Práctica 7

Aplicaciones de la simulación II

7.1. Integración Monte Carlo

1. Crear una función que implemente la integración Monte Carlo clásica para aproximar integrales del tipo:
$$I = \int_a^b h(x)\, dx.$$
Emplearla para aproximar:
$$\int_0^1 4x^3 dx = 1,$$
y representar gráficamente la aproximación en función de n.

2. Aproximar:
$$\phi(t) = \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$
para $t = 4.5$, empleando muestreo por importancia considerando como densidad auxiliar una exponencial de parámetro $\lambda = 1$ truncada en t:
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-t)},\ x > t,$$
(emplear `rexp(n)+t` y `dexp(y-t)`). Comparar $h(x)\, f(x)$ con $g(x)f(4.5)$ y representar gráficamente la aproximación en función de n.

3. Aproximar $P(2 < X < 6)$ siendo $X \sim Cauchy(0,1)$ empleando muestreo por importancia y considerando como densidad auxiliar la normal estandar $Y \sim N(0,1)$.Representar gráficamente la aproximación y estudiar los pesos $w(y_i)$.

4. Generar 1000 simulaciones de una distribución (aprox.) $N(0,1)$ mediante remuestreo del muestreo por importancia de 10^5 valores de una $Cauchy(0,1)$.

7.2. Optimización Monte Carlo

5. La mixtura de distribuciones normales:
$$\frac{1}{4}N(\mu_1, 1) + \frac{3}{4}N(\mu_2, 1),$$
tiene una función de verosimilitud asociada bimodal.

a) Generar una muestra de 400 valores de esta distribución con $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 2.5$, construir la correspondiente función de verosimilitud y representarla graficamente. Obtener la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros empleando la rutina `nlm`.

b) Repetir el apartado anterior empleando el algoritmo del temple simulado.

c) Repetir el primer apartado empleando la función `DEOptim`.

7.3. Ejercicio de fin de práctica

6. Aproximar mediante simulación la integral:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{8}\left(5-3x^2\right) dx$$

a) Emplear integración Monte-Carlo clásica (distribución uniforme) y representar gráficamente la aproximación en función de n $(1 \leq n \leq 1000)$.

b) Comparar los resultados del apartado anterior con los obtenidos empleando muestreo de importancia con distribución auxiliar $N(0, 0.3)$, ¿se produce una reducción de la varianza?

c) Generar 100 simulaciones de la distribución (aprox.) con densidad $f(x) = \frac{1}{8}\left(5-3x^2\right)$ si $-1 < x < 1$ mediante remuestreo del muestreo por importancia de 1000 valores de una $N(0, 0.3)$.