Problemas con condiciones iniciales

Oscar Gerardo Hernández Martínez

1/9/2019

Ejercicios

1.

Demuestra que $y = \frac{2}{3}e^x + e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 2e^x$

Obtenemos y'

$y' = \frac{2}{3}e^x - 2e^{-2x}$

Sustituimos y en la ecuación $y' + 2y = 2e^x$

$y' + 2(\frac{2}{3}e^x + e^{-2x}) = 2e^x$

Despejamos y'

$y' = 2e^x - 2(\frac{2}{3}e^x + e^{-2x})$

$y' = \frac{6}{3}e^x - \frac{4}{3}e^x - e^{-2x}$

$y' = \frac{2}{3}e^x - e^{-2x}$

$\therefore y = \frac{2}{3}e^x + e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 2e^x$

2.

¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = \sin(x)$

a) $y = \sin(x)$
b) $y = \cos(x)$
c) $y = \frac{1}{2}x\sin(x)$
d) $y = -\frac{1}{2}x\cos(x)$

- Para *a)* obtenemos y''

$$y'' = -\sin(x)$$

Sustituimos $y = \sin(x)$ en la ecuación $y'' + y = \sin(x)$

$$y'' + \sin(x) = \sin(x)$$

Despejamos y''

$$y'' = \sin(x) - sin(x) = 0$$

$\therefore y = \sin(x)$ NO es una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = \sin(x)$

- Para *b)* obtenemos y''

$$y'' = -\cos(x)$$

Sustituimos $y = \cos(x)$ en la ecuación $y'' + y = \sin(x)$

$$y'' + \cos(x) = \sin(x)$$

Despejamos y''

$$y'' = \sin(x) - \cos(x)$$

$\therefore y = \cos(x)$ NO es una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = \sin(x)$

- Para *c)* obtenemos y''

$$y'' = \cos(x) - \frac{1}{2}x\sin(x)$$

Sustituimos $y = \frac{1}{2}x\sin(x)$ en la ecuación $y'' + y = \sin(x)$

$$y'' + \frac{1}{2}x\sin(x) = \sin(x)$$

Despejamos y''

$$y'' = \sin(x) - \frac{1}{2}x\sin(x)$$

$\therefore y = \frac{1}{2}x\sin(x)$ NO es una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = \sin(x)$

- Para *d)* obtenemos y''

$$y'' = \sin(x) + \frac{1}{2}x\cos(x)$$

Sustituimos $y = -\frac{1}{2}x\cos(x)$ en la ecuación $y'' + y = \sin(x)$

$$y'' - \frac{1}{2}x\cos(x) = \sin(x)$$

Despejamos y''

$$y'' = \sin(x) + \frac{1}{2}x\cos(x)$$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x\cos(x)$ SI es una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = \sin(x)$

3.

$y' = -y^2$

$(0, \frac{1}{2}) \iff y(0) = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{x+c}$

Obtenemos el valor de c con la información de $y(0) = \frac{1}{2}$

$$y(0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{c} \Longrightarrow c = 2$$

$$\therefore y = \frac{1}{x+2}$$

Obtenemos y'

$$y' = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

Obtenemos $-y^2$

$$-y^2 = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

$\therefore y = \frac{1}{x+2}$ Es una solución de la ecuación diferencial $y' = -y^2$