

# Álgebra y Matemática Discreta

## Grafos

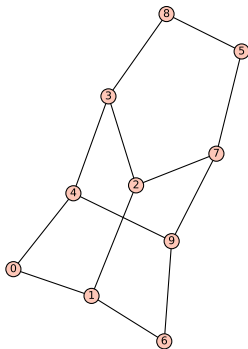
Grado en Ingeniería Informática - 2020/21

# Grafo

- Un grafo está definido por dos conjuntos, un conjunto  $V$  de elementos que llamaremos vértices y un conjunto  $E$  formado por subconjuntos de dos vértices  $\{u, v\}$ , que llamaremos aristas.
- Lo que significa un vértice o una arista depende del problema. La variedad es enorme. Lo que debemos entender es que tenemos unos objetos que queremos estudiar (vértices) y entre ellos puede haber una relación o no, es decir, haber arista o no.
- Un grafo puede ser por ejemplo el conjunto de conexiones por carretera entre un conjunto de ciudades.
- O servidores y conexiones de red entre ellos.
- O relaciones abstractas, como por ejemplo un grafo entre personas (vértices) y la relación de ser amigas entre ellas (aristas).

# Representación Gráfica

Los grafos se suelen representar del siguiente modo:



# Representación Gráfica

- Se utilizan puntos para los vértices, a los cuales se le puede dar un nombre.
- Las aristas se representan trazando una línea entre los vértices correspondientes.
- La posición de los vértices en la representación es indiferente.

# Grado de un Vértice

## Grado de un Vértice

Llamaremos grado de un vértice al número de aristas que entran (o salen) de ese vértice.

## Lema del Apretón de Manos

La suma de los grados de todos los vértices es igual a dos veces el número de aristas.

La demostración de este resultado es simple, pensemos que tenemos el grafo sin ninguna arista y queremos ponerlas todas en su posición, cada vez que ponemos una arista nueva, añadimos un grado a cada uno de sus extremos, por lo tanto la suma total de grados se ve incrementada en dos. Cuando terminemos de ponerlas todas, la suma total de grados habrá pasado de 0 hasta el doble de las aristas que hayamos puesto.

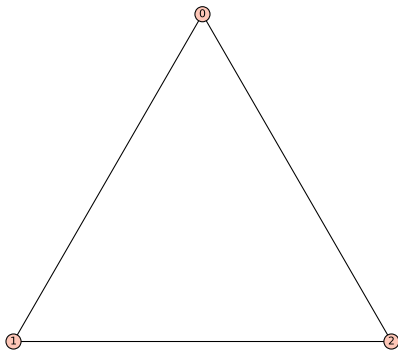
# Generalizaciones

- En la definición de grafo hemos puesto que las aristas son conjuntos de dos vértices, es decir,  $\{u, v\}$ , pero como conjunto es igual a  $\{v, u\}$  y como tienen que ser dos, no puede ser que  $u = v$ .
- Es decir, si  $u$  está conectado con  $v$ , entonces  $v$  está conectado con  $u$ , y no hay conexiones entre un vértice y sí mismo. Tampoco puede haber más de una arista entre dos vértices, puesto que el conjunto  $\{u, v\}$  está en  $E$  o no está.
- Si queremos permitir más de una arista entre dos vértices, lo que obtenemos es un multigrafo. En tal caso tenemos que dar nombres a las aristas para distinguirlas.
- Si permitimos que haya conexiones entre un vértice y sí mismo, lo que recibe el nombre de lazo o *loop*, entonces estamos ante un pseudografo.
- Si queremos indicar un sentido de recorrido en las aristas, es decir, podemos tener la arista  $(u, v)$  y no la  $(v, u)$  entonces en lugar de poner líneas entre los vértices, pondremos flechas y lo llamaremos grafo dirigido.

# El Grafo Completo

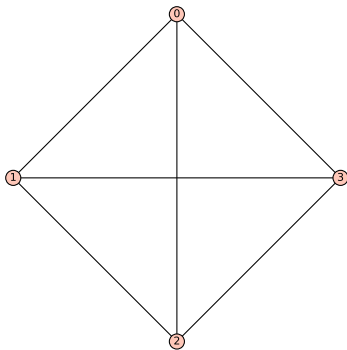
- Llamaremos  $K_n$  al grafo que tiene  $n$  vértices y todos los pares de vértices están conectados entre sí.
- Como cada vértice está conectado con todos los demás, es decir, con  $n - 1$  vértices, este es su grado.
- El número total de aristas es  $n(n - 1)/2$ , que es el máximo de aristas que puede tener un grafo sin ser multigrafo ni pseudografo.

# Grafo $K_3$

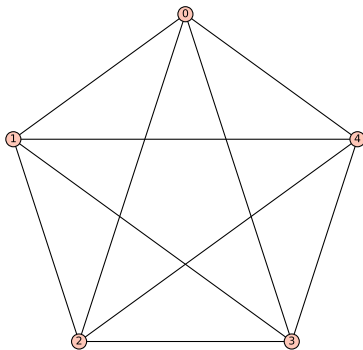




# Grafo $K_4$



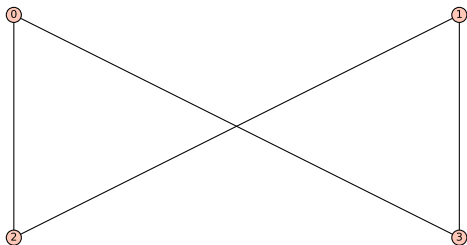
# Grafo $K_5$



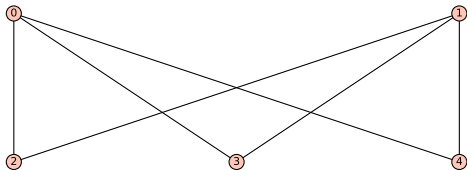
# Grafos Bipartidos Completos

- Sean  $r$  y  $s$  dos enteros positivos.
- El grafo  $K_{r,s}$  es el grafo que tiene un conjunto de vértices formado por  $r + s$  elementos, que dividiremos en dos subconjuntos, uno de  $r$  elementos y otro de  $s$  elementos.
- Dado cualquier elemento del primer conjunto y cualquier elemento del segundo conjunto, estableceremos una arista entre ellos, pero no entre elementos del mismo conjunto.
- Este es el grafo bipartido completo.

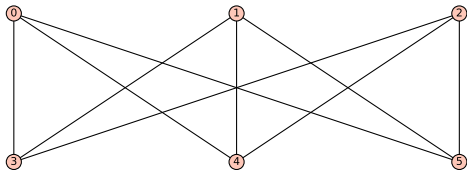
# Grafo $K_{2,2}$



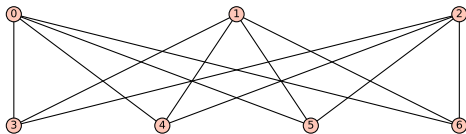
# Grafo $K_{2,3}$



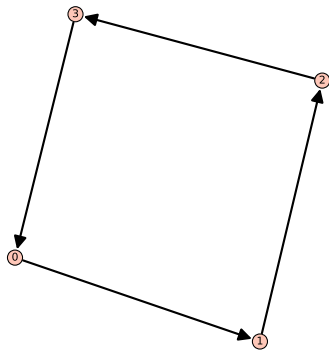
# Grafo $K_{3,3}$



# Grafo $K_{3,4}$

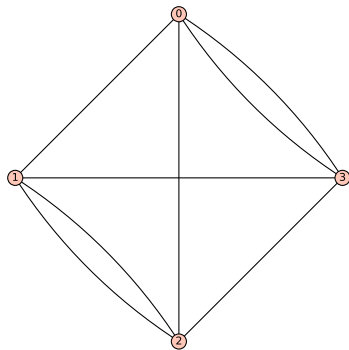


# Ejemplo de Grafo Dirigido





# Ejemplo de Multigrafo

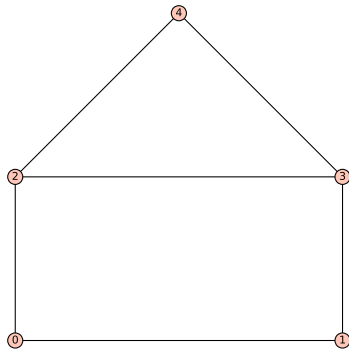


# Definición

- Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices, llamaremos matriz de adyacencia de  $G$  a una matriz cuadrada de tamaño  $n$  que en su entrada  $(i, j)$  tendrá un 1 si hay conexión entre el vértice  $i$  y el vértice  $j$ , ó 0 en caso contrario.
- Por ejemplo, pensemos cómo sería el grafo correspondiente a esta matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Solución

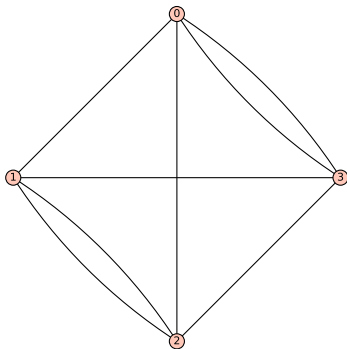


# Matriz de Adyacencia y Generalizaciones

- La matriz de adyacencia también se puede definir para pseudografos, multigrafos y para grafos dirigidos.
- Si tenemos conexiones entre un vértice y sí mismo, tendremos algún 1 en la diagonal principal de la matriz.
- Si queremos representar un grafo dirigido, pondremos 1 en la posición  $(i, j)$  si tenemos una flecha desde  $i$  hasta  $j$ . En ese caso podemos tener una matriz no simétrica.
- Para representar multigrafos podemos poner valores superiores a 1 si hay más de una conexión entre dos vértices.

# Matriz de Adyacencia y Multigrafo

Vamos a escribir la matriz de adyacencia de este multigrafo:



# Solución

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Definición

- Sea  $G$  un grafo y sean  $u, v$  dos vértices.
- Un camino entre  $u$  y  $v$  es una lista de vértices  $[w_0, w_1, \dots, w_k]$  tales que  $w_0 = u$ ,  $w_k = v$  y para todo  $i = 0, \dots, k - 1$  el par  $\{w_i, w_{i+1}\}$  es una arista del grafo.
- Dicho de forma más intuitiva, un camino no es más que una forma de ir desde un vértice a otro recorriendo las aristas del grafo.
- Llamaremos longitud del camino al número de aristas que tenemos que recorrer, es decir  $k$  (cuidado que numeramos desde 0).
- Los caminos se pueden yuxtaponer de forma natural, es decir, si tenemos un camino entre  $u$  y  $v$  y otro entre  $v$  y  $w$ , entonces podemos recorrer primero uno y luego otro, formando un camino de longitud la suma de las longitudes.

# Grafos Conexos

- Dos vértices diremos que están conectados si existe un camino para llegar de uno al otro.
- Aunque es un artificio matemático, vamos a añadir al concepto de camino los caminos de longitud 0 entre un vértice y sí mismo. Por lo tanto todo vértice se entenderá que está conectado con, al menos, él mismo.
- Un grafo se dice conexo si todos los vértices están conectado entre sí por algún camino.
- Si un grafo no es conexo, entonces podemos partirlo en trozos aislados que llamaremos componentes conexas.



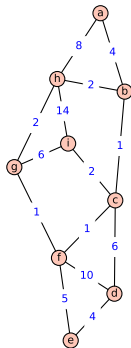
# Caminos y Matriz de Adyacencia

- Sea  $G$  un grafo y sea  $M$  su matriz de adyacencia.
- Entonces se cumple que las potencias de dicha matriz,  $M^k$  nos indican el número de caminos de longitud  $k$  entre dos vértices cualesquiera.
- De esta forma, en cualquier grafo podemos saber el número de caminos con una simple operación aritmética.

# El Problema del Coste

- Los grafos se utilizan para modelizar problemas reales.
- Es muy habitual utilizar vértices para representar lugares o estados y aristas para representar procesos para pasar de uno al otro (carreteras, medios de transporte, algoritmos, ...)
- Esas formas de pasar de un sitio o estado a otro suele llevar aparejado un coste.
- Para representar este tipo de problemas, asignaremos a cada arista un valor numérico al que llamaremos peso o coste.
- Un problema habitual es el de conectar vértices con caminos de mínimo coste.

# Ejemplo



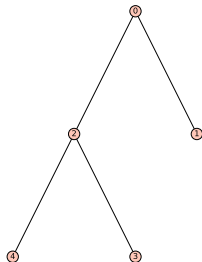
# Ciclos o Circuitos

- Llamaremos circuito a un camino que empieza y termina en el mismo vértice.
- Reservaremos la palabra ciclo para el caso en que no se repita ningún vértice en el recorrido.
- Siempre que existe un circuito, también existe un ciclo.

# Árbol

## Árbol

Un grafo conexo y sin ciclos diremos que es un árbol.



# Árboles con Raíz

- En los árboles, a veces se indica un nodo especial que se denomina raíz.
- Suele ser el punto de entrada para realizar búsquedas o por alguna razón de modelización.
- Cuando esto sucede, se puede hablar del nivel de un vértice como la distancia que lo separa de la raíz.

# Caracterizaciones de Árboles

- Hemos de definido un árbol como un grafo conexo y sin ciclos.
- También puede definirse como un grafo conexo en el cual el número de vértices es el número de aristas más uno.
- O como un grafo en el cual dados dos vértices, hay uno, y solo un camino que los une.

# Árboles Generadores

- Dado un grafo conexo, un árbol contenido de él que conecte a todos los vértices se llamará árbol generador del grafo.
- Si el grafo es un grafo con pesos, diremos que el árbol generador es de peso mínimo, si es el que tiene menor peso de entre todos los posibles.

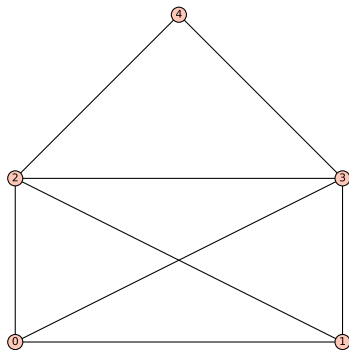


# Método Kruskal

- Para calcular el árbol generador de peso mínimo podemos partir del conjunto de vértices.
- Ordenar las aristas de menor a mayor peso.
- Ir poniendo las aristas desde la de menor peso en adelante, teniendo en cuenta que cada vez que añadamos una arista, tenemos que comprobar que los vértices que conectamos no estaban previamente ya conectados, en cuyo caso no añadiríamos la arista.
- Terminaremos el proceso cuando todos los vértices queden conectados.
- Si hay dos aristas de igual peso, podemos ponerlas en cualquier orden. La solución no es única, pero todas las soluciones son correctas.

# Método Prim

- En este método partimos de un vértice elegido de forma arbitraria. Este será el árbol inicial  $T$ .
- En cada paso se localiza la arista de peso mínimo que conecte con nuestro árbol  $T$  y que no pertenezca a  $T$ . Se añade esa arista al árbol  $T$ .
- Se repite el paso (2) hasta tener todos los vértices conectados.



# Definición

## Grafo Euleriano

Un grafo  $G$  diremos que es Euleriano si existe un circuito (camino cerrado) que recorre todas las aristas sin repetir ninguna. A dicho circuito lo llamaremos circuito euleriano.

## Nota

A veces se dice *ciclo euleriano* en lugar de *circuito euleriano*. Nosotros hemos reservado la palabra ciclo para el caso en que no haya repeticiones de vértices, y en este caso puede haberlas (y de hecho las habrá).

# Teorema

## Caracterización de Grafos Eulerianos

Un grafo conexo es euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

- Como podemos ver, es una propiedad muy fácil de comprobar.
- Es importante estar seguro de que el grafo es conexo, podemos tener grafos con todos los grados pares que no sean eulerianos, porque tengan dos componentes conexas y el camino no puede pasar de una a otra.
- En ese caso diremos que cada componente conexa es euleriana.

# Algoritmo para Grafos Eulerianos

- Partimos desde un vértice cualquiera y nos movemos libremente por el grafo borrando las aristas cada vez que la recorremos. Cuando lleguemos al vértice inicial pueden suceder dos cosas:
- Que ya hayamos terminado con todas las aristas, en cuyo caso habremos terminado.
- Que no las hayamos recorrido todas. En tal caso, tomamos cualquier vértice del ciclo que no haya agotado sus aristas, y partiendo de él hacemos como con el primer ciclo, movernos libremente hasta volver al vértice inicial. Entonces podemos pegar los dos ciclos obtenidos en un único ciclo a partir del vértice común.
- Si ya hemos terminado con todas las aristas, el proceso ha terminado. Si no volveremos a repetir el paso anterior.

# Caminos abiertos Eulerianos

- Para encontrar caminos abiertos eulerianos, debemos tener un grafo conexo con todos los vértices de grado par menos dos, que tendrán grado impar.
- El camino abierto euleriano, partirá de uno de los vértices de grado impar y terminará en el otro.
- La demostración de que este proceso es correcto, es que podemos poner una arista adicional entre los dos vértices de grado impar y considerar que cuando pasamos por esa arista, es el único momento en que tenemos que levantar el lápiz del papel.

# Definición

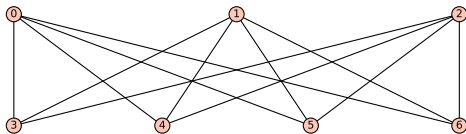
- Sea  $G$  un grafo y sea  $C$  un conjunto de colores, llamaremos una coloración del grafo a una aplicación  $c : V \rightarrow C$  tal que, para toda arista  $\{u, v\}$  del grafo se tiene que  $c(u) \neq c(v)$ .
- Dicho con lenguaje natural, es una forma de poner un color a cada vértices de forma que vértices unidos por aristas nunca tengan el mismo color.
- El conjunto de colores habitualmente se tomará  $\{1, 2, \dots, n\}$  o cualquier otro conjunto finito.
- El mínimo número de colores necesario para colorear el grafo se llamará su número cromático.



# Grafos Bipartidos o Bicoloreables

- Si el grafo tiene trozos no conectados, podemos resolver el problema en cada trozo.
- Un grafo sin ninguna arista se puede pintar con un solo color, pero este es un caso poco interesante. En el momento en que tengamos al menos una arista necesitaremos al menos dos colores.
- Parece que si hay muchas aristas, podemos necesitar muchos colores, pero no es así, podemos construir grafos muy grandes que se puedan pintar con sólo dos colores.
- Los grafos que se pueden pintar con dos colores se llaman grafos bipartidos o bicoloreables.
- Por ejemplo los grafos del tipo  $K_{r,s}$ , podemos pintar cada conjunto de un color, y por definición, nunca tendremos dos vértices del mismo color unidos.

# Grafo $K_{3,4}$



# Caracterización

## Grafos Bipartidos

Un grafo es bipartido o bicoloreable si y sólo si no contiene ningún ciclo de longitud impar.

- Así por ejemplo, un triángulo no puede ser bicoloreable, pero un cuadrado sí.
- Otro ejemplo son los árboles, puesto que no tienen ningún ciclo, ni tienen ninguno de longitud par.
- Cuando el grafo es bipartido, es muy fácil encontrar la coloración. Se empieza poniendo un color en un vértice cualquiera y se va rellenando desde ese vértice todo el grafo.

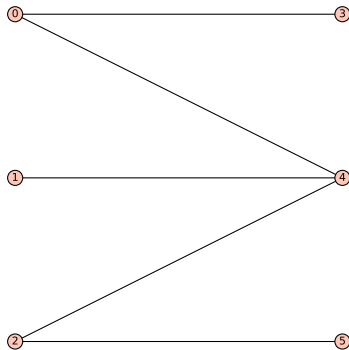
# Números Cromáticos Superiores

- Hemos visto que un triángulo necesita tres colores.
- El realidad, el grafo completo  $K_n$  necesita  $n$  colores, porque no podemos repetir ningún color al estar todos conectados.
- Si un grafo está contenido dentro de otro y para colorear el pequeño se necesitan  $n$  colores, entonces el grande requerirá como mínimo  $n$  colores.

# Problema de Elección

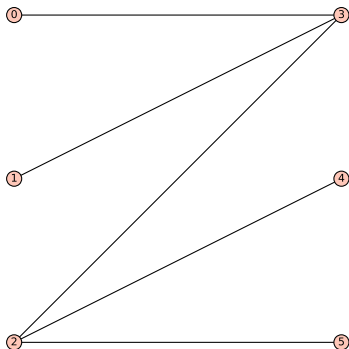
- Un problema de elección es un problema en el que un conjunto  $V_1$  de electores tiene que elegir entre un conjunto de opciones  $V_2$  dentro de unas preferencias, que se representarán como aristas que unen elementos de  $V_1$  y  $V_2$ .
- Resolver un problema de elección consiste en asignar a cada elemento de  $V_1$  un elemento de  $V_2$  dentro de sus preferencias de forma que dos elementos de  $V_1$  no tengan al mismo elemento de  $V_2$  asignado.

# Emparejamientos



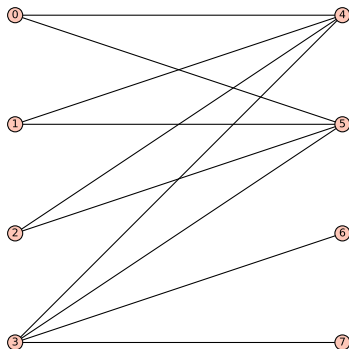
# Emparejamientos Imposibles

Evidentemente  $V_2$  siempre tiene que tener al menos tantos elementos como  $V_1$ , pero las restricciones pueden hacer el problema imposible:



# Emparejamientos Imposibles

Podemos exigir que todos los elementos de  $V_1$  elijan al menos a 2 de  $V_2$ , pero esa no es condición ni necesaria ni suficiente.





# Condición de la Diversidad

- Diremos que un problema de elección cumple la condición de la diversidad cuando para cualquier subconjunto de  $k$  elementos del conjunto elector, entre ellos eligen a al menos  $k$  elementos de el conjunto de opciones posibles.
- Un problema de elección tiene solución (existe emparejamiento) si y solo si la condición de la diversidad se cumple para todo  $k$ .
- Por lo tanto, para resolver problemas de emparejamiento, tenemos que encontrar el emparejamiento o bien encontrar elementos que no cumplan la condición de la diversidad, lo que nos garantizará que no hay solución posible.