微积分 I 上册习题课讲义

时间：September 18, 2024

ElegantLATEX Program

不要以为抹消过去，重新来过，即可发生什么改变。——比企谷八幡

目录

第 1 章 解析几何初步

1.1 向量

1. 在 $\triangle ABC$ 中，D 点在边 AB 上，且 $AD : AB = \lambda$，用 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 以及 λ 求 $\overrightarrow{AD}$ 的模长.
2. 对平面向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$, 证明下列恒等式成立：
$$\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2$$
3. 你能否证明对于任意平面向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots b_n)$，Lagrange 恒等式
$$\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2$$
成立，这个恒等式和 Cauchy-Schawtz 不等式有什么关系？
4. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为三个向量, 证明若存在不全为零的常数 k, l, m, 使得 $k\mathbf{a}\times\mathbf{b}+l\mathbf{b}\times c+m\mathbf{c}\times\mathbf{a} = 0$, 则 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{b}\times\mathbf{c}, \mathbf{c}\times\mathbf{a}$ 共线.
5. 求空间 3 点 A, B, C 满足下列关系的充要条件：$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA} = 0$.
6. （选做）$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 的元素都是平面向量，且满足 $|\mathbf{v}_1| + |\mathbf{v}_2| + \cdots + |\mathbf{v}_n| = 1$，求证存在 S 的子集满足 W：$\left|\sum_{\mathbf{w}\in W}\mathbf{w}\right| \geq \frac{1}{\pi}$.
7. $\mathbf{b} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{c} = (x_2, y_2, z_2)$，$\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共线，求同时垂直于 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的单位向量.
8. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 是欧氏空间中任给的四个起点为 O 的向量，它们的终点分别为 A, B, C, D. 证明这些终点 A, B, C, D 共面的充分必要条件是它们中任意取三个得到的混合积满足恒等式：
$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] + [\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0.$$

1.2 空间解析几何

1. 判断下列直线的位置关系：
   (a). $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{9} = \dfrac{z-2}{1}$ 和 $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$
   (b). $\begin{cases} x+z+1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$
2. 判断下列平面的位置关系：

(a). $x+3y-z-2=0$ 和 $2x+6y-2z-2=0$;

(b). $x+y+3z-4=0$ 和 $x+3y+z-4=0$.

3. 判断下列直线与平面的位置关系:

(a). 直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-8}{2}$ 平面 $x+y-z+6=0$;

(b). 直线 $\begin{cases} x+3y-2z+1=0 \\ 2x+4y+2z-2=0 \end{cases}$, 平面 $x+2y-z-3=0$.

4. 求下列直线的方程:

(a). 过点 (0,1,-1), 与平面 $x-3y+z-2=0$ 平行, 并且和直线 $\dfrac{x+13}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z}{1}$ 和 $\dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z}{1}$ 都共面;

(b). 平行于向量 $u=(8,7,1)$, 并与直线 $\begin{cases} 3x-2y+2z+3=0 \\ 2x+y+z+1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ 3x-2z+7=0 \end{cases}$ 都相交;

(c). 过点 $(0,1,-1)$, 与直线 $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ 3x-2z+7=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x+5y-10=0 \\ y+z-3=0 \end{cases}$ 都共面;

(d). 经过点 $M(2,-1,3)$ 平行于向量 $u=(1,0,3)$;

(e). 经过点 $M(3,-2,1)$, 垂直于平面 $3x+2y-3z+5=0$;

(f). 经过点 $M(0,1,-1)$, 并且与直线 $\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$ 正交.

5. 求下列平面的方程:

(a). 过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 平行于向量 $u=(2,1,-2)$;

(b). 过 $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}$ 和原点;

(c). 过直线 $\begin{cases} 2x+3y+z-1=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$, 平行于向量 $u=(1,1,-1)$;

(d). 平行于平面 $\pi: 6x-2y+3z+15=0$, 并且使得点 $(0,-2,-1)$ 到所作平面和平面 π 的距离相等;

(e). 平行于 x 轴, 经过点 $M_1(1,-1,2), M_2(2,0,-1)$.

6. 求点到直线的距离:

(a). 点 $M(1,0,2)$, 直线 $\begin{cases} 3x-2y-1=0 \\ x-y-2=1 \end{cases}$;

(b). 点 $M(3,10,-1)$ 直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-5}{10}=\dfrac{z+1}{-3}$.

7. 已知平面 π 过点 $(1,1,2)$, 并在 x 轴, y 轴, z 轴上的截距成等差数列, 又知三截距之和为 12. 求平面的方程.

8. 在直角坐标系中, 平面 $x+y+z=0$ 与二次曲面 $kxy+yz+xz=0$ 相交于两条直线 l_1, l_2. 求正实数 k 的值, 使得这两条直线的夹角是 $\dfrac{\pi}{2}$.

9. 在直角坐标系中, 已知平面 $ax+by+cz=0$ $(abc\neq 0)$ 和二次曲面 $xy+yz+zx=0$ 的交线是两条正交的

直线, 证明 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

10. 设 $M_i=(x_i,y_i,z_i), i=1,2,3$ 是不共线的三个点, 证明

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

是这三个点所决定的平面的方程.

11. 求经过 z 轴, 并且和平面 $2x+y-\sqrt{5}z-1=0$ 的夹角为 60° 的平面的方程.

12. 求到平面 $3x-2y-6z-4=0$ 和 $2x+2y-z+5=0$ 距离相等的点的轨迹.

1.3 练习（2025-02-28）

作业简要给出过程即可

练习 1.1 求空间 3 点 A,B,C 满足下列关系的充要条件:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}=0.$$

练习 1.2 求异面直线 $L_1:\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 与 $L_2:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{0}$ 之间的距离.

练习 1.3 已知直线 $L_1:\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1 \\ z=t \end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases} x=t+2 \\ y=2t-1 \\ z=t+1 \end{cases}$ 求直线 L_1 与 L_2 之间的距离.

练习 1.4 求直线 $L:\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线方程.

练习 1.5 求过点 $P(-3,5,9)$ 与 $L_1:\begin{cases} y=3x+5 \\ z=2x-3 \end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases} y=4x-7, \\ z=5x+10 \end{cases}$ 都相交的直线方程.

解 1.1 解答

充要条件为：A,B,C 三点共线。

证明：

必要性：若 A,B,C 三点共线，则 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$，故 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{0}$。

又 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\times(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\ &= \overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OA}\\ &= \overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\vec{0}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

即 $\vec{OA}\times\vec{OB}+\vec{OB}\times\vec{OC}+\vec{OC}\times\vec{OA}=0$。

充分性：若 $\vec{OA}\times\vec{OB}+\vec{OB}\times\vec{OC}+\vec{OC}\times\vec{OA}=0$，则 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=0$，故 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$。由于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 有公共点 A，所以 A,B,C 三点共线。

答案： A,B,C 三点共线

解 1.2 解答

异面直线 L_1 与 L_2 之间的距离公式为：

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{s_1}\times\vec{s_2})|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}$$

其中，

- L_1: 方向向量 $\vec{s_1}=(0,1,1)$，已知点 $P_1=(1,0,0)$
- L_2: 方向向量 $\vec{s_2}=(2,-1,0)$，已知点 $P_2=(0,0,-2)$
- $\overrightarrow{P_1P_2}=(-1,0,-2)$

经过计算，异面直线 L_1 与 L_2 之间的距离为：$\boxed{1}$

解 1.3 解答

直线 L_1 与 L_2 的方向向量均为 $\vec{s}=(1,2,1)$，故两直线平行。

取 L_1 上点 $P_1(1,-1,0)$，L_2 上点 $P_2(2,-1,1)$，则 $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,0,1)$。

平行线间距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$。

$\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{s}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&1\\1&2&1\end{vmatrix}=(-2)\mathbf{i}+0\mathbf{j}+2\mathbf{k}=(-2,0,2)$。

$|\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{s}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$。

$|\vec{s}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$。

$d=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。

解 1.4 解答

直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(9,7,10)$，点 $P=(\frac{18}{5},\frac{9}{5},0)$ 在直线 L 上。

投影平面法向量 $n_{\vec{proj}}=\vec{s}\times\vec{n_p}=(17,31,-37)$，其中 $\vec{n_p}=(4,-1,1)$ 为投影平面 $4x-y+z=1$ 的法向量。

投影平面方程为：$17(x-\frac{18}{5})+31(y-\frac{9}{5})-37(z-0)=0$，化简得 $17x+31y-37z=117$。

投影直线方程为投影平面与平面 $4x-y+z=1$ 的交线，即：

$$\begin{cases} 4x-y+z=1 \\ 17x+31y-37z=117 \end{cases}$$

答案：投影直线方程为 $\begin{cases} 4x-y+z=1 \\ 17x+31y-37z=117 \end{cases}$

解 $\boxed{1.5\ 解答}$

解：

将直线 L_1 和 L_2 转换为参数方程:

$$L_1:\begin{cases} x=t \\ y=3t+5 \\ z=2t-3 \end{cases} \qquad L_2:\begin{cases} x=s \\ y=4s-7 \\ z=5s+10 \end{cases}$$

设 $M(t,3t+5,2t-3)\in L_1$，$N(s,4s-7,5s+10)\in L_2$，则 $\overrightarrow{PM}=(t+3,3t,2t-12)$，$\overrightarrow{PN}=(s+3,4s-12,5s+1)$。

由 $\overrightarrow{PM}\parallel\overrightarrow{PN}$ 得 $\dfrac{t+3}{s+3}=\dfrac{3t}{4s-12}=\dfrac{2t-12}{5s+1}$。

解得 $t=-\dfrac{240}{29}$。方向向量 $\vec{v}=\overrightarrow{PM}=(17,80,92)$。

直线方程为：$\dfrac{x+3}{17}=\dfrac{y-5}{80}=\dfrac{z-9}{92}$。

答案：$\dfrac{x+3}{17}=\dfrac{y-5}{80}=\dfrac{z-9}{92}$