MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS A ENGENHARIA

INTERPOLAÇÃO

2020/1

Profª Polliana Cândida Oliveira Martins.

Engenharias– FGA UnB

Interpolação

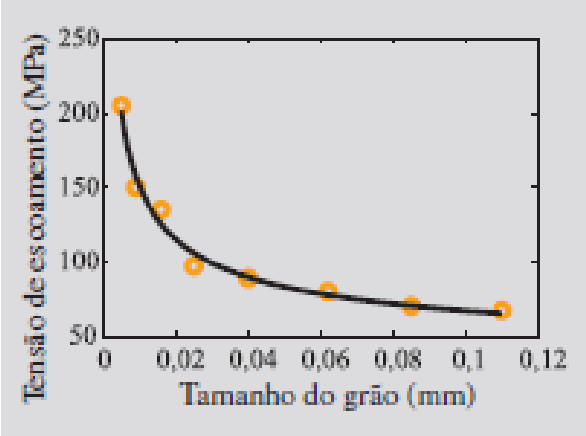
- Introdução
- Interpolação usando único polinômio
  - Polinômio Interpolador de Lagrange
  - Polinômio Interpolador de Newton
- Interpolação por partes (spline)
  - Splines Lineares
  - Splines Quadraticas
  - Splines Cúbicas

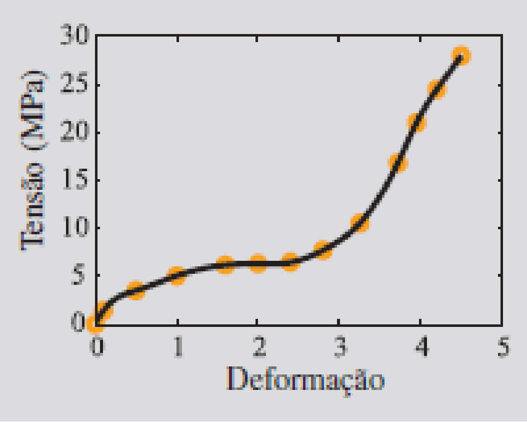
Introdução

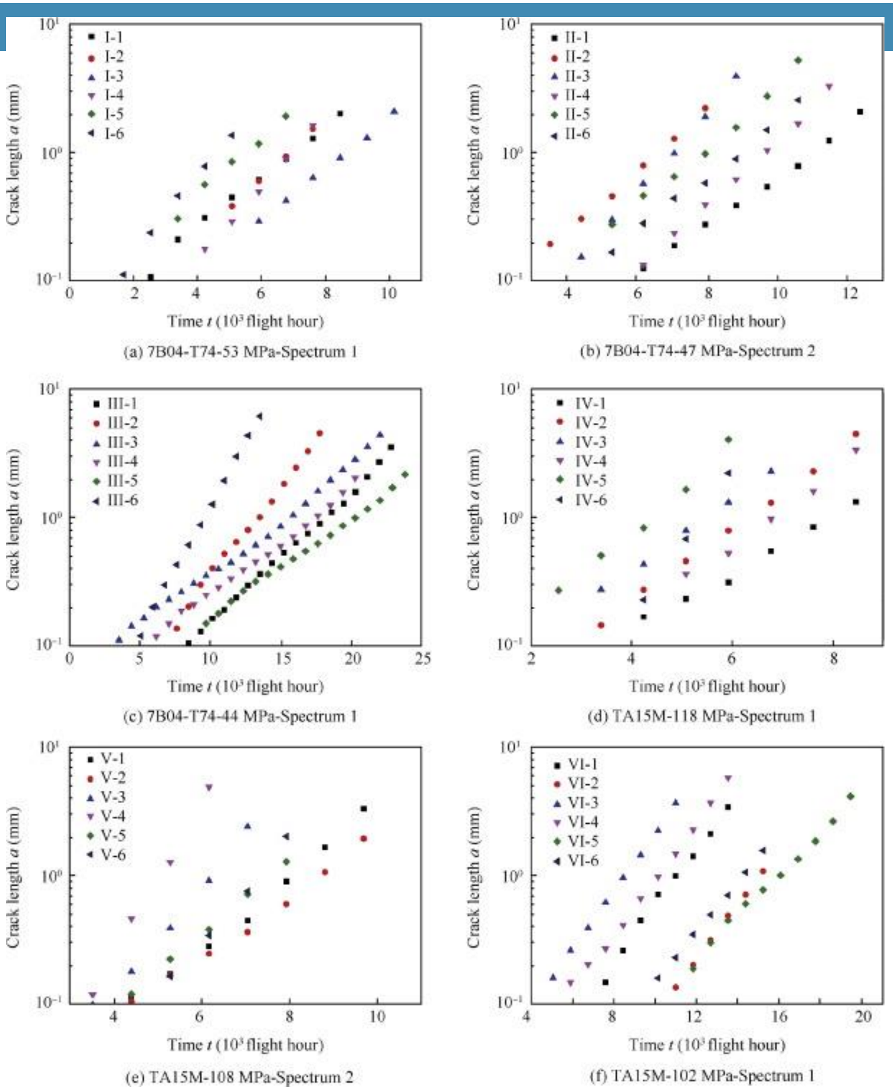
- Muitas observações científicas e de engenharia são feitas em experimentos nos quais grandezas físicas são medidas e gravadas. Tais registros são normalmente chamados de dados ou pontos experimentais.

Tabela 5-1 Dados da dureza dos grãos em função de sua dimensão

d (mm)	0,005	0,009	0,016	0,025	0,040	0,062	0,085	0,110
σ_y (MPa)	205	150	135	97	89	80	70	67



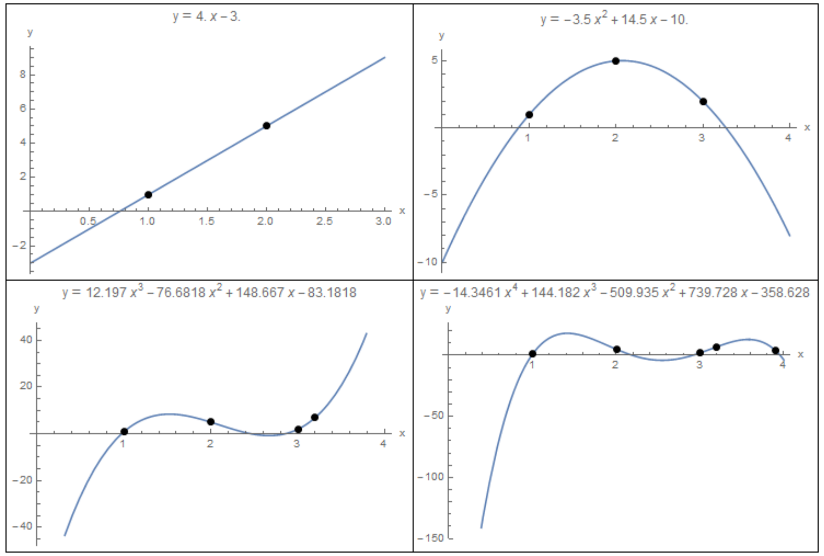


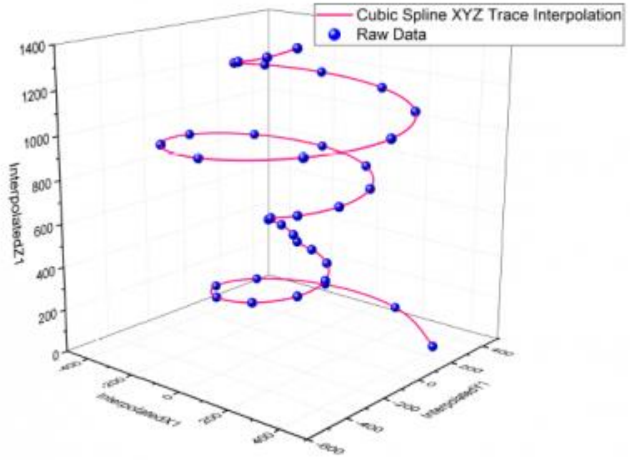


https://doi.org/10.1016/j.cja.2018.02.002

Introdução

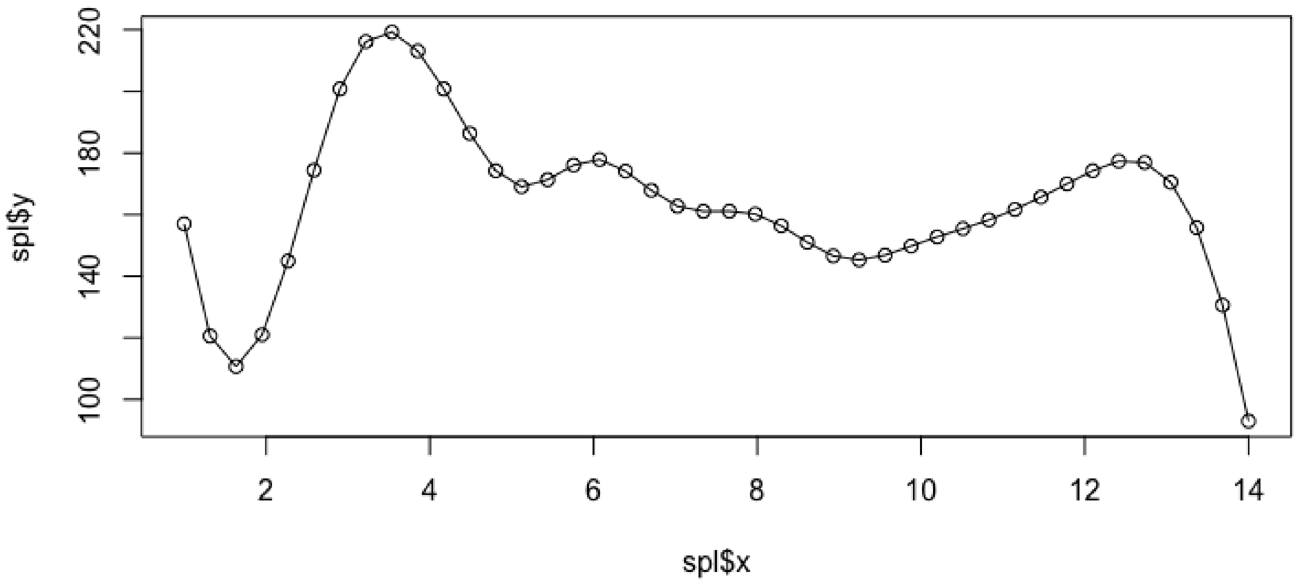
- **Interpolação**
  - Procedimento empregado na estimativa de valores entre os pontos conhecidos de um conjunto de dados.
  - Ela é feita primeiramente com a determinação de um polinômio que forneça **o valor exato nos pontos conhecidos**, e então com o uso desse polinômio para calcular valores entre esses pontos.



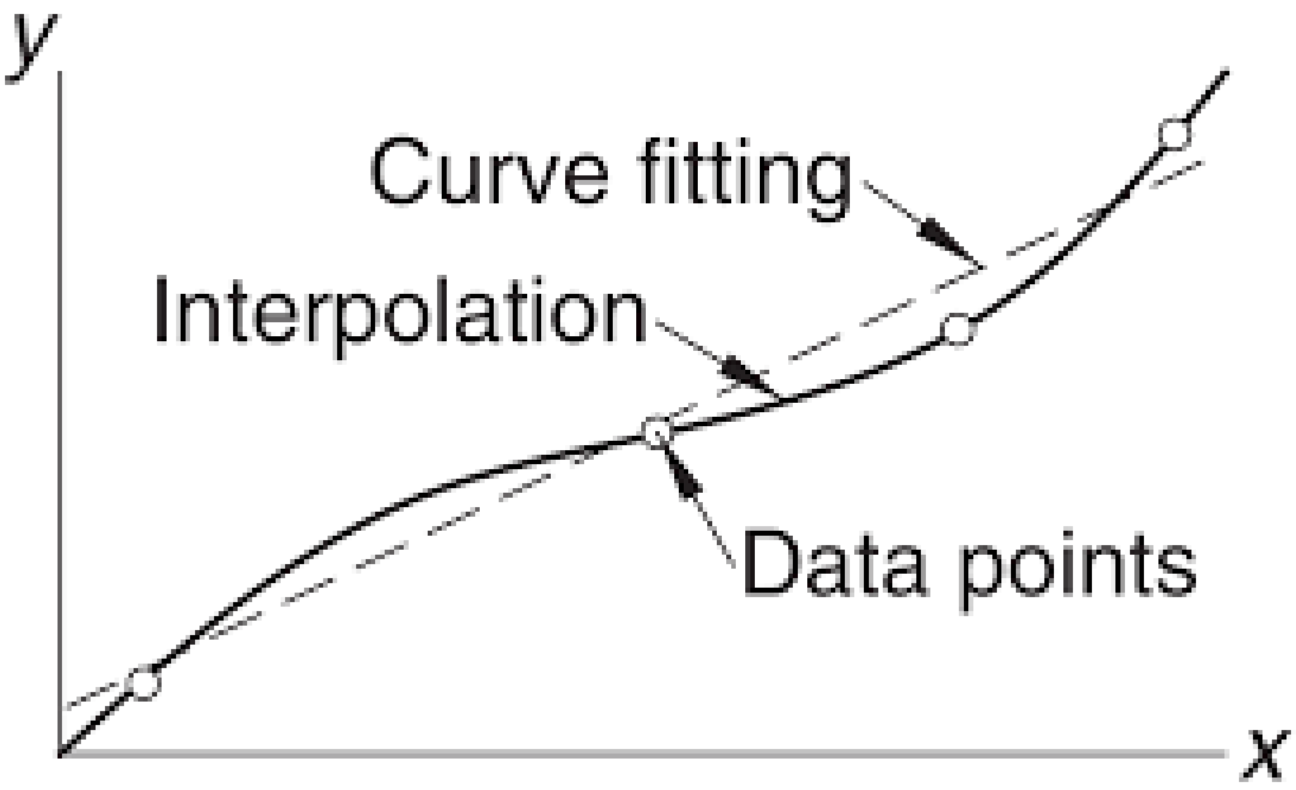


Introdução

- Interpolação
  - Quando se tem um grande número de pontos, diferentes polinômios são usados nos intervalos entre os pontos. Esse processo é chamado de interpolação por partes, ou spline.



Introdução



Interpolação

- Interpolação usando único polinômio
  - Nesse tópico a interpolação será feita utilizando um único polinômio, independente do número de pontos envolvidos.
  - A interpolação usando um único polinômio fornece bons resultados apenas para um pequeno número de pontos.
  - Para um grande número de pontos, a ordem do polinômio deve ser elevada e, embora esse polinômio passe por todos os pontos, ele pode apresentar um desvio significativo fora deles. ->Splines

Interpolação

- Interpolação usando único polinômio

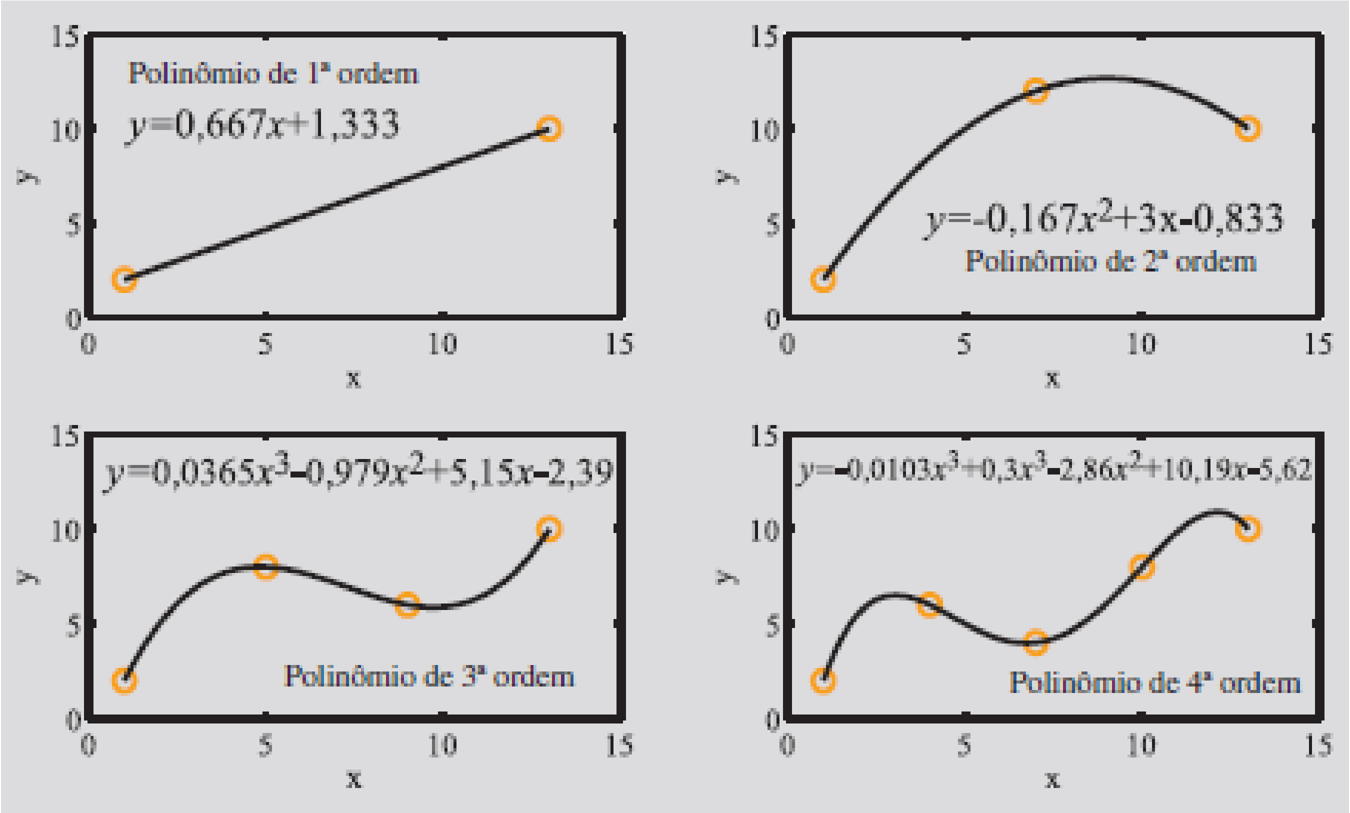


Figura 5-11 Polinômios de várias ordens.

Interpolação

- Interpolação usando único polinômio
  - Para um dado conjunto de n pontos, apenas um (único) polinômio de ordem m ($m = n - 1$) passa exatamente por todos os pontos;

  - Uma vez determinado o polinômio, ele pode ser usado para estimar os valores de y entre os pontos conhecidos, o que é feito simplesmente com a substituição da coordenada x desejada no polinômio.

  - Esse polinômio, no entanto, pode ser escrito de diferentes formas matemáticas
    - Padrão, Lagrange e Newton

Interpolação

- Interpolação usando único polinômio
  - Polinômio Padrão

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

    - Os coeficientes nesta forma são determinados com a solução de um sistema de *m* + 1 equações lineares;
    - As equações são obtidas escrevendo-se o polinômio explicitamente em cada ponto (substituindo cada ponto no polinômio).

Interpolação

- Polinômio Interpolador de Lagrange

  - formam uma classe específica de polinômios que podem ser usados para fazer o ajuste de um determinado conjunto de dados simplesmente a partir dos valores dos pontos.

  - Os polinômios podem ser escritos diretamente, e os coeficientes são determinados sem a necessidade de nenhum cálculo preliminar.
    - Não é necessário a solução de sistema de equações (padrão) que pode acarretar em matrizes mal condicionadas, custo computacional elevado, etc.

Interpolação

- Polinômio Interpolador de Lagrange

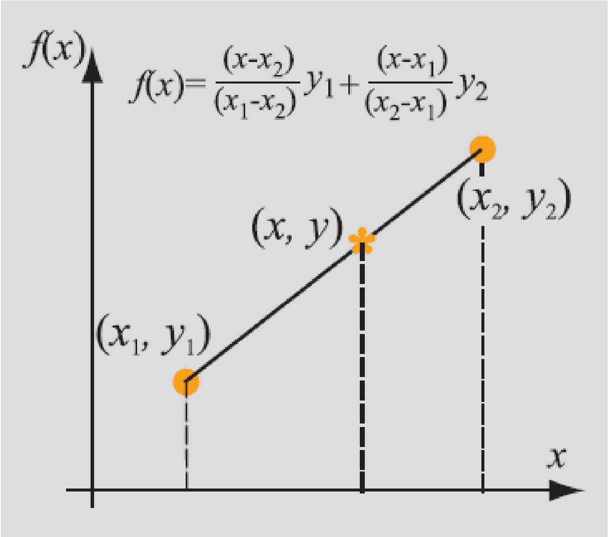


Figura 5-12 Polinômio de Lagrange de primeira ordem.

Para dois pontos, (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

$$f(x) = y = a_1(x-x_2)+a_2(x-x_1)$$

$$y_1 = a_1(x_1-x_2)+a_2(x_1-x_1) \quad \text{ou} \quad a_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_2)}$$

$$y_2 = a_1(x_2-x_2)+a_2(x_2-x_1) \quad \text{ou} \quad a_2 = \frac{y_2}{(x_2-x_1)}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}y_2}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}x + \frac{x_2y_1-x_1y_2}{(x_2-x_1)}}$$

Interpolação

- Polinômio Interpolador de Lagrange

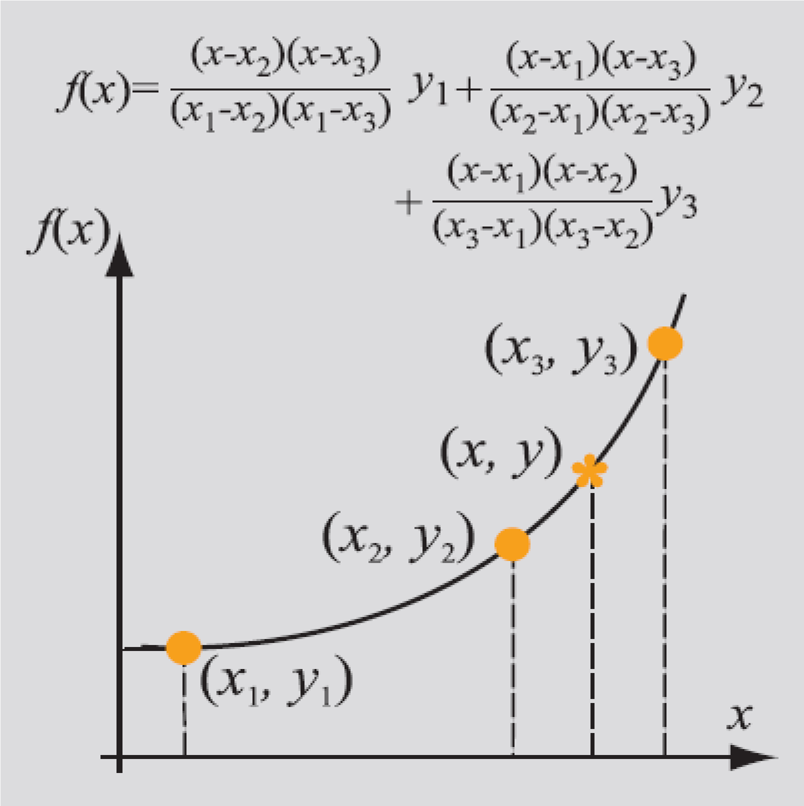


Figura 5-13 Polinômio de Lagrange de segunda ordem.

Para três pontos, (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3)

$$f(x) = y = a_1(x-x_2)(x-x_3)+$$
$$+a_2(x-x_1)(x-x_3)+a_3(x-x_1)(x-x_2)$$

$$f(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

Interpolação

- Polinômio Interpolador de Lagrange
  - Formula Geral do Polinômio Interpolador de Lagrange de ordem n-1 que passa por n pontos.

$$f(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}y_2+$$

$$\dots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}y_i+\dots+$$

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}y_iL_i(x)=\sum_{i=1}^{n}y_i\prod_{\substack{j=1\\ i\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

as funções $L_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$ são chamadas de funções de Lagrange.

Interpolação

- Polinômio Interpolador de Lagrange
  - Notas adicionais sobre os polinômios de Lagrange
    - O espaçamento entre os pontos que compõem o conjunto de dados não precisa ser igual.
    - Para um dado conjunto de dados, deve-se calcular a expressão completa do polinômio interpolador para cada valor de x. Em outras palavras, os cálculos de interpolação para cada valor de x são independentes dos demais.
    - Se um valor interpolado for calculado para um dado conjunto de dados e então esse conjunto de dados for ampliado para incluir pontos adicionais, todos os termos do polinômio de Lagrange devem ser calculados novamente.

Interpolação

Exercício I – 01a

- **Considere o conjunto de dados a seguir:**

x	1	2	4	5	7
y	52	5	-5	-40	10

a) **Determine o polinômio de Lagrange de quarta ordem que passa pelos cinco pontos**

Utilizando a Formula Geral do Polinômio Interpolador de Lagrange de ordem 4 que passa por 5 pontos, temos que:

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-4)(x-5)(x-7)}{(1-2)(1-4)(1-5)(1-7)}52+\frac{(x-1)(x-4)(x-5)(x-7)}{(2-1)(2-4)(2-5)(2-7)}5+\frac{(x-1)(x-2)(x-5)(x-7)}{(4-1)(4-2)(4-5)(4-7)}(-5)+\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-7)}{(5-1)(5-2)(5-4)(5-7)}(-40)+\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(7-1)(7-2)(7-4)(7-5)}10$$

Interpolação

- **Exercício I – 01b**
  - **Considere o conjunto de dados a seguir:**

x	1	2	4	5	7
y	52	5	-5	-40	10

b) Use o polinômio obtido para determinar o valor interpolado em x = 3.

Substituindo x=3 em:

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-4)(x-5)(x-7)}{(1-2)(1-4)(1-5)(1-7)}52+\frac{(x-1)(x-4)(x-5)(x-7)}{(2-1)(2-4)(2-5)(2-7)}5+\frac{(x-1)(x-2)(x-5)(x-7)}{(4-1)(4-2)(4-5)(4-7)}(-5)+$$
$$\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-7)}{(5-1)(5-2)(5-4)(5-7)}(-40)+\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(7-1)(7-2)(7-4)(7-5)}10$$

Tem-se que f(3)=6

Interpolação

- Polinômios Interpoladores de Newton
  - Fórmula popularmente usada no ajuste exato de um conjunto de dados;

$$f(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

  - Os coeficientes a_1 a a_n podem ser determinados a partir de um procedimento matemático simples;
    - a determinação dos coeficientes não requer a solução de um sistema com n equações;
  - Uma vez conhecidos os coeficientes, o polinômio pode ser utilizado para calcular um valor interpolado qualquer em x;

Interpolação

- Polinômios Interpoladores de Newton
  - Os pontos do conjunto de dados não precisam estar ordenados de forma ascendente ou descendente, ou mesmo em qualquer ordem.

  - Após a determinação dos n coeficientes de um polinômio interpolador de Newton de ordem n – 1, mais pontos podem ser adicionados ao conjunto de dados, sendo necessário apenas determinar os coeficientes adicionais;

Interpolação

- Polinômios Interpoladores de Newton

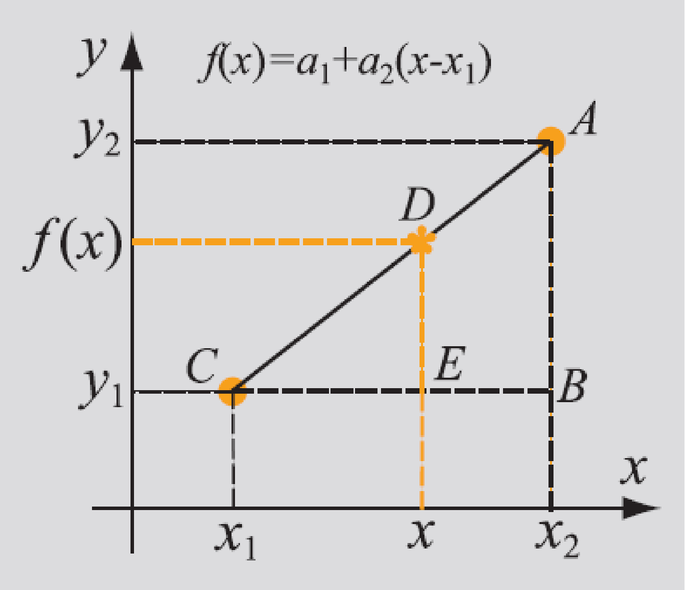


Figura 5-14 Polinômio de Newton de primeira ordem.

Para dois pontos, (x_1, y_1) e (x_2, y_2)

$$f(x) = a_1 + a_2(x - x_1)$$

$$\frac{DE}{CE} = \frac{AB}{CB}, \quad \text{ou} \quad \frac{f(x) - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\boxed{a_1 = y_1} \quad \text{e} \quad \boxed{a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Interpolação

- Polinômios Interpoladores de Newton
  - Forma geral do polinômio de Newton e de seus coeficientes: Diferenças divididas;
  - Para dois pontos, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), a primeira diferença dividida, escrita como $f[x_2, x_1]$, é definida como a inclinação da reta que conecta os dois pontos.

$$f[x_2, x_1] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a_2$$

    - A primeira diferença dividida é igual ao coeficiente a_2.

Interpolação

- Polinômios Interpoladores de Newton
  - Forma geral do polinômio de Newton e de seus coeficientes: Diferenças divididas;
  - Para três pontos, (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), a segunda diferença dividida, escrita como $f[x_3, x_2, x_1]$, é definida como a diferença entre as primeiras diferenças divididas dos pontos (x_3, y_3) e (x_2, y_2) e dos pontos (x_2, y_2) e (x_1, y_1), dividida por $(x_3 - x_1)$:

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{(x_3 - x_1)} = a_3$$

    - A segunda diferença dividida é portanto igual ao coeficiente a_3.

Interpolação

- Polinômios Interpoladores de Newton
  - Forma geral do polinômio de Newton e de seus coeficientes: Diferenças divididas.
    - Para quatro pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) e (x_4, y_4), a terceira diferença dividida, escrita como $f[x_4, x_3, x_2, x_1]$, é definida como a diferença entre as segundas diferenças divididas dos pontos (x_2, y_2), (x_3, y_3) e (x_4, y_4) e dos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), dividida por $(x_4 - x_1)$
      - A terceira diferença dividida é portanto igual ao coeficiente a_4.

$$f[x_4, x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_4, x_3, x_2] - f[x_3, x_2, x_1]}{x_4 - x_1}$$

$$= \frac{\dfrac{f[x_4, x_3] - f[x_3, x_2]}{x_4 - x_2} - \dfrac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1}}{(x_4 - x_1)}$$

$$= \frac{\dfrac{\left(\dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} - \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right)}{(x_4 - x_2)} - \dfrac{\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{(x_3 - x_1)}}{(x_4 - x_1)} = a_4$$

Interpolação

- Polinômios Interpoladores de Newton
  - Forma geral do polinômio de Newton e de seus coeficientes: Diferenças divididas.:
  - A próxima (quarta) diferença dividida (quando cinco pontos são dados) é:

$$f[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_5, x_4, x_3, x_2] - f[x_4, x_3, x_2, x_1]}{x_5 - x_1} = a_5$$

    - Se mais pontos forem fornecidos, o procedimento para calcular diferenças maiores continua da mesma maneira.

Interpolação

- Polinômios Interpoladores de Newton

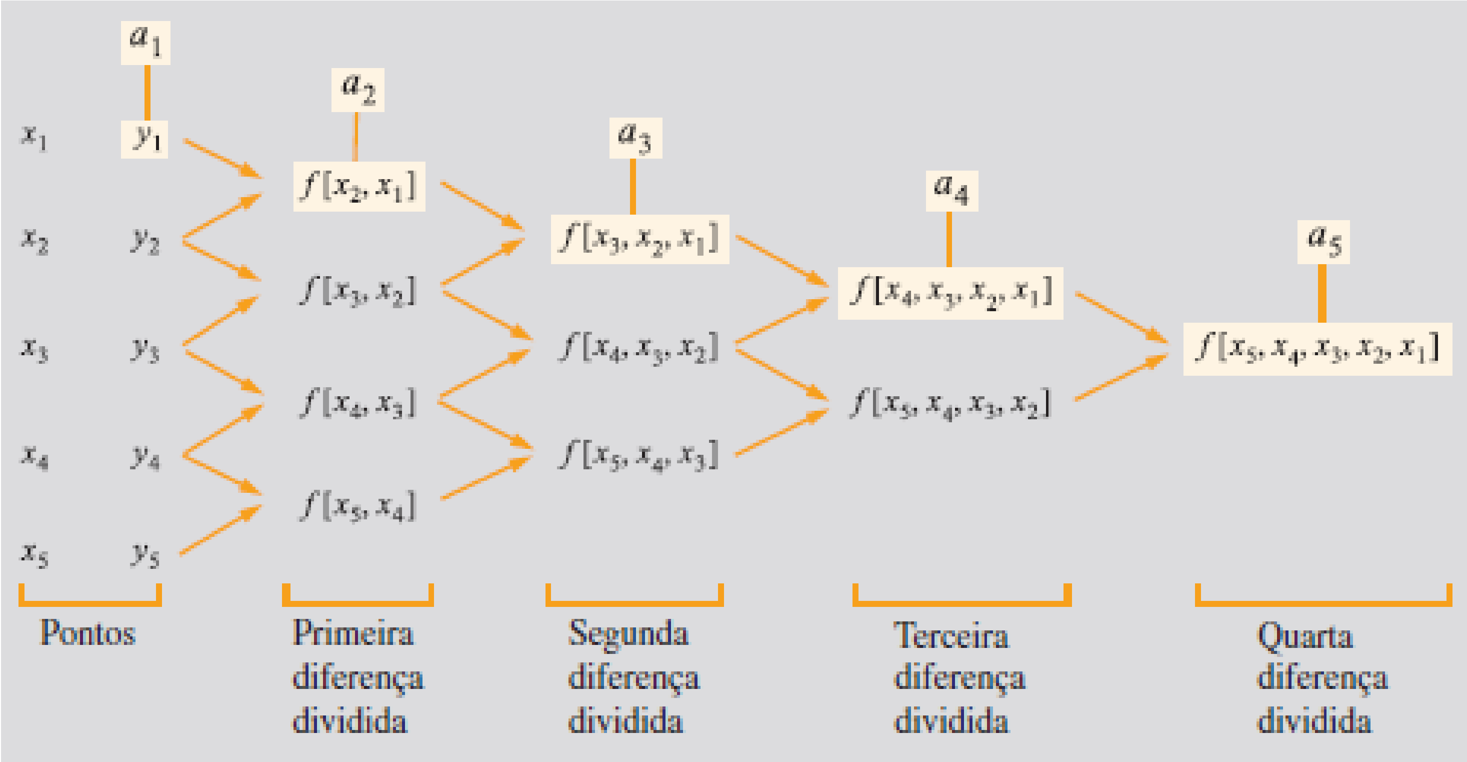


Figura 5-16 Tabela de diferenças divididas para um conjunto de dados com cinco pontos.

Interpolação

- Polinômios Interpoladores de Newton
  - Em geral, quando n pontos são dados, o procedimento começa com o cálculo das $(n - 1)$ primeiras diferenças divididas.
  - Depois, $(n - 2)$ segundas diferenças divididas são calculadas a partir das primeiras diferenças divididas.
  - Este passo é sucedido do cálculo das $(n - 3)$ terceiras diferenças divididas a partir das segundas diferenças divididas.
  - O processo termina quando a n-ésima diferença dividida é calculada a partir das duas $(n - 1)$ diferenças divididas para fornecer o coeficiente a_n.

$$f[x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2, x_1] = \frac{f[x_k, x_{k-1}, \ldots, x_3, x_2] - f[x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_2, x_1]}{x_k - x_1}$$

Interpolação

- Polinômios Interpoladores de Newton
  - Com essas definições, o polinômio de Newton de ordem (n – 1), é dado por:

$$f(x) = y = \underbrace{y_1}_{a_1} + \underbrace{f[x_2, x_1]}_{a_2}(x - x_1) + \underbrace{f[x_3, x_2, x_1]}_{a_3}(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$

$$\dots + \underbrace{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1]}_{a_n}(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}) \quad (5.63)$$

Interpolação

- Notas sobre os polinômios de Newton
  - O espaçamento entre os pontos que compõem o conjunto de dados não precisa ser o mesmo.

  - Em um dado conjunto de dados com n pontos, os coeficientes a_1 a a_n, assim que determinados, podem ser usados para interpolar quaisquer dos pontos que compõem o conjunto de dados.

Interpolação

Exercício I – 02a

- **Considere o conjunto de dados a seguir:**

x	1	2	4	5	7
y	52	5	-5	-40	10

a) **Determine o polinômio de Newton de quarta ordem que passa pelos cinco pontos**

Utilizando a Formula Geral do Polinômio Interpolador de Newton de ordem 4 que passa por 5 pontos, temos que:

$$f(x) = y = a_1 + a_2(x-1) + a_3(x-1)(x-2) + a_4(x-1)(x-2)(x-4) +$$

$$+ a_5(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$$

Interpolação

- **Exercício I – 02a**

Os coeficientes podem ser determinados a partir da seguinte tabela de diferenças divididas

x_i	y_i				
	$a_1 = 52$	$a_2 = -47$	$a_3 = 14$	$a_4 = -6$	$a_5 = 2$
1	52				
		$\frac{5-52}{2-1} = -47$			
2	5		$\frac{-5-(-47)}{4-1} = 14$		
		$\frac{-5-5}{4-2} = -5$		$\frac{-10-14}{5-1} = -6$	
4	-5		$\frac{-35-(-5)}{5-2} = -10$		$\frac{6-(-6)}{7-1} = 2$
		$\frac{-40-(-5)}{5-4} = -35$		$\frac{20-(-10)}{7-2} = 6$	
5	-40		$\frac{25-(-35)}{7-4} = 20$		
		$\frac{10-(-40)}{7-5} = 25$			
7	10				

Interpolação

Exercício I – 02a

- **Considere o conjunto de dados a seguir:**

x	1	2	4	5	7
y	52	5	-5	-40	10

a) **Determine o polinômio de Newton de quarta ordem que passa pelos cinco pontos**

Com os coeficientes determinados, o polinômio é dado por:

$$f(x) = y = 52 - 47(x-1) + 14(x-1)(x-2) - 6((x-1)(x-2)(x-4))$$

$$+ 2(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$$

Interpolação

Exercício I – 02b

- **Considere o conjunto de dados a seguir:**

x	1	2	4	5	7
y	52	5	-5	-40	10

b) Use o polinômio obtido para determinar o valor interpolado em x = 3.

Substituindo x=3 em:

$$f(3) = y = 52 - 47(3-1) + 14(3-1)(3-2) - 6((3-1)(3-2)(3-4)) + 2(3-1)(3-2)(3-4)(3-5) = 6$$

Tem-se que f(3)=6

Interpolação

Interpolação por partes (spline)

- Quando um conjunto de dados contendo *n* pontos é dado e um único polinômio é usado para fazer a sua interpolação, esse polinômio fornece os valores exatos nos pontos e determina valores estimados (interpolados) entre eles.

- SPLINES: Quando se trabalha com um grande número de pontos, uma melhor interpolação pode ser feita com o uso de muitos polinômios de baixa ordem ao invés de um único polinômio de ordem elevada.
  - Cada polinômio de baixa ordem é válido em um intervalo entre dois ou vários pontos.
  - Tipicamente, todos os polinômios utilizados têm a mesma ordem, mas os coeficientes são diferentes em cada intervalo.

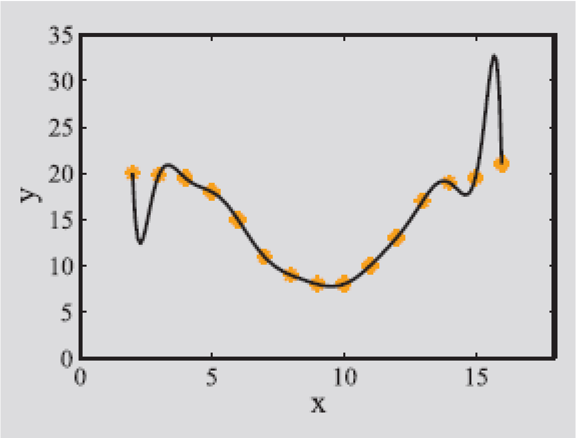
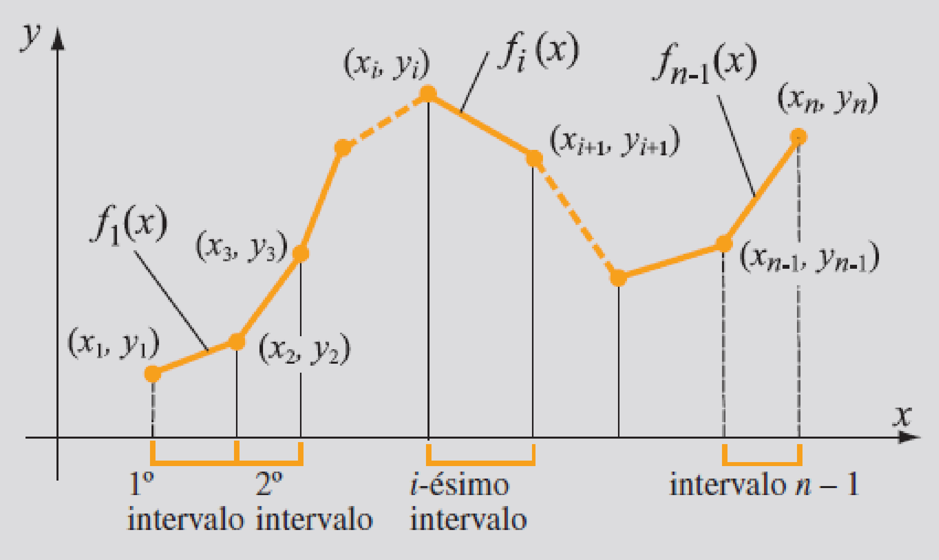


Figura 5-17 Uso de um polinômio de 15ª ordem para fazer o ajuste de 16 pontos.

Interpolação

- **Spline Lineares**
  - a interpolação é feita usando um polinômio de primeira ordem (função linear), e os pontos são conectados por linhas retas.



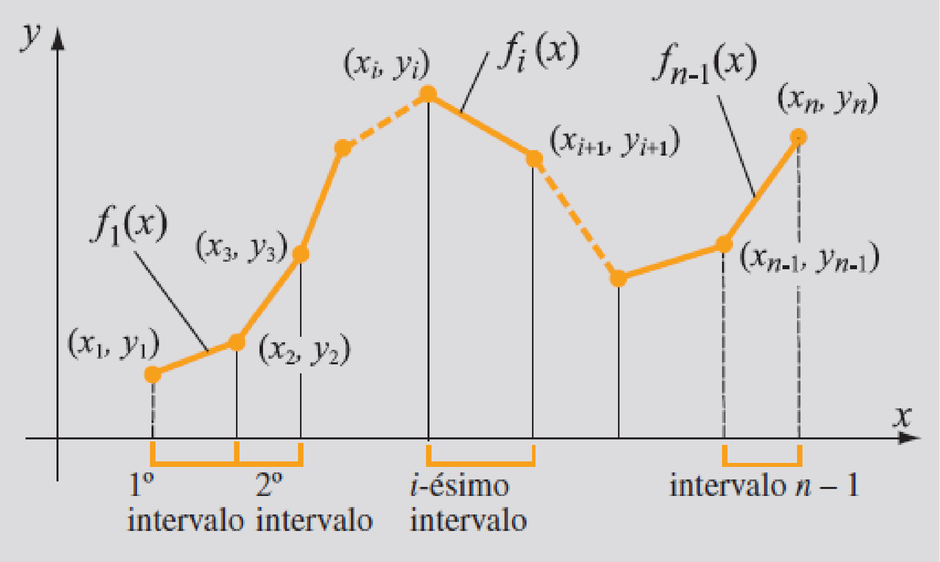
A equação da linha reta que conecta os dois primeiros pontos é dada por:

$$f_1(x) = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} y_2$$

Splines lineares resultam em uma interpolação contínua, já que os dois polinômios adjacentes têm o mesmo valor em um nó comum. Há, no entanto, uma descontinuidade na inclinação das splines lineares nos nós.

Interpolação

- **Spline Lineares**
  - a interpolação é feita usando um polinômio de primeira ordem (função linear), e os pontos são conectados por linhas retas.



Em um conjunto de n pontos, há $n - 1$ intervalos. A interpolação no intervalo i, que está entre os pontos x_i e x_{i+1} ($x_i \leq x \leq x_{i+1}$), é feita usando a equação da linha reta que conecta o ponto (x_i, y_i) ao ponto (x_{i+1}, y_{i+1}):

$$f_i(x) = \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} y_i + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} y_{i+1}$$

$$\text{para } i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Interpolação

Spline Linear

- Exemplo S1a : Determinar as splines lineares que fazem o ajuste do seguinte conjunto de dados.

- Quatro pontos – três splines:

x	8	11	15	18
y	5	9	10	8

$$f_1(x)=\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}y_2 = \frac{(x-11)}{(8-11)}5+\frac{(x-8)}{(11-8)}9 = \frac{5}{-3}(x-11)+\frac{9}{2}(x-8) \quad \text{para} \quad 8\le x\le 11$$

$$f_2(x)=\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_2)}{(x_3-x_2)}y_3=\frac{(x-15)}{(11-15)}9+\frac{(x-11)}{(15-11)}10=\frac{9}{-4}(x-15)+\frac{10}{4}(x-11) \quad \text{para} \quad 11\le x\le 15$$

$$f_3(x)=\frac{(x-x_4)}{(x_3-x_4)}y_3+\frac{(x-x_3)}{(x_4-x_3)}y_4=\frac{(x-18)}{(15-18)}10+\frac{(x-15)}{(18-15)}8=\frac{10}{-3}(x-18)+\frac{8}{3}(x-15) \quad \text{para} \quad 15\le x\le 18$$

Interpolação

- **Spline Linear**
  - Exemplo S1b : Determinar o valor interpolado em x=12,7 tomando como base o mesmo conjunto anterior de pontos

x	8	11	15	18
y	5	9	10	8

  - Se x=12.7, y= 9.425, uma vez que:

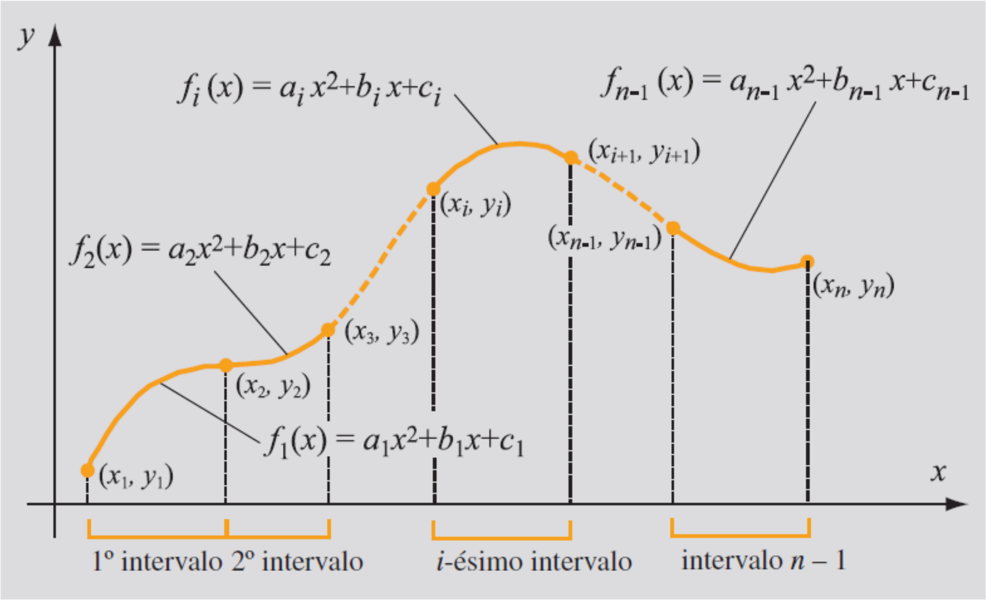
$$f_2(x) = \frac{9}{-4}(x-15) + \frac{10}{4}(x-11) \quad \text{para} \quad 11 \leq x \leq 15$$

Interpolação

- Spline Quadrática
  - A interpolação é feita por polinômios de segunda ordem.

Em um conjunto de *n* pontos, há *n* – 1 intervalos, e, usando a forma padrão, a equação do polinômio no *i*-ésimo intervalo, localizado entre os pontos x_i e x_{i+1}, é dada por:

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$



Interpolação

- Spline Quadrática
  - De forma geral, há n – 1 equações.
    - Cada equação tem três coeficientes: um total de 3(n – 1) = 3n – 3 coeficientes têm que ser determinados.

  - C1 - Cada polinômio $f_i(x)$ deve passar pelos pontos finais do intervalo, (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}), o que significa que $f_i(x_i) = y_i$ e $f_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$:

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

    - Como há n – 1 intervalos, essa condição fornece 2(n – 1) = 2n – 2 equações.

Interpolação

- Spline Quadrática
  - C2 - Nos nós internos, as inclinações (derivadas primeiras) dos polinômios de intervalos adjacentes são iguais. Isso significa que, com a transição da curva que passa por um nó interno de um polinômio para outro, a inclinação deve ser contínua. A derivada primeira do i-ésimo polinômio é:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 2a_i x + b_i$$

  - Para n pontos, o primeiro ponto interno é i = 2 e o último é i = n – 1. Igualando as derivadas primeiras em todos os pontos internos, obtém-se:

$$2a_{i-1}x_i + b_{i-1} = 2a_i x_i + b_i \quad \text{para} \quad i = 2, 3, \ldots, n-1$$

  - Como há n – 2 pontos internos, essa condição fornece n – 2 equações.

Interpolação

- Spline Quadrática
  - C1 e C2 juntas fornecem 3n-4 equações;
  - Os n-1 polinômios tem 3n-3 coeficientes – de forma que uma equação adicional deve ser definida para que os coeficientes sejam obtidos.

  - C3- derivada segunda seja nula no primeiro ponto.
    - O polinômio no primeiro intervalo (entre o primeiro e o segundo ponto) é:

$$f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

    - A derivado segunda quando igualada a zero, resulta em $a_1 = 0$. Essa condição significa, na realidade, que uma linha reta conecta os dois primeiros pontos (a inclinação é constante).

$$f_1''(x) = 2a_1$$

Interpolação

Spline Quadrática

- Exemplo S2a: Determinar as splines quadráticas que fazem o ajuste do seguinte conjunto de dados.

x	8	11	15	18	22
y	5	9	10	8	7

  - Há cinco pontos ($n = 5$) e portanto quatro splines ($i = 1, 2, ..., 4$). A equação quadrática para a i-ésima spline é:

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

  - quatro polinômios - cada polinômio tem três coeficientes, 12 coeficientes têm que ser determinados no total.

$$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, a_4, b_4 \text{ e } c_4.$$

Interpolação

- Spline Quadrática
  - Exemplo S2a:
    - Oito equações são obtidas a partir da condição que diz que, em cada intervalo, o polinômio deve passar pelos pontos finais:

$$i = 1 \quad f_1(x) = a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 = b_1\,8 + c_1 = 5$$
$$f_1(x) = a_1x_2^2 + b_1x_2 + c_1 = b_1\,11 + c_1 = 9$$

$$i = 2 \quad f_2(x) = a_2x_2^2 + b_2x_2 + c_2 = a_2\,11^2 + b_2\,11 + c_2 = 9$$
$$f_2(x) = a_2x_3^2 + b_2x_3 + c_2 = a_2\,15^2 + b_2\,15 + c_2 = 10$$

$$i = 3 \quad f_3(x) = a_3x_3^2 + b_3x_3 + c_3 = a_3\,15^2 + b_3\,15 + c_3 = 10$$
$$f_3(x) = a_3x_4^2 + b_3x_4 + c_3 = a_3\,18^2 + b_3\,18 + c_3 = 8$$

$$i = 4 \quad f_4(x) = a_4x_4^2 + b_4x_4 + c_4 = a_4\,18^2 + b_4\,18 + c_4 = 8$$
$$f_4(x) = a_4x_5^2 + b_4x_5 + c_4 = a_4\,22^2 + b_4\,22 + c_4 = 7$$

Interpolação

- Spline Quadrática
  - Exemplo S2a:
    - Três equações são obtidas a partir da condição que diz que, nos nós interiores, as inclinações (derivadas primeiras) dos polinômios de intervalos adjacentes são iguais:

$$
\begin{array}{llllll}
i = 2 & 2a_1x_2 + b_1 = 2a_2x_2 + b_2 & \longrightarrow & b_1 = 2a_2 11 + b_2 & \text{ou:} & b_1 - 2a_2 11 - b_2 = 0 \\
i = 3 & 2a_2x_3 + b_2 = 2a_3x_3 + b_3 & \longrightarrow & 2a_2 15 + b_2 = 2a_3 15 + b_3 & \text{ou:} & 2a_2 15 + b_2 - 2a_3 15 - b_3 = 0 \\
i = 4 & 2a_3x_4 + b_3 = 2a_4x_4 + b_4 & \longrightarrow & 2a_3 18 + b_3 = 2a_4 18 + b_4 & \text{ou:} & 2a_3 18 + b_3 - 2a_4 18 - b_4 = 0
\end{array}
$$

Interpolação

- Spline Quadrática
  - Exemplo S2a:
    - O sistema contendo as 11 equações lineares pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11^2 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15^2 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15^2 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18^2 & 18 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18^2 & 18 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22^2 & 22 & 1 \\ 1 & 0 & -22 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 1 & 0 & -30 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 1 & 0 & -36 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 9 \\ 10 \\ 10 \\ 8 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_1(x) = 1{,}333x - 5{,}6667 \quad \text{para} \quad 8 \le x \le 11$$

$$f_2(x) = (-0{,}2708)x^2 + 7{,}2917x - 38{,}4375 \quad \text{para} \quad 11 \le x \le 15$$

$$f_3(x) = 0{,}0556x^2 - 2{,}5x + 35 \quad \text{para} \quad 15 \le x \le 18$$

$$f_4(x) = 0{,}0625x^2 - 2{,}75x + 37{,}25 \quad \text{para} \quad 18 \le x \le 22$$

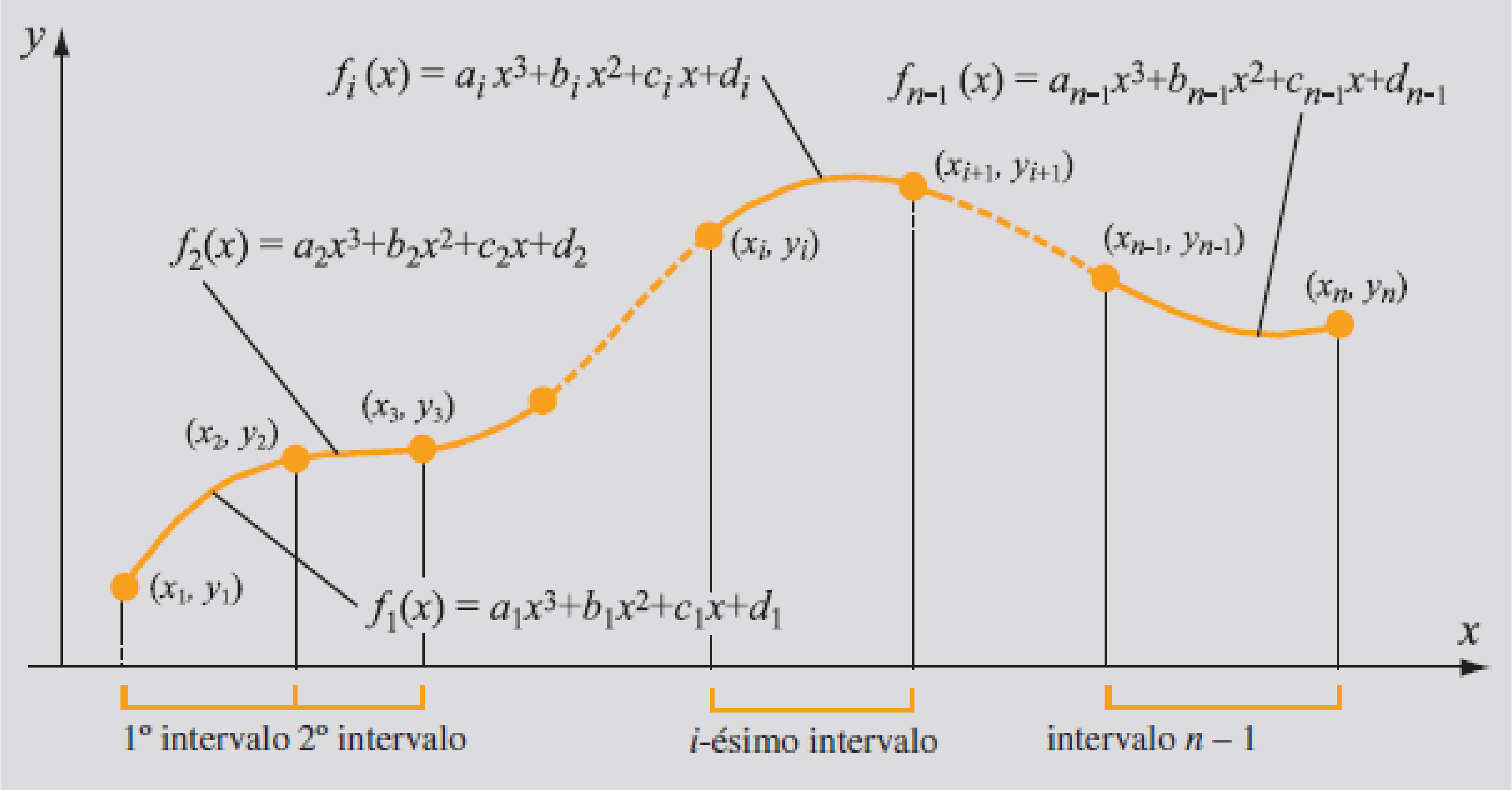
  - Resolvendo o sistema com o auxílio das teorias de solução de sistemas lineares já previamente estudadas, basta substituir os coeficientes nas equações.

Interpolação

- **Spline Cúbica**
  - Interpolação é feita com polinômios de terceira ordem.
  - Para um conjunto de dados com n pontos, há n – 1 intervalos.
  - Como cada um dos polinômios de terceira ordem tem quatro coeficientes, a determinação de todos os coeficientes pode requerer um grande número de cálculos.
  - Polinômios podem ser escritos de diversas maneiras (padrão, Lagrange, Newton) e, em tese, qualquer uma delas pode ser usada para representar as splines cúbicas.
    - a quantidade de cálculos varia bastante com a forma do polinômio utilizado;

Interpolação

- **Spline Cúbica com polinômios na forma padrão**



Interpolação

- **Spline Cúbica com polinômios na forma padrão**
  - Usando a forma padrão, a equação do polinômio do i-ésimo intervalo, localizado entre os pontos x_i e x_{i+1}, é dada por:

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

  - De forma geral, há n – 1 equações.
  - Cada equação tem quatro coeficientes:
    - 4(n – 1) = 4n – 4 coeficientes têm que ser determinados no total;

Interpolação

- **Spline Cúbica com polinômios na forma padrão**
  - C1-Cada polinômio $f_i(x)$ deve passar pelos pontos iniciais e finais do intervalo, (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}), o que significa que $f_i(x_i) = y_i$ e $f_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$:

$$a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x_i + d_i = y_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$a_i x_{i+1}^3 + b_i x_{i+1}^2 + c_i x_{i+1} + d_i = y_{i+1} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

  - Como há n – 1 intervalos, essa condição fornece 2(n – 1) = 2n – 2 equações.

Interpolação

- **Spline Cúbica com polinômios na forma padrão**
  - C2 - Nos nós internos, as inclinações (derivadas primeiras) dos polinômios de intervalos adjacentes são iguais.
    - Na transição das curvas, a inclinação deve ser contínua.
    - A derivada primeira do i-ésimo polinômio é:

$$f_i'(x) = \frac{df_i}{dx} = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$$

  - Para n pontos, o primeiro ponto interno é i = 2 e o último é i = n – 1.
  - Igualando as derivadas primeiras em cada um dos pontos internos

$$3a_{i-1}x_i^2 + 2b_{i-1}x_i + c_{i-1} = 3a_i x_i^2 + 2b_i x_i + c_i \quad \text{para } i = 2, 3, \ldots, n-1$$

    - Como há n – 2 pontos internos, essa condição fornece n – 2 equações.

Interpolação

- **Spline Cúbica com polinômios na forma padrão**
  - C3 - Nos nós internos, as derivadas segundas dos polinômios de intervalos adjacentes devem ser iguais.
    - A taxa de inclinação (curvatura) deve ser contínua.
  - A derivada segunda do polinômio no i-ésimo intervalo é:

$$f_i''(x) = \frac{d^2 f_i}{dx^2} = 6a_i x + 2b_i$$

  - Para n pontos, o primeiro ponto interno é i = 2 e o último, i = n – 1.
  - Igualando as derivadas segundas em todos os pontos internos, obtém-se:

$$6a_{i-1}x_i + 2b_{i-1} = 6a_i x_i + 2b_i \text{ para } i = 2, 3, \ldots, n-1$$

    - Como há n – 2 pontos internos, essa condição também fornece n – 2 equações

Interpolação

- **Spline Cúbica com polinômios na forma padrão**
  - Juntas, C1, C2 e C3 fornecem 4n – 6 equações. Entretanto, os n – 1 polinômios têm 4n – 4 coeficientes, e com isso duas equações (condições) adicionais são necessárias para que os coeficientes sejam obtidos:
    - derivada segunda seja nula no primeiro e no último ponto.

$$6a_1x_1 + 2b_1 = 0 \text{ e } 6a_{n-1}x_n + 2b_{n-1} = 0$$

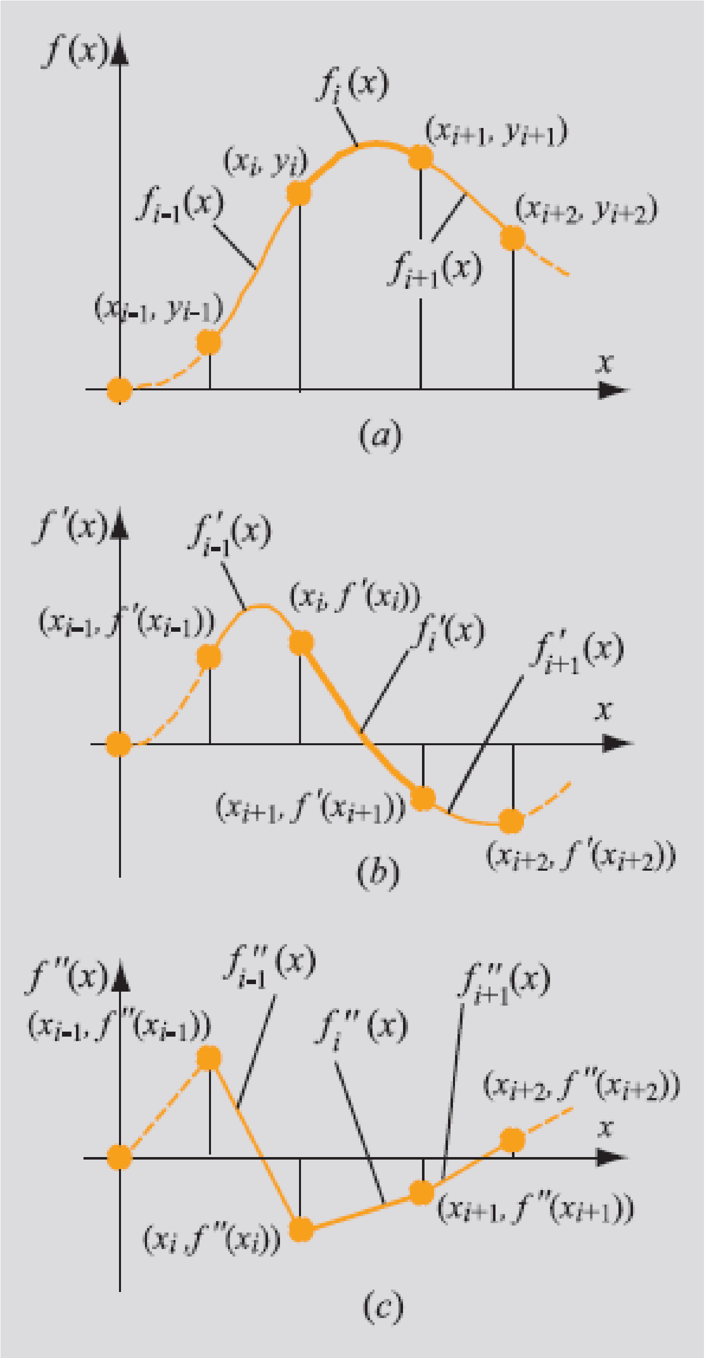
    - Splines cúbicas com derivadas segundas igualadas a zero nos pontos finais do intervalo são chamadas de **splines cúbicas naturais**.
      - A aplicação de todas as condições leva a um sistema de 4n – 4 equações com 4n – 4 coeficientes.

Interpolação

- **Spline Cúbica baseada em polinômios na forma de Lagrange**

  - A derivada segunda de um polinômio de terceira ordem é uma função linear. Isso significa que, dentro de cada spline, a derivada segunda é uma função linear de *x*;

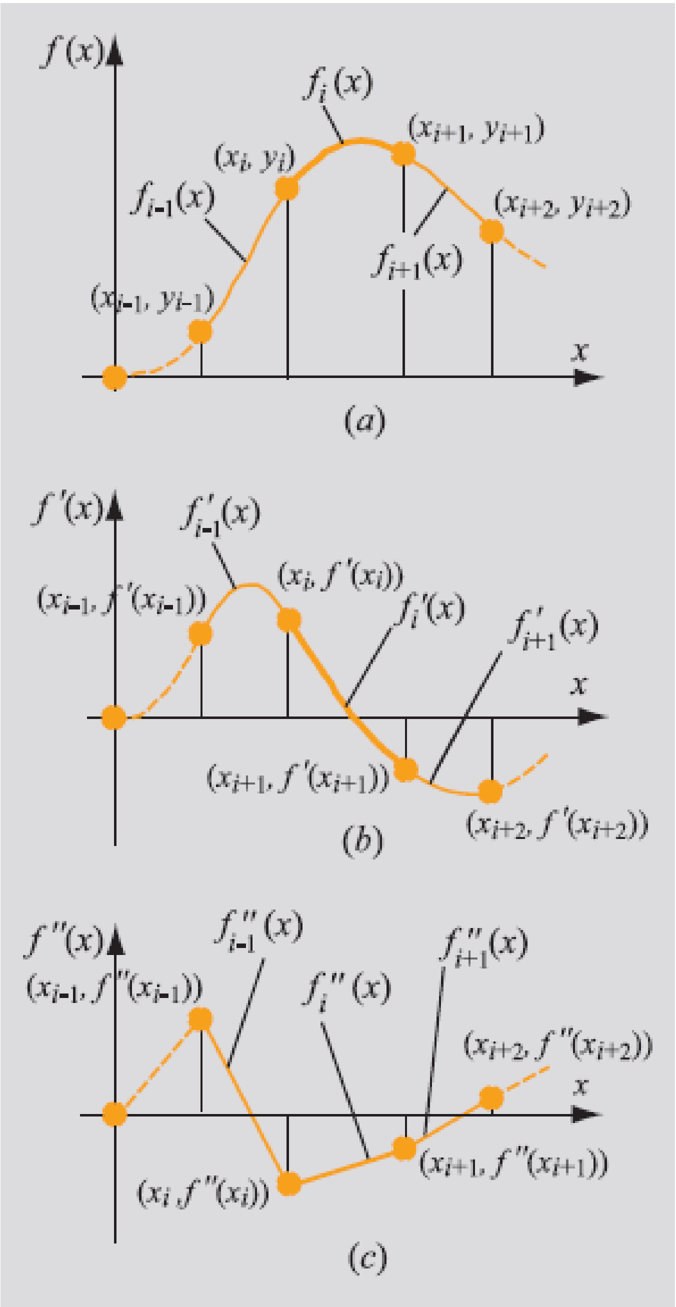
$$f_i''(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f_i''(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f_i''(x_{i+1})$$



Interpolação

- **Spline Cúbica baseada em polinômios na forma de Lagrange**
  - O polinômio de terceira ordem no intervalo *i* pode ser determinado integrando-se duas vezes a derivada segunda.
  - A expressão resultante contém duas constantes de integração.
    - Essas duas constantes podem ser determinadas a partir da condição que diz que os valores dos polinômios nos nós são conhecidos:

$$f_i(x_i) = (y_i) \qquad \text{e} \qquad f_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$



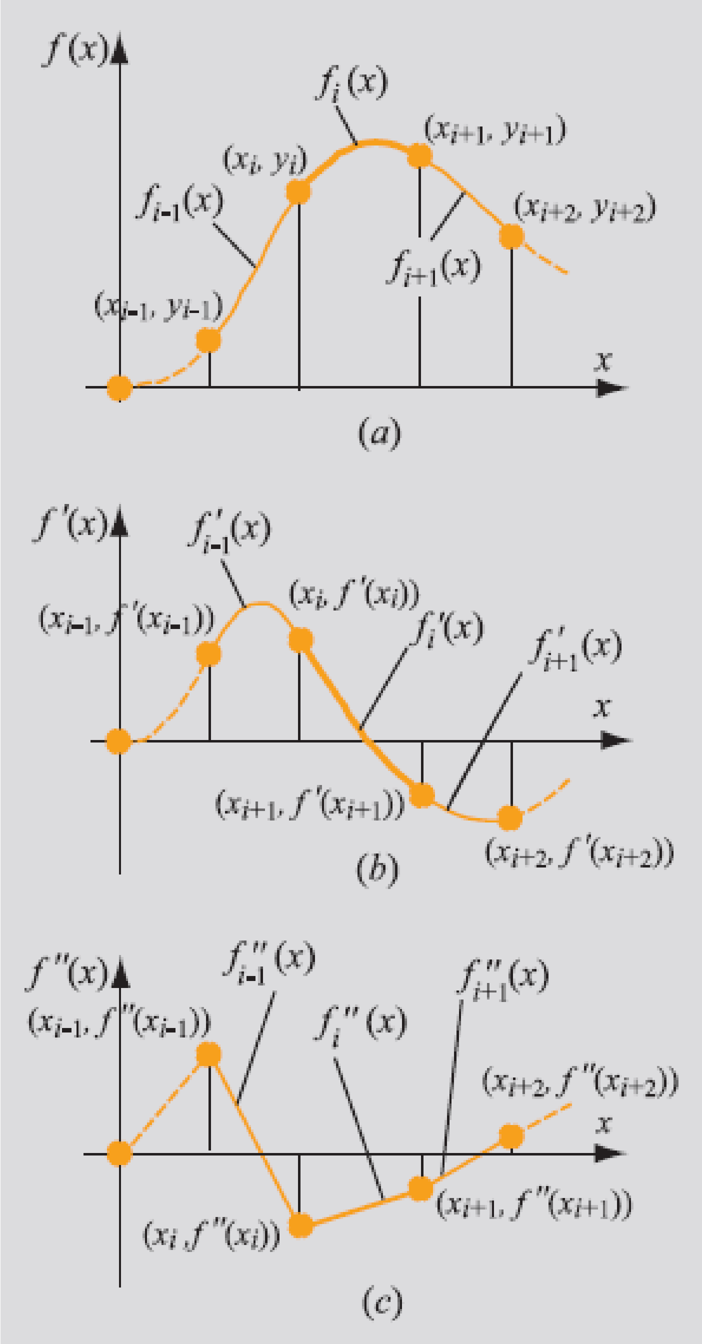
Interpolação

- **Spline Cúbica baseada em polinômios na forma de Lagrange**

  - Uma vez determinadas as constantes de integração, a equação do polinômio de terceira ordem no intervalo i é dada por:

$$f_i(x) = \frac{f_i''(x_i)}{6(x_{i+1}-x_i)}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{f_i''(x_{i+1})}{6(x_{i+1}-x_i)}(x-x_i)^3$$
$$+ \left[\frac{y_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f_i''(x_i)(x_{i+1}-x_i)}{6}\right](x_{i+1}-x)$$
$$+ \left[\frac{y_{i+1}}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f_i''(x_{i+1})(x_{i+1}-x_i)}{6}\right](x-x_i)$$

para $x_i \le x \le x_{i+1}$ e $i = 1, 2, \ldots, n-1$



Interpolação

- **Spline Cúbica baseada em polinômios na forma de Lagrange**
  - Cada intervalo contém duas incógnitas f''(x_i) e f''(x_{i+1}) .
  - As equações que relacionam os valores das derivadas segundas nos n – 2 pontos internos podem ser deduzidas a partir da continuidade das derivadas primeiras dos polinômios nos intervalos adjacentes nos pontos internos:

$$f_i'(x_{i+1}) = f_{i+1}'(x_{i+1}) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n-2$$

  - Das duas últimas equações, tem-se que:

$$(x_{\ +1} - x_i)f''(x_i) + 2(x_{i+2} - x_i)f''(x_{i+1}) + (x_{i+2} - x_{i+1})f''(x_{i+2})$$
$$= 6\left[\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right]$$
$$\text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n-2$$

- Esse é um sistema de *n* – 2 equações lineares contendo *n* incógnitas.

Interpolação

- **Spline Cúbica baseada em polinômios na forma de Lagrange**
- Como se determina o polinômio em cada intervalo?
  - Para n pontos pertencentes a um conjunto de dados, há n – 1 intervalos.
    - O polinômio cúbico em cada intervalo é dado pela equação do slide 55 (total de n – 1 polinômios).
  - Os n – 1 polinômios contêm n coeficientes $f''(x_i)$ a $f''(x_{i+1})$. Estes são os valores das derivadas segundas dos polinômios nos pontos.
    - Assume-se que a derivada segunda nos nós internos seja contínua. Isso significa que, nos nós internos, as derivadas segundas de polinômios de intervalos adjacentes são iguais.
    - Consequentemente, para n pontos, há n valores (o valor da derivada segunda em cada ponto) que precisam ser determinados.

Interpolação

- **Spline Cúbica baseada em polinômios na forma de Lagrange**
- Como se determina o polinômio em cada intervalo?
  - As equação do slide 56 fornecem um sistema de n – 2 equações lineares em função dos n coeficientes $f''(x_i)$ a $f''(x_{i+1})$.
    - Para obter os valores dos coeficientes,=duas relações adicionais são necessárias
      - a derivada segunda nos pontos finais dos dados (o primeiro e o último ponto) é igualada a zero (splines cúbicas naturais)

$$f''(x_1) = 0 \qquad \text{e} \qquad f''(x_n) = 0$$

Com essas condições, o sistema linear resultante pode ser resolvido, e os coeficientes podem ser substituídos nas equações dos polinômios.

Splines cúbicas com as derivadas segundas igualadas a zero nos pontos finais são chamadas de splines cúbicas naturais.

Interpolação

Spline Cúbica baseada em polinômios na forma de Lagrange

Forma simplificada das equações: Equação do polinômio no i-ésimo intervalo

$$f_i(x) = \frac{f_i''(x_i)}{6(x_{i+1}-x_i)}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{f_i''(x_{i+1})}{6(x_{i+1}-x_i)}(x-x_i)^3$$
$$+ \left[\frac{y_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f_i''(x_i)(x_{i+1}-x_i)}{6}\right](x_{i+1}-x)$$
$$+ \left[\frac{y_{i+1}}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f_i''(x_{i+1})(x_{i+1}-x_i)}{6}\right](x-x_i)$$
para $x_i \le x \le x_{i+1}$ e $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\Rightarrow$$

$$f_i(x) = \frac{a_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{a_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3$$
$$+ \left[\frac{y_i}{h_i} - \frac{a_i h_i}{6}\right](x_{i+1}-x) + \left[\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{a_{i+1} h_i}{6}\right](x-x_i)$$
para $x_i \le x \le x_{i+1}$ e $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \qquad a_i = f''(x_i)$$

Interpolação

Spline Cúbica baseada em polinômios na forma de Lagrange

Forma simplificada das equações: Sistema de equações lineares para os termos a_i

$$(x_{\ +1}-x_i)f''(x_i)+2(x_{i+2}-x_i)f''(x_{i+1})+(x_{i+2}-x_{i+1})f''(x_{i+2})$$
$$=6\left[\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{x_{i+2}-x_{i+1}}-\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right]$$
$$\text{para}\quad i=1,2,\ldots,n-2$$

$$a_i=f''(x_i)$$

$$h_i=x_{i+1}-x_i$$

$$h_ia_i+2(h_i+h_{i+1})a_{i+1}+h_{i+1}a_{i+2}=6\left[\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}}-\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right]$$
$$\text{para}\quad i=1,2,\ldots,n-2$$

Interpolação

- Spline Cúbica
  - Exemplo S3a: Determine as splines cúbicas naturais que fazem o ajuste dos dados que seguem apresentados na tabela abaixo.

x	8	11	15	18	22
y	5	9	10	8	7

  - Cinco pontos (n = 5); quatro splines; i=1, ..., 4. Usando a forma simplificada:

$$f_i(x) = \frac{a_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{a_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 + \left[\frac{y_i}{h_i} - \frac{a_i h_i}{6}\right](x_{i+1}-x) + \left[\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{a_{i+1} h_i}{6}\right](x-x_i)$$

para $i = 1, \ldots 4$

$h_i = x_{i+1} - x_i$

  - As 4 equações contêm 5 coeficientes desconhecidos a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5.
  - Nas splines cúbicas naturais, a_1 e a_5 são iguais a zero.
  - Os outros três coeficientes são determinados a partir de:

$$h_i a_i + 2(h_i + h_{i+1})a_{i+1} + h_{i+1}a_{i+2} = 6\left[\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right]$$

para $i = 1, \ldots 4$

$h_i = x_{i+1} - x_i$

Interpolação

- Spline Cúbica
  - Exemplo S3a: Determine as splines cúbicas naturais que fazem o ajuste dos dados que seguem apresentados na tabela abaixo.

x	8	11	15	18	22
y	5	9	10	8	7

$$h_1 = x_2 - x_1 = 11 - 8 = 3$$

$$i = 1 \quad h_1 a_1 + 2(h_1 + h_2)a_2 + h_2 a_3 = 6\left[\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right]$$

$$3 \cdot 0 + 2(3+4)a_2 + 4a_3 = 6\left[\frac{10-9}{4} - \frac{9-5}{3}\right] \longrightarrow 14a_2 + 4a_3 = -6{,}5$$

$$h_2 = x_3 - x_2 = 15 - 11 = 4$$

$$i = 2 \quad h_2 a_2 + 2(h_2 + h_3)a_3 + h_3 a_4 = 6\left[\frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2}\right]$$

$$4a_2 + 2(4+3)a_3 + 3a_4 = 6\left[\frac{8-10}{3} - \frac{10-9}{4}\right] \longrightarrow 4a_2 + 14a_3 + 3a_4 = -5{,}5$$

Interpolação

- Spline Cúbica
  - Exemplo S3a: Determine as splines cúbicas naturais que fazem o ajuste dos dados que seguem apresentados na tabela abaixo.

x	8	11	15	18	22
y	5	9	10	8	7

$$h_3 = x_4 - x_3 = 18 - 15 = 3$$

$$i = 3 \quad h_3 a_3 + 2(h_3 + h_4)a_4 + h_4 a_5 = 6\left[\frac{y_5 - y_4}{h_4} - \frac{y_4 - y_3}{h_3}\right]$$

$$3a_3 + 2(3+4)a_4 + 4 \cdot 0 = 6\left[\frac{y_5 - y_4}{h_4} - \frac{y_4 - y_3}{h_3}\right] \longrightarrow 3a_3 + 14a_4 = 2{,}5$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 4 & 0 \\ 4 & 14 & 3 \\ 0 & 3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6{,}5 \\ -5{,}5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}$$

Octave/Matlab

-0.3665	-0.3421	0.2519
a_2	a_3	a_4

Interpolação

- Spline Cúbica
  - Exemplo S3a: Determine as splines cúbicas naturais que fazem o ajuste dos dados que seguem apresentados na tabela abaixo.

x	8	11	15	18	22
y	5	9	10	8	7

  - Conhecendo os coeficientes, a=[0 -0.3655 -0.03421 0.2519 0]’ e sabendo que:

$$f_i(x) = \frac{a_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{a_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 + \left[\frac{y_i}{h_i} - \frac{a_i h_i}{6}\right](x_{i+1}-x) + \left[\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{a_{i+1}h_i}{6}\right](x-x_i)$$

$$i = 1 \quad f_1(x) = \frac{a_1}{6h_1}(x_2-x)^3 + \frac{a_2}{6h_1}(x-x_1)^3 + \left[\frac{y_1}{h_1} - \frac{a_1 h_1}{6}\right](x_2-x) + \left[\frac{y_2}{h_1} - \frac{a_2 h_1}{6}\right](x-x_1)$$

$$f_1(x) = \frac{0}{6\cdot 3}(11-x)^3 + \frac{-0{,}3665}{6\cdot 3}(x-8)^3 + \left[\frac{5}{3} - \frac{0\cdot 3}{6}\right](11-x) + \left[\frac{9}{3} - \frac{-0{,}3665\cdot 3}{6}\right](x-8)$$

$$f_1(x) = (-0{,}02036)(x-8)^3 + 1{,}667(11-x) + 3{,}183(x-8) \quad \text{para} \quad 8 \le x \le 11$$

Interpolação

- Spline Cúbica
  - Exemplo S3a: Determine as splines cúbicas naturais que fazem o ajuste dos dados que seguem apresentados na tabela abaixo.

x	8	11	15	18	22
y	5	9	10	8	7

  - Conhecendo os coeficientes, a=[0 -0.3655 -0.03421 0.2519 0]' e sabendo que:

$$f_i(x) = \frac{a_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{a_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 + \left[\frac{y_i}{h_i} - \frac{a_i h_i}{6}\right](x_{i+1}-x) + \left[\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{a_{i+1} h_i}{6}\right](x-x_i)$$

$$i = 2 \quad f_2(x) = \frac{a_2}{6h_2}(x_3-x)^3 + \frac{a_3}{6h_2}(x-x_2)^3 + \left[\frac{y_2}{h_2} - \frac{a_2 h_2}{6}\right](x_3-x) + \left[\frac{y_3}{h_2} - \frac{a_3 h_2}{6}\right](x-x_2)$$

$$f_2(x) = \frac{-0{,}3665}{6 \cdot 4}(15-x)^3 + \frac{-0{,}3421}{6 \cdot 4}(x-11)^3 + \left[\frac{9}{4} - \frac{-0{,}3665 \cdot 4}{6}\right](15-x) + \left[\frac{10}{4} - \frac{-0{,}3421 \cdot 4}{6}\right](x-11)$$

$$f_2(x) = (-0{,}01527)(15-x)^3 + (-0{,}01427)(x-11)^3 + 2{,}494(15-x) + 2{,}728(x-11) \quad \text{para} \quad 11 \le x \le 15$$

Interpolação

- Spline Cúbica
  - Exemplo S3a: Determine as splines cúbicas naturais que fazem o ajuste dos dados que seguem apresentados na tabela abaixo.

x	8	11	15	18	22
y	5	9	10	8	7

  - Conhecendo os coeficientes, a=[0 -0.3655 -0.03421 0.2519 0]' e sabendo que:

$$f_i(x) = \frac{a_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{a_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 + \left[\frac{y_i}{h_i} - \frac{a_i h_i}{6}\right](x_{i+1}-x) + \left[\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{a_{i+1} h_i}{6}\right](x-x_i)$$

$$i = 3 \quad f_3(x) = \frac{a_3}{6h_3}(x_4-x)^3 + \frac{a_4}{6h_3}(x-x_3)^3 + \left[\frac{y_3}{h_3} - \frac{a_3 h_3}{6}\right](x_4-x) + \left[\frac{y_4}{h_3} - \frac{a_4 h_3}{6}\right](x-x_3)$$

$$f_3(x) = \frac{-0{,}3421}{6 \cdot 3}(18-x)^3 + \frac{0{,}2519}{6 \cdot 3}(x-15)^3 + \left[\frac{10}{3} - \frac{-0{,}3421 \cdot 3}{6}\right](18-x) + \left[\frac{8}{3} - \frac{0{,}2519 \cdot 3}{6}\right](x-15)$$

$$f_3(x) = (-0{,}019)(18-x)^3 + 0{,}014(x-15)^3 + 3{,}504(18-x) + 2{,}5407(x-15) \quad \text{para} \quad 15 \leq x \leq 18$$

Interpolação

- Spline Cúbica
  - Exemplo S3a: Determine as splines cúbicas naturais que fazem o ajuste dos dados que seguem apresentados na tabela abaixo.

x	8	11	15	18	22
y	5	9	10	8	7

  - Conhecendo os coeficientes, a=[0 -0.3655 -0.03421 0.2519 0]' e sabendo que:

$$f_i(x) = \frac{a_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{a_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 + \left[\frac{y_i}{h_i} - \frac{a_i h_i}{6}\right](x_{i+1}-x) + \left[\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{a_{i+1} h_i}{6}\right](x-x_i)$$

$$i = 4 \quad f_4(x) = \frac{a_4}{6h_4}(x_5-x)^3 + \frac{a_5}{6h_4}(x-x_4)^3 + \left[\frac{y_4}{h_4} - \frac{a_4 h_4}{6}\right](x_5-x) + \left[\frac{y_5}{h_4} - \frac{a_5 h_4}{6}\right](x-x_4)$$

$$f_4(x) = \frac{0{,}2519}{6\cdot 4}(22-x)^3 + \frac{0}{6\cdot 4}(x-18)^3 + \left[\frac{8}{4} - \frac{0{,}2519\cdot 4}{6}\right](22-x) + \left[\frac{7}{4} - \frac{0\cdot 4}{6}\right](x-18)$$

$$f_4(x) = 0{,}0105(22-x)^3 + 1{,}832(22-x) + 1{,}75(x-18) \quad \text{para} \quad 18 \le x \le 22$$

Interpolação

- Spline Cúbica
  - Exemplo S3b: interpole o valor de y em x = 12,7 .

x	8	11	15	18	22
y	5	9	10	8	7

  - Utilizando a segunda equação definida e substituindo o valor de x propriamente,

$$f_2(x) = (-0{,}01527)(15-12{,}7)^3 + (-0{,}01427)(12{,}7-11)^3 + 2{,}494(15-12{,}7) + 2{,}728(12{,}7-11)$$

$$f_2(x) = 10{,}11$$

Referências Bibliográficas

- **Amos Gilat e Vish Subramaniam. Métodos Numéricos para engenheiros e cientistas. Uma introdução com aplicações utilizando o Matlab. Porto Alegre. Bookman, 2008**

- Ruggiero, Márcia A. Gomes; Lopes, Vera Lúcia Da Rocha. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos E Computacionais. Editora Pearson, 2ª edição, São Paulo, 2005.

- Décio Sperandio, João Teixeira Mendes e Luiz Henry Monken. Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos. Editora Prentice-Hall, 2ª edição, São Paulo, 1999.

- Steven C. Chapra. Métodos Numéricos Aplicados com MatLab para Engenheiros e Cientistas. Editora McGraw Hill, 3ª edição, São Paulo, 2013.