第 13 讲 级数与方程符号求解

（第 9 章 MATLAB 符号计算）

目的:

1、掌握级数符号求和函数

2、将函数展开为泰勒级数

3、掌握代数方程符号求解的方法。

4、掌握微分方程符号求解的方法

———

1. 掌握级数符号求和函数 symsum( )

$\sum_{k=a}^{b} f(k)$=symsum(f,k,a,b)。举例如下：

（1）求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ （该级数收敛）

```
>>syms n;
>>f=1/factorial(n);
>>s=symsum(f,n,1,inf)
s = exp(1)-1
```

（2）求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ （该级数发散）

```
>>syms n;
>>s=symsum(1/n,n,1,inf)
s = inf
```

（3）求和函数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$（级数收敛域为 $|x|<1$）

```
>>syms n x;
>>f=n^2*x^(n-1);
>>s(x)=symsum(f,n,1,inf)
s(x) = piecewise(abs(x) < 1, -(x^2 + x)/(x*(x - 1)^3))
```

上式结果中的 piecewise 是条件定义表达式：

pw=piecewise(cond1,val1,cond2,val2,...)

其含义是：如果条件 condN 成立，那么 pw 的值为 valN，我们通常使用 piecewise 定义分段函数。上题结果中之所以出现 piecewise 是因为级数是有收敛域的，只有当 x 在收敛域内时级数的和函数才存在。如果不想结果中出现 piecewise，可以在求和之前将 x 的取值范围用 assume 语句设置为级数的收敛域，但收敛域需要自己求出来。例如：

```
>>syms n x;
>>assume(abs(x)<1);
>>s(x)=symsum(n^2*x^(n-1),n,1,inf)
s(x) = -(x^2 + x)/(x*(x - 1)^3)
```

注：（1）熟悉 piecewise 后我们可以不设置 x 的取值范围，直接使用 symsum 求和，这样还**可以变相的得到级数的收敛域。**

（2）可以用 assume 函数定义符号自变量的约束条件。

具体 assume 的使用见下表：

real (实数)	assume(x,'real')
rational (有理数)	assume(x,'rational')
positive (正数)	assume(x,'positive')
positive integer (正整数)	assume(x,{'positive','integer'})
less than -1 or greater than 1(小于-1 或者大于 1)	assume(x<-1 | x>1) or assume(abs(x)>1)
an integer from 2 through 10(大于 2 小于 10 的整数)	assume(in(x,'integer') & x>2 & x<10)
not an integer(非整数)	assume(~in(z,'integer'))
not equal to 0(不等于 0)	assume(x ~= 0)
even(偶数)	assume(x/2,'integer')
odd(奇数)	assume((x-1)/2,'integer')

from 0 through 2π	assume(x>0 & x<2*pi)
a multiple of π (π 的倍数)	assume(x/pi,'integer')
可以约束符号表达式	assume(x^2+y>0)

可以使用 assume([x,y,.....],'clear')清除前面定义的对对应变量的约束条件；

可以使用 assumptions 查看当前存在哪些约束。

2. 将函数展开为泰勒级数

matlab 使用 taylor(f)求符号函数 f 的泰勒展式，调用格式为 ：

taylor(f, var, 'name', value)

T=taylor(f(x)):将 f 在 $x=0$ （默认）处展开；

T=taylor(f(x), x, x0)：将 f 在 x0 处展开；

T=taylor(f(x), x, 'order', n)：将 f(x)展开到余项是 n 次幂（不显示余项）。

常见函数 $\sin x$、$\cos x$、$\tan x$、$(1+x)^a$ 、 e^x、$\ln(x+1)$、$\ln(1-x)$、$\frac{1}{1+x}$、$\frac{1}{1-x}$ 的展开式：

```
>>syms x a;
>>n=9;
>>T1=taylor(sin(x),'order',n)
>>T2=taylor(cos(x),'order',n)
>>T3=taylor(tan(x),'order',n)
>>T4=taylor((1+x)^a,'order',n)
>>T5=taylor(exp(x),'order',n)
>>T6=taylor(log(x+1),'order',n)
>>T7=taylor(log(1-x),'order',n)
>>T8=taylor(1/(1+x),'order',n)
>>T9=taylor(1/(1-x),'order',n)
```

3、掌握代数方程符号求解的方法。

matlab 使用 solve()函数求代数方程的符号解，其调用方式为：

（1）solve(eqn):求 eqn=0 的根，求解时将 eqn 的第一默认自变量当变量，其它当常数。

（2）solve(eqn1,eqn2,…,eqnN)：求方程组的根，求解时将各方程共有的前 N 个自变量当变量，其它当常数。

（3）solve(eqn,var)：将指定的 var 当变量求 eqn=0 的根，其它当常数。

（4）solve(eqn1,eqn2,…,eqnN,var1,var2,…,varN)：将指定的 var 当变量求方程组的根，其它当常数。

确定方程默认自变量的方法是 symvar(eqn)，其结果中的变量依次是方程的默认第 1、第 2…自变量。虽然用（1）（2）格式求解比较省事，但推荐用（3）（4）格式，毕竟万一搞错默认自变量就不好了。

注：与符号求解 solve(eqn,var)对应的数值求解函数是 fsolve(fun,x0)，在 matlab 帮助文档中，如果调用格式里的参数用的是 eqn，那么表示这个方程是符号方程，需要先用 syms var 定义符号变量，再用定义好的符号变量设置 eqn。如果调用格式里的参数用的是 fun，那么表示这个方程是数值方程的函数句柄，需要用 m 函数文件或者匿名函数方式定义。

通过下面例题掌握符号方程的表示方法。

例 1：用 solve 函数求方程 $ax^2+bx+c=0$（掌握单个符号方程的建立）

```
>>syms x a b c;
>>eqn=a*x^2+b*x+c==0; % 也可以写为 eqn=[a*x^2+b*x+c==0];
%这一步类似于将方程对象 a*x^2+b*x+c==0 赋给了 eqn，注意建立方程“需要用双等号”。
>>x1=solve(eqn,x)
x1 =
-(b + (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
-(b - (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
```

例 2：用 solve 求解方程组 $\begin{cases} x+y^2=1 \\ x^2-y=1 \end{cases}$（掌握符号方程组的建立）

```
>>syms x y;
>>eqns=[x+y^2-1==0,x^2-y-1==0];
>>[x1,y1]=solve(eqns,[x,y])  %结果有 4 对。
```

x1 = 1 0 5^(1/2)/2 - 1/2	y1 = 0 -1 1/2 - 5^(1/2)/2

- 5^(1/2)/2 - 1/2	5^(1/2)/2 + 1/2

注：如果已经把方程的一边移项到了另一边，那么"==0"可以不输入，即 eqns=[x+y^2-1==0,x^2-y-1==0]可以写为 eqns=[x+y^2-1,x^2-y-1];

也可以直接在 solve 函数中定义方程，比如例 2 可以写为：

```
>>syms x y; >>[x1,y1]=solve(x+y^2-1,x^2-y-1,[x,y])
            或[x1,y1]=solve(x+y^2-1==0,x^2-y-1==0,[x,y])
```

4、掌握微分方程符号求解的方法

matlab 使用 dsolve()函数求微分方程的符号解，其调用方式为：

y = dsolve(eqn)：求 eqn 对应的微分方程的通解；

y = dsolve(eqn,cond)：求 eqn 对应的微分方程在初始条件 cond 下的初始解；

[x, y]=dsolve(eqns)：求 eqns 对应的参数微分方程的通解。

在求解微分方程前需要使用 diff( )构建符号微分方程 eqn，例如：

(1)求解 $y''+2y'-2x=3$

```
>>syms y(x);         %定义符号函数 y(x)
>>dy1=diff(y,x);     %用 dy1 表示函数一阶导，也可以不用 dy1，用自己喜欢的符号；
>>dy2=diff(y,x,x); %用 dy2 表示函数的二阶导；或者 dy2=diff(y,x,2)
>>eqn=[dy2+2*dy1-2*x==3];  %用 dy1、dy2 写出微分方程表达式 eqn；
>>y = dsolve(eqn)  %调用 dsolve 求解 eqn 对应的微分方程。
y = C1 + x + x^2/2 + C2*exp(-2*x) - 1/2
```

也可以如下写法求解：

```
>>syms y(x)
>>y=dsolve(diff(y,x,x)+2*diff(y,x)-2*x-3)
y = C1 + x + x^2/2 + C2*exp(-2*x) - 1/2
```

但还是推荐第一种写法，条理清楚，容易检查错误。

(2)求解 $y''+4y'+29y=0$， $y(0)=0, y'(0)=15$

```
>>syms y(x);
>>dy1=diff(y,x);
>>dy2=diff(y,x,2);
>>eqn=[dy2+4*dy1+29*y];  %用定义的 dy1、dy2 以及 y 写出微分方程表达式
>>cond=[y(0)==0,dy1(0)==15];  %微分方程的初始条件
>>s=dsolve(eqn,cond)          %调用 dsolve 解微分方程。
s=3*sin(5*x)*exp(-2*x)
```

(3) 求解 $\begin{cases} x'(t)=y; \\ y'(t)=-x; \end{cases}$

```
>>syms x(t) y(t);
>>eqns=[diff(x,t)==y,diff(y,t)==-x];
>>[xt,yt]=dsolve(eqns)
xt =C1*cos(t) + C2*sin(t)
yt =C2*cos(t) - C1*sin(t)
```

练习 1：级数符号求和

(1)　计算 $S=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2n-1}$。

(2)　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$ 之和。

练习 2：将 $\ln x$ 在 $x=1$ 处展开成 5 次多项式（泰勒展式）

练习 3：求下列方程的符号解

（1）$\ln(1+x)-\frac{5}{1+\sin x}=2$

（2）$x^2+9\sqrt{x+1}-1=0$

（3）$3xe^x+5\sin x-78.5=0$

（4） $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-100=0 \\ 3x+5y-8=0 \end{cases}$

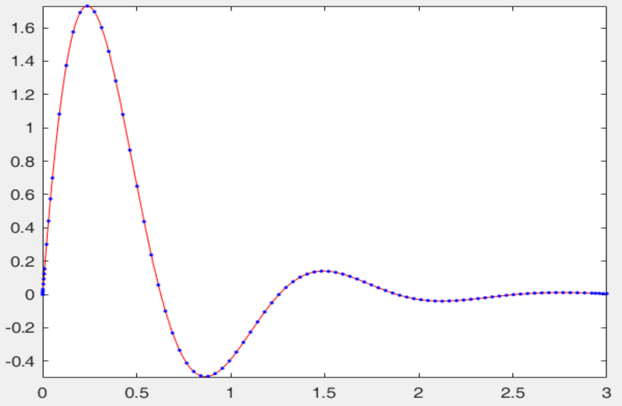
```
syms x y;
>> eqns=[sqrt(x^2+y^2)-100==0, 3*x+5*y-8==0];
>> [x,y]=solve(eqns,[x,y])
x =(10*21246^(1/2))/17 + 12/17
12/17 - (10*21246^(1/2))/17
y =20/17 - (6*21246^(1/2))/17
(6*21246^(1/2))/17 + 20/17
```

练习 4：用 dsolve 求微分方程的符号解，用 ode45 求微分方程的数值解，求解后做出符号解和数值解在区间[0,3]内的图像，对比它们的图像。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+29y=0 \\ y(0)=0,\ y'(0)=15 \end{cases}$$

```
%在脚本中用 dsolve 求符号解，并绘图
clear;
syms y(x);
dy1=diff(y,x);     %dy1 ，dy2 也可以取其他名字，随意。
dy2=diff(y,x,x);    %或者 dy2=diff(y,x,2);
eqn=[dy2+4*dy1+29*y==0];
cond=[y(0)==0,dy1(0)==15];
s=dsolve(eqn,cond);
fplot(s,[0,3],'r');
hold on;
```

```
%在脚本中用 ode45 求数值解,并绘图
clear;
dy=@(x,y)[y(2);-29*y(1)-4*y(2)];
y0=[0,15]; xspan=[0,3];
[x,y]=ode45(dy,xspan,y0);
plot(x,y(:,1),'b');
hold off
```



可以看到，符号解和数值解吻合。

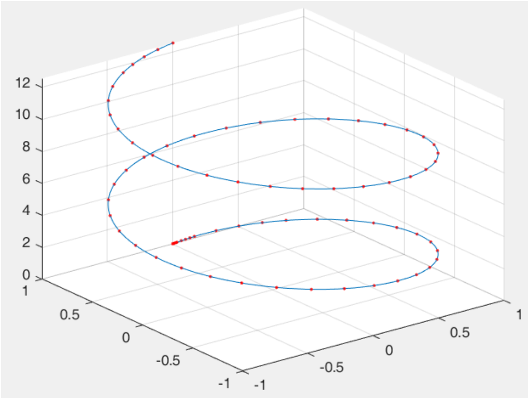
练习 5：求微分方程组的符号通解和数值解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=1 \end{cases},\quad x(0)=0, y(0)=1, z(0)=0$$

```
%在脚本中用 dsolve 求解并绘图
clear;
syms x(t) y(t) z(t)
dx=diff(x,t);   %dx,dy,dz 名字可以随意
dy=diff(y,t);
dz=diff(z,t);
eqns=[dx==y,dy==-x, dz==1];
conds=[x(0)==0,y(0)==1,z(0)==0];
[x,y,z]=dsolve(eqns,conds);
xt=matlabFunction(x);
yt=matlabFunction(y);
zt=matlabFunction(z);
fplot3(xt,yt,zt,[0,4*pi]);
hold on;
```

```
%在脚本中用 ode45 求解并绘图
clear;
dy=@(x,y)[y(2);-y(1);1];
xspan=[0,4*pi];y0=[0,1,0];
[x,y]=ode45(dy,xspan,y0);
```

```
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),'r.');
hold off;
```



可以看到，符号解和数值解吻合