西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY | 人工智能学院 School of Artificial Intelligence

计算智能导论

（感知器实现二分类）

授课老师：张梦璇

学院：人工智能学院

班级：1820013

专业：智能科学与技术

姓名：刘继垚

学号：18200100176

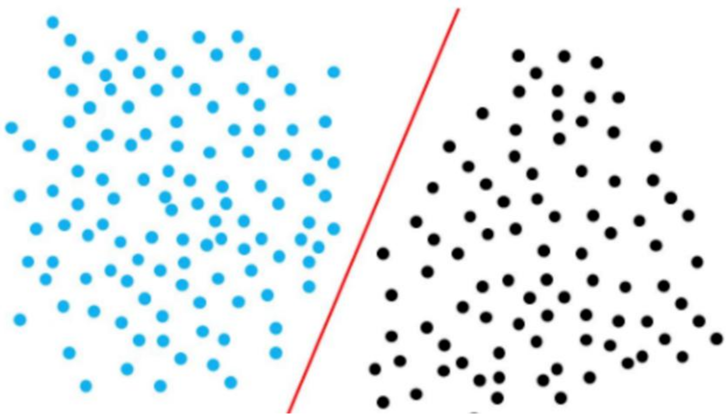
1 背景介绍

感知机是 1957 年，由 Rosenblatt 提出会，是**神经网络和支持向量机**的基础。

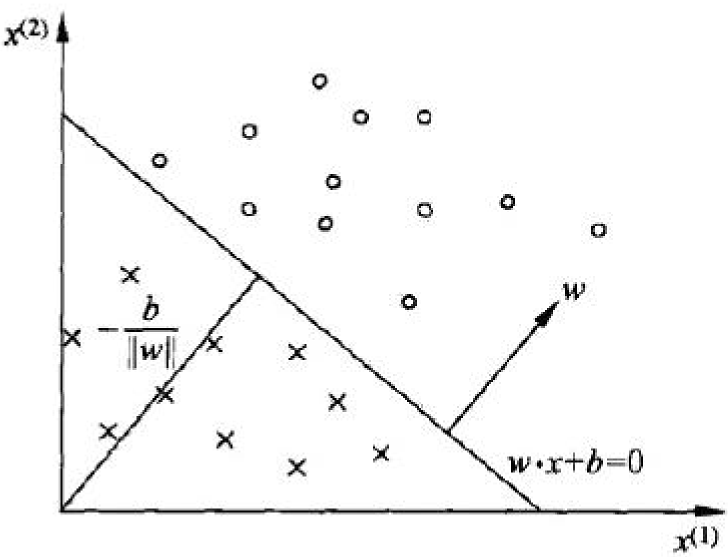
2. 感知机的原理

感知机是二分类的线性模型，其输入是实例的特征向量，输出的是事例的类别，分别是+1 和-1，属于判别模型。

假设训练数据集是线性可分的，感知机学习的目标是求得一个能够将训练数据集**正实例点和负实例点完全正确分开的分离超平面**。如果是非线性可分的数据，则最后无法获得超平面



2.1 感知机模型



感知机从输入空间到输出空间的模型如下：

$$f(x)=sign(w\cdot x+b)$$

$$sign(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

2.2 感知器的损失函数

我们首先定义对于样本(x_i,y_i)，如果$\frac{w\cdot x_i+b}{||w||}>0$，则记$y_i=+1$，如果$\frac{w\cdot x_i+b}{||w||}<0$，则$y_i=-1$。

这样取 y 的值有一个好处，就是方便定义损失函数。因为正确分类的样本满足$\frac{y_i(w\cdot x_i+b)}{||w||}>0$，而错误分类的样本满足$\frac{y_i(w\cdot x_i+b)}{||w||}>0$。我们损失函数的优化目标，**就是期望使误分类的所有样本，到超平面的距离之和最小。所以损失函数定义如下：**

$$L(w,b)=-\frac{1}{||w||}\sum_{x_i\in M}y_i(w\cdot x_i+b)$$

其中 M 集合是误分类点的集合。

不考虑$\frac{1}{||w||}$，就得到感知机模型的损失函数：

$$L(w,b)=-\sum_{x_i\in M}y_i(w\cdot x_i+b)$$

2.3 感知器学习算法

感知机学习算法是对上述损失函数进行极小化，求得 ww 和 bb。但是用普通的基于所有样本的梯度和的均值的批量梯度下降法（BGD）是行不通的，原因在于我们的损失函数里面有限定，**只有误分类的 M 集合里面的样本才能参与损失函数的优化**。所以我们不能用最普通的批量梯度下降,只能采用随机梯度下降（SGD）。目标函数如下：

$$L(w,b)=arg\min_{w,b}(-\sum_{x_i\in M}y_i(w\cdot x_i+b))$$

2.3.1 原始形式

输入：训练数据集$T=(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_N,y_N)$，$y_i\in\{-1,+1\}$，学习率$\eta(0<\eta<1)$，

输出：w,b；感知机模型$f(x)=sign(wx+b)$

1. 赋初值 w0,b0
2. 选取数据点(xi,yi)
3. 判断该数据点是否为当前模型误分类点，即判断若 yi(w·xi+b)<=0 则更新

$$w=w+\eta y_i x_i$$

$$b=b+\eta y_i$$

4. 转到 2，直到训练集中没有误分类点。

2.3.2 对偶形式

由于 w,b 的梯度更新公式：

$$w=w+\eta y_i x_i$$

$$b=b+\eta y_i$$

我们的 w,b 经过了 n 次修改后的，参数可以变化为下公式，其中$\alpha=ny$：

$$w=\sum_{x_i\in M}\eta y_i x_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i x_i$$

$$b=\sum_{x_i\in M}\eta y_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i$$

这样我们就得出了感知机的对偶算法。

输入：训练数据集$T=(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_N,y_N)$，$y_i\in\{-1,+1\}$，学习率$\eta(0<\eta<1)$,

输出：α,b；感知机模型$f(x)=sign(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j x_j+b)$

其中$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)^T$

1. 赋初值 α_0,b_0
2. 选取数据点(xi,yi)

3. 判断该数据点是否为当前模型误分类点，判断若

$y_i(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j x_j \cdot x_i + b) <= 0$ 则更新

$$\alpha_i = \alpha_i + \eta$$

$$b = b + \eta y_i$$

转到 2，直到训练集中没有误分类点。

为了减少计算量，我们可以预先计算式中的内积，得到 Gram 矩阵

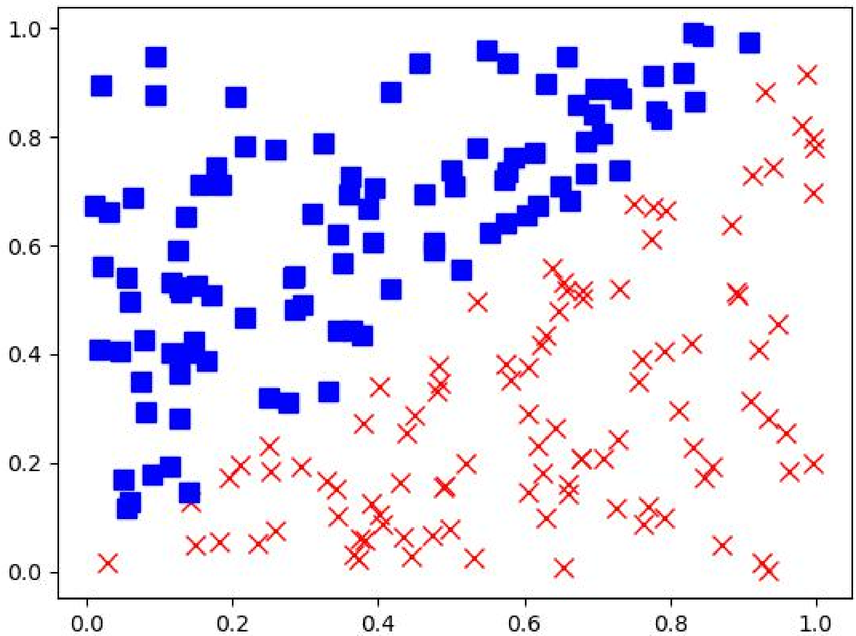
$$G = [x_i, x_j]_{N\times N}$$

3. 实验过程及结果及分析

本次实验使用 200 个散点集 $(x_1, x_2), x_1 \in [0,1], x_2 \in [0,1]$，以 $x_1 - x_2 = 0$ 这条直线将散点集划分为两类。学习参数设置如下：

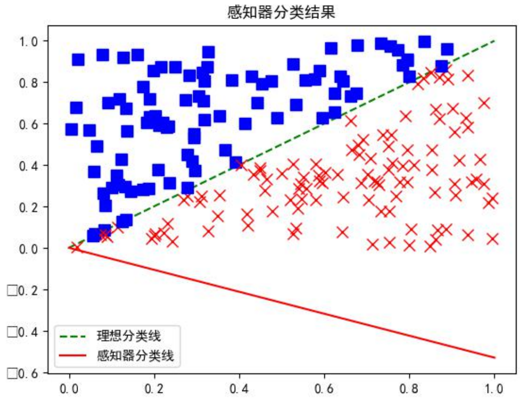
学习率	0.1
最大迭代次数	2000

散点集如下图所示：

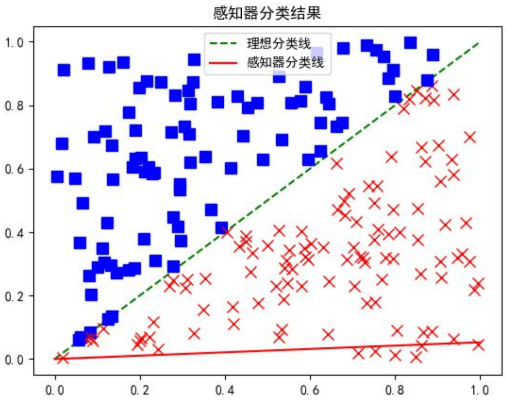


3.1 实验结果

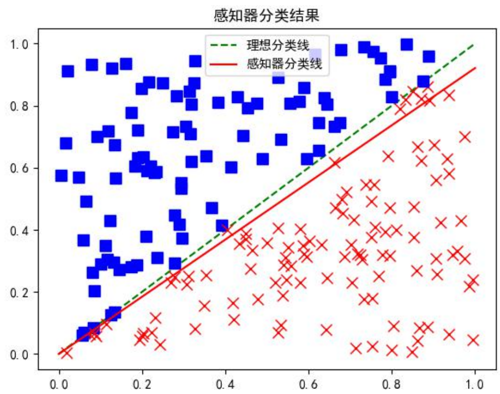
采用上述参数训练感知器模型，我们记录了第 1 次，第 10 次，第 100 次，第 200 次迭代的结果，如下图：



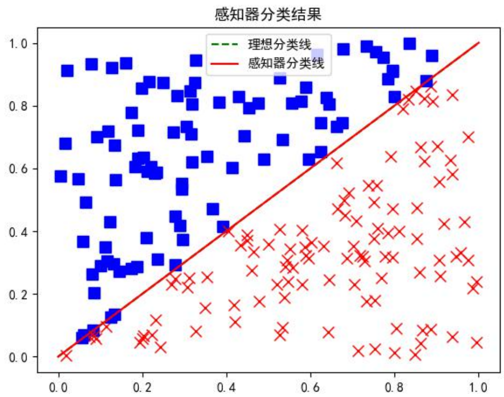
迭代 1 次



迭代 10 次



迭代 100 次



迭代 2000 次

3.2 实验结果分析

可以看出，随着迭代次数的增加，感知器的分类线逐渐地向理想分类线靠近，最终当迭代次数为 2000 次的时候，几乎与理想分类线重合。可以认为我们训练的感知器二分类模型是有效的。

感知机算法是一个简单易懂的算法，自己编程实现也不太难。它是很多算法的鼻祖，比如**支持向量机算法，神经网络与深度学习**。因此虽然它现在已经不是一个在实践中广泛运用的算法，还是值得好好的去研究一下。感知机算法对偶形式为什么在实际运用中比原始形式快，也值得好好去体会。

四、实验代码（python）

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 生成一条随机的直线
x = np.linspace(0, 1, 2)
# print(x)
# 生成直线的方程: y = w * x + b
# w = np.random.rand()
# b = np.random.rand()
w_real = np.array([1])
b_real = np.array([0])
print(f'w={w_real},b={b_real}')
# 创建一个函数,返回 y 值
# def fn(x):
#     return w*x+b
fn = lambda x: w_real * x + b_real
# 通过可视化来创建直线

# 通过直线把生成的 100 个点分成两个类别
N = 200
xn = np.random.rand(N, 2)
# 存储每个样本的类别 [1,-1]
yn = np.zeros([N, 1])
# 通过之前的直线把样本分成两类

for i in range(N):
    if (fn(xn[i, 0]) >= xn[i, 1]):
        # 当前的 x[i]的点在直线的下方
        yn[i] = -1
    else:
        yn[i] = 1



# 对于给定的 x,y 值,感知器要寻找超平面
def perceptron(xn, yn, max_iter=2000, a=0.1, w=np.zeros(3)):
    N = xn.shape[0]
    # 函数里面在构造一个函数,对数据样本进行分类
    # np.sign() 激活函数,可以把结果转化 1 或者 -1
    # x ==> x[0] x[1]
    f = lambda x: np.sign(w[0] * 1 + w[1] * x[0] + w[2] * x[1])
```

```python
    # 循环反向传播,如果预测值与标准值不等则修改权重和偏置
    W=[]
    for iter in range(max_iter):
        # 随机获取一个样本作为测试样本
        i = np.random.randint(N)
        # yn[i] 是样本的目标值, xn[i,:] 第 i 个样本的特征值
f(xn[i,:]) 预测值
        if (yn[i] != f(xn[i, :])):
            # 更新权重与偏置 权重原值 + 目标值 * 输入值 * 学习率
            w[0] = w[0] + yn[i] * 1 * a
            w[1] = w[1] + yn[i] * xn[i,0] * a
            w[2] = w[2] + yn[i] * xn[i,1] * a
        # print(w)
        if iter==1 or iter==10 or iter==100 or iter==1999:
            # print(iter)
            W.append(w)
            print(w)
            show(w)
    # return W


def show(w):
    plt.plot(x, w_real*x+b_real, 'g--',label='理想分类线')

    for i in range(N):
        if (fn(xn[i, 0]) >= xn[i, 1]):
            # 当前的 x[i]的点在直线的下方
            yn[i] = -1
            plt.plot(xn[i, 0], xn[i, 1], 'rx', markersize=8)
        else:
            yn[i] = 1
            plt.plot(xn[i, 0], xn[i, 1], 'bs', markersize=8)

    bnew = -w[0] / w[2]
    anew = -w[1] / w[2]
    # 通过 a 与 b 生成预测分类线函数
    # y = lambda x:anew * x + bnew
    plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei']
    plt.plot(x,x*anew+bnew,'r',label="感知器分类线")
    plt.legend()
    plt.title('感知器分类结果')
    plt.show()

perceptron(xn,yn,max_iter=2000)
```

```
# W = perceptron(xn,yn,max_iter=2000)
# print(W)
# 通过 w 生成预测分类线函数的 a,b 的值
# bnew = -w[0] / w[2]
# anew = -w[1] / w[2]
# # 通过 a 与 b 生成预测分类线函数
# y = lambda x:anew * x + bnew
# plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei']
# plt.plot(x,y(x),'r',label="感知器分类线")
# plt.legend()
# plt.title('感知器分类结果')
# plt.show()


#
# for w in W:
#     show(w)
```