



# 微积分 I 上册习题课讲义

时间：September 18, 2024

不要以为抹消过去，重新来过，即可发生什么改变。——比企谷八幡

## 目录

# 第1章 解析几何初步

## 1.1 向量

1. 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  点在边  $AB$  上, 且  $AD:AB = \lambda$ , 用  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  以及  $\lambda$  求  $\overrightarrow{AD}$  的模长.
2. 对平面向量  $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ , 证明下列恒等式成立:

$$\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2$$

3. 你能否证明对于任意平面向量  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , Lagrange 恒等式

$$\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2$$

成立, 这个恒等式和 Cauchy-Schawtz 不等式有什么关系?

4.  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  为三个向量, 证明若存在不全为零的常数  $k, l, m$ , 使得  $k\mathbf{a} \times \mathbf{b} + l\mathbf{b} \times \mathbf{c} + m\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ , 则  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$  共线.
5. 求空间 3 点  $A, B, C$  满足下列关系的充要条件:  $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = \mathbf{0}$ .
6. (选做)  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  的元素都是平面向量, 且满足  $|\mathbf{v}_1| + |\mathbf{v}_2| + \dots + |\mathbf{v}_n| = 1$ , 求证存在  $S$  的子集  $W$ :  $\left| \sum_{\mathbf{w} \in W} \mathbf{w} \right| \geq \frac{1}{\pi}$ .



7.  $\mathbf{b} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{c} = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  不共线, 求同时垂直于  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  的单位向量.
8. 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  是欧氏空间中任给的四个起点为  $O$  的向量, 它们的终点分别为  $A, B, C, D$ . 证明这些终点  $A, B, C, D$  共面的充分必要条件是它们中任意取三个得到的混合积满足恒等式:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] + [\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0.$$

## 1.2 空间解析几何

1. 判断下列直线的位置关系:

(a).  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-2}{1}$  和  $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$

(b).  $\begin{cases} x+z+1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$  和  $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$

2. 判断下列平面的位置关系:

(a).  $x + 3y - z - 2 = 0$  和  $2x + 6y - 2z - 2 = 0$ ;

(b).  $x + y + 3z - 4 = 0$  和  $x + 3y + z - 4 = 0$ .

3. 判断下列直线与平面的位置关系:

(a). 直线  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-8}{2}$  平面  $x + y - z + 6 = 0$ ;

(b). 直线  $\begin{cases} x + 3y - 2z + 1 = 0 \\ 2x + 4y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ , 平面  $x + 2y - z - 3 = 0$ .

4. 求下列直线的方程:

(a). 过点  $(0, 1, -1)$ , 与平面  $x - 3y + z - 2 = 0$  平行, 并且和直线  $\frac{x+13}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$  和  $\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$  都共面;

(b). 平行于向量  $u = (8, 7, 1)$ , 并与直线  $\begin{cases} 3x - 2y + 2z + 3 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$  和  $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x - 2z + 7 = 0 \end{cases}$  都相交;

(c). 过点  $(0, 1, -1)$ , 与直线  $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x - 2z + 7 = 0 \end{cases}$  和  $\begin{cases} x + 5y - 10 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$  都共面;

(d). 经过点  $M(2, -1, 3)$  平行于向量  $u = (1, 0, 3)$ ;

(e). 经过点  $M(3, -2, 1)$ , 垂直于平面  $3x + 2y - 3z + 5 = 0$ ;

(f). 经过点  $M(0, 1, -1)$ , 并且与直线  $\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$  正交.

5. 求下列平面的方程:

(a). 过直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$  平行于向量  $u = (2, 1, -2)$ ;

(b). 过  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$  和原点;

(c). 过直线  $\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ , 平行于向量  $u = (1, 1, -1)$ ;

(d). 平行于平面  $\pi: 6x - 2y + 3z + 15 = 0$ , 并且使得点  $(0, -2, -1)$  到所作平面和平面  $\pi$  的距离相等;

(e). 平行于  $x$  轴, 经过点  $M_1(1, -1, 2), M_2(2, 0, -1)$ .

6. 求点到直线的距离:

(a). 点  $M(1, 0, 2)$ , 直线  $\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ x - y - 2 = 1 \end{cases}$ ;

(b). 点  $M(3, 10, -1)$  直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{10} = \frac{z+1}{-3}$ .

7. 已知平面  $\pi$  过点  $(1, 1, 2)$ , 并在  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴上的截距成等差数列, 又知三截距之和为 12. 求平面的方程.

8. 在直角坐标系中, 平面  $x + y + z = 0$  与二次曲面  $kxy + yz + xz = 0$  相交于两条直线  $l_1, l_2$ . 求正实数  $k$  的值, 使得这两条直线的夹角是  $\frac{\pi}{2}$ .

9. 在直角坐标系中, 已知平面  $ax + by + cz = 0$  ( $abc \neq 0$ ) 和二次曲面  $xy + yz + zx = 0$  的交线是两条正交的

直线, 证明  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ .

10. 设  $M_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$  是不共线的三个点, 证明

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

是这三个点所决定的平面的方程.

11. 求经过  $z$  轴, 并且和平面  $2x + y - \sqrt{5}z - 1 = 0$  的夹角为  $60^\circ$  的平面的方程.

12. 求到平面  $3x - 2y - 6z - 4 = 0$  和  $2x + 2y - z + 5 = 0$  距离相等的点的轨迹.

### 1.3 练习 (2025-02-28)

作业简要给出过程即可

练习 1.1 求空间 3 点  $A, B, C$  满足下列关系的充要条件:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = 0.$$

练习 1.2 求异面直线  $L_1: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$  与  $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{0}$  之间的距离.

练习 1.3 已知直线  $L_1: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = t \end{cases}$  与  $L_2: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$  求直线  $L_1$  与  $L_2$  之间的距离.

练习 1.4 求直线  $L: \begin{cases} 2x - 4y + z = 0, \\ 3x - y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$  在平面  $4x - y + z = 1$  上的投影直线方程.

练习 1.5 求过点  $P(-3, 5, 9)$  与  $L_1: \begin{cases} y = 3x + 5 \\ z = 2x - 3 \end{cases}$  和  $L_2: \begin{cases} y = 4x - 7, \\ z = 5x + 10 \end{cases}$  都相交的直线方程.

解 ?? 解答

充要条件为:  $A, B, C$  三点共线。

证明:

必要性: 若  $A, B, C$  三点共线, 则  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ , 故  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

又  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ .

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \times (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\
&= \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA} \\
&= \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} + \vec{0} \\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

即  $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = 0$ 。

充分性：若  $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = 0$ ，则  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$ ，故  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ 。由于  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{AC}$  有公共点  $A$ ，所以  $A, B, C$  三点共线。

答案：  $A, B, C$  三点共线

**解** ?? 解答

异面直线  $L_1$  与  $L_2$  之间的距离公式为：

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

其中，

- $L_1$ : 方向向量  $\vec{s}_1 = (0, 1, 1)$ ，已知点  $P_1 = (1, 0, 0)$
- $L_2$ : 方向向量  $\vec{s}_2 = (2, -1, 0)$ ，已知点  $P_2 = (0, 0, -2)$
- $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 0, -2)$

经过计算，异面直线  $L_1$  与  $L_2$  之间的距离为： 1

**解** ?? 解答

直线  $L_1$  与  $L_2$  的方向向量均为  $\vec{s} = (1, 2, 1)$ ，故两直线平行。

取  $L_1$  上点  $P_1(1, -1, 0)$ ， $L_2$  上点  $P_2(2, -1, 1)$ ，则  $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 1)$ 。

平行线间距离  $d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$ 。

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (-2, 0, 2)。$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{s}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}。$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}。$$

$$d = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}。$$

**解** ?? 解答

直线  $L$  的方向向量为  $\vec{s} = (9, 7, 10)$ ，点  $P = (\frac{18}{5}, \frac{9}{5}, 0)$  在直线  $L$  上。

投影平面法向量  $n_{proj} = \vec{s} \times \vec{n}_p = (17, 31, -37)$ ，其中  $\vec{n}_p = (4, -1, 1)$  为投影平面  $4x - y + z = 1$  的法向量。

投影平面方程为： $17(x - \frac{18}{5}) + 31(y - \frac{9}{5}) - 37(z - 0) = 0$ ，化简得  $17x + 31y - 37z = 117$ 。

投影直线方程为投影平面与平面  $4x - y + z = 1$  的交线, 即:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 1 \\ 17x + 31y - 37z = 117 \end{cases}$$

答案: 投影直线方程为 
$$\begin{cases} 4x - y + z = 1 \\ 17x + 31y - 37z = 117 \end{cases}$$

**解 ?? 解答**

解:

将直线  $L_1$  和  $L_2$  转换为参数方程:

$$L_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 3t + 5 \\ z = 2t - 3 \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} x = s \\ y = 4s - 7 \\ z = 5s + 10 \end{cases}$$

设  $M(t, 3t+5, 2t-3) \in L_1$ ,  $N(s, 4s-7, 5s+10) \in L_2$ , 则  $\overrightarrow{PM} = (t+3, 3t, 2t-12)$ ,  $\overrightarrow{PN} = (s+3, 4s-12, 5s+1)$ 。

由  $\overrightarrow{PM} \parallel \overrightarrow{PN}$  得  $\frac{t+3}{s+3} = \frac{3t}{4s-12} = \frac{2t-12}{5s+1}$ 。

解得  $t = -\frac{240}{29}$ 。方向向量  $\vec{v} = \overrightarrow{PM} = (17, 80, 92)$ 。

直线方程为:  $\frac{x+3}{17} = \frac{y-5}{80} = \frac{z-9}{92}$ 。

答案:  $\frac{x+3}{17} = \frac{y-5}{80} = \frac{z-9}{92}$