIÓN. La tercera fórmula de la Proposición 3.4.9 nos dice que

$$\cos\left(\frac{2}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{3^{2n}(2n)!}. \tag{3.21}$$

La sucesión $\dfrac{2^{2n}}{3^{2n}(2n)!} = \dfrac{1}{(2n)!}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n}$ es monótona decreciente y converge a 0. Aplicando el Criterio de Leibniz (Proposición 3.3.12 y Observación 3.3.13) a la serie alternada (3.21):

$$\left|\cos\left(\frac{2}{3}\right) - \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{2^{2n}}{3^{2n}(2n)!}\right| < \frac{2^{2m+2}}{3^{2m+2}(2m+2)!} \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Ahora buscamos un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{2^{2m+2}}{3^{2m+2}(2m+2)!} \leq 10^{-7}$. Por ejemplo, $m = 4$ nos sirve. Así,

$$\sum_{n=0}^{4} (-1)^n \frac{2^{2n}}{3^{2n}(2n)!} = 0.78588726553976$$

es una aproximación de $\cos(\frac{2}{3})$ con error absoluto menor que 10^{-7}. Observamos que esta aproximación es el resultado de evaluar en $x = \frac{2}{3}$ el polinomio

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

(polinomio de Taylor de $f(x) = \cos x$, de orden 8 centrado en $x_0 = 0$). □

Bibliografía

[1] A.V. Aho, J.E. Hopcroft y J.D. Ullman. *Estructuras de datos y algoritmos.* Addison Wesley. 1988.

[2] G.L. Bradley y K.J. Smith. *Cálculo de una variable. Volumen 1.* Prentice Hall. 1997.

[3] G. Brassard y P. Bratley. *Fundamentos de Algoritmia.* Prentice Hall. 1997.

[4] R.L. Burden y J.D. Faires. *Análisis Numérico.* 6ª edición. Thomson. 1998.

[5] A. García, F. García, A. López, G. Rodríguez y A. de la Villa. *Cálculo I: Teoría y Problemas de Análisis Matemático en una Variable.* 3ª edición. Clagsa. 2007.

[6] A. García, F. García, R. Miñano, B. Ruiz y J.I. Tello. *Análisis Matemático y Métodos Numéricos. Guía Docente 2008-2009.* Universidad Politécnica de Madrid. 2008.

[7] J.H. Mathews y K.D. Fink. *Métodos Numéricos con MATLAB.* 3ª edición. Prentice Hall. 2000.

[8] D. Neal. *Determining Sample Sizes for Monte Carlo Integration.* The College Mathematics Journal, vol. 24, no. 3 (1993), 254–259.

[9] J.M. Ortega. *Introducción al Análisis Matemático.* Labor. 1993.

[10] S.L. Salas, E. Hille y G.J. Etgen. *Calculus: una y varias variables. Volumen I.* 4ª edición. Reverté. 2005.

[11] M. Spivak. *Cálculo Infinitesimal.* 2ª edición. Reverté. 1992.