Práctica 9

Técnicas de reducción de la varianza

1. Crear una función que implemente la técnica de variables antitéticas para aproximar integrales del tipo:
$$I = \int_a^b h(x)\,dx.$$
Emplearla para aproximar:
$$E\left(e^{\mathcal{U}(0,2)}\right) = \int_0^2 \frac{1}{2}e^x dx \approx 3.194, \tag{9.1}$$
y representar gráficamente la aproximación en función de n.

2. Aproximar la integral (9.1) empleando la técnica de estratificación, considerando k subintervalos regularmente espaciados en el intervalo $[0,2]$. ¿Como varía la reducción en la varianza dependiendo del valor de k?

3. Aproximar la integral (9.1) empleando la variable $U \sim \mathcal{U}(0,2)$ para controlar la variable e^U.

4. Para la estimación Bayes de la media de una normal se suele utilizar como densidad a priori una $Cauchy(0,1)$. Supongamos que $x = 2.5$ es la muestra observada de $X \sim N(\theta,1)$ con $\theta \sim Cauchy(0,1)$. La media de la densidad a posteriori:
$$\pi(\theta|x) \propto \frac{1}{1+\theta^2} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$$
puede verse como el valor esperado de $\frac{\theta}{1+\theta^2}$ bajo la distribución $N(x,1)$. Utilizar $(\theta_i - x)$ para controlar las variables $\frac{\theta_i}{1+\theta_i^2}$ (θ_i *i.i.d.* $N(x,1)$) y aproximar la media de la distribución a posteriori.

9.1. Ejercicio de fin de práctica

5. Aproximar mediante integración Monte Carlo (clásica) la media de una distribución exponencial de parámetro 1/2:
$$I = \int_0^\infty \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx$$
y representar gráficamente la aproximación en función de n. Comparar los resultados con los obtenidos empleando variables antitéticas, ¿se produce una reducción en la varianza?
NOTA: Puede ser recomendable emplear el método de inversión para generar las muestras (antitéticas) de la exponencial.