Leandro Marín	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 30 min.
	Bases de los Espacios Asociados a una Matriz	Clase: 30 min.

Vídeo : `https://youtu.be/9YC3Ql08cIA`

1. Resumen

Sea $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$, existen cuatro espacios vectoriales asociados a la misma, dos de ellos son los habituales $C(A)$ (espacio generado por las columnas de A) y $N(A)$ (espacio anulador por la derecha de A) pero también podemos calcular los mismos espacios en relación con la matriz A^T, eso nos da $C(A^T)$ (espacio generado por las filas de A) y $N(A^T)$ (espacio anulador por la izquierda de A). Vamos a ver cómo se calculan las bases y dimensiones de esos cuatro espacios a partir de la reducción por filas de matrices.

Para los ejemplos tomaremos como matriz A la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5).$$

1.1. Base de $C(A)$

Las columnas de la matriz A generan el espacio $C(A)$, pero no tienen porqué ser linealmente independientes. Para obtener una base lo único que necesitamos es eliminar las columnas dependientes de las otras y dejar un subconjunto de columnas linealmente idependiente y tal que todas las eliminadas sea dependiente de él. Para detectar esas columnas, debemos hacer una reducción por filas y seleccionar las columnas que al reducirse quedarán como pivote. Eso lo podemos hacer triangularizando la matriz, puesto que únicamente debemos saber en qué columnas quedarán los pivotes.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,4)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2,5)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como podemos ver, las columnas 1, 2 y 3 son pivote y por lo tanto esas columnas de la matriz original son lineamente independientes y la base que estamos buscando:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

El número de vectores que obtendremos será el número de pivotes, es decir, $\mathsf{dim}(C(A)) = \mathsf{rango}(A)$. En este caso es muy importante que tengamos en cuenta que las columnas que forman la base las tenemos que tomar de la matriz original, no de la matriz reducida puesto que cuando hacemos operaciones por filas, las columnas de la matriz reducida no pertenecen al espacio $C(A)$.

1.2. Base de $N(A)$

El espacio anulador por la derecha de A estará formado por las soluciones al sistema de ecuaciones $Ax = 0$, es decir, tenemos que resolver

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Para eso lo mejor es hacer la reducción completa de la matriz A y obtener las soluciones en términos de parámetros:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema equivalente que nos queda es:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Si hacemos x_4 parámetro, llamémosmo A, el conjunto de soluciones queda

$$\begin{aligned} x_1 &= -2a = 3a \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -2a = 3a \\ x_4 &= a \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$N(A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } a \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

La base estará formada en este caso por un único vector que es $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. La dimensión del espacio será el número de parámetros libres que tenga el conjunto de soluciones, esto es el número de columnas que no son pivote y por lo tanto $\mathsf{dim}(N(A)) = n - r$.

1.3. Base de $C(A^T)$

Para obtener la base del espacio generado por las filas, podemos manipular las filas haciendo una reducción y eliminando las filas de ceros que quedan. En este caso podemos triangularizar o hacer la reducción completa. Lo importante es que quitemos las filas de ceros.

Utilizando la reducida de la sección anterior, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tenemos que la base puesta como columnas está formada por los vectores

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

El número de vectores de esta base coincide con el número de pivotes, es decir, con el rango ($\mathsf{dim}(C(A^T)) = \mathsf{rango}(A)$). Es importante tener en cuenta que en este caso los vectores los tenemos que tomar por filas y de la matriz reducida, no de la original.

1.4. Base de $N(A^T)$

Para calcular la base del anulador por la izquierda de A, debemos encontrar vectores fila h tales que $hA = 0$. Esos vectores los encontrábamos al buscar las ecuaciones implícitas del espacio, por lo que podemos usar el mismo método para calcularlos. Como lo que nos interesa es solo donde están las filas de ceros en la matriz reducida, podemos triangularizar y obtener la matriz H.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3&3&4&4&1&0&0&0&0\\ 3&0&3&2&0&1&0&0&0\\ 2&2&2&3&0&0&1&0&0\\ 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 1&3&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 3&0&3&2&0&1&0&0&0\\ 2&2&2&3&0&0&1&0&0\\ 3&3&4&4&1&0&0&0&0\\ 1&3&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 0&4&0&0&0&1&0&2&0\\ 2&2&2&3&0&0&1&0&0\\ 3&3&4&4&1&0&0&0&0\\ 1&3&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 0&4&0&0&0&1&0&2&0\\ 0&3&0&0&0&0&1&3&0\\ 3&3&4&4&1&0&0&0&0\\ 1&3&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 0&4&0&0&0&1&0&2&0\\ 0&3&0&0&0&0&1&3&0\\ 0&2&1&2&1&0&0&2&0\\ 1&3&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 0&4&0&0&0&1&0&2&0\\ 0&3&0&0&0&0&1&3&0\\ 0&2&1&2&1&0&0&2&0\\ 0&1&4&3&0&0&0&4&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 0&1&4&3&0&0&0&4&1\\ 0&3&0&0&0&0&1&3&0\\ 0&2&1&2&1&0&0&2&0\\ 0&4&0&0&0&1&0&2&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 0&1&4&3&0&0&0&4&1\\ 0&0&3&1&0&0&1&1&2\\ 0&2&1&2&1&0&0&2&0\\ 0&4&0&0&0&1&0&2&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 0&1&4&3&0&0&0&4&1\\ 0&0&3&1&0&0&1&1&2\\ 0&0&3&1&1&0&0&4&3\\ 0&4&0&0&0&1&0&2&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 0&1&4&3&0&0&0&4&1\\ 0&0&3&1&0&0&1&1&2\\ 0&0&3&1&1&0&0&4&3\\ 0&0&4&3&0&1&0&1&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 0&1&4&3&0&0&0&4&1\\ 0&0&3&1&0&0&1&1&2\\ 0&0&0&0&1&0&4&3&1\\ 0&0&4&3&0&1&0&1&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 0&1&4&3&0&0&0&4&1\\ 0&0&3&1&0&0&1&1&2\\ \hline 0&0&0&0&1&0&4&3&1\\ 0&0&0&0&0&1&2&3&0 \end{array}\right]$$

La base tomada como columnas estará formada por los vectores $\left\{ \left[\begin{smallmatrix}1\\0\\4\\3\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\\2\\3\end{smallmatrix}\right] 0 \right\}$. El número de vectores será el número de filas de ceros en la matriz reducida, es decir $\mathsf{dim}(N(A^T)) = m - r$, siendo r el rango de la matriz A.

1.5. Obteniendo todas de una sola vez

Si nos piden calcularlas todas, lo mejor es hacer la reducción completa de la matriz ampliada $[A|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3&3&4&4&1&0&0&0&0\\ 3&0&3&2&0&1&0&0&0\\ 2&2&2&3&0&0&1&0&0\\ 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 1&3&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&3&3&2&0&0&0&0\\ 3&0&3&2&0&1&0&0&0\\ 2&2&2&3&0&0&1&0&0\\ 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 1&3&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&3&3&2&0&0&0&0\\ 0&2&4&3&4&1&0&0&0\\ 2&2&2&3&0&0&1&0&0\\ 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 1&3&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&3&3&2&0&0&0&0\\ 0&2&4&3&4&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&1&0&0\\ 1&2&1&4&0&0&0&1&0\\ 1&3&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&3&3&2&0&0&0&0\\ 0&2&4&3&4&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&1&0&0\\ 0&1&3&1&3&0&0&1&0\\ 1&3&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&3&3&2&0&0&0&0\\ 0&2&4&3&4&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&1&0&0\\ 0&1&3&1&3&0&0&1&0\\ 0&2&2&4&3&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&3&3&2&0&0&0&0\\ 0&1&2&4&2&3&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&1&0&0\\ 0&1&3&1&3&0&0&1&0\\ 0&2&2&4&3&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&0&1&4&0&2&0&0&0\\ 0&1&2&4&2&3&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&1&0&0\\ 0&1&3&1&3&0&0&1&0\\ 0&2&2&4&3&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&0&1&4&0&2&0&0&0\\ 0&1&2&4&2&3&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&2&1&2&0&1&0\\ 0&2&2&4&3&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&0&1&4&0&2&0&0&0\\ 0&1&2&4&2&3&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&2&1&2&0&1&0\\ 0&0&3&1&4&4&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&0&0&2&4&2&4&0&0\\ 0&1&2&4&2&3&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&2&1&2&0&1&0\\ 0&0&3&1&4&4&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&0&0&2&4&2&4&0&0\\ 0&1&0&0&0&3&3&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&2&1&2&0&1&0\\ 0&0&3&1&4&4&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&0&0&2&4&2&4&0&0\\ 0&1&0&0&0&3&3&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&4&1&0\\ 0&0&3&1&4&4&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&0&0&2&4&2&4&0&0\\ 0&1&0&0&0&3&3&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&4&1&0\\ 0&0&0&0&1&4&2&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&0&0&2&4&2&4&0&0\\ 0&1&0&0&0&3&3&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&1&0&0\\ \hline 0&0&0&0&1&4&2&0&1\\ 0&0&0&0&0&2&4&1&0 \end{array}\right].$$

y extraer de ahí las cuatro bases como hemos hecho en los casos anteriores. Aunque hagamos la reducción completa, las bases que obtenemos son válidas. Existen muchas bases para un espacio vectorial, el camino que usemos puede hacer que las bases que tomemos sean diferentes, pero todas son correctas.

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

A continuación se presentan 200 problemas, 50 de cada tipo.

Ejercicio 1. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & -5 & -5 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$-4x_1 + 4x_3 + 4x_4 = 0$$
$$5x_1 - 5x_3 - 5x_4 = 0$$
$$-2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & -5 & -5 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-\frac{1}{4}(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & -5 & -5 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-5(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_3 - x_4 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2, x_3 y x_4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 2. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & -6 & -2 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_5 = 0$$

$$3x_2 + 9x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & -6 & -2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & -6 & -2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + 3x_3 - x_5 = 0$$

$$x_2 + 3x_3 - 2x_5 = 0$$

$$x_4 - 2x_5 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_3 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a + b \\ -3a + 2b \\ a \\ 2b \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$ ◊

Ejercicio 3. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & -5 & 4 \\ -1 & 5 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - 5x_2 - x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0$$

$$-x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & -5 & 4 \\ -1 & 5 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -2 & -5 & 4 \\ -1 & 5 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - 5x_2 - x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2, x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a + b - 2c \\ a \\ -2b + c \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 4. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0$$

$$x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+5(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 - 2x_4 = 0$$

$$x_3 - x_4 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_4.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \\ a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 5. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$-x_1 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0$$

$$x_2 - 5x_4 - 3x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0$$

$$-x_3 - 7x_4 + 3x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+5(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$
$$x_5 = 0$$

Este sistema es compatible determinado y por lo tanto el espacio anulador que nos piden es el espacio 0 y su base es el conjunto vacío, $\emptyset$. $\Diamond$

Ejercicio 6. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 + 4x_2 - 8x_3 - 6x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 5x_4 = 0$$

$$-x_1 - 3x_3 + 5x_4 = 0$$

$$-2x_2 + 6x_3 = 0$$

$$-2x_2 + 6x_3 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -6 \\ 0 & -3 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -6 \\ 0 & -3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 4 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 4 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-\frac{8}{3}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+\frac{8}{3}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{3}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{2}{3}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - 2x_4 = 0$$

$$x_2 - 3x_4 = 0$$

$$x_3 - x_4 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_4.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 3a \\ a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 7. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - 4x_2 + x_4 = 0$$
$$-x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0$$
$$2x_3 + 4x_4 = 0$$
$$-x_1 + 4x_2 - x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - 4x_2 + x_4 = 0$$
$$x_3 + 2x_4 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2 y x_4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a - b \\ a \\ -2b \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 8. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{1}{5}(1)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-\frac{6}{5}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+\frac{3}{5}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_3 y x_4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a - 3b \\ a + 3b \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 9. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_3 - x_4 = 0$$
$$-2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$
$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ -1 & 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+5(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+7(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - 3x_2 - 2x_4 = 0$$
$$x_3 - x_4 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2 y x_4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a + 2b \\ a \\ b \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 10. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0$$
$$x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 0$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$$
$$x_1 - x_2 - 2x_5 = 0$$
$$2x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)-2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + 2x_4 - 3x_5 = 0$$
$$x_2 + 2x_4 - x_5 = 0$$
$$x_3 - x_4 + 2x_5 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a+3b \\ -2a+b \\ a-2b \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$ $\Diamond$

Ejercicio 11. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$-x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 9x_5 = 0$$

$$x_2 + 2x_4 + 5x_5 = 0$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_5 = 0$$

$$-4x_3 + 8x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{1}{2}(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-1(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{-2(4)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-2(4)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{7}{2}(4)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+4(4)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

El sistema reducido queda:

$$x_1 - 2x_5 = 0$$

$$x_2 + x_5 = 0$$

$$x_3 - 2x_5 = 0$$

$$x_4 + 2x_5 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_5.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ -a \\ 2a \\ -2a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 12. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0$$

$$2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0$$

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 - x_5 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_3, x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+b \\ -a+c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 13. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 & -9 & 7 \\ 2 & 5 & -1 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 2 & 3 & -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 7x_5 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 0$$

$$-x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0$$

$$-4x_3 - 4x_4 + 8x_5 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 8x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 & -9 & 7 \\ 2 & 5 & -1 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 2 & 3 & -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{1}{3}(1)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 2 & 5 & -1 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 2 & 3 & -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & -3 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 2 & 3 & -3 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 2 & 3 & -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-\frac{7}{3}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+\frac{2}{3}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+\frac{5}{3}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + x_5 = 0$$
$$x_2 - x_4 = 0$$
$$x_3 + x_4 - 2x_5 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \\ -a+2b \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 14. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & 6 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$
$$-x_1 + x_2 - 3x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 0$$
$$-5x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0$$
$$-x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & 6 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & 6 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{1}{6}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-5(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{6} & \frac{16}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{6} & \frac{16}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{6} & \frac{16}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{6(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{6} & \frac{16}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-\frac{11}{6}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+\frac{7}{6}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{4}{3}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)-5(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + x_5 = 0$$
$$x_2 - 2x_5 = 0$$
$$x_3 - 2x_5 = 0$$
$$x_4 + x_5 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_5.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ 2a \\ 2a \\ -a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 15. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 6 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$\begin{gathered} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{gathered}$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 6 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{gathered} x_1 - 3x_2 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{gathered}$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2, x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a - b + 2c \\ a \\ c \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 16. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - 3x_4 = 0$$

$$x_2 - 3x_3 - 7x_4 - 5x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 0$$

$$-2x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 0$$

$$-x_1 - x_3 - x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{1}{3}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{5}{3}(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)-\frac{2}{3}(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - 3x_4 = 0$$

$$x_2 + 2x_4 = 0$$

$$x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_5 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_4.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ -2a \\ -3a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 17. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -9 & 7 & -7 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -7 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -8 & 6 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$5x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 7x_4 - 7x_5 = 0$$

$$-3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 6x_4 - 6x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -9 & 7 & -7 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -7 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -8 & 6 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{1}{5}(1)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ -3 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -7 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -8 & 6 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{22}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{11}{5} \\ 1 & 3 & -7 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -8 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{22}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{26}{5} & \frac{13}{5} & -\frac{13}{5} \\ 4 & 2 & -8 & 6 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{22}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{26}{5} & \frac{13}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{5}{11}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{26}{5} & \frac{13}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-\frac{2}{5}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{26}{5} & \frac{13}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-\frac{13}{5}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{5}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = 0$$

$$x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_3, x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b + c \\ 2a - b + c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 18. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0$$
$$0 = 0$$
$$2x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2, x_3 y x_4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+b+3c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 19. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$-x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$0 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
.

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2, x_3 y x_4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b-c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 20. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0$$
$$-2x_3 - 4x_4 = 0$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - 3x_2 + 3x_4 = 0$$
$$x_3 + 2x_4 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2 y x_4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a-3b \\ a \\ -2b \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 21. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$-x_3 + 3x_4 + x_5 = 0$$
$$-x_1 - x_2 - x_4 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$
$$3x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + x_4 - x_5 = 0$$
$$x_2 + x_5 = 0$$
$$x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a-4b \\ -b \\ -2a-4b \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 22. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 + 3x_3 = 0$$
$$3x_1 + 2x_4 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible determinado y por lo tanto el espacio anulador que nos piden es el espacio 0 y su base es el conjunto vacío, $\emptyset$. $\Diamond$

Ejercicio 23. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$-x_1 + 3x_3 + x_4 = 0$$

$$3x_1 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_2.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 24. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0$$

$$x_3 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{E_{(1)+3(2)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_4 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_4.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4a \\ 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 25. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0$$

$$x_3 + 3x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$3x_3 - x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + 3x_2 + x_4 + 3x_5 = 0$$
$$x_3 + 3x_4 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2, x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a - b - 3c \\ a \\ -3b \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 26. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0$$
$$x_2 + x_5 = 0$$
$$3x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_2 + x_5 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_3, x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a-3b-2c \\ -c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 27. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_2 + x_4 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 - x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(4)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$

Este sistema es compatible determinado y por lo tanto el espacio anulador que nos piden es el espacio 0 y su base es el conjunto vacío, $\emptyset$. $\lozenge$

Ejercicio 28. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$
$$x_2 - x_3 - x_5 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_3, x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a - 2b - 3c \\ -4a - 4c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\lozenge$

Ejercicio 29. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$2x_1 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 0$$
$$2x_2 + x_4 - x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$
$$x_5 = 0$$

Este sistema es compatible determinado y por lo tanto el espacio anulador que nos piden es el espacio 0 y su base es el conjunto vacío, $\emptyset$. $\Diamond$

Ejercicio 30. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$2x_1 - x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 + x_3 + 2x_4 = 0$$
$$-x_1 + x_3 + 3x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + 2x_4 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2 y x_4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b \\ a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 31. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_2 + 3x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 + x_4 + 3x_5 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4a - 2b \\ -3a - 4b \\ -a - 3b \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 32. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$-x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2, x_3 y x_4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a-b-3c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 33. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 0$$
$$3x_1 + 2x_3 = 0$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_2 + 3x_4 = 0$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible determinado y por lo tanto el espacio anulador que nos piden es el espacio 0 y su base es el conjunto vacío, $\emptyset$. $\Diamond$

Ejercicio 34. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - x_3 - x_4 = 0$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + 2x_4 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 + 3x_4 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_4.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a \\ 0 \\ -3a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 35. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$0 = 0$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 4 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2, x_3, x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a - 2b - 4c - 4d \\ a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 36. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$2x_4 + 2x_5 = 0$$
$$x_4 + x_5 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 0$$
$$x_4 + x_5 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2, x_3 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4a - 3b - 4c \\ a \\ b \\ -c \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 37. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$3x_1 - x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0$$
$$x_2 + 2x_3 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_3 y x_4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a - 2b \\ -2a \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 38. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0$$
$$x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 0$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$$
$$2x_1 + 2x_4 + 2x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible determinado y por lo tanto el espacio anulador que nos piden es el espacio 0 y su base es el conjunto vacío, $\emptyset$. $\Diamond$

Ejercicio 39. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_3 - x_4 - x_5 = 0$$
$$-x_1 + 3x_3 = 0$$
$$2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0$$
$$2x_1 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + 2x_4 + 2x_5 = 0$$
$$x_3 - x_4 - x_5 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 3 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2, x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b-2c \\ a \\ -4b-4c \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$ ◊

Ejercicio 40. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$$
$$x_2 + x_3 = 0$$
$$3x_1 + x_3 + 3x_4 = 0$$
$$2x_2 - x_3 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$

Este sistema es compatible determinado y por lo tanto el espacio anulador que nos piden es el espacio 0 y su base es el conjunto vacío, $\emptyset$. $\Diamond$

Ejercicio 41. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_3 - x_4 = 0$$
$$-x_1 = 0$$
$$x_3 - x_4 = 0$$
$$-x_1 - x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 - x_4 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_4.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 42. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - x_2 = 0$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$-x_1 - x_2 + x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + x_4 = 0$$
$$x_2 + x_4 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_4.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 43. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_3 y x_4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a \\ -2a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 44. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 + x_2 - x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_4 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 - x_4 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_4.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a \\ 0 \\ -2a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 45. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - x_4 = 0$$

$$-x_2 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_4 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_4.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a \\ 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 46. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$-x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0$$
$$x_1 - x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_5 = 0$$

$$x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 + x_4 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b \\ -2a-2b \\ -a \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 47. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - x_4 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_4 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 + x_4 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_4.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a \\ 0 \\ -a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 48. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 - x_4 - x_5 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_4 - x_5 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 4 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables x_2, x_3, x_4 y x_5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2c - 2d \\ a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 49. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_4 = 0$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4,5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 + x_5 = 0$$

$$x_4 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_5.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 50. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: El espacio anulador por la derecha de esta matriz es el conjunto de soluciones del sistema dado por las ecuaciones:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$-x_1 + x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

Reducimos por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable x_4.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base del espacio anulador por la derecha es pues: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 51. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 52. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -6 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -6 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{2}{3}(1)}} \begin{bmatrix} -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 53. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{3}{4}(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-\frac{5}{4}(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{11}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-11(2)}} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 54. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 6 & -8 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \\ -5 & 6 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 6 & -8 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \\ -5 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{1}{2}(1)}} \begin{bmatrix} 6 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+\frac{5}{6}(1)}} \begin{bmatrix} 6 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{2}{3}(2)}} \begin{bmatrix} 6 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 55. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 56. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 57. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+\frac{2}{3}(1)}} \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ -4 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-\frac{4}{3}(1)}} \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{3}(1)}} \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 58. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-5(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 59. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -7 & 7 \\ -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -7 & 7 \\ -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{4}{7}(1)}} \begin{bmatrix} -7 & 7 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-\frac{2}{7}(1)}} \begin{bmatrix} -7 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 60. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{1}{3}(1)}} \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{3} \\ 4 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-\frac{4}{9}(1)}} \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{4}{9} \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{3}(1)}} \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & -\frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{4}{15}(2)}} \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{20}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-4(2)}} \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 61. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \\ -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \\ -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 62. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 4 & 9 \\ 0 & -5 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 4 & 9 \\ 0 & -5 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+\frac{4}{3}(1)}} \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -5 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,4)}} \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -1 \\ 0 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-5(2)}} \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{3}(2)}} \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 63. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+\frac{5}{4}(1)}} \begin{bmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-\frac{1}{2}(2)}} \begin{bmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$
.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 64. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 65. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+8(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 66. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{3}{5}(1)}} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{5} \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-\frac{4}{5}(1)}} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{17}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+17(2)}} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 67. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-5(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 68. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -9 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -9 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 69. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 70. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{7}{6}(2)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 71. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 72. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 73. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 74. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 75. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 76. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 77. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 78. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 79. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 80. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 81. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,4)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 82. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 83. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 84. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 85. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 86. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 87. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 88. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 89. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,4)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 90. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 91. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix}0&0\\2&1\\1&2\end{bmatrix}\in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix}0&0\\2&1\\1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{(1,3)}}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}}\begin{bmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 92. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix}1&2&2\\0&0&1\\1&2&0\end{bmatrix}\in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix}1&2&2\\0&0&1\\1&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 93. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\1&0&2\\1&0&2\end{bmatrix}\in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\1&0&2\\1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&0\\1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 94. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 95. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 96. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 97. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 98. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 99. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,4)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 100. *Calcula una base del espacio generado por las columnas de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 101. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-6(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+5(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 102. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 4 & -2 \\ -5 & 3 & 1 & -7 & 3 \\ -4 & 1 & -2 & -7 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 4 & -2 \\ -5 & 3 & 1 & -7 & 3 \\ -4 & 1 & -2 & -7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 4 & -2 \\ -5 & 3 & 1 & -7 & 3 \\ -4 & 1 & -2 & -7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 & -7 & 3 \\ -4 & 1 & -2 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & \frac{14}{3} & -2 \\ -4 & 1 & -2 & -7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & \frac{14}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{7}{3} & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 6 & \frac{14}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{7}{3} & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{7}{3} & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{6(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-\frac{7}{3}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{3}{2}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-\frac{5}{6}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-6(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, todas las filas son linealmente independientes y la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 103. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & -9 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & -9 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-5(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+16(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 104. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 105. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 & -6 & 6 \\ -4 & -8 & 8 & -8 & 8 \\ -4 & -8 & 8 & -8 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 & -6 & 6 \\ -4 & -8 & 8 & -8 & 8 \\ -4 & -8 & 8 & -8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ -4 & -8 & 8 & -8 & 8 \\ -4 & -8 & 8 & -8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & 8 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 106. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 & 9 \\ -1 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & -3 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 & 9 \\ -1 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & -3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -9 \\ -1 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & -3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 107. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 9 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 9 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & -6 \\ 0 & -3 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -7 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & -6 \\ 0 & -3 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -7 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -7 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 108. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & 4 & 9 & 8 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & 4 & 9 & 8 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & -8 \\ -1 & 3 & 4 & 9 & 8 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & -7 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{1}{3}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-\frac{3}{7}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{1}{3}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+\frac{1}{3}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 109. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 & -7 & 4 \\ -1 & 5 & 4 & 9 & -5 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 & -7 & 4 \\ -1 & 5 & 4 & 9 & -5 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 110. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -1 & 4 \\ -2 & -8 & 4 & -4 \\ -2 & -8 & -2 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -1 & 4 \\ -2 & -8 & 4 & -4 \\ -2 & -8 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & -1 & 4 \\ -2 & -8 & 4 & -4 \\ -2 & -8 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -8 & 4 & -4 \\ -2 & -8 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & -8 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 111. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 112. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 113. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-\frac{1}{2}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{11}{2}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 114. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -9 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -9 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 115. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -8 & 2 \\ 1 & -3 & 8 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -8 & 2 \\ 1 & -3 & 8 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & 8 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 116. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 117. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-\frac{1}{4}(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 118. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 4 & 8 \\ -2 & 6 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 4 & 8 \\ -2 & 6 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 119. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, todas las filas son linealmente independientes y la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 120. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
.

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 121. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 122. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 123. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 124. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 125. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{2(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 126. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 2&3&4&1&4\\ 2&1&0&2&0\\ 2&1&1&1&4\\ 1&4&0&0&4\\ 0&1&1&3&3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(1)}} \begin{bmatrix} 1&4&2&3&2\\ 2&1&0&2&0\\ 2&1&1&1&4\\ 1&4&0&0&4\\ 0&1&1&3&3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1&4&2&3&2\\ 0&3&1&1&1\\ 2&1&1&1&4\\ 1&4&0&0&4\\ 0&1&1&3&3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1&4&2&3&2\\ 0&3&1&1&1\\ 0&3&2&0&0\\ 1&4&0&0&4\\ 0&1&1&3&3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1&4&2&3&2\\ 0&3&1&1&1\\ 0&3&2&0&0\\ 0&0&3&2&2\\ 0&1&1&3&3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(2)}} \begin{bmatrix} 1&4&2&3&2\\ 0&1&2&2&2\\ 0&3&2&0&0\\ 0&0&3&2&2\\ 0&1&1&3&3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1&0&4&0&4\\ 0&1&2&2&2\\ 0&3&2&0&0\\ 0&0&3&2&2\\ 0&1&1&3&3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1&0&4&0&4\\ 0&1&2&2&2\\ 0&0&1&4&4\\ 0&0&3&2&2\\ 0&1&1&3&3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1&0&4&0&4\\ 0&1&2&2&2\\ 0&0&1&4&4\\ 0&0&3&2&2\\ 0&0&4&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1&0&0&4&3\\ 0&1&2&2&2\\ 0&0&1&4&4\\ 0&0&3&2&2\\ 0&0&4&1&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1&0&0&4&3\\ 0&1&0&4&4\\ 0&0&1&4&4\\ 0&0&3&2&2\\ 0&0&4&1&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1&0&0&4&3\\ 0&1&0&4&4\\ 0&0&1&4&4\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&4&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1&0&0&4&3\\ 0&1&0&4&4\\ 0&0&1&4&4\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\4\\3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\4\\4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\4\\4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 127. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0&4&3&1\\ 1&0&2&0\\ 3&3&3&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0&4&3&1\\ 1&0&2&0\\ 3&3&3&0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(1)}} \begin{bmatrix} 0&1&2&4\\ 1&0&2&0\\ 3&3&3&0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0&1&2&4\\ 1&0&2&0\\ 3&0&2&3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, todas las filas son linealmente independientes y la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 128. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, todas las filas son linealmente independientes y la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 129. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, todas las filas son linealmente independientes y la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 130. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 131. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 132. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 133. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 134. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 135. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 136. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 137. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 138. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 139. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 140. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 141. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 142. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 143. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, todas las filas son linealmente independientes y la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 144. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 145. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 146. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 147. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 148. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 149. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, todas las filas son linealmente independientes y la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 150. *Calcula una base del espacio vectorial generado por las filas de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio, vamos a combinar las filas de la matriz para conseguir vectores linealmente independientes. Además, para que la base sea lo más simple posible, haremos la reducción completa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nos quedamos con las filas no nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 151. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-5(1)}} \left[\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 152. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 153. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & -5 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 154. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 155. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -2 & -4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como no tenemos filas de ceros en la parte izquierda, el espacio anulador que buscamos es 0 y su base $\{\emptyset\}$. ◊

Ejercicio 156. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{r|rrrr} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 157. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} -2 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-7(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -7 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 158. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -18 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

.

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} -22 \\ -18 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 159. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 160. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

.

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 161. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{3}{4}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{5}{4}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 162. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 163. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 164. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como no tenemos filas de ceros en la parte izquierda, el espacio anulador que buscamos es 0 y su base $\{\emptyset\}$. $\Diamond$

Ejercicio 165. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 5 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 166. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, como no tenemos filas de ceros en la parte izquierda, el espacio anulador que buscamos es 0 y su base $\{\emptyset\}$. $\Diamond$

Ejercicio 167. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 168. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 169. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ -1 & -5 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+5(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 170. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 9 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

.

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 171. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right] \right\}$. ◊

Ejercicio 172. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\left[\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \left[\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right] \right\}$. ◊

Ejercicio 173. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 174. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 175. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 176. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 177. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 178. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 179. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 180. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 181. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

.

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 182. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 183. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 184. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 185. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 186. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 187. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 188. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 189. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

.

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 190. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

.

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 191. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 192. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 193. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 194. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 195. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 196. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 197. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 198. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 199. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 200. *Calcula una base del espacio anulador por la izquierda de la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base de este espacio y puesto que solo nos interesa detectar las filas de ceros, vamos a triangularizar la matriz extendida con la identidad.

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Si nos quedamos con las filas que aparecen a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base que buscamos puesta como vectores columna es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ♢