FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA INFORMÁTICA

La Lógica Categórica

PRIMER CURSO DEL GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

PRIMER CUATRIMESTRE

2020-21

Facultad de Informática

Índice del documento

Las Categorías y los Conjuntos

- Las Categorías:
  - Cualquier colección no ordenada de individuos forma un Conjunto.
  - Si un conjunto queda definido por la propiedad que caracteriza a todos los individuos del mismo, es decir, PUEDE DEFINIRSE POR INTENSIÓN, podemos hablar de CATEGORÍA. La Propiedad Característica o Intensión del Conjunto dará nombre y representará a la Categoría.
  - Las Categorías se relacionan entre sí mediante la relación de Inclusión, estableciéndose Jerarquías de Clase de Categorías. Se opera entre ellas mediante las operaciones de Intersección, Unión y Diferencia de conjuntos. Una Categoría tendrá su Categoría Complementaria.

ALGUNAS DEFINICIONES EN TEORÍA DE CONJUNTOS

En el primer documento de la asignatura vimos las diferentes formas de realizar la definición de un conjunto de elementos. Nos centramos entonces en la definición recursiva. Ahora vamos a incidir en la definición por Intensión o Intensional de un conjunto: lo hacemos a partir de una o varias propiedades que permitan caracterizar los elementos que lo componen. Así, podemos escribir:

- *NombreDelConjunto* = **{** x | x cumple algunas propiedades **}**
- *NombreDelConjunto* = **{** x | P(x) **}**

Si **P** es un propiedad y **x** es un individuo, **P(x)** indica que el individuo **x** cumple la propiedad **P,** y por tanto pertenecerá al conjunto. Dicha propiedad recibe el nombre de **propiedad característica**, **contenido** o **intensión** del conjunto que define.

En las **páginas 6-11 y 23-28 del documento 05-LogicaCategorica-B que tienen en RECURSOS** pueden leer los conceptos y definiciones relevantes en teoría de conjuntos. Si tenemos un Universo $\mathcal{U}$ de individuos y tenemos dos conjuntos **A** y **B**, entre dichos conjuntos puede darse alguna de las siguientes situaciones: **a)** Que sean iguales; **b)** que todos los individuos de uno de ellos (por ejemplo de A) sean, asimismo, individuos del otro (por tanto, de B); **c)** que existan algunos individuos que pertenezcan a los dos conjuntos; y **d)** que ningún individuo pertenezca a ambos conjuntos, es decir, que el individuo que pertenece a A no pertenece a B, y viceversa.

Teniendo en cuenta la **relación de Inclusión de conjuntos**, que define los subconjuntos: La situación b) se formaliza por $A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$. Su negación será $A \nsubseteq B$, es decir, que A no es un subconjunto de B. La situación a) se formaliza por $A = B \iff (A \subseteq B$ y $B \subseteq A)$. Su negación será $A \neq B$. Cuando pretendemos decir que el conjunto A es un subconjunto del conjunto B, pero de tal manera que la igualdad entre ellos no se cumple, se dice que la relación entre ambos es la de Inclusión Estricta, que se formaliza así: $A \subset B \iff (A \subseteq B$ y $A \neq B)$

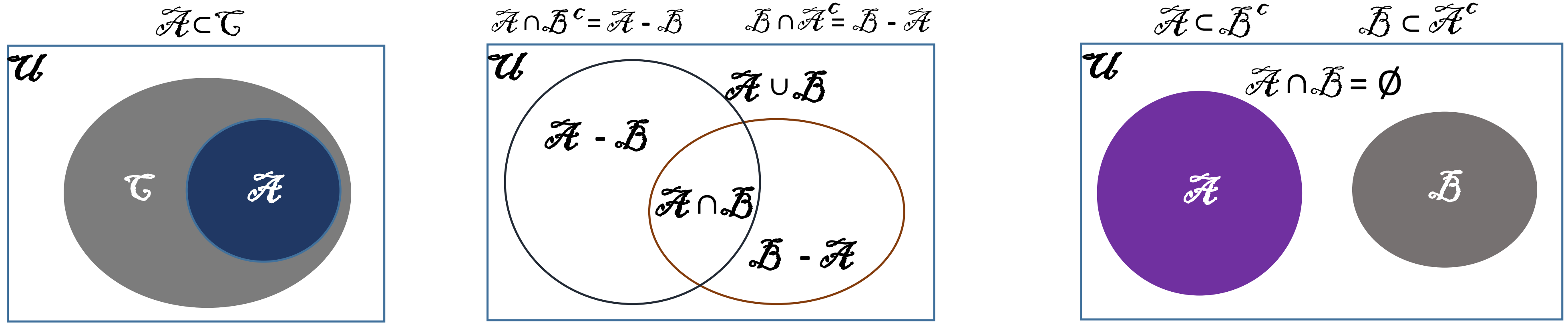
Para formalizar las dos situaciones c) y d), debemos introducir el concepto de conjunto sin elementos o conjunto vacío **∅**, así como la operación de intersección de conjuntos, denotada por $A \cap B$. Si los dos conjuntos tienen individuos que pertenecen a los dos conjuntos, dicha operación de intersección será un conjunto no vacío, situación c). En cambio, si ningún individuo pertenece a ambos conjuntos, situación d), dicha operación será el conjunto vacío.

El conjunto universo $\mathcal{U}$ y el conjunto vacío **∅** son conjuntos Complementarios. Por definición, el conjunto $\mathcal{U} \cap \emptyset = \emptyset$, siendo $\mathcal{U}^c = \emptyset$.

La Lógica Categórica (I)

- Relaciones entre Categorías y La Lógica Categórica:
  - **La Lógica Categórica representa y formaliza la relación que existe entre Categorías** atendiendo a la evaluación de pertenencia de los individuos a las mismas. Analicemos, en principio, estas posible relaciones entre Categorías. Más tarde, las formalizaremos.
  - Una Categoría $\mathcal{A}$ será una subcategoría de otra Categoría $\mathcal{C}$, si los individuos que pertenecen a $\mathcal{A}$ también pertenecen $\mathcal{C}$. Se dirá que: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$
  - Dos Categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ definirán una nueva Categoría, que será subcategoría de cada una de las dos iniciales, si existen individuos que pertenecen a ambas Categorías y, al tiempo, existen individuos que pertenecen a una y no pertenecen a la otra. La subcategoría quedará definida por la Intersección de Categorías, y se denota por $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ se dice que las Categorías son disjuntas.
  - Dos Categorías definirán una nueva Categoría, que será subcategoría de una de ellas, si existen individuos que perteneciendo a una de ellas no pertenece a la otra. Si los individuos pertenecen a la Categoría $\mathcal{A}$ y no pertenecen a la Categoría $\mathcal{B}$, la nueva Categoría se define como la diferencia de $\mathcal{A}$ y de $\mathcal{B}$, se denota por $\mathcal{A} - \mathcal{B}$, y dicha Categoría es una subcategoría de $\mathcal{A}$.
  - Dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ serán subcategorías de una nueva Categoría $\mathcal{C}$ formada por la reunión de los individuos que pertenecen a cada una de ellas. Esta nueva Categoría se definirá como la Unión de las Categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, y se denotará por $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{B} - \mathcal{A})$.
  - Por otra parte, dado un Universo $\mathcal{U}$ y una Categoría $\mathcal{A}$, quedará definida una nueva Categoría $\mathcal{A}^c$, que será igual a la Categoría $\mathcal{U} - \mathcal{A}$. Si tenemos dos Categorías disjuntas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^c$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}^c$. La Categoría $\mathcal{A}^c$ se llama Categoría Complementaria de $\mathcal{A}$.

LAS RELACIONES ENTRE CATEGORÍAS REPRESENTADAS EN DIAGRAMAS DE EULER



La Lógica Categórica (II)

- Formalización en Predicados y Lógica Categórica (en adelante, LC):
  - Dada una Categoría definida por su propiedad característica o Intensión, llamaremos **Predicado Categórico** a esta Intensión y lo denotaremos por **P(x)**, y diremos que el elemento **x** cumple con el Predicado **P**, entendiendo por ello que el individuo representado por el elemento **x** pertenece a la Categoría $\mathscr{P}$ representada por su Intensión o **Predicado P(x)**. Así, $\mathscr{P}$ = **{** x | P(x) **}**.
  - De esta manera, el elemento **x** representa la variable que recorre todo el dominio de los individuos representados por los elementos $\mathbf{d}_i$ de un universo $\mathscr{U}$ **= {** $\mathbf{d}_i$ **},** y de todos ellos, los que cumplen con la Intensión o **Predicado P(x),** pertenecerán y conformarán a la **Categoría** $\mathscr{P}$.
  - Si un individuo concreto, representado por $\mathbf{d}_j$, cumple con la Intensión y, por tanto, pertenece a la Categoría $\mathscr{P}$, entonces **P(**$\mathbf{d}_j$**)** se evaluará lógicamente como **VERDAD.** Si dicho individuo no cumple con la Intensión y, por tanto no pertenece a la Categoría $\mathscr{P}$, entonces **P(**$\mathbf{d}_j$**)** se evaluará lógicamente como **FALSO**. En este caso, el individuo concreto representado por $\mathbf{d}_j$ pertenecerá a la Categoría $\mathscr{P}^{C}$, y teniendo en cuenta el Universo $\mathscr{U}$, dicha Categoría Complementaria se definirá por $\mathscr{P}^{C}$= { x | ¬ P(x) }.
  - **Formalizando**, tanto el elemento **x** como los elementos $\mathbf{d}_i$ se definirán como los **TÉRMINOS** del Predicado P(x). El primero se tomará como Término Variable (o variable de Término) y cada uno de los $\mathbf{d}_i$ como Términos Constantes (o constantes de Término). La evaluación de VERDAD de los Predicados se hará al nivel de la aplicación de los mismos a los Términos Constantes (o constantes de Término).
  - La Sintaxis de **la Lógica Categórica (LC)** sigue el patrón de la Lógica de Proposiciones, construyendo ahora sobre Predicados. Tendremos, ya hemos visto su significado, la Negación, **¬ P(x)**, de un Predicado; la Conjunción de dos Predicados**, P(x) ∧ Q(X)**, que formaliza la Intersección de sus Categorías, $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$; la Disyunción de dos Predicados, **P(x) ∨ Q(X)**, que formaliza la Unión de sus Categorías, $\mathscr{P} \cup \mathscr{Q}$; la Implicación de dos Predicados, **P(x) → Q(X)**, que formaliza que, dada la pertenencia a su Categoría del individuo representado por el Término del Predicado Antecedente, asimismo su pertenencia a la Categoría del Predicado Consecuente; y la Doble Implicación que formaliza la doble pertenencia categórica de los individuos representados por los Términos de sendos Predicados.
  - Por añadidura, podemos preguntarnos si dado el Universo citado, $\mathscr{U}$ **= {** $\mathbf{d}_i$ **}**, todos los individuos del mismo cumplirán con la Intensión de una Categoría definida, o si serán algunos de ellos, al menos uno de ellos, o si por el contrario ninguno la cumplirá. Para formalizar estas situaciones, haremos uso de los llamados CUANTIFICADORES. Existen dos Cuantificadores: el **CUANTIFICADOR UNIVERSAL**, **∀x**, que se lee "para todo x", y el **CUANTIFICADOR EXISTENCIAL**, **∃x**, que se lee "al menos existe un x". Por tanto, **∀x P(x)** formaliza el hecho de que todos los elementos $\mathbf{d}_i$ cumplen con el Predicado **P(x)**. De ser así, **∀x P(x)** se evaluará como VERDAD. Si, por el contrario, para algún elemento **P(**$\mathbf{d}_j$**)** es FALSO, entonces **∀x P(x)** se evaluará como FALSO. Por otra parte, **∃x P(x)** formaliza el hecho de que al menos uno de los elementos $\mathbf{d}_i$ cumple con el Predicado **P(x).** Si es así, **∃x P(x)** se evaluará como VERDAD, en caso contrario, si no lo cumple ninguno se evaluará como FALSO.

La Lógica Categórica (y III)

- Las Proposiciones Categóricas y su Forma Normal:
  - **La Lógica Categórica (LC)** representa y formaliza la relación que existe entre Categorías atendiendo a la evaluación de pertenencia de los individuos a las mismas. Para ello hemos definido una Categoría como: $\mathscr{P}$= **{** x | P(x) **}**, donde **P(x) es su Intensión formalizada como Predicado**.
  - Pero la **LC** no trata con cualquier fórmula predicativa que se pueda formar con Predicados que se aplican a un solo término. En primer lugar, no todos los predicados, llamados unarios por tener un solo término, son categóricos. Por ejemplo, si pretendemos formalizar la expresión "el padre de Juan es Roque", podríamos haber escrito **P(Roque)**, siendo P interpretado por "ser padre de Juan". Pero no parece que este predicado indique nada sobre una Categoría y la pertenencia de individuos a la misma. Si pretendiéramos formalizar la expresión "si todas son ovejas merinas, entonces todos serán cerdos ibéricos", podríamos escribir formalmente lo siguiente **($\forall$x M(x) $\rightarrow$ $\forall$y C(y))**. Aunque en este caso podemos estar hablando de las Categorías de ovejas merinas y de cerdos ibéricos, no parece que la "mágica causalidad" de por tener un rebaño de ovejas merinas tendremos una piara de cerdos ibéricos, refleje o represente la pertenencia de los individuos de la categoría de ovejas merinas en la categoría de cerdos ibéricos. **Nos fijamos en que la variable de término ha sido denotada de forma distinta para sendos predicados**. El tratamiento formal de estos predicados, y de muchos otros, lo veremos más adelante en la **Lógica de Predicados, L1**.

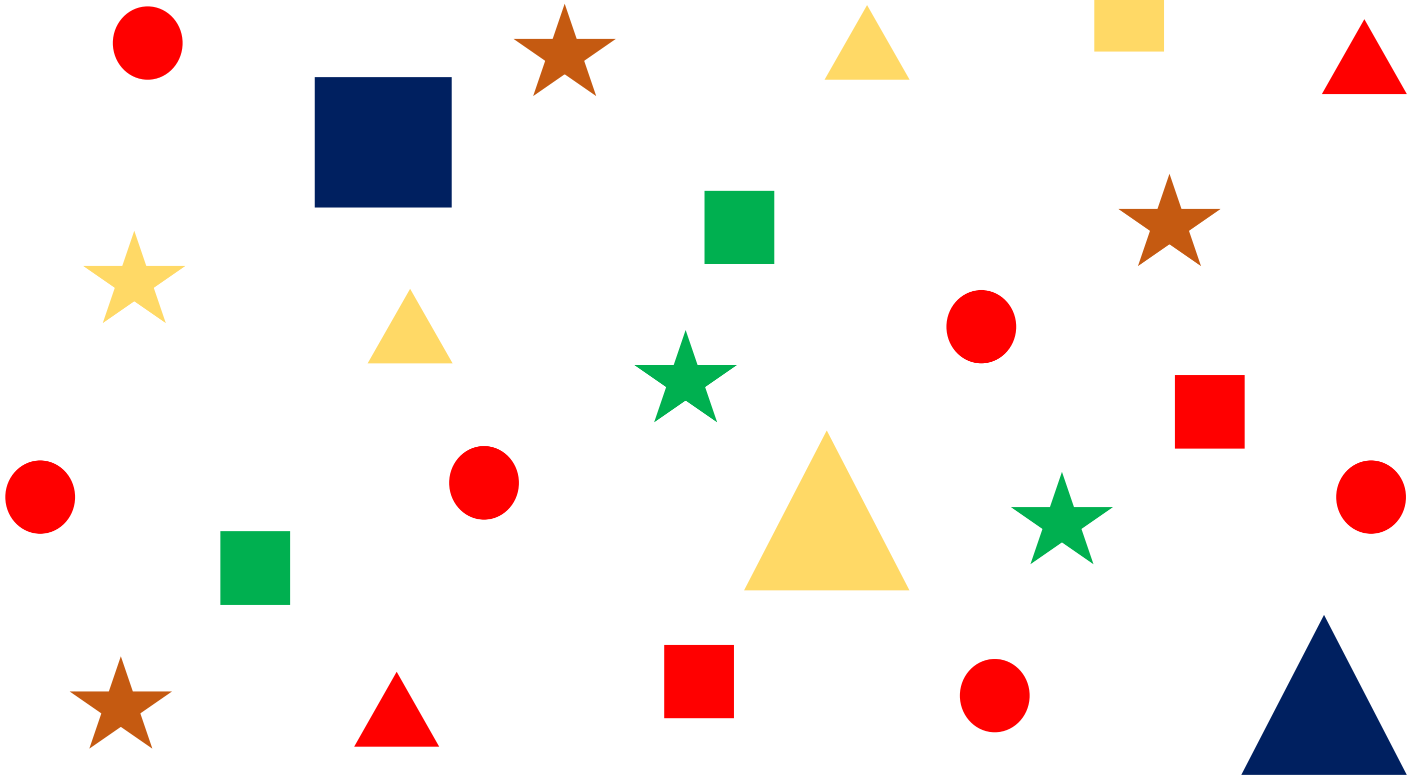
- **La Lógica Categórica (LC)** va a articularse con cuatro expresiones, llamadas **Proposiciones Categóricas**, que pueden ser evaluadas como VERDAD o como FALSO. Se escriben en Forma Normal Categórica. Teniendo en cuenta las dos Categorías siguientes: $\mathscr{P}$= **{ x | P(x) },** y $\mathscr{Q}$= **{ x | Q(x) }**, el universo $\mathscr{U}$ **= { d_i}** y los dos cuantificadores definidos, son estas cuatro:
  - **FORMA NORMAL UNIVERSAL AFIRMATIVA: ($\forall$x (P(x) $\rightarrow$ Q(x))** que expresa que, en el contexto del universo $\mathscr{U}$**,** todos los individuos de la Categoría $\mathscr{P}$ cuya Intensión o Predicado es P(x), también serán individuos pertenecientes a la Categoría $\mathscr{Q}$ cuya Intensión o Predicado es Q(x). Formalmente en **LC**, que **para todos** los Términos de la variable **x**, si **P(d_j) es VERDAD, necesariamente Q(d_j) será VERDAD.** Representa la relación entre Categorías: $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}$
  - **FORMA NORMAL UNIVERSAL NEGATIVA: ($\forall$x (P(x) $\rightarrow \neg$ Q(x))** que expresa que, en el contexto del universo $\mathscr{U}$, ninguno de los individuos de la Categoría $\mathscr{P}$ cuya Intensión o Predicado es P(x), será individuo perteneciente a la Categoría $\mathscr{Q}$ cuya Intensión o Predicado es Q(x). Esto quiere decir que todos los individuos de la Categoría $\mathscr{P}$ pertenecerán, asimismo, a la Categoría cuya Intensión es **¬ Q(x),** y esta es Categoría Complementaria de $\mathscr{Q}$, es decir, $\mathscr{Q}^C$= **{ x | ¬ Q(x) }.** Formalmente en **LC**, que **para todos** los Términos de la variable x, **si P(d_j) es VERDAD, necesariamente ¬ Q(d_j) también es VERDAD (o Q(d_j) es FALSO).** Por tanto, esta Forma Normal Universal Negativa representa la relación entre Categorías: $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}^C$
  - **FORMA NORMAL PARTICULAR AFIRMATIVA**: **($\exists$x (P(x) $\wedge$ Q(x))** que expresa que, en el contexto del universo $\mathscr{U}$, algunos (al menos uno) de los individuos pertenecientes a la Categoría $\mathscr{P}$ cuya Intensión es el Predicado P(x), también pertenecen a la Categoría $\mathscr{Q}$ cuya Intensión es el Predicado Q(x), y viceversa. De esta manera, formalmente en **LC**, **al menos para uno** de los Términos de la variable **x**, por ejemplo **d_j**, **P(d_j) es VERDAD al tiempo que también Q(d_j) es VERDAD.** Desde el punto de vista de las Categorías, **se cumple que** $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} \neq \emptyset$
  - **FORMA NORMAL PARTICULAR NEGATIVA: ($\exists$x (P(x) $\wedge \neg$ Q(x))** que expresa que, en el contexto del universo $\mathscr{U}$, algunos (al menos uno) de los individuos pertenecientes a la Categoría $\mathscr{P}$ cuya Intensión es el Predicado P(x), también pertenecen a la Categoría $\mathscr{Q}^C$ cuya Intensión es el Predicado **¬ Q(x).** De esta manera, formalmente en **LC**, **al menos para uno** de los Términos de la variable **x**, por ejemplo **d_j**, **P(d_j) es VERDAD al tiempo que también ¬ Q(d_j) es VERDAD (o bien, Q(d_j) es FALSO)**. Desde el punto de vista de las Categorías, **se cumple que** $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}^C \neq \emptyset$

Facultad de Informática

Interpretación y Safisfacibilidad en LC (I)

- En las **Páginas 20-21 del documento 05-Logicacategorica-B** que tienen en RECURSOS pueden leer formalmente la Evaluación y la Interpretación en Lógica Categórica.

UNIVERSO: $\mathscr{U}$ = { x | x son figuras geométricas}



CATEGORÍAS:

- FIGURAS GEOMÉTRICAS (24)
- POR SU FORMA
  - FIGURAS CUADRADO (6)
  - FIGURAS CÍRCULO (6)
  - FIGURAS TRIÁNGULO (6)
  - FIGURAS ESTRELLA (6)
- POR SU TAMAÑO
  - FIGURAS PEQUEÑAS (21)
  - FIGURAS GRANDES (3)
- POR SU COLOR
  - FIGURAS ROJAS (10)
  - FIGURAS VERDES (4)
  - FIGURAS AZULES (3)
  - FIGURAS AMARILLAS (4)
  - FIGURAS MARRONES (3)

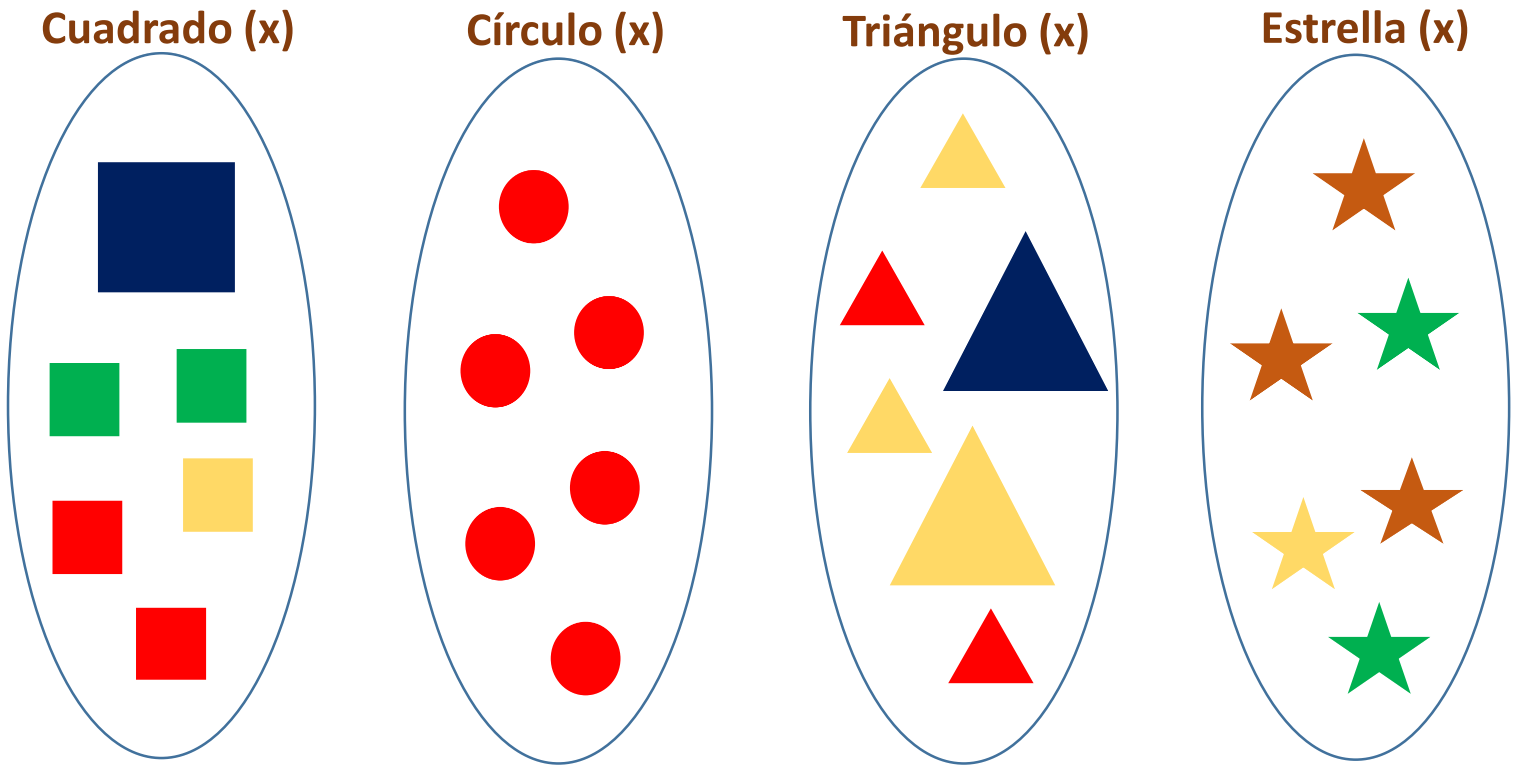
Facultad de Informática

Interpretación y Safisfacibilidad en LC (II)

- En las **Páginas 20-21 del documento 05-Logicacategorica-B** que tienen en RECURSOS pueden leer formalmente la Evaluación y la Interpretación en Lógica Categórica.

UNIVERSO: $\mathcal{U}$ = { x | x son figuras geométricas}

Partición del conjunto Universo en cuatro Categorías disjuntas (según Figuras Geométricas por su forma)



CATEGORÍAS Y PROPOSICIONES CATEGÓRICAS:

- Podemos afirmar que "Todas las figuras círculo son figuras rojas", y formalizarlo por: $\forall$x (Círculo(x) $\rightarrow$ Roja(x))
- Podemos afirmar que "Ninguna figura circulo o estrella es figura grande", y formalizarlo por:
  $\forall$x (Círculo(x) $\vee$ Estrella(x) $\rightarrow$ $\neg$ Grande(x))
- Podemos afirmar "No existe una figura estrella que sea figura azul", y formalizarlo por: $\neg$ $\exists$x (Estrella(x) $\wedge$ Azul(x))
- Podemos negar que "No todas las figuras cuadrado son figuras pequeñas", y formalizarlo por:
  $\neg$ $\forall$x (Cuadrado(x) $\rightarrow$ Pequeña(x))
  es decir, "existe una figura cuadrado que no es figura pequeña", formalizado por:
  $\exists$x (Cuadrado(x) $\wedge$ $\neg$ Pequeña(x))

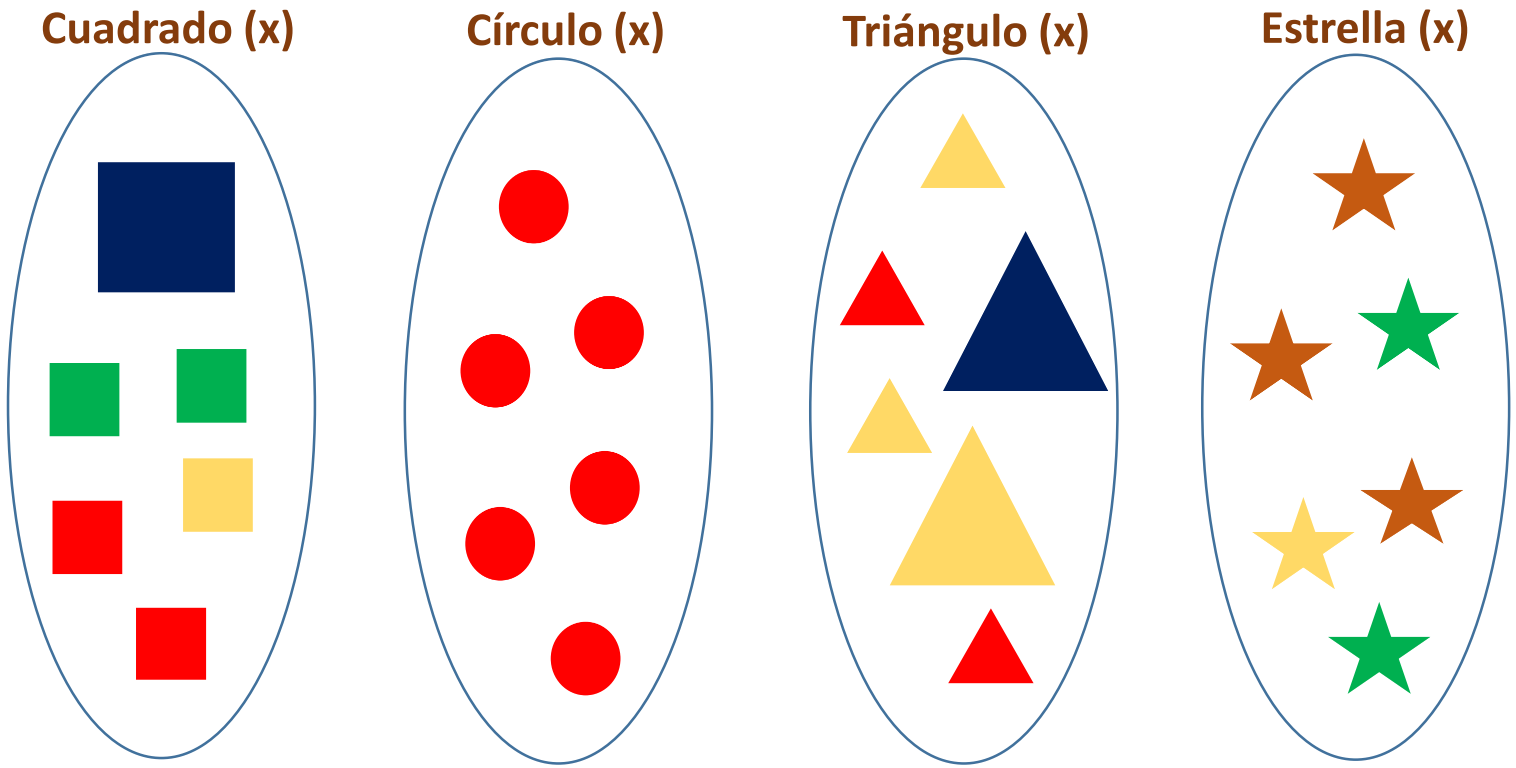
Interpretación y Safisfacibilidad en LC (III)

Facultad de Informática

- En las **Páginas 20-21 del documento 05-Logicacategorica-B** que tienen en RECURSOS pueden leer formalmente la Evaluación y la Interpretación en Lógica Categórica.

UNIVERSO: $\mathcal{U}$ = { x | x son figuras geométricas}

Partición del conjunto Universo en cuatro Categorías disjuntas (según Figuras Geométricas por su forma)



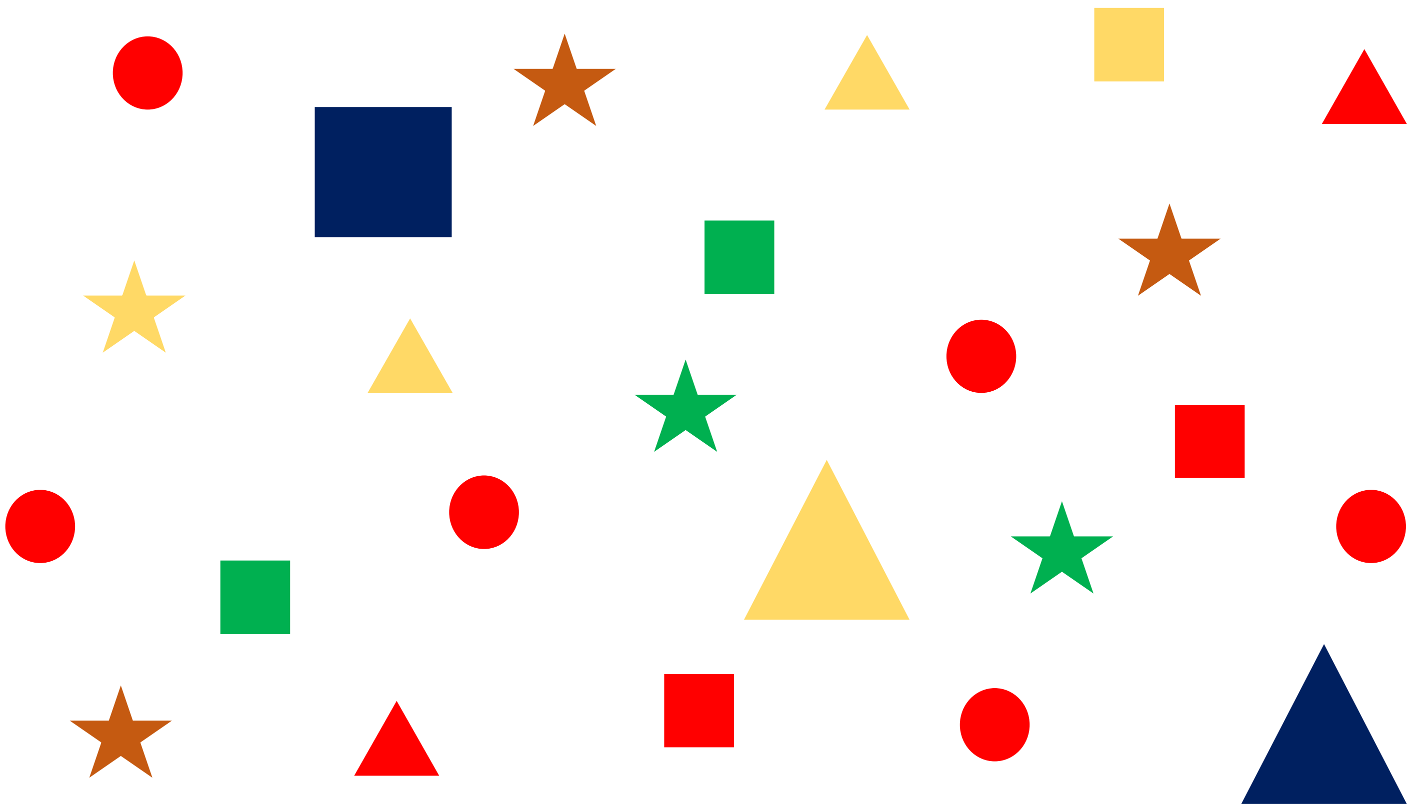
CATEGORÍAS Y PROPOSICIONES CATEGÓRICAS:

- Tomando las Proposiciones Categóricas como elementos formales, podemos construir otras expresiones categóricas complejas.
- Podemos afirmar que "La condición suficiente para que no exista una figura círculo que sea figura amarilla, es que todas las figuras círculo sean figuras rojas", y formalizarlo por:
  $\forall x\, (Cí(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow \neg\, \exists x\, (Cí(x) \wedge Am(x))$
- Podemos afirmar que "La condición necesaria para que ninguna figura círculo o estrella sea figura grande, es que ninguna figura círculo sea grande y que ninguna figura estrella sea grande", y formalizarlo por:
  $\forall x\, (Cí(x) \vee Es(x) \rightarrow \neg\, Gr(x)) \rightarrow$
  $\forall x\, (Cí(x) \rightarrow \neg\, Gr(x)) \wedge \forall x\, (Es(x) \rightarrow \neg\, Gr(x))$
- Podemos afirmar que "Es equivalente decir que no todas las figuras cuadrado son figuras pequeñas, a que existe una figura cuadrado que no es figura pequeña", y formalizarlo por:
  $\neg\, \forall x\, (Cu(x) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow \exists x\, (Cu(x) \wedge \neg\, P(x))$

Interpretación y Safisfacibilidad en LC (y IV)

- En las **Páginas 20-21 del documento 05-Logicacategorica-B** que tienen en RECURSOS pueden leer formalmente la Evaluación y la Interpretación en Lógica Categórica.

UNIVERSO: $\mathscr{U}$ = { x | x son figuras geométricas}



- Si nos diesen dos predicados categóricos P(x) y Q(x): ¿cuántas interpretaciones se pueden construir en este universo de figuras geométricas?
- Si consideramos la expresión de la proposición categórica universal afirmativa, ¿para qué interpretaciones en este universo de figuras geométricas dicha oración es satisfacible, evaluable como VERDAD?
- Podíamos comprobar para cada interpretación si el resto de las proposiciones categóricas en forma normal son ciertas o falsas.
- Como consecuencia de lo anterior,
  - ¿es cierto que $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$?
  - ¿es cierto que $\forall x(R(x) \rightarrow P(x))$?
  - para P(x) = Pequeña(x);
    Q(x) = Amarilla(x); y
    R(x) = Estrella(x).
  - Tomando estas dos expresiones como primera y segunda premisas, respectivamente, ¿es cierta la conclusión $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$?

Para terminar…

EN RESUMEN:

La Lógica Categórica representa y formaliza la relación que existe entre Categorías atendiendo a la evaluación de pertenencia de los individuos a las mismas.

La Lógica categórica expresa estas relaciones mediante las llamadas Proposiciones Categóricas, que serán evaluadas como VERDAD o como FALSO. Existen cuatro Proposiciones Categóricas:

- **FORMA NORMAL UNIVERSAL AFIRMATIVA:** $(\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$
- **FORMA NORMAL UNIVERSAL NEGATIVA:** $(\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
- **FORMA NORMAL PARTICULAR AFIRMATIVA:** $(\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$
- **FORMA NORMAL PARTICULAR NEGATIVA:** $(\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$

A partir de estas Proposiciones Categóricas elementales podemos construir otras expresiones categóricas complejas, utilizando una definición recursiva de construcción teniendo en cuenta las conectivas lógicas.

Para evaluar cualquiera de ellas, teniendo en cuenta que su variable de término esta cuantificada, ya sea por el cuantificador universal o por el cuantificador existencial, y es la misma para todos los dos Predicados, primero tenemos que interpretar la expresión. Para ello, hay que especificar el Universo $\mathcal{U} = \{ d_i \}$, en el que se definen los términos (que representan a los individuos del universo categórico) de los Predicados; y, por otra parte, hay que determinar el significado de los mismos (es decir, hacer la correspondencia con la Intensión de las diferentes Categorías).

Desde el punto de vista de los Razonamientos, existen diecinueve Silogismos básicos válidos, con dos premisas y una conclusión formalizadas como Proposiciones Categóricas.