MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ENGENHARIA

SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

2021/1

Prof.ª Drª Polliana Cândida Oliveira Martins.
Engenharias– FGA UnB

Solução de sistemas lineares

Métodos diretos para cálculo da Matriz Inversa

- Inversa Usando LU
- Inversa Usando Gauss Jordan

- Métodos Iterativos
  - Jacobi
  - Gauss-Siedel

Cálculo da inversa com o método LU

- O processo de cálculo da inversa de uma matriz é essencialmente idêntico ao processo de solução de um sistema de equações lineares.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{14} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo da inversa com o método LU

- Exemplo 1 – Calcular a inversa da seguinte matriz utilizando decomposição LU com Método de Crout

$$[a] = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -5 & 3 & 0{,}4 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 7 & -2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 2 & -4 & 3 & 0{,}1 \\ 3 & 0{,}8 & 2 & -0{,}4 & 3 \\ 0{,}5 & 3 & 2 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo da inversa com o método LU

- Exemplo 1
  - Interpretação do problema: Aplicações sucessivas do Método de Crout (n=5)

$$[a] = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -5 & 3 & 0{,}4 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 7 & -2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 2 & -4 & 3 & 0{,}1 \\ 3 & 0{,}8 & 2 & -0{,}4 & 3 \\ 0{,}5 & 3 & 2 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & -5 & 3 & 0{,}4 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 7 & -2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 2 & -4 & 3 & 0{,}1 \\ 3 & 0{,}8 & 2 & -0{,}4 & 3 \\ 0{,}5 & 3 & 2 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \\ x_{51} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0{,}2 & -5 & 3 & 0{,}4 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 7 & -2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 2 & -4 & 3 & 0{,}1 \\ 3 & 0{,}8 & 2 & -0{,}4 & 3 \\ 0{,}5 & 3 & 2 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \\ x_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0{,}2 & -5 & 3 & 0{,}4 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 7 & -2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 2 & -4 & 3 & 0{,}1 \\ 3 & 0{,}8 & 2 & -0{,}4 & 3 \\ 0{,}5 & 3 & 2 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \\ x_{53} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & -5 & 3 & 0{,}4 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 7 & -2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 2 & -4 & 3 & 0{,}1 \\ 3 & 0{,}8 & 2 & -0{,}4 & 3 \\ 0{,}5 & 3 & 2 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{14} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{44} \\ x_{54} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0{,}2 & -5 & 3 & 0{,}4 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 7 & -2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 2 & -4 & 3 & 0{,}1 \\ 3 & 0{,}8 & 2 & -0{,}4 & 3 \\ 0{,}5 & 3 & 2 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{15} \\ x_{25} \\ x_{35} \\ x_{45} \\ x_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo da inversa com o método LU

- Exemplo 1
  - Criar uma função, baseada nas anteriores que resolva o novo conjunto de sistemas recursivamente.

```
function invA =InversaLUCrout(A)

%Esta função calcula a inversa de uma matriz A
##Variáveis de entrada:
##A Matriz a ser invertida.
##Variável de saída:
##Inversa de A.

[nR, nC]=size(A);
I=eye(nR);
[L,U]=LUCrout(A);

for j =1:nC

y=ProgresSub(L,I(:,j));
invA(:,j)=RegresSub(U,y);
endfor

endfunction
```

Cálculo da inversa com o método LU

- Exemplo 1
  - Criar uma função, baseada nas anteriores que resolva o novo conjunto de sistemas recursivamente;
  - Checar os resultados;

```
>> A
A =

    0.2000   -5.0000    3.0000    0.4000         0
   -0.5000    1.0000    7.0000   -2.0000    0.3000
    0.6000    2.0000   -4.0000    3.0000    0.1000
    3.0000    0.8000    2.0000   -0.4000    3.0000
    0.5000    3.0000    2.0000    0.4000    1.0000

>> INV=InversaLUCrout(A)
INV =

   -0.707949    2.531433    2.431196    0.966576   -3.902277
   -0.193432    0.310142    0.279466    0.057715   -0.294135
    0.021689    0.365465    0.286148    0.050555   -0.289920
    0.273412   -0.129925    0.131613   -0.141014    0.448857
    0.781526   -2.875105   -2.678937   -0.701139    4.233841
```

Solução de sistemas lineares

Métodos diretos para cálculo da Matriz Inversa

Inversa Usando LU

Inversa Usando Gauss Jordan

- Métodos Iterativos
  - Jacobi
  - Gauss-Siedel

Cálculo da Inversa usando Método Gauss Jordan

- O método de Gauss-Jordan pode ser facilmente adaptado para calcular a inversa de uma matriz quadrada [A] (n × n).
  - Incorporação de uma matriz identidade [I] de mesmo tamanho à matriz [A]

$$\left[\begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Procedimento de Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{array}\right]$$

  - procedimento de Gauss-Jordan é aplicado de tal forma que os elementos da matriz [A] (o lado esquerdo da matriz aumentada) sejam convertidos em 1s ao longo da diagonal principal e em 0s nos demais campos.

Cálculo da Inversa usando Método Gauss Jordan

- Exemplo 2 – Calcular a inversa da seguinte matriz utilizando o método de Gauss Jordan.

$$[a] = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -5 & 3 & 0{,}4 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 7 & -2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 2 & -4 & 3 & 0{,}1 \\ 3 & 0{,}8 & 2 & -0{,}4 & 3 \\ 0{,}5 & 3 & 2 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo da Inversa usando Método Gauss Jordan

- Exemplo 2
  - Com base na lógica de diagonalização das matrizes, aplicar a ideia do método de Gauss Jordan no conjunto da matriz A concatenada a matriz identidade.

```
function Ainv = InversaGaussJordan(A)
% The function solve a system of linear equations ax=b using the Gauss
% elimination method.
% Input variable:
    % A The matrix to be inverted.
% Output variable:
    % Ainv the inverse of A.
[R, C] = size(A);
b=eye(R);
ab = [A,b];
CM=2*C;
for j = 1:R
      ab(j,:)= ab(j,:)/ab(j,j);
      for i = 1:R
          if i~=j
            ab(i,j:CM) = ab(i,j:CM)-ab(i,j)*ab(j,j:CM);
          endif
     endfor
endfor
Ainv=ab(:,R+1:CM);
endfunction
```

Cálculo da Inversa usando Método Gauss Jordan

- Exemplo 2
  - Com base na lógica de diagonalização das matrizes, aplicar a ideia do método de Gauss Jordan no conjunto da matriz A concatenada a matriz identidade.

Janela de Comandos

```
>> A
A =

    0.2000   -5.0000    3.0000    0.4000         0
   -0.5000    1.0000    7.0000   -2.0000    0.3000
    0.6000    2.0000   -4.0000    3.0000    0.1000
    3.0000    0.8000    2.0000   -0.4000    3.0000
    0.5000    3.0000    2.0000    0.4000    1.0000

>> INVA=InversaGaussJordan(A)
INVA =

   -0.707949    2.531433    2.431196    0.966576   -3.902277
   -0.193432    0.310142    0.279466    0.057715   -0.294135
    0.021689    0.365465    0.286148    0.050555   -0.289920
    0.273412   -0.129925    0.131613   -0.141014    0.448857
    0.781526   -2.875105   -2.678937   -0.701139    4.233841

>> |
```

Solução de sistemas lineares

Métodos diretos para cálculo da Matriz Inversa

- Inversa Usando LU
- Inversa Usando Gauss Jordan

- Métodos Iterativos
  - Jacobi
  - Gauss-Siedel

Métodos Iterativos

- Métodos Iterativos: ideia análoga a solução via método do ponto fixo usado para resolver uma única equação não-linear;
  - Equações são colocadas em uma forma explícita na qual cada incógnita é escrita em termos das demais incógnitas.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4
\end{aligned}
$$

Escrevendo as equações em uma forma explícita $\longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= [b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)]/a_{11} \\
x_2 &= [b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)]/a_{22} \\
x_3 &= [b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4)]/a_{33} \\
x_4 &= [b_4 - (a_{21}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3)]/a_{44}
\end{aligned}
$$

Métodos Iterativos

- Métodos Iterativos: O processo de solução começa com a escolha de valores iniciais para as incógnitas (primeira solução estimada).
  - primeira solução assumida é substituída no lado direito das equações, e os novos valores calculados para as incógnitas formam a segunda solução estimada e assim sucessivamente
- Em um sistema com n equações, as equações explícitas para as incógnitas $[x_i]$ são:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} a_{ij} x_j\right)\right] \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Métodos Iterativos

- Critério de convergência
  - Para um sistema de n equações [a][x] = [b], uma condição sufi ciente para a convergência ocorre se, em cada uma das linhas da matriz de coeficientes [a], o valor absoluto do elemento diagonal for maior que a soma dos valores absolutos dos elementos fora da diagonal.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} |a_{ij}|$$

  - Essa condição é suficiente mas não necessária para a convergência do método iterativo.
    - Quando tal condição é satisfeita, a matriz [a] é classificada como diagonalmente dominante.

Solução de sistemas lineares

Métodos diretos para cálculo da Matriz Inversa

Inversa Usando LU

Inversa Usando Gauss Jordan

- Métodos Iterativos
  - Jacobi
  - Gauss-Siedel
- Funções Residentes

Método iterativo de Jacobi

- Um valor inicial é escolhido para cada uma das incógnitas;
  - Se não houver nenhuma informação pode-se assumir que o valor inicial de todas elas seja igual a zero.
- A segunda estimativa da solução, é calculada com a substituição da primeira estimativa no lado direito.

$$x_i^{(2)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} a_{ij}x_j^{(1)}\right)\right] \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

  - Em geral, a (k + 1)-ésima estimativa da solução é calculada a partir da k-ésima estimativa usando:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)\right] \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Método iterativo de Jacobi

- Critério de parada:
  - As iterações continuam até que as diferenças entre os valores obtidos nas iterações sucessivas sejam pequenas.
  - As iterações podem ser interrompidas quando o valor absoluto do erro relativo estimado de todas as incógnitas for menor que algum valor predeterminado de tolerância.

$$\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k)}} \right| < \varepsilon \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Solução de sistemas lineares

Métodos diretos para cálculo da Matriz Inversa

- Inversa Usando LU
- Inversa Usando Gauss Jordan

- Métodos Iterativos
  - Jacobi
  - Gauss-Siedel

Método iterativo de Gauss-Siedel

- No método de Gauss-Seidel, os valores atuais das incógnitas são utilizados no cálculo do novo valor da próxima incógnita. Em outras palavras, à medida que um novo valor é calculado, ele é imediatamente utilizado na próxima aplicação.
  - Um valor inicial é escolhido para cada uma das incógnitas;
  - Se não houver nenhuma informação pode-se assumir que o valor inicial de todas elas seja igual a zero.

Calcula-se x_1 para a primeira iteração;

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \sum_{j=2}^{j=n} a_{1j}x_j^{(k)}\right]$$

Calcula-se x_{i+1} levando em consideração os valores já definidos na iteração anterior

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \left(\sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)\right] \quad i = 2, 3, \ldots, n-1$$

Calcula-se x_n para todos os dados anteriores;

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - \sum_{j=1}^{j=n-1} a_{nj}x_j^{(k+1)}\right]$$

Método iterativo de Gauss-Siedel

- Exemplo 3 – Resolva, utilizando o método iterativo de gauss siedel, o conjunto de Equações lineares abaixo apresentadas.

$$9x_1 + 3x_2 + x_3 = 13$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 6$$
$$6x_1 - 8x_3 = -2$$

Método iterativo de Gauss-Siedel

- Exemplo 3
  - Escrever as variáveis de forma explicita;

$$
\begin{aligned}
9x_1 + 3x_2 + x_3 &= 13 \\
2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 6 \\
6x_1 - 8x_3 &= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (13 - 3x_2 - x_3)/9 \\
x_2 &= (6 - 2x_1 + x_3)/5 \\
x_3 &= (2 + 6x_1)/8
\end{aligned}
$$

Método iterativo de Gauss-Siedel

- Exemplo 3
  - Implementar uma solução do algoritmo;

```
% Gauss Siedel - Solução de sistemas lineares
clear all; close all; clc;

% Chute inicial
k = 1; x1 = 0; x2 = 0; x3 = 0;
SumE=1;

%Print na tela
disp('     k          x1         x2         x3          SumError'      )
fprintf(' %2.0f       %-8.5f   %-8.5f   %-8.5f       %-8.5f \n', k, x1(k), x2(k), x3(k), SumE)

%Laço de iteração
for k=2 : 100
%_______________________________________________________
##EX1

x1(k)  = (13         -3*x2(k-1)  - x3(k-1)  )/(9);
x2(k)  = (6 -2*x1(k)             + x3(k-1)  )/(5);
x3(k)  = (2 +6*x1(k)                        )/(8);
%_______________________________________________________
    %Calculando os erros
    e1=abs((x1(k)-x1(k-1))/x1(k));
    e2=abs((x2(k)-x2(k-1))/x2(k));
    e3=abs((x3(k)-x3(k-1))/x3(k));

    %Somando os erros
    SumE=e1+e2+e3;

if SumE<=1e-5
     break
else
end

fprintf(' %2.0f       %-8.5f   %-8.5f   %-8.5f     %-8.5f \n', k, x1(k), x2(k), x3(k), SumE)
end
```

Método iterativo de Gauss-Siedel

- Exemplo 3
  - Extrair as respostas;
  - Convergência dos Valores
  - Quantidade de iterações necessárias para atingir a convergência
  - Checar as respostas!

k	x1	x2	x3	SumError
1	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000
2	1.44444	0.62222	1.33333	3.00000
3	1.08889	1.03111	1.06667	0.97308
4	0.98222	1.02044	0.98667	0.20013
5	0.99467	0.99947	0.99600	0.04287
6	1.00062	0.99895	1.00047	0.01093
7	1.00030	0.99997	1.00022	0.00159
8	0.99998	1.00005	0.99999	0.00063
9	0.99998	1.00000	0.99999	0.00005
10	1.00000	1.00000	1.00000	0.00003

```
>>
```

Referências Bibliográficas

- **Amos Gilat e Vish Subramaniam. Métodos Numéricos para engenheiros e cientistas. Uma introdução com aplicações utilizando o Matlab. Porto Alegre. Bookman, 2008**

- Ruggiero, Márcia A. Gomes; Lopes, Vera Lúcia Da Rocha. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos E Computacionais. Editora Pearson, 2ª edição, São Paulo, 2005.

- Décio Sperandio, João Teixeira Mendes e Luiz Henry Monken. Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos. Editora Prentice-Hall, 2ª edição, São Paulo, 1999.

- Steven C. Chapra. Métodos Numéricos Aplicados com MatLab para Engenheiros e Cientistas. Editora McGraw Hill, 3ª edição, São Paulo, 2013.