MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ENGENHARIA

ZEROS REAIS DE FUNÇÕES REAIS

2021/1

Profª Drª Polliana Cândida Oliveira Martins.

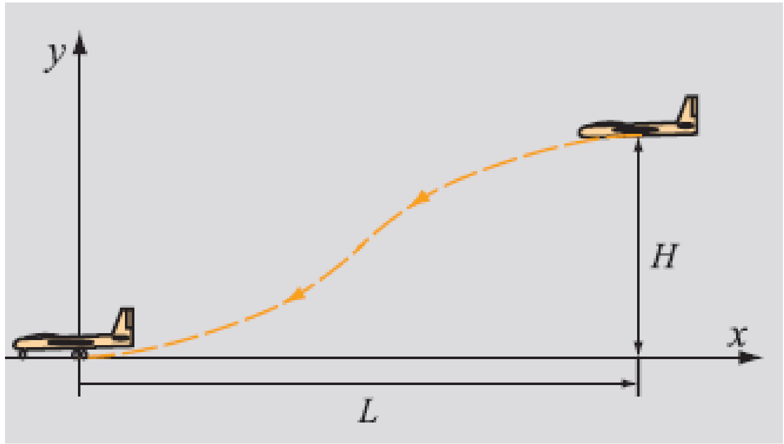
Engenharias– FGA UnB

Zeros reais de funções reais

- **Introdução**
- **Método da bisseção**
- **Método da posição falsa**
- Método de Newton Raphson
- Método da secante
- Método do ponto fixo

Introdução

- Em muitos problemas de engenharia, é necessário resolver uma função do tipo $f(x) = 0$, na qual $f(x)$ é representada por um polinômio ou função transcendental;



$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Figura 1 – Equação Polinomial de terceiro grau que aproxima a curva de aterrissagem. Adaptado de Gilat (2008);

$$v = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right)$$

Figura 2 – Equação transcendental representando a velocidade em função do tempo para um paraquedista. Adaptado de Chapra (2011)

Introdução

- Antes do aparecimento dos computadores digitais, existiam algumas maneiras de determinar as raízes de equações algébricas e transcendentais.
- Em alguns casos, as raízes podiam ser obtidas por métodos diretos, como por exemplo pela Fórmula de Bhaskara para equações de segundo grau;

Anos atrás, você aprendeu a usar a fórmula quadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para resolver

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

- Entretanto, outras funções aparentemente simples, não eram trivialmente adaptadas para se calcularem os zeros ou raízes relacionados a elas.

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Introdução

- Foi verificada a necessidade de estudar métodos numéricos para resolução de equações não lineares de diversas naturezas, que são encontradas no campo das diversas engenharias;
- Cálculo dos zeros ou raízes dessa funções pode ser feito a partir de vários métodos numéricos desenvolvidos para essa finalidade;

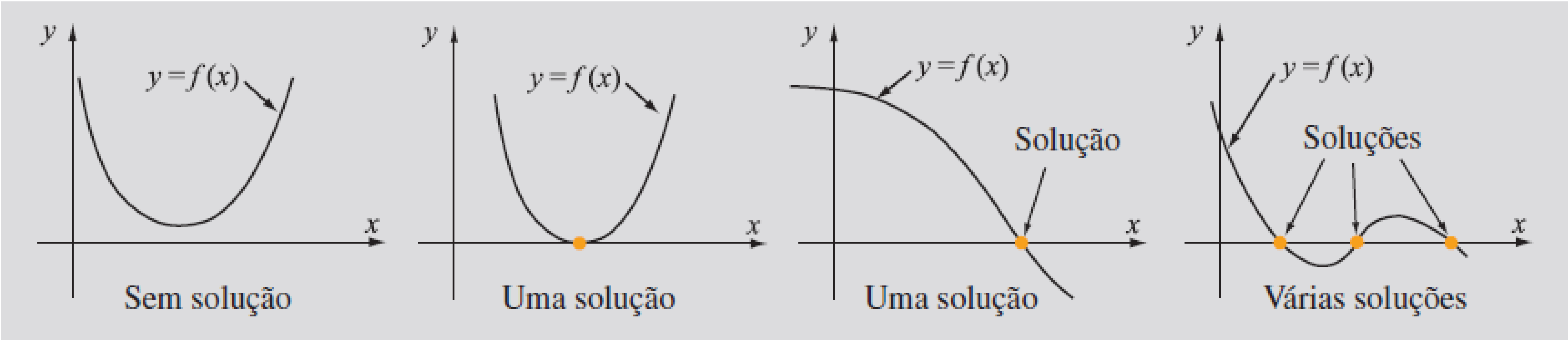


Figura 3 – Funções que possuem nenhuma, uma ou vários zeros. Adaptado de Gilat (2008)

Método da bisseção

De forma geral, pode-se dizer que, se um função f(x) for real e contínua em um intervalo que vai de x_a a x_b e $f(x_a)$ e $f(x_b)$ tem sinais opostos, isto é:

$$f(x_a)f(x_b) < 0$$

Então existe pelo menos uma raiz real no intervalo definido.

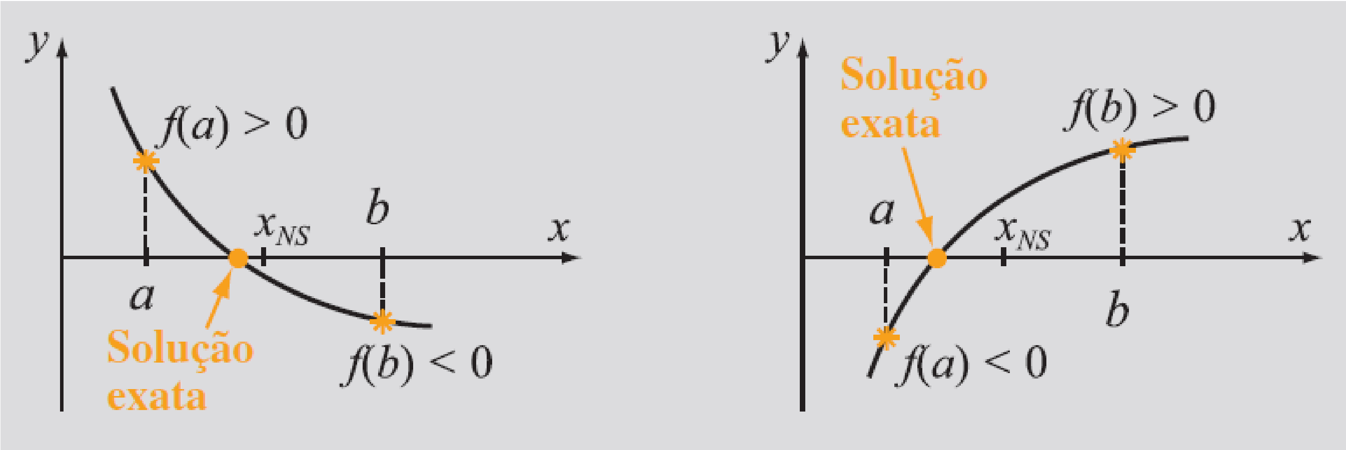


Figura 3-6 Solução de $f(x) = 0$ entre $x = a$ e $x = b$. (Gilat, 2008)

Método da bisseção

- **O *método da bissecção*,** que é alternativamente chamado de truncamento binário, divisão do **intervalo na metade**, ou método de Bolzano, é um tipo de método de busca incremental no qual o intervalo é sempre dividido na metade. (CHAPRA, 2011).

- *Métodos de busca incrementais* fazem uso dessa observação a fim de localizar o intervalo no qual a função muda de sinal.

- A posição da mudança de sinal = raiz da função, é identificada mais precisamente dividindo-se o intervalo em diversos subintervalos variadas vezes.

- O método deve sempre convergir, desde que uma raiz esteja contida no intervalo inicial [*a*, *b*] fornecido.

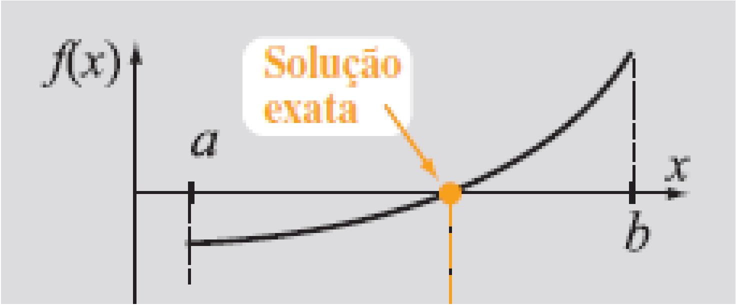
- O método pode não funcionar no caso de função tangente ao eixo x, ou seja, que não o cruza o eixo em f(x) = 0.

- Em comparação com outros métodos, sua convergência é considerada lenta;

Método da bisseção

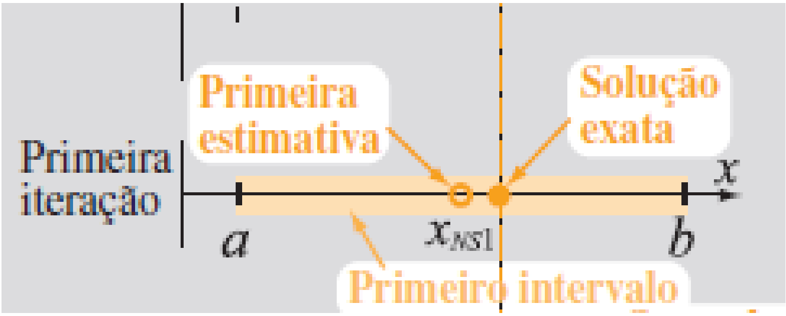
Algoritmo para o método da bisseção (Gilat, 2008)

1. Escolha o primeiro intervalo encontrando os pontos *a* e *b* entre os quais existe uma solução. Isso significa que *f*(*a*) e *f*(*b*) têm sinais diferentes, de forma que $f(a)f(b) < 0$. Os pontos podem ser determinados a partir de um gráfico de *f*(*x*) *versus* *x*.



2. Calcule a primeira estimativa da solução numérica x_{NS1} usando:

$$x_{NS1} = \frac{(a+b)}{2}$$

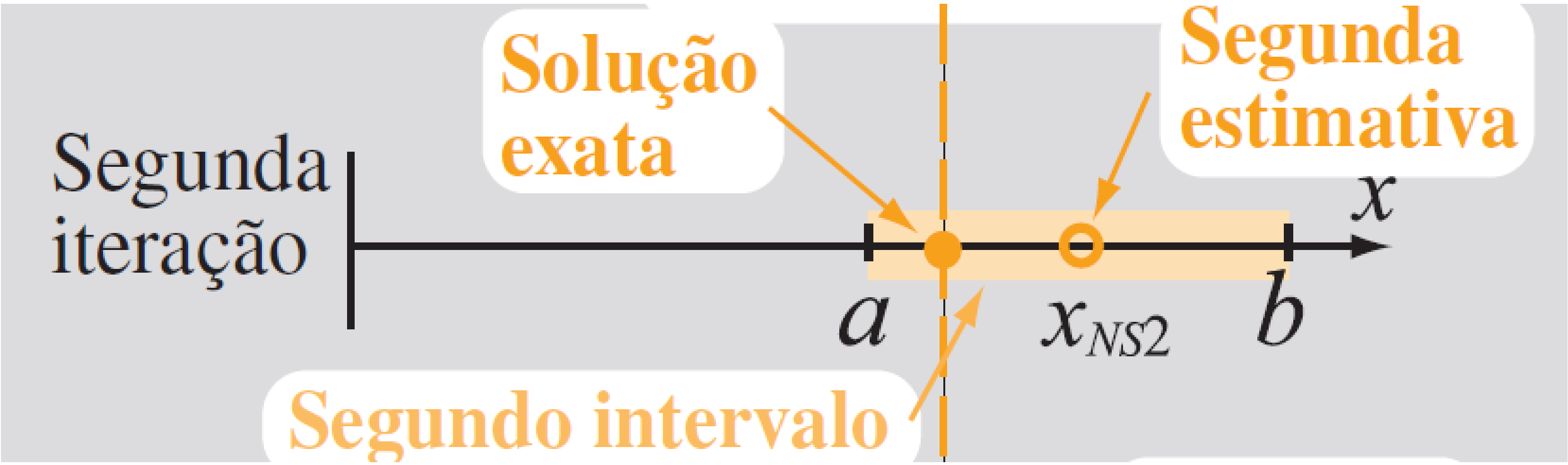


Método da bisseção

Algoritmo para o método da bisseção (Gilat, 2008)

3. Determine se a solução exata está entre a e x_{NS1}, ou entre x_{NS1} e b. Isso é feito com a verificação do sinal do produto $f(a)\ f(x_{NS1})$:

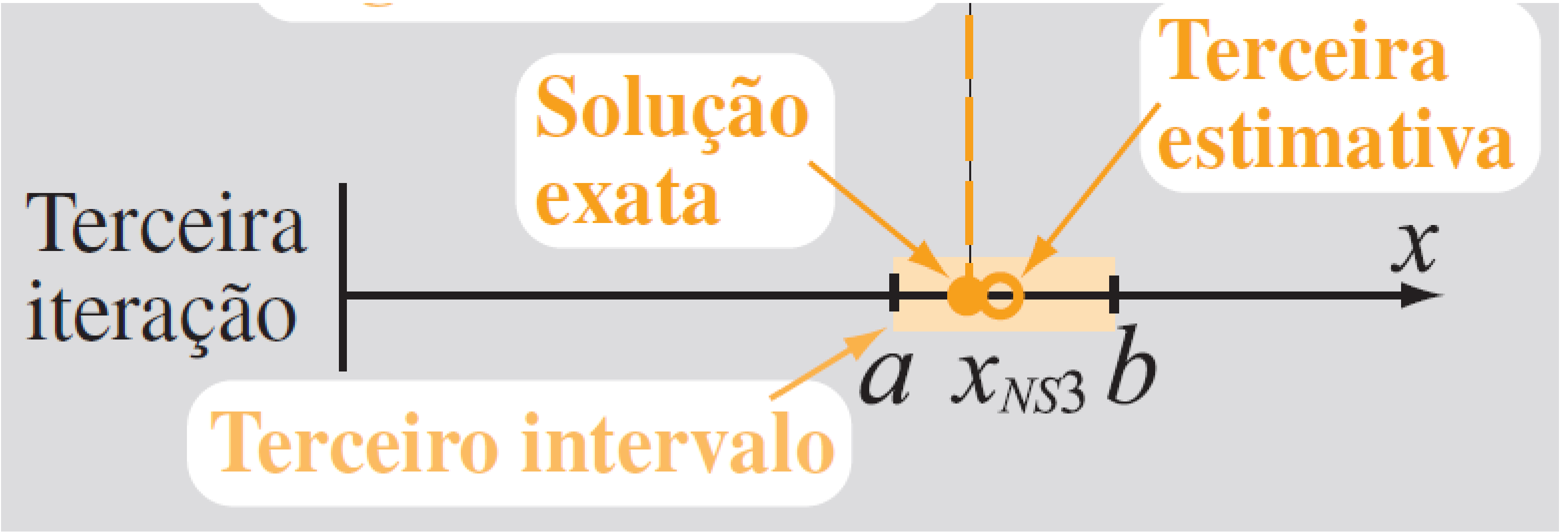
- Se $f(a)\, f(x_{NS1}) < 0$, a solução exata está entre a e x_{NS1}.
- Se $f(a)\, f(x_{NS1}) > 0$, a solução exata está entre x_{NS1} e b.



Método da bisseção

Algoritmo para o método da bisseção (Gilat, 2008)

4. Selecione o subintervalo que contém a solução exata (a até x_{NS1}, ou x_{NS1} até b) como o novo intervalo [a, b] e volte para o passo 2.



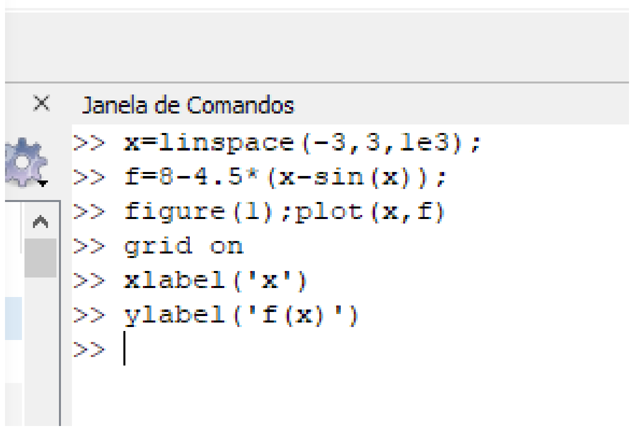
Os passos 2 a 4 são repetidos até que a tolerância especificada seja satisfeita ou um determinado limite de erro seja atingido.'

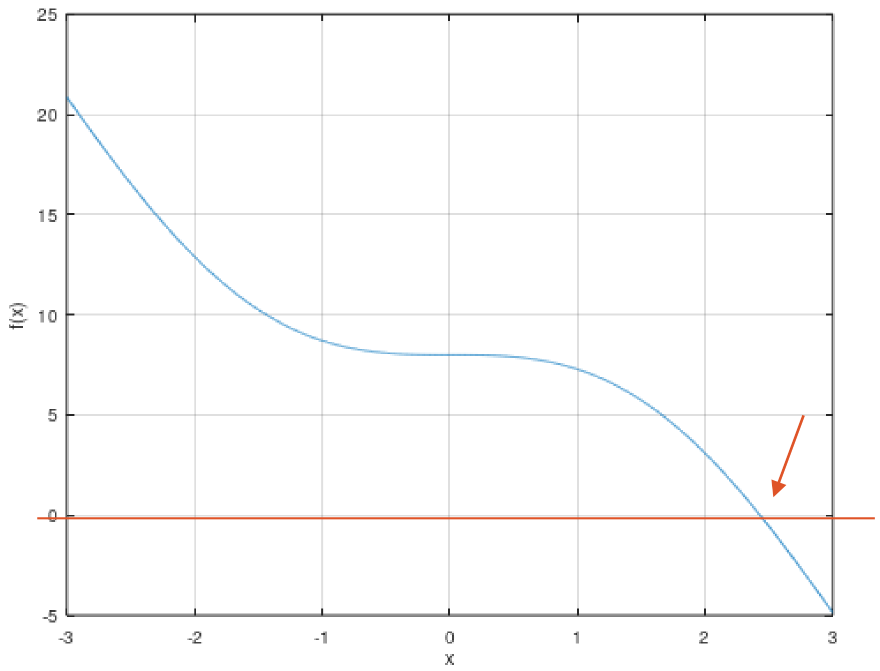
Método da bisseção

Exemplo 1: Determine a solução da equação 8 – 4,5(*x* – sen *x*)=0 usando o método da bisseção.

1° passo: Plotar a figura graficamente e verificar o intervalo [a,b] que contem uma raíz da função, para satisfazer o critério

$$f(x_a)f(x_b) < 0$$





Método da bisseção

Exemplo 1: Determine a solução da equação 8 – 4,5(x – sen x)=0 usando o método da bisseção.

2° passo: Criar a função no software Matlab/Octave e dar entrada nos parâmetros de entrada fornecidos pelo problema

*bissecao.m

```
clear all; close all; clc;

%Definir a função a ser analisada
F=inline('8-4.5*(x-sin(x))');

%Definir intervalos iniciais de análise
a=2;
b=3;

% Quantidada máxima de iterações permitidas
imax=50;

%Tolerância para o resultado final
tol=1e-3;

%Avaliar a função nos limites do intervalo
Fa=F(a);
Fb=F(b);
```

Método da bisseção

Exemplo 1: Determine a solução da equação 8 – 4,5(x – sen x)=0 usando o método da bisseção.

3° passo: Implementar no software o algoritmo equivalente ao método da bisseção.

```
if Fa*Fb>0
  disp('Erro: Não há raiz no intervalo')
  else
  disp('iter        a             b          (xNS)      F(xNS)        Tol')

for i =1:imax

  xNS=(a+b)/2;  %Calcula o ponto médio do intervalo
  tol_i=(b-a)/2; %Calcula a tolerancia
  F_xNS=F(xNS);  %Avalia a função no ponto médio
  fprintf('%3i   %11.6f %11.6f %11.6f %11.6f %11.6f\n', i, a, b, xNS, F_xNS,tol_i)

 %Estabelecer criterio de parada com base na tolerância estipulada
  if tol_i<tol
    break
  endif

##  if i == imax
##    fprintf('Solução não encontrada com %i iterações', imax)
##    break
##  endif

  if F(a)*F_xNS<0
    b=xNS;
  else
    a=xNS;
  endif

endfor
endif
```

Método da bisseção

Exemplo 1: Determine a solução da equação $8 - 4{,}5(x - \text{sen } x) = 0$ usando o método da bisseção.

4° passo: Avaliar os resultados, modificar parâmetros de tolerância, intervalo, máximo de iterações, etc.

Janela de Comandos

iter	a	b	(xNS)	F(xNS)	Tol
1	2.000000	3.000000	2.500000	-0.556875	0.500000
2	2.000000	2.500000	2.250000	1.376329	0.250000
3	2.250000	2.500000	2.375000	0.434083	0.125000
4	2.375000	2.500000	2.437500	-0.055709	0.062500
5	2.375000	2.437500	2.406250	0.190661	0.031250
6	2.406250	2.437500	2.421875	0.067838	0.015625
7	2.421875	2.437500	2.429688	0.006154	0.007812
8	2.429688	2.437500	2.433594	-0.024755	0.003906
9	2.429688	2.433594	2.431641	-0.009295	0.001953
10	2.429688	2.431641	2.430664	-0.001569	0.000977

Resultado para tolerância 1e-3

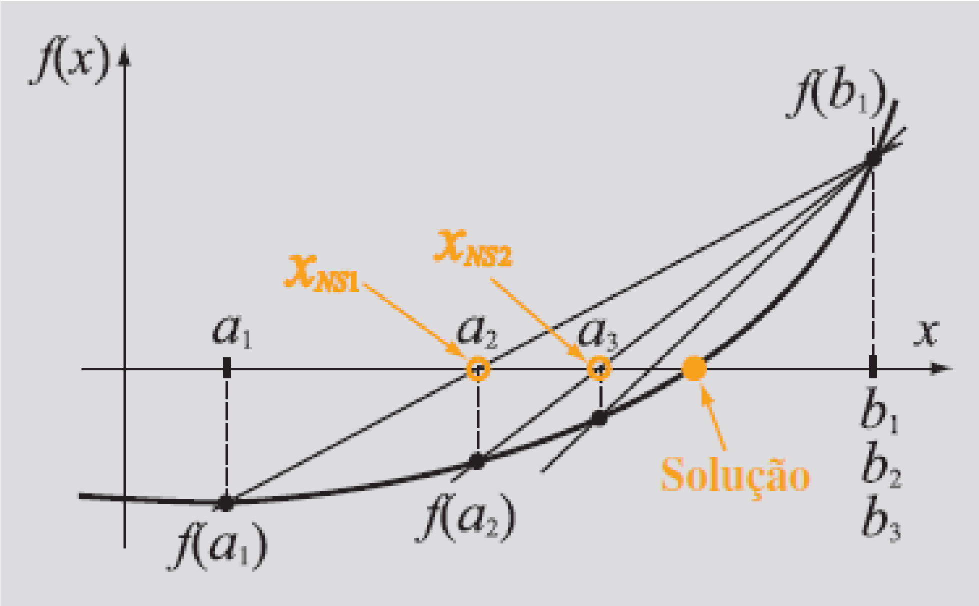
Janela de Comandos

iter	a	b	(xNS)	F(xNS)	Tol
1	2.000000	3.000000	2.500000	-0.556875	0.500000
2	2.000000	2.500000	2.250000	1.376329	0.250000
3	2.250000	2.500000	2.375000	0.434083	0.125000
4	2.375000	2.500000	2.437500	-0.055709	0.062500
5	2.375000	2.437500	2.406250	0.190661	0.031250
6	2.406250	2.437500	2.421875	0.067838	0.015625
7	2.421875	2.437500	2.429688	0.006154	0.007812

Resultado para tolerância 1e-2

Método da posição falsa

- **O método da posição falsa** (também chamado de regula falsi ou de interpolação linear) é um método de confinamento usado para se obter a solução de uma equação na forma $f(x) = 0$ quando se sabe que, dentro de um dado intervalo definido $[a, b]$, $f(x)$ é contínua e a equação possui uma solução.

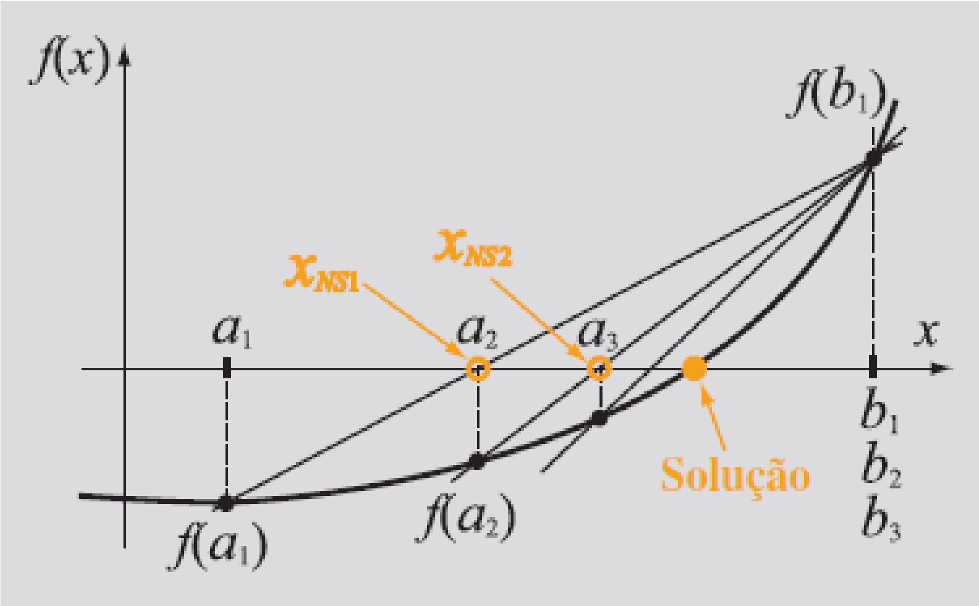


Os pontos finais do intervalo analisado são conectados por uma linha reta, e a primeira estimativa da solução numérica, x_{NS1}, é o ponto onde a linha reta cruza o eixo x.

Contraste com o método da bisseção, onde o ponto central do intervalo é escolhido como solução!

Método da posição falsa

- Para a segunda iteração, define-se um novo intervalo $[a_2, b_2]$. Esse novo intervalo corresponde à subseção do primeiro intervalo que contém a solução. Ele é $[a_1, x_{NS1}]$ se a solução estiver nesse intervalo ou $[x_{NS1}, b_1]$ caso contrário.



Os pontos finais do segundo intervalo são em seguida conectados por uma linha reta, e o ponto onde essa nova reta cruza o eixo x se torna a segunda solução estimada, e assim por diante.

Método da posição falsa

- Para um dado intervalo [a,b], a equação da linha reta que conecta os pontos (b, f(b)) e (a, f(a)) é dada por:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b)$$

- O ponto x_{NS} onde a reta cruza o eixo x é determinado pela substituição y=0 na equação acima

$$x_{NS} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Método da posição falsa

Algoritmo para o método regula falsi (Gilat,2008)

1. Escolha o primeiro intervalo encontrando os pontos a e b entre os quais existe uma solução. Isso significa que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais diferentes, de forma que $f(a)f(b) < 0$. Os pontos podem ser determinados a partir de um gráfico de $f(x)$ *versus* x.

2. Calcule a primeira estimativa da solução numérica x_{NS1} usando a equação fornecida;

3. Determine se a solução exata está entre a e x_{NS1}, ou entre x_{NS1} e b. Isso é feito com a verificação do sinal do produto $f(a)\ f(x_{NS1})$:

- Se $f(a)\ f(x_{NS1}) < 0$, a solução exata está entre a e x_{NS1}.
- Se $f(a)f(x_{NS1}) > 0$, a solução exata está entre x_{NS1} e b.

4. Selecione o subintervalo que contém a solução (a até x_{NS1}, ou x_{NS1} até b) como o novo intervalo $[a, b]$ e volte para o passo 2.

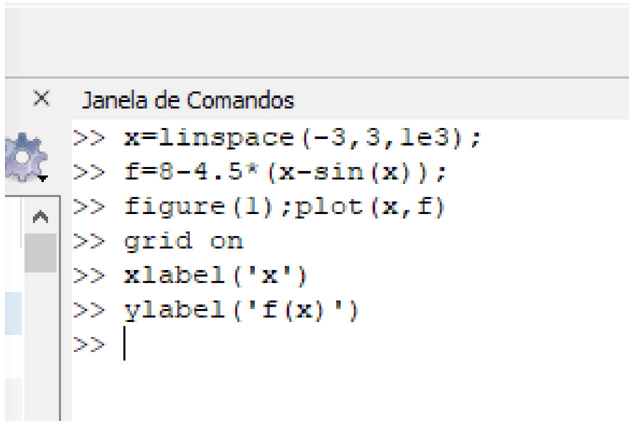
Os passos 2 a 4 são repetidos até que uma tolerância especificada ou um determinado limite de erro sejam atingidos.

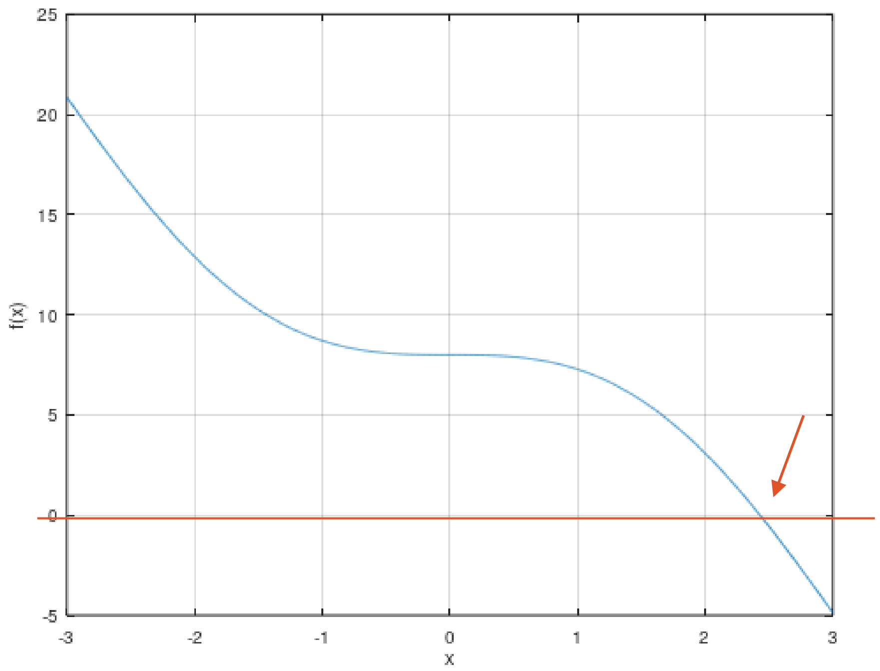
Método da posição falsa

Exemplo 2: Determine a solução da equação 8 – 4,5(x – sen x)=0 usando o método da **posição falsa.**

1° passo: Plotar a figura graficamente e verificar o intervalo [a,b] que contem uma raíz da função, para satisfazer o critério

$$f(x_a)f(x_b) < 0$$





Método da posição falsa

Exemplo 2: Determine a solução da equação 8 – 4,5(x – sen x)=0 usando o método da posição falsa.

2° passo: Criar a função no software Matlab/Octave e dar entrada nos parâmetros de entrada fornecidos pelo problema

```
clear all; close all; clc;

%Definir a função a ser analisada
F=inline('8-4.5*(x-sin(x))');

%Definir intervalos iniciais de análise
a=2;
b=3;

% Quantidada máxima de iterações permitidas
imax=50;

%Tolerância para o resultado final
tol=1e-2;

%Avaliar a função nos limites do intervalo
Fa=F(a);
Fb=F(b);
```

Método da posição falsa

Exemplo 1: Determine a solução da equação $8 - 4{,}5(x - \text{sen } x) = 0$ usando o método da posição falsa.

3° passo: Implementar no software o algoritmo equivalente ao método da bisseção.

```
if Fa*Fb>0
  disp('Erro: Não há raiz no intervalo')
  else
  disp('iter       a              b          (xNS)     F(xNS)       Tol')

for i =1:imax

  xNS=(a*Fb-b*Fa)/(Fb-Fa);  %Calcula o ponto onde a reta cruza o eixo x

  tol_i=(b-a)/2; %Calcula a tolerancia
  F_xNS=F(xNS);  %Avalia a função no ponto médio
  fprintf('%3i   %11.6f %11.6f %11.6f %11.6f %11.6f\n', i, a, b, xNS, F_xNS,tol_i)

 %Estabelecer criterio de parada com base na tolerância estipulada
  if tol_i<tol
    break
  endif

##  if i == imax
##    fprintf('Solução não encontrada com %i iterações', imax)
##    break
##  endif

  if F(a)*F_xNS<0
    b=xNS;
  else
    a=xNS;
  endif

endfor
endif
```

Método da posição falsa

Exemplo 1: Determine a solução da equação $8 - 4{,}5(x - \text{sen } x) = 0$ usando o método da posição falsa

4° passo: Avaliar os resultados, modificar parâmetros de tolerância, intervalo, máximo de iterações, etc.

Janela de Comandos

iter	a	b	(xNS)	F(xNS)	Tol
1	2.000000	3.000000	2.388578	0.328684	0.500000
2	2.388578	3.000000	2.626163	-1.599647	0.305711
3	2.388578	2.626163	2.480899	-0.402551	0.118793
4	2.388578	2.480899	2.424452	0.047512	0.046160
5	2.424452	2.480899	2.446386	-0.126287	0.028223
6	2.424452	2.446386	2.432975	-0.019856	0.010967
7	2.424452	2.432975	2.427764	0.021360	0.004262
8	2.427764	2.432975	2.429789	0.005354	0.002606
9	2.429789	2.432975	2.431027	-0.004438	0.001593
10	2.429789	2.431027	$\boxed{2.430270}$	0.001549	0.000619

>>

Resultado para tolerância 1e-3

Janela de Comandos

iter	a	b	(xNS)	F(xNS)	Tol
1	2.000000	3.000000	2.388578	0.328684	0.500000
2	2.388578	3.000000	2.626163	-1.599647	0.305711
3	2.388578	2.626163	2.480899	-0.402551	0.118793
4	2.388578	2.480899	2.424452	0.047512	0.046160
5	2.424452	2.480899	2.446386	-0.126287	0.028223
6	2.424452	2.446386	2.432975	-0.019856	0.010967
7	2.424452	2.432975	$\boxed{2.427764}$	0.021360	0.004262

>>

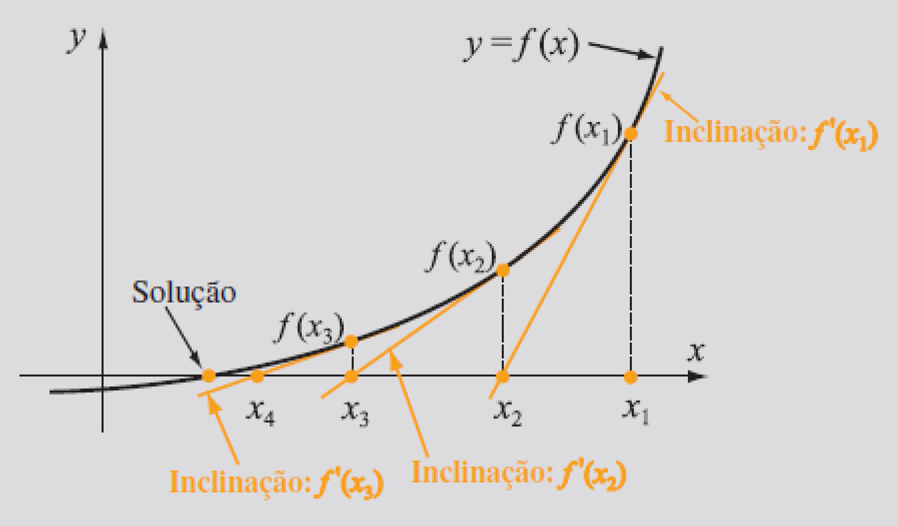
Resultado para tolerância 1e-2

Método de Newton Raphson

- O método de Newton-Rapshon (também chamado somente de método de Newton) consiste em uma abordagem de obtenção de solução numérica de uma equação na forma f(x) = 0, onde f(x) é contínua e diferenciável e sua equação possui uma solução próxima a um ponto inicial de partida fornecido.

O processo de solução começa com a escolha do ponto x_1 como a primeira estimativa da solução.

A segunda estimativa, x_2, é obtida a partir do cruzamento com o eixo x da reta tangente a $f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$.



A estimativa seguinte, $x3$, é a interseção com o eixo x da reta tangente a $f(x)$ no ponto $(x_2, f(x_2))$, e assim por diante.

Método de Newton Raphson

- Na primeira iteração a inclinação $f'(x_1)$ da tangente no ponto $(x_1,f(x_1))$ é dada conforme:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2}$$

- Para x_2, tem-se que:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

- Generalizando para x_i, obtém-se a fórmula iterativa geral para o método de Newton

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Método de Newton Raphson

Algoritmo para o método de Newton

1. Escolha um ponto x_1 como tentativa inicial da solução.
2. Para i = 1, 2,..., até que o erro seja menor que um valor especificado, calcule x_{i+1} usando a Equação:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Critério de parada:
No caso do método de Newton, uma tolerância não pode ser calculada como se faz no método da bisseção, já que os limites do intervalo não são conhecidos. Duas estimativas de erro tipicamente utilizadas pelo método de Newton são:

Erro relativo estimado $$\left|\frac{x_{i+i} - x_i}{x_i}\right| \leq \varepsilon$$

Tolerância em f(x) $$|f(x_i)| \leq \delta$$

Método de Newton Raphson

- **Exemplo 3** - Determine a solução da equação $8 - 4{,}5(x - \text{sen } x) = 0$ usando o método de Newton.

```
clc; clear all; close all;

Fun=inline('8-4.5*(x-sin(x))');
D_Fun=inline('-4.5*(1-cos(x))');
x0=2.5;
Err=1e-5;
imax=50;

for i =1: imax
  xi=x0-feval(Fun,x0)/feval(D_Fun,x0);
  if abs((xi-x0)/x0)<Err
    xz=xi;
    break
  endif
  x0=xi;
endfor

fprintf('Solução xz= %11.6f',xz)
fprintf('  , obtida em %i iterações', i)
```

Erro relativo máximo de 1e-5

Janela de Comandos

```
Solução xz=    2.430466  , obtida em 3 iterações>>
```

Erro relativo máximo de 1e-3

Janela de Comandos

```
Solução xz=    2.430466  , obtida em 2 iterações>>
```

Erro relativo máximo de 1e-3 e partindo de x0=2

Janela de Comandos

```
Solução xz=    2.430466  , obtida em 3 iterações>>
```

Método de Newton Raphson

Observações sobre o método de Newton

- Geralmente converge rapidamente. A não convergência usualmente ocorre porque o ponto de partida não está suficientemente próximo da solução.
- Problemas de convergência ocorrem tipicamente quando o valor de $f\,'(x)$ é próximo de zero na vizinhança da solução (onde $f(x) = 0$).
- É possível mostrar que o método de Newton converge se a função $f(x)$ e as suas derivadas primeira e segunda, $f\,'(x)$ e $f\,''(x)$, forem contínuas, se $f'(x)$ for diferente de zero na solução, e se o ponto de partida x1 estiver próximo da solução exata.

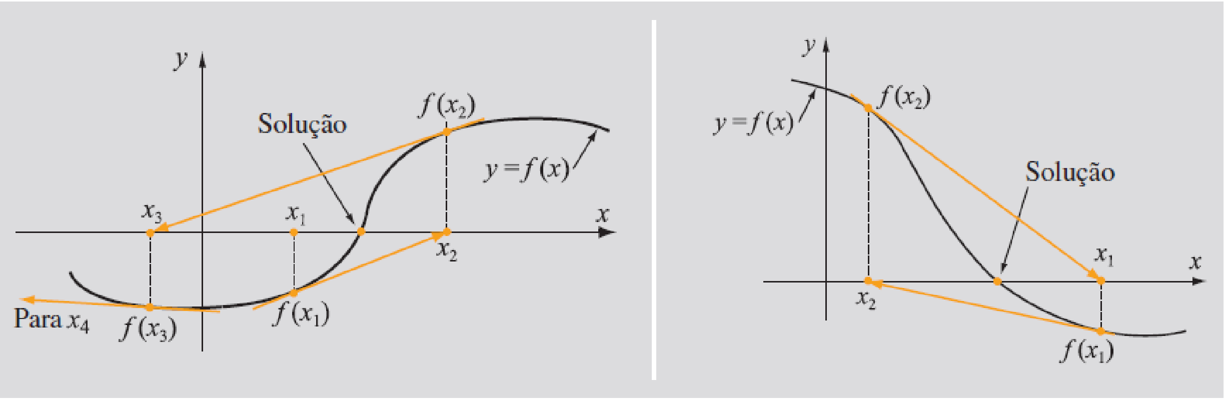
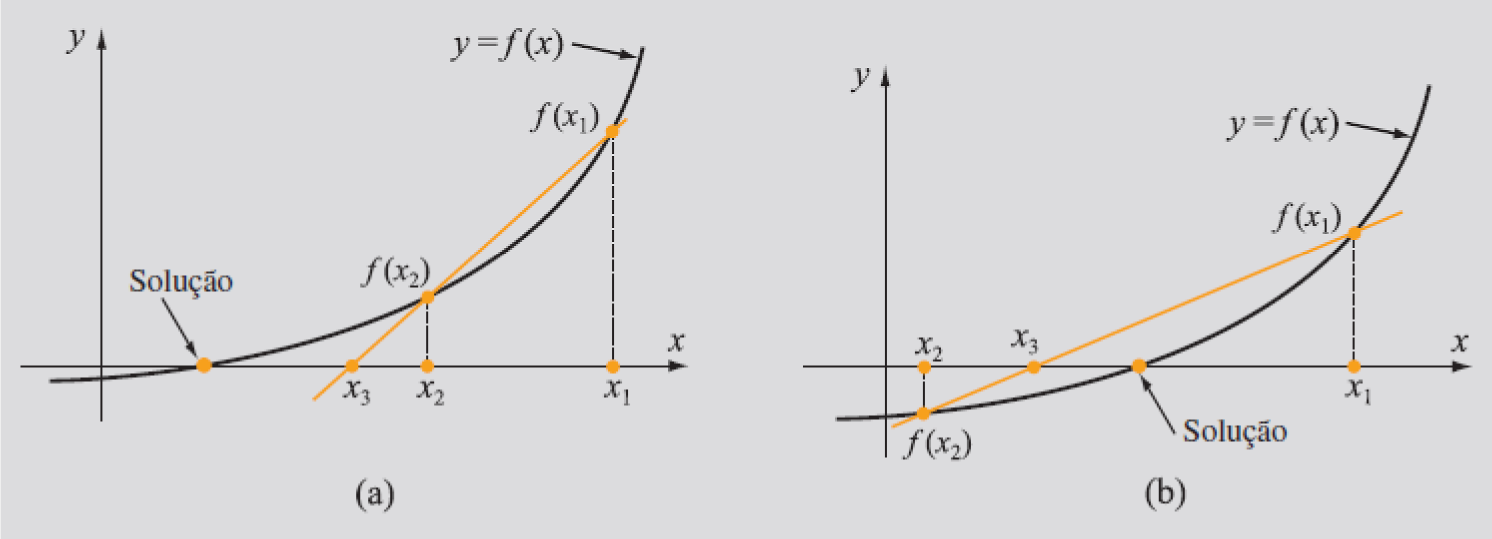


Figura 3-12 Casos em que o método de Newton diverge.

Método da secante

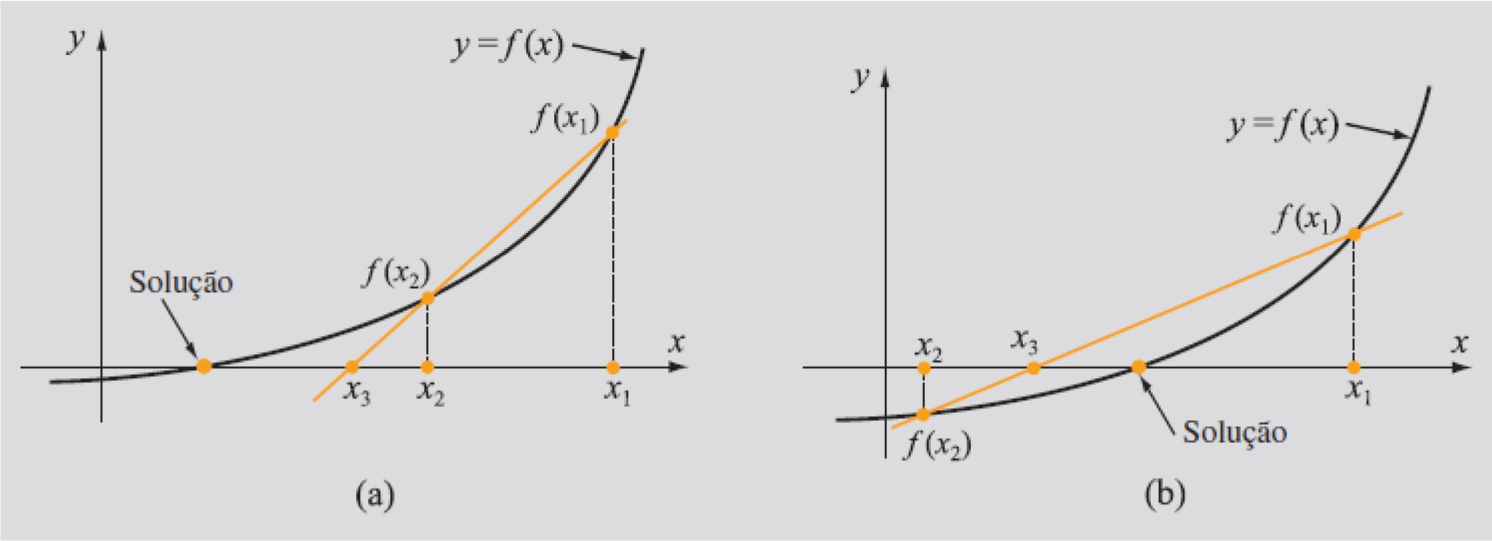
- O método da secante é uma abordagem matemática para se obter a solução numérica de uma equação na forma f(x) = 0. O método usa dois pontos na vizinhança da solução para determinar a nova solução estimada.



Método da secante (Gilat, 2008)

Método da secante

- Princípio básico do método: Os dois pontos do intervalo definido (x_1 e x_2) são usados para definir uma linha reta (reta secante) e o ponto onde essa reta intercepta o eixo x (chamado de x_3 é a nova solução estimada. ambos os pontos podem estar de um lado da solução ou a solução pode estar entre os dois pontos.



Método da secante (Gilat, 2008)

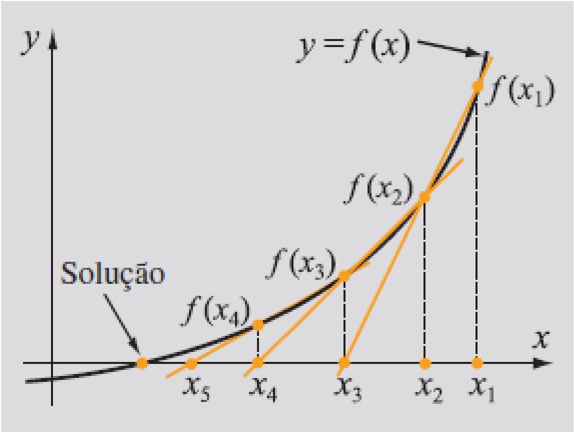
Método da secante

- A inclinação da reta secante é dada por:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - 0}{x_2 - x_3}$$

- Isolando x_3,

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$$



- Pode-se então generalizar para:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

Método da Secante

- **Exemplo 4** - Determine a solução da equação $8 - 4{,}5(x - \text{sen } x)=0$ usando o **Método da Secante.**

```
clc; clear all; close all;

Fun=inline('8-4.5*(x-sin(x))');

Err=1e-3;
imax=50;
a=2;
b=3;

for i =1: imax
  Fb=feval(Fun,b);
  Fa=feval(Fun,a);

  xi=b-Fb*(a-b)/(Fa-Fb);
  if abs((xi-b)/b)<Err
    xz=xi;
    break
  endif
  a=b;
  b=xi;
endfor

fprintf('Solução xz= %11.6f',xz)
fprintf('  , obtida em %i iterações', i)
```

Erro relativo máximo de 1e-5

```
Janela de Comandos
Solução xz=    2.430466   , obtida em 5 iterações>>
```

Erro relativo máximo de 1e-3

```
Janela de Comandos
Solução xz=    2.430466   , obtida em 4 iterações>>
```

Método da Secante

- A análise do método da secante mostra que, quando os dois pontos que definem a reta secante são próximos entre si, esse método é na realidade uma forma aproximada do método de Newton.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \qquad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{(x_{i-1} - x_i)}}$$

No método da secante (diferentemente do método de Newton), não é necessário conhecer a forma analítica da derivada.

Newtow $\longrightarrow$ $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Método do Ponto Fixo

- O método da iteração de ponto fixo (ou somente ponto fixo) é um método usado para resolver uma equação na forma f(x) = 0.

- O método é proposto rescrevendo a equação a ser tratada como:

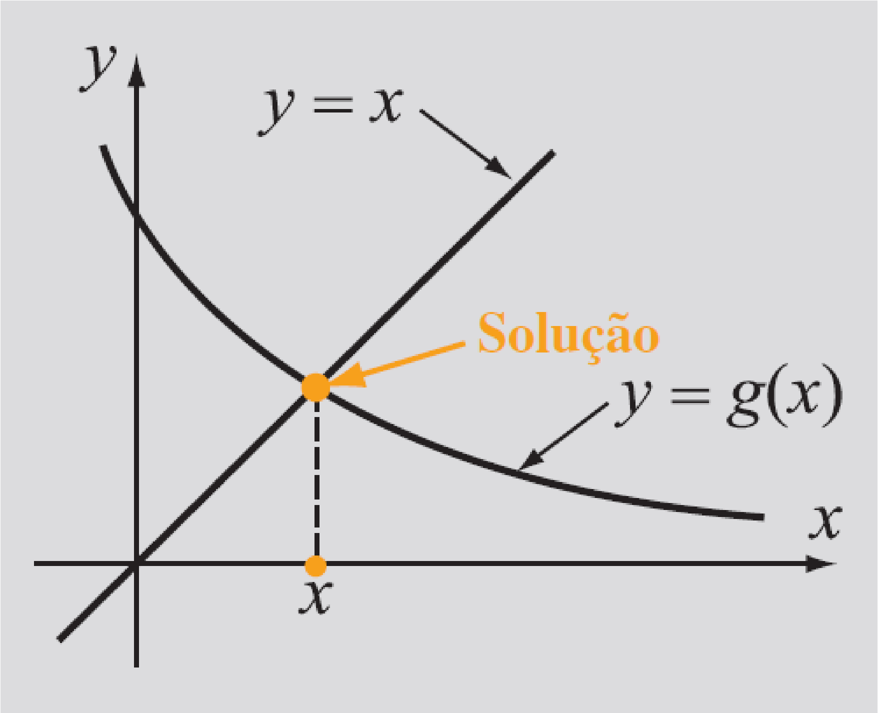
$$x = g(x)$$

- Obviamente quando x é solução da equação g(x), ambos os lados da equação são idênticos.

Método do Ponto Fixo

- O ponto de interseção entre os dois gráficos, chamado de ponto fixo, é a solução.

- Processo iterativo: Escolha de um valor de x próximo ao ponto fixo. Esse valor é a primeira tentativa da solução e é substituído em g(x). O valor obtido em g(x) é a nova (segunda) estimativa da solução.



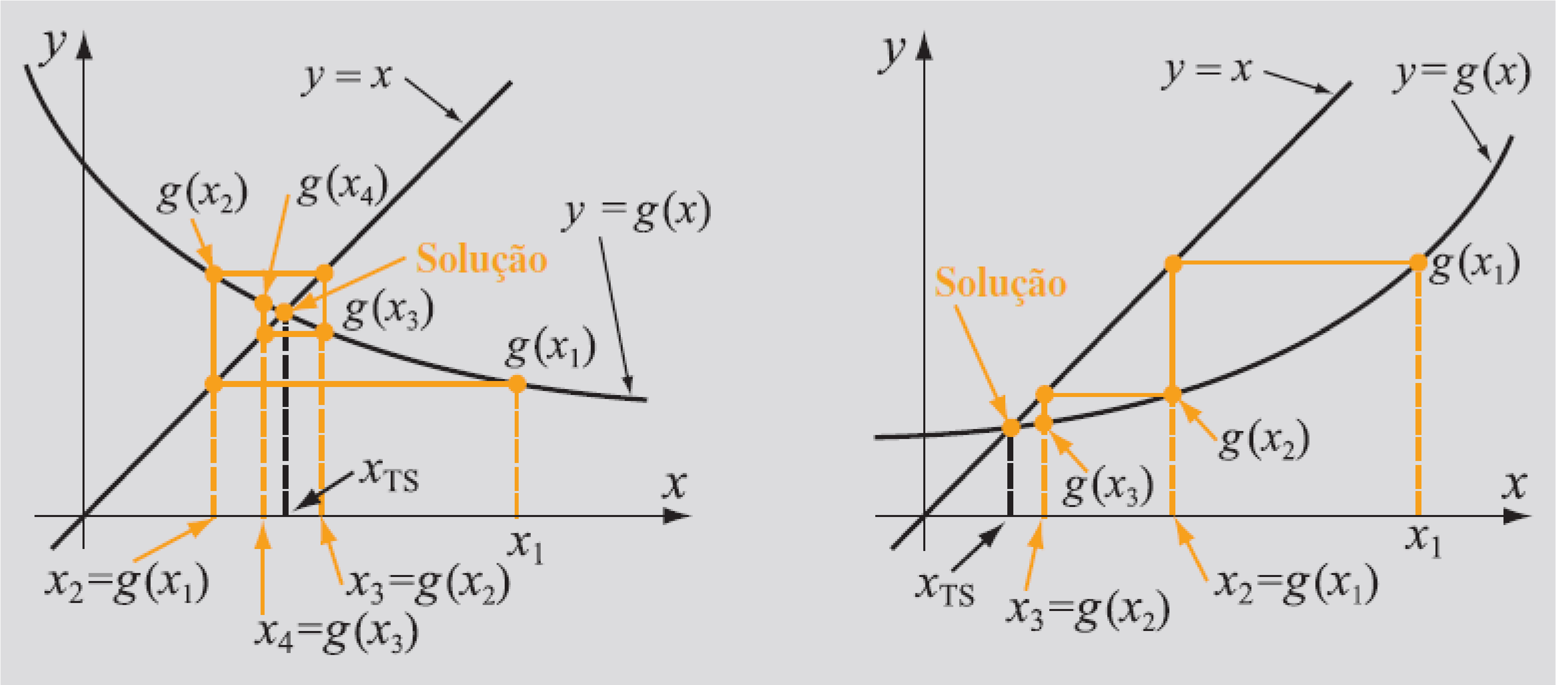
- Esse segundo valor é então substituído novamente em g(x), o que leva à terceira solução estimada e assim por diante.

Método do Ponto Fixo

- A função a ser iterada é portanto:

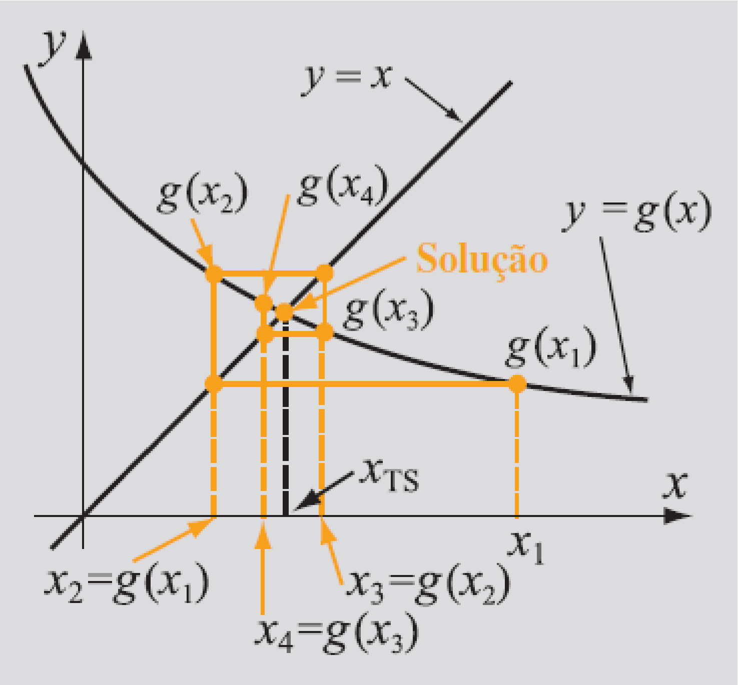
$$x_{i+1} = g(x_i)$$

função g(x) é chamada de função de iteração



Método do Ponto Fixo

- Os valores de *x* obtidos são iterações sucessivas que convergem progressivamente em direção à solução



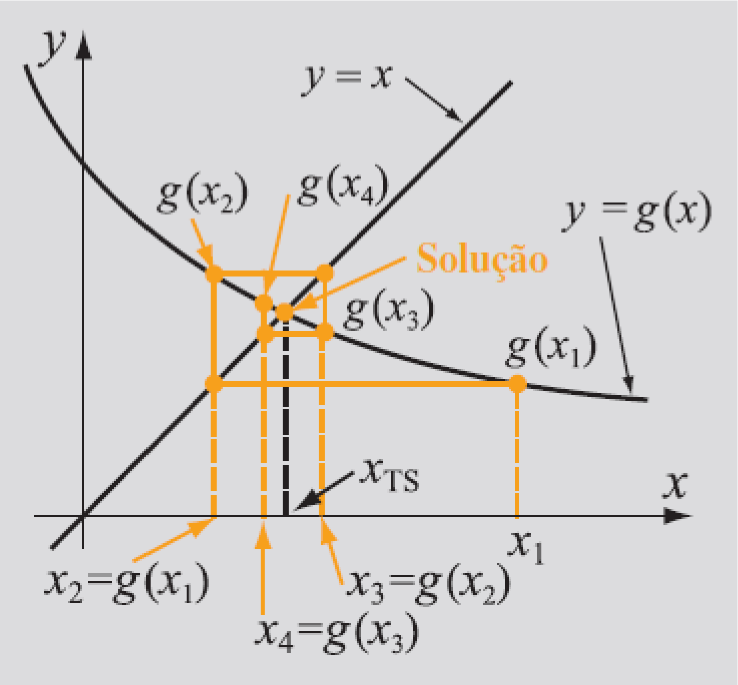
O processo de solução começa com a escolha do ponto x1 no eixo x e o traçado de uma reta vertical que cruze a curva y = g(x) no ponto g(x1).

Como x2 = g(x1), uma reta horizontal é traçada a partir do ponto (x1, g(x1)) em direção à reta y = x.

O ponto de interseção fornece a localização de x2. A partir de x2, uma reta vertical é traçada em direção à curva y = g(x).

Método do Ponto Fixo

- Os valores de *x* obtidos são iterações sucessivas que convergem progressivamente em direção à solução



O ponto de interseção é agora (x2, g(x2)), e g(x2) é também o valor de x3.

A partir do ponto (x2, g(x2)), uma reta horizontal é novamente traçada em direção a y = x, e o ponto de interseção fornece a localização de x3.

À medida que o processo continua, os pontos de interseção convergem em direção ao ponto fixo, ou seja, à solução exata xTS.

Método do Ponto Fixo

- Dependendo da forma exibida por g(x), pode ser que as iterações não convirjam para o ponto fixo, mas, ao contrário, divirjam. Mesmo que o ponto de partida esteja próximo da solução, os pontos subsequentes podem se afastar da solução.

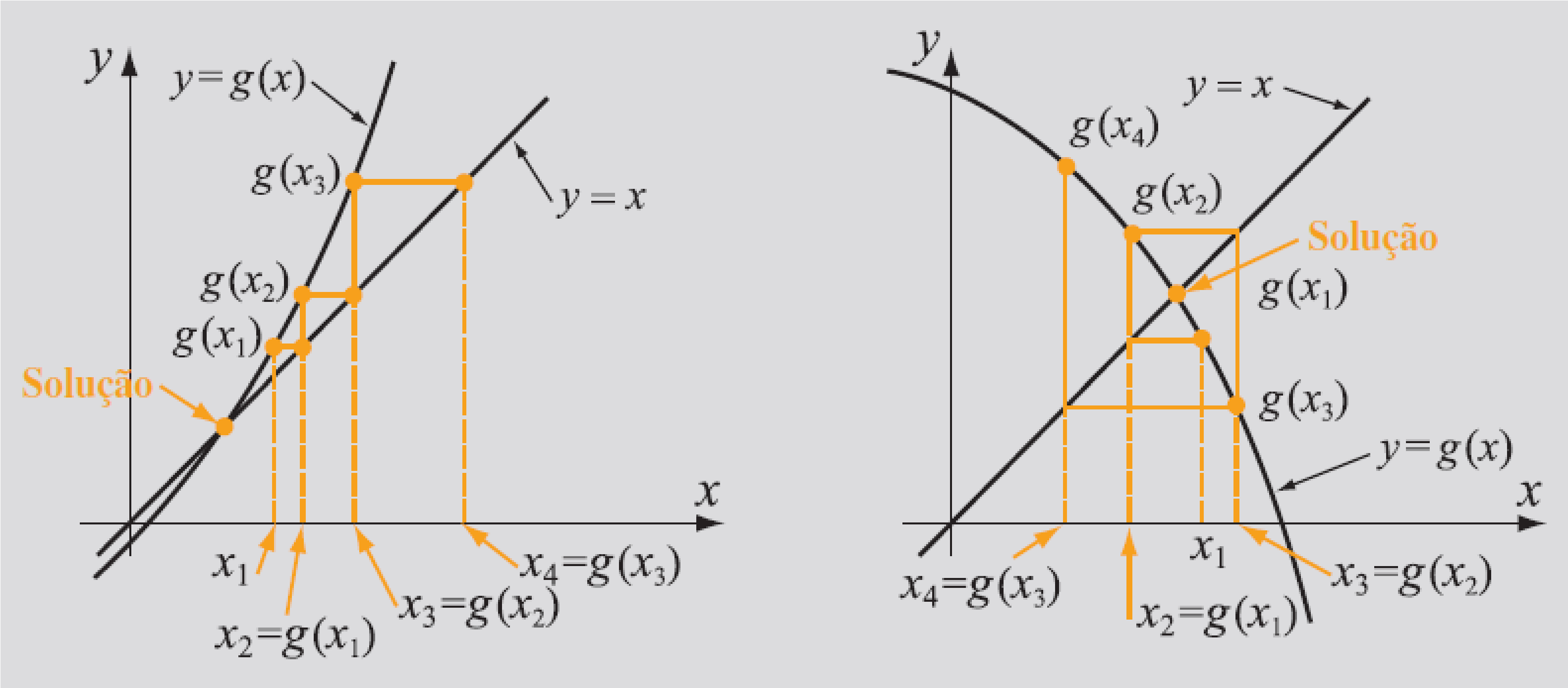


Figura 3-19 Divergência do método da iteração de ponto fixo.

Método do Ponto Fixo

- Para uma dada equação $f(x) = 0$, a função de iteração não é única:
  - várias funções de iteração $g(x)$ podem ser escritas para a mesma equação.
  - a função $g(x)$ a ser usada no processo iterativo é aquela na qual as iterações convergem em direção à solução.
  - Pode haver mais de uma forma possível, ou mesmo nenhuma forma possível. Neste último caso, o método da iteração de ponto fixo não pode ser usado para resolver a equação.

Método do Ponto Fixo

- Em casos onde há múltiplas soluções, uma dada função de iteração pode levar a uma raiz, enquanto uma diferente função pode levar a outras raízes. Na realidade, é possível determinar antecipadamente se as iterações convergem ou divergem para uma função g(x) específica.

  - O método da iteração de ponto fixo converge se, na vizinhança do ponto fixo, a derivada de g(x) possuir valor absoluto menor que 1 (condição Lipschit Contínua)

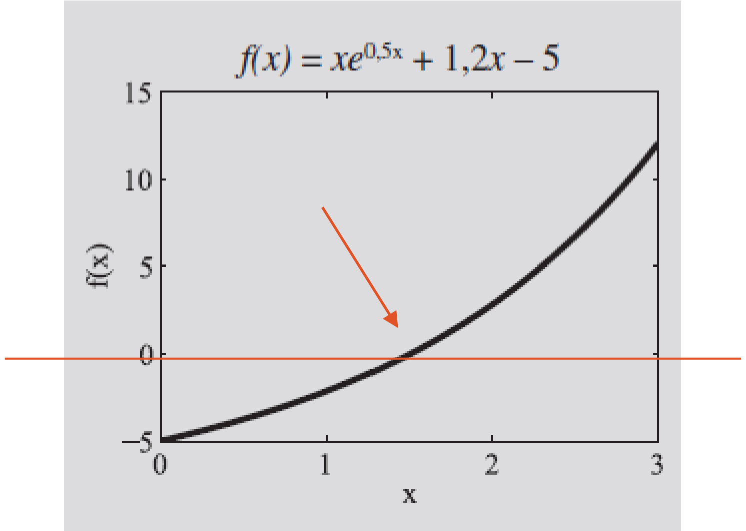
$$|g'(x)| < 1$$

Método do Ponto Fixo

- Exemplo 5:

CASO A

$$xe^{0,5x} + 1,2x - 5 = 0$$



$$g(x) = \frac{5 - xe^{0,5x}}{1,2} \text{ e } g'(x) = -(e^{0,5x} + 0,5xe^{0,5x})/1,2.$$

$$g'(1) = -(e^{0,5 \cdot 1} + 0,5 \cdot 1e^{0,5 \cdot 1})/1,2 = \boxed{-2,0609}$$

$$g'(2) = -(e^{0,5 \cdot 2} + 0,5 \cdot 2e^{0,5 \cdot 2})/1,2 = \boxed{-4,5305}$$

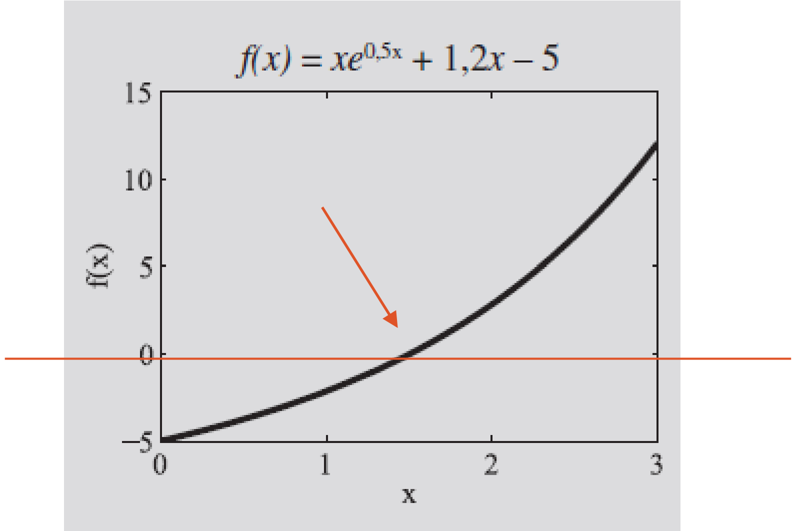
Raiz entre 1 e 2

Condição não atendida

Método do Ponto Fixo

- Exemplo 5:

$$xe^{0,5x} + 1{,}2x - 5 = 0$$



Raiz entre 1 e 2

CASO B

$$g(x) = \frac{5}{e^{0,5x} + 1{,}2} \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{-5e^{0,5x}}{2(e^{0,5x} + 1{,}2)^2}.$$

$$g'(1) = \frac{-5e^{0,5 \cdot 1}}{2(e^{0,5 \cdot 1} + 1.2)^2} = \boxed{-0{,}5079}$$

$$g'(2) = \frac{-5e^{0,5 \cdot 2}}{2(e^{0,5 \cdot 2} + 1{,}2)^2} = \boxed{-0{,}4426}$$

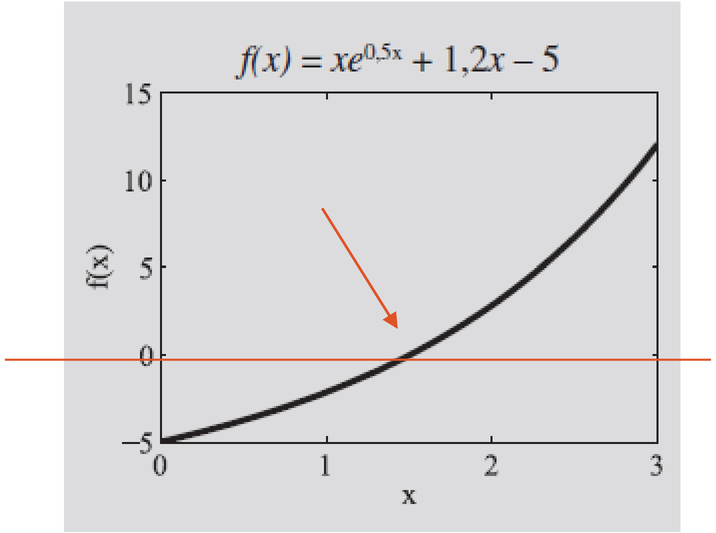
Condição atendida – função a ser implementada.

Método do Ponto Fixo

- Exemplo 5:

CASO B

$$xe^{0,5x} + 1{,}2x - 5 = 0$$



Raiz entre 1 e 2

Começando com $x_1 = 1$, as primeiras iterações são:

$$x_2 = \frac{5}{e^{0,5 \cdot 1} + 1{,}2} = 1{,}7552 \qquad x_3 = \frac{5}{e^{0,5 \cdot 1{,}7552} + 1{,}2} = 1{,}3869$$

$$x_4 = \frac{5}{e^{0,5 \cdot 1{,}3869} + 1{,}2} = 1{,}5622 \qquad x_5 = \frac{5}{e^{0,5 \cdot 1{,}5622} + 1{,}2} = 1{,}4776$$

$$x_6 = \frac{5}{e^{0,5 \cdot 1{,}4776} + 1{,}2} = 1{,}5182 \qquad x_7 = \frac{5}{e^{0,5 \cdot 1{,}5182} + 1{,}2} = 1{,}4986$$

Referências Bibliográficas

- **Amos Gilat e Vish Subramaniam. Métodos Numéricos para engenheiros e cientistas. Uma introdução com aplicações utilizando o Matlab. Porto Alegre. Bookman, 2008**

- Ruggiero, Márcia A. Gomes; Lopes, Vera Lúcia Da Rocha. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos E Computacionais. Editora Pearson, 2ª edição, São Paulo, 2005.

- Décio Sperandio, João Teixeira Mendes e Luiz Henry Monken. Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos. Editora Prentice-Hall, 2ª edição, São Paulo, 1999.

- Steven C. Chapra. Métodos Numéricos Aplicados com MatLab para Engenheiros e Cientistas. Editora McGraw Hill, 3ª edição, São Paulo, 2013.