Tarea 4

Oscar Gerardo Hernández Martínez

17/9/2019

Ejercicio 1

Unos biólogos abastecieron un lago con 400 peces y estimaron la capacidad de soporte en 10000. El número de peces se triplicó en el primer año.

- a) Si se supone que el tamaño de la población de peces satisface la ecuación logística, escribe su ecuación:

Tenemos: $M = 10000$, $P(0) = 400$, $A = \frac{10000-400}{400} = 24$, $P(1) = 1200 \rightarrow$ la población que se triplicó.

Además, sabemos que $P = \frac{M}{1+Ae^{-Kt}} \Rightarrow P = \frac{10000}{1+24e^{-Kt}}$

$$\Rightarrow P(1) = \frac{10000}{1+24e^{-K}} = 1200$$

Despejamos K de la ecuación:

$$1200(1+24e^{-K}) = 10000$$
$$1200 + 28800e^{-K} = 10000$$
$$28800e^{-K} = 8800$$
$$e^{-K} = \frac{8800}{28800}$$
$$\ln(e^{-K}) = ln(\frac{8800}{28800})$$
$$\Rightarrow -K \approx -1.1857 \Rightarrow K \approx 1.1857$$

Una vez que obtenemos el valor de K, podemos obtener la ecuación logística, quedando:

$$\frac{dP}{dt} = (1.1857)P(1 - \frac{P}{10000})$$

- b) ¿En cuánto tiempo la población alcanzará las 5000 unidades?

De la ecuación $P = \frac{10000}{1+24e^{(-1.1857)t}}$ sustituiremos $P = 5000$ y despejaremos t

$$5000 = \frac{10000}{1+24e^{(-1.1857)t}}$$
$$5000(1+24e^{(-1.1857)t}) = 10000$$
$$5000 + 120000e^{(-1.1857)t} = 10000$$
$$120000e^{(-1.1857)t} = 5000$$
$$e^{(-1.1857)t} = \frac{5000}{120000}$$
$$-1.1857t = \ln(\frac{5000}{120000})$$
$$\Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{5000}{120000}\right)}{-1.1857} = 2.68$$

$\therefore$ la población alcanzará las 5000 unidades en 2 años, 8 meses y 4 días aproximadamente.

Ejercicio 2

$$y' + 2xy = 1$$

Tenemos: $P(x) = 2x$, $Q(x) = 1$

Obtenemos el factor integrante $I(x) = e^{\int P(x)dx}$

$$I(x) = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el factor integrante

$$e^{x^2}(y' + 2xy) = e^{x^2}$$
$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}$$

Observamos que $\frac{dy}{dx}(e^{x^2} \cdot y) = e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y$ por la fórmula de la derivación del producto

$$\therefore (e^{x^2}y)' = e^{x^2}$$
$$\Rightarrow \int (e^{x^2}y)'dx = \int e^{x^2}$$
$$\Rightarrow e^{x^2}y = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot erfi(x) + C$$

Integral aproximada con WolframAlpha

$$\therefore y = \frac{1}{2e^{x^2}}\sqrt{\pi} \cdot erfi(x) + \frac{C}{2e^{x^2}}$$