Leandro Marín	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	Clase: 30 min.

Vídeo : `https://youtu.be/KZ4Tb_ixooQ`

1. Resumen

Empecemos recordando lo que es la representación implícita y paramétrica de un espacio vectorial:

Definición 1. *Sea $V \leq K^m$ un espacio vectorial, $B \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$ y $H \in \mathbf{M}_{p\times m}(K)$. Diremos que V viene dado en forma paramétrica cuando el conjunto de vectores de V está definido como*

$$V = C(B) = \{y | y = Bx \text{ para algún vector de parámetros } x\}$$

Diremos que está en forma implícita cuando

$$V = N(H) = \{y | Hy = 0\}$$

Lo que vamos a estudiar en este tema es cómo pasar de una representación a otra. Empecemos viendo cuando $C(B)$ está contenido en $N(H)$.

Proposición 2. *Sean $B \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$ y $H \in \mathbf{M}_{p\times m}(K)$. Entonces $C(B) \leq N(H)$ si y solo si $HB = 0$.*

Demostración. Supongamos que $C(B) \leq N(H)$, entonces para todo $x \in K^n$ se tiene que $Bx \in C(B) \leq N(H)$ por lo que $H(Bx) = 0$. Como esto es cierto para todos los vectores $x \in K^n$, lo podemos aplicar para las columnas de la matriz identidad y decir que $HB = HBI = 0$.
Recíprocamente, supongamos que $HB = 0$ y que tenemos un vector $y \in C(B)$. Por definición de $C(B)$ tenemos que $y = Bx$ para algún vector de parámetros x, pero entonces $Hy = HBx = 0 \cdot x = 0$ y eso prueba que $y \in N(H)$. $\square$

En el caso particular de que un mismo espacio vectorial V venga representado de las dos formas, $V = C(B)$ y $V = N(H)$, esta proposición nos dice que $HB = 0$, pero esta condición no es suficiente para garantizar la igualdad.
Vamos a ver el problema con un ejemplo: supongamos que V es el espacio $C(B)$ siendo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,3}(\mathbb{Z}_5).$$

Un vector $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$ estará en V si y solo si podemos encontrar un vector de parámetros $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ tal que $Bx = y$. Escrito en forma de ecuaciones, eso significa que el siguiente sistema de ecuaciones tiene que ser compatible:

$$\begin{aligned} 3x_2 + 3x_3 &= y_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= y_2 \\ x_1 + 4x_2 &= y_3 \\ 2x_1 + 3x_2 &= y_4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= y_5 \end{aligned}$$

Vamos a resolver el sistema tomando la matriz ampliada y poniendo los valores y_i como variables. Eso nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & y_1 \\ 2 & 4 & 1 & y_2 \\ 1 & 4 & 0 & y_3 \\ 2 & 3 & 0 & y_4 \\ 3 & 3 & 1 & y_5 \end{array}\right]$$

Para reducirla, vamos a alinear cada una de las variables y_i en una columna diferente

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 3 & 3 & 1y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & 0y_5 \\ 2 & 4 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +0y_3 & +0y_4 & 0y_5 \\ 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & 0y_5 \\ 2 & 3 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +1y_4 & 0y_5 \\ 3 & 3 & 1 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & 1y_5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_5 \\ 2 & 4 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +0y_5 \\ 0 & 3 & 3 & 1y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +0y_5 \\ 2 & 3 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +1y_4 & +0y_5 \\ 3 & 3 & 1 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +1y_5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +3y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 3 & 3 & 1y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 2 & 3 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +1y_4 & +0y_4 \\ 3 & 3 & 1 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +1y_5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +3y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 3 & 3 & 1y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +3y_3 & +1y_4 & +0y_4 \\ 3 & 3 & 1 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +1y_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +3y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 3 & 3 & 1y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +3y_3 & +1y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +0y_2 & +2y_3 & +0y_4 & +1y_4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +3y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1y_1 & +2y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +3y_3 & +1y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +0y_2 & +2y_3 & +0y_4 & +1y_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +3y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1y_1 & +2y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +3y_3 & +1y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +4y_2 & +4y_3 & +0y_4 & +1y_4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +3y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1y_1 & +2y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +4y_2 & +4y_3 & +0y_4 & +1y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +3y_3 & +1y_4 & +0y_4 \end{array}\right]$$

El sistema será compatible si y solo si la columna de los términos independientes no es pivote y eso sucederá si y solo si

$$\begin{array}{cccccc} 1y_1 & +2y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 & = 0 \\ 0y_1 & +4y_2 & +4y_3 & +0y_4 & +1y_4 & = 0 \\ 0y_1 & +0y_2 & +3y_3 & +1y_4 & +0y_4 & = 0 \end{array}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hemos encontrado la matriz H que nos da la condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga solución y por lo tanto y esté en $C(B)$. La razón por la que hemos puesto la columna de estos términos independientes de esta forma es para que nos demos cuenta de que cada y_i va por separado y no interfiere con el comportamiento de las otras variables, por lo que esta reducción es totalmente equivalente a la siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

y la matriz H es la que nos queda a la derecha de los ceros una vez que tenemos identificadas todas las filas pivote de la matriz reducida. Vamos a poner el resultado en forma de teorema:

Teorema 3. *Sea B una matriz y V el espacio generado por las columnas de B, $C(B)$. Para calcular la representación implícita del espacio V tomaremos la matriz $[B|I]$ y la reduciremos por filas (o la triangularizaremos) para obtener una matriz de la forma $\left[\begin{array}{c|c} R_0 & A \\ \hline 0 & H \end{array}\right]$ donde en la matriz R_0 todas las filas tienen elemento pivote. Entonces V en forma implícita es $V = N(H)$ para la matriz H que aparece a la derecha de los ceros en esta reducción.*

Como podemos ver, cuando tenemos matrices $B \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$ y $H \in \mathbf{M}_{p\times m}(K)$ tales que $HB = 0$ tenemos una relación del tipo $C(B) \leq N(H)$, pero para que la igualdad se de, de alguna forma tienen que tomarse de forma óptima, por ejemplo, el sistema $Hy = 0$ está formado por tres ecuaciones:

$$N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]\right) = \left\{ \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array}\right] \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{cccccccc} 1y_1 & +2y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 & = & 0 \\ 0y_1 & +4y_2 & +4y_3 & +0y_4 & +1y_4 & = & 0 \\ 0y_1 & +0y_2 & +3y_3 & +1y_4 & +0y_4 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Cada una de estas ecuaciones supone una restricción al total de vectores que podemos tomar. Si eliminamos una de las ecuaciones, quitamos restricciones para tomar los vectores y por lo tanto tendremos (en general) más vectores

$$N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]\right) \leq N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]\right) \leq N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\right).$$

Lo mismo sucede en el caso de los espacios generados por un conjunto, cuantos más elementos generadores tengamos, más vectores podremos generar (en general), así

$$C\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right) \geq C\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\right) \geq C\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

De alguna forma, al calcular H en función de B como nos indica el Teorema 3, estamos encontrando el H "más grande"que cumple esta condición de tener $HB = 0$ y por eso tenemos la igualdad $C(B) = N(H)$ y no solo la desigualdad. Este algoritmo nos permite pues, pasar de forma paramétrica a implícita.
Si tomamos traspuestas, $HB = 0$ es equivalente a $B^T H^T = 0$, por eso el problema de calcular la matriz B a partir de una matriz H se puede hacer repitiendo exactamente el mismo proceso, pero con las matrices traspuestas.

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

Ejercicio 4. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-4(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(2)}}\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(2)}}\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \\ -10y_1 - 3y_2 + y_4 = 0 \\ -7y_1 - 2y_2 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 5. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \left[\begin{array}{rrr} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{5}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{4}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{1}{2}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{5}{2}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{21}{2}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+\frac{1}{2}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} -16 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} -16y_1 + \frac{5}{2}y_2 + y_4 - \frac{21}{2}y_5 = 0 \\ 2y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} -32y_1 + 5y_2 + 2y_4 - 21y_5 = 0 \\ 4y_1 - y_2 + 2y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◊

Ejercicio 6. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -5 \\ -4 & -7 \\ -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} -y_1 + y_3 - 3y_4 = 0 \\ y_1 + y_2 - 3y_4 = 0 \\ -4y_1 + 3y_4 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 7. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{5}{3}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{4}{3}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+9(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{5}{4}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{5}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+\frac{21}{4}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{5}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{57}{4} & \frac{21}{4} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{5}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{57}{4} & \frac{21}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} \frac{3}{4}y_1 + \frac{9}{4}y_2 + \frac{5}{4}y_3 + y_4 = 0 \\ -\frac{1}{4}y_1 + \frac{57}{4}y_2 + \frac{21}{4}y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} 3y_1 + 9y_2 + 5y_3 + 4y_4 = 0 \\ -y_1 + 57y_2 + 21y_3 + 4y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 8. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \\ -2 & -6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \left[\begin{array}{rrrr} -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{r} -2y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \\ -y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 9. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \\ -3 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & -9 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-5(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -14 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 31 & 7 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \left[\begin{array}{ccccc} -8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 31 & 7 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} -8y_1 - 3y_2 + y_4 = 0 \\ 31y_1 + 7y_2 + 3y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 10. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \left[\begin{array}{cc} -5 & -2 \\ 4 & -7 \\ -2 & 0 \\ -2 & 6 \\ -5 & 7 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{4}{5}(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{2}{5}(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{5}(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{4}{43}(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{43} & \frac{4}{43} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{34}{43}(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{43} & \frac{4}{43} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{43} & \frac{34}{43} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+\frac{45}{43}(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{43} & \frac{4}{43} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{43} & \frac{34}{43} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{43} & \frac{45}{43} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} -\frac{14}{43} & \frac{4}{43} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{10}{43} & \frac{34}{43} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{7}{43} & \frac{45}{43} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -\frac{14}{43}y_1 + \frac{4}{43}y_2 + y_3 = 0 \\ \frac{10}{43}y_1 + \frac{34}{43}y_2 + y_4 = 0 \\ -\frac{7}{43}y_1 + \frac{45}{43}y_2 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -14y_1 + 4y_2 + 43y_3 = 0 \\ 10y_1 + 34y_2 + 43y_4 = 0 \\ -7y_1 + 45y_2 + 43y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 11. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \\ 1 & -7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 17 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 17 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -14 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 17 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -14 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+17(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & -14 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-14(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -14 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+9(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 17 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 17 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 + 3y_4 - 14y_5 = 0 \\ y_2 - 2y_4 + 9y_5 = 0 \\ y_3 - 3y_4 + 17y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 12. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 4 \\ 3 & 4 \\ -2 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} -5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+5(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{8}{15}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{4}{15}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{15} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{4}{15}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{15} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{15} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{15} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{15} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} \frac{8}{15}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + y_3 = 0 \\ -\frac{4}{15}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + y_4 = 0 \\ -\frac{4}{15}y_1 - \frac{4}{3}y_2 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} 8y_1 - 5y_2 + 15y_3 = 0 \\ -4y_1 + 10y_2 + 15y_4 = 0 \\ -4y_1 - 20y_2 + 15y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 13. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ -3y_1 + 4y_2 + y_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 14. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 8 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-5(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-9(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 - 9y_2 + y_4 = 0 \\ 2y_1 - 5y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_2 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 15. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -2 & -9 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -1 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+6(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-7(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

.

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} 5y_1 + y_3 + 6y_5 = 0 \\ 3y_1 + y_4 + 3y_5 = 0 \\ -5y_1 + y_2 - 7y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 16. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -5 & -4 & 4 \\ 5 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{5}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{5}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{19}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{19}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{3} & -\frac{10}{3} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{29}{3}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{23}{3} & -\frac{29}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{1}{3}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{23}{3} & -\frac{29}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & -\frac{23}{3} & -\frac{29}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} -\frac{10}{3}y_1 - \frac{23}{3}y_2 - \frac{29}{3}y_3 + y_4 = 0 \\ -\frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} -10y_1 - 23y_2 - 29y_3 + 3y_4 = 0 \\ -2y_1 - y_2 - y_3 + 3y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 17. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -4 \\ -2 & -8 & -9 \\ 2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} 4y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ -2y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ -4y_1 + 2y_2 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 18. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 1 \\ -1 & 5 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} 5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-20(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+9(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-4(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & -20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 - 20y_2 + 5y_3 = 0 \\ 9y_2 - 2y_3 + y_4 = 0 \\ -4y_2 + y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 19. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 9 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 2 & -5 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+5(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -y_1 + y_4 = 0 \\ 4y_1 - 9y_2 + y_3 = 0 \\ 5y_1 - 10y_2 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 20. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -7 \\ 3 & 8 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{c} -5y_1 + 4y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 21. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -4 & -3 \\ 4 & 7 \\ 0 & -5 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{17}{21}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{21} & \frac{17}{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{5}{21}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{21} & \frac{17}{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{21} & \frac{5}{21} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{20}{21}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{21} & \frac{17}{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{21} & \frac{5}{21} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{21} & -\frac{20}{21} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \left[\begin{array}{rrrrr} -\frac{16}{21} & \frac{17}{21} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{20}{21} & \frac{5}{21} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{21} & -\frac{20}{21} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} -\frac{16}{21}y_1 + \frac{17}{21}y_2 + y_3 = 0 \\ \frac{20}{21}y_1 + \frac{5}{21}y_2 + y_4 = 0 \\ \frac{4}{21}y_1 - \frac{20}{21}y_2 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} -16y_1 + 17y_2 + 21y_3 = 0 \\ 20y_1 + 5y_2 + 21y_4 = 0 \\ 4y_1 - 20y_2 + 21y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 22. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 8 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ -10 & 8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} 4y_1 - 3y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ -10y_1 + 8y_2 - 4y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 23. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -7 & -8 & 9 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -8 \\ -4 & -5 & 4 \\ -5 & -8 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times3}(\mathbb{R}).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{2}{7}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{4}{7}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{5}{7}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{7} & -\frac{24}{7} & -\frac{5}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{21}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{21}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{7} & -\frac{24}{7} & -\frac{5}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{3}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{21}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{7} & -\frac{24}{7} & -\frac{5}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{16}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{21}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{16}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{7}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{21}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} & 0 & -\frac{1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{16}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{8}{7}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{21}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} & 0 & -\frac{1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{7} & -8 & \frac{8}{7} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} & 0 & -\frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{11}{7} & -8 & \frac{8}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -\frac{4}{7}y_1 - \frac{1}{7}y_3 + y_4 = 0 \\ \frac{11}{7}y_1 - 8y_2 + \frac{8}{7}y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -4y_1 - y_3 + 7y_4 = 0 \\ 11y_1 - 56y_2 + 8y_3 + 7y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 24. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} 3y_1 + y_3 = 0 \\ -y_1 + y_2 - y_4 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 25. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 26. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}1&2&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&3&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3,5)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}1&2&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&3&0&1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(4,5)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}1&2&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&1\\0&0&3&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\3&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$ y son $Hy=0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}\in\mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c}y_1+y_2+y_5=0\\3y_1+y_3=0\\y_4=0\end{array}\right\}.$$

◊

Ejercicio 27. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix}0&1\\0&1\\3&4\\4&1\\4&2\end{bmatrix}\in\mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc}0&1&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\3&4&0&0&1&0&0\\4&1&0&0&0&1&0\\4&2&0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(1,3)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}3&4&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0\\4&1&0&0&0&1&0\\4&2&0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}3&4&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0\\0&4&0&0&2&1&0\\4&2&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}3&4&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0\\0&4&0&0&2&1&0\\0&0&0&0&2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}3&4&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&1&4&0&0&0\\0&4&0&0&2&1&0\\0&0&0&0&2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}3&4&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&1&4&0&0&0\\0&0&0&1&2&1&0\\0&0&0&0&2&0&1\end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix}1&4&0&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&2&0&1\end{bmatrix}$ y son $Hy=0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}\in\mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c}y_1-y_2=0\\y_2+2y_3+y_4=0\\2y_3+y_5=0\end{array}\right\}.$$

◊

Ejercicio 28. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&4&1&0&0&0&0&0 \\ 1&3&4&0&1&0&0&0&0 \\ 2&0&4&0&0&1&0&0&0 \\ 4&3&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&2&0&0&0&0&1&0 \\ 2&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&4&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&4&1&0&0&0&0 \\ 2&0&4&0&0&1&0&0&0 \\ 4&3&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&2&0&0&0&0&1&0 \\ 2&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&4&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&4&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&3&0&1&0&0&0 \\ 4&3&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&2&0&0&0&0&1&0 \\ 2&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&4&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&4&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&3&0&1&0&0&0 \\ 0&0&4&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&2&0&0&0&0&1&0 \\ 2&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&4&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&4&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&3&0&1&0&0&0 \\ 0&0&4&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&2&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&2&3&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&4&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&4&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&4&4&1&0&0&0 \\ 0&0&4&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&2&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&2&3&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&4&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&4&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&4&4&1&0&0&0 \\ 0&0&4&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&2&1&4&0&0&1&0 \\ 0&1&2&3&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&4&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&4&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&4&4&1&0&0&0 \\ 0&0&4&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&2&1&4&0&0&1&0 \\ 0&0&2&4&4&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&4&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&4&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&4&4&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&4&1&1&0&0 \\ 0&0&2&1&4&0&0&1&0 \\ 0&0&2&4&4&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&4&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&4&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&4&4&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&4&1&1&0&0 \\ 0&0&0&3&1&3&0&1&0 \\ 0&0&2&4&4&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&4&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&4&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&4&4&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&4&1&1&0&0 \\ 0&0&0&3&1&3&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&3&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,6)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&4&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&4&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&4&4&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&3&0&0&1 \\ 0&0&0&3&1&3&0&1&0 \\ 0&0&0&0&4&1&1&0&0 \end{array}\right]$$

.

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^6 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 + y_2 + 3y_3 + y_6 = 0 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 + y_5 = 0 \\ -y_2 + y_3 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 29. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \\ 0 & 4 \\ 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} 3y_1 + 3y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ 3y_2 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 30. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \\ 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 + 3y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_2 + y_4 = 0 \\ 3y_2 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 31. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -y_1 + y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◊

Ejercicio 32. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

.

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} 2y_1 + 2y_2 + y_5 = 0 \\ 3y_2 + y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 33. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} -y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_1 - y_2 + y_4 = 0 \\ -y_1 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 34. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{r} 3y_1 + y_2 + 2y_3 = 0 \\ -y_1 - y_3 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 35. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} 2y_1 + 3y_2 + y_3 = 0 \\ -y_1 + y_5 = 0 \\ y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

◊

Ejercicio 36. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} 2y_1 - y_2 + y_5 = 0 \\ 2y_2 + y_3 - y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 37. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 - y_2 + y_4 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 38. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 + 3y_2 + y_4 = 0 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 39. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 + 3y_2 + y_5 = 0 \\ -y_1 + y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

◊

Ejercicio 40. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} 3y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_2 + y_5 = 0 \\ y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 41. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

.

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 = 0 \\ -y_2 + y_3 + 3y_5 = 0 \\ y_4 + 3y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◊

Ejercicio 42. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 + y_2 + 2y_5 = 0 \\ 2y_2 + y_4 + 3y_5 = 0 \\ -y_2 + y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◊

Ejercicio 43. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 - y_2 = 0 \\ 2y_2 + 2y_3 + y_4 = 0 \\ y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◊

Ejercicio 44. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 = 0 \\ y_2 - y_3 + y_5 = 0 \\ y_4 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◊

Ejercicio 45. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 46. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(1)}}\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&2&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&2&0&0&0&0&1&0&1 \end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}}\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&2&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&2&0&0&0&0&1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}}\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&2&0&1&0&0\\ 0&2&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&2&0&0&0&0&1&0&1 \end{array}\right]\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}}\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&2&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&2&0&0&0&0&1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(2)}}\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&2&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1 \end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3,4)}}\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&2&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&2&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}}\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&2&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&2&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1 \end{array}\right]\xrightarrow{E_{(5,6)}}\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&2&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&2&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&2&1&1&0&0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1&2&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&2&1&1&0&0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5\\ y_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^6 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 - y_2 + y_4 = 0\\ y_2 + y_5 = 0\\ y_2 + y_4 + y_6 = 0\\ -y_2 + y_3 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 47. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1&2&2\\ 1&1&1\\ 0&2&2\\ 1&1&1\\ 1&2&2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ -y_1 + y_5 = 0 \\ -y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

◊

Ejercicio 48. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^4 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 49. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^6 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_5 = 0 \\ y_2 + y_4 = 0 \\ y_2 + y_6 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 50. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -y_1 + y_2 + y_5 = 0 \\ -y_2 - y_3 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 51. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -y_1 - y_2 + y_5 = 0 \\ y_2 - y_3 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

◊

Ejercicio 52. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^4 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

◊

Ejercicio 53. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe V en forma implícita.

Solución: Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[B|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&1&0&1&0&0&0&0\\ 1&2&2&0&1&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&1&0&0\\ 1&2&2&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&2&1&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&1&0&0\\ 1&2&2&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&2&1&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&2&2&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&2&1&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&2&2&0&0&1&0\\ 0&0&0&2&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&2&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&1&0&0\\ 0&1&2&2&0&0&1&0\\ 0&0&0&2&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&2&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&2&0&1&0\\ 0&0&0&2&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&2&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&1&0&0\\ 0&0&0&2&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&2&0&1&0 \end{array}\right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio V vienen dadas por la submatriz $H = \begin{bmatrix} 2&1&1&0&0\\ 2&0&0&0&1\\ 0&2&0&1&0 \end{bmatrix}$ y son $Hy = 0$, es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -y_1 + y_2 + y_3 = 0\\ -y_1 + y_5 = 0\\ -y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 54. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \textit{ tal que } \begin{array}{r} y_1 - 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 0\\ y_2 - 4y_3 + y_4 - 4y_5 = 0\\ -y_1 + y_2 + 6y_3 - 4y_4 + 8y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1&-3&2&2&0\\ 0&1&-4&1&-4\\ -1&1&6&-4&8 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 10 & -5 & 12 \\ 4 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 55. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \textit{ tal que } \begin{array}{c} -3y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 4y_4 + 2y_5 = 0 \\ 7y_1 - 5y_2 - 7y_3 + 7y_4 - 8y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 7 & -5 & -7 & 7 & -8 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{4}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-7(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-10(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & -6 & -6 \\ 0 & -7 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 56. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \ \textit{tal que} \ \begin{array}{r} -y_2 - 2y_3 - 2y_4 - y_5 = 0 \\ y_1 + 5y_2 + 6y_3 + 6y_4 + 5y_5 = 0 \\ 2y_1 + 8y_2 + 8y_3 + 8y_4 + 8y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 6 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 57. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \textit{tal que} \quad \begin{array}{c} y_2 - y_3 = 0 \\ y_1 + 6y_2 - 4y_3 - 3y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -4 & -3 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 58. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \textit{ tal que } \begin{array}{c} y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 4y_4 = 0 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-5(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -1 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 59. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{c} 2y_1 + 4y_2 - 3y_3 - y_4 = 0 \\ 8y_1 + 9y_2 - 6y_3 - 6y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & -1 \\ 8 & 9 & -6 & -6 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{4}{5}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{4}{15}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{15} & 0 & \frac{14}{15} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{15} & 0 & \frac{14}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{15} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 \\ \frac{14}{15} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 60. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \textit{ tal que } \begin{array}{c} y_1 - y_3 - 3y_4 = 0 \\ 4y_1 + y_2 - 3y_3 - 9y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -3 & -9 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 61. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \textit{ tal que } \begin{array}{c} y_1 - 4y_2 + y_5 = 0 \\ 2y_1 - 7y_2 - 3y_3 + 7y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-5(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 12 & -21 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 62. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 - y_2 + y_3 - y_5 = 0 \\ -3y_1 + 4y_2 - 4y_3 + 7y_5 = 0 \\ y_1 - 8y_2 + 9y_3 + 3y_4 - 8y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -4 & 0 & 7 \\ 1 & -8 & 9 & 3 & -8 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-21(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -25 & -21 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -25 & -21 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -25 & -3 \\ -21 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 63. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 - 2y_2 - 2y_3 - y_4 = 0 \\ 3y_1 - 5y_2 - 4y_3 - 6y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -4 & -6 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 64. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \textit{ tal que } \begin{array}{r} y_1 - 2y_2 - y_3 - y_5 = 0 \\ 5y_1 - 9y_2 - 5y_3 - 3y_4 - y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & -9 & -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-4(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\left[\begin{array}{rrr} 1 & 6 & -7 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\right).$$

◊

Ejercicio 65. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \textit{tal que} \ \begin{array}{c} -2y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 3y_4 = 0 \\ -5y_1 + 9y_2 + 8y_3 + 9y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\left[\begin{array}{rrrr} -2 & 2 & 3 & 3 \\ -5 & 9 & 8 & 9 \end{array}\right]}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{3}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{3}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{1}{8}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{8} & -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{3}{8}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{8} & -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\left[\begin{array}{cc} \frac{11}{8} & \frac{9}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 66. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^5 \ \textit{tal que} \ \begin{array}{r} y_1 + y_2 + 3y_5 = 0 \\ -y_1 - 2y_2 - y_3 - 6y_5 = 0 \\ 4y_2 + 3y_3 - 3y_4 + 9y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right]}_{H} \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 0 \\ -3 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 67. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ 6y_2 + 5y_3 + 7y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{5}{6}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{7}{6}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{7}{6} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{7}{6} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 68. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \textit{ tal que } \begin{array}{r} 2y_2 - y_3 + y_4 - 2y_5 = 0 \\ -y_1 + 5y_2 - 3y_3 - y_4 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-4(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+7(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 7 \\ -2 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 69. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \textit{ tal que } \begin{array}{r} y_1 - y_2 + y_3 + 3y_4 = 0 \\ -4y_1 + 5y_2 + y_3 - 7y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-5(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-5(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} -6 & -8 \\ -5 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 70. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \textit{ tal que } \begin{array}{r} y_1 - 3y_3 + 3y_4 - 3y_5 = 0 \\ -5y_1 + y_2 + 8y_3 - 8y_4 + 9y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 8 & -8 & 9 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+7(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-7(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+6(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 7 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 71. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 - 4y_2 - 4y_3 - 5y_4 = 0 \\ -2y_1 + 9y_2 + 6y_3 + 9y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 & -5 \\ -2 & 9 & 6 & 9 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+5(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 72. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{r} -4y_2 + y_3 - 3y_4 = 0 \\ -2y_1 + 5y_2 + y_3 + 2y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{2}{9}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{5}{9}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{9} & \frac{7}{9} & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\diamond$

Ejercicio 73. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 = 0 \\ 5y_1 + y_2 + 6y_3 + 5y_4 + 9y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & 9 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+5(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 74. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \textit{ tal que } \begin{array}{r} 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 = 0 \\ 2y_1 - y_3 + 3y_4 + 2y_5 = 0 \\ -y_1 - y_2 - y_4 + 3y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 75. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \textit{ tal que } \begin{array}{c} -y_1 + 3y_3 - y_5 = 0 \\ y_2 + 3y_3 - y_4 + 3y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 76. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} 2y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_5 = 0 \\ -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + 2y_5 = 0 \\ y_3 + y_4 - y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{array}\right]\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 77. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array}\right] \in \mathbb{Z}_5^5 \ \textit{tal que} \ \begin{array}{c} -y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 - y_5 = 0 \\ 3y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 0 \\ -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 78. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \textit{ tal que } \begin{array}{r} 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 - y_4 + y_5 = 0 \\ 3y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + y_5 = 0 \\ -y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 2y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 79. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \textit{ tal que } \begin{array}{r} y_1 + 3y_2 - y_4 - y_5 = 0 \\ 3y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 0 \\ 3y_2 - y_3 - y_4 - y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 80. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \ \textit{tal que} \quad \begin{array}{r} y_1 + y_2 - y_3 + 2y_5 = 0 \\ y_2 + 3y_3 + 2y_5 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 - y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 81. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \textit{ tal que } \begin{array}{c} 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 + 2y_5 = 0 \\ y_1 - y_2 = 0 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 + 3y_4 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 82. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \ \textit{tal que} \ \begin{array}{c} y_1 - y_2 + y_4 + 3y_5 = 0 \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 + 3y_4 - y_5 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 83. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{c} 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 0 \\ 2y_2 + 2y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 84. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^6 \text{ tal que } \begin{array}{r} 2y_1 + y_4 + 2y_5 + y_6 = 0 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_4 + 3y_6 = 0 \\ 3y_2 + 2y_4 + y_5 + 2y_6 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 85. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 - y_2 + 2y_3 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 3y_5 = 0 \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 + 3y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 86. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 + y_4 = 0 \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 87. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^6 \textit{ tal que } \begin{array}{c} 2y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 - y_5 + 2y_6 = 0 \\ 3y_1 + y_3 + 3y_4 + y_5 + 3y_6 = 0 \\ -y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_4 + 3y_5 - y_6 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5,6)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 88. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{c} 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 89. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_1 + 2y_2 + y_4 - y_5 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 90. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{r} -y_2 + y_3 + 3y_4 = 0 \\ y_1 + 3y_3 + 3y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 91. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 + 3y_2 + 3y_3 = 0 \\ 3y_1 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

.

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 92. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{r} y_2 - y_3 = 0 \\ -y_2 + 2y_3 - y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 93. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -y_1 + y_2 + 2y_3 - y_4 = 0 \\ -y_2 + 3y_3 + 2y_4 + 2y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 94. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \textit{ tal que } \begin{array}{c} y_1 - y_3 + y_4 = 0 \\ y_2 - y_4 = 0 \\ -y_1 + y_3 - y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 95. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_2 + y_3 - y_4 - y_5 = 0 \\ y_1 - y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 96. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 97. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = 0 \\ -y_1 - y_2 - y_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 98. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -y_2 - y_3 - y_4 + y_5 = 0 \\ -y_1 + y_3 + y_4 - y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 99. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{r} -y_5 = 0 \\ -y_1 + y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 100. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_2 - y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ -y_1 - y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 101. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^4 \text{ tal que } \begin{array}{c} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 - y_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$

Ejercicio 102. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^4 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 - y_2 - y_3 = 0 \\ y_1 - y_3 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

◊

Ejercicio 103. *Sea V un espacio vectorial*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} -y_2 + y_3 - y_4 + y_5 = 0 \\ y_1 - y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución: Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz $[H^T|I]$ y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 0&1&1&0&0&0&0\\ 2&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 2&0&0&0&0&1&0\\ 1&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&0&0&1&0&0\\ 2&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0\\ 2&0&0&0&0&1&0\\ 1&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0\\ 2&0&0&0&0&1&0\\ 1&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0\\ 1&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0\\ 0&2&0&0&2&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0\\ 0&2&0&0&2&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&2&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&2&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&0&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&2&0&1\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0 \end{array}\right]$$

.

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C\left(\begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 2&1&1\\ 0&0&1\\ 1&0&0 \end{bmatrix}\right).$$

$\Diamond$