对伊藤微分公式和Black-Scholes公式的理解

0.引言

经过两周对布朗运动这一章的学习(由于中间穿插了第六章，所以整体时间更长)，也尝试过常微分方程和常系数随机微分方程的计算机模拟，又阅读了几篇文章，对其中的重点：伊藤微分公式和一般随机微分方程有一些理解，在这里总结一下。

1.布朗运动

1.1 定义

定义：随机过程$X(t), t \geq 0$称为Brown运动，如果它满足如下三个条件：

$$(i)X(0)=0\text{；}$$
$$(ii)\text{随机过程}X\text{有平稳独立增量；}$$
$$(iii)\text{对每个}t>0\text{，}X\text{（}t)\text{服从}N(0,C^2t)$$

若$c=1$则称其为标准Brown运动。

从定义我们可以知道：

1.标准Brown运动在$t=0$时的状态为0；

2.可以推出Brown运动是**一个马尔科夫过程**，任意t时刻之后的状态仅和t时刻的状态有关，而与历史无关，另外还可以证明它是**鞅过程**和**正态过程**（即**高斯过程**）；

3.在任何有限时间区间内标准Brown运动的变化服从均值为0，方差为Δt的正态分布$N(0,\Delta t)$，**而且其方差会随着时间区间长度线性增加。**

1.2 性质

1.1.2.1 不变性

一些简单的不变性列举，其证明大多是利用**平稳独立增量过程**这个性质。

若B_t是**标准Brown运动**，则

(1)对称性：$Y_t=-B_t$

(2)起点变换：$Y_t=B_{t+s}-B_s$

(3)尺度变换：$Y_t=cB_{\frac{t}{c^2}}$

(4)时间倒置：$Y_t=tB_{\frac{1}{t}}$

(5)时间反向：$Y_t=B_u-B_{u-t}$

也是**标准Brown运动**。

1.1.2.2 Brown处处不可微

对于任给的正数M，有

$$P(|\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t}|\leq M)$$
$$=P（|\frac{X（\Delta t}{\sqrt{\Delta t}}）|）$$
$$=\phi(M\sqrt{\Delta t})-\phi(-M\sqrt{\Delta t})\rightarrow 0(\Delta t\rightarrow 0)$$

这可能是最好理解的性质：Brown运动是连续的，但它在任一点t_0的导数有限的概率为0，i.e，对几乎每条样本轨道上任意一点t_0，其导数不存在，也就是说**固定t_0，Brown运动不可导。**进一步可以证明**Brown运动处处不可微**（证明没啃清白）。

1.1.2.3 其它性质

对书上其他的性质理解不是很深，所以来说一下在别的地方看到的性质。

(1) Brown运动的轨迹会频繁的穿越时间轴t，即在时间轴上下波动，这一点其实就是书上对**Brown运动每个状态a都常返（a是零常返）**的证明

(2)在任意时刻t，它的位置$B(t)$不会偏离**正负一个标准差（$B(0)\pm\sqrt{\Delta t}$）**太远

2.$(dW(t))^2=dt$的导出

2.1 连续可微函数$f(t)$的二次变分

这个概念从别的地方看的，书上只讲了**Brown运动的二次变差过程**，也就是
$(dW(t))^2=\lim\limits_{\lambda_n\rightarrow 0}\sum\limits_{i=1}^{n}(W(t_i)-W(t_{i-1}))^2$

定义：

考虑时间区间$[0,T]$和该区间内的一个划分，$\Pi=\{0=t_0<t_1<t_2...<t_N=T\}$则对于任意一个连续函数 $f(t)$，它的二次变分（quadratic variation）定义为：

$$\sum_{i=0}^{N-1}[f(t_{i+1})-f(t_i)]^2$$

推论：

对于一个连续且在$[0,T]$上处处可微的函数$f(t)$，可以由中值定理得出
$\sum_{i=0}^{N-1}[f(t_{i+1})-f(t_i)]^2\leq max_{s\in[0,T]}f'(s)^2\cdot max\{t_{i-1}-t_i\}\cdot T$

由此，对区间$[0,T]$分割足够细时，$||\Pi||=max\{t_{i+1}-t_i\}\rightarrow 0$，函数$f(t)$的二次变分为0

2.2 Brown运动的二次变分

把上述$f(t)$换成$B(t)$即可，Brown运动的二次变分：

$$\sum_{i=0}^{N-1}[B(t_{i+1})-B(t_i)]^2$$

但推论有变化:

$$\lim_{||\Pi||\to 0}\sum_{i=1}^{n}(B(t_i+1)-B(t_i))^2=T$$

即，对区间$[0,T]$分割足够细时，$||\Pi||=max\{t_{i+1}-t_i\}\to 0$，随机过程$B(t)$的二次变分为$T$（区间长度），而不是0

理解:

对于**Brown运动**，其非零的二次变分说明**随机性使得它的波动太频繁**，以至于不管我们如何细分区间T、得到多么微小的划分区间，这些微小区间上的**位移差的平方逐段累加起来的总和(二次变分的几何意义)**都不会消失（即二次变分不为0），而是等于这个**区间的长度** T

2.3 $(dW(t))^2=dt$

综上，Brown运动的二次变分公式也可以写成$(dB)^2=dt$，这是**伊藤微分公式**推导的关键。

2.4 $dW(t)=\sqrt{dt}Z, Z$服从$N(0,1)$

如何理解这个式子呢？先将其写成增量的形式:

$$\Delta W(t)=\sqrt{dt}Z$$

对比一般的确定性函数f增量和微分的关系:

$$\Delta f(t)=f'(t)dt+o(dt)$$

我们发现Brown运动的增量与$\sqrt{\Delta t}$成正比，与一般的确定性函数f增量和微分的关系不同的是，**Brown运动的增量和微分不再具有线性关系**，也就表明在Brown的样本轨道的任意一点附近不能“以直代曲”。这也构成了随机微分方程和确定性微分方程的本质区别。

3.多元函数的泰勒展开

若函数f在点$P_0(x_0,y_0)$的某领域$U(P_0)$上有直到$n+1$阶的连续偏导数，则对$U(P_0)$内任一点(x_0+h,y_0+k)，存在相应的$\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x_0+h,y0+k)=f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+$$
$$\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f(x_0,y_0)+\cdots+$$
$$\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^nf(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

其中,

$$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^m f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\frac{\partial}{\partial x^i\partial y^{m-i}}f(x_0,y_0)h^ik^{m-i}$$
$$h=\Delta x,k=\Delta y$$

若只需求$R_n=o(\rho^n)(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$，则只需$f$在$U(P_0)$内存在直到$n$阶连续偏导数，便有

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$$
$$=$$
$$f(x_0,y_0)+\sum_{P=1}^{n}\frac{1}{p!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^P f(x_0,y_0)+o(\rho^n)$$

这个公式将帮助我们导出**伊藤微分公式**

4.伊藤微分公式

4.1 伊藤微分公式

$Ito_{微分公式}$ 设实函数$f(x,y)$关于x有二阶连续偏导数，关于y有一阶连续偏导数，若$W(t),t\geq 0$是参数为σ^2的Brown运动，则

$$\Delta f(W(t),t)=\frac{\partial f}{\partial x}dW(t)+(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})dt+o(dt)$$

书上给出的证明条件是f关于x和y都有二阶连续偏导数。

证明思路是对$f(x,y)$进行泰勒展开，展到二阶，然后处理掉其中的无穷小项。具体过程就不摆了，简单的写一下思路以及理解了的点吧。

(1)从$df=\left(\frac{dBt}{dt}f'(Bt)\right)dt$**到**$df=f'(Bt)dBt$

前者显然是直观的微分形式，但由于Brown运动处处不可导，所以这样的微分是不可行的；

后者绕开了$\frac{dBt}{dt}$，但是这样也是错误的，这是由于**Brown运动的二次变分非零**。当我们用泰勒展开写出它的前两项时，就明白为什么后者也是不可行了。

(2)要展开到二阶的原因

由一般函数的泰勒展开中：

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2+\frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3\cdots+\frac{f^n(x)}{n!}\Delta x^n$$

从第二项开始Δx^m（$m>1$）都是Δx的**高阶无穷小**，所以可以略去，只留第一项，

而**Brown运动**则不行，二阶偏导会出现$(dBt)^2=dt$，不再是高阶无穷小，所以**无法略去**；

(3)无穷小项的处理

$(dW(t))^2=\sigma^2dt+o(dt)$，$dW(t)dt=\sigma(dt+o(dt)^{\frac{3}{2}})$，$dt^2=o(dt)$，第三个显然，第一个和第二个用到了前面的**2.3**和**2.4**。

4.2 一般随机微分方程

扩散方程模型：

$$dX(t)=\mu\big(X(t),t\big)dt+\sigma\big(X(t),t\big)dW(t)$$

其中$\mu\big(X(t),t\big)$和$\sigma\big(X(t),t\big)$是$X(t)$和t的函数。

令$Y(t)=f(X(t),t)$，推导随机过程Y满足的随机微分方程：

$$\Delta Y(t)=\frac{\partial f}{\partial x}dX(t)+\frac{\partial f}{\partial y}dt+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX(t))^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}dX(t)dt+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2\Big)+o(dt)$$

将$dX(t)=\mu\big(X(t),t\big)dt+\sigma\big(X(t),t\big)dW(t)$代入上面方程，其中，

$$(X(t))^2=\mu^2dt^2+\sigma^2(dW(t))^2+2\mu\sigma dW(t)dt=\sigma^2dt+o(dt)$$
$$dXtdt=\mu dt^2+\sigma dW(t)dt=o(dt)$$
$$(dt)^2=o(dt)$$

忽略高阶无穷小项，可得：

$$dY(t)=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\mu(X(t),t)+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2(X(t),t)\Big)dt+\frac{\partial f}{\partial x}\sigma(X(t),t)dW(t)$$

从这里也可以感受到随机微分方程的解往往是先猜解后验证。

4.3 几何布朗运动

设随机过程S满足

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dW(t)$$

其中μ，$\sigma>0$为常数，$W(t)$为标准Brown运动，满足上述微分方程的解称为几何Brown运动。

在这里给出其解：

$$S(t)=exp\{\sigma W(t)+\big(\mu-\frac{\sigma^2}{2}t\big)\}$$

5.Black-Scholes公式

这里省略介绍BS公式的经济学背景，从数学上看，$Black-Scholes$公式其实就是在思考如何消除$\Delta W(t)$。

$f=f(S(t),t)$满足SDE：

$$df=df(S(t),t)=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\mu S+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2S^2\Big)dt+\frac{\partial f}{\partial x}\sigma SdW(t)$$

$S=S(t)$满足SDE：

$$dS=\mu S\Delta t+\sigma S\Delta t$$

定义证券组合价值为Π，其满足：

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot S$$
$$d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot dS$$

将$df = df(S(t), t)$和$dS = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta t$代入上式，可得：

$$d\Pi = \big(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 t}\sigma^2 S^2 \big) dt$$

这里$dW(t)$被抵消掉了，也就是消去了瞬时收益率的风险项。

在不存在无风险套利的市场中，该投资组合的瞬时收益率$d\Pi$必须等于无风险收益率r，即

$$d\Pi = r\Pi dt$$

将$d\Pi = \big(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 t}\sigma^2 S^2 \big) dt$和$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot S$代入上式，可得：

$$-\big(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\sigma^2 S^2 \big) dt = r\big(\frac{\partial f}{\partial s} S - f \big) dt$$

化简得：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\sigma^2 S^2 = rf$$

上式称为$Black - Scholes$微分方程。

[参考资料]

《随机过程 方兆本 第三版》

布朗运动、伊藤引理、BS公式（前篇）

布朗运动、伊藤引理、BS公式（后篇）

经济金融系列学习：伊藤引理