6 章〜7.1,7.2

2024 年 3 月 8 日

1 非可換ゲージ理論

1.1 ゲージ対称性を持つ作用

前回は $U(1)$ 対称性を持つ理論、つまり可換ゲージ理論を格子に乗せた。今回は非可換ゲージ理論を扱う。非可換ゲージ理論では、同じ質量 M_0 を持った N 個のフェルミオン $\psi^a(a=1,\cdots,N)$ を考える。Euclid 化された作用(Wilson フェルミオン)は

$$\begin{aligned}S_F &= \left(\widehat{M}_0+4r\right)\sum_n\sum_{a=1}^{N}\overline{\psi}^a(n)\psi^a(n)\\&-\frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\sum_{a=1}^{N}\left[\overline{\psi}^a(n)\left(r-\gamma_\mu\right)\psi^a(n+\hat{\mu})+\overline{\psi}^a(n+\hat{\mu})\left(r+\gamma_\mu\right)\psi^a(n)\right]\end{aligned}\tag{6.1}$$

である。無次元化された量であることを示すハットは $\psi,\overline{\psi}$ については面倒なので省略されている。

この作用には $SU(N)$ 対称性がある。N 個のフェルミオンをユニタリ行列で入れ替えるものである。N 行のベクトルを

$$\tilde{\psi}=\begin{pmatrix}\psi^1\\\vdots\\\psi^N\end{pmatrix},\quad \overline{\tilde{\psi}}=\left(\overline{\psi}^1,\cdots,\overline{\psi}^N\right)\tag{6.2}$$

と定義し、$\tilde{G}\in SU(N)$ による変換を

$$\begin{aligned}\psi(n)&\longrightarrow\tilde{G}\tilde{\psi}(n)\\\overline{\tilde{\psi}}(n)&\longrightarrow\overline{\tilde{\psi}}(n)\tilde{G}^{-1}\end{aligned}$$

と置くと、確かに作用は不変である。

可換ゲージ理論のときと同様に、リンク変数を

$$\tilde{U}_\mu(n)=e^{i\tilde{\phi}_\mu(n)}\tag{6.3}$$

として導入する。$\tilde{\phi}_\mu(n)$ は $SU(N)$ の Lie 代数の元、つまりトレースが 0 の Hermite な$N\times N$ 行列である。これによって作用を

$$\begin{aligned}S_F=\left(\widehat{M}_0+4r\right)&\sum_n\overline{\tilde{\psi}}(n)\tilde{\psi}(n)\\&-\frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\Big[\overline{\tilde{\psi}}(n)\left(r-\gamma_\mu\right)\tilde{U}_\mu(n)\tilde{\psi}(n+\hat{\mu})\\&+\overline{\tilde{\psi}}(n+\hat{\mu})\left(r+\gamma_\mu\right)\tilde{U}^\dagger_\mu(n)\tilde{\psi}(n)\Big]\end{aligned}\tag{6.4}$$

と書き換える。ここに出てくる $\widehat{M}_0$ はフェルミオンの質量**ではなく**、ただのパラメータと見るべきものである。相互作用によってフェルミオンの質量がずれるからである。

行列やスピノルの略記をやめれば、

$$\overline{\tilde{\psi}}(n)\big(r-\gamma_\mu\big)\tilde{U}_\mu(n)\tilde{\psi}(n+\hat{\mu}) = \sum_{\alpha,\beta,a,b} \overline{\psi}^a_\alpha(n)\big(r-\gamma_\mu\big)_{\alpha\beta}\Big(\tilde{U}_\mu(n)\Big)_{ab}\psi^b_\beta(n+\hat{\mu})$$

のようになる。

(6.4) の作用は次の変換について不変である。

$$\begin{aligned} \psi(n) &\longrightarrow \tilde{G}(n)\tilde{\psi}(x) \\ \overline{\tilde{\psi}}(n) &\longrightarrow \overline{\tilde{\psi}}(x)\tilde{G}^{-1}(n) \\ \tilde{U}_\mu(n) &\longrightarrow \tilde{G}(n)\tilde{U}_\mu(n)\tilde{G}^{-1}(n+\hat{\mu}) \\ \tilde{U}^\dagger_\mu(n) &\longrightarrow \tilde{G}(n+\hat{\mu})\tilde{U}^\dagger_\mu(n)\tilde{G}^{-1}(n) \end{aligned} \tag{6.5}$$

ただし $\tilde{G}(n)$ は $SU(N)$ の元であり、

$$\tilde{G}(n) = e^{i\tilde{\Lambda}(n)}$$

と書ける。$\tilde{\Lambda}_\mu(n)$ は $SU(N)$ の Lie 代数の元である。

ゲージの方の作用 S_G はゲージ不変である必要がある。リンク変数 $\tilde{U}_\mu(n)$ の変換性

$$\tilde{U}_\mu(n) \longrightarrow \tilde{G}(n)\tilde{U}_\mu(n)\tilde{G}^{-1}(n+\hat{\mu})$$

はリンク変数が頂点 n から頂点 $n+\hat{\mu}$ への矢印であって、出る頂点の $\tilde{G}(n)$ が左、向かう頂点の $\tilde{G}^{-1}(n+\hat{\mu})$ が右にかかると解釈できる。Hermite 共役 $\tilde{U}^\dagger_\mu(n)$ の変換性は頂点 $n+\hat{\mu}$ から頂点 n への矢印と解釈できるので、格子上の線は単純な変換性を持つ。例えば最も簡単なループである頂点 $n, n+\hat{\mu}, n+\hat{\mu}+\hat{\nu}, n+\hat{\nu}$ を順番にまわるループ

$$\tilde{U}_{\mu\nu}(n) = \tilde{U}_\mu(n)\tilde{U}_\nu(n+\hat{\mu})\tilde{U}^\dagger_\mu(n+\hat{\nu})\tilde{U}^\dagger_\nu(n) \tag{6.6}$$

の変換性は

$$\tilde{U}_{\mu\nu}(n) \longrightarrow \tilde{G}(n)\tilde{U}_{\mu\nu}(n)\tilde{G}^{-1}(n)$$

となる。最初と最後に現れる $\tilde{G}(n)$ はトレースを取れば巡回性によって消えるので、S_G を

$$S_G = c\,\mathrm{Tr}\sum_{n,\mu<\nu}\left(1-\frac{1}{2}\Big(\tilde{U}_{\mu\nu}(n)+\tilde{U}^\dagger_{\mu\nu}(n)\Big)\right) \tag{6.7}$$

とすることができる。c は定数である。

1.2 $SU(3)$ での連続極限

ここからは強い相互作用のゲージ対称性である $SU(3)$ について議論しよう。$SU(3)$ の Lie 代数の元 $\tilde{\Theta}$ はトレースが 0 の Hermite な 3×3 行列なので、適当に 8 個の基底 λ^B を取って

$$\tilde{\Theta} = \sum_{B=1}^{8}\Theta^B\frac{\lambda^B}{2}$$

と書ける。λ^B は普通 Gell–mann 行列と呼ばれるものに取られる。$SU(3)$ の Lie 代数の元の交換子はまたトレースが 0 の Hermite 行列になるので

$$\big[\lambda^A,\lambda^B\big] = 2i\sum_{C=1}^{8} f_{ABC}\lambda^C \tag{6.8}$$

と書ける。このとき完全反対称な係数 f_{ABC} は構造定数と呼ばれる。

連続極限を取るために、リンク変数 $\tilde{U}_\mu(n) = e^{i\tilde{\phi}_\mu(n)}$ の肩を

$$\tilde{\phi}_\mu(n) = g_0 a \tilde{A}_\mu(n) \tag{6.9}$$

と置く。a は格子間隔であり、g_0 は(裸の)結合定数である。$\tilde{A}_\mu(n)$ は $SU(3)$ の Lie 代数の元なので

$$\tilde{A}_\mu(n) = \sum_{B=1}^{8} A_\mu^B(n) \frac{\lambda^B}{2} \tag{6.10}$$

と書ける。これと他の量のスケーリング

$$\begin{aligned}
x &\longrightarrow na \\
M_0 &\longrightarrow a^{-1}\widehat{M}_0 \\
\psi(x) &\longrightarrow a^{-3/2}\psi(n) \\
\overline{\psi}(x) &\longrightarrow a^{-3/2}\overline{\psi}(n) \\
\int d^4x &\longrightarrow a^4 \sum_n
\end{aligned}$$

をフェルミオンの作用

$$\begin{aligned}
S_F = \left(\widehat{M}_0 + 4r\right) &\sum_n \overline{\tilde{\psi}}(n)\tilde{\psi}(n) \\
&-\frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\sum_{a=1}^{N}\Big[\overline{\tilde{\psi}}(n)\big(r-\gamma_\mu\big)\tilde{U}_\mu(n)\tilde{\psi}(n+\hat{\mu}) \\
&+\overline{\tilde{\psi}}(n+\hat{\mu})\big(r+\gamma_\mu\big)\tilde{U}_\mu^\dagger(n)\tilde{\psi}(n)\Big]
\end{aligned}$$

に代入して $a \to 0$ とする。r に比例する項は Wilson フェルミオンで加えた項なので $a \to 0$ で消えるから、

$$\begin{aligned}
S_F &= \widehat{M}_0 \sum_n \overline{\tilde{\psi}}(n)\tilde{\psi}(n) \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\Big[\overline{\tilde{\psi}}(n)\gamma_\mu\Big(1+ig_0 a\tilde{A}_\mu(n)\Big)\tilde{\psi}(n+\hat{\mu}) \\
&\quad-\overline{\tilde{\psi}}(n+\hat{\mu})\gamma_\mu\Big(1-ig_0 a\tilde{A}_\mu(n)\Big)\tilde{\psi}(n)\Big] \\
&= \widehat{M}_0 \sum_n \overline{\tilde{\psi}}(n)\tilde{\psi}(n) \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\Big[\overline{\tilde{\psi}}(n)\gamma_\mu\tilde{\psi}(n+\hat{\mu}) - \overline{\tilde{\psi}}(n)\gamma_\mu\tilde{\psi}(n-\hat{\mu})\Big] \\
&\quad+\frac{1}{2}ig_0 a\sum_{n,\mu}\Big[\overline{\tilde{\psi}}(n)\tilde{A}_\mu(n)\tilde{\psi}(n+\hat{\mu}) + \overline{\tilde{\psi}}(n+\hat{\mu})\tilde{A}_\mu(n)\tilde{\psi}(n)\Big]
\end{aligned}$$

の $a \to 0$ の極限を考えればよいので

$$S_F^{(\text{cont.})} = \int d^4x\overline{\tilde{\psi}}(x)\Big(\gamma_\mu\Big(\partial_\mu + ig_0\tilde{A}_\mu(x)\Big) + M_0\Big)\tilde{\psi}(x)$$

となる。

S_G の方の連続極限も考える。ループ

$$\tilde{U}_{\mu\nu}(n) = \tilde{U}_\mu(n)\tilde{U}_\nu(n+\hat{\mu})\tilde{U}_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})\tilde{U}_\nu^\dagger(n) \tag{6.11}$$

について

$$\tilde{U}_{\mu\nu}(n) = \exp\Big(ig_0a^2\tilde{\mathscr{F}}_{\mu\nu}(n)\Big)$$

と置いて $\tilde{\mathscr{F}}_{\mu\nu}(n)$ を求める。Baker–Campbell-Hausdorff の公式

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \cdots\right) \tag{6.12}$$

を使い、a の 2 次まで取って計算すると、$\tilde{\phi}_\mu(n) = g_0a\tilde{A}_\mu(n)$ は a の 1 次の量であることに注意して

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{\mu\nu}(n) &= \exp\Big(i\tilde{\phi}_\mu(n)\Big)\exp\Big(i\tilde{\phi}_\nu(n+\hat{\mu})\Big)\exp\Big(-i\tilde{\phi}_\mu(n+\hat{\nu})\Big)\exp\Big(-i\tilde{\phi}_\nu(n)\Big) \\
&= \exp\Big(i\tilde{\phi}_\mu(n)\Big)\exp\Big(i\tilde{\phi}_\nu(n) + ia\partial_\mu\tilde{\phi}_\nu(n)\Big)\exp\Big(-i\tilde{\phi}_\mu(n) - ia\partial_\nu\tilde{\phi}_\mu(n)\Big)\exp\Big(-i\tilde{\phi}_\nu(n)\Big) \\
&= \exp\left(i\tilde{\phi}_\mu(n) + i\tilde{\phi}_\nu(n) + ia\partial_\mu\tilde{\phi}_\nu(n) - \frac{1}{2}\Big[\tilde{\phi}_\mu(n), \tilde{\phi}_\nu(n)\Big]\right) \\
&\quad \times \exp\left(-i\tilde{\phi}_\mu(n) - ia\partial_\nu\tilde{\phi}_\mu(n) - i\tilde{\phi}_\nu(n) - \frac{1}{2}\Big[\tilde{\phi}_\mu(n), \tilde{\phi}_\nu(n)\Big]\right) \\
&= \exp\Big(ia\partial_\mu\tilde{\phi}_\nu(n) - ia\partial_\nu\tilde{\phi}_\mu(n) - \Big[\tilde{\phi}_\mu(n), \tilde{\phi}_\nu(n)\Big]\Big)
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\tilde{\mathscr{F}}_{\mu\nu}(n) = \frac{1}{g_0a}\Big(\partial_\mu\tilde{\phi}_\nu(n) - \partial_\nu\tilde{\phi}_\mu(n)\Big) + i\frac{1}{g_0a^2}\Big[\tilde{\phi}_\mu(n), \tilde{\phi}_\nu(n)\Big]$$

となるから、確かに連続極限で

$$\tilde{\mathscr{F}}_{\mu\nu} \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\tilde{A}_\nu - \partial_\nu\tilde{A}_\mu + ig_0\Big[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu\Big] \tag{6.13}$$

となる。

$\tilde{F}_{\mu\nu}$ も Gell-Mann 行列で

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \sum_{B=1}^{8} F_{\mu\nu}^B \frac{\lambda^B}{2} \tag{6.14}$$

と展開する。Gell-Mann 行列の直交関係

$$\mathrm{Tr}\big(\lambda^B\lambda^C\big) = 2\delta_{BC} \tag{6.15}$$

から、λ^B をかけてトレースを取ると成分が

$$F_{\mu\nu}^B = \mathrm{Tr}\Big(\tilde{F}_{\mu\nu}\lambda^B\Big)$$

のように取り出せることが分かるので、

$$F_{\mu\nu}^B = \partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B - g_0 f_{BCD} A_\mu^C A_\nu^D \tag{6.16}$$

となる。こうして

$$
\begin{aligned}
S_G &= c\,\mathrm{Tr}\sum_{n,\mu<\nu}\left(1-\frac{1}{2}\bigl(\tilde{U}_{\mu\nu}(n)+\tilde{U}^{\dagger}_{\mu\nu}(n)\bigr)\right)\\
&= c\,\mathrm{Tr}\sum_{n,\mu<\nu}\left(1-\frac{1}{2}\left(1+ig_0a^2\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}(n)-\frac{1}{2}g_0^2a^4\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}(n)\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}(n)\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2}\left(1-ig_0a^2\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}(n)-\frac{1}{2}g_0^2a^4\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}(n)\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}(n)\right)\right)+O(a^6)\\
&= \frac{1}{2}cg_0^2a^4\,\mathrm{Tr}\sum_{n,\mu<\nu}\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}(n)\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}(n)+O(a^6)
\end{aligned}
$$

の連続極限は

$$
S_G \to c\frac{g_0^2}{2}S_G^{(\mathrm{cont.})}
$$

となる。ただし

$$
S_G^{(\mathrm{cont.})} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\int d^4x\sum_{\mu,\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \tag{6.17}
$$

と置いた。そこで $c=g_0^2/2$ と置くのがよいことが分かる。

Gell-Mann 行列の直交関係を使うと

$$
S_G^{(\mathrm{cont.})} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\int d^4x\sum_{\mu,\nu}\sum_{B=1}^{8}F^B_{\mu\nu}F^B_{\mu\nu} \tag{6.21}
$$

となる。これはよく知られている QCD のゲージ場の作用である。この形の作用は Yang と Mills によって $SU(2)$ の場合に最初に与えられたので Yang–Mills 作用と呼ばれる。

一般の $N>1$ においては、

$$
\tilde{U}_P = \tilde{U}_{\mu\nu}(n)
$$

と置くことで

$$
S_G^{(SU(N))} = \beta\sum_P\left[1-\frac{1}{2N}\,\mathrm{Tr}\bigl(\tilde{U}_P+\tilde{U}_P^{\dagger}\bigr)\right] \tag{6.18}
$$

となる。P はプラケット、つまりループ $\tilde{U}_{\mu\nu}(n)$ が囲む面を表している。β は $SU(3)$ と同じ議論によって

$$
\beta = \frac{2N}{g_0^2}
$$

とすればよい。

リンク変数

$$
\tilde{U}_\mu(n) = e^{ig_0a\tilde{A}_\mu(n)} \tag{6.19}
$$

は局所ゲージ変換に対して

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}_\mu(n) &\to \tilde{G}(n)\tilde{U}_\mu(n)\tilde{G}^{-1}(n+\hat{\mu}) \\
&= \tilde{G}(n)\tilde{U}_\mu(n)\Big(\tilde{G}^{-1}(n) + a\partial_\mu \tilde{G}^{-1}(n) + O(a^2)\Big) \\
&= 1 + ig_0 a\tilde{G}(n)\tilde{A}_\mu(n)\tilde{G}^{-1}(n) + \tilde{G}(n)\partial_\mu \tilde{G}^{-1}(n) + O(a^2)
\end{aligned}
$$

と変換するので、連続極限では

$$
\tilde{A}_\mu(x) \to \tilde{G}(x)\tilde{A}_\mu(x)\tilde{G}^{-1}(x) - \frac{i}{g_0}\tilde{G}(x)\partial_\mu \tilde{G}^{-1}(x) \tag{6.20}
$$

と変換する。これはよく知られたゲージ場の変換性である。

1.3 経路積分

非可換ゲージ理論の経路積分を定める。リンク変数の積分測度 DU はゲージ不変なものでなければならない。ℓ 番目のリンク変数の $SU(3)$ のパラメータを $\alpha_\ell^A, (A = 1, \cdots, 8)$ とすると、

$$
DU = \prod_\ell J(\alpha_\ell)(d\alpha_\ell) \tag{6.22}
$$

と書ける。ただし

$$
(d\alpha_\ell) = \prod_{A=1}^{8} d\alpha_\ell^A
$$

である。このとき

$$
dU_\ell = J(\alpha_\ell)(d\alpha_\ell)
$$

と置く。

コンパクトなLie群には一意に不変な測度が取れることが知られており、Haar測度と呼ばれている。ここでは詳細には立ち入らないが、次の公式を使えば十分である。

$$
\begin{aligned}
\int dU U^{ab} &= 0 \\
\int dU U^{ab} U^{cd} &= 0 \\
\int dU U^{ab} \big(U^\dagger\big)^{cd} &= \frac{1}{3}\delta_{ad}\delta_{bc} \\
\int dU U^{a_1 b_1} U^{a_2 b_2} U^{a_3 b_3} &= \frac{1}{3!}\varepsilon_{a_1 a_2 a_3}\varepsilon_{b_1 b_2 b_3}
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

このような積分の一般的な計算は Creutz(1978)に与えられているらしい。

相関関数は経路積分で

$$
\begin{aligned}
\Big\langle \psi_{\alpha_1}^{a_1}(n_1)\cdots\psi_{\beta_1}^{b_1}(m_1)\cdots U_{\mu_1}^{cd}(k_1)\cdots \Big\rangle &= \frac{1}{Z}\int DU D\overline{\psi} D\psi \psi_{\alpha_1}^{a_1}(n_1)\cdots\psi_{\beta_1}^{b_1}(m_1)\cdots U_{\mu_1}^{cd}(k_1)\cdots e^{-S_{\mathrm{QCD}}} \\
Z &= \int DU D\overline{\psi} D\psi e^{-S_{\mathrm{QCD}}}
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

と与えられる。QCD の作用はまとめておくと

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{QCD}} &= S_G[U] + S_F^{(W)}\left[U, \psi, \overline{\psi}\right] \\
S_G &= \frac{6}{g_0^2}\sum_P \left[1 - \frac{1}{6}\,\mathrm{Tr}\left(\tilde{U}_P + \tilde{U}_P^\dagger\right)\right] \\
S_F^{(W)} &= \left(\widehat{M}_0 + 4r\right)\sum_n \overline{\tilde{\psi}}(n)\tilde{\psi}(n) \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\left[\overline{\tilde{\psi}}(n)\left(r-\gamma_\mu\right)\tilde{U}_\mu(n)\tilde{\psi}(n+\hat{\mu})\right. \\
&\quad \left. +\overline{\tilde{\psi}}(n+\hat{\mu})\left(r+\gamma_\mu\right)\tilde{U}_\mu^\dagger(n)\tilde{\psi}(n)\right]
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

である。

ここまで Wilson フェルミオンしか扱ってこなかったが、スタッガードフェルミオンの場合は $\tilde{\chi} = \left(\chi^1, \chi^2, \chi^3\right)$ によって

$$
S_F^{(\mathrm{stag.})} = \frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\eta_\mu(n)\overline{\tilde{\chi}}(n)\left(\tilde{U}_\mu(n)\tilde{\chi}(n+\hat{\mu}) - \tilde{U}_\mu^\dagger(n-\hat{\mu})\tilde{\chi}(n-\hat{\mu})\right) + \widehat{M}_0\sum_n \overline{\chi}(n)\chi(n) \tag{6.26}
$$

とすればいいらしい。

2 Wilson ループと静止クォーク・反クォークポテンシャル

強い相互作用ではクォークが単体で観測されないというクォークの閉じ込めという現象が起こる。これはクォークと反クォークのペア $(q\bar{q})$ のポテンシャルが距離が離れると大きくなり、十分離れると新しくハドロンを作った方が全体のエネルギーが小さくなるという描像によって理解できる。また、核力が短距離でしか働かないことは、真空の偏極による遮蔽が起こり、Van der Waals 力のような形でしか働かないと解釈できる。ポテンシャルを計算することで、このような定性的な解釈が本当に正しいかを確認できる。

まずは非相対論的量子力学において、ポテンシャルを経路積分で計算する方法を見る。

2.1 非相対論的量子力学におけるポテンシャル

1 次元空間のポテンシャル $V(x)$ の中を運動する質量 m の粒子を考える。この粒子の伝播は

$$K(x', t; x, 0) = \langle x'|e^{-iHt}|x\rangle \tag{7.1}$$

によって与えられる。ハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

だから、静止極限 $m \to \infty$ を取ると

$$K(x', t; x, 0) \to \delta(x - x')e^{-iV(x)t} \tag{7.2}$$

となる。$t \to -iT$ として Euclid 化すると、ポテンシャルは $K(x', t; x, 0)$ の Euclid 時間 T に対する指数関数的な減衰から決まることが分かる。デルタ関数は単純に静止極限 $m \to \infty$ で粒子が動かないことを表している。

静止極限の波動関数は Schrödinger 方程式

$$i\partial_t \psi(x, t) = V(x)\psi(x, t)$$

を満たすから、

$$\psi(x, t) = e^{-iV(x)t}\psi(x, 0) \tag{7.3}$$

と書ける。

具体的に調和振動子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa x^2$$

で確認してみよう。調和振動子では普通に計算できて

$$K(x', t; x, 0) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \sin\omega t}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{im\omega}{2\sin\omega t}\left[\left(x^2 + {x'}^2\right)\cos\omega t - 2xx'\right]\right) \tag{7.4}$$

となる。ただし $\omega = \sqrt{\kappa/m}$ と置いた。κ を一定に保って $m \to \infty$ とすると

$$K(x', t; x, 0) \to \left[\left(\frac{1}{2\pi i\varepsilon}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{i(x - x')^2}{2\varepsilon}\right)\right] \exp\left(-\frac{i}{2}(V(x') + V(x))t\right) \tag{7.5}$$

となる。ただし $\varepsilon = t/m$ と置いた。$\varepsilon \to 0$ で [] の中身はデルタ関数になるので、確かにポテンシャルが指数関数の中に現れている。

2.2 Wilson ループと QED における静止 $q\bar{q}$-ポテンシャル

とりあえず $U(1)$ ゲージ理論、つまり QED を考える。重いクォーク (Q) と反クォーク $\left(\overline{Q}\right)$ が QED の作用

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \int d^4x \overline{\psi}\big(i\gamma^\mu D_\mu - M\big)\psi + \int d^4x \overline{\psi}^{(Q)}\big(i\gamma^\mu D_\mu - M_Q\big)\psi^{(Q)}$$

に従っているとする。$\psi, \overline{\psi}$ は他のフェルミオンである。このとき、ゲージ不変な状態

$$\big|\phi_{\alpha\beta}(\vec{x},\vec{y})\big\rangle = \overline{\Psi}^{(Q)}_\alpha(\vec{x},0)U(\vec{x},0;\vec{y},0)\Psi^{(Q)}_\beta(\vec{y},0)|\Omega\rangle \tag{7.6}$$

を考える。ただし $|\Omega\rangle$ は基底状態であり、

$$U(\vec{x},t;\vec{y},t) = \exp\left(ie\int_{\vec{x}}^{\vec{y}} dz^i A_i(\vec{z},t)\right) \tag{7.7}$$

とした。線積分は $\vec{x},\vec{y}$ を結ぶ直線について行う。

$\big|\phi_{\alpha\beta}\big\rangle$ と重なりを持つ状態であって、最低のエネルギーを持つ状態を求めたい。$\big|\phi_{\alpha\beta}\big\rangle$ と重なりを持つ状態は無限にたくさんあるが、非相対論的量子力学においても質量を有限と考えているときは同じことが起こる。ハミルトニアン H のエネルギー E_n の固有状態を $|n\rangle$ とすると、

$$K(x',t;x,0) = \sum_n \langle x'|n\rangle\langle n|x\rangle e^{-iE_nt} \tag{7.8}$$

と展開できる。$t\to -iT$ と置き換えて $T\to\infty$ とすれば

$$K(x',-iT;x,0) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \langle x'|0\rangle\langle 0|x\rangle e^{-E_0T}$$

となるから、最低のエネルギー状態 E_0 が得られる。これを Feynman–Kac の公式と呼ぶ。この例から質量を無限にする前に $T\to\infty$ としてはいけないことが分かるらしい。

QED の方に戻り、Green 関数

$$\begin{aligned}
&G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\vec{x}',\vec{y}';\vec{x},\vec{y};t)\\
&= \langle\Omega|T\Big(\overline{\Psi}^{(Q)}_{\beta'}(\vec{y}',t)U(\vec{y}',t;\vec{x}',t)\Psi^{(Q)}_{\alpha'}(\vec{x}',t)\overline{\Psi}^{(Q)}_\alpha(\vec{x},0)U(\vec{x},0;\vec{y},0)\Psi^{(Q)}_\beta(\vec{y},0)\Big)|\Omega\rangle
\end{aligned} \tag{7.9}$$

を考える。クォーク質量 M_Q が大きい極限を考えるので、

$$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\vec{x}',\vec{y}';\vec{x},\vec{y};-iT) \underset{\substack{1)M_Q\to\infty\\ 2)T\to\infty}}{\longrightarrow} \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\delta^3(\vec{y}-\vec{y}')C_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\vec{x},\vec{y})e^{-E(R)T} \tag{7.10}$$

という形になることが期待できる。ただし $R=|\vec{x}-\vec{y}|$ と置いた。

$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}$ の右辺は経路積分で表すと

$$\begin{aligned}
G_{\alpha'\beta',\alpha\beta} = \frac{1}{Z}\int &DAD\psi D\overline{\psi}D\psi^{(Q)}D\overline{\psi}^{(Q)}\overline{\psi}^{(Q)}_{\beta'}(\vec{y}',t)U(\vec{y}',t;\vec{x}',t)\psi^{(Q)}_{\alpha'}(\vec{x}',t)\\
&\times \overline{\psi}^{(Q)}_\alpha(\vec{x},0)U(\vec{x},0;\vec{y},0)\psi^{(Q)}_\beta(\vec{y},0)e^{iS}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

となる。ここで、作用は

$$S = S_G[A] + S_F\Big[\psi,\overline{\psi},A\Big] + S_Q\Big[\psi^{(Q)},\overline{\psi}^{(Q)},A\Big] \tag{7.12}$$

と書け、$\psi^{(Q)},\overline{\psi}^{(Q)}$ に関する部分は

$$S_Q\left[\psi^{(Q)},\overline{\psi}^{(Q)},A\right]=\int d^4x\overline{\psi}^{(Q)}(i\gamma^\mu D_\mu-M_Q)\psi^{(Q)}$$

と $\psi^{(Q)},\overline{\psi}^{(Q)}$ について双線型なので、積分が普通に実行できる。

$$\begin{aligned}G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}=&-\frac{1}{Z}\int DAD\psi D\overline{\psi}\left[S_{\beta'\beta}(y,y';A)S_{\alpha'\alpha}(x',x;A)-S_{\alpha'\beta'}(x',y';A)S_{\beta\alpha}(y,x;A)\right]\\&\times U(\vec{x},0;\vec{y},0)U(\vec{y}',t;\vec{x}',t)\det K^{(Q)}[A]e^{iS_G+iS_F}\end{aligned}\tag{7.13}$$

ここで、

$$\begin{aligned}x=(\vec{x},0),\quad y=(\vec{y},0),\\x'=(\vec{x}',t),\quad y'=(\vec{y}',t)\end{aligned}\tag{7.14}$$

と置き、$S(z,z';A)$ は

$$\left[i\gamma^\mu\big(\partial_\mu+ieA_\mu(z)\big)-M_Q\right]S(z,z';A)=\delta^3(\vec{z}-\vec{z}')\delta(t-t')\tag{7.15}$$

の解とした。$\det K^{(Q)}[A]$ は行列

$$K^{(Q)}_{\alpha x,\beta y}=\left[i\gamma^\mu\big(\partial_\mu+ieA_\mu(z)\big)-M_Q\right]_{\alpha\beta}\delta^4(x-y)$$

の行列式であるが、$M_Q\to\infty$ とすることを考えると Z の方に出てくる行列式と相殺すると考えられるので $\det K^{(Q)}=1$ とする。

よく分からないが $M_Q\to\infty$ だと空間成分が無視できて

$$\left[i\gamma^0(\partial_0+ieA_0(z))-M_Q\right]S(z,z';A)=\delta^4(z-z')\tag{7.16}$$

としていいらしい。これは

$$S(z,z';A)=\exp\left(ie\int_{z_0}^{z_0'}dtA_0(\vec{z},t)\right)\hat{S}(z-z')\tag{7.17}$$

と置くと

$$\left[i\gamma^0\partial_0-M_Q\right]\hat{S}(z-z')=\delta^4(z-z')\tag{7.18}$$

と書ける。この解は Fourier 変換で

$$\begin{aligned}S(z,z';A)=\delta^3(\vec{z}-\vec{z}')\exp\left(ie\int_{z_0}^{z_0'}dtA_0(\vec{z},t)\right)&\left\{\Theta(z_0-z_{0'})\left(\frac{1+\gamma_0}{2}\right)e^{-iM_Q(z_0-z_0')}\right.\\&\left.+\Theta(z_0'-z_0)\left(\frac{1-\gamma_0}{2}\right)e^{iM_Q(z_0-z_0')}\right\}\end{aligned}\tag{7.19}$$

となる。これを(7.13)に入れれば

$$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}\underset{M_Q\to\infty}{\longrightarrow}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\delta^3(\vec{y}-\vec{y}')(P_+)_{\alpha'\alpha}(P_-)_{\beta\beta'}e^{-2iM_Qt}\left\langle\exp\left(ie\oint dz^\mu A_\mu(z)\right)\right\rangle\tag{7.20}$$

となる。ただし、

$$P_\pm=\frac{1}{2}(1\pm\gamma^0)$$

であり、

$$\left\langle \exp\left(ie \oint dz^\mu A_\mu(z) \right) \right\rangle = \frac{\int DAD\psi D\overline{\psi} \exp\left(ie \oint dz^\mu A_\mu(z) \right) e^{iS_{\mathrm{QED}}}}{\int DAD\psi D\overline{\psi} e^{iS_{\mathrm{QED}}}} \tag{7.21}$$

はクォーク・反クォークを無視した基底状態での期待値である。

ここで $t \to -iT, A_0 \to iA_4$ などとして Euclid 化を行うと

$$\left[G_{\alpha'\beta',\alpha\beta} \right]_{t\to -iT} \underset{M_Q\to\infty}{\longrightarrow} \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\delta^3(\vec{y}-\vec{y}')(P_+)_{\alpha'\alpha}(P_-)_{\beta\beta'} e^{-2M_Q T} \langle W_C[A] \rangle_{\mathrm{eucl.}}$$

$$\begin{aligned} W_C[A] &= \exp\left(ie \oint dz_\mu A_\mu(z) \right) \\ \langle W_C[A] \rangle_{\mathrm{eucl.}} &= \frac{\int DAD\psi D\overline{\psi} W_C[A] e^{-S_{\mathrm{QED}}^{(\mathrm{eucl.})}}}{\int DAD\psi D\overline{\psi} e^{-S_{\mathrm{QED}}^{(\mathrm{eucl.})}}} \end{aligned} \tag{7.22}$$

となる。$W_C[A]$ の線積分は導出の過程から $(\vec{x},0),(\vec{y},0),(\vec{y},T),(\vec{x},T)$ を順番に巡るようになっていて、**Wilson ループ**と呼ばれている。

前々からやっているように、この $W_C(A)$ の基底状態での期待値が

$$W(R,T) \equiv \langle W_C[A] \rangle \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} F(R) e^{-E(R)T}$$

と振る舞うことを期待しよう。そうすると

$$E(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln\langle W_C[A] \rangle$$

となるのでエネルギーが取り出せる。

格子では Wilson ループは経路 C に対して

$$W_C[U] = \prod_{\ell\in C} U_\ell$$

と定義される。この基底状態での期待値

$$W\left(\hat{R},\hat{T}\right) \equiv \langle W_C[U] \rangle$$

は

$$W\left(\hat{R},\hat{T}\right) = \frac{\int DAD\psi D\overline{\psi} W_C[U] e^{-S_{\mathrm{QED}}[U,\psi,\overline{\psi}]}}{\int DAD\psi D\overline{\psi} e^{-S_{\mathrm{QED}}[U,\psi,\overline{\psi}]}}$$

で与えられる。ただし $\hat{R} = R/a, \hat{T} = T/a$ である。連続極限のときと同じように

$$\hat{E}\left(\hat{R}\right) = -\lim_{\hat{T}\to\infty} \frac{1}{\hat{T}} \ln W\left(\hat{R},\hat{T}\right)$$

とすれば $q\overline{q}$-ペアのエネルギー $\hat{E}\left(\hat{R}\right)$ が求まる。

この $\hat{E}\left(\hat{R}\right)$ には $\hat{R}$ に依存しない自己エネルギーの項も入ってしまっているらしいので、引き算しないと正しいポテンシャルは出ない。だがこの式を使うことで原理的にクォーク間ポテンシャルを数値的に計算できる気がする。