实验五 FIR 数字滤波器的设计

04016616 蒋宇轩

一、实验目的

（1）掌握用窗函数法，频率采样法及优化设计法设计 FIR 滤波器的原理及方法，熟悉响应 matlab 编程。
（2）熟悉线性相位 FIR 滤波器的幅频特性和相频特性。
（3）了解各种不同窗函数对滤波器性能的影响。

二、实验原理

（一）线性相位实系数 FIR 滤波器按其 N 值奇偶和 h(n)的奇偶对称性分为四种

（1）$h(n)$为偶对称，N 为奇数；$H\left(e^{j\omega}\right)$的幅值关于$\omega=0,\pi,2\pi$成偶对称。

（2）$h(n)$为偶对称，N 为偶数；$H\left(e^{j\omega}\right)$的幅值关于$\omega=\pi$成奇对称，不适合作高通。

（3）$h(n)$为奇对称，N 为奇数；$H\left(e^{j\omega}\right)$的幅值关于$\omega=0,\pi,2\pi$成奇对称，不适合作高通和低通。

（4）$h(n)$为奇对称，N 为偶数；$H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=0,2\pi}=0$，不适合作低通。

(二) 窗口法

窗函数设计线性相位 FIR 滤波器步骤:

（1）确定数字滤波器的性能要求：临界频率$\{\omega_k\}$，滤波器单位脉冲响应长度 N；

（2）根据性能要求，合理选择单位脉冲响应$h(n)$的奇偶对称性，从而确定理想频率响应$H_d\left(e^{j\omega}\right)$的幅频特性和相频特性；

（3）求理想单位脉冲响应$h_d(n)$，在实际计算中，可对$H_d\left(e^{j\omega}\right)$按 M(M 远大于 N) 点等距离采样，并对其求 IDFT 得$h_M(n)$，用$h_M(n)$代替$h_d(n)$；

（4）选择适当的窗函数$w(n)$，根据$h(n)=h_d(n)w(n)$求所需设计的 FIR 滤波器单位脉冲响应；

（5）求$H\left(e^{j\omega}\right)$，分析其幅频特性，若不满足要求，可适当改变窗函数形式或长度 N，重复上述设计过程，以得到满意的结果。

窗函数的傅式变换$W\left(e^{j\omega}\right)$的主瓣决定了$H\left(e^{j\omega}\right)$过渡带宽。$W\left(e^{j\omega}\right)$的旁瓣大小和多少决定了$H\left(e^{j\omega}\right)$在通带和阻带范围内波动幅度，常用的几种窗函数有：

（1）矩形窗(Rectangle Window)：$w(n)=R_N(n)$

（2）汉宁(Hanning)窗，又称升余弦窗：$w(n)=\frac{1}{2}[1-\cos(\frac{2n\pi}{N-1})]R_N(n)$

（3）汉明(Hamming)窗，又称改进的升余弦窗：$w(n)=[0.54-0.46\cos(\frac{2n\pi}{N-1})]R_N(n)$

（4）布莱克曼(Blankman)窗，又称二阶升余弦窗 ： $w(n)=[0.42-0.5\cos(\frac{2n\pi}{N-1})+0.08\cos(\frac{4n\pi}{N-1})]R_N(n)$

（5）凯塞(Kaiser)窗： $w(n)=\frac{I_0(\beta\sqrt{1-[1-2n/(N-1)]^2})}{I_0(\beta)},0\le n\le N-1$

其中，β是一个可选参数，用来选择主瓣宽度和旁瓣衰减之间的交换关系，一般说来，β越大，过渡带越宽，阻带越小衰减也越大。$I_0(\cdot)$是第一类修正零阶贝塞尔函数。

若阻带最小衰减表示为$A_s=-20\log_{10}\delta_s$，β的确定可采用下述经验公式：

$$\beta=\begin{cases}0 & A_s\le 21\\ 0.5842(A_s-21)^{0.4}+0.07886(A_s-21) & 21<A_s\le 50\\ 0.1102(A_s-8.7) & A_s>50\end{cases}$$

（三）频率采样法

频率采样法是从频域出发，将给定的理想频率响应$H_d\left(e^{j\omega}\right)$加以等间隔采样，然后以此$H_d\left(k\right)$作为实际 FIR 数字滤波器的频率特性的采样值$H\left(k\right)$，由$H\left(k\right)$通过 IDFT 可得有限长序列$h\left(n\right)$，然后进行 DTFT 或 Z 变换即可得$H\left(e^{j\omega}\right)$。

（四）FIR 滤波器的优化设计

FIR 滤波器的优化设计是按照最大误差最小化准则，使所设计的频响与理想频响之间的最大误差，在通带和阻带范围均为最小，而且是等波动逼近的。

为了简化起见，在优化设计中一般将线性相位 FIR 滤波器的单位脉冲响应$h(n)$的对称中心置于 n=0 处，此时，线性相位因子 α=0。令 N=2M+1，则$H(e^{j\omega})=h(0)+\sum_{n=1}^{M}2h(n)\cos(n\omega)=\sum_{n=0}^{M}a(n)\cos(n\omega)$

如希望逼近一个低通滤波器，这里 M，ω_c和ω_r固定为某个值。在这种情况下有$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}1\,,0\le\omega\le\omega_c\\0\,,\omega_r\le\omega\le\pi\end{cases}$

定义一逼近误差函数： $E(\omega)=W(\omega)[H_d(e^{j\omega})-H(e^{j\omega})]$

$$W(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{K}\,,0\le\omega\le\omega_c\\1\,,\omega_r\le\omega\le\pi\end{cases}$$

$E(\omega)$为在希望的滤波器通带和阻带内算出的误差值，$W(\omega)$为加权函数，

K应当等于比值δ_1/δ_2，δ_1为通带波动，δ_2为阻带波动。在这种情况下，设计过程要求$|E(\omega)|$在区间$0\le\omega\le\omega_c$和$\omega_r\le\omega\le\pi$的最大值为最小，它等效于求最小δ_2。根据数学上多项式逼近连续函数的理论，用三角多项式逼近连续函数，在一定条件下存在最佳逼近的三角多项式，而且可以证明这个多项式是唯一的。这一最佳逼近定理通常称作交替定理。

在逼近过程中，可以固定K，M，ω_c和ω_r，而改变δ_2，按照交替定理，首先估计出(M+2)个误差函数的极值频率ω_i，i=0,1,...,M+1，共计可以写出(M+2)个方程

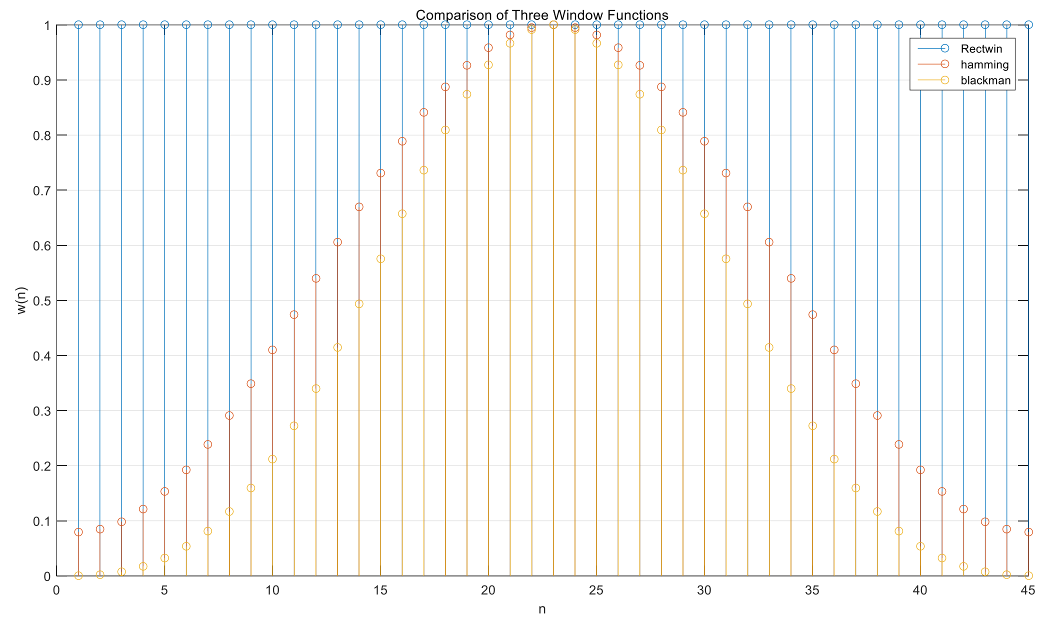
$$\begin{aligned}&W(\omega_i)[H_d(e^{j\omega_i})-h(0)-\sum_{n=1}^{M}2h(n)\cos(n\omega)]\\&=W(\omega_i)[H_d(e^{j\omega_i})-\sum_{n=0}^{M}a(n)\cos(n\omega)]\\&=-(-1)^i\rho\qquad i=0,1,\cdots,M+1\end{aligned}$$

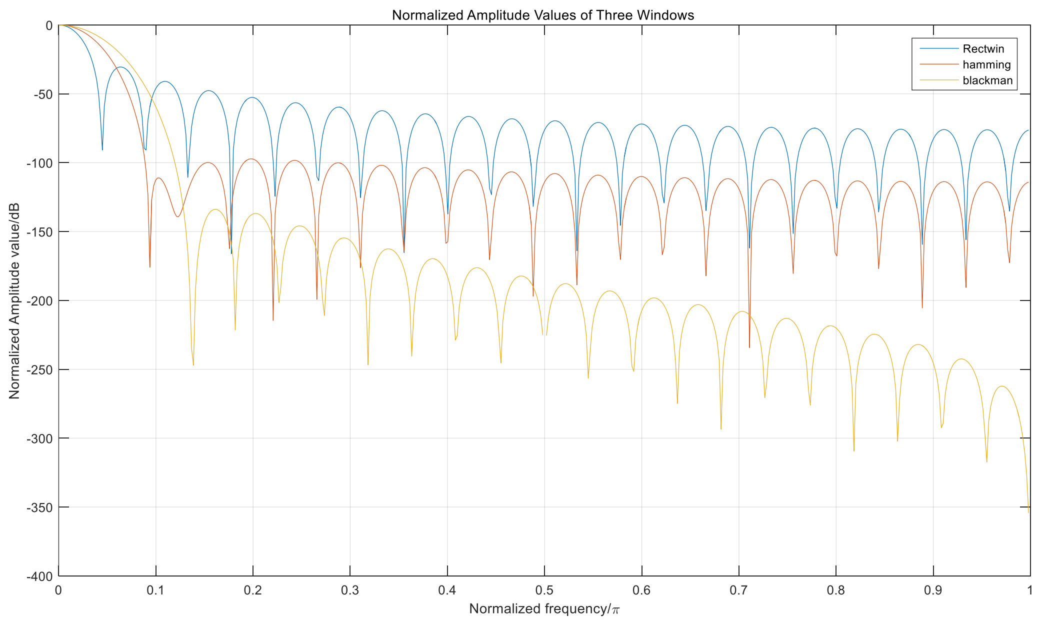
式中 ρ 表示峰值误差。一般仅需求解出 ρ ，接着便可用三角多项式找到一组新的极值频率点，并求出新的峰值误差 ρ 。依此反复进行，直到前、后两次 ρ 值不变化为止，最小的 ρ 即为所求的 δ_2 。

这一算法通常称作雷米兹(Remez)交替算法。

三、实验内容

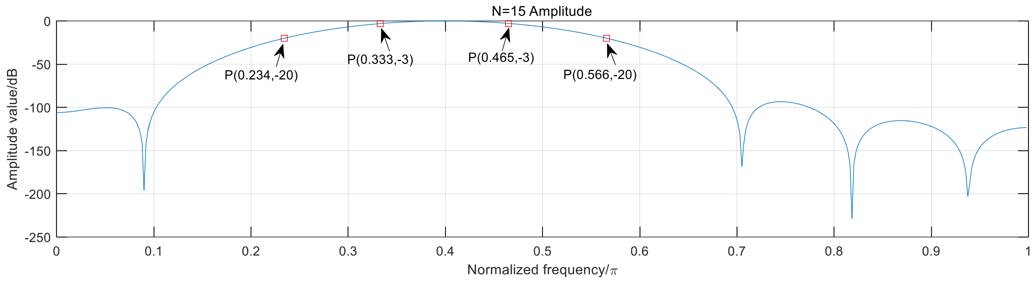
（1） N=45，计算并画出矩形窗、汉明窗、布莱克曼窗的归一化的幅度谱，并比较各自的主要特点。

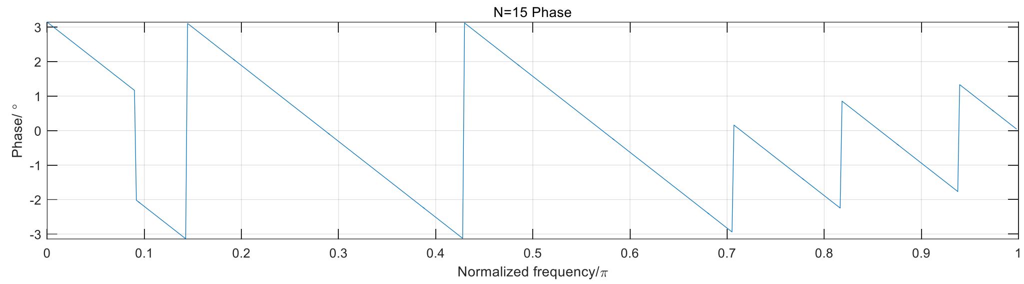


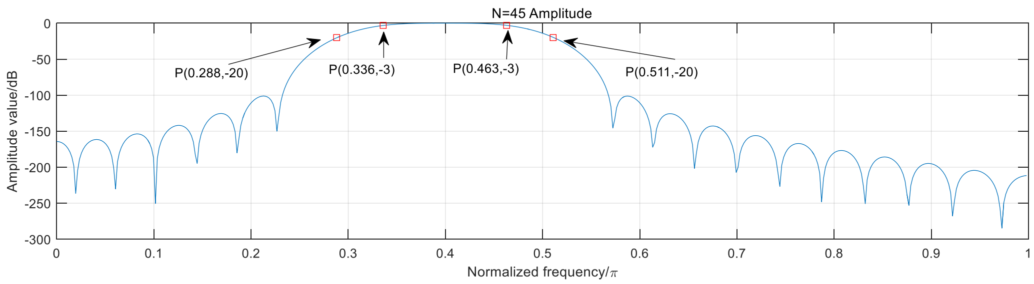


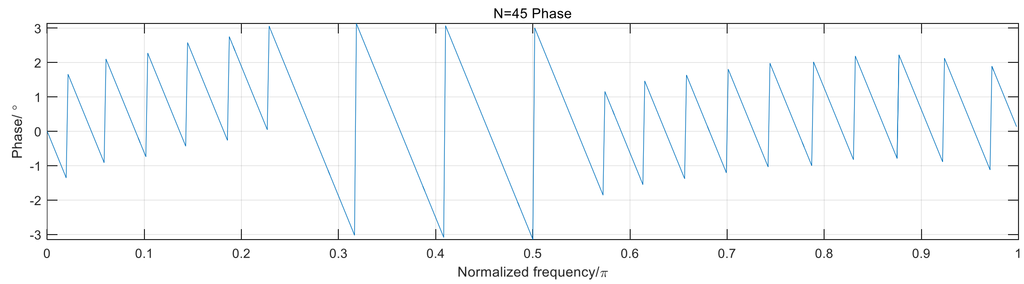
分析：旁瓣波动的减小是以适当牺牲主瓣宽度来换取的。矩形窗函数具有最窄的主瓣宽度，但有最大的旁瓣峰值；汉明窗函数的主瓣稍宽，而旁瓣较小；布莱克曼窗函数则更甚之。矩形窗设计的滤波器过渡带最窄，但是阻带最小衰减也最差；布莱克曼窗设计的滤波器阻带衰减最好，过度带最宽，约为矩形窗设计的的三倍。汉明窗设计的滤波器处于矩形窗和布莱克曼窗之间。

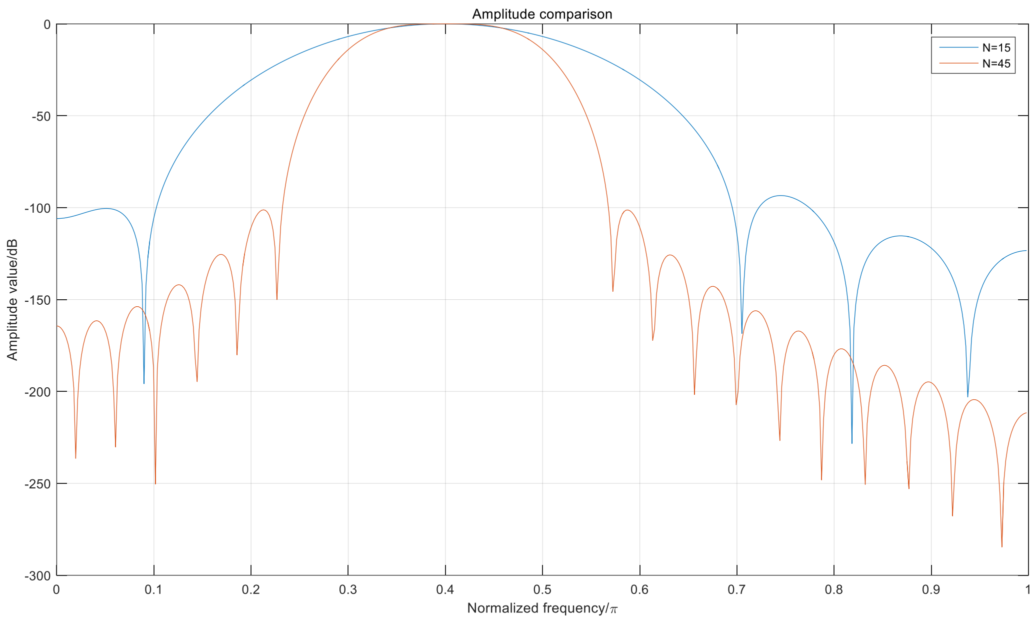
（2） N=15，带通滤波器的两个通带边界分别是 $\omega_1 = 0.3\pi$，$\omega_2 = 0.5\pi$。用汉宁窗设计此线性相位带通滤波器，观察它的实际 3dB 和 20dB 带宽。N=45，重复这一设计，观察幅频和相位特性的变化，注意长度 N 变化的影响。

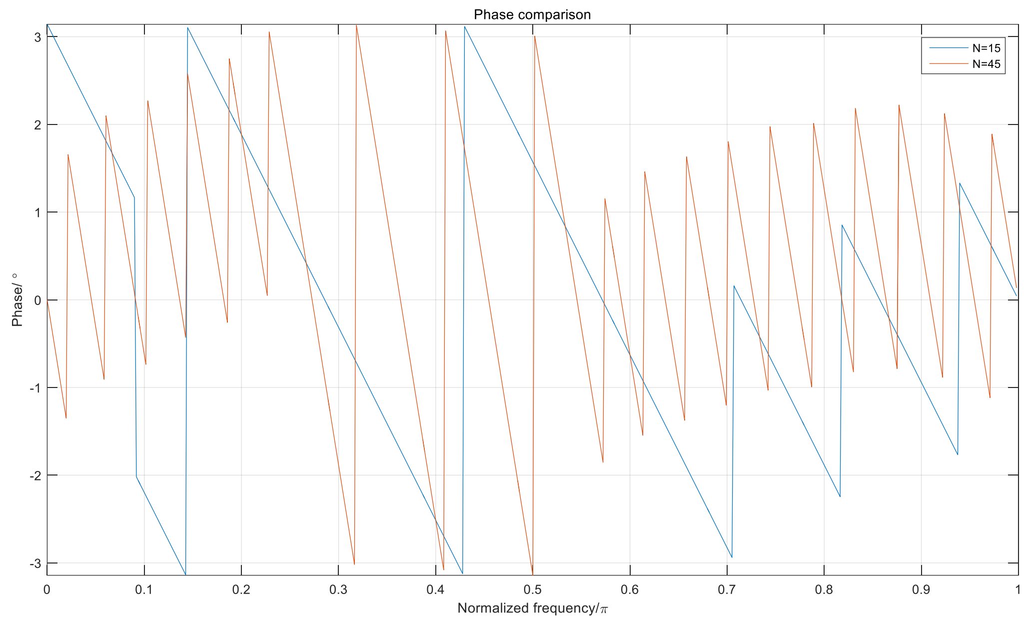










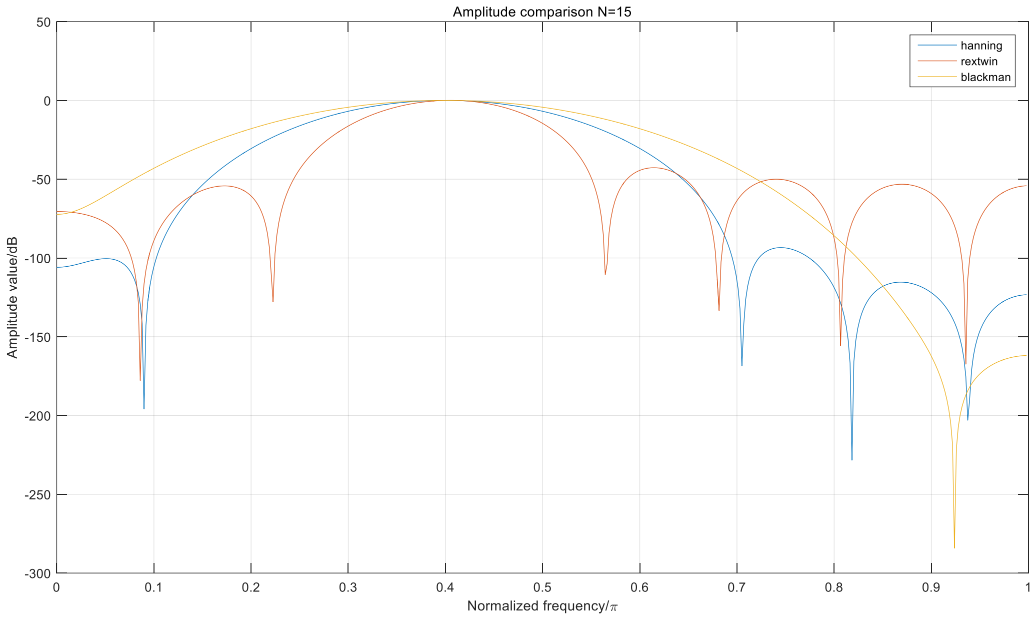


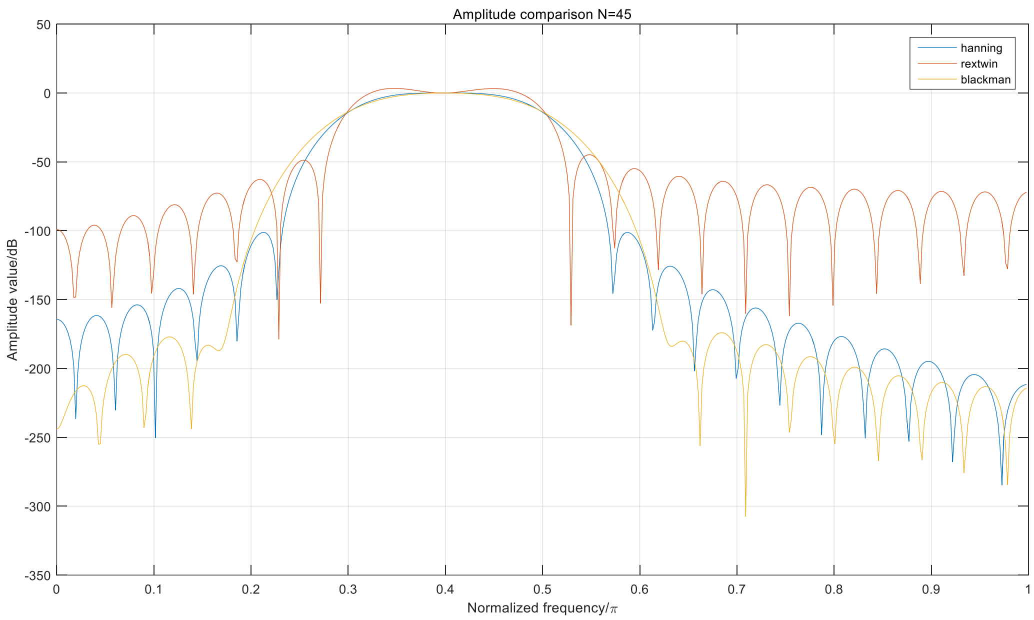
分析：

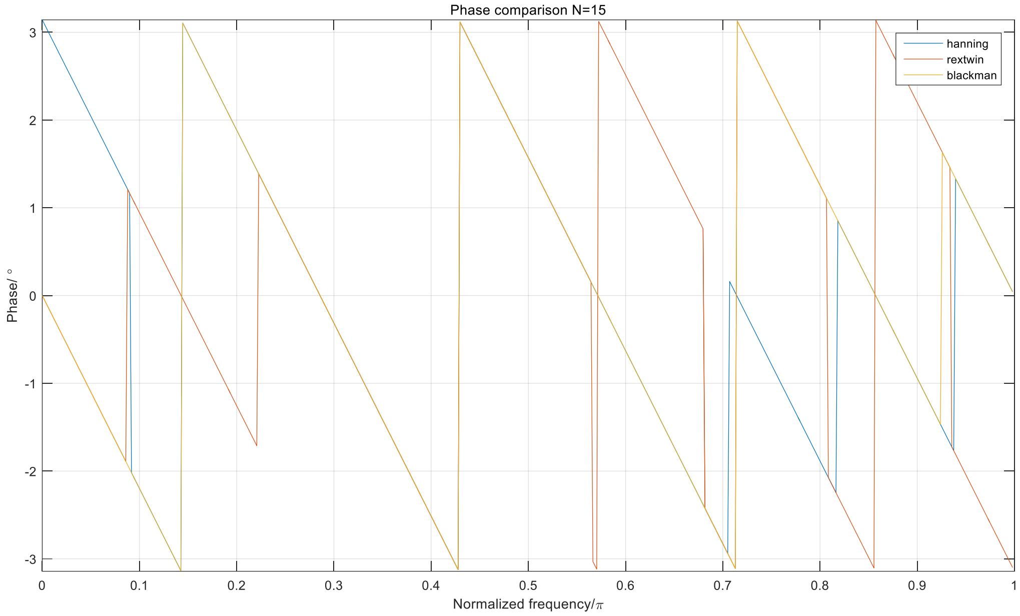
观察它的实际 3dB 和 20dB 带宽，发现 N=15 时，其 3dB 带宽约为 0.133pi,20db 带宽约为 0.332pi；N=45 时，其 3dB 带宽约为 0.127pi,20db 带宽约为 0.223pi.

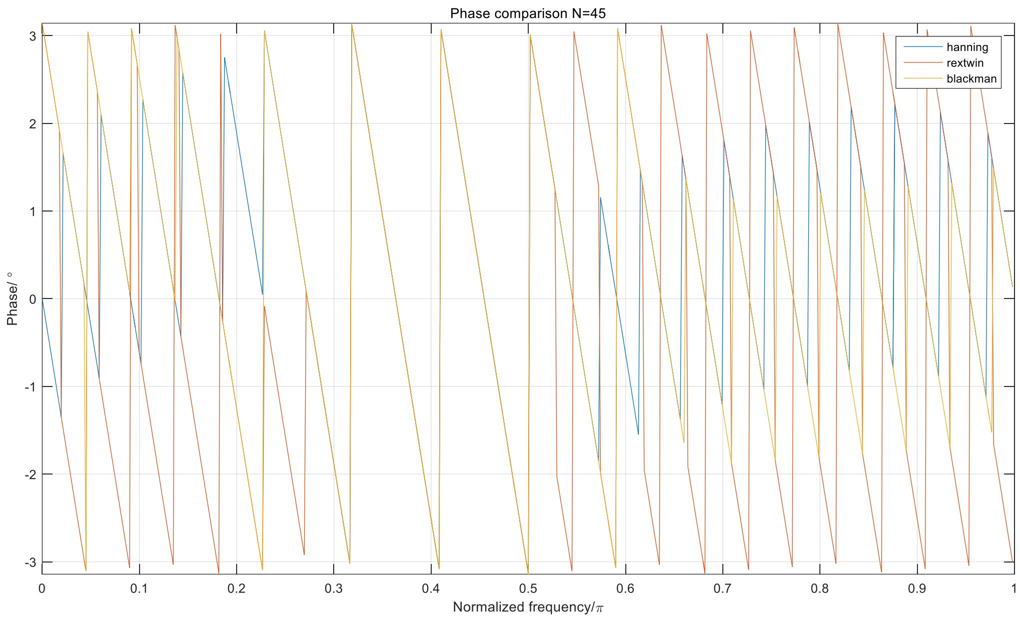
可见窗长增加，过渡带减小，阻带衰减增大，滤波器特性变好，幅频曲线显示其通带较平缓，波动小。相频特性曲线显示其相位随频率变化也变大。

（3） 分别改用矩形窗和 Blackman 窗，设计（2）中的带通滤波器，观察并记录窗函数对滤波器幅频特性的影响，比较三种窗的特点。









分析：

同一 N 值，分别用矩形窗，汉宁窗，汉明窗，布莱克曼窗设计滤波器时，主瓣宽度逐渐增大,过渡带变宽，但阻带衰减性能变好；N 增加，主瓣变窄，旁瓣的分量增加，过渡带变陡，起伏震荡变密。

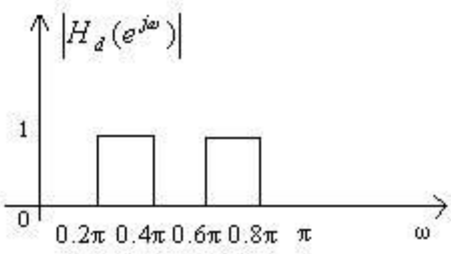
加窗处理对滤波器的频率响应会产生以下主要影响：

（1）使理想特性不连续的边沿加宽，形成一过渡带，过渡带的宽度取决于窗函数频谱的主瓣宽度。

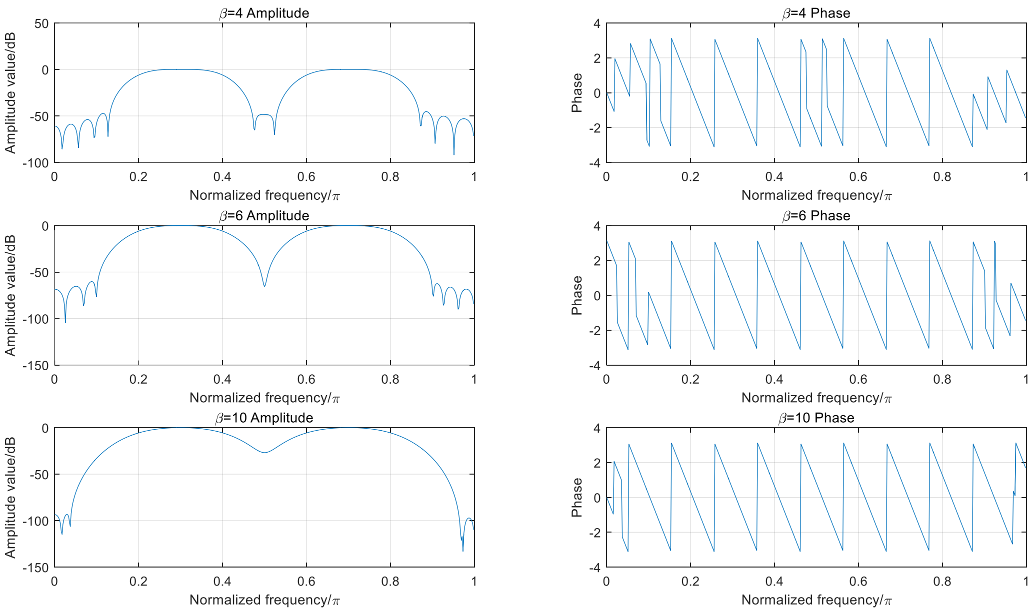
（2）在过渡带两旁产生肩峰和余振，它们取决于窗函数频谱的旁瓣；旁瓣越多，余振也越多；旁瓣相对值越大，肩峰则越强。

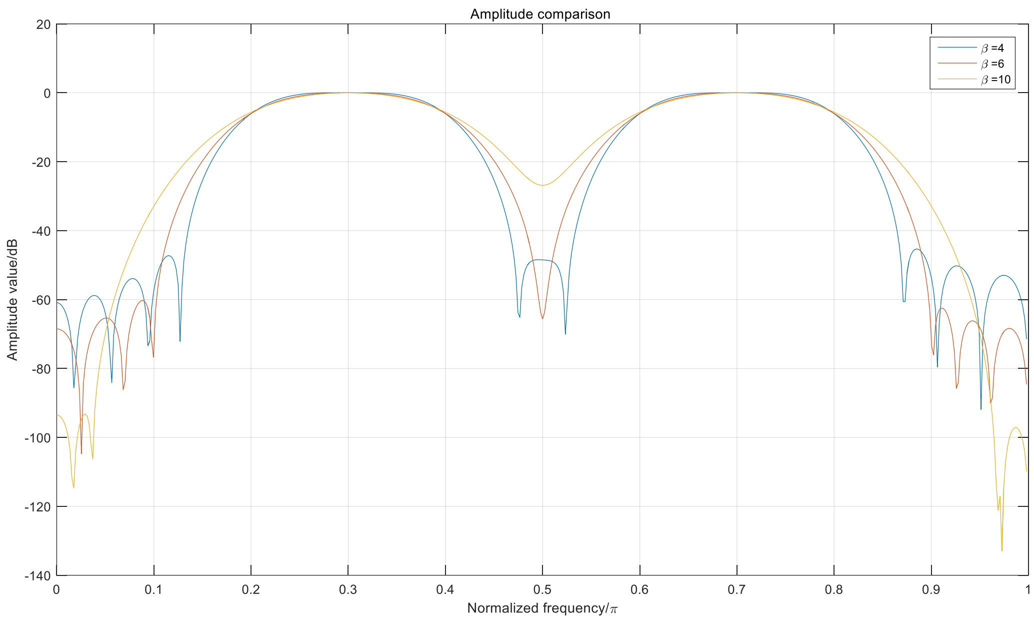
（3）增加截断长度 ，只能缩小窗函数频谱的主瓣宽度而不能改变旁瓣的相对值；旁瓣与主瓣的相对关系只决定于窗函数的形状。因此增加 N，只能相对应减小过渡带宽。而不能改变肩峰值。肩峰值的大小直接决定通带内的平稳和阻带的衰减，对滤波器性能有很大关系。

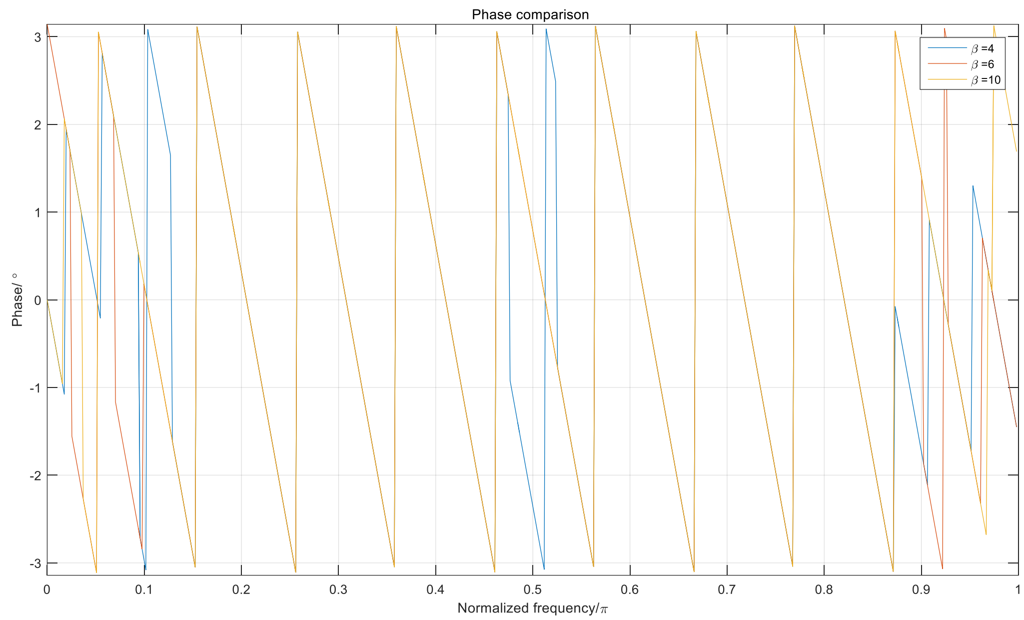
（4）用 Kaiser 窗设计一专用线性相位滤波器，N=40，$H_d(e^{j\omega})$ 如图，当 β=4、6、10 时，分别设计、比较它们的幅频和相频特性，注意 β 取不同值时的影响。



分析：β 越大，w(n)窗越窄，频谱的旁瓣越小，但主瓣宽度也相应增加，过渡带变宽，相位特性变好。

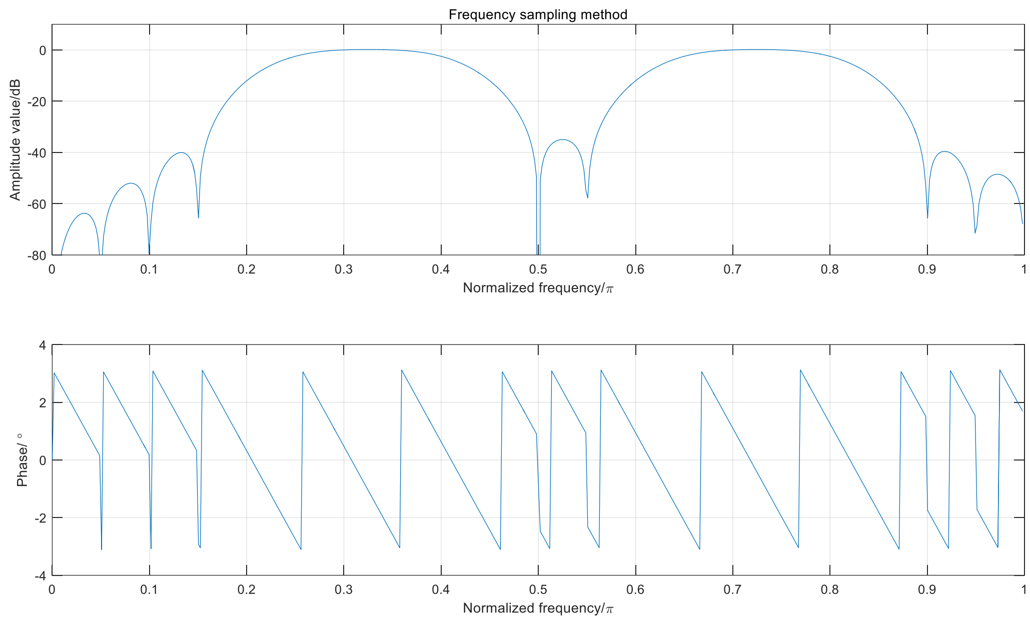






分析：β越大，窗越窄，频谱的旁瓣越小，但主瓣宽度也相应增加，过渡带变宽，阻带衰减变好。

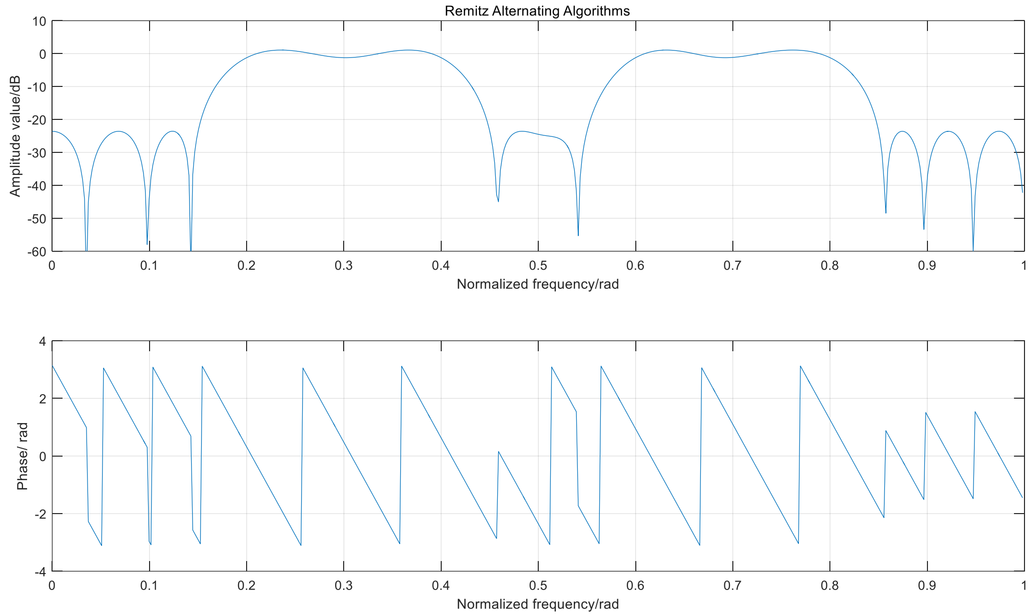
（5）用频率采样法设计（4）中的滤波器，过渡带分别设一个过渡点，令 H(k)=0.5。比较两种不同方法的结果。



分析：

采样法从频域出发对理想的频率响应进行等间隔采样，采样点之间的值则利用各采样点的内插函数叠加而成。因此，采样法在采样点上的频响为理想频响，其阻带比窗口法平坦。采样点之间的理想频率特性变化越陡，内插值与理想值的差别越大，在理想频率特性变化的不连续点附近会出现肩峰和波纹，为改善，在过渡带安排一个采样值,相当于加宽了过渡带。

（6）用雷米兹(Remez)交替算法设计(4)中的滤波器，并比较(4)、(5)、(6)三种不同方法的结果。



分析：

Kaise 窗的过渡带较宽，但它的阻带波动较小；频率采样法的过渡带较窄，但它的阻带波动较大。即：

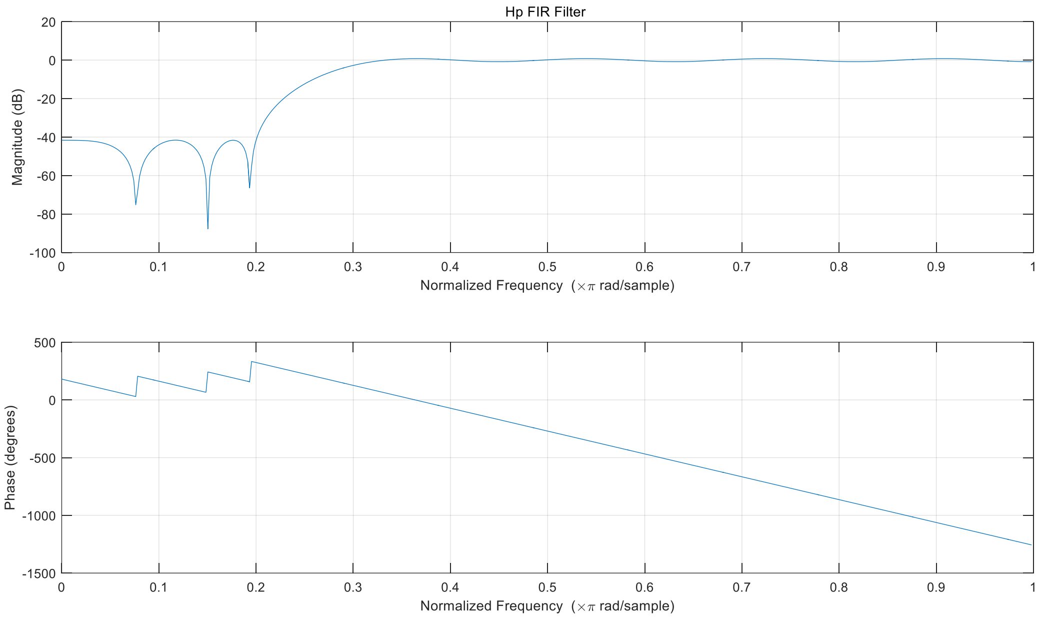
①当过渡带宽越大时，幅频特性曲线的误差就越小，阻带波纹起伏小；

②当过渡带宽越小时，幅频特性曲线的误差就越大，阻带波纹起伏大。

由此可知，过渡带宽和误差是矛盾的，当满足了带宽的要求就必然会带来误差，这个误差表现为阻带波纹状，可见旁瓣波动的减小是以适当牺牲主瓣宽度来换取的。使用雷米兹交替算法优化滤波器设计后，波动值减小，通带更加平坦。

雷米兹交替算法设计的滤波器阻带衰减大于频率采样法，小于窗口法；雷米兹交替算法带内带外起伏呈等波纹状；雷米兹交替算法设计的滤波器边界易于控制，而窗口法的通带边界误差较大。

7、 利用雷米兹(Remez)交替算法，设计一个线性相位高通 FIR 数字滤波器，其指标为：通带边界频率 fc=800Hz，阻带边界 fr=500Hz，通带波动 δ =1dB，阻带最小衰减 At=40dB，采样频率 fs=5000Hz。



四、实验思考题

（1）定性地说明用本实验程序设计的 FIR 滤波器的 3dB 截止频率在什么位置？它等于理想频率响应

Hd($e^{j\omega}$)的截止频率吗？

答：用窗函数设计时，由于一定有H(ωc)=0.5H(0)，所以3dB截止频率小于ωc，不等于理想频率响应的截止频率。

用频率采样法设计时，3dB截止频率的值依赖于过渡采样点的位置和取值，一般不等于理想频率响应的截止频率。用雷米兹交替算法设计时，由于边界频率易于控制，3dB截止频率与理想频率响应的截止频率基本相等。

（2）如果没有给定 h(n)的长度 N，而是给定了通带边缘截止频率ωc 和阻带临界频率ωp，以及相应的衰减，你能根据这些条件用窗函数法设计线性相位 FIR 低通滤波器吗？

答：MATLAB中内置了kaiserord函数，可以根据滤波器设计指标计算窗口函数的参数，因而可以通过

[M,Wc,beta,ftype]=kaiserord([fc fp],a,dev,fs);得到参数，再通过

h=fir1(N,Wc,ftype,kaiser(N+1,beta))即可获得获得h(n)。