Rothe 3-4.3

Haruki Saito

最終更新：2024 年 3 月 1 日

目次

3 格子上の自由スカラー場

古典場の方程式 (Klein-Gordon 方程式):

$$(\Box + M^2)\phi(x) = 0 \tag{3.1}$$

は，作用:

$$S = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, \phi(x)(\Box + M^2)\phi(x) \tag{3.2}$$

に対して停留作用の原理 $\delta S = 0$ を施すことで導かれる．なお，この作用は Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu - \frac{1}{2}M^2\phi^2$$

から与えられる．量子論において，位置 $q_{\boldsymbol{x}}(t) := \phi(x)$ と運動量演算子 $p_{\boldsymbol{x}}(t) := \dot{\phi}(x)$ は正準交換関係を満たす演算子 $\Phi(x), \dot{\Phi}(x)$ となる．量子論の情報は Green 関数

$$G(x, y, \cdots) = \langle\Omega|\, T(\Phi(x)\Phi(y)\cdots)\, |\Omega\rangle \tag{3.3}$$

に含まれる．第 2 章によると，これらの Green 関数は，経路積分表現によって

$$G(x, y, \cdots) = \frac{\int D\phi\phi(x)\phi(y)\cdots e^{iS[\phi]}}{\int D\phi e^{iS[\phi]}} \tag{3.4}$$

と与えられる．今興味があるのは，これを虚時間に解析接続することであった．そのためには，作用 $S[\phi]$ に対して

1. $x_0 \to -ix_4, y_0 \to -iy_4, \cdots$ などのように，虚時間に置き換える．
2. $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ に $\phi(x) = \phi(\boldsymbol{x}, x_4)$ を代入する．
3. $-i$ をかける．

という操作を施すことで，Euclid 化すればよいのであった．この過程で $\mathrm{d}x \to -i\,\mathrm{d}x$, $\Box \to -\left(\sum_{\mu=1}^4 \partial_\mu\partial_\mu\right)$(この括弧内を新たに $\Box$ と置きなおす) と変換され，Euclid 形式の作用

$$\begin{aligned} S_E[\phi] &= -i\left(-\frac{1}{2}\int(-i\,\mathrm{d}^4x)\phi(x)(-\Box + M^2)\phi(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\phi(x)(-\Box + M^2)\phi(x) \end{aligned} \tag{3.6a}$$

を得る．この作用を用いて，Green 関数は

$$\langle\phi(x)\phi(y)\cdots\rangle = \frac{\int D\phi\phi(x)\phi(y)\cdots e^{-S_E[\phi]}}{\int D\phi e^{-S_E[\phi]}} \tag{3.5}$$

と書き直せる．

虚時間を用いた定式化により，Green 関数は分配関数

$$Z = \int D\phi e^{-S_E[\phi]}$$

によって定められる統計力学系の相関関数の形式をとる．

以下，間隔 a の時空格子を導入する．このとき，格子状の任意の点は 4 整数 $n := (n_1, n_2, n_3, n_4)$ によって指定される．連続空間から格子空間への移行は次の置き換えを行えばよい:

$$
\begin{aligned}
x_\mu &\to n_\mu a, \\
\phi(x) &\to \phi(na), \\
\int \mathrm{d}^4 x &\to a^4 \sum_n, \\
\Box\phi(x) &\to \frac{1}{a^2}\sum_{\hat{\mu}}(\phi(na+\hat{\mu}a)+\phi(na-\hat{\mu}a)-2\phi(na)) \quad \left(=: \frac{1}{a^2}\hat{\Box}\psi(x)\right), \\
D\phi &\to \prod_n d\phi(na).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

これを行うことで，作用は

$$
\begin{aligned}
S_E[\phi] &= \frac{1}{2}a^4 \sum_n \phi(na)\left(-\frac{1}{a^2}\sum_{\hat{\mu}}(\phi(na+\hat{\mu}a)+\phi(na-\hat{\mu}a)-2\phi(na))+M^2\phi(na)\right) \\
&= -\frac{1}{2}a^2\sum_{n,\hat{\mu}}\phi(na)(\phi(na+\hat{\mu}a)+\phi(na-\mu a))+\frac{1}{2}a^2(8+a^2M^2)\phi(na)\phi(na)
\end{aligned}
$$

と書き換えられる．さらに，M, ϕ に a を乗じて無次元化する:

$$
\begin{aligned}
\hat{\phi}_n &= a\phi(na), \\
\hat{M} &= aM.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

これにより作用 (3.6a)

$$
S_E[\hat{\phi}] = -\frac{1}{2}\sum_{n,\hat{\mu}}\hat{\phi}_n(\hat{\phi}_{n+\hat{\mu}}+\hat{\phi}_{n-\hat{\mu}})+\frac{1}{2}(8+\hat{M}^2)\hat{\phi}_n\hat{\phi}_n \tag{3.9b}
$$

となる．Green 関数 (3.5) は

$$
\langle\hat{\phi}_n\hat{\phi}_m\cdots\rangle = \frac{\int(\prod_l \mathrm{d}\hat{\phi}_l)\hat{\phi}_n\hat{\phi}_m\cdots e^{-S_E[\hat{\phi}]}}{\int(\prod_l \mathrm{d}\hat{\phi}_l)e^{-S_E[\hat{\phi}]}} \tag{3.9a}
$$

となる．

(3.9a) の積分を実行しよう．まず，作用 (3.9b) を 2 次形式に書き換える:

$$
S_E[\hat{\phi}] = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\hat{\phi}_n K_{nm}\hat{\phi}_m, \tag{3.10a}
$$

$$
K_{nm} = -\sum_{\hat{\mu}}\left(\delta_{n+\hat{\mu},m}+\delta_{m-\hat{\mu},m}-2\delta_{n,m}\right)+\hat{M}^2\delta_{n,m}. \tag{3.10b}
$$

例によって生成汎関数

$$
Z_0[J] = \int\left(\prod_l \mathrm{d}\hat{\phi}_l\right)e^{-S_E[\hat{\phi}]+\sum_n J_n\hat{\phi}_n} \tag{3.11}
$$

を導入する．この積分は簡単に実行でき[*1]，

$$Z_0[J] = \frac{1}{\sqrt{\det K}} e^{\frac{1}{2}\sum_{n,m} J_n K^{-1}_{nm} J_m} \tag{3.12}$$

となる．この生成汎関数を適当なソース J_n で偏微分することで，所望の相関関数が求められる．例えば，2点相関関数は

$$\langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle = \left. \frac{\partial^2 Z_0[J]}{\partial J_n \partial J_m} \right|_{J=0} = K^{-1}_{n,m} \tag{3.13}$$

となる．

逆行列 K^{-1} は次のような手続きで計算すればよい．連立方程式

$$\sum_l K_{n,l} K^{-1}_{l,m} = \delta_{n,m} \tag{3.14}$$

を考える．$\delta_{n,m}$ と $K_{n,m}$ をそれぞれ Fourier 変換すると次のようになる:

$$\delta_{n,m} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^4\hat{k}}{(2\pi)^4} e^{i\hat{k}\cdot(n-m)}, \tag{3.15}$$

$$K_{n,m} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^4\hat{k}}{(2\pi)^4} \tilde{K}(\hat{k}) e^{i\hat{k}\cdot(n-m)}, \tag{3.16a}$$

$$\tilde{K}(\hat{k}) = 4\sum_{\mu=1}^{4} \sin^2\frac{\hat{k}_\mu}{2} + \hat{M}^2. \tag{3.16b}$$

いま，$K^{-1}_{n,m}$ の Fourier 変換が

$$K^{-1}_{n,m} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^4\hat{k}}{(2\pi)^4} G(\hat{k}) e^{i\hat{k}\cdot(n-m)}$$

で与えられていたとすると，(3.14) の左辺は (3.16a) により

$$\begin{aligned}
\sum_l K_{n,l} K^{-1}_{l,m} &= \sum_l \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^4\hat{k}}{(2\pi)^4} \tilde{K}(\hat{k}) e^{i\hat{k}\cdot(n-l)} \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^4\hat{k}'}{(2\pi)^4} G(\hat{k}') e^{i\hat{k}'\cdot(l-m)} \right) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^4\hat{k}}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^4\hat{k}'}{(2\pi)^4} \tilde{K}(\hat{k}) G(\hat{k}') e^{i(\hat{k}\cdot n - \hat{k}'\cdot m)} \underbrace{\sum_l e^{-i(\hat{k}-\hat{k}')\cdot l}}_{=(2\pi)^4 \delta_P(\hat{k}-\hat{k}')} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^4\hat{k}}{(2\pi)^4} \tilde{K}(\hat{k}) G(\hat{k}) e^{i\hat{k}\cdot(n-m)}
\end{aligned}$$

となる．これを (3.15) と比較して，$G(\hat{k}) = 1/\tilde{K}(\hat{k})$，即ち，

$$K^{-1}_{n,m} = \langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^4\hat{k}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\hat{k}\cdot(n-m)}}{4\sum_\mu \sin^2\frac{\hat{k}_\mu}{2} + \hat{M}^2} \quad (=: G(n,m;\hat{M})) \tag{3.17}$$

を得る．

[*1] 第 2 章を参照のこと．

(3.17) に対して連続極限 $a \to 0$ を施して物理的な 2 点相関関数 $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$ を計算する際には，どのパラメータが一定に固定されるべきであるかを明確にしておく必要がある．今回は単純に M, ϕ, x, y を固定すればよく，

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \lim_{a\to 0} \frac{1}{a^2} G\Big(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; Ma\Big) \tag{3.18}$$

とすればよい．(3.17) において，$\hat{k} = ka$ のように置換すると

$$\begin{aligned} G\Big(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; Ma\Big) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{a^4\,\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ika\cdot(x/a-y/a)}}{4\sum_\mu \sin^2\frac{k_\mu a}{2} + M^2 a^2} \\ &= a^2 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{\sum_\mu k_\mu^2 (\sin(k_\mu a/2)/(k_\mu a/2))^2 + M^2} \end{aligned}$$

となるから，2 点相関関数は

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{k^2 + M^2} \tag{3.20}$$

と得られる．

残りの部分，何やら連続極限をとるときのお作法の話をしているようだが，本当に理解できなかったので割愛．ごめんなさい．

4　格子上の Fermion

格子状の自由スカラー場の議論は非常に単純であった．しかし，ここでの目的は，クォークやグルーオンの相互作用を記述する QCD を格子上で定式化することであったので，Fermion やゲージ場を格子上で扱うための手続きを学ぶ必要がある．時空格子上のゲージ場は非常にエレガントに定式化される一方で，Fermion の定式化は単純明快でなく，自由 Dirac 場の段階で既に困難が生じる．精神衛生を考慮するならゲージ場について先に議論すべきなのだろうが，ついさっきスカラー場について議論したところなのだから，他の物質場について議論するというのが自然なお気持ちであろう．というわけで，Fermion の「ダブリング」問題を取り扱う方法として，最もよく知られた 2 つの方法を紹介しよう．

4.1　ダブリング問題

まず，自由 Dirac 場を格子定式化するうえで生じる困難について紹介しよう．

まず，Mincowski 空間における Dirac 方程式:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi(x) = 0$$

を考える．γ^μ は 4 次の Dirac 行列とする．$\psi, \bar{\psi}(:= \psi^\dagger \gamma^0)$ の運動方程式は，それぞれの変数に関する作用

$$S_F[\psi, \bar{\psi}] = \int \mathrm{d}^4 x\, \delta\psi\,(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi(x)$$

の独立な変化から得られる．量子論においては，ψ と $\psi^\dagger$ は同時刻正準反交換関係

$$\{\Psi_\alpha(\boldsymbol{x}, t), \Psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{y}, t), =\}\, \delta_{\alpha,\beta}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

を満たす演算子 $\Psi, \Psi^\dagger$ に置き換えられる．Green 関数の経路積分表示は

$$\langle\Omega| T(\Psi_\alpha(x)\cdots\bar{\Psi}_\beta(y)\cdots)|\Omega\rangle = \frac{\int D\bar{\psi}D\psi\psi_\alpha(x)\cdots\bar{\psi}(y)\cdots e^{iS_F}}{\int D\bar{\psi}D\psi e^{iS_F}}$$

で与えられる．これを Euclid 化の手続きにしたがって書き直すと，

$$\langle\psi_\alpha(x)\cdots\bar{\psi}_\beta(y)\cdots\rangle = \frac{\int D\bar{\psi}D\psi\psi_\alpha(x)\cdots\bar{\psi}(y)\cdots e^{-S_F^{(\mathrm{Eucl.})}[\psi,\bar{\psi}]}}{\int D\bar{\psi}D\psi e^{-S_F^{(\mathrm{Eucl.})}[\psi,\bar{\psi}]}} \tag{4.1}$$

となる．このとき，Dirac の γ 行列 γ_μ^E $(\mu = 1,2,3,4)$ を $\gamma_i^E = -i\gamma^i, \gamma_4^E = \gamma^0$ で定義しなおすと，これは反交換関係

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu,\nu}$$

を満たす．これを用いて，Euclid 定式化による作用は

$$S_F^{(\mathrm{Eucl.})} = \int \mathrm{d}^4x\, \bar{\psi}(x)(\gamma_\mu^E\partial_\mu + M)\psi(x) \tag{4.2}$$

で与えられる．

続いて，時空間格子を導入する．場 $\psi, \bar{\psi}$ は格子上の点 na において値をもち，

$$D\bar{\psi}D\psi = \left(\prod_{\alpha,n}\mathrm{d}\bar{\psi}_\alpha(na)\right)\left(\prod_{\beta,m}\mathrm{d}\psi_\beta(ma)\right)$$

となる．さらに，次のような手続きで無次元量への書き換えを行う:

$$\begin{aligned} M &\to \frac{1}{a}\hat{M}, \\ \psi_\alpha(x) &\to \frac{1}{a^{3/2}}\hat{\psi}_\alpha(n), \\ \bar{\psi}_\alpha(x) &\to \frac{1}{a^{3/2}}\hat{\bar{\psi}}_\alpha(n), \\ \partial_\mu\psi_\alpha(x) &\to \frac{1}{a^{5/2}}\frac{1}{2}\Big(\hat{\psi}_\alpha(n+\hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n-\hat{\mu})\Big). \end{aligned} \tag{4.3a}$$

このとき，作用 (4.2) は

$$\begin{aligned} S_F &= \sum_{n,m,\alpha,\beta}\hat{\bar{\psi}}_\alpha(n)K_{\alpha,\beta}(n,m)\hat{\psi}_\beta(m), \\ K_{\alpha,\beta}(n,m) &= \sum_\mu \frac{1}{2}(\gamma_\mu)_{\alpha,\beta}(\delta_{m,n+\hat{\mu}} - \delta_{m,n-\hat{\mu}}) + \hat{M}\delta_{m,n}\delta_{\alpha,\beta} \end{aligned} \tag{4.4}$$

と書きかえられる．

この作用を用いると，格子相関関数は

$$\begin{aligned} \langle\hat{\psi}_\alpha(n)\cdots\hat{\bar{\psi}}_\beta(m)\cdots\rangle &= \frac{\int D\hat{\bar{\psi}}D\hat{\psi}\hat{\psi}_\alpha(n)\cdots\hat{\bar{\psi}}_\beta(m)\cdots e^{-S_F}}{\int D\hat{\bar{\psi}}D\hat{\psi}e^{-S_F}}, \\ D\hat{\bar{\psi}}D\hat{\psi} &= \left(\prod_{n,\alpha}\mathrm{d}\hat{\bar{\psi}}_\alpha(n)\right)\left(\prod_{m,\beta}\mathrm{d}\hat{\bar{\psi}}_\beta(m)\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

で与えられる．例によって，生成汎関数

$$Z[\eta,\bar{\eta}]=\int D\bar{\hat{\psi}}D\hat{\psi}e^{-S_F+\sum_{n,\alpha}\left(\bar{\eta}_\alpha(n)\hat{\psi}_\alpha(n)+\bar{\hat{\psi}}_\alpha(n)\eta_\alpha(n)\right)} \tag{4.6}$$

を適当なパラメータについて微分することで，相関関数を計算することができる．なお，パラメータ $\eta_\alpha(n),\bar{\eta}_\alpha(n)$ はグラスマン代数の元であることに注意されたい．(4.6) の積分は容易に実行でき，

$$Z[\eta,\bar{\eta}]=\mathrm{det}Ke^{-\sum_{n,m,\alpha,\beta}\bar{\eta}_\alpha K(n)^{-1}_{\alpha,\beta}(n,m)\eta_\beta(m)}$$

が得られる．これにより，2 点相関関数は

$$\langle\hat{\psi}_\alpha(n)\bar{\hat{\psi}}_\beta(m)\rangle=K^{-1}_{\alpha,\beta}(n,m)$$

と得られる．

最後に，連続極限をとってみよう．ここでは，

$$\langle\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a^3}G_{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b};Ma\right)$$

を計算すればよい．3 章と同じ手続きで連立方程式:

$$\sum_{\lambda,l}K^{-1}_{\alpha,\lambda}(n,l)K_{\lambda,\beta}(l,m)=\delta_{\alpha,\beta}\delta_{n,m}$$

を解くことで，この逆行列の Fourier 成分が求まり，

$$\begin{aligned}\langle\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle&=\lim_{a\to 0}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\left(-i\sum_\mu\gamma_\mu\tilde{\tilde{p}}_\mu+M\right)_{\alpha,\beta}}{\sum_\mu\tilde{\tilde{p}}_\mu^2+M^2}e^{ip\cdot(x-y)},\\ \tilde{\tilde{p}}_\mu&=\frac{1}{a}\sin(p_\mu a)\end{aligned} \tag{4.7}$$

が得られる．$a\to 0$ の極限で $\tilde{\tilde{p}}_\mu\to p_\mu$ となるので，この極限は自由スカラー場と同様の結果を与えるように思われる．しかし，自由スカラー場の結果とは異なり，$\tilde{\tilde{p}}_\mu$ は $p_\mu=\pi/a$ という零点をもつ．このために，4 次元では 16 個の零点が存在する．これらの領域では，π/a のオーダーの高運動量励起を含み，単一粒子のプロパゲータに似た形の運動量分布関数を生じる．即ち，16 個の粒子を記述することになってしまっているが，このうちの 15 個は連続空間での理論と整合しない，格子化に由来する人工物である．より一般的には，d 次元時空を記述する際には，2^d 個の粒子からの寄与が含まれる．

これらの仮想粒子「ダブラー」からの寄与は，連続空間での QED の結果と整合するためには必要である．Fermion の質量がゼロの場合，QED の作用は大域的なカイラル変換:

$$\psi\to e^{i\theta\gamma_5}\psi,\quad \bar{\psi}\to\bar{\psi}e^{i\theta\gamma_5} \tag{4.8}$$

の下で不変である．ここで，θ はパラメータ，$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ である．これは保存された軸ベクトル流の存在を意味するが，量子ゆらぎのためにこのカレントは異常な発散をもつ．一方，格子正則化理論においては，このような対称性は，このカレントが任意の格子間隔に対して厳密に保存されることを意味する．これを達成するために，格子は連続体には存在しない余計な励起 (ダブラー) を発生させ，これにより，異常な発散を打ち消すということをしているのである．

4.2 Fermion ダブリングに関する議論

いくつかの例を挙げて Fermion ダブリングの問題のエッセンスを論じてみる．

例 1

まず，次の固有値方程式を考える:

$$-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \lambda f(x).$$

この解は $f_\lambda(x) = f_\lambda(0)e^{i\lambda x}$ で与えられる．次に，これを離散化した方程式を考える．格子間隔を a とし，$f(x=na)$ をあらためて $f(n)$ と置きなおそう．方程式は

$$-i(f(n+1) - f(n)) = \hat{\lambda} f(n)$$

となる．なお，固有値を格子間隔単位で置きなおした: $\hat{\lambda} = \lambda a$．この差分方程式の解は

$$f_{\hat{\lambda}}(n) = e^{n\ln\left(a+i\hat{\lambda}\right)} f_{\hat{\lambda}}(0)$$

となる．連続極限は，$n = x/a, \hat{\lambda} = \lambda a$ を代入し，x, λ を固定して $a \to 0$ の極限をとることで計算でき，その結果は元の固有値方程式の解に一致する．

続いて，微分演算子の Hermite 性を保ったまま方程式を離散化することを考える．このときは，中心差分を用いて

$$-\frac{i}{2}(f(n+1) - f(n-1)) = \hat{\lambda}$$

とすればよい．この方程式は仮想的な解: $f_{\hat{\lambda}}(n) = Ce^{i\hat{p}n}$ を代入することで解くことができる．$\hat{p}$ は

$$\sin\hat{p} = \hat{\lambda}$$

を満たす．与えられた正 (負) の固有値 $\hat{\lambda}$ に対し，$\hat{p}$ は $0 < \hat{p} < \pi/2$ $(-\pi/2 < \hat{p} < 0)$ および $\pi/2 < \hat{p} < \pi$ $(-\pi < \hat{p} < -\pi/2)$ に 1 つずつ解をもつ．これらに対応し，固有関数は

$$\hat{f}^{(1)}_{\hat{\lambda}}(n) = Ae^{i(\arcsin\hat{\lambda})n}, \tag{4.10a}$$

$$\hat{f}^{(2)}_{\hat{\lambda}}(n) = B(-1)^n e^{-i(\arcsin\hat{\lambda})n} \tag{4.10b}$$

の 2 つ存在する．(4.10a) は連続極限で元の固有値方程式の解を再現するが，(4.10b) は因子 $(-1)^n$ の影響により連続極限をもたない．「ダブラー」解 (4.10b) は格子微分に対称形を使った結果生じていることに注意されたい．この解を無視したくとも，そうしてしまうと，固有関数は完全系をなさなくなってしまう．

例 2

微分演算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + M$ の Green 関数を考える:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + M\right)G(t,t') = \delta(t-t'). \tag{4.11}$$

一般解は

$$G(t,t') = Ae^{-M(t-t')} + \theta(t-t')e^{-M(t-t')} \tag{4.12}$$

で与えられる．

この方程式を対称形の格子微分に置き換え，$\hat{M} = Ma$ のように無次元化すると，

$$\sum_{n'} \left(\frac{1}{2}(\delta_{n+1,n'} - \delta_{n-1,n'}) + \hat{M}\delta_{n,n'} \right) G(\hat{n'}, m) = \delta_{n,m} \tag{4.13}$$

となる．右辺を 0 とした同次方程式の一般解は

$$\hat{G}^{(0)}_{\hat{M}} = Ae^{-(n-m)\mathrm{arcsinh}\hat{M}} + B(-1)^{n-m}e^{(n-m)\mathrm{arcsinh}\hat{M}} \tag{4.14}$$

である．第 1 項の連続極限は (4.12) の第 1 項に一致するが，第 2 項の連続極限は存在しない．

非同次方程式 (4.13) は Fourier 変換の手続きにより解くことができる．即ち，

$$\hat{G}^{(\mathrm{part})}_{\hat{M}}(n,m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\hat{p}}{2\pi} \hat{G}(\hat{p}) e^{i\hat{p}(n-m)}$$

のように Fourier 変換し，これと (4.13) から，$\hat{G}(\hat{p})$ の表式が得られて，

$$\hat{G}^{(\mathrm{part})}_{\hat{M}}(n,m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\hat{p}}{2\pi} \frac{e^{i\hat{p}(n-m)}}{i\sin\hat{p} + \hat{M}} \tag{4.15}$$

となる．この積分は，積分変数を $z = e^{i\hat{p}}$ と置き換えることで，$z = 0$ を中心とする単位円上を反時計回りする経路 C 上の積分

$$\hat{G}^{(\mathrm{part})}_{\hat{M}}(n,m) = \frac{1}{\pi i} \int_C \mathrm{d}z \, \frac{z^{n-m}}{z^2 + 2\hat{M}z - 1}$$

に書き換えられる．これを実行して[*2]，

$$\hat{G}^{(\mathrm{part})}_{\hat{M}}(n,m) = \theta(n-m) \frac{e^{-(n-m)\mathrm{arcsinh}\hat{M}}}{\sqrt{1+\hat{M}^2}} + (-1)^{n-m}\theta(m-n) \frac{e^{(n-m)\mathrm{arcsinh}\hat{M}}}{\sqrt{1+\hat{M}^2}} \tag{4.16}$$

を得る．これについても，第 1 項の連続極限は (4.12) の第 2 項に一致するが，第 2 河野連続極限は存在しない．

ここでまでの単純な例は，方程式の離散化の仕方が解のダブリングにつながるということを示している．ダブラーのような解は，あるサイトから次のサイトに進むにつれて符号が変化する位相因子の出現という形で現れる．Dirac プロパゲータへのダブラーの寄与も同様に表れると予想される．

Fermion プロパゲータ

(4.7) からはじめよう．ダブラー解を抜き出す手順は次の通りである．まず，各 p_μ に関する積分区間を $|p_\mu| < \pi/(2a)$ と $\pi/(2a) < |p_\mu| < \pi/a$ の 2 区間に分ける．前者についてはそのまま，後者については積分変数を $p = \pi/a + p'$ または $p = -\pi/a + p'$ で置換することで，積分区間を $|p_\mu| < \pi/(2a)$ に置き換えられる．

[*2] 計算過程は割愛．

これによって，積分区間が $|p_\mu| < \pi/(2a)$ の 16 個の積分の和に分けられる．積分変数の置換によって生じる位相因子に注意すると，(4.7) は

$$\begin{aligned}\langle\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle &= \lim_{a\to 0}\sum_{\bar{p}} e^{i\bar{p}\cdot(n-m)}\int_{-\pi/(2a)}^{\pi/(2a)}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\left(-i\sum_\mu \delta_{\bar{p}_\mu}\gamma_\mu\tilde{\tilde{p}}+M\right)_{\alpha,\beta}}{\sum_\mu \tilde{\tilde{p}}_\mu^2+M^2}e^{ip\cdot(x-y)}, \\ \delta_{\bar{p}_\mu} &= e^{i\bar{p}_\mu}\end{aligned} \tag{4.20}$$

となる．ただし，$\bar{p}$ についての和は $(0,0,0,0),(\pi,0,0,0),\cdots,(\pi,\pi,0,0),\cdots,(\pi,\pi,\pi,0),\cdots,(\pi,\pi,\pi,\pi)$ の 16 点に渡ってとる．位相因子の存在により，この 16 項のうち，連続極限が存在するのは $\bar{p}=(0,0,0,0)$ に対応する項のみである．残りの 15 項について，その積分の構造は $\bar{p}=(0,0,0,0)$ のものと同じであり，γ 行列の形のみが異なっている．そこで，γ 行列の変換行列 $\mathcal{T}_{\bar{p}}$ を定義してみよう:

$$\mathcal{T}_{\bar{p}}\gamma_\mu\mathcal{T}_{\bar{p}}^{-1} = \delta_{\bar{p}_\mu}\gamma_\mu. \tag{4.21}$$

これらは，$\bar{p}$ の非可変成分の数によって異なる構造をもつ．そこで，添え字に対応する γ 行列の符号を反転させる $\mathcal{T}_{\bar{p}}$ を表すものとして，$\tilde{\mathcal{T}}_\mu,\tilde{\mathcal{T}}_{\mu,\nu},\tilde{\mathcal{T}}_{\mu,\nu,\lambda},\tilde{\mathcal{T}}_{\mu,\nu,\lambda,\rho}$ を導入する．これらは具体的には $\tilde{\mathcal{T}}_\mu=\gamma_\mu\gamma_5,\tilde{\mathcal{T}}_{\mu,\nu}=\gamma_\mu\gamma_\nu,\tilde{\mathcal{T}}_{\mu,\nu,\lambda}=\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_5,\tilde{\mathcal{T}}_{\mu,\nu,\lambda,\rho}=\gamma_5$ で与えられる．連続極限に近づけると，プロパゲータは

$$\begin{aligned}S_F(x-y) &\approx \sum_{\bar{p}} e^{i\bar{p}\cdot\frac{x-y}{a}}\mathcal{T}_{\bar{p}}\left(\int_{-\pi/(2a)}^{\pi/(2a)}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-i\sum_\mu\delta_{\bar{p}_\mu}\gamma_\mu\tilde{\tilde{p}}+M}{\sum_\mu\tilde{\tilde{p}}_\mu^2+M^2}e^{ip\cdot(x-y)}\right)\mathcal{T}_{\bar{p}}^{-1} \\ &= \sum_{\bar{p}} V_{\bar{p}}(x)S_F^{(0)}(x-y)V_{\bar{p}}^{-1}(y), \\ V_{\bar{p}}(z) &= e^{i\bar{p}\cdot\frac{z}{a}}\mathcal{T}_{\bar{p}}, \\ S_F^{(0)}(x-y) &= \int_{-\pi/(2a)}^{\pi/(2a)}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-i\sum_\mu\delta_{\bar{p}_\mu}\gamma_\mu\tilde{\tilde{p}}+M}{\sum_\mu\tilde{\tilde{p}}_\mu^2+M^2}e^{ip\cdot(x-y)}\end{aligned} \tag{4.22}$$

となる．

ここまで見てきた相関関数の構造は，格子作用の対称性に密接に関連している．関係式

$$V_{\bar{p}}(z)\gamma_\mu V_{\bar{p}}^{-1}(z\pm\hat{\mu}a) = e^{\mp\bar{p}_\mu}\mathcal{T}_{\bar{p}}\gamma_\mu\mathcal{T}_{\bar{p}}^{-1} = e^{\mp\bar{p}_\mu}e^{\bar{p}_\mu}\gamma_\mu = \gamma_\mu$$

により，格子作用

$$S = \frac{1}{2}\sum_x a^4\bar{\psi}(x)\gamma_\mu(\psi(x+\hat{\mu}a)-\psi(x-\hat{\mu}a)) + M\sum_x a^4\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

は変換

$$\psi(x)\to V_{\bar{p}}(x)\psi(x),\quad \bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}(x)V_{\bar{p}}^{-1}(x)$$

のもとで不変に保たれる．運動量空間において，演算子 $V_{\bar{p}}$ は $\bar{p}$ による運動量のシフトに対応する．そのため，Brillouin ゾーンの 16 個の頂点に対応して，16 個の対称変換が存在し，これによって Fermion ダブリングが起こっているのである．

最後に，ニュートリノのように明確なカイラル性をもつ質量のない場におけるナイーブな格子 Fermion の 2 点相関関数に，いかにしてダブラーが生じるのかを見ていく．この場は射影演算子 $P_L=(1-\gamma_5)/2$ の固有状態である．2 点相関関数は

$$\langle\psi_L(x)\bar{\psi}_L(y)\rangle = P_L\left|\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\rangle P_R$$

で定義される．ただし，$\psi_L(n) = P_L\psi(n), P_R = (1+\gamma_5)/2$ である[*3]．γ_5 が γ 行列と反交換であることから，$\gamma_\mu P_R = P_L\gamma_\mu$ であり，また，$P_L^2 = P_L$ であるから，

$$\begin{aligned}\langle\psi_L(x)\bar{\psi}_L(y)\rangle &= P_L\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-i\gamma_\mu p_\mu}{p^2}e^{ip\cdot(x-y)}P_R = P_L^2\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-i\gamma_\mu p_\mu}{p^2}e^{ip\cdot(x-y)}\\ &= P_L\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-i\gamma_\mu p_\mu}{p^2}e^{ip\cdot(x-y)}\end{aligned}$$

である．一方，格子版の 2 点相関関数は

$$\langle\psi_L(x)\bar{\psi}_L(y)\rangle_{\mathrm{latt.}} = \sum_{\tilde{p}}e^{i\tilde{p}\cdot\frac{x-y}{a}}P_L\int_{-\pi/(2a)}^{\pi/(2a)}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathcal{T}_{\tilde{p}}\frac{-i\sum\gamma_\mu\tilde{\tilde{p}}_\mu}{\sum_\mu\tilde{\tilde{p}}_\mu^2}\mathcal{T}_{\tilde{p}}^{-1}e^{ip\cdot(x-y)} \tag{4.23}$$

で与えられる．ここで，γ_5 の定義から明らかに

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\tilde{p}}(1-\gamma_5)\mathcal{T}_{\tilde{p}}^{-1} &= 1-\epsilon_{\tilde{p}}\gamma_5,\\ \epsilon_{\tilde{p}} &= \prod_\mu\delta_{\tilde{p}_\mu}\end{aligned} \tag{4.24}$$

であるから，変換行列の間に P_L を入れて，

$$\langle\psi_L(x)\bar{\psi}_L(y)\rangle_{\mathrm{latt.}} = \sum_{\tilde{p}}e^{i\tilde{p}\cdot\frac{x-y}{a}}\mathcal{T}_{\tilde{p}}\left(\int_{-\pi/(2a)}^{\pi/(2a)}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{1-\epsilon_{\tilde{p}}\gamma_5}{2}\frac{-i\sum\gamma_\mu\tilde{\tilde{p}}_\mu}{\sum_\mu\tilde{\tilde{p}}_\mu^2}e^{ip\cdot(x-y)}\right)\mathcal{T}_{\tilde{p}}^{-1} \tag{4.25}$$

を得る．ここで，$\epsilon_{\tilde{p}} = 1$ となる運動量 $\tilde{p}$ が 8 つ，$\epsilon_{\tilde{p}} = -1$ となる運動量 $\tilde{p}$ が 8 つあるから，和は，連続極限で左巻き相関関数の形式をとる 8 つと右巻き相関関数の形式をとる 8 つの，計 16 個の積分からなる．ただし，これらのうちの 15 個は，ダブラーの寄与として特徴的な位相因子がかかる．

これまでの考察で強調してきたように，ダブリング問題の起源は，格子微分として反 Hermite で対称的な形式を採用していたことにある．このとき，格子定数は a である一方で，格子微分ではその 2 倍を含んでいる．右微分

$$\hat{\partial}_\mu^R\hat{\psi}(n) = \hat{\psi}(n+\hat{\mu}) - \hat{\psi}(n), \tag{4.26a}$$

または，左微分

$$\hat{\partial}_\mu^L\hat{\psi}(n) = \hat{\psi}(n) - \hat{\psi}(n-\hat{\mu}) \tag{4.26b}$$

を用いると，格子微分は格子定数そのものを含み，ダブリング問題は起こらない．この場合，$\hat{\partial}_\mu^R\hat{\psi}(n)$ の Hermite 共役は $-\hat{\partial}_\mu^L\hat{\psi}(n)$ となる．しかしながら，詳細な計算によると，相互作用が存在する場合に左または右微分を用いると，QED における Fermion 自己エネルギーや頂点関数に非共変な寄与が生じ，理論が正規化不可能なものになってしまう．

Hermite 性・局所性・並進対称性を満たす格子正則化においてダブリング現象が必ず起こることが，Nielsen と二宮によって示されている[*4]．この定理は，Fermion の質量が消失する場合，カイラル対称性を破ることな

---

*3

$$P_L^\dagger = \frac{1}{2}(1-\gamma_5^\dagger) = \frac{1}{2}(1-\gamma_5) = P_L$$

および γ_5 が γ_0 と反交換であることから，

$$\bar{\psi}_L(y) = \overline{P_L\psi(y)} = (P_L\psi(y))^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger(y)P_L^\dagger\gamma_0 = \psi^\dagger(y)P_L\gamma_0 = \psi^\dagger(y)\gamma_0P_R = \bar{\psi}(y)P_R.$$

*4 Nielsen-二宮の定理として知られており，正確には，格子 Fermion の作用が

く Fermion ダブリングを解消することは出来ないというものである．逆に，カイラル対称性を破ることを犠牲にすれば，ダブリングを解決できるのではないかという可能性が示唆される．この提案は Wilson によってなされたもので，ダブリングを扱う最も一般的な 2 つの方法の 1 つである．

4.3 Wilson Fermion

同じ連続極限を与える格子作用は数多く存在する．その任意性に注目し，Brillouin ゾーンの端にある (4.7) の分母の零点を格子定数に比例する量だけ持ち上げるように作用 (4.4) を修正することを考える．これは，同じ作用を与えるという点では正当な手順に見えるが，Fermion がもつカイラル対称性明示的に破っているという点で特殊な操作である．これは Fermion ダブリングを解消し，正しい連続極限を得るために必要な代償である．

まず，作用 (4.4) に，ナイーブな連続極限で消え，カイラル変換のもとで普遍でない項を付け加える．具体的には，

$$S_F^{(W)} = S_F - \frac{r}{2}\sum_n \hat{\bar{\psi}}(n)\hat{\Box}\hat{\psi}(n) \tag{4.27}$$

のようにする．ただし，r は Wilson パラメータ，$\hat{\Box}$ は (3.7) のように定義される 4 元格子 Laplacian である．連続極限に戻す際には $\hat{\psi} = a^{3/2}\psi, \hat{\Box} = a^2\Box$ のように置き換えるので，追加項は a に比例して消える．$\hat{\Box}\hat{\psi}(n)$ を (3.7) のように置き換えると，これまでの議論と同様に作用を

$$\begin{aligned} S_F^{(W)} &= \sum_{n,m} \hat{\bar{\psi}}_\alpha(n) K_{\alpha,\beta}^{(W)}(n,m)\hat{\psi}_\beta(m), \\ K_{\alpha,\beta}^{(W)}(n,m) &= (\hat{M}+4r)\delta_{n,m}\delta_{\alpha,\beta} - \frac{1}{2}\sum_{\hat{\mu}}((r-\gamma_\mu)_{\alpha,\eta}\delta_{m,n+\hat{\mu}} + (r+\gamma_\mu)_{\alpha,\beta}\delta_{m,n-\hat{\mu}}) \end{aligned} \tag{4.28}$$

と書き直す．$r \neq 0$ において，たとえ $\hat{M} \to 0$ としたとしても，カイラル対称性は破れている．

連続極限において，作用 (4.28) による 2 点相関関数は

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle &= \lim_{a\to 0}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(-i\gamma_\mu \tilde{\tilde{p}}_\mu + M(p))}{\sum_\mu \tilde{\tilde{p}}_\mu^2 + M(p)^2} e^{ip\cdot(x-y)}, \\ M(p) &= M + \frac{2r}{a}\sum_\mu \sin^2\left(\frac{p_\mu a}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.29}$$

となる．この表式を見ると，任意の固定値 p_μ に対して $M(p)$ は $a \to 0$ で M に近づく．一方，Brillouin ゾーンの角の付近では，格子間隔をゼロにすると $M(p)$ は発散する．これにより，Brillouin ゾーンの角が分母の零点ではなくなり，ダブリングが解消される．しかし，$M = 0$ におけるカイラル対称性は破れてしまい，QCD におけるカイラル対称性の自発的な破れを考察するためにはこの方法は不向きである．そこで，スタッガード Fermion 定式化が導入される．

---

1. 格子上の並進対称性
2. カイラル対称性
3. Hermite 性
4. Fermion 場の双一次形式
5. 相互作用の局所性

の 5 つをすべて満たすとき，Fermion ダブリングが生じるというものである．

4.4 スタッガード Fermion

Fermion ダブリングは，Brillouin ゾーンの角で相関関数が消えてしまうという事実によるのであった．このことは，Brillouin ゾーンを小さくすることで，即ち，有効格子間隔を 2 倍にすることによって，不要な Fermion モードを除去できる可能性を示唆している．これは，

1. 各 Grassmann 変数の有向格子間隔が基本格子間隔の 2 倍になるように，Fermion の自由度を格子状に分布させることができる．
2. ナイーブな連続極限において，作用が望ましい連続な形式に収束する．

という条件が満たされている場合，原理的には達成できる．したがって，まず，有効格子間隔を基本格子間隔の 2 倍にするのに必要な自由度の数を考える．このために，d 次元時空格子を考え，それを d 次元単位超立方体に分割する．与えられた超立方体内の各部位に異なる自由度を配置し，この構造を格子全体で周期的に繰り返す．すると，各自由度に対して有効な格子間隔は 2 倍になる．教科書図 4-2 は 2 次元格子の場合を表している．超立方体内には 2^d 個のサイトがあるが，Dirac 場の成分は (偶数時空次元では)$2^{d/2}$ しかないので，Brillouin ゾーンを半分にするためには，$2^{d/2}$ 個の異なる Dirac 場が必要である．したがって，4 次元時空では，このような処方は 2^2 個の異なるフレーバーのクォークを記述するのに適しているかもしれない．f をフレーバー，α をスピノルのインデックスとし，対応する Dirac 場を ψ_α^f とする．単位超立方体のサイトは，格子作用がナイーブな極限においてクォークのフレーバーごとに 1 つずつの自由電子系作用の和に還元されるように選ばれた場 ψ_α^f の線形結合によって占有されることになる:

$$S_f^{(stag.)} \to \int \mathrm{d}^4x \sum_{\alpha,\beta,f} \psi_\alpha^f(x)(\gamma_\mu\partial_\mu + M)_{\alpha\beta}\psi_\beta^f(x). \tag{4.30}$$

スタッガード Fermion の定式化では，単位超立方体内の格子サイトを構成する様々な 1 成分場からクォーク場を構築し，格子対称性を研究することが大部分を占める．以下，スタッガード Fermion の定式化に至るまでの主な手順を説明する．これらは Kluberg-Stern, Morel, Napoly, Petersson の研究にしたがう．

自由 Dirac 場の格子上のナイーブな作用を考える:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{n,\mu}(\bar{\hat{\psi}}(n)\gamma_\mu\hat{\psi}(n+\hat{\mu}) - \bar{\hat{\psi}}(n)\gamma_\mu\hat{\psi}(n-\hat{\mu})) + \hat{M}\sum_n \bar{\hat{\psi}}(n)\hat{\psi}(n). \tag{4.31}$$

次のように変数の局所変換を施す:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(n) &= T(n)\chi(n), \\ \bar{\hat{\psi}}(n) &= \bar{\chi}(n)T^\dagger(n). \end{aligned} \tag{4.32}$$

ここで，$T(n)$ は $2^{d/2}$ 次のユニタリ行列で，

$$T^\dagger(n)\gamma_\mu T(n+\hat{\mu}) = \eta_\mu(n) \tag{4.33}$$

を満たすものとする (η_μ は c-number)．これにより，作用はスピン対角化される．行列

$$T(n) = \gamma_1^{n_1}\gamma_2^{n_2}\cdots\gamma_d^{n_d}\mathbf{1} \tag{4.34}$$

は (4.33) を満たしており，それに付随する $\eta_\mu(n)$ は

$$\eta_\mu(n) = (-1)^{n_1+n_2+\cdots+n_{\mu-1}}, \quad \eta_1(n) = 1 \tag{4.35}$$

である[*5]．場 $\chi(n), \bar{\chi}(n)$ を用いると，作用 (4.31) は

$$S = \sum_{n,\alpha,\mu} \eta_\mu(n)\bar{\chi}_\alpha(n)\hat{\partial}_\mu \chi_\alpha(n) + \hat{M}\sum_{n,\alpha} \bar{\chi}_\alpha(n)\chi_\alpha(n)$$

となる．ここで，Dirac 行列 γ_μ が取り除かれたので，原理的には α に関する和を任意の可能な値 $\alpha = 1, 2, \cdots, k$ に渡ってとることができる．最小の選択は $k = 1$ なので，以降このインデックスを省略する．対応する作用

$$S_F^{(\mathrm{stag.})} = \frac{1}{2}\sum_{n,\mu} \eta_\mu(n)(\bar{\chi}(n)\chi(n+\hat{\mu}) - \bar{\chi}(n)\chi(n-\hat{\mu})) + \hat{M}\sum_{n} \bar{\chi}(n)\chi(n) \tag{4.36}$$

は 1 格子サイトあたり自由度を 1 つのみ含んでおり，元の Dirac 構造の名残は位相 $\eta_\mu(n)$ のみである．(4.36) は相互作用がない場合のスタッガード Fermion の作用である．この式が物理的な意味を持つためには，連続極 g 電において，フレーバー Dirac 場成分 ψ_α^f が単位超立方体内の格子サイトに存在する 1 成分場の線形結合として与えられる式 (4.30) で書けることを示さなければならない．したがって，格子間隔が有限の場合，場 ψ_α^f の時空座標は，考慮される特定の超立方体の位置を示すものになる．

原点を $\hat{x}_\mu = 2N_\mu$ $(N_\mu \in \mathbb{Z})$ とする超立方体を考える．この超立方体の 2^d 個のサイトの格子座標は 0 または 1 をとる変数 ρ_μ を用いて

$$\hat{r}_\mu = 2N_\mu = \rho_\mu$$

と書ける．これを考慮し，場 $\chi(n)$ を

$$\chi_\rho(N) := \chi(2N + \rho) \tag{4.37}$$

で書き直す．$N = (N_1, N_2, \cdots, N_d)$ は格子間隔 $2a$ の時空格子点を，ρ は新しい場 χ の 2^d 個の成分を表している．これらの成分から，適当な線形結合をよることにより，$2^{d/2}$ 個のフレーバー Dirac 場

[*5] (4.33) で与えられる変換行列 $T(n)$ に対して，$\mu \neq 1$ であれば

$$\begin{aligned}
\eta_\mu(n)\mathbf{1} &= T^\dagger \gamma_\mu T(n+\hat{\mu}) \\
&= (\gamma_1^{n_1}\gamma_2^{n_2}\cdots\gamma_d^{n_d})^\dagger \gamma_\mu (\gamma_1^{n_1}\gamma_2^{n_2}\cdots\gamma_\mu^{n_\mu+1}\cdots\gamma_d^{n_d}) \\
&= \gamma_d^{n_d}\cdots\gamma_2^{n_2}\gamma_1^{n_1} \underbrace{\gamma_\mu\gamma_1^{n_1}}_{=(-1)^{n_1}\gamma_1^{n_1}\gamma_\mu} \gamma_2^{n_2}\cdots\gamma_\mu^{n_\mu+1}\cdots\gamma_d^{n_d} \\
&= (-1)^{n_1}\gamma_d^{n_d}\cdots\gamma_2^{n_2}\underbrace{\gamma_1^{2n_1}}_{=\mathbf{1}}\gamma_\mu\gamma_2^{n_2}\cdots\gamma_\mu^{n_\mu+1}\cdots\gamma_d^{n_d} \\
&= (-1)^{n_1}\gamma_d^{n_d}\cdots\gamma_2^{n_2}\gamma_\mu\gamma_2^{n_2}\cdots\gamma_\mu^{n_\mu+1}\cdots\gamma_d^{n_d} \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{n_1+n_2+\cdots+n_{\mu-1}}\gamma_d^{n_d}\cdots\gamma_{\mu+1}^{n_{\mu+1}}\underbrace{\gamma_\mu^{n_\mu}\gamma_\mu\gamma_\mu^{n_\mu+1}}_{=\mathbf{1}}\gamma_{\mu+1}^{n_{\mu+1}}\cdots\gamma_d^{n_d} \\
&= (-1)^{n_1+n_2+\cdots+n_{\mu-1}}\gamma_d^{n_d}\cdots\gamma_{\mu+2}^{n_{\mu+2}}\underbrace{\gamma_{\mu+1}^{n_{\mu+1}}\gamma_{\mu+1}^{n_{\mu+1}}}_{=\mathbf{1}}\gamma_{\mu+1}^{n_{\mu+2}}\cdots\gamma_d^{n_d} \\
&= (-1)^{n_1+n_2+\cdots+n_{\mu-1}}\gamma_d^{n_d}\cdots\gamma_{\mu+2}^{n_{\mu+2}}\gamma_{\mu+1}^{n_{\mu+2}}\cdots\gamma_d^{n_d} \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{n_1+n_2+\cdots+n_{\mu-1}}\mathbf{1}
\end{aligned}$$

となる．$\mu = 1$ のときも同様の手順により，$\eta_1(n) = 1$ と分かる．

$\psi^f = (\psi^f_\alpha)^{2^{d/2}}_{\alpha=1}$ $(f = 1, \cdots, 2^{d/2})$ を構成する:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^f_\alpha(N) &= \mathcal{N}_0 \sum_\rho (T_\rho)_{\alpha,f} \chi_\rho(N), \\ T_\rho &= \gamma_1^{\rho_1} \gamma_2^{\rho_2} \cdots \gamma_d^{\rho_d}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

企画か定数 $\mathcal{N}_0$ を適当に選ぶことにより，作用 (4.36) は

$$S_F^{(\mathrm{stag.})} = \sum_f \sum_N \bar{\hat{\psi}}^f(N)(\gamma_\mu \hat{\partial}_\mu + \hat{M})\hat{\psi}^f(N) + \cdots \tag{4.39}$$

となる．ここで，格子微分 $\hat{\partial}_\mu$ は新しい格子上のものであることに注意したい．また，$\cdots$ は，ナイーブな連続極限において消える項を表している．格子間隔が有限の場合，これらの項は完全なカイラル群の下で不変ではない．にもかかわらず，$\hat{M} = 0$ の場合，(4.39) は元のカイラル対称群の名残である連続的な $U(1) \times U(1)$ 対称性を保存する．このため，スタッガード Fermion の定式化を使って，格子対称性の自発的な破れと，それに伴う Goldstone 現象を研究することができる．これが Wilson Fermion に対してスタッガード Fermion がもつ利点である．その一方で，スタッガード Fermion は $2^{d/2}$ 重縮退クォークフレーバーをもつ理論の格子版にしかならないが，Wilson 定式化ではフレーバー数に制限がない．

(4.38) を用いると，適切な χ 相関関数の線形結合をとることにより，フレーバークォーク場の相関関数を計算することができる．χ 相関関数は経路積分表示により

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\rho_1}(N_1) \cdots \bar{\chi}_{\rho_l}(N_l) \rangle &= \frac{\int D\bar{\chi} D\chi \chi_{\rho_1}(N_1) \cdots \bar{\chi}_{\rho_l}(N_l) e^{-S_F^{(\mathrm{stag.})}}}{\int D\bar{\chi} D\chi e^{-S_F^{(\mathrm{stag.})}}}, \\ D\bar{\chi} D\chi &= \left(\prod_{\rho,N} \mathrm{d}\bar{\chi}_\rho(N) \right) \left(\prod_{\rho',N'} \mathrm{d}\chi_{\rho'}(N') \right) \end{aligned} \tag{4.40}$$

と書ける．これはシンプルなように見えるが，細部はかなり複雑である．ハドロン物質の性質を研究するために構築する複合場が，連続極限において正しい量子数をもつことを確認しなければならない．特に，これらの作用素によって励起される状態のフレーバー・スピン・パリティの内容を知ることは，多くの労力を要する．