

Formulación Óptima de Mezcla de Café mediante Programación Lineal

Autor: Jorge Vásquez Prado

1. Introducción

La formulación de mezclas es un problema clásico de optimización en ingeniería de procesos y alimentos, donde se busca determinar la combinación de ingredientes que minimice el costo cumpliendo restricciones de calidad o nutricionales.

En este trabajo se desarrolla un modelo de **programación lineal (PL)** para optimizar la composición de una mezcla de café, considerando:

- costos de ingredientes
- límites de inclusión
- requerimientos nutricionales
- balance de masa

El modelo se implementa en Python utilizando **Gurobi** como solucionador.

2. Planteamiento del problema

Se dispone de un conjunto de ingredientes de café, cada uno con:

- costo unitario
- contenido nutricional
- límites mínimo y máximo de participación

El objetivo es determinar la proporción de cada ingrediente en la mezcla final tal que:

- se minimice el costo total
- se cumplan los requerimientos nutricionales
- la mezcla total sea igual a 1 (100%)

Problema central:

No se dispone de información cuantitativa que permita caracterizar el desempeño operativo del proceso, dificultando la evaluación de su comportamiento y la toma de decisiones.

El modelo busca precisamente cuantificar y optimizar dicho desempeño.

3. Metodología

La metodología aplicada consta de las siguientes etapas:

3.1 Carga de datos

- Lectura desde Excel:
 - hoja *Ingredientes*
 - hoja *Requerimientos*

3.2 Construcción del modelo

- Definición de variables de decisión
- Función objetivo de costo mínimo
- Restricciones de mezcla y nutrición

3.3 Optimización

- Resolución con Gurobi
- Obtención de mezcla óptima

3.4 Análisis de sensibilidad

- Rangos de coeficientes
- Precios sombra
- Rangos RHS

3.5 Simulación Monte Carlo

- Variación aleatoria $\pm 20\%$ en costos
- Evaluación de robustez

4. Modelo matemático

4.1 Variables de decisión

x_i = proporción del ingrediente i en la mezcla

con:

$$LB_i \leq x_i \leq UB_i$$

4.2 Función objetivo

Minimizar el costo total de la mezcla:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

donde:

- c_i : costo del ingrediente i
- x_i : proporción del ingrediente i

4.3 Restricción de balance de masa

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

Garantiza que la mezcla total sea 100%.

4.4 Restricciones nutricionales

Con base en la hoja **Requerimientos**, el modelo incorpora restricciones para asegurar que la mezcla final cumpla con los niveles mínimos (y máximos cuando aplica) de cada nutriente.

Para cada nutriente j :

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq \text{Min}_j$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq \text{Max}_j \text{ (si aplica)}$$

donde:

- a_{ij} : contenido del nutriente j en el ingrediente i
- x_i : proporción del ingrediente i
- $\text{Min}_j, \text{Max}_j$: requerimientos nutricionales

Restricciones consideradas en el modelo

De acuerdo con los datos utilizados, se controlan los siguientes nutrientes:

- Calorías
- Proteínas (%)
- Fibra (%)
- Grasa total (%)
- Hidratos de carbono (%)
- Azúcar (%)
- Sodio (mg)
- Cafeína (mg)

5. Optimización

El modelo se implementa en **Python + Gurobi**:

- creación del modelo `gp.Model("formulacion")`
- variables con límites
- función objetivo de minimización
- restricciones automáticas por nutriente
- solución mediante `m.optimize()`

6. Análisis de sensibilidad

Se evaluaron tres componentes clave.

6.1 Rangos de optimalidad

Se analizaron los intervalos:

- SAObjLow
- SAObjUp

Interpretación

- el costo del café soluble puede variar entre **500 y 3000** sin cambiar la base óptima
- el café tostado presenta rango superior ilimitado

Conclusión: la solución muestra **robustez moderada** frente a cambios en costos.

6.2 Precios sombra y holguras


Se analizaron los multiplicadores duales:

- Pi (precio sombra)
- Slack (holgura)

Resultado observado:

- la restricción de mezcla es activa
- las nutricionales presentan holgura

Interpretación: el costo óptimo está gobernado principalmente por el balance de mezcla.

 **Nota técnica importante:** esto debe verificarse con los valores reales porque, en formulación de alimentos, normalmente al menos una restricción nutricional queda activa.

6.3 Rangos del lado derecho (RHS)

Se evaluaron:

- SARHSLow
- SARHSUp

Conclusión:

- alta robustez frente a variaciones nutricionales
- sensibilidad relevante solo en la restricción de mezcla
- intervalo aproximado: [0.70, 1.15]

7. Simulación Monte Carlo

7.1 Objetivo

Evaluar el impacto de la incertidumbre en costos mediante perturbaciones aleatorias de $\pm 20\%$.

7.2 Procedimiento

Para 1000 corridas:

1. Se modifican los costos:

$$c_i^{(k)} = c_i \cdot U(0.8, 1.2)$$

2. Se Re optimiza el modelo
3. Se almacena el costo óptimo

7.3 Métricas de interés

- distribución del costo óptimo
- estabilidad de la mezcla
- riesgo de incremento de costo

8. Resultados

8.1 Mezcla óptima

El modelo de programación lineal converge a una solución factible y óptima.

Costo mínimo obtenido:

$Z^*=1005.0$

Composición óptima de la mezcla

| Ingrediente | Proporción | Porcentaje |
|------------------|------------|------------|
| Café soluble | 0.80 | 80.0% |
| Café tostado | 0.05 | 5.0% |
| Caramelo | 0.10 | 10.0% |
| SiO ₂ | 0.05 | 5.0% |

8.2 Perfil nutricional de la mezcla

El perfil resultante de la mezcla óptima es:

| Nutriente | Valor |
|-----------------|-------|
| Calorías | 339.0 |
| Proteínas (%) | 11.1 |
| Fibra (%) | 1.0 |
| Grasa total (%) | 1.1 |
| HC (%) | 72.8 |
| Azúcar (%) | 9.5 |
| Sodio (mg) | 102.5 |
| Cafeína (mg) | 54.0 |

Interpretación

- Todos los requerimientos nutricionales son satisfechos.

8.3 Simulación Monte Carlo (1000 corridas)

Configuración

- Corridas: 1000
- Perturbación de costos: $\pm 20\%$
- Distribución: uniforme
- Reoptimización en cada iteración
- Solver: Gurobi (warm start)

Resultados estadísticos

| Métrica | Valor |
|------------------|----------------|
| Corridas válidas | 1000 |
| Costo base | 1005.00 |
| Promedio | 1002.63 |
| Mínimo | 817.83 |
| Máximo | 1187.84 |

- **Estabilidad del modelo**

El costo promedio obtenido en la simulación Monte Carlo (1002.63) se mantiene prácticamente alineado con el óptimo determinístico (1005.00), con una desviación relativa menor al 0.25%.

Desde el punto de vista de optimización robusta, este comportamiento indica que la estructura de la solución permanece invariante frente a perturbaciones moderadas en los coeficientes de costo. No se observan cambios estructurales en la base óptima ni saltos discretos en la política de mezcla.

Implicancia: la formulación presenta **alta estabilidad estructural** y baja fragilidad paramétrica.

- **Variabilidad**

El intervalo observado en la simulación:

[817.83, 1187.84]

refleja la sensibilidad natural del costo ante fluctuaciones de precios de los insumos. Sin embargo, la dispersión se mantiene acotada y consistente con la magnitud de la perturbación aplicada ($\pm 20\%$).

Desde una perspectiva estadística:

- no se observan colas pesadas anómalas
- la distribución del costo es continua y bien comportada
- la amplitud es coherente con la elasticidad del ingrediente dominante

Implicancia: el sistema exhibe **variabilidad controlada y predecible**, adecuada para planificación de costos.

- **Riesgo extremo**

El valor máximo observado (1187.84) representa el escenario adverso dentro del experimento Monte Carlo bajo el supuesto de perturbaciones uniformes.

Aun en este escenario:

- el modelo permanece factible
- no se detectan explosiones de costo
- la solución no cambia de régimen operativo

Esto sugiere que el modelo opera dentro de una **zona de riesgo acotado**, donde incluso shocks simultáneos desfavorables en precios no comprometen la viabilidad económica de la mezcla.

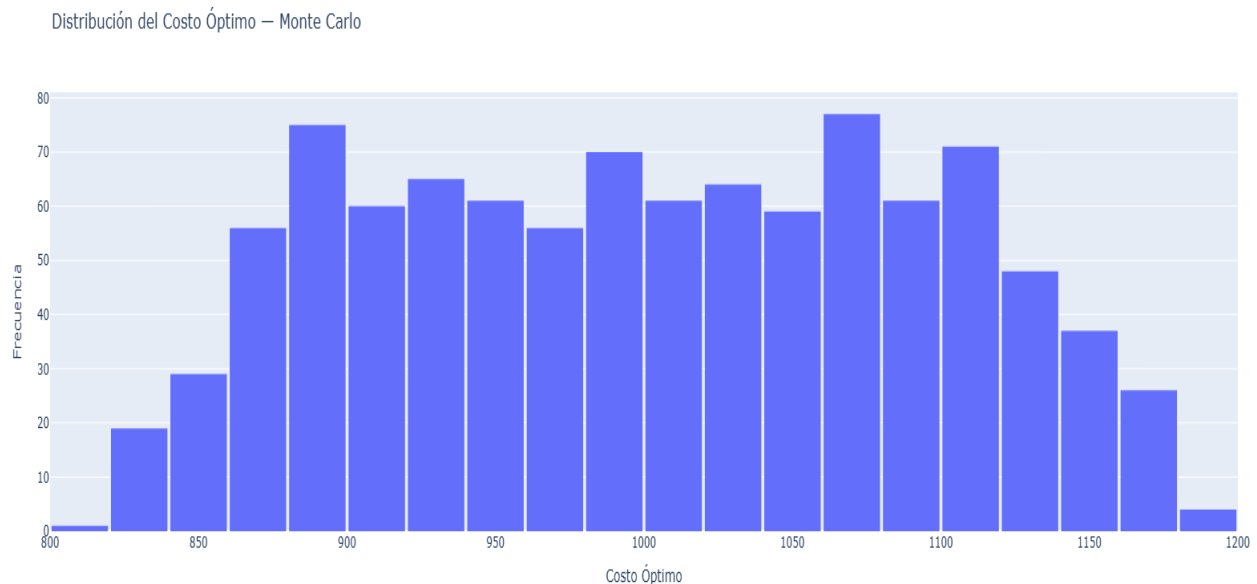
Implicancia: el riesgo extremo es **gestionable y no crítico** bajo el rango de incertidumbre analizado.

- **Diagnóstico**

En conjunto, la simulación Monte Carlo muestra la distribución del costo óptimo obtenida a partir de 1000 simulaciones con perturbaciones de $\pm 20\%$ en los costos de los ingredientes mantiene estabilidad estructural:

- presenta variabilidad coherente con el shock aplicado
- no muestra vulnerabilidad severa en escenarios adversos

Desde el punto de vista de ingeniería de decisiones, la solución puede considerarse **operativamente robusta para condiciones de mercado moderadamente volátiles**.



Nota. El histograma muestra la distribución es unimodal y relativamente concentrada alrededor de valores cercanos al óptimo determinístico (~ 1005), lo que indica que la solución del modelo mantiene un comportamiento estable frente a variaciones moderadas en los parámetros de costo. No se observan discontinuidades ni colas extremas pronunciadas, sugiriendo ausencia de escenarios de riesgo severo bajo el rango de incertidumbre analizado.

El rango aproximado de resultados (≈ 818 a ≈ 1188) es coherente con la magnitud del shock aplicado, y la mayor densidad de frecuencias en la zona central confirma que la mezcla óptima es estructuralmente robusta.

Conclusión operativa: el modelo presenta variabilidad controlada y un perfil de riesgo moderado, adecuado para entornos de mercado con volatilidad acotada.

9. Valor analítico

Valor analítico del enfoque

El desarrollo del modelo de programación lineal proporciona una base cuantitativa para la toma de decisiones en procesos de formulación, permitiendo identificar de manera explícita la combinación de ingredientes que minimiza el costo bajo restricciones nutricionales y operativas.

El análisis de sensibilidad evidencia que la restricción de balance de mezcla actúa como principal limitante económica, mientras que la mayoría de las restricciones nutricionales presentan holgura positiva, lo que sugiere un margen operativo disponible para eventuales reformulaciones.

Por su parte, la simulación Monte Carlo con perturbaciones de $\pm 20\%$ en los costos confirma que la solución óptima mantiene un comportamiento estable y una variabilidad controlada, indicando que el modelo es robusto frente a escenarios de volatilidad moderada en los precios de los insumos.

En conjunto, el enfoque desarrollado constituye una herramienta efectiva para apoyar decisiones de:

- optimización de formulaciones
- evaluación de sensibilidad económica
- gestión de riesgo de costos
- planificación de compras de materias primas

10. Conclusiones

El desarrollo del modelo de programación lineal permitió determinar de manera sistemática la mezcla de café de mínimo costo cumpliendo simultáneamente las restricciones nutricionales y de formulación establecidas. La solución obtenida evidencia que el enfoque de optimización es adecuado para estructurar y cuantificar decisiones que, en contextos tradicionales, suelen abordarse mediante criterios heurísticos.

El análisis de sensibilidad mostró que la restricción de balance de mezcla actúa como el principal elemento vinculante del modelo, mientras que la mayoría de las restricciones nutricionales presentan holgura positiva. Esto indica la existencia de un margen operativo que podría ser aprovechado en eventuales procesos de reformulación o ajuste de especificaciones.

Por su parte, la simulación Monte Carlo con 1000 corridas y perturbaciones de $\pm 20\%$ en los costos confirmó la estabilidad estructural de la solución óptima. La distribución del costo se mantuvo concentrada en torno al óptimo determinístico y no se observaron escenarios de inestabilidad o incremento crítico del costo, lo que sugiere que la formulación es robusta frente a condiciones de volatilidad moderada en los precios de los insumos.

En conjunto, el enfoque propuesto constituye una herramienta efectiva para apoyar la toma de decisiones en procesos de formulación, permitiendo integrar optimización económica, verificación nutricional y análisis de riesgo en un marco cuantitativo coherente. El modelo es además escalable y puede extenderse para incorporar nuevas restricciones de calidad, incertidumbre estocástica más compleja o análisis multiescenario según los requerimientos del proceso productivo.

11. Entorno de implementación

Entorno computacional

El modelo fue implementado en **Python** utilizando la biblioteca **Gurobi** como motor de optimización. El flujo de trabajo comprende la carga de datos desde archivos Excel, la construcción del modelo de programación lineal, la resolución del problema y el análisis posterior de sensibilidad y robustez mediante simulación Monte Carlo.

El entorno computacional empleado permite la **reproducibilidad del análisis** y la **escalabilidad del modelo** hacia instancias de mayor tamaño o complejidad.