

实验四 IIR 数字滤波器的设计

04016616 蒋宇轩

一、实验目的

- (1) 掌握双线性变换法及脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器的具体设计方法及其原理，熟悉双线性变换法及脉冲响应不变法设计低通，高通和带通 IIR 数字滤波器的计算机编程。
- (2) 观察双线性变换法及脉冲响应不变法设计的滤波器的频域特性，了解双线性变换法及脉冲响应不变法的特点。
- (3) 熟悉巴特沃思滤波器，切比雪夫滤波器和椭圆滤波器的频率特性。

二、实验原理

- (1) 脉冲响应不变法

用数字滤波器的单位脉冲响应序列 $h(n)$ 模仿模拟滤波器的冲激响应 $h_a(n)$ ，让 $h(n)$ 正好等于 $h_a(n)$ 的采样值，即 $h(n) = h_a(n)$ ，其中 T 为采样间隔，如果以 $H_a(n)$ 及 $H(z)$ 分别表示 $h_a(n)$ 的拉式变换及 $h(n)$ 的 Z 变换，则有

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a(s + j\frac{2\pi}{T}m)$$

- (2) 双线性变换法

s 平面与 z 平面之间满足以下映射关系：

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$$

s 平面的虚轴单值地映射于 z 平面的单位圆上， s 平面的左半平面完全映射到 z 平面的单位圆内。

双线性变换不存在混叠问题。双线性变换是一种非线性变换 ($\tan \frac{\omega}{2} = \frac{\Omega T}{2}$)，这种非线性引起的幅频特性畸变可通过预畸而得到校正。

IIR 低通、高通、带通数字滤波器设计采用双线性原型变换公式：

变换类型	变换关系式	备 注
低通	$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, \Omega = \frac{2}{T} \tan \left \frac{\omega}{2} \right $	$\omega = 2\pi fT$
高通	$s = \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}, \Omega = \frac{2}{T} \operatorname{ctg} \left \frac{\omega}{2} \right $	
带通	$s = \frac{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}{z^2 - 1}, \Omega = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega}{\sin \omega}$	$\cos \omega_0 = \frac{\sin(\omega_1 + \omega_2)}{\sin \omega_1 + \sin \omega_2}$ ω_0 ：带通的上下边带临界频率

(3) 实验中有关变量的定义

f_c 通带边界频率

f_r 阻带边界频率

δ 通带波动

At 最小阻带衰减

f_s 采样频率

T 采样周期

(4) 设计一个数字滤波器一般包括以下两步

- 按照任务要求，确定滤波器性能指标
- 用一个因果稳定的离散时不变系统的系统函数去逼近这一性能要求

(5) 数字滤波器的实现

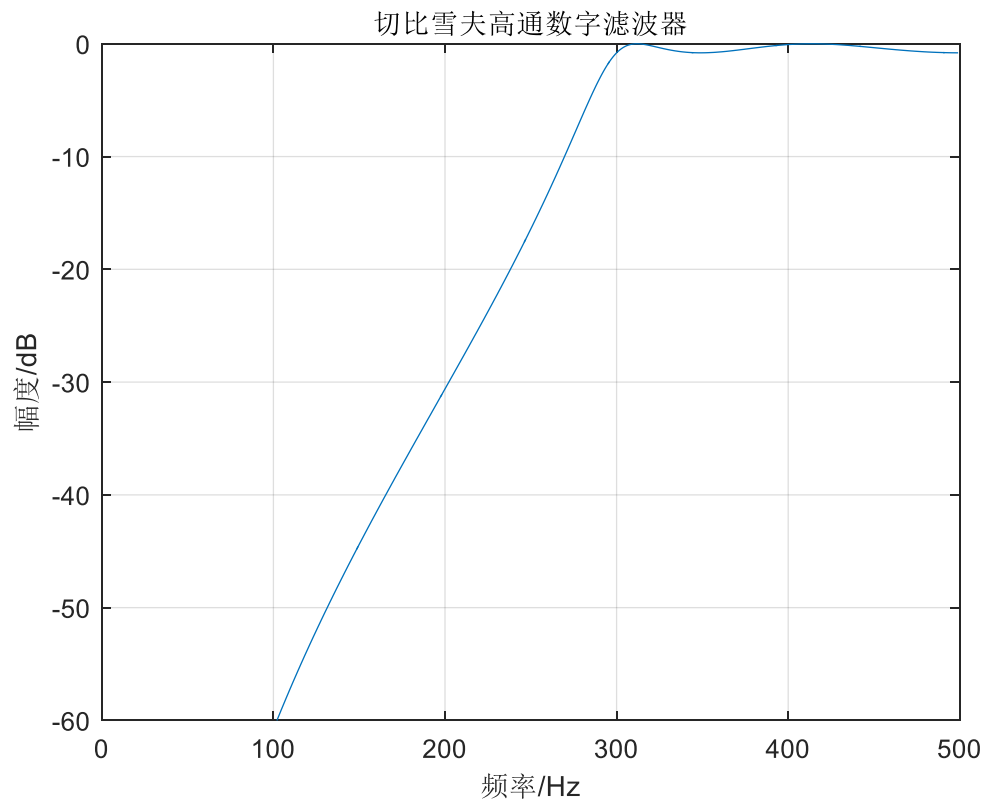
对于 IIR 滤波器，其逼近问题就是寻找滤波器的各项系数，使其系统函数逼近一个所要求的特性。先设计一个合适的模拟滤波器，然后变换成满足约定指标的数字滤波器。

用双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的过程：

- 将设计性能指标中的关键频率点进行“预畸”
- 利用“预畸”得到的频率点设计一个模拟滤波器。
- 双线性变换，确定系统函数

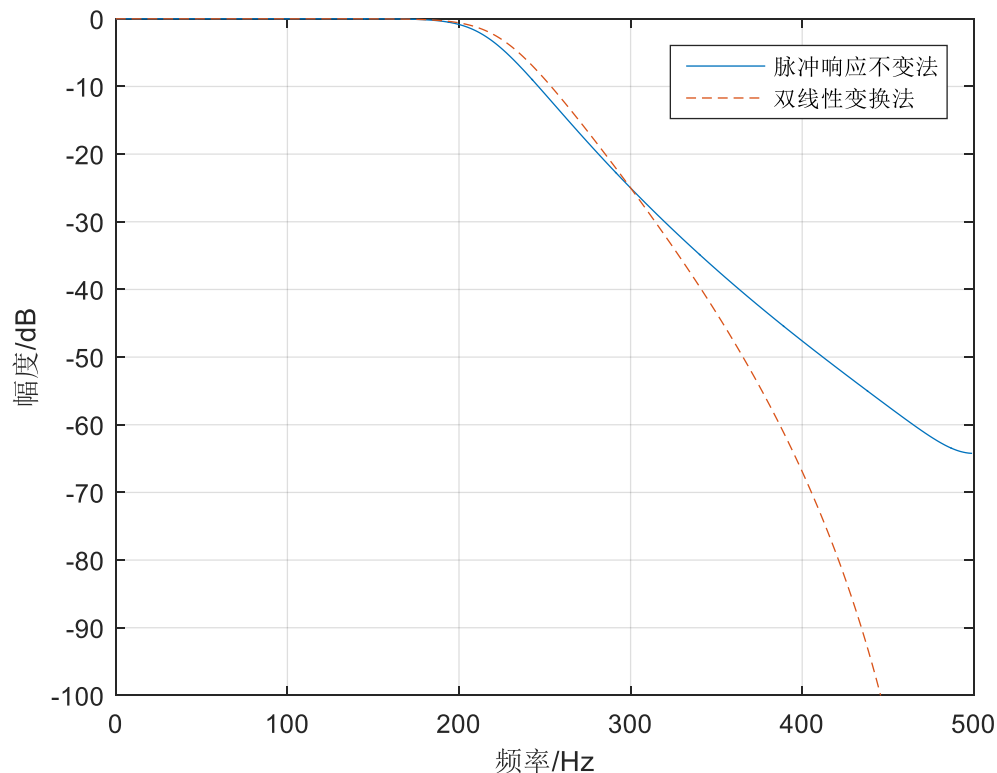
三、实验内容

(1) $f_c=0.3\text{kHz}$, $\delta=0.8\text{dB}$, $f_r=0.2\text{kHz}$, $A_t=20\text{dB}$, $T=1\text{ms}$; 设计一切比雪夫高通滤波器, 观察其通带损耗和阻带衰减是否满足要求。



观察图形可知, δ 趋近于 0; $f=200\text{Hz}$ 时, 阻带衰减约为 35dB, 满足 $A_t=20\text{dB}$ 的要求, 故其通带损耗和阻带衰减满足要求。

(2) $f_c=0.2\text{kHz}$, $\delta=1\text{dB}$, $f_r=0.3\text{kHz}$, $A_t=25\text{dB}$, $T=1\text{ms}$; 分别用脉冲响应不变法及双线性变换法设计一巴特沃思数字低通滤波器, 观察所设计数字滤波器的幅频特性曲线, 记录带宽和衰减量, 检查是否满足要求。比较这两种方法的优缺点。



从图中可见, 通带边界和阻带边界分别为 200hz,300hz,衰减量也满足为 25dB。

脉冲响应不变法的一个重要特点是频率坐标的变换是线性的, $\omega=\Omega T$, ω 与 Ω 是线性关系: 在某些场合, 要求数字滤波器在时域上能模仿模拟滤波器的功能时, 如要实现时域冲激响应的模仿, 一般使用脉冲响应不变法。

脉冲响应不变法的最大缺点: 有频谱周期延拓效应, 因此只能用于带限的频响特性, 如衰减特性很好的低通或带通, 而高频衰减越大, 频响的混淆效应越小, 至于高通和带阻滤波器, 由于它们在高频部分不衰减, 因此将完全混淆在低频响应中, 此时可增加一保护滤波器, 滤掉高于 $\Omega_s/2$ 的频带, 再用脉冲响应不变法转换为数字滤波器, 这会增加设计的复杂性和滤波器阶数, 只有在一定要满足频率线性关系或保持网络瞬态响应时才采用。

双线性变换法的主要优点是 S 平面与 Z 平面一一单值对应, s 平面的虚轴(整个 $j\Omega$)对应于 Z 平面单位圆的一周, S 平面的 $\Omega=0$ 处对应于 Z 平面的 $\omega=0$ 处, $\Omega=\infty$ 处对应于 Z 平面的 $\omega=\pi$ 处, 即数字滤波器的频率响应终止于折叠频率处, 所以双线性变换不存在混迭效应。

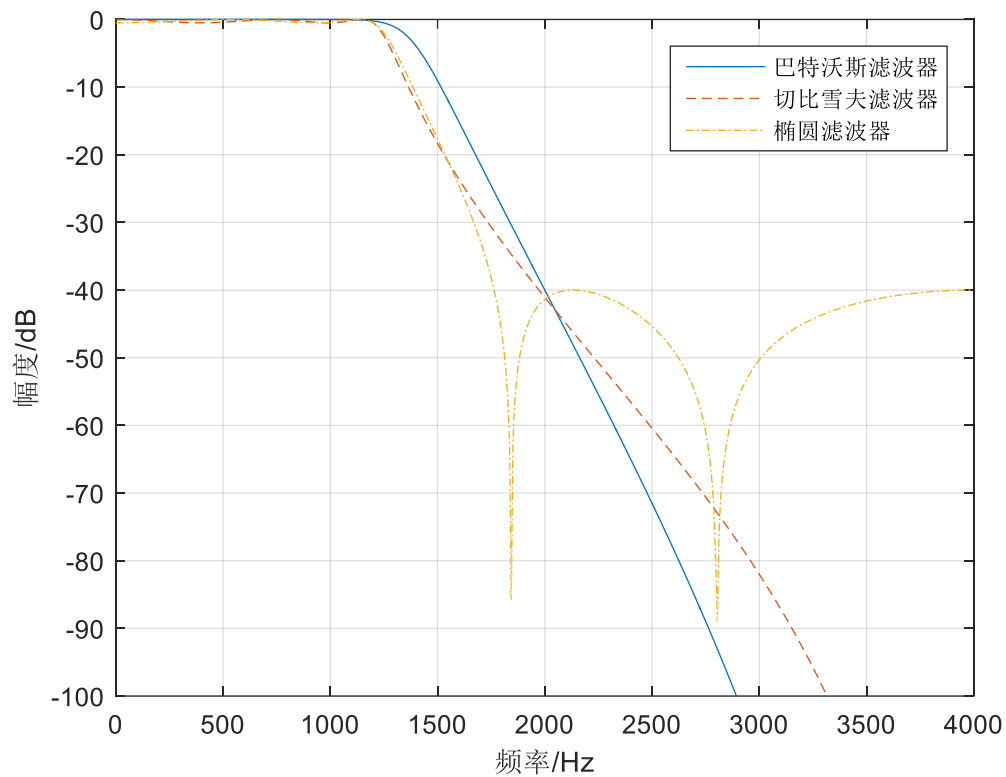
双线性变换缺点: Ω 与 ω 成非线性关系, 导致:

a. 数字滤波器的幅频响应相对于模拟滤波器的幅频响应有畸变, (使数字滤波器与模拟滤波器在响应与频率的对应关系上发生畸变)。

b. 线性相位模拟滤波器经双线性变换后, 得到的数字滤波器为非线性相位。

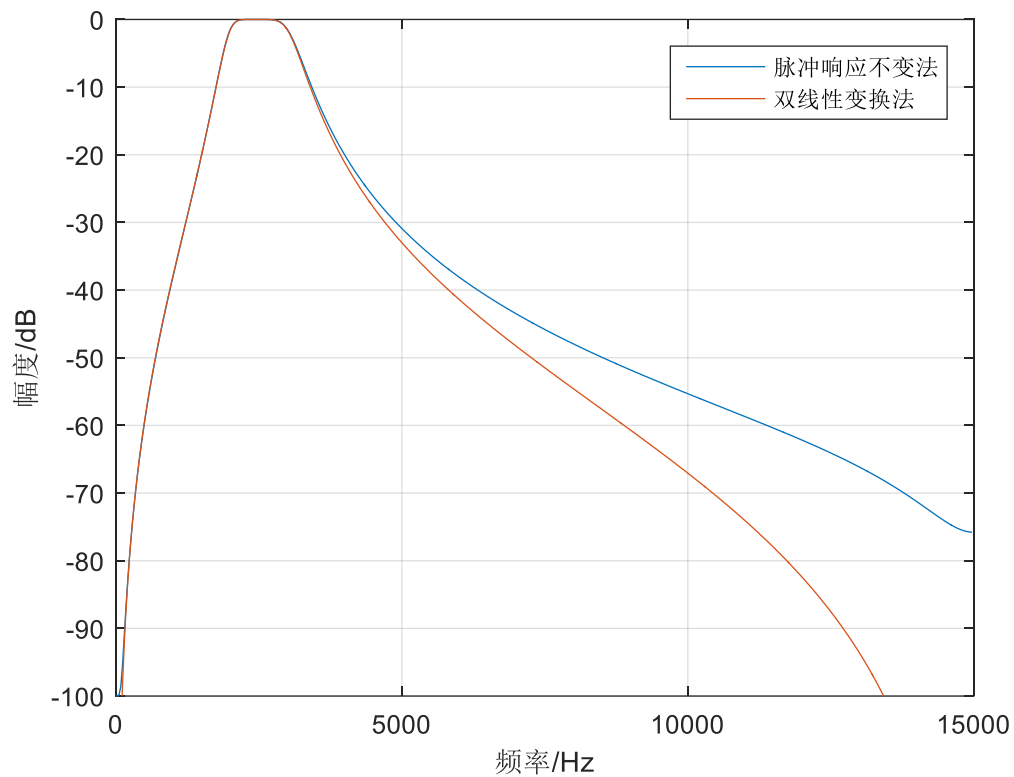
c. 要求模拟滤波器的幅频响应必须是分段恒定的, 故双线性变换只能用于设计低通、高通、带通、带阻等选频滤波器

(3) 利用双线性变换法分别设计满足下列指标的巴特沃思滤波器，切比雪夫滤波器和椭圆滤波器，并作图验证设计结果： $f_c=1.2\text{kHz}$ ， $\delta\leq 0.5\text{dB}$ ， $f_r=2\text{kHz}$ ， $A_t\geq 40\text{dB}$ ， $f_s=8\text{kHz}$ 。比较这三种滤波器的阶数。



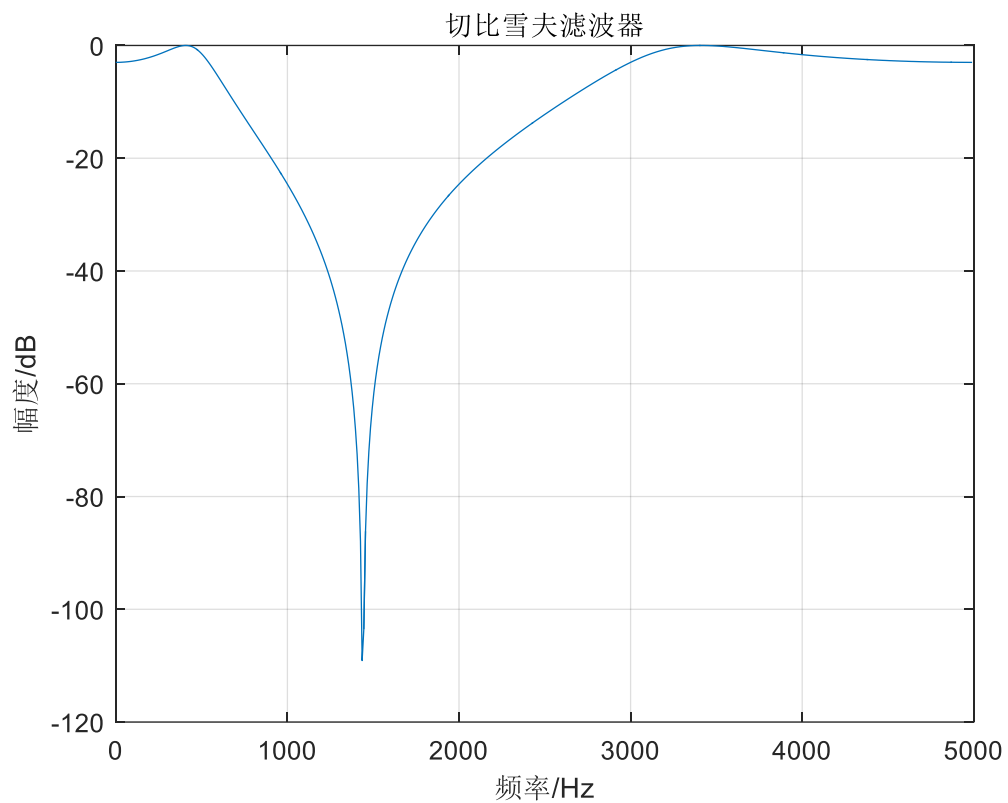
在相同指标下：巴特沃思型滤波器需要 9 阶，切比雪夫型需要 5 阶，椭圆型需要 4 阶。
可见对于给定的指标，椭圆滤波器的阶数最小，过渡带最窄，并具有等波纹的通带和阻带响应；巴特沃斯滤波器过渡带最宽，切比雪夫的过渡带介于两者之间。

(4) 分别用脉冲响应不变法及双线性变换法设计一巴特沃思数字带通滤波器，已知 $f_s=3\text{kHz}$ ，其等效的模拟滤波器指标为 $\delta<3\text{kHz}$ ， $2\text{kHz}<f\leq 3\text{kHz}$ ， $A_t\geq 5\text{dB}$ ， $f\geq 6\text{kHz}$ ， $A_t\geq 20\text{dB}$ ， $f\leq 1.5\text{kHz}$ 。



由上图可以看出，用脉冲响应不变法由于滤波器的混叠作用在过度带和阻带都衰减的较双线性变换法慢。

(5) 利用双线性变换法设计满足下列指标的切比雪夫型数字带阻滤波器，并作图验证设计结果：当 $1\text{kHz} \leq f \leq 2\text{kHz}$ 时， $A_t \geq 18\text{dB}$ ；当 $f \leq 500\text{Hz}$ 以及 $f \geq 3\text{kHz}$ 时， $\delta \leq 3\text{dB}$ ；采样频率 $f_s = 10\text{kHz}$ 。



由上图可以看出，设计满足要求。

四、实验思考题

(1) 双线性变换法中模拟频率和数字频率的关系是非线性的，在实验中你注意到这种非线性关系了吗？从哪几种数字滤波器的幅频特性曲线中可以观察到这种非线性关系？

答：从 2 和 4 的图中可以看出，双线性变换把模拟频率的无穷大映射到数字频率的 π 处，从而使得双线性变换法得到的滤波器比脉冲响应不变法得到的滤波器在高频部分要陡峭些。

(2) 能否利用公式 $H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z}$ 完成脉冲响应不变法的数字滤波器设计？为什么？

答：不能，因为从 s 平面到 z 平面不是一一对应的，所以不能利用上述公式完成滤波器设计。

应该由 $H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i}$ 得到 $H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$ 完成脉冲响应不变法。或者先求出 $h(t)$ ，

再求其 z 变化。

(3) 谈谈双线性变换法的特点，简述用双线性变换法设计滤波器的全过程。

答：

特点：双线性变换的主要优点： s 平面与 z 平面是单值的一一对应关系（靠频率的严重非线性关系得到的），即整个 $j\Omega$ 轴单值地对应于单位圆一周。双线性变换缺点： Ω 与 ω 成非线性关系，导致：
a. 数字滤波器的幅频响应相对于模拟滤波器的幅频响应有畸变，（使数字滤波器与模拟滤波器在响应与频率的对应关系上发生畸变）。
b. 线性相位模拟滤波器经双线性变换后，得到的数字滤波器为非线性相位。
c. 要求模拟滤波器的幅频响应必须是分段恒定的，故双线性变换只能用于设计低通、高通、带通、带阻等选频滤波器。

设计过程：首先利用关系式：

$$\Omega_i = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_i}{2} \right)$$

将所要设计的数字滤波器临界频率点 ω ，变换成对应的模拟域频率 Ω ，利用此 Ω 设计模拟滤波器，再通过双线性变换，即可得到所需的数字滤波器，其临界频率正是 ω 。再利用 `matlab` 函数：

$$[b, a] = \text{bilinear}(\text{NUM}, \text{DEN}, F_s)$$

将由向量 `NUM` 和 `DEN` 表示的 s 域中的系统函数用双线性变换法转变到 z 域。