Informática
UNIVERSIDAD DE MURCIA

FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA INFORMÁTICA

Deducción Natural en L1

PRIMER CURSO DEL GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

PRIMER CUATRIMESTRE

2020-21

Facultad de Informática

Índice del documento

Sistemas Deductivos (I)

- A título de recordatorio, vamos a ver los conceptos de Sistema Deductivo, de Demostración y de Teoremas, así como de Razonamientos y Deducciones. Pueden ver de nuevo las páginas 3-5 del documento de clase sobre **4. Deducción Natural en L0**.

Un Sistema Deductivo está formado por:

- Un conjunto de Axiomas, que son fórmulas de partida que por principio son aceptadas.
- Un conjunto de Reglas de Inferencia, que son esquemas para generar nuevas fórmulas, que establecen cómo construir nuevas expresiones a partir de unas iniciales.
- Implementan un método SINTÁCTICO (no semántico) de pasos reiterativos, hasta que se cumple algún criterio de parada, formando una secuencia de fórmulas llamada Demostración.

Demostración y Teoremas:

- Una **Demostración** o Prueba Formal es una secuencia de fórmulas, en las que cada una de ellas es: o un Axioma o una nueva que puede obtenerse de algunas anteriores aplicando una Regla de Inferencia. El criterio de parada usual es llegar a alguna expresión concreta que se ha propuesto como objetivo de la demostración.
- Un **Teorema** (en Sistemas Deductivos) es la última fórmula, β, de una secuencia de Demostración. Se denotará por $\vdash \beta$, y se dirá que: β es demostrable, y que la secuencia es una demostración de β.
- Utilizando una definición recursiva: Un Teorema, o es una Axioma o es el resultado de una Regla de Inferencia sobre otros Teoremas.
- La connotación de método Sintáctico se asocia a que el foco se centrará en el ESQUEMA o FORMA de las fórmulas y no en su semántica o su valor de verdad. Por eso, ¡¡¡nos olvidamos de las oraciones lógicas!!! **Bienvenidas sean las FÓRMULAS Y SUS ÁTOMOS**.

Sistemas Deductivos (II)

ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS Y TEOREMA DE LA DEDUCCIÓN (SINTÁCTICA)

- No siempre los Teoremas se obtienen partiendo de un conjunto de axiomas. El conjunto de partida puede también contener supuestos o hipótesis de partida, lo que generaliza la definición de demostración dada anteriormente. Una **DEDUCCIÓN** o Estructura Deductiva se describe mediante dos sucesiones de fórmulas separadas por el símbolo "$\Longrightarrow$". De esta forma, $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\} \Longrightarrow \{\beta 1, \beta 2, \beta 3, \ldots, \beta m\}$ representa una deducción en la que la sucesión α_i es el antecedente y sus elementos se llaman Premisas. La sucesión β_j es el consecuente de la deducción y sus elementos se llaman Conclusiones.

- Una estructura deductiva o **Deducción** se define como **CORRECTA** cuando las fórmulas de la sucesión consecuente se obtienen de acuerdo con alguna de las reglas siguientes: a) β_j es una de las premisas; b) β_j es una fórmula válida o aceptada en el sistema, es decir, β_j es un axioma o un teorema; y c) β_j se deduce de alguna premisa o de alguna conclusión previa aplicando alguna Regla de Inferencia.

- El Teorema de la Deducción Sintáctica, o simplemente Teorema de la Deducción, es fundamental en la teoría de la demostración ya que permite definir una relación entre estructuras deductivas correctas y fórmulas válidas o teoremas. Su enunciado es el siguiente: Si $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\} \Longrightarrow \{\beta 1, \beta 2, \beta 3, \ldots, \beta m\}$ es una deducción correcta, existe una deducción correcta de $\alpha n \rightarrow \beta_j$ con premisas $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n\text{-}1\}$. O lo que es lo mismo, podemos tener la conclusión $\alpha n \rightarrow \beta_j$ a partir del conjunto de premisas al que hemos eliminado la premisa αn.

- Este **Teorema de la Deducción** que hay que demostrar para cada Sistema Deductivo determinado, pero que afortunadamente se cumple para los que vamos a estudiar en esta asignatura, **es esencial** porque nos permite plantear la demostración de un teorema dado como la demostración o deducción de una estructura deductiva. Así, si queremos demostrar el teorema $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ bastaría con comprobar la corrección de la estructura deductiva $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha$. Lo cual es obvio teniendo en cuenta la regla del apartado a) de la definición de corrección de una Estructura Deductiva. Su viceversa también es interesante: si $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha$ es una estructura deductiva correcta, entonces la fórmula $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ es un teorema del sistema, es decir, $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$. La demostración de Teoremas y la corrección de Estructuras Deductivas tiene un punto de conexión mediante el Teorema de la Deducción.

- **Teniendo en cuenta el concepto de DEDUCCIÓN:** La fórmula $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ es una teorema, es decir, una fórmula válida en el sistema, pero las fórmulas **α y β** de la estructura deductiva correcta $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha$ no lo son. En todo caso, serán premisas de una deducción correcta teniendo como conclusión una de ellas!!!

Razonamientos y Deducciones:

- En general, en un Razonamiento dado, las premisas y la conclusión no serán, cada una de ellas, teoremas en un Sistema Deductivo. Por tanto, si en el contexto de un Sistema Deductivo nos planteamos **comprobar la corrección de un Razonamiento: la forma de hacerlo será demostrar que la Estructura Deductiva formada por las premisas y la conclusión del razonamiento es CORRECTA**, tal y como ha quedado definido anteriormente dicho concepto.
- Cada Sistema Deductivo quedará definido por un conjunto de Axiomas y por un conjunto de Reglas de Inferencia. En dicho Sistema Deductivo podremos demostrar Teoremas, según la definición de Demostración. Y también, demostrar la corrección de una Estructura Deductiva. Teniendo en cuenta el Teorema de la Deducción (Sintáctica), un Teorema representará una Estructura Deductiva correcta, que podrá ser utilizada en secuencias de Deducción como subsecuencias de la general.
- Lo relevante es entender la connotación de la Deducción como **método Sintáctico asociado al ESQUEMA O FORMA de las fórmulas**.

Facultad de Informática

El Sistema de Deducción Natural (I)

- En **Deducción Natural** no existen Axiomas, y tenemos las trece Reglas de Inferencia básicas vistas en L0 más cuatro Reglas de Inferencia sobre los cuantificadores propias de L1. En las **páginas 4-15 del documento 04-Deducción-B que tienen en RECURSOS** tienen la explicación del Sistema de Deducción Natural.

REGLA I∧ $\dfrac{\vdash\alpha , \vdash\beta}{\vdash\alpha\wedge\beta}$	**REGLA E∧** $\dfrac{\vdash\alpha\wedge\beta}{\vdash\alpha}$ $\dfrac{\vdash\alpha\wedge\beta}{\vdash\beta}$	**REGLA I→** $\dfrac{\vdash(\alpha\vdash\beta)}{\vdash\alpha\to\beta}$ Regla con 1 caja	**REGLA E→** $\dfrac{\vdash\alpha , \vdash\alpha\to\beta}{\vdash\beta}$
REGLA I∨ $\dfrac{\vdash\alpha}{\vdash\alpha\vee\beta}$ $\dfrac{\vdash\beta}{\vdash\alpha\vee\beta}$	**REGLA E∨** $\dfrac{\vdash\alpha\vee\beta , \vdash(\alpha\vdash\delta) , \vdash(\beta\vdash\delta)}{\vdash\delta}$ Regla con 2 cajas	**REGLA I↔** $\dfrac{\vdash\beta\to\alpha , \vdash\alpha\to\beta}{\vdash\alpha\leftrightarrow\beta}$	**REGLA E↔** $\dfrac{\vdash\alpha\leftrightarrow\beta}{\vdash\alpha\to\beta}$ $\dfrac{\vdash\alpha\leftrightarrow\beta}{\vdash\beta\to\alpha}$
REGLA I¬ $\dfrac{\vdash(\alpha\vdash\beta\wedge\neg\beta)}{\vdash\neg\alpha}$ Regla con 1 caja	**REGLA E¬** $\dfrac{\vdash(\neg\alpha\vdash\beta\wedge\neg\beta)}{\vdash\alpha}$ Regla con 1 caja	**REGLA E¬¬** $\dfrac{\vdash\neg\neg\alpha}{\vdash\alpha}$	**REGLA CONTRA** $\dfrac{\vdash\alpha , \vdash\neg\alpha}{\vdash\beta}$
REGLA IT $\dfrac{\vdash\alpha}{\vdash\alpha}$	Además de estas Reglas de Inferencia básicas, en Deducción Natural tendremos tantas Reglas Derivadas como Estructuras Deductivas hayamos demostrado		

El Sistema de Deducción Natural (II)

- En **Deducción Natural** no existen Axiomas, y tenemos las trece Reglas de Inferencia básicas vistas en L0 más cuatro Reglas de Inferencia sobre los cuantificadores propias de L1. En las **páginas 4-15 del documento 04-Deducción-B que tienen en RECURSOS** tienen la explicación del Sistema de Deducción Natural.

REGLA E∀ : Instanciación Universal o Regla de Eliminación de la Cuantificación Universal

$$\frac{\vdash \forall x\, \delta(x)}{\vdash \delta(c)}$$

Regla que reproduce una de las consecuencias lógicas básicas en L1. La constante "c" puede ser una constante concreta, o bien, una constante indeterminada

REGLA I∀ : Generalización Universal o Regla de Introducción de la Cuantificación Universal

$$\frac{\vdash \delta(c)}{\vdash \forall x\, \delta(x)}$$

Regla a aplicar con restricciones. Para hacerlo, la constante "c" no puede aparecer en premisas, ni en derivaciones, ni en hipótesis o supuestos no cerrados

REGLA E∃ : Instanciación Existencial o Regla de Eliminación de la Cuantificación Existencial

$$\frac{\vdash \exists x\, \delta(x),\ \vdash (\delta(c) \vdash \beta)}{\vdash \beta}$$

Regla con 1 caja

Regla a aplicar con restricciones. La constante "c" no puede aparecer ni en la expresión ∃x δ(x), ni en ninguna premisa, ni en ningún supuesto no cerrado de la derivación. Por otra parte, en β no puede aparecer la variable "x" libre

REGLA I∃ : Generalización Existencial o Regla de Introducción de la Cuantificación Existencial

$$\frac{\vdash \delta(c)}{\vdash \exists x\, \delta(x)}$$

Regla que reproduce una de las consecuencias lógicas básicas en L1. La constante "c" es una constante concreta cualquiera

El Sistema de la Deducción Natural (III)

- Las Reglas del Sistema de Deducción Natural, en adelante Deducción Natural o DN, que hemos visto son en realidad Estructuras Deductivas básicas correctas asumidas a priori en el Sistema.
- Cuando queremos demostrar si una nueva Estructura Deductiva es correcta, debemos aplicar dichas reglas con el objetivo de obtener en nuestra secuencia de fórmulas la que sea conclusión, utilizando las premisas y las fórmulas que se vayan obteniendo al aplicar las reglas como fórmulas admitidas en la secuencia de deducción.
- Además del planteamiento de Deducción Directa, que intenta alcanzar conclusiones utilizando el menor número de deducciones y de hipótesis posible, aplicando primero las Reglas de Inferencia que no requieran de supuestos, existen **tres estrategias de resolución de la deducción** planteada, en función de la forma del objetivo (o subobjetivo) que deseemos demostrar o deducir:
    - Si la fórmula **objetivo es de la forma ($\alpha \rightarrow \beta$)**, podemos utilizar la **estrategia del Teorema de la Deducción**. Consiste en introducir una subsecuencia de deducción con **α** como primera fórmula (llamada Supuesto) y deducir a partir de ella, y de las fórmulas previas a la subsecuencia, aplicando las Reglas de Inferencia, la fórmula β; es decir, obtener **$\vdash (\alpha \vdash \beta)$**. Con ello, se devolverá a la secuencia principal **$\vdash \alpha \rightarrow \beta$ en aplicación de la REGLA I$\rightarrow$**
    - Si la fórmula **objetivo es de la forma ($\neg\alpha$)**, podemos utilizar la **estrategia de Reducción al Absurdo**. Consiste en introducir una subsecuencia de deducción con **α** como primera fórmula (llamada Supuesto) y deducir a partir de ella, y de las fórmulas previas a la subsecuencia, aplicando las Reglas de Inferencia, la fórmula **($\beta \wedge \neg\beta$)**; es decir, obtener **$\vdash (\alpha \vdash \beta \wedge \neg\beta)$**. Con ello, se devolverá a la secuencia principal **$\vdash \neg\alpha$ en aplicación de la REGLA I$\neg$.** Similar estrategia **si el objetivo es (α), aplicando la REGLA E$\neg$**
    - Si la fórmula **objetivo es de la forma (δ)**, **y una de las premisas es de la forma ($\alpha \vee \beta$)**, podemos utilizar la **estrategia de Prueba por Casos.** Consiste en introducir dos subsecuencias de deducción, una de ellas con **α** como su primera fórmula (primer supuesto por Casos), y la segunda con β como su primera fórmula (segundo supuesto por Casos). Si en ambas subsecuencias se deduce la fórmula **δ**, se tendrá **$\vdash (\alpha \vdash \delta)$** y **$\vdash (\beta \vdash \delta)$**, respectivamente. Con ello, se devolverá a la secuencia principal **$\vdash \delta$ en aplicación de la REGLA E$\vee$**
- Cuando un objetivo tiene por forma **($\alpha \wedge \beta$),** habrá que deducir independientemente **$\vdash \alpha$ y $\vdash \beta$**
- Cuando un objetivo tiene por forma **($\alpha \vee \beta$),** habrá que deducir, **o bien $\vdash \alpha$ o bien $\vdash \beta$**

El Sistema de la Deducción Natural (y IV)

- Las Reglas del Sistema de Deducción Natural en L1 referidas a la cuantificación, tanto universal como existencial, deben aplicarse teniendo en cuenta las restricciones que se asumen para ello. En especial, las que se refieren a la Instanciación Existencial o Regla de Eliminación de la Cuantificación Existencial ($E_{\exists}$), y a la Generalización Universal o Regla de la Introducción de la Cuantificación Universal ($I_{\forall}$). En las **páginas 19-29 del documento 04-Deducción-B** que tienen en RECURSOS pueden aprender a tener en cuenta una serie de Buenas Prácticas relativas a estas dos Reglas.
- En concreto, es importante tener en cuenta que:
  - Al realizar la instanciación existencial se debe particularizar la variable a una constante sobre la que no se deben adicionar hipótesis, por lo tanto, será una constante diferente a las que puedan aparecer en premisas y supuestos no cerrados.
  - Caso de tener que llevar a cabo dos instanciaciones existenciales en una misma derivación, las constantes utilizadas en ellas deben ser necesariamente diferentes.
  - Sobre la constante particularizada en una instanciación existencial no se puede realizar una generalización universal en el proceso de derivación.
  - Sobre una fórmula particularizada con constantes, las generalizaciones universales deben realizarse sobre todas las ocurrencias.
  - Sin embargo, las generalizaciones existenciales pueden ser parciales, salvo en el caso de estar inmersos en un supuesto de instanciación existencial y tener que generalizar para encontrar la conclusión de dicho supuesto.
  - Al realizar la generalización universal debe advertirse que la constante de término sea genérica, es decir, que no haya sido significada en el proceso de derivación, por estar en fórmulas premisas o supuestos no cerrados.

El Sistema de la Deducción Natural (y IV)

- En cualquier caso, las cuatro Reglas de DN en L1 relativas a cuantificación permiten plantear un método de cálculo secuencial deductivo aplicable a deducciones con premisas cuantificadas de las que debe deducirse conclusiones cuantificadas, con las siguientes etapas:
    - Se aplican las Reglas de Instanciación Universal o Existencial a las premisas cuantificadas de forma que no aparezcan cuantificadores en las fórmulas deducidas.
    - Se aplican las Reglas que ya aplicábamos en L0, teniendo en cuenta que las fórmulas se configurarán como instancias-base, sobre términos constantes, hasta obtener la conclusión sin cuantificar.
    - Se obtiene la conclusión cuantificada aplicando las Reglas de Generalización Universal o Existencial, teniendo en cuenta las características de las constantes que aparecen en el paso anterior y de los procesos deductivos realizados en el mismo.
- Es muy importante tener en cuenta que cuando se utilizan las estrategias anteriormente citadas y se construyen subsecuencias de deducción, una vez que se ha devuelto a la secuencia principal el resultado de la misma, las fórmulas de dichas subsecuencias no pueden ser utilizadas a los efectos de la deducción principal: es como si fueran de una CAJA NEGRA. **¡¡¡ESTO NO HAY QUE OLVIDARLO!!!**

La Deducción Natural en L1 (I)

- Vamos ahora a demostrar algunas de las Estructuras Deductivas más relevantes, ya sea porque las hemos visto como Consecuencias Lógicas de nuestro SISTEMA SEMÁNTICO, ya porque compondrán las llamadas Reglas Derivadas de la DN en L1.
- **Como ya vimos en L0 debemos demostrarlo todo!!! Y vamos a tener en cuenta los pasos que sí podemos dar.**

$\{\forall x\,(P(x) \to Q(x))\} \vdash \forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$

1	**$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$**	**Premisa**
2	**$P(a) \to Q(a)$**	**REGLA E$\forall$ 1, {a/x}**
3	**$\forall x\, P(x)$**	**Supuesto por T.D.**
4	**$P(a)$**	**REGLA E$\forall$ 3, {a/x}**
5	**$P(a) \to Q(a)$**	**REGLA IT 2**
6	**$Q(a)$**	**REGLA E$\to$ 4,5**
7	**$\forall x\, Q(x)$**	**REGLA I$\forall$ 6, {a/x}**
8	**$\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$**	**REGLA I$\to$ 3-7**

OJO!!! No estamos significando la constante, ni en el paso 2 ni en el paso 4, por eso podemos generalizar en el paso 7 al tratarse de una constante genérica proveniente de una sustitución formal

La Deducción Natural en L1 (II)

- Vamos ahora a demostrar algunas de las Estructuras Deductivas más relevantes, ya sea porque las hemos visto como Consecuencias Lógicas de nuestro SISTEMA SEMÁNTICO, ya porque compondrán las llamadas Reglas Derivadas de la DN en L1.

$\vdash \forall x\, (P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow P(x)))$

1	P(a)	Supuesto por T.D.
2	Q(a)	Supuesto por T.D.
3	P(a)	REGLA IT 1
4	$Q(a) \rightarrow P(a)$	REGLA $I_{\rightarrow}$ 2-3
5	$P(a) \rightarrow (Q(a) \rightarrow P(a))$	REGLA $I_{\rightarrow}$ 1-4
6	$\forall x\, (P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow P(x)))$	REGLA $I_{\forall}$ 5, {a/x}

OJO!!! En el paso 5, la constante "a" es genérica, se han cerrado los supuestos. Además, podíamos haber obtenido lo mismo con supuestos P(b), Q(b), etc.

$\{\forall x\, \neg P(x)\} \vdash \neg \exists x\, P(x)$

1	$\forall x\, \neg P(x)$	Premisa
2	$\exists x\, P(x)$	Supuesto por R.A.
3	P(a)	Supuesto para $E_{\exists}$, {a/x}
4	$\forall x\, \neg P(x)$	REGLA IT 1
5	$\neg P(a)$	REGLA $E_{\forall}$ 4, {a/x}
6	$P(a) \wedge \neg P(a)$	REGLA $I_{\wedge}$ 3,5
7	$P(a) \wedge \neg P(a)$	REGLA $E_{\exists}$ 2,3-6
8	$\neg \exists x\, P(x)$	REGLA $I_{\neg}$ 2-7

La Deducción Natural en L1 (III)

- Vamos ahora a demostrar algunas de las Estructuras Deductivas más relevantes, ya sea porque las hemos visto como Consecuencias Lógicas de nuestro SISTEMA SEMÁNTICO, ya porque compondrán las llamadas Reglas Derivadas de la DN en L1.

$\vdash \exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$

1	$\exists x\, P(x)$	Supuesto por T.D.
2	$P(a)$	Supuesto para E∃, {a/x}
3	$P(a) \vee Q(a)$	REGLA I∨ 2
4	$P(a) \vee Q(a)$	REGLA E∃ 1,2-3
5	$\exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	REGLA I∃ 4, {a/x}
6	$\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	REGLA I→ 1-5

OJO!!! En el paso 4, la constante "a" es concreta, se ha cerrado el supuesto de Instanciación o Eliminación del Existencial, pero la Generalización para este cuantificador no es problemática

$\{\exists x\, \forall y\, P(x, y)\} \vdash \forall y\, \exists x\, P(x, y)$

1	$\exists x\, \forall y\, P(x, y)$	Premisa
2	$\forall y\, P(a, y)$	Supuesto para E∃, {a/x}
3	$P(a, b)$	REGLA E∀ 2, {b/y}
4	$\exists x\, P(x, b)$	REGLA I∃ 3, {a/x}
5	$\exists x\, P(x, b)$	REGLA E∃ 1,2-4
6	$\forall y\, \exists x\, P(x, y)$	REGLA I∀ 5, {b/y}

OJO!!! En el paso 5 hemos podido aplicar la REGLA de Eliminación del Existencial dado que en la fórmula que aparece en el mismo no está la variable "x" libre. La generalización universal sobre la variable "y" del paso 6 es posible, dado que la constante "b" es genérica

La Deducción Natural en L1 (IV)

- Vamos ahora a demostrar algunas de las Estructuras Deductivas más relevantes, ya sea porque las hemos visto como Consecuencias Lógicas de nuestro SISTEMA SEMÁNTICO, ya porque compondrán las llamadas Reglas Derivadas de la DN en L1.

$\{\exists x\, P(x)\} \vdash \neg\forall x\, \neg P(x)$

1	$\exists x\, P(x)$	Premisa
2	$P(a)$	Supuesto para $E_\exists$
3	$\forall x\, \neg P(x)$	Supuesto por R.A.
4	$\neg P(a)$	REGLA $E_\forall$ 3, {a/x}
5	$P(a)$	REGLA IT 2
6	$P(a) \wedge \neg P(a)$	REGLA $I_\wedge$ 4,5
7	$\neg\forall x\, \neg P(x)$	REGLA $I_\neg$ 3-6
8	$\neg\forall x\, \neg P(x)$	REGLA $E_\exists$ 1,2-7

OJO!!! En el paso 4, la constante "a" es concreta, la Instanciación Universal lo permite. En el paso 8 la variable "x" no está libre y la aparición del cuantificador universal no proviene de ninguna generalización sobre "x"

$\{\forall x\, \forall y\, (P(y) \to Q(x))\} \vdash \exists y\, P(y) \to \forall x\, Q(x)$

1	$\forall x\, \forall y\, (P(y) \to Q(x))$	Premisa
2	$\exists y\, P(y)$	Supuesto por T.D.
3	$P(b)$	Supuesto para $E_\exists$, {b/y}
4	$\forall y\, (P(y) \to Q(a))$	REGLA $E_\forall$ 1, {a/x}
5	$P(b) \to Q(a)$	REGLA $E_\forall$ 4, {b/y}
6	$Q(a)$	REGLA $E_\to$ 3,5
7	$\forall x\, Q(x)$	REGLA $I_\forall$ 6, {a/x}
8	$\forall x\, Q(x)$	REGLA $E_\exists$ 2,3-7
9	$\exists y\, P(y) \to \forall x\, Q(x)$	REGLA $I_\to$ 1,2-8

OJO!!! En el paso 7 hemos podido aplicar la REGLA de Introducción del Universal dado que la constante "a" es genérica

La Deducción Natural en L1 (V)

- Vamos ahora a demostrar algunas de las Estructuras Deductivas más relevantes, ya sea porque las hemos visto como Consecuencias Lógicas de nuestro SISTEMA SEMÁNTICO, ya porque compondrán las llamadas Reglas Derivadas de la DN en L1.

$\{\exists x\,(P(x) \vee Q(x))\} \vdash \exists x\,P(x) \vee \exists x\,Q(x)$

1	$\exists x\,(P(x) \vee Q(x))$	Premisa
2	$P(a) \vee Q(a)$	Supuesto para E∃
3	$P(a)$	1º Supuesto por Casos
4	$\exists x\,P(x)$	REGLA I∃ 3, {a/x}
5	$\exists x\,P(x) \vee \exists x\,Q(x)$	REGLA I∨ 4
6	$Q(a)$	2º Supuesto por Casos
7	$\exists x\,Q(x)$	REGLA I∃ 6, {a/x}
8	$\exists x\,P(x) \vee \exists x\,Q(x)$	REGLA I∨ 7
9	$\exists x\,P(x) \vee \exists x\,Q(x)$	REGLA E∨ 2,3-5,6-8
10	$\exists x\,P(x) \vee \exists x\,Q(x)$	REGLA E∃ 1,2-9

OJO!!! En los pasos 4 y 7, podemos generalizar el existencial sin ninguna restricción.
Es relevante comprobar que la deducción:
$\{\exists x\,P(x) \wedge \exists x\,Q(x)\} \vdash \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ NO ES CORRECTA

$\{\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x)), \forall x\,\neg Q(x)\} \vdash \forall x\,P(x) \rightarrow \forall x\,R(x)$

1	$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x))$	Premisa
2	$\forall x\,\neg Q(x)$	Premisa
3	$P(a) \rightarrow Q(a) \vee R(a)$	REGLA E∀ 1, {a/x}
4	$\neg Q(a)$	REGLA E∀ 2, {a/x}
5	$\forall x\,P(x)$	Supuesto por T.D.
6	$P(a)$	REGLA E∀ 5, {a/x}
7	$P(a) \rightarrow Q(a) \vee R(a)$	REGLA IT 3
8	$Q(a) \vee R(a)$	REGLA E→ 6,7
9	$\neg Q(a)$	REGLA IT 4
10	$R(a)$	REGLA S.D. 8,9
11	$\forall x\,R(x)$	REGLA I∀ 10, {a/x}
12	$\forall x\,P(x) \rightarrow \forall x\,R(x)$	REGLA I→ 5-11

OJO!!! En el paso 10 hemos podido aplicar la REGLA de Introducción del Universal dado que la constante "a" es genérica

La Deducción Natural en L1 (y VI)

- Vamos ahora a demostrar algunas de las Estructuras Deductivas más relevantes, ya sea porque las hemos visto como Consecuencias Lógicas de nuestro SISTEMA SEMÁNTICO, ya porque compondrán las llamadas Reglas Derivadas de la DN en L1.

$\{\forall x \forall y\, (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x))\} \vdash \neg \exists x\, P(x, x)$

1	$\forall x \forall y\, (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x))$	Premisa
2	$\exists x\, P(x, x)$	Supuesto por R.A.
3	$P(a, a)$	Supuesto para E∃
4	$\forall x \forall y\, (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x))$	REGLA IT 1
5	$\forall y\, (P(a, y) \rightarrow \neg P(y, a))$	REGLA E∀ 4, {a/x}
6	$(P(a, a) \rightarrow \neg P(a, a))$	REGLA E∀ 5, {a/y}
7	$\neg P(a, a)$	REGLA E→ 3,6
8	$P(a, a) \wedge \neg P(a, a)$	REGLA I∧ 3,7
9	$P(a, a) \wedge \neg P(a, a)$	REGLA E∃ 2,3-8
10	$\neg \exists x\, P(x, x)$	REGLA I¬ 2-9, {a/x}

OJO!!! En los pasos 5 y 6, podemos instanciar la cuantificación universal sin ninguna restricción. Por lo que particularizamos las variable "x" e "y" por la misma constante, en coherencia con la instanciación existencial

$\{\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)\} \vdash \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$

1	$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$	Premisa
2	$\forall x\, Q(x)$	REGLA E∧ 1
3	$\forall x\, P(x)$	REGLA E∧ 1
4	$Q(a)$	REGLA E∀ 2, {a/x}
5	$P(a)$	REGLA E∀ 3, {a/x}
6	$P(a) \wedge Q(a)$	REGLA I∧ 5,6
7	$\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$	REGLA I∀ 6, {a/x}

OJO!!! En el paso 7 hemos podido aplicar la REGLA de Introducción del Universal dado que la constante "a" es genérica, dado que proviene a su vez de una instanciación universal, no de premisas ni de supuestos. Resuelvan la deducción inversa: $\{\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))\} \vdash \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$

Solidez y Completitud

- Consecuencia Lógica y Estructura Deductiva son dos conceptos lógicos bien diferentes; si bien, en ambos casos se relaciona una conclusión con sus premisas.
- En el caso de la Consecuencia Lógica, **dicha relación es Semántica**, de manera que si **{α1, α2, α3, …, αn}** ⊨ β esto quiere decir que si **v(α1 ∧ α2 ∧ α3 ∧ …. ∧ αn) = V**, entonces **v(β) = V**
- En el caso de la Estructura Deductiva, **dicha relación es Sintáctica**, de manera que si **{α1, α2, α3, …, αn}** ⊢ β esto quiere decir que β o es un teorema o se deriva en una secuencia de fórmulas obtenidas todas ellas de la aplicación de Reglas de Inferencia sobre las ***αi***, tomadas éstas como premisas, o sobre las fórmulas previamente obtenidas en la secuencia deductiva.
- No obstante, los dos conceptos están ligados para un determinado Sistema Deductivo:
- Se dice que un **Sistema Deductivo es SÓLIDO o CORRECTO** cuando es cierto que:
  - Si se demuestra que **{α1, α2, α3, …, αn}** ⊢ β, se puede comprobar que **{α1, α2, α3, …, αn}** ⊨ β
  - Y por tanto, si se demuestra que ⊢ β (**β es un teorema**), se puede comprobar que ⊨ β (**β es una tautología**)
  - Esta es una propiedad esencial en cualquier Sistema Deductivo útil, dado que lo que nos dice esta propiedad es que todo aquello que ha sido demostrado (deducido o derivado) utilizando el Sistema Deductivo (enfoque sintáctico) es también semánticamente comprobado. Esto, además, nos permite trabajar sintácticamente (reglas de inferencia) con rigor sin necesidad de utilizar los potencialmente ineficientes métodos semánticos (técnicas SAT). **LA DEDUCCIÓN NATURAL ES UN SISTEMA SÓLIDO!!!!!**
- Por otra parte, Se dice que un **Sistema Deductivo es COMPLETO** cuando se cumple que:
  - Si se comprueba que **{α1, α2, α3, …, αn}** ⊨ β, se puede demostrar que **{α1, α2, α3, …, αn}** ⊢ β
  - Y por tanto, si se comprueba que ⊨ β (**β es una tautología),** se puede demostrar que ⊢ β (**β es un teorema)**
  - En principio, semánticamente es siempre posible comprobar si una consecuencia lógica es válida, dado que siempre es posible comprobar por técnicas SAT si una oración es tautológica. Pero, ¿es posible demostrar sintácticamente en cualquier sistema deductivo la corrección de un teorema?. Pues no. Si el Sistema Deductivo es COMPLETO, así es, pero si no cumple esta propiedad, la respuesta es negativa. Esta es una propiedad, la COMPLETITUD, que no cumplen todos los Sistemas Deductivos. **LA DEDUCCIÓN NATURAL ES UN SISTEMA COMPLETO!!!!!**

Consistencia y Decidibilidad

- Teniendo en cuenta el concepto de DEMOSTRACIÓN (y en su caso, DEDUCCIÓN), podemos derivar el concepto de Teoría Deductiva al aplicar $\vdash$ reiteradamente sobre los Teoremas (en su caso, Estructuras Deductivas) que se van obteniendo en un Sistema Deductivo. Ya hemos visto que si el Teorema de la Deducción Sintáctica se cumple en el Sistema Deductivo determinado, una Estructura Deductiva representa un Teorema a través una fórmula que se escribe mediante implicaciones anidadas entre premisas y conclusión.
- En cualquier caso, podemos definir lo siguiente:
- Un conjunto T de fórmulas es una **TEORÍA** si y solo si dicho **conjunto es cerrado** bajo Demostraciones, es decir, si y solo si para todas las fórmulas **β: si $\{\mathrm{T}\} \vdash \beta$ entonces $\beta \in \mathrm{T}$ (β pertenece al conjunto T).** Los elementos de T se llaman **teoremas por Demostración**.
- Una **TEORÍA** se dice que **es AXIOMATIZABLE**, si definimos **$\mathrm{T}(Ƒ) = \{\beta \mid \{Ƒ\} \vdash \beta\}$** y, por tanto, podemos decir que **$\mathrm{T}(Ƒ)$ es una teoría del conjunto de fórmulas $\{Ƒ\}$.** Los elementos de este conjunto de fórmulas **$\{Ƒ\}$** se llaman **AXIOMAS** de la teoría.
- Una **TEORÍA** es contradictoria o inconsistente si en dicha teoría es posible demostrar una contradicción: podemos concluir una fórmula y la negación de la misma aplicando el Sistema Deductivo que implemente la Teoría. **Una Teoría se dice que es Consistente si NO es Inconsistente**, y por lo tanto, **T ES CONSISTENTE** si y solo si, sólo puede demostrarse una fórmula β o su negación $\neg\beta$, pero no ambas a la vez: **$\{\mathrm{T}\} \vdash \beta$ o $\{\mathrm{T}\} \vdash \neg\beta$**.
- Por otra parte, dada una Teoría T y el Sistema Deductivo que implementa **(Ƭ, $\vdash$),** se dice que:
  - **$\{\mathrm{T}$, T, $\vdash\}$ es DECIBIBLE** si y solo si existen procedimientos para determinar la inconsistencia y la consistencia.
  - **$\{\mathrm{T}$, T, $\vdash\}$ es SEMIDECIBIBLE** si y solo si existen procedimientos para determinar la inconsistencia y sólo a veces es posible determinar la consistencia.
  - **$\{\mathrm{T}$, T, $\vdash\}$ es INDECIBIBLE** si y solo si no es posible determinar la inconsistencia, ni la consistencia.
- **LA LÓGICA DE PREDICADOS ES UNA TEORÍA SEMIDECIBIBLE**