Lattice QCD ゼミ 第二章

理学部物理学科 4 年
学籍番号：05231536
高橋 仁

2024 年 2 月 23 日

所々打つのが面倒, chat-gpt に和訳丸投げを行う等の理由でガバガバです.

1 はじめに

一般的に, 量子場理論が素粒子間の強い相互作用, 電磁相互作用, 弱い相互作用を記述する適切な枠組みであるとされています. 電磁相互作用に関しては, 長い間, それらが量子ゲージ場理論によって記述されることが知られてきました. しかし, ゲージ不変性の原理が強い相互作用と弱い相互作用の理論の構築においても基本的な役割を果たすことが後になって認識されました. グラショー, サラム, ワインバーグによる弱い相互作用と電磁相互作用の統一は, 素粒子物理学の理解を大きく前進させるものでした. これにより, はじめて, 強い相互作用と電磁相互作用を同時に記述する, 強い相互作用と弱い相互作用のハドロンとレプトンの可縮量子場理論を構築することが可能となりました. グラショー, サラム, ワインバーグの「電弱」理論は, 非アーベル群 $SU(2) \times U(1)$ のゲージ対称性に基づいており, これは自発的に電磁相互作用の $U(1)$ 対称性に破れます. この破れは, 質量がゼロの光子とは対照的に, 弱い相互作用を媒介する粒子, すなわち W^+,W^-, および Z^0 ベクトルボソンが質量を持つという事実に現れます. 実際, これらの粒子は非常に質量が大きく, これは弱い相互作用が非常に短い距離で働くことを反映しています. これらの粒子の検出は, グラショー-サラム-ワインバーグ理論の最も美しい検証の 1 つでした.

ベクトルボソンが結合する基本フェルミオンはクォークとレプトンです. ハドロン物質の基本構成要素であるクォークは, 異なる「フレーバー」で存在します. 「アップ」「ダウン」「ストレンジ」「チャーム」「ボトム」「トップ」クォークがあります. 弱い相互作用は, 異なるクォークフレーバー間の遷移を誘発することがあります. たとえば,「u」クォークは仮想的な W^+ ボソンの放射によって「d」クォークに変換されることがあります. クォークの存在は（間接的に）実験によって確認されています. それらのいずれも自由な粒子として検出されていません. それらは, さまざまなフレーバーのクォークと反クォークから構築されたハドロン内に恒久的に閉じ込められています. クォークの閉じ込めを担当する力は強い相互作用です. 理論的考察により,「アップ」「ダウン」などのクォークは 3 つの「色」であると示されています. 強い相互作用はフレーバーに対して盲目ですが, 色に対しては感受性があります. このため, 強い相互作用の理論を量子色力学, または簡単に QCD と呼びます. これは,

未破れた非アーベル群 $SU(3)$ 群に基づくゲージ理論です.$SU(3)$ の生成子が 8 つあるため, 基本的な物質の構成要素間の強い相互作用を媒介する 8 つの質量がゼロの「グルーオン」があります. グルーオンの放射または吸収により, クォークは色を変えることができます.

QCD は漸近的に自由な理論です. 漸近的な自由性は, クォーク間の力がクォークの間の距離が小さいときに弱くなることを示しています. この漸近的自由性の性質のために,QCD の短距離構造に敏感な強い相互作用物理学の観測量の定量的な摂動計算を初めて行うことが可能になりました. 特に,SLAC で観測されたビョルケンのスケーリング違反を研究することができました. QCD はこれらのスケーリング違反を説明できる唯一の理論です. QCD の漸近的自由度の性質は, 非アーベルゲージ群に基づいていることと密接に関連しています. この非アーベル構造の結果として, クォーク間の相互作用を仲介する色のグルーオンは自身に結合できます. これらの自己結合がクォークの閉じ込めを担当していると信じられています. クォーク間の距離が小さいときに結合強度が小さくなるため, クォーク間の距離が大きいときに力が強くなる可能性があります. これが, これらの物質の基本的構成要素が自然界で自由に見られない理由, およびなぜ色中性のハドロンのみが観測されるのかを説明できるかもしれません.QCD がクォークの閉じ込めを説明していることの確認は, 摂動論が崩壊する大きな距離での力学の結果であるため, 非摂動論的な取り扱いからのみ可能です. 1974 年まで,QCD のすべての予測は摂動的な領域に制限されていました. ブレイクスルーはケネス・ウィルソンによる QCD の格子形式の提案でした (1974 年), これは数値法を用いて非摂動的な現象の研究の道を開きました. 現在, 格子ゲージ理論は粒子物理学の分野そのものになり, その統計力学との密接な関連性から, 素粒子物理学者だけでなく, 後者の分野で働く物理学者にも興味を持たれています. そのため, 量子場理論に精通していない読者でも, 格子ゲージ理論の研究から利益を得ることができます. 逆に, 素粒子物理学者は統計力学で使用される計算手法 (高温展開, クラスター展開, 平均場近似, 摂動論的手法, 数値法など) から非常に多くの利益を得ています. 格子形式による QCD の提案後, 物理学者が興味を持った最初の質問は,QCD がクォークの閉じ込めを説明できるかどうかでした. ウィルソンは, 強結合近似の枠内で QCD がクォークを閉じ込めることを示していました. しかし, 連続体極限を研究する際には, これは正当化された近似ではありません. しかし, 数値シミュレーションは,QCD が確かにクォークの閉じ込めを説明していることを確認しています.

もちろん, 解答したい他の多くの質問があります.QCD は観測されているハドロンスペクトルを説明していますか？素粒子物理学者がいつも夢見てきたのは, ハドロンがどのようにしてそのような重い質量を持つのかを説明することです.QCD が予測する他の粒子が実験的には観測されていないのでしょうか？グルーオンの自己結合から, 主に「接着剤」から構成される状態がスペクトルに含まれることが予想されます.QCD はキラル対称性の自発的な破れを説明していますか？（軽い）パイオンがキラル対称性の自発的な破れに関連するゴールドストンボソンであると信じられています. 強い相互作用は弱い崩壊でどのように表れますか？弱い非レプトンプロセスにおける $\Delta I = 1/2$ ルールを説明できますか？非常に高い温度や/または高い密度でのハドロン物質の振る舞いはどうなりますか？QCD は, 一般的な理論的考察から予想されるように, 十分に高い温度でクォークグルーオンプラズマへの相転移を予測していますか？これは, 例えば, 宇宙の初期段階の理解に関連するでしょう. 上記の質問に答えるには,QCD の非摂動的な取り扱いが必要です. 現在, 格子形式は QCD を非摂動的に研究する唯一の可能な枠組みを提供しています.

この本の資料は以下のように整理されています. 次の章では, まず量子力学の経路積分形式と, 場の理論におけるグリーン関数の経路積分表現について詳しく説明します. この形式は場の理論の格子形式の基本的枠組みを提供します. 読者が経路積分法に精通している場合は, この章のすべてのセクションをスキップしてもらっても構いませんが, 最後のセクションだけは読んでいただくと良いでしょう.3 章と 4 章では, 自由スカラー場と自由ディラック場の格子形式を考察します. スカラー場の場合は形式が直感的ですが, ディラック場の場合はそうではありません. 空間-時間格子上にフェルミオンを配置するためのいくつかの提案が文献で行われています. その中で, 我々は広く使用されているウィルソンと Kogut-Susskind フェルミオンを詳しく議論し, 最近では興味を持たれるようになった Ginsparg-Wilson フェルミオンに読者を紹介しますが, 数値シミュレーションでの実装は非常に時間がかかります.

次に,5 章と 6 章で非アーベルおよび非アーベルゲージ場を導入し,QED と QCD の格子形式について考察します. 基本的な理論的枠組みを確立した後,7 章で非常に重要な観測量であるウィルソンループを紹介します. この観測量は閉じ込め問題を研究するために基本的な役割を果たします. この観測量は,8 章でいくつかの単純な解のモデルで 2 つの電荷間の静的ポテンシャルを計算するために使用されます. その章の目的は, 第 7 章で与えられたウィルソンループの解釈が正しいことを明確にするための具体的な計算を行うことです.9 章では,QCD の連続体極限について議論し, この極限は理論の臨界点で実現され, 相関長が発散する点であり, 裸の結合定数がゼロになります. 臨界点に近い領域では, 結合定数の関数としての観測量の振る舞いを決定することが, 数値シミュレーションでの連続体物理学を確立する上で重要です.

10 章は,Michael 格子アクションとエネルギー和則の議論に捧げられています. これらの和則は, 静的クォーク-反クォークポテンシャルと, クォークと反クォークの間を結ぶフラックストューブ中に蓄積されたアクションとエネルギーを関連付けます. これらの和則は, 大きな分離距離でのフラックストューブのエネルギー分布を研究するために重要です. 11 章から 15 章は, さまざまな近似スキームに捧げられています. その中で, 格子 QCD の相関関数の弱結合展開が最も技術的です. 最も複雑なケースにすぐに読者を直面させないために, 弱結合展開のプレゼンテーションを 3 つの章に分けています. 最初の章では単純なスカラー場理論を扱い, フェイマン格子積分の基本構造を示すだけであり, 連続体フェイマン積分のよく知られたパワーカウント定理の格子版である Reisz によって証明された重要な定理についても議論します. 次の章では, 格子量子電動力学 (QED) の場合を考慮して難易度を上げます. ここでは, ゲージ理論の特徴的な新しい概念がいくつか議論されます. 連続体 QED の摂動論的取り扱いにおける経路積分に関する具体的な計算として, この章ではウィルソンフェルミオンを用いた軸ベクトル電流の摂動定数の 1 ループ計算を含みます. また,Ginsparg-Wilson フェルミオンの枠組み内で, ラティス正則化されたウォード恒等式を出発点として行われた ABJ アノマリーの議論も含まれます. 次の章では, 概念的な観点から QCD の場合を扱います. これは概念的には QED の場合と非常に似ていますが, 技術的にははるかに複雑です. フェイマンルールは, 格子正則化されたアクションの形式に独立であることが示されています. 最後の章では,QED と QCD の一般化された弱結合展開が議論されます.

2　経路積分量子化

ファインマン (1948) によって導入されて以来, 経路積分 (以下, PI) 法は素粒子物理学者にとって非常に重要なツールとなった．理論素粒子物理学の現代的な発展の多くは, この方法に基づく．その 1 つが場の量子論の格子定式化であり, 序論で述べたように, QCD のような理論の非摂動的研究への道を開いた．本章では, 場の理論におけるグリーン関数の経路積分表現が基本的な役割を果たすため, 経路積分法を紹介する．ミンコフスキー空間におけるグリーン関数の PI 表現を導くのが通例である．しかし, **場の理論の格子定式化のためには, 虚時間に続くグリーン関数の対応する表現が必要**である．通常, 実時間表現から虚時間表現への移行にはルールがある．このルールは自明ではない．ここでは, ボソングリーン関数の場合について, 虚数時間に対する経路積分表現を直接導出することで, そのルールを検証する．フェルミオンのグリーン関数に関しては, **PI 表現をゼロから導出するのではなく, それを支持する強力な議論を提示**する．

次のセクションでは, まず非相対論的量子力学の場合について議論する．ここで得られる結果は, ボース場を含む場の量子論の格子定式化にとって興味深い, ボソングリーン関数の PI 表現を導出するセクション 2 に関連する．第 3 節では, ボソン系の伝達行列について議論する．フェルミオン作用素のグリーン関数については第 4 節で考察する．後述するように, グリーン関数の PI 表現は, 場の理論のように自由度が連続変数でラベル付けされた系に対してのみ正式に定義される．したがって, 経路積分式を正則化する必要がある．セクション 5 では, この問題を定性的なレベルで議論し, 時空格子の導入を動機づける．これは摂動論におけるファインマン積分の正則化の特定の選択に相当する

2.1　量子力学における経路積分

量子力学系の時間発展

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)}\,|\psi(t_0)\rangle \tag{2.1}$$

同時固有状態 q を与える作用素 $\{Q_\alpha\}$

$$Q_\alpha\,|q\rangle = q_\alpha\,|q\rangle\,,\ \ \alpha = 1, \cdots, n$$

式 (2.1) を波動関数 $\psi(q,t) = \langle q|\psi(t)\rangle$ で書けば,

$$\psi(q',t') = \langle q'|\,e^{-iH(t-t_0)}\left(\int dq\,|q\rangle\langle q|\right)|\psi(t_0)\rangle = \int dq\,\underbrace{\langle q'|\,e^{-iH(t'-t)}\,|q\rangle}_{\equiv G(q',t';q,t)}\psi(q,t)$$

$$G(q',t';q,t) = \langle q'|\,e^{-iH(t'-t)}\,|q\rangle \tag{2.2}$$

ただし, 積分測度は $dq = \prod_{\alpha=1}^{n} dq_\alpha$ グリーン関数 (2.2) は $(q,t) \to (q',t')$ の遷移を与える．区間の分割

$$G(q',t';q,t) = \int dq'' G(q',t';q'',t'')G(q'',t'';q,t) \tag{2.3}$$

この性質 (2.3) を用いて, ファインマンは行列要素 (2.2) の経路積分表現を古典的作用原理とのつながりを保って確立した．以降の節のため, 時間を $t \to -i\tau$ にまで拡張する．**Heisenberg** 描像に移る．

状態が

$$\langle q', t'|q, t\rangle = (\langle q'| e^{-iHt'})(e^{iHt}|q\rangle) \tag{2.4}$$

演算子が

$$Q_\alpha(t) = e^{iHt}Q_\alpha e^{-iHt} \tag{2.5}$$

に変換. 波動関数を $\psi_n(q) = \langle q|E_n\rangle$ と, エネルギー固有状態を基底とする. 式 (2.4) は

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \sum_n e^{-iE_n(t'-t)}\psi_n(q')\psi_n^*(q)$$

$t \to -i\tau, t' \to -i\tau'$ の虚時間形式に移る.

$$\langle q', t'|q, t\rangle \overset{t\to -i\tau}{=} \langle q'| e^{-H(\tau'-\tau)}|q\rangle \tag{2.6}$$

経路積分形式の準備は完了した. $[\tau, \tau']$ を N 分割して, 間隔を $\epsilon \equiv (\tau' - \tau)/N$ と表記.

$$\begin{aligned}\langle q'| e^{-H(\tau'-\tau)}|q\rangle &= \langle q'| e^{-H(\tau'-\tau_{N-1})}\underbrace{}_{\int dq^{N-1}\left|q^{(N-1)}\right\rangle\left\langle q^{(N-1)}\right|} e^{-H(\tau_{N-1}-\tau_{N-2})}\cdots e^{-H(\tau_1-\tau)}|q\rangle \\ &= \int\prod_{l=1}^{N-1}dq^{(l)}\,\langle q'| e^{-H\epsilon}|q^{(N-1)}\rangle \times \langle q^{(N-1)}| e^{-H\epsilon}|q^{(N-2)}\rangle\cdots\langle q^{(1)}| e^{-H\epsilon}|q\rangle\end{aligned} \tag{2.7}$$

と表される. ただし, 測度は $dq^{(l)} = \prod_\alpha dq_\alpha^{(l)}$.

ファインマン核 $\langle q^{(l+1)}| e^{-H\epsilon}|q^{(l)}\rangle$ の計算を進めるために, 標準的な

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}P_\alpha^2 + V(Q) \tag{2.8}$$

のハミルトニアンを考える.

$$\langle q|p\rangle = \prod_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ip_\alpha q_\alpha} \tag{1*}$$

を利用して,

$$\begin{aligned}\langle q^{(l+1)}| e^{-H\epsilon}|q^{(l)}\rangle &\approx \langle q^{(l+1)}| e^{-\epsilon\frac{1}{2}\sum_\alpha P_\alpha^2}e^{-\epsilon V(Q)}|q^{(l)}\rangle = e^{-\epsilon V(q^{(l)})}\langle q^{(l+1)}| e^{-\epsilon\frac{1}{2}\sum_\alpha P_\alpha^2}|q^{(l)}\rangle \\ &= e^{-\epsilon V(q^{(l)})}\langle q^{(l+1)}|\left[\int\prod_{\beta=1}^{n}dp_\beta^{(l)}\,|p^{(l)}\rangle\langle p^{(l)}|\right]e^{-\epsilon\frac{1}{2}\sum_\alpha P_\alpha^2}|q^{(l)}\rangle \\ &\overset{(1*)}{=} e^{-\epsilon V(q^{(l)})}\int\prod\frac{dp_\beta^{(l)}}{2\pi}\prod_{\alpha=1}^{n}\times\exp\left\{-\epsilon\left[\frac{1}{2}{p_\alpha^{(l)}}^2 - ip_\alpha^{(l)}\left(\frac{q_\alpha^{(l+1)} - q_\alpha^{(l)}}{\epsilon}\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

最右辺の $\left(\dfrac{q_\alpha^{(l+1)} - q_\alpha^{(l)}}{\epsilon}\right)$ は $t \to -i\epsilon$ の変換をしていたので, その前の係数 i を含めて時間微分と

考え,

$$
\begin{aligned}
\langle q'|\, e^{-H(\tau'-\tau)}\, |q\rangle &\approx \int DqDp e^{ip_\alpha^{(l)}\left(q_\alpha^{(l+1)}-q_\alpha^{(l)}\right)} e^{-\epsilon H(q^{(l)},p^{(l)})} \\
q^{(0)} = q, q^{(N)} = q', DqDp &= \prod_{\beta=1}^{n}\prod_{l=1}^{N-1} dq_\beta^{(l)} \prod_{l=0}^{N-1} \frac{dp_\beta^{(l)}}{2\pi} \\
H(q^{(l)}, p^{(l)}) &= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{2} {p_\alpha^{(l)}}^2 + V(q^{(l)})
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

最右辺の $\left(\dfrac{q_\alpha^{(l+1)} - q_\alpha^{(l)}}{\epsilon}\right)$ を虚時間で書かれた微分

$$
\dot{q}_\alpha^{(l)} \equiv \frac{q_\alpha^{(l+1)} - q_\alpha^{(l)}}{\epsilon} \tag{2.10c}
$$

と捉えることもできる．虚時間で議論することで, Euclid 化された経路積分が可能となった．そこで, 初めから虚時間形式で Lagrangian を書いておき

$$
L_E(q^{(l)}, \dot{q}^{(l)}) = \sum_\alpha \frac{1}{2} {\dot{q}_\alpha^{(l)}}^2 + V(q^{(l)}) \tag{2.10b}
$$

これを用いて,

$$
\langle q'|\, e^{-H(\tau'-\tau)}\, |q\rangle \approx \int \prod_{l'=1}^{N-1}\prod_{\alpha=1}^{n} \frac{dq_\alpha^{(l')}}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\sum_{l=0}^{N-1} \epsilon L_E(q^{(l)},\dot{q}^{(l)})} \tag{2.10a}
$$

とすれば良い．ただし, 添字 $\cdot_E$ は **Euclid 化**されていることを強調している．これにより, 古典的な軌道それぞれに

$$
S_E[q] = \sum_{l=0}^{N-1} \epsilon \left[\sum_\alpha \frac{1}{2}(\dot{q}_\alpha(\tau_l))^2 + V(q(\tau_l))\right] \tag{2.11}
$$

の作用を計算し, 式 (2.10a) の指数の肩に乗せれば良い．

虚時間形式のグリーン関数を計算する処方箋は以下となる.

1. $[\tau,\tau']$ を間隔 $\epsilon \equiv (\tau'-\tau)/N$ で分割
2. 時刻 τ の q を始点とし, 時刻 τ' の q' を終点とするすべての可能な経路を考え, 途中区間の経路を直線で近似し, それぞれの経路に対する作用 (2.11) を計算する.
3. 各経路を $\exp(-SE[q])$ で重み付けし, 中間時間における座標のすべての可能な値について積分することによって, すべての経路にわたってこれらの指数を合計する.
4. $(1/\sqrt{2\pi\epsilon})^{nN}$ を乗じる. $N\epsilon$ を固定したままで, 分割を小さく $\epsilon \to 0, N \to \infty$ の極限をとる.

数式で表現すると,

$$(q',\tau'|q,\tau) = \int_q^{q'} Dq e^{-S_E[q]} \tag{2.12a}$$

$$S_E[q] = \int_\tau^{\tau'} d\tau'' L_E(q(\tau''),\dot{q}(\tau'')) \tag{2.12b}$$

$$(q',\tau'|q,\tau) \equiv \langle q'|\, e^{-H(\tau'-\tau)}\, |q\rangle \tag{2.12c}$$

経路は $\exp(-S_E)$ で重み付けされているため, (2.12a) への重要な寄与は, $S_E[q]$ が最小値に近い値を取る経路から期待されます. ここで, $\delta S_E[q]=0$ となります. これは, 古典的なユークリッド運動方程式に導く最小作用の原理です. したがって, 経路積分の枠組みでは, 古典的な経路の周りの揺らぎを考慮に入れることによって, 古典系の量子化が行われます. ユークリッド形式では, これらの揺らぎは $S_E \geq 0$ の場合に指数関数的に抑制されます。一方、実時間形式では、上記の手続きに類似した手法は、次の (2.4) の経路積分表現に導きます。

$$\langle q'|\, e^{-iH(t'-t)}\, |q\rangle = \int_q^{q'} Dq e^{iS[q]} \tag{2.13}$$

ただし, $S[q]$ は実時間の作用である。経路積分 (2.13) は, 以前と同様に定義されるが (Feynman and Hibbs, 1965 を参照), 経路は今では振動する関数で重み付けされている. このため, この経路積分表現は数値計算に適していない. ただし, これは座標の二次までの項まで最小値を展開することによって, 古典的近似を実行する有用な出発点である。具体的な例として, 読者は Bender et al. (1978) の論文を参照するとよい. ここでは, 一次元周期ポテンシャルに対する WKB 近似でエネルギースペクトルと固有関数が計算されている.

経路積分 (2.12a) または (2.13) の正確な評価は, ほんの一部の場合にのみ可能である. 実時間形式の標準的な例は調和振動子であり, これについては Feynman and Hibbs (1965) の書籍で詳しく議論されている. クーロンポテンシャルはすでにかなり非自明な例を提供する (Duru and Kleinert, 1979). したがって, 経路積分法は実用的にはあまり役立たないように思われるかもしれない. これは, 散乱振幅, 束縛状態のエネルギー, 固有関数を計算するためにより効率的な方法が量子力学において利用可能であるからである. しかし, 場の理論では, 摂動論でのみグリーン関数を計算する方法しか知られていない (厳密に解けるいくつかの簡単なモデルを除く). ここで物理学者が経路積分法に非常に興味を持ったのは, それが QCD などのゲージ理論の Feynman ルールを非常に直接的に導出できる

ためである．ただし, これは手法の功績のひとつに過ぎない. すでに指摘したように, 理論的な素粒子物理学の多くの現代的な発展は, 経路積分形式主義に基づいている. 次のセクションでは, 上記の議論を場の理論で興味深いボソンのグリーン関数に拡張する.

2.2 ボソングリーン関数の経路積分表現

場の理論に拡張しよう．式 (2.2) は場の理論では, ハイゼンベルグ場の作用素の時間順序積の真空期待値の情報を含む．$x=(\vec{x},t)$ をパラメタに $\phi(x)$ の**実スカラー場**を考える．時間発展は

$$\phi(\vec{x},t)=e^{iHt}\phi(\vec{x},0)e^{-iHt}$$

グリーン関数を

$$G(x_1,\cdot,x_l)=\langle\Omega|\,T(\phi(x_1)\cdots\phi(x_l))\,|\Omega\rangle \tag{2.14}$$

で定義する．ただし，$|\Omega\rangle$ は Hamiltonian$H$ で定まる, 基底 (真空) 状態．T は時間順序積, その意味から

$$G(t_1,\cdots,t_l)=\langle E_0|\,Q(t_1)\cdots Q(t_l)\,|E_0\rangle\quad(t_1>t_2>\cdots>t_l) \tag{2.16}$$

虚時間にしよう.

$$\hat{Q}(\tau)=e^{H\tau}Qe^{e-H\tau} \tag{2.17}$$

$$G(\tau_1,\cdots,\tau_l)=\langle E_0|\,Q(\tau_1)\cdots Q(\tau_l)\,|E_0\rangle \tag{2.18}$$

経路積分形式にしよう.

$$(q',\tau'|\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l)|q,\tau)\equiv\langle q'|\,e^{-H\tau'}\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l)e^{H\tau}\,|q\rangle \tag{2.19}$$

$$=\langle q'|\sum_{\kappa}\langle E_\kappa|E_\kappa\rangle\,e^{-H\tau'}\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l)e^{H\tau}\sum_{\kappa'}\langle E'_\kappa|E'_\kappa\rangle\,|q\rangle$$

$$=\sum_{\kappa,\kappa'}e^{-E_{\kappa'}\tau'}e^{E_\kappa\tau}\psi_{\kappa'}(q')\psi^*_\kappa(q)\,\langle E_{\kappa'}|\,\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l)\,|E_\kappa\rangle \tag{2.20}$$

第一励起状態と基底状態にエネルギーギャップがあると仮定し, $\tau\to-\infty,\tau'\to\infty$ の極限をとる．基底状態の情報のみが残り, $\kappa,\kappa'=0$ をとって,

$$(q',\tau'|\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l)|q,\tau)\xrightarrow[\substack{\tau'\to\infty\\ \tau\to\infty}]{}e^{-E_0(\tau'-\tau)}\psi_0(q')\psi^*_0(q)\,\langle E_0|\,\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l)\,|E_0\rangle \tag{2.21}$$

Q を全て恒等演算子にしたものを作って,

$$\frac{(q',\tau'|\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l)|q,\tau)}{(q',\tau'|q,\tau)}\xrightarrow[\substack{\tau'\to\infty\\ \tau\to\infty}]{}\langle E_0|\,\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l)\,|E_0\rangle \tag{2.22}$$

式 (2.22) を T 積で書いた式 (2.23) も同様.

$$\frac{(q',\tau'|T(\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l))|q,\tau)}{(q',\tau'|q,\tau)}\xrightarrow[\substack{\tau'\to\infty\\ \tau\to\infty}]{}\langle E_0|\,T(\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l))\,|E_0\rangle \tag{2.23}$$

※注意 $\cdots$ $\langle q|E_0\rangle$ が 0 とならないようにしている.

さて, 場の理論でも同様に経路積分しよう. $\tau_1 > \cdots > \tau_l$ に分割して,

$$(q', \tau'|\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l)|q, \tau) = \langle q'|\, e^{-H(\tau'-\tau_1)}Qe^{-H(\tau_1-\tau_2)}\cdots e^{-H(\tau_{l-1}-\tau_l)}Qe^{-H(\tau_l-\tau)}\,|q\rangle$$

固有状態の恒等演算子を挿入し (まくっ) て,

$$(q', \tau'|\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l)|q, \tau) = \int_q^{q'} Dqq(\tau_1)\cdots q(\tau_l)e^{-\int_\tau^{\tau'} d\tau'' L_E(q(\tau''), \dot{q}(\tau''))}, (\tau' > \tau_1 > \cdots > \tau_l > \tau) \tag{2.24}$$

場の理論でも (実スカラー場 (ボソン)) なら式 (2.12a) の枠と同様のルールで経路積分をすれば良い.

式 (2.23) は

$$\langle E_0|\, T(\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l))\,|E_0\rangle = \frac{\int Dq\, q(\tau_1)\cdots q(\tau_l)e^{-S_E[q]}}{\int Dq\, e^{-S_E[q]}} \tag{2.26a}$$

$$S_E[q] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, L_E(q(\tau), \dot{q}(\tau)) \tag{2.26b}$$

——ちょっと摂動計算の話——

この計算も案の定特定の系 (次のガウシアン形 2.27) 以外は数値計算に頼らざるを得ない. (さらには, あり得ないほど高エネルギー状態からの寄与を数値計算に含めたくもないため, $\langle q|E_0\rangle$ の大きさが重要.)

$$I_{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \int \prod_{i=1}^{N} dq_i q_{\alpha_1}\cdots q_{\alpha_l}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{n,m} q_n M_{nm} q_m} \quad M \in \text{実正定値対称行列} \tag{2.27}$$

(アホみたいな計算) を進めると,

$$Z_0[J] = \int \prod_{i=1}^{N} dq_i\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{n,m} q_n M_{nm} q_m + \sum_n J_n q_n} \tag{2.28}$$

を作り,

$$I_{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \left(\frac{\partial^l Z_0[J]}{\partial J_{\alpha_1}\partial J_{\alpha_2}\cdots\partial J_{\alpha_l}}\right)_{J=0} \tag{2.29}$$

で式 (2.27) が得られる. 式 (2.28) の計算はテキトーに `https://manabitimes.jp/math/938` とかを参考にして

$$Z_0[J] = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det M}} e^{\frac{1}{2}\sum_{n,m} J_n M^{-1}_{nm} J_m} \tag{2.30}$$

この形式が良いところは**摂動に適用できる**. 摂動入れよう.

$$K_{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \int \prod_{i=1}^{N} dq_i \cdots q_{\alpha_l} e^{-S[q]}, \quad S[q] = \frac{1}{2}\sum_{n,m} q_n M_{nm} q_m + S_I[q] \tag{2.31}$$

新たに Z_0 の代わりに,

$$Z[J] = \int \prod_{i=1}^{N} dq_i e^{-S[q] + \sum_n J_n q_n}$$

$$\Downarrow e^{-S_I[q]}\text{をテイラー展開}$$

$$Z[J] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int \prod_{i=1}^{N} dq_i\, (S[q])^k e^{-\frac{1}{2}\sum_{n,m} q_n M_{nm} q_m + \sum_n J_n q_n}$$

$S_I[q]$ を q のべきで展開し, $[\partial/\partial J]$ で $e^{-\frac{1}{2}\sum_{n,m} q_n M_{nm} q_m + \sum_n J_n q_n}$ を叩いた時に出てくる q と対応させれば, $(S_I[q])^k \to \left(S_I\left[\frac{\partial}{\partial t}\right]\right)^k$ の置き換えに成功し,

$$Z[J] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(S_I\left[\frac{\partial}{\partial t}\right]\right)^k Z_0[J]$$

となる. k 次の項まで摂動計算できて嬉しいね. ただ, 今の目的には**非摂動な計算が**できて欲しいのよ.

——ちょっとの話終わり——

式 (2.26a) に戻る.

$$\langle E_0| T(\hat{Q}(\tau_1)\cdots\hat{Q}(\tau_l)) |E_0\rangle = \frac{\int Dq\, q(\tau_1)\cdots q(\tau_l) e^{-S_E[q]}}{\int Dq\, e^{-S_E[q]}} \tag{2.26a}$$

この形, 統計力学で見た.

$$Z = \int Dq e^{-S_E[q]} \tag{2.32b}$$

を (古典統計力学のカノニカルアンサンブルとは**違う**けども) 分配関数とよび,

$$\langle q_{\alpha_1}(\tau_1)\cdots q_{\alpha_l}(\tau_l)\rangle = \frac{1}{Z}\int Dq q_{\alpha_1}(\tau_1)\cdots q_{\alpha_l}(\tau_l) e^{-S_E[q]} \tag{2.32a}$$

$$S_E[q] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\left(\frac{dq_\alpha}{d\tau}\right)^2 + V(q(\tau))\right] \tag{2.35}$$

結局, t が明示的に出てきたら $t \to -i\tau$ に変換. $q_\alpha(t) \to q_\alpha(\tau)$ と変換. 古典的な作用 S が $iS[q] \to -S_E[q]$ となる. この処方箋はフェルミオン系でも正しい. 虚時間に移り, ユークリッド表現では, 重みづけを「ボルツマン因子」として解釈すれば良い.

2.3 転移行列

$H = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} P_\alpha^2 + V(Q)$ のハミルトニアンで,

$$Z = \int \prod_{l'=0}^{N-1}\prod_{\beta}\frac{dq_\beta^{(l')}}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\sum_{l=0}^{N-1}\epsilon\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{q_\alpha^{(l+1)}-q_\alpha^{(l)}}{\epsilon}\right)+V(q^{(l)})\right]} \tag{2.36}$$

これを,

$$Z = \int \prod_{l'=0}^{N-1} dq^{(l')} \prod_{l=0}^{N-1} T_{q^{(l+1)}q^{(l)}},\ T_{q^{(l+1)}q^{(l)}} = \left(\frac{1}{2\pi\epsilon}\right)^{n/2} e^{-\epsilon\left[\sum_\alpha \frac{1}{2}\left(\frac{q_\alpha^{(l+1)}-q_\alpha^{(l)}}{\epsilon}\right)^2+V(q^{(l)})\right]} \tag{2.37}$$

と書き換えると,

$$T_{q^{(l+1)}q^{(l)}} = \langle q^{(l+1)}| e^{-H\epsilon} |q^{(l)}\rangle \tag{2.38}$$

となる．これを **transfer matrix** とよく呼ばれる．和訳は知らん．

2.3 節後の議論は何を議論したいのかが分からん．
第一行「transfer」行列が与えられたら, H が $\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} P_\alpha^2 + V(Q)$ に定まると言っているが, 途中で H の形を利用している気がする．(まぁ, いいか)
局所的な $(l+1), (l)$ の添字が付いたやつから, 最終的に, 大域的な H の表式になったよってことかな．

伝達行列を与えてハミルトニアンを構成するための上述の手順は、後にゲージ理論の格子ハミルトニアンを議論するときに関連してきます。場の理論の格子定式化では、分割関数が与えられます。分割関数を (2.37) の形で書くことにより、(2.38) の同定が可能になり、格子ハミルトニアンを導くことができます。

2.4 フェルミオングリーン関数の経路積分表現

これまで我々は、ボソンの自由度のみを含む量子力学的系を考えてきた。しかし、自然界の基本的な物質場はスピン 1/2 を持つと考えられている。ボソニックの場合とは対照的に、これらの場は極限 $\to 0$ において反交換し、したがってこの極限においてグラスマン代数の要素となる。したがって、フェルミオン場から作られるグリーン関数の経路積分表現は、反交換 (グラスマン) 変数上での積分を含むと予想されます。積分のルールは、本書を通して重要な役割を果たす特定の積分を計算するために適用される。これから得られる結果は、素粒子物理学に興味のある理論におけるフェルミオンのグリーン関数の経路積分表現に関する強いヒントを与えてくれるだろう。いくつかの基本的な定義から議論を始める。

2.4.1 Grassmann 数の代数

$$\{\eta_i, \eta_j\} = \eta_i\eta_j + \eta_j\eta_i = 0, \;\; \eta_i^2 = 0 \qquad (2.40,\ 2.41)$$

η の関数 f は以降, 冪級数で有限の個数

$$f(\eta) = f_0 + f_i\eta_i + \cdots + f_{12\cdots N}\eta_1\cdots\eta_N \qquad (2.42)$$

次の関数

$$g(\eta) = e^{-\sum_{i,j}\eta_i A_{ij}\eta_j}$$

を考えると, 添字被ったやつが 2 個以上いると消えるので,

$$g(\eta) = \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} (1 - \eta_i A_{ij}\eta_j)$$

η_i と $\bar{\eta}_j$ を含めた $2N$ 個なら $i = j$ のときも消えぬ．

$$h(\eta) = \prod_{i,j=1}^{N} (1 - \bar{\eta}_i A_{ij}\eta_j)$$

2.4.2 Grassmann 数の積分

積分と言いつつ, $\int d\eta_i$ がかかるのは η_i の 1 乗まで. ($\eta_i\eta_j (i \neq j)$ とかの積分も η_i からしたら 1 次.) 次の規則だけで十分らしい.

$$\int d\eta_i = 0, \int d\eta_i \eta_i = 1 \tag{2.43a}$$

多重積分する際は, 測度同士, 変数と測度の間は反可換.

$$\{d\eta_i, d\eta_j\} = \{d\eta_i, \eta_j\} = 0 \tag{2.43b}$$

——具体例 1 開始——

$$I[A] = \int \prod_{l=1}^{N} d\bar{\eta}_l d\eta_l e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j} \tag{2.44}$$

先ほどの関係式から,

$$e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j} = (1 - \bar{\eta}_1 A_{1i_1} \eta_{i_1}) \cdots (1 - \bar{\eta}_N A_{Ni_N} \eta_{i_N}) \tag{2.45}$$

この各項は,

$$K(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{i_1, \cdots, i_N} \eta_{i1} \bar{\eta}_1 \cdots \eta_{i_N} \bar{\eta}_N A_{1i_1} \cdots A_{Ni_N} \tag{2.46}$$

を計算できれば良い. 交換すれば符号が反転する η の順序を $\eta_1\bar{\eta}_1 \cdots \eta_N\bar{\eta}_N$ に固定するようにすれば, $\mathrm{sgn}(\sigma)$ が出るんじゃね？ → 正しい.

$$K(\eta, \bar{\eta}) = \eta_1 \bar{\eta}_1 \cdots \eta_N \bar{\eta}_N (\det A)$$

積分すれば,

$$\int \prod_{l=1}^{N} d\bar{\eta}_l d\eta_l e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j} = \det A \tag{2.47}$$

——具体例 1 終了——

——具体例 2 開始——

次のような (どっかで見たような (2.27)) 積分

$$I_{i_1, \cdots, i_l, i'_1, \cdots, i'_l} = \int D(\bar{\eta}\eta) \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_l} \bar{\eta}_{i'_1} \cdots \bar{\eta}_{i'_l} e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j} \tag{2.48}$$

を計算したい. ボソンの時と同じように分配関数

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \int D(\bar{\eta}\eta) e^{-\sum_{i,j} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j + \sum_i (\bar{\eta}_i \rho_i + \bar{\rho}_i \eta_i)} \tag{2.49}$$

を利用して, 後から $\partial/\partial\rho$ とかで叩いて計算しよう！ (← まだ微分を定義してない.) うまい変数変換をしてあげると,

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \det A \cdot e^{\sum_{i,j} \bar{\rho}_i A_{ij}^{-1} \rho_j} \tag{2.50}$$

(2.30) とはちょっと違うね.

——具体例 2 終了——

2.4.3　Grassmann 数の微分

微分のルール

1. $f(\eta)$ に η_i 依存性がなければ, $\partial_{\eta_i} f(\eta) = 0$
2. $f(\eta)$ に η_i 依存性があれば, η_i の 1 乗までしかないので, 反交換関係 (2.40, 2.41) を使って, η_i を最大限左に持っていき,
$$\frac{\partial}{\partial \eta_i}\eta_i = 1$$
とする.

・右微分 $\vec{\partial}/\partial\eta_i$ も η_i を最大限右に持っていき,

$$\eta_i \frac{\vec{\partial}}{\partial \eta_i} = 1$$

を適用する.

[例]

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i}\eta_j\eta_i = -\eta_j, \ \ \bar{\eta}_i\eta_j\frac{\vec{\partial}}{\partial \bar{\eta}_i} = -\eta_j$$

特徴 1

$$\int d\eta_i\, f(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\eta)$$

特徴 2

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \eta_i}, \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right\} f(\eta) = 0$$

——具体例 1 開始——

$$E(\bar{\rho}) = e^{\sum_j \bar{\rho}_j\eta_j}$$

に左から微分し

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_i}E(\bar{\rho}) = \eta_i E(\bar{\rho})$$

が成立する. 同様に,

$$e^{\sum_j \bar{\rho}_j\eta_j}\frac{\vec{\partial}}{\partial \rho_i} = \bar{\eta}_i e^{\sum_j \bar{\rho}_j\eta_j}$$

——具体例 1 終了——

(2.59) が打てそうにないので, 断念.

Wick の定理式 (2.59) を素朴に適用すればわかるように、これは自由ディラック場では確かに正しい。これは QED や QCD のような理論にも当てはまります。この理論では、作用に対するフェルミオン的な寄与は、場 ψ と $\bar{\psi}$ の双線形関数となります。これらの理論では、このフェルミオンの寄与はボソニック変数 (ゲージポテンシャル) にも依存し、経路積分 (2.60) は外部ゲージ場で評価されるグリーン関数を与えます。これらの場の量子揺らぎを考慮する場合、(2.55) の行列 A の行列式は (ボ

ゾンの場合に特徴的な $1/\sqrt{\mathrm{det}A}$ ではなく) 重要な役割を果たします。このことは、後でこれらの理論を詳しく議論するときに明らかになる。

読者はお気づきのように、虚数時間まで続くフェルミオンのグリーン関数の経路積分再表現については議論していない。これは第 4 章で、ボソニック変数を含むグリーン関数について第 2 章で導出した規則を用いて行う。自由ディラック理論の場合、このルールの正しさは、PI 法によって得られた結果を、従来のカノニカル・ヒルベルト空間法によって得られた結果と比較することによって、明示的にチェックすることができる。QED や QCD のような相互作用を持つ場の理論では、このような比較は摂動論で行うことができる。これらの理論における相関関数の非摂動的定義は、PI 式によって与えられると仮定される。

このセクションの最後を締めくくる。ボソニックの場合とは対照的に、統計的手法を用いてグラスマン変数の積の「アンサンブル平均」を数値的に計算することはできない。それでも、QED や QCD のような理論を数値的に研究することはできる。その理由は、先ほど述べたように、これらの理論の作用に対するフェルミオン的な寄与は、ψ と $\bar{\psi}$ について双線形だからです。これにより、グラスマン積分を実行し、ユークリッド相関関数の経路積分解を統計力学的アンサンブル平均の形で再構成することができます。この作用は、フェルミオンが結合するボソニック場に非局所的に依存する。この非局所性が、フェルミオンの相関関数の数値計算を非常に時間のかかるものにしている。

2.5 時空の離散化. QFT の正則化としての格子

前のセクションで繰り返し指摘したように、グリーン関数の経路積分式は、数え切れないほどの自由度を持つ系に対してのみ明確に定義された意味を持つ。しかし、場の理論では、座標 $\vec{x}$、そして一般的にはいくつかの付加的な離散的な添字によってラベル付けされた無限の自由度を扱うので、多重積分は形式的にしか定義されません。したがって、経路積分に正確な意味を与えるためには、時間だけでなく空間も離散化しなければならない。最終的には、この格子構造を取り除かなければならない。これは極めて非自明な作業である。連続体摂動論における繰り込みプログラムに詳しい読者であれば、グリーン関数の繰り込みには、まず運動量空間における対応するファインマン積分の正則化が必要であることを知っているだろう。これらの積分は、正則化の過程で導入される 1 つ以上のパラメータ (運動量カットオフ、パウリ・ヴィラー質量、次元正則化パラメータ) に依存する。どのような正則化手続きも、ファインマン積分の運動量積分を紫外有限化する効果があるので、再正則化プログラムの最初のステップは**運動量カットオフを導入**することである。元のファインマン積分が乖離している場合、正則化された積分はカットオフに強く依存する。再正則化プログラムの第二段階は、**カットオフを取り除くと有限極限に近づく再正則化グリーン関数を定義**することである。これは、理論の裸のパラメータがカットオフに依存することを要求している。この依存性は、ある運動量移動で測定される物理的結合の強さや粒子の質量などの量を、カットオフが取り除かれるにつれて固定することを示す一連の繰り込み条件を課すことによって決定される。

上記の繰り込みプログラムは、運動量空間におけるファインマン積分のレベルで実行される。格子アプローチでは、このプログラムは摂動論を参照することなく定式化することができます。最初のステップ (正則化) は、経路積分のレベルで時空格子を導入することです。この正則化は、単に経路積

分とは何かを定義することに相当する。再正則化プログラムの第二段階は、格子構造を取り除くことである。これは連続体極限の研究に相当する。したがって、物理的な観測値が格子構造に影響されなくなるためには、理論の素のパラメータを、一般にダイナミクスに依存する非常に明確な方法で格子間隔に合わせて調整しなければならないことは驚くべきことではない。従って、読者が従来の摂動論における無限遠の取り除き方に不安を感じていたとしても、本書を読めば、おそらくずっと気分が良くなるだろう。これに関連して、摂動の枠組みにおいて時空格子を導入することは、ファインマン積分を正則化する特殊な方法に相当することも述べておきたい。後述するように、この**正則化は単純な運動量カットオフの導入にはならない**。運動量空間積分は確かに逆格子間隔のオーダーの運動量で切断されるが、ファインマン積分の積分は通常の構造を持たず、非自明な方法で修正される。これが格子弱結合摂動論が難しい理由の一つである。もう一つの理由は、ゲージ理論の格子定式化では、連続体定式化では類似点のない新しい相互作用頂点が現れるからです。

格子定式化における運動量カットオフの出現は自然である. x に格子を作り, $x = na$ で作成すれば, 運動量空間では Brillouin zone 内で書き尽くされる (!!) これすなわち, **運動量空間のカットオフ**である.