MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ENGENHARIA

SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

2021/1

Prof.ª Drª Polliana Cândida Oliveira Martins.
Engenharias– FGA UnB

Solução de sistemas lineares

Introdução a sistemas de Equações Lineares

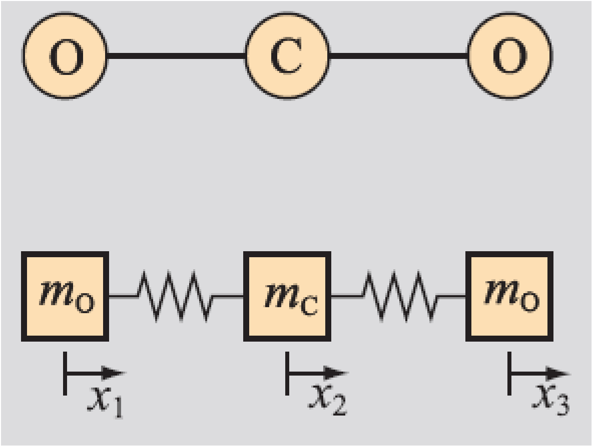
Solução por método de Cramer

Metódos diretos

- Eliminação de Gauss
- Gauss Jordan
- Decomposição LU

Introdução aos sistemas de Equações Lineares

- Surgem de problemas com multiplas variáveis dependentes.
- As variáveis dependentes possuem uma relação de pedendência linear uma das outras, ou seja, variáveis elevadas a potência de um.
- Sistemas pequenos podem ser resolvidos com métodos matemáticos, como a regra de Cramer.

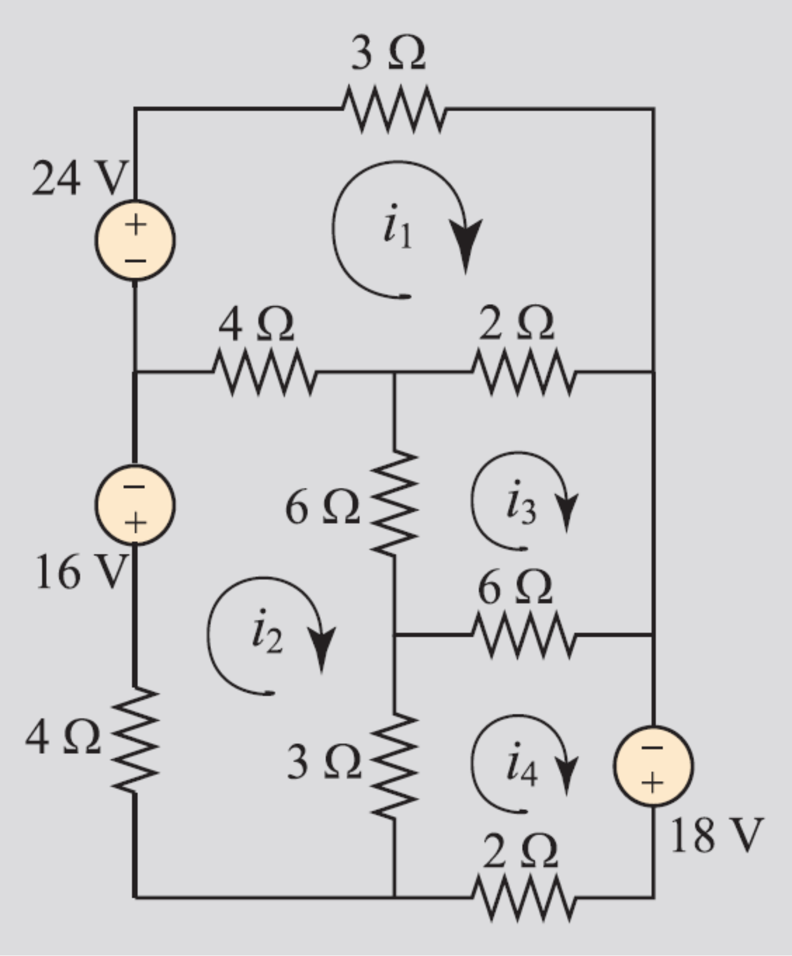


$$m_O \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + kx_2$$
$$m_C \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -2kx_2 + kx_1 + kx_3$$
$$m_O \frac{d^2 x_3}{dt^2} = kx_2 - kx_3$$

Introdução aos sistemas de Equações Lineares

- Problema de Circuitos Elétricos
- Lei de Kirchhoff:
  - 1ª Lei: A soma de todas a correntes que chegam a um nó deve ser igual a soma de todas as correntes de deixam o nó.
  - 2ª Lei: A soma dos potenciais elétricos ao longo da malha fechada deve ser igual a zero.

$$V = Ri$$



Introdução aos sistemas de Equações Lineares

- Problema de Circuitos Elétricos

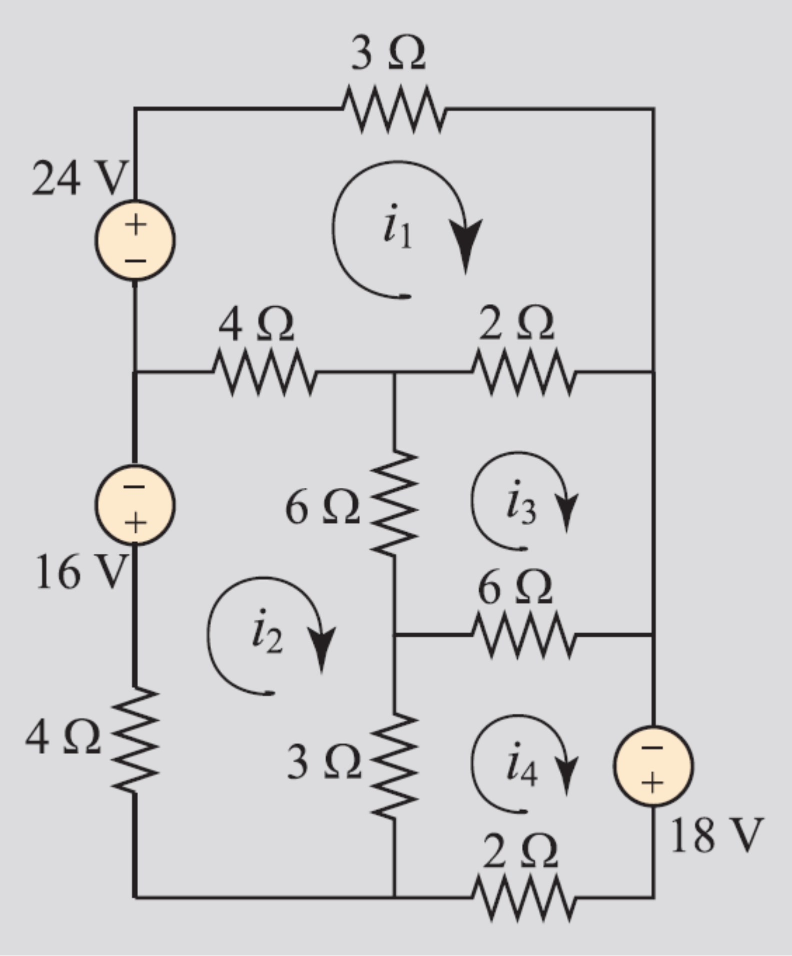
$$9i_1 - 4i_2 - 2i_3 = 24$$

$$-4i_1 + 17i_2 - 6i_3 - 3i_4 = -16$$

$$-2i_1 - 6i_2 + 14i_3 - 6i_4 = 0$$

$$-3i_2 - 6i_3 + 11i_4 = 18$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 17 & -6 & -3 \\ -2 & -6 & 14 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -16 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix}$$



Introdução aos sistemas de Equações Lineares

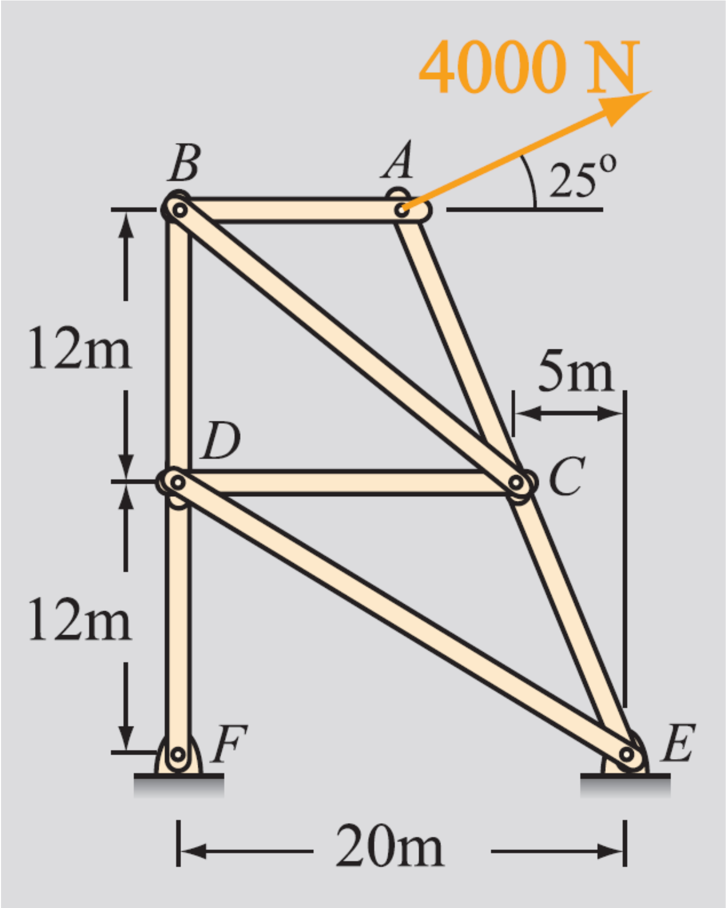
- Problema de Mecânica dos Sólidos
  - Treliça: O balanço das forças em X e Y nos pivôs A, B, C e D forma um sistema de 8 equações e 8 incógnitas.

$$\frac{24}{26}F_{AC} = 4000\sin(25°) \qquad -F_{AB} - \frac{10}{26}F_{AC} = 4000\cos(25°)$$

$$F_{AB} - \frac{15}{19{,}21}F_{BC} = 0 \qquad \frac{12}{19{,}21}F_{BC} - F_{BD} = 0$$

$$F_{CD} + \frac{20}{23{,}32}F_{DE} = 0 \qquad F_{BD} - \frac{12}{23{,}32}F_{DE} - F_{DF} = 0$$

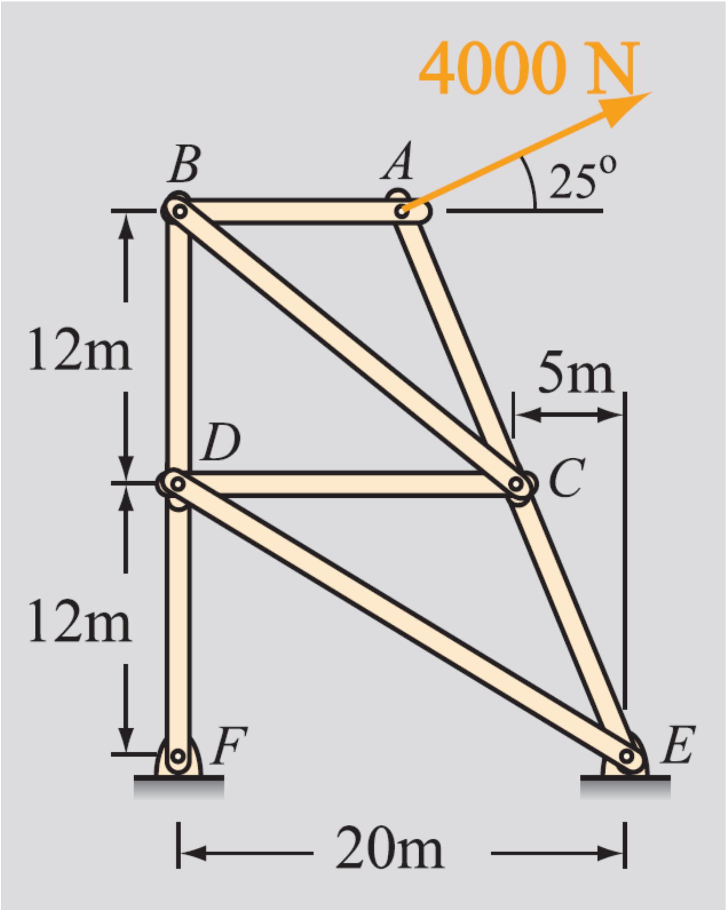
$$\frac{10}{26}F_{CE} - \frac{10}{26}F_{AC} - \frac{15}{19{,}21}F_{BC} - F_{CD} = 0 \qquad \frac{24}{26}F_{AC} + \frac{12}{19{,}21}F_{BC} - \frac{24}{26}F_{CE} = 0$$



Introdução aos sistemas de Equações Lineares

- Problema de Mecânica dos Sólidos
  - Treliça: O balanço das forças em X e Y nos pivôs A, B, C e D forma um sistema de 8 equações e 8 incógnitas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0,9231 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0,3846 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,8575 & 0 \\ 1 & 0 & -0,7809 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3846 & -0,7809 & 0 & -1 & 0,3846 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9231 & 0,6247 & 0 & 0 & -0,9231 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6247 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0,5145 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{AB} \\ F_{AC} \\ F_{BC} \\ F_{BD} \\ F_{CD} \\ F_{CE} \\ F_{DE} \\ F_{DF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1690 \\ 3625 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Introdução aos sistemas de Equações Lineares

Configuração do problema na forma matricial

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

$$[a][x] = [b] \qquad\qquad Ax = b$$

Solução de sistemas lineares

Introdução a sistemas de Equações Lineares

Solução por método de Cramer

Metódos diretos

- Eliminação de Gauss
- Gauss Jordan
- Decomposição LU

Regra de Cramer

Se existe solução para o sistema de equações, ela pode ser obtida por:

$$x_j = \frac{\det(a'_j)}{\det(a)}$$

$[a'_j]$ é formada pela matriz $[a]$ com a troca da j-ésima coluna pelo vetor coluna contendo os lados direitos das equações do sistema original $[b]$.

Regra de Cramer

- Exemplo 1: Considere o seguinte sistema linear abaixo indicado. Calcule as variáveis x, y z de acordo com a regra de Cramer.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5 \\ 4x + 4y - 3z &= 3 \\ -2x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[a][x] = [b]$$

$$\det(a) = 2*4*(-1)+3*(-3)*(-2)+(-1)*4*3-2*3*(-3)-3*4*(-1)-(-1)*4*(-2)=$$
$$=-8+18-12+18+12-8=20$$

Regra de Cramer

- Exemplo 1: Considere o seguinte sistema linear abaixo indicado. Calcule as variáveis x, y z de acordo com a regra de Cramer.

$$x = \frac{det\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}{\det(a)} = \frac{20}{20} = 1$$

$$y = \frac{det\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det(a)} = \frac{40}{20} = 2$$

$$z = \frac{det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{\det(a)} = \frac{60}{20} = 3$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(a) = |a| = 20$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solução de sistemas lineares

Introdução a sistemas de Equações Lineares

Solução por método de Cramer

Metódos diretos

- Eliminação de Gauss
- Gauss Jordan
- Decomposição LU

Métodos Diretos

- Sistema de equações é manipulado até se transformar em um sistema **triangular superior,** triangular inferior ou diagonal.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n-1,\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,\,n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}, \qquad x_3 = \frac{b_3 - a_{34}b_4}{a_{33}}, \qquad x_2 = \frac{b_2 - (a_{23}b_3 + a_{24}b_4)}{a_{22}}$$

$$x_4 = \frac{b_4 - (a_{12}b_2 + a_{13}b_3 + a_{14}b_4)}{a_{11}}$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij}b_j}{a_{ii}} \qquad i = n-1, n-2, \ldots 1$$

Métodos Diretos

- Sistema de equações é manipulado até se transformar em um sistema triangular superior, **triangular inferior** ou diagonal.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad\qquad\qquad\quad &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \qquad\qquad &= b_3 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad &\ \ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad x_2 = \frac{b_2 - a_{21}b_1}{a_{22}}, \quad x_3 = \frac{b_3 - (a_{31}b_1 + a_{32}b_2)}{a_{33}}$$

$$x_4 = \frac{b_4 - (a_{41}b_1 + a_{42}b_2 + a_{43}b_3)}{a_{44}}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i}^{j=i-1} a_{ij}b_j}{a_{ii}} \qquad i = 2, 3, \ldots n$$

Métodos Diretos

- Sistema de equações é manipulado até se transformar em um sistema triangular superior, triangular inferior ou **diagonal**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a & a & a \\ a & a_{22} & a & a \\ a & a & a_{33} & a \\ a & a & a & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= b_1 \\ a_{12}x_2 \qquad\qquad\qquad &= b_2 \\ a_{13}x_3 \qquad\qquad &= b_3 \\ \vdots \qquad\qquad\quad & \quad \vdots \\ a_n x_n &= b_n \end{aligned}$$

Solução de sistemas lineares

Introdução a sistemas de Equações Lineares

Solução por método de Cramer

Metódos diretos

- Eliminação de Gauss
- Gauss Jordan
- Decomposição LU

Eliminação de Gauss

- *Consiste em uma metodologia de triangularização do sistema de equações, para que este se torne solucionável de forma direta.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

- **1° PASSO-P1**: A primeira equação, ou seja, a primeira linha da matriz é chamada de <u>equação pivô</u>, o coeficiente a_{11} é o <u>coeficiente pivô.</u> **O coeficiente $\boldsymbol{a_{21}}$ é eliminado subtraindo a segunda linha da primeira linha multiplicando por $\boldsymbol{m_{21} = a_{21}/a_{11}}$**

$$
\begin{array}{r}
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\
- \overset{m_{21}}{\frac{a_{21}}{a_{11}}}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4\right) = \overset{m_{21}}{\frac{a_{21}}{a_{11}}} b_1 \\
\hline
\cancel{0x_1} + \underbrace{\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right)}_{a'_{22}} x_2 + \underbrace{\left(a_{23} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{11}}\right)}_{a'_{23}} x_3 + \underbrace{\left(a_{24} - \frac{a_{14}a_{21}}{a_{11}}\right)}_{a'_{24}} x_4 = \underbrace{b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1}_{b'_2}
\end{array}
$$

Eliminação de Gauss

- **1° PASSO-P2:** A primeira equação, ou seja, a primeira linha da matriz continua sendo a equação pivô e o coeficiente a_{11} o coeficiente pivô. O **coeficiente $\boldsymbol{a_{31}}$(terceira equação) é eliminado subtraindo a terceira linha da primeira linha** multiplicando por $\boldsymbol{m_{31} = a_{31}/a_{11}}$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3$$

$$-\overset{m_{31}}{\frac{a_{31}}{a_{11}}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) = \overset{m_{31}}{\frac{a_{31}}{a_{11}}}b_1$$

$$\cancel{0x_1} + \underbrace{\left(a_{32} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{11}}\right)}_{a'_{32}} x_2 + \underbrace{\left(a_{23} - \frac{a_{13}a_{31}}{a_{11}}\right)}_{a'_{33}} x_3 + \underbrace{\left(a_{24} - \frac{a_{14}a_{31}}{a_{11}}\right)}_{a'_{34}} x_4 = \underbrace{b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1}_{b'_3}$$

Eliminação de Gauss

- **1° PASSO-P3:** A primeira equação, ou seja, a primeira linha da matriz continua sendo a <u>equação pivô</u> e o coeficiente a_{11} o <u>coeficiente pivô.</u> **O coeficiente $\boldsymbol{a_{41}}$(quarta equação) é eliminado subtraindo a quarta linha da primeira linha multiplicando por $\boldsymbol{m_{41} = a_{41}/a_{11}}$**

$$
\begin{array}{rl}
 & a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
- & \underbrace{\frac{a_{41}}{a_{11}}}_{m_{41}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) = \underbrace{\frac{a_{41}}{a_{11}}}_{m_{41}} b_1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\cancel{0x_1} + \underbrace{\left(a_{42} - \frac{a_{12}a_{41}}{a_{11}}\right)}_{a'_{42}} x_2 + \underbrace{\left(a_{43} - \frac{a_{13}a_{41}}{a_{11}}\right)}_{a'_{43}} x_3 + \underbrace{\left(a_{44} - \frac{a_{14}a_{41}}{a_{11}}\right)}_{a'_{44}} x_4 = \underbrace{b_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}} b_1}_{b'_4}
$$

Eliminação de Gauss

- FIM DO PASSO 1 : Ao fim do primeiro passo, o sistema de equações toma a seguinte forma.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
+a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \\
+a'_{32}x_3 + a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 &= b'_3 \\
+a'_{42}x_4 + a'_{43}x_4 + a'_{44}x_4 &= b'_4
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a_{,44} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}
$$

Eliminação de Gauss

- **2° PASSO-P1**: A segunda equação, ou seja, a segunda linha da matriz se torna a equação pivô, o coeficiente a'_{22} passa a ser o coeficiente pivô. **O coeficiente a'_{32} é eliminado subtraindo a terceira linha da segunda linha multiplicando por $m'_{32} = a'_{32}/a'_{22}$**

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 = b'_3$$

$$-\ \overset{m'_{32}}{\frac{a'_{32}}{a'_{22}}}(a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4) = \overset{m'_{32}}{\frac{a'_{32}}{a'_{22}}}b'_2$$

$$\cancel{0x_2} + \left(\underbrace{a'_{33} - \frac{a'_{23}a'_{32}}{a'_{22}}}_{a''_{33}}\right)x_3 + \left(\underbrace{a'_{34} - \frac{a'_{24}a'_{32}}{a'_{22}}}_{a''_{34}}\right)x_4 = \underbrace{b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}b'_2}_{b''_3}$$

Eliminação de Gauss

- **2° PASSO-P2:** A segunda equação, ou seja, a segunda linha da matriz se torna a <u>equação pivô</u>, o coeficiente a'_{22} passa a ser o <u>coeficiente pivô.</u> **O coeficiente a'_{42} é eliminado subtraindo a quarta linha da segunda linha multiplicando por $m'_{42} = a'_{42}/a'_{22}$**

$$m'_{42} \qquad a'_{42}x_2 + a'_{43}x_3 + a'_{44}x_4 = b'_4 \qquad m'_{42}$$

$$- \quad \frac{a'_{42}}{a'_{22}}(a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4) = \frac{a'_{42}}{a'_{22}}b'_2$$

$$\cancel{0x_2} + \underbrace{\left(a'_{43} - \frac{a'_{23}a'_{42}}{a'_{22}}\right)}_{a''_{43}} x_3 + \underbrace{\left(a'_{44} - \frac{a'_{24}a'_{42}}{a'_{22}}\right)}_{a''_{44}} x_4 = \underbrace{b'_4 - \frac{a'_{42}}{a'_{22}}b'_2}_{b''_4}$$

Eliminação de Gauss

- FIM DO PASSO 2 : Ao fim do segundo passo, o sistema de equações toma a seguinte forma.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
+a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 &= b''_3 \\
a''_{43}x_4 + a''_{44}x_4 &= b''_4
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b''_4 \end{bmatrix}
$$

Eliminação de Gauss

- **3° PASSO-P1**: A terceira equação, ou seja, a terceira linha da matriz se torna a <u>equação pivô</u>, o coeficiente a''_{33} passa a ser o <u>coeficiente pivô.</u> **O coeficiente a''_{43} é eliminado subtraindo a quarta linha da terceira linha multiplicando por $m''_{43} = a''_{43}/a''_{33}$**

$$
\begin{array}{rl}
 & a''_{43}x_3 + a''_{44}x_4 = b''_4 \\
- & \overbrace{\frac{a''_{43}}{a''_{33}}}^{m''_{43}}(a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4) = \overbrace{\frac{a''_{43}}{a''_{33}}}^{m''_{43}}b''_3 \\
\hline
 & \cancel{0x_3} + \underbrace{\left(a''_{44} - \frac{a''_{34}a''_{43}}{a''_{33}}\right)}_{a'''_{44}}x_4 = \underbrace{b''_4 - \frac{a''_{43}}{a''_{33}}b''_3}_{b'''_4}
\end{array}
$$

Eliminação de Gauss

- FIM DO PASSO 3: o sistema de equações toma a seguinte forma.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
+a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 &= b''_3 \\
a'''_{44}x_4 &= b'''_4
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b'''_4 \end{bmatrix}
$$

Eliminação de Gauss

- **<u>SOLUÇÃO FINAL</u>**: A solução do sistema é obtida com a aplicação da substituição regressiva, apropriada para matrizes triangulares superiores.

$$a'''_{44}x_4 = b'''_4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{b'''_4}{a'''_{44}}$$

$$a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 = b''_3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{b''_3 - a''_{34}x_4}{a''_{33}} = \frac{b''_3 - a''_{34}\frac{b'''_4}{a'''_{44}}}{a''_{33}}$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 = b'_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{b'_2 - a'_{24}x_4 - a'_{23}x_3}{a'_{22}}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{b_1 - a_{14}x_4 - a_{13}x_3 - a_{12}x_2}{a_{22}}$$

Eliminação de Gauss -Pivotação

- O Método de Gauss tem dificuldades em solucionar matriz de coeficientes em alguns casos:

Elementos da diagonal da matriz (elemento pivô) igual a zero

$$
\begin{aligned}
0x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\
a_{41}x_1 + a_{42}x_4 + a_{43}x_4 + a_{44}x_4 &= b_4
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}
$$

m_{21} $\qquad\qquad$ m_{21}

$$
\begin{aligned}
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\
-\ \frac{a_{21}}{0}(0x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) &= \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1
\end{aligned}
$$

$$\cancel{0x_1} + \left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{0}\right) x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}a_{21}}{0}\right) x_3 + \left(a_{24} - \frac{a_{14}a_{21}}{0}\right) x_4 = b_2 - \frac{a_{21}}{0} b_1$$

Eliminação de Gauss -Pivotação

- O Método de Gauss tem dificuldades em solucionar matriz de coeficientes em alguns casos:

Elementos da diagonal da matriz (elemento pivô) muito menor do que algum dos elementos fora da diagonal de uma mesma linha (linha pivô)

$$0{,}0003\,x_1 + 12{,}34\,x_2 = 12{,}343$$
$$0{,}4321x_1 + x_2 = 5{,}321$$

$$0{,}4321x_1 + x_2 = 5{,}321$$
$$\frac{0{,}4321}{0{,}0003}(0{,}0003\,x_1 + 12{,}34\,x_2 = 12{,}343)$$
$$-17772{,}71x_2 = -17772{,}71$$

Solução Real

$$x_2 = 1$$
$$x_1 = 10$$

$$0{,}4321x_1 + x_2 = 5{,}321$$
$$1440(0{,}0003\,x_1 + 12{,}34\,x_2 = 12{,}343)$$
$$0{,}0001x_1 - 17770x_2 = -17760$$

arredondamento

$$x_2 = 0{,}9994$$
$$x_1 = 33{,}3$$

Solução Numérica Gauss

Eliminação de Gauss -Pivotação

- Na eliminação de Gauss, uma equação pode ser usada como a equação pivô apenas se o coeficiente pivô for diferente de zero.
- Se o elemento pivô for nulo, a equação (isto é, a linha) deve ser trocada por uma das demais equações (linhas) que possuir um coeficiente pivô diferente de zero.
- **Essa troca de linhas é chamada de *pivotação*.**

Após o primeiro passo, a segunda equação tem um elemento pivô igual a zero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Usando a pivotação, troca-se a segunda pela quarta equação.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_3 \\ b'_2 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss -Pivotação

- Os cálculos numéricos apresentam menores erros de arredondamento se o elemento pivô possuir um valor numérico absoluto grande em comparação com os demais elementos na mesma linha.
  - para assumir a função de equação pivô, é melhor selecionar a equação cujo elemento pivô possui o maior valor numérico absoluto.

- **É sempre bom empregar a pivotação para se ter um elemento pivô com o maior valor possível (mesmo quando a pivotação não for necessária).**

Após o primeiro passo, a segunda equação tem um elemento pivô igual a zero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

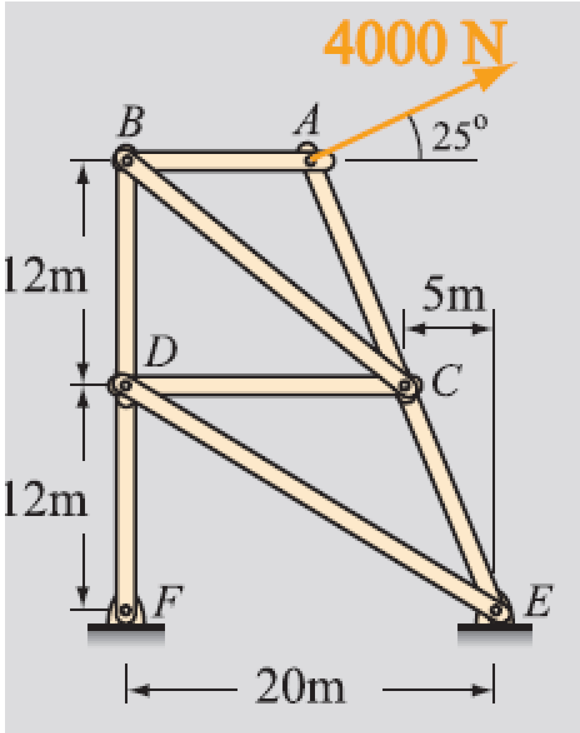
Usando a pivotação, troca-se a segunda pela quarta equação.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_3 \\ b'_2 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss -Pivotação

- Exercício 1 – Considere o exemplo motivacional do inicio deste capítulo, onde uma sistema de treliças é apresentado e suas equações são deduzidas. Sendo as características físicas e geométricas do problema já definidos, obtém-se a seguinte igualdade Matricial. Nessas condições, determine as forças nas barras que compõe a treliça, utilizando método de Gauss com pivotação.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0{,}9231 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0{,}3846 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}8575 & 0 \\ 1 & 0 & -0{,}7809 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}3846 & -0{,}7809 & 0 & -1 & 0{,}3846 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9231 & 0{,}6247 & 0 & 0 & -0{,}9231 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6247 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0{,}5145 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{AB} \\ F_{AC} \\ F_{BC} \\ F_{BD} \\ F_{CD} \\ F_{CE} \\ F_{DE} \\ F_{DF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1690 \\ 3625 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Eliminação de Gauss -Pivotação

- Exercicio 1: Plano de ação
  - Construir um programa para solução do problema;
    - Definir o algoritmo para pivotação;
    - Definir o algoritmo para eliminação de Gauss;
    - Definir o algoritmo de solução do sistema triangular superior;

Eliminação de Gauss -Pivotação

- Exercício 1: Plano de ação
  - Construir um programa para solução do problema;
    - Definir o algoritmo para pivotação;

i) no início da etapa k da fase de eliminação, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes: $a_{ik}^{(k-1)}$, i = k, k +1,..., n;

ii) trocar as linhas k e i se for necessário.

```
%%Inicio da seção de pivotação
if Ab(j,j)==0 %Verifica se o elemento pivô é nulo
  for k=j+1:R
    if Ab(k,j) ~=0
      AbTemp=Ab(j,:);
      Ab(j,:)=Ab(k,:);
      Ab(k,:)=AbTemp;
      break
    endif
  endfor
endif
%%Fim da seção de Pivotação
```

Eliminação de Gauss -Pivotação

- Exercício 1: Plano de ação
  - Construir um programa para solução do problema;
    - Definir o algoritmo para eliminação de Gauss;

Eliminação

Para $k = 1, \ldots, n-1$

Para $i = k+1, \ldots, n$

$$m = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

$$a_{ik} = 0$$

Para $j = k+1, \ldots n$

$$a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj}$$

$$b_i = b_i - m b_k$$

```
%Triangularização superior do sistema- Gauss
for j=1:R-1
  for i=j+1:R
    Ab(i,j:C)=Ab(i,j:C)-Ab(i,j)/Ab(j,j)*Ab(j,j:C);  % Cálculo dos coeficientes
  endfor

endfor
```

Eliminação de Gauss -Pivotação

- Exercício 1: Plano de ação
  - Construir um programa para solução do problema;
    - Definir o algoritmo de solução do sistema triangular superior;

Resolução do sistema:
$$\left[\begin{array}{l} x_n = b_n/a_{nn} \\ \text{Para } k = (n-1),\ldots\ 2,1 \\ \left[\begin{array}{l} s = 0 \\ \text{Para } j = (k+1),\ldots, n \\ [s = s + a_{kj}\, x_j \\ x_k = (b_k - s)/a_{kk} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

```
%Solução direta do sistema triangular superior
x=zeros(R,1);
x(R)=Ab(R,C)/Ab(R,R);

for i=R-1:-1:1
  x(i)=(Ab(i,C)-Ab(i,i+1:R)*x(i+1:R))/Ab(i,i);
endfor
```

Eliminação de Gauss -Pivotação

- Exercício 1: Plano de ação
  - Construir um programa para solução do problema;

GaussPivot.m

```
function x= GaussPivot(A,b)
##Resolve Sist de equações lineares [A][x]=[b] por Gauss com pivotação.

##Variáveis de entrada:
##[A] - Matriz de coeficientes.
##[b] - Vetor coluna contendo as constantes do lado direito do sistema.
##Variável de saída:
##[x] -Vetor coluna com a solução

Ab=[A,b]; %Concatenar Matriz A com vetor b;
[R,C]=size(Ab); %Extrair o n°de linhas R e n° de colunas C da matriz Ab;

for j=1:R-1
  %%Inicio da seção de pivotação
  if Ab(j,j)==0 %Verifica se o elemento pivô é nulo
    for k=j+1:R
      if Ab(k,j)~=0
        AbTemp=Ab(j,:);
        Ab(j,:)=Ab(k,:);
        Ab(k,:)=AbTemp;
        break
      endif
    endfor
 endif
  %%Fim da seção de Pivotação

%Triangularização superior do sistema- Gauss
  for i=j+1:R
    Ab(i,j:C)=Ab(i,j:C)-Ab(i,j)/Ab(j,j)*Ab(j,j:C);  % Cálculo dos coeficientes
  endfor
endfor

%Solução direta do sistema triangular superior
x=zeros(R,1);
x(R)=Ab(R,C)/Ab(R,R);
for i=R-1:-1:1
  x(i)=(Ab(i,C)-Ab(i,i+1:R)*x(i+1:R))/Ab(i,i);
endfor
endfunction
```

Eliminação de Gauss -Pivotação

- Exercício 1: Plano de ação
  - Dar os parâmetros de entrada corretamente no software e conferi-los.

Janela de Comandos

```
>> A
A =

         0    0.9231         0         0         0         0         0         0
   -1.0000   -0.3846         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0    1.0000         0    0.8575         0
    1.0000         0   -0.7809         0         0         0         0         0
         0   -0.3846   -0.7809         0   -1.0000    0.3846         0         0
         0    0.9231    0.6247         0         0   -0.9231         0         0
         0         0    0.6247   -1.0000         0         0         0         0
         0         0         0    1.0000         0         0   -0.5145   -1.0000

>> b
b =

   1690
   3625
      0
      0
      0
      0
      0
      0
```

Eliminação de Gauss -Pivotação

- Exercício 1: Plano de ação
  - Rodar propriamente a função e avaliar os resultados

```
>> x=GaussPivot(A,b)
x =

  -4329.1
   1830.8
  -5543.8
  -3463.2
   2886.2
  -1920.9
  -3365.9
  -1731.5

>> 
```

Gauss Jordan

- Gauss Jordan: Manipulação do sistema de Equações Lineares até a obtenção de um sistema equivalente na forma diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(a)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{bmatrix}} \xrightarrow{\text{Procedimento de Gauss–Jordan}} \underset{(b)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b'_4 \end{bmatrix}}$$

Gauss Jordan

- Procedimento de eliminação de Gauss Jordan
- Análogo à Eliminação de Gauss;
- Também pode ser pivotado, caso um dos coeficientes pivô tenham valor nulo;

  - 1- Equação pivô é normalizada – divisão de todos os termos pelo coeficiente pivô (Pivô igual a 1);

  - 2-A equação pivô é utilizada na eliminação dos elementos fora da diagonal principal em TODAS as demais equações.
    - Processo de eliminação é aplicado às equações (linhas) que estão acima e abaixo da equação pivô (no método de eliminação de Gauss, apenas elementos abaixo do elemento pivô são eliminados).

Gauss Jordan

- Exemplo 2 – Resolver, pelo método de Gauss Jordan, o seguinte sistema de equações abaixo proposto.

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 12 \\
-6x_1 + 7x_2 + 6{,}5x_3 - 6x_4 &= -6{,}5 \\
x_1 + 7{,}5x_2 + 6{,}25x_3 + 5{,}5x_4 &= 16 \\
-12x_1 + 22x_2 + 15{,}5x_3 - x_4 &= 17
\end{aligned}
$$

1- Representar o sistema na forma [Ab];

$$
\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 & 6 \\ -6 & 7 & 6{,}5 & -6 \\ 1 & 7{,}5 & 6{,}25 & 5{,}5 \\ -12 & 22 & 15{,}5 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 12 \\ -6{,}5 \\ 16 \\ 17 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 & 6 & 12 \\ -6 & 7 & 6{,}5 & -6 & -6{,}5 \\ 1 & 7{,}5 & 6{,}25 & 5{,}5 & 16 \\ -12 & 22 & 15{,}5 & -1 & 17 \end{bmatrix}
$$

Gauss Jordan

Exemplo 2

- 2- O **primeiro elemento da linha é o elemento pivô**. A linha é normalizada com a sua divisão pelo elemento pivô.

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{6}{4} & \frac{12}{4} \\ -6 & 7 & 6{,}5 & -6 & -6{,}5 \\ 1 & 7{,}5 & 6{,}25 & 5{,}5 & 16 \\ -12 & 22 & 15{,}5 & -1 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}75 & 1{,}5 & 3 \\ -6 & 7 & 6{,}5 & -6 & -6{,}5 \\ 1 & 7{,}5 & 6{,}25 & 5{,}5 & 16 \\ -12 & 22 & 15{,}5 & -1 & 17 \end{bmatrix}$$

- 3 - Todos os **primeiros elementos** nas linhas 2, 3 e 4 são **eliminados**;

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}75 & 1{,}5 & 3 \\ -6 & 7 & 6{,}5 & -6 & -6{,}5 \\ 1 & 7{,}5 & 6{,}25 & 5{,}5 & 16 \\ -12 & 22 & 15{,}5 & -1 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow -(-6)\begin{bmatrix}1 & -0{,}5 & -0{,}75 & 1{,}5 & 3\end{bmatrix} \\ \leftarrow -(1)\begin{bmatrix}1 & -0{,}5 & -0{,}75 & 1{,}5 & 3\end{bmatrix} \\ \leftarrow -(-12)\begin{bmatrix}1 & -0{,}5 & -0{,}75 & 1{,}5 & 3\end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}75 & 1{,}5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 11{,}5 \\ 0 & 8 & 7 & 4 & 13 \\ 0 & 16 & 6{,}5 & 17 & 53 \end{bmatrix}$$

Gauss Jordan

Exemplo 2

- 4- A próxima **linha pivô é a segunda linha**, e seu **segundo elemento** é utilizado como pivô. A linha é normalizada com a sua divisão pelo elemento pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}75 & 1{,}5 & 3 \\ 0 & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{11{,}5}{4} \\ 0 & 8 & 7 & 4 & 13 \\ 0 & 16 & 6{,}5 & 17 & 53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}75 & 1{,}5 & 3 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}75 & 2{,}875 \\ 0 & 8 & 7 & 4 & 13 \\ 0 & 16 & 6{,}5 & 17 & 53 \end{bmatrix}$$

- 5 - Em seguida, todos **os segundos elementos** nas linhas 1, 3 e 4 **são eliminados**;

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}75 & 1{,}5 & 3 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}75 & 2{,}875 \\ 0 & 8 & 7 & 4 & 13 \\ 0 & 16 & 6{,}5 & 17 & 53 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -(-0{,}5)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}75 & 2{,}875 \end{bmatrix} \\ \\ \leftarrow -(8)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}75 & 2{,}875 \end{bmatrix} \\ \leftarrow -(16)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}75 & 2{,}875 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 & 1{,}875 & 4{,}4375 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}75 & 2{,}875 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -1{,}5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Gauss Jordan

Exemplo 2

- 6- A próxima **linha pivô é a terceira linha**, e seu **terceiro elemento** é usado como pivô. A linha é normalizada com a sua divisão pelo elemento pivô:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 & 1{,}875 & 4{,}4375 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}75 & 2{,}875 \\ 0 & 0 & \frac{3}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-10}{3} \\ 0 & 0 & -1{,}5 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 & 1{,}875 & 4{,}4375 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}75 & 2{,}875 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}667 & -3{,}333 \\ 0 & 0 & -1{,}5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

- 7 - Em seguida, todos os **terceiros elementos** nas linhas 1, 2 e 4 são **eliminados**;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 & 1{,}875 & 4{,}4375 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}75 & 2{,}875 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}667 & -3{,}333 \\ 0 & 0 & -1{,}5 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -(-0{,}5)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -0{,}667 & -3{,}333 \end{bmatrix} \\ \leftarrow -(0{,}5)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -0{,}667 & -3{,}333 \end{bmatrix} \\ \\ \leftarrow -(-1{,}5)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -0{,}667 & -3{,}333 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1{,}5417 & 2{,}7708 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}0833 & 4{,}5417 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}667 & -3{,}333 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Gauss Jordan

Exemplo 2

- 8- A próxima **linha pivô é a quarta linha**, e seu **quarto elemento** é usado como pivô. A linha é normalizada com a sua divisão pelo elemento pivô:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1,5417 & 2,7708 \\ 0 & 1 & 0 & 1,0833 & 4,5417 \\ 0 & 0 & 1 & -0,667 & -3,333 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1,5417 & 2,7708 \\ 0 & 1 & 0 & 1,0833 & 4,5417 \\ 0 & 0 & 1 & -0,667 & -3,333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

- 9 - Em seguida, todos os **quartos elementos** nas linhas 1, 2 e 3 são **eliminados**;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1,5417 & 2,7708 \\ 0 & 1 & 0 & 1,0833 & 4,5417 \\ 0 & 0 & 1 & -0,667 & -3,333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -(1,5417)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \\ \leftarrow -(1,0833)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \\ \leftarrow -(-0,667)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Gauss Jordan

- Exemplo 2 – Resolver, pelo método de Gauss Jordan, o seguinte sistema de equações abaixo proposto.

- Dessa forma, a solução do sistema apresentado é dada por:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 12 \\ -6x_1 + 7x_2 + 6{,}5x_3 - 6x_4 &= -6{,}5 \\ x_1 + 7{,}5x_2 + 6{,}25x_3 + 5{,}5x_4 &= 16 \\ -12x_1 + 22x_2 + 15{,}5x_3 - x_4 &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

- Calculando a inversa da matriz [a], é possível resolver sistemas de equações do tipo [a][x] = [b] com mesmas matrizes de coeficientes [a] mas diferentes vetores de constantes [b]
- Uma vez conhecida a matriz inversa, a solução pode ser calculada como em:

$$[x] = [a]^{-1}[b]$$

- Cálculo da inversa de uma matriz:
  - Requer “alto” esforço matemático/computacional;
  - Alternativa= **Decomposição LU;**

Decomposição LU

- No método de Decomposição LU, a matriz de coeficientes [a] é decomposta (fatorada) em um produto de duas matrizes [L] e [U]:

$$[a] = [L][U] \qquad\qquad [L][U][x] = [b]$$

  - onde a matriz [L] é uma matriz triangular inferior e a matriz [U] é uma matriz triangular superior.

- Para resolver o problema, o produto [U][x] é definido como [y], o que leva a um novo sistema a ser resolvido, dado conforme:

$$[L][y] = [b]$$

$$\boxed{[U][x] = [y]}$$

Decomposição LU

- Método de Decomposição LU: Problema será solucionado em duas etapas:;

$$[L][y] = [b] \qquad\qquad [U][x] = [y]$$

  - Para uma dada matriz [*a*], serão apresentados dois métodos para determinação das matrizes correspondentes [*L*] e [*U*].
    - Um método relacionado ao método de eliminação de Gauss
    - Método de Crout;

Decomposição LU com Gauss

- Quando o procedimento de eliminação de Gauss é aplicado em uma matriz [a], os elementos das matrizes [L] e [U] já são calculados automaticamente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} \end{bmatrix}$$

Decomposição LU com Gauss

- Quando o procedimento de eliminação de Gauss é aplicado em uma matriz [a], os elementos das matrizes [L] e [U] já são calculados automaticamente:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 & 6 \\ -6 & 7 & 6{,}5 & -6 \\ 1 & 7{,}5 & 6{,}25 & 5{,}5 \\ -12 & 22 & 15{,}5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU via Método de Crout

- Decompõe-se a matriz [a] no produto [L][U], no qual os elementos diagonais da matriz [U] são todos iguais a 1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & (L_{11}U_{12}) & (L_{11}U_{13}) & (L_{11}U_{14}) \\ L_{21} & (L_{21}U_{12}+L_{22}) & (L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23}) & (L_{21}U_{14}+L_{22}U_{24}) \\ L_{31} & (L_{31}U_{12}+L_{32}) & (L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+L_{33}) & (L_{31}U_{14}+L_{32}U_{24}+L_{33}U_{34}) \\ L_{41} & (L_{41}U_{12}+L_{42}) & (L_{41}U_{13}+L_{42}U_{23}+L_{43}) & (L_{41}U_{14}+L_{42}U_{24}+L_{43}U_{34}+L_{44}) \end{bmatrix}$$

Decomposição LU via Método de Crout

- Para determinação dos coeficientes das matrizes [L] e [U] basta igualar os elementos correspondentes em ambos os lados da equação matricial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & (L_{11}U_{12}) & (L_{11}U_{13}) & (L_{11}U_{14}) \\ L_{21} & (L_{21}U_{12}+L_{22}) & (L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23}) & (L_{21}U_{14}+L_{22}U_{24}) \\ L_{31} & (L_{31}U_{12}+L_{32}) & (L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+L_{33}) & (L_{31}U_{14}+L_{32}U_{24}+L_{33}U_{34}) \\ L_{41} & (L_{41}U_{12}+L_{42}) & (L_{41}U_{13}+L_{42}U_{23}+L_{43}) & (L_{41}U_{14}+L_{42}U_{24}+L_{43}U_{34}+L_{44}) \end{bmatrix}$$

$$U_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}} \quad U_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}} \quad \text{e} \quad U_{14} = \frac{a_{14}}{L_{11}}$$

$$U_{23} = \frac{a_{23} - L_{21}U_{13}}{L_{22}} \quad \text{e} \quad U_{24} = \frac{a_{24} - L_{21}U_{14}}{L_{22}}$$

$$L_{41} = a_{41}, \quad L_{42} = a_{42} - L_{41}U_{12}, \quad L_{43} = a_{43} - L_{41}U_{13} - L_{42}U_{23}$$

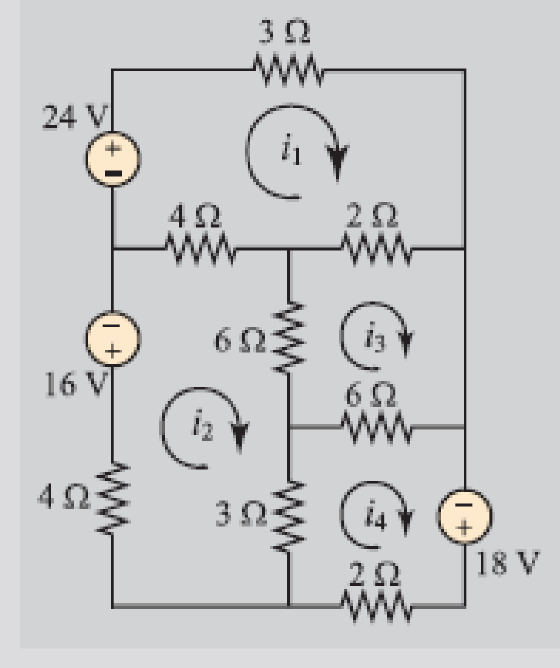
$$L_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12}$$

$$U_{34} = \frac{a_{34} - L_{31}U_{14} - L_{32}U_{24}}{L_{33}}$$

$$L_{44} = a_{44} - L_{41}U_{14} - L_{42}U_{24} - L_{43}U_{34}$$

Decomposição LU via Método de Crout

- Exemplo 3 - Determine as correntes i1, i2, i3 e i4 no circuito mostrado na figura. Resolva o sistema usando o método de decomposição LU e faça a decomposição empregando o método de Crout. Construa um algoritmo que generalize a solução.



$$\begin{bmatrix} 9 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 17 & -6 & -3 \\ -2 & -6 & 14 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -16 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix}$$

(Adaptado do Ex 4.6 Do Gilat)

Decomposição LU via Método de Crout

- Exemplo 3
  - Construção do algoritmo que generaliza a solução de um sistema nxn via LU Método de Crout

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & (L_{11}U_{12}) & (L_{11}U_{13}) & (L_{11}U_{14}) \\ L_{21} & (L_{21}U_{12}+L_{22}) & (L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23}) & (L_{21}U_{14}+L_{22}U_{24}) \\ L_{31} & (L_{31}U_{12}+L_{32}) & (L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+L_{33}) & (L_{31}U_{14}+L_{32}U_{24}+L_{33}U_{34}) \\ L_{41} & (L_{41}U_{12}+L_{42}) & (L_{41}U_{13}+L_{42}U_{23}+L_{43}) & (L_{41}U_{14}+L_{42}U_{24}+L_{43}U_{34}+L_{44}) \end{bmatrix}$$

Passo 1 Cálculo da primeira coluna de $[L]$:

para $i = 1, 2, \ldots, n$ $\quad L_{i1} = a_{i1}$

Passo 2 Substituição de (1s) na diagonal de $[U]$:

para $i = 1, 2, \ldots, n$ $\quad U_{ii} = 1$

(Adaptado do Ex 4.6 Do Gilat)

Decomposição LU via Método de Crout

- Exemplo 3
  - Construção do algoritmo que generaliza a solução de um sistema nxn via LU Método de Crout

Passo 3 Cálculo dos elementos da primeira linha de $[U]$ (exceto U_{11}, que já foi calculado):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & (L_{11}U_{12}) & (L_{11}U_{13}) & (L_{11}U_{14}) \\ L_{21} & (L_{21}U_{12}+L_{22}) & (L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23}) & (L_{21}U_{14}+L_{22}U_{24}) \\ L_{31} & (L_{31}U_{12}+L_{32}) & (L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+L_{33}) & (L_{31}U_{14}+L_{32}U_{24}+L_{33}U_{34}) \\ L_{41} & (L_{41}U_{12}+L_{42}) & (L_{41}U_{13}+L_{42}U_{23}+L_{43}) & (L_{41}U_{14}+L_{42}U_{24}+L_{43}U_{34}+L_{44}) \end{bmatrix}$$

$$\text{para } j = 2, 3, \ldots, n \qquad U_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{11}}$$

(Adaptado do Ex 4.6 Do Gilat)

Decomposição LU via Método de Crout

- Exemplo 3
  - Construção do algoritmo que generaliza a solução de um sistema nxn via LU Método de Crout

Passo 4 Cálculo dos demais elementos linha após linha (i é o número da linha e j é o número da coluna). Os elementos de $[L]$ são calculados primeiro porque eles

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & (L_{11}U_{12}) & (L_{11}U_{13}) & (L_{11}U_{14}) \\ L_{21} & (L_{21}U_{12}+L_{22}) & (L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23}) & (L_{21}U_{14}+L_{22}U_{24}) \\ L_{31} & (L_{31}U_{12}+L_{32}) & (L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+L_{33}) & (L_{31}U_{14}+L_{32}U_{24}+L_{33}U_{34}) \\ L_{41} & (L_{41}U_{12}+L_{42}) & (L_{41}U_{13}+L_{42}U_{23}+L_{43}) & (L_{41}U_{14}+L_{42}U_{24}+L_{43}U_{34}+L_{44}) \end{bmatrix}$$

para $i = 2, 3, \ldots, n$

para $j = 2, 3, \ldots, i$

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=j-1} L_{ik}U_{kj}$$

para $j = (i+1), (i+2), \ldots, n$

$$U_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=i-1} L_{ik}U_{kj}}{L_{ii}}$$

(Adaptado do Ex 4.6 Do Gilat)

Decomposição LU via Método de Crout

- Exemplo 3
  - Construção do algoritmo que generaliza a solução de um sistema nxn via LU Método de Crout

Passo 4 Cálculo dos demais elementos linha após linha (i é o número da linha e j é o número da coluna). Os elementos de $[L]$ são calculados primeiro porque eles são usados no cálculo dos elementos de $[U]$:

para $i = 2, 3, \ldots, n$

para $j = 2, 3, \ldots, i$

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=j-1} L_{ik}U_{kj}$$

para $j = (i+1), (i+2), \ldots, n$

$$U_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=i-1} L_{ik}U_{kj}}{L_{ii}}$$

(Adaptado do Ex 4.6 Do Gilat)

Decomposição LU via Método de Crout

- Exemplo 3
  - Construção do programa LU Método de Crout generalizado;
  - Deste programa é possível extrair as matrizes [L] e [U].

```
function [L,U] = LUCrout(A)
% Função que decompõe a matriz [A] de coeficientes em duas matrizes L e U:
% Entrada
% A  - Matrix de coeficientes.
% Saidas:
% L  -Lower triangular matrix.
% U  -Upper triangular matrix.

[R, C] = size(A);
for i = 1:R
    L(i,1) = A(i,1); %Passo 1
    U(i,i) = 1;      %Passo 2
end

for j = 2:R
    U(1,j)= A(1,j)/L(1,1); %Passo 3
end

for i = 2:R
    for j = 2:i
        L(i,j)=A(i,j)-L(i,1:j-1)*U(1:j-1,j); %Passo 4a
    end
    for j = i+1:R
        U(i,j)=(A(i,j)-L(i,1:i-1)*U(1:i-1,j))/L(i,i); %Passo 4b
    end
end
```

(Adaptado do Ex 4.6 Do Gilat)

Decomposição LU via Método de Crout

- Exemplo 3
  - Construção do programa LU Método de Crout generalizado;
  - Deste programa é possível extrair as matrizes [L] e [U].

```
>> A =[9 -4 -2 0; -4 17 -6 -3; -2 -6 14 -6; 0 -3 -6 11];
>> b=[24 -16 0 18]';
>>  [L,U]=LUCrout(A)
L =

    9.0000         0         0         0
   -4.0000   15.2222         0         0
   -2.0000   -6.8889   10.4380         0
         0   -3.0000   -7.3577    5.2224

U =

   1.0000   -0.4444   -0.2222         0
        0    1.0000   -0.4526   -0.1971
        0         0    1.0000   -0.7049
        0         0         0    1.0000
```

(Adaptado do Ex 4.6 Do Gilat)

Decomposição LU via Método de Crout

- Exemplo 3
  - Construção do programa para solução do sistema progressivo [L][y]=[b];
  - Deste programa é possível o valor de y.

```
>> y=ProgresSub(L,b)
y =

   2.6667
  -0.3504
   0.2797
   3.6395
```

```
function y = ProgresSub(A,b)
##A função resolve um sistema de equações lineares Ax = b, onde A é um
##matriz triangular inferior, usando a substituição progressiva.

##Variáveis de entrada:
##[A]-Matriz de coeficientes.
##[b]Vetor coluna de constantes.

##Variável de saída:
## y - Vetor coluna com a solução

n=length(b);
y(1,1)=b(1)/A(1,1);
for i=2:n
  y(i,1)=(b(i)-A(i,1:i-1)*y(1:i-1,1))./A(i,i);
end

endfunction
```

(Adaptado do Ex 4.6 Do Gilat)

Decomposição LU via Método de Crout

- Exemplo 3
  - Construção do programa para solução do sistema regressivo [U][x]=[y];
  - Deste programa é possível o valor de x.

```
function y = RegresSub(A,b)
##A função resolve um sistema de equações lineares Ax = b, onde A é um
##matriz triangular superior, usando a substituição regressiva.

##Variáveis de entrada:
##[A]-Matriz de coeficientes.
##[b]Vetor coluna de constantes.

##Variável de saída:
## y - Vetor coluna com a solução.b

n=length(b);
y(n,1)=b(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
  y(i,1)=(b(i)-A(i,i+1:n)*y(i+1:n,1))./A(i,i);
end

endfunction
```

```
>> x=RegresSub(U,y)
x =

   4.0343
   1.6545
   2.8452
   3.6395
```

Solução do sistema

```
i =
   4.0343
   1.6545
   2.8452
   3.6395
```

(Adaptado do Ex 4.6 Do Gilat)

Referências Bibliográficas

- **Amos Gilat e Vish Subramaniam. Métodos Numéricos para engenheiros e cientistas. Uma introdução com aplicações utilizando o Matlab. Porto Alegre. Bookman, 2008**

- Ruggiero, Márcia A. Gomes; Lopes, Vera Lúcia Da Rocha. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos E Computacionais. Editora Pearson, 2ª edição, São Paulo, 2005.

- Décio Sperandio, João Teixeira Mendes e Luiz Henry Monken. Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos. Editora Prentice-Hall, 2ª edição, São Paulo, 1999.

- Steven C. Chapra. Métodos Numéricos Aplicados com MatLab para Engenheiros e Cientistas. Editora McGraw Hill, 3ª edição, São Paulo, 2013.