

实验三 快速傅里叶变换及其应用

04016616 蒋宇轩

1. 实验目的

- (1) 加深对 FFT 的理解，熟悉 matlab 中的有关函数。
- (2) 应用 FFT 对典型信号进行频谱分析。
- (3) 了解应用 FFT 进行信号频谱分析过程中可能出现的问题，以便在实际中正确应用 FFT。
- (4) 应用 FFT 实现序列的线性卷积和相关。

2. 实验原理：

在各种信号序列中，有限长序列信号处理占有重要地位，对有限长序列，我们可以使用离散 Fourier 变换(DFT)。这一变换不但可以很好的反映序列的频谱特性，而且易于用快速算法在计算机上实现，当序列 $x(n)$ 的长度为 N 时，

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

它的 DFT 定义为：

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}$$

反变换为：

有限长序列的 DFT 是其 Z 变换在单位圆上的等距采样，或者说是序列 Fourier 变换的等距采样，因此可以用于序列的谱分析。

FFT 并不是与 DFT 不同的另一种变换，而是为了减少 DFT 运算次数的一种快速算法。它是对变换式进行一次次分解，使其成为若干小点数的组合，从而减少运算量。常用的 FFT 是以 2 为基数的，其长度 $N=2^l$ 。它的效率高，程序简单，使用非常方便，当要变换的序列长度不等于 2 的整数次方时，为了使用以 2 为基数的 FFT，可以用末位补零的方法，使其长度延长至 2 的整数次方。

2.1 在运用 DFT 进行频谱分析的过程中可能的产生三种误差：

(1) 混叠

序列的频谱是被采样信号的周期延拓，当采样速率不满足 Nyquist 定理时，就会发生频谱混叠，使得采样后的信号序列频谱不能真实的反映原信号的频谱。

避免混叠现象的唯一方法是保证采样速率足够高，使频谱混叠现象不致出现，即在确定采样频率之前，必须对频谱的性质有所了解，在一般情况下，为了保证高于折叠频率的分量不会出现，在采样前，先用低通模拟滤波器对信号进行滤波。

(2) 泄漏

实际中我们往往用截短的序列来近似很长的甚至是无限长的序列，这样可以使用较短的 DFT 来对信号进行频谱分析，这种截短等价于给原信号序列乘以一个矩形窗函数，也相当于在频域将信号的频谱和矩形窗函数的频谱卷积，所得的频谱是原序列频谱的扩展。

泄漏不能与混叠完全分开，因为泄漏导致频谱的扩展，从而造成混叠。为了减少泄漏的影响，可以选择适当的窗函数使频谱的扩散减至最小。

(3) 栅栏效应

DFT 是对单位圆上 Z 变换的均匀采样，所以它不可能将频谱视为一个连续函数，就一定意义上看，用 DFT 来观察频谱就好像通过一个栅栏来观看一个图景一样，只能在离散点上

看到真实的频谱，这样就有可能发生一些频谱的峰点或谷点被“尖桩的栅栏”所拦住，不能别我们观察到。

减小栅栏效应的一个方法就是借助于在原序列的末端填补一些零值，从而变动 DFT 的点数，这一方法实际上是人为地改变了对真实频谱采样的点数和位置，相当于搬动了每一根“尖桩栅栏”的位置，从而使得频谱的峰点或谷点暴露出来。

2.2 用 FFT 计算线性卷积：

用 FFT 可以实现两个序列的圆周卷积。在一定条件下，可以使圆周卷积等于线性卷积。一般情况，设两个序列的长度分别为 N_1 和 N_2 ，要使圆周卷积等于线性卷积的充要条件是 FFT 的长度 $N \geq N_1 + N_2$ 。

对于长度不足 N 的两个序列，分别将他们补零延长到 N 。

当两个序列中有一个序列比较长的时候，我们可以采用分段卷积的方法。有两种方法：

(1) 重叠相加法。将长序列分成与短序列相仿的片段，分别用 FFT 对它们作线性卷积，再将分段卷积各段重叠的部分相加构成总的卷积输出。

(2) 重叠保留法。这种方法在长序列分段时，段与段之间保留有互相重叠的部分，在构成总的卷积输出时只需将各段线性卷积部分直接连接起来，省掉了输出段的直接相加。

2.3 用 FFT 计算相关函数：

两个长为 N 的实离散时间序列 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的互相关函数定义为：

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n+m) = \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m)y(n) = x(-m) * y(m)$$

$r_{xy}(n)$ 的离散傅里叶变换为： $R_{xy}(k) = X^*(k)Y(k)$, $0 \leq k \leq N-1$

当 $x(n) = y(n)$ 时，得到 $x(n)$ 的自相关函数为： $r_{xx}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 e^{j\frac{2\pi}{N}km}$

利用 FFT 求两个有限长序列线性相关的步骤（设 $x(n)$ 长 N_1 ， $y(n)$ 长 N_2 ）：

(1) 为了使两个有限长序列的线性相关可用其圆周相关代替而不产生混淆，选择周期

$N = 2^L \geq N_1 + N_2 - 1$ ，以便使用 FFT，将 $x(n)$ ， $y(n)$ 补零至长为 N 。

(2) 用 FFT 计算 $X(k), Y(k)$, $0 \leq k \leq N-1$

(3) $R_{xy}(k) = X^*(k)Y(k)$, $0 \leq k \leq N-1$

(4) 对 $R_{xy}(k)$ 作 IFFT；取后 $N-1$ 项，得 $r_{xy}(m) - N+1 \leq m \leq -1$ ；取前 N 项，得 $r_{xy}(m) \quad 0 \leq m \leq N-1$ 。

3. 实验内容及步骤

实验中用到的信号序列：

a)高斯 (Gaussian) 序列

$$x_a(n) = \begin{cases} e^{-\frac{(n-p)^2}{q}} & 0 \leq n \leq 15 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

b)衰减正弦序列

$$x_b(n) = \begin{cases} e^{-an} \sin(2\pi fn) & 0 \leq n \leq 15 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

c)三角波序列

$$x_c(n) = \begin{cases} n & 0 \leq n \leq 3 \\ 8-n & 4 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

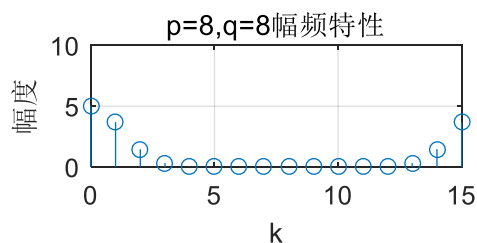
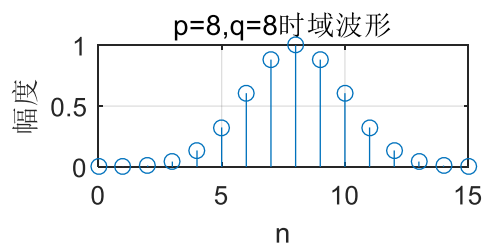
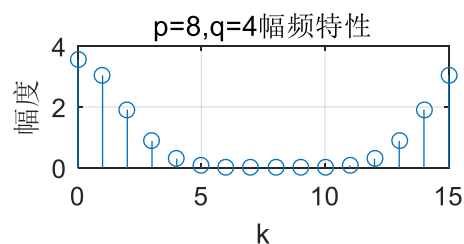
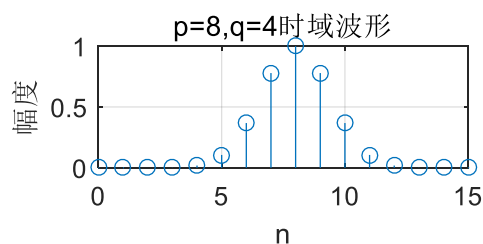
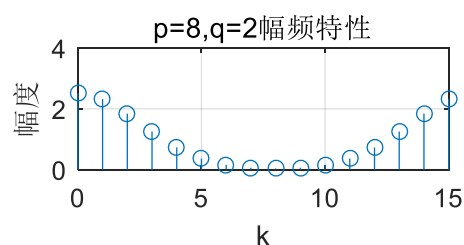
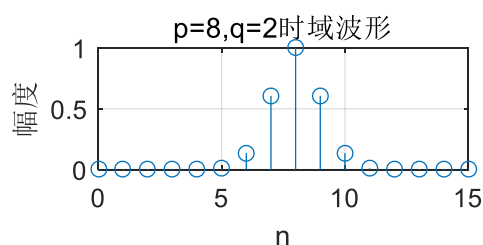
d)反三角波序列

$$x_d(n) = \begin{cases} 4-n & 0 \leq n \leq 3 \\ n-4 & 4 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

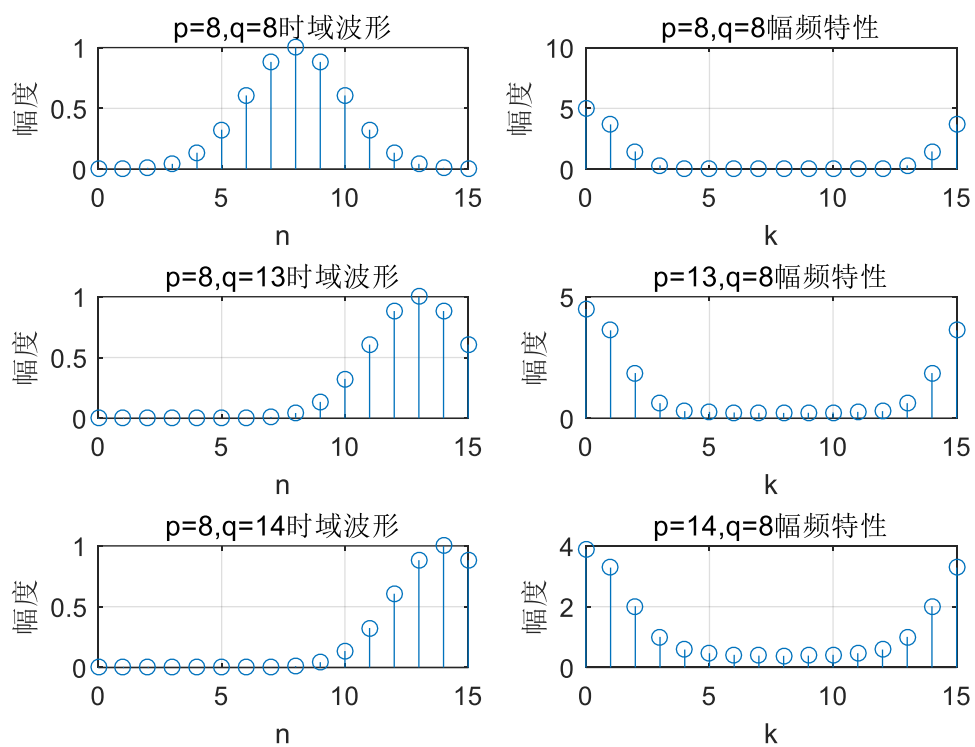
4. 实验过程及结果

1. 观察高斯序列的时域和幅频特性，固定信 $x_a(n)$ 中参数 $p=8$ ，改变 q 的值，使 q 分别等于 2, 4, 8，观察他们的时域和幅频特性，了解当 q 取不同值时，对信号序列的时域和幅频特性影响；固定 $q=8$ ，改变 p ，使 p 分别等于 8, 13, 14，观察参数 p 变化对信号序列的时域和幅频特性影响，注意 p 等于多少时，会发生明显的泄漏现象，混叠是否也随之出现？记录实验中观察到的现象，绘出相应的时域序列和幅频特性曲线。

固定 $p=8$ ，使 q 分别等于 2,4,8 时的时域和幅频特性：



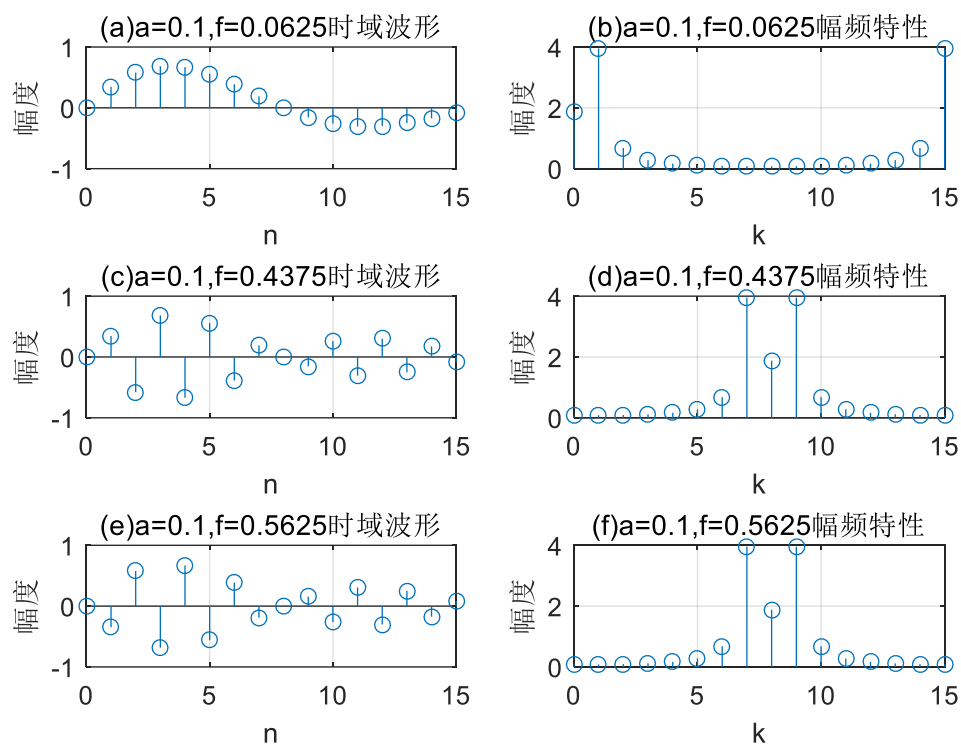
固定 $q=8$ ，使 p 分别等于 8,13,14 时的时域和幅频特性：



固定 p ，改变 q ，随着 q 增大，时域波形变化缓慢，低频分量增加，频谱泄露和混叠减小。

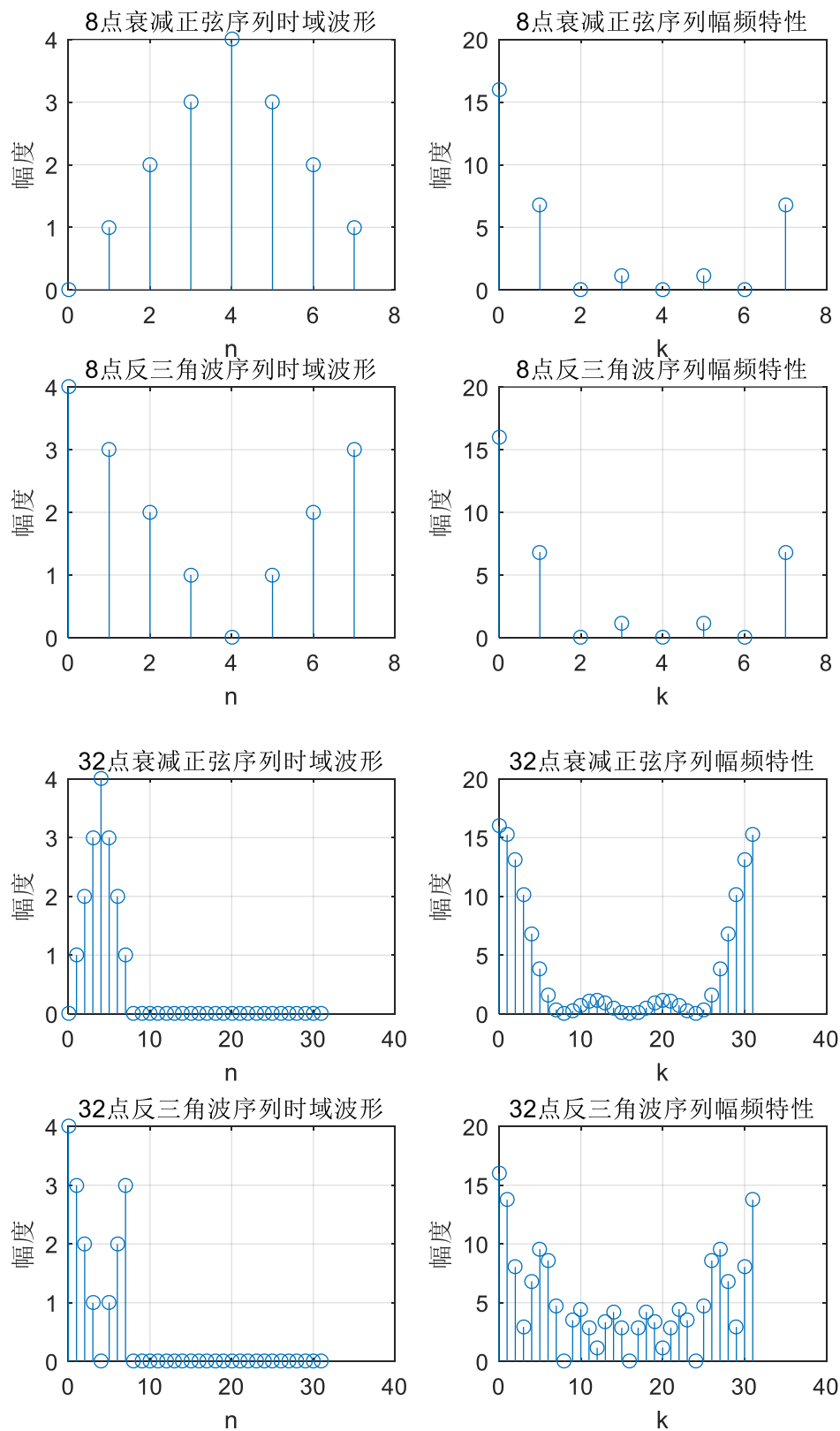
固定 q ，改变 p ，随着 p 增大，窗口位置偏移，受窗口宽度的影响，波形在高处截断，产生严重的频谱泄露。

2. 观察衰减正弦序列 $x_b(n)$ 的时域和幅频特性, $a=0.1$, $f=0.0625$, 检查谱峰出现位置是否正确, 注意频谱的形状, 绘出幅频特性曲线, 改变 f , 使 f 分别等于 0.4375 和 0.5625 , 观察这两种情况下, 频谱的形状和谱峰出现的位置, 有无混叠和泄漏现象? 说明产生现象的原因。



由于 DFT 的选频性, 衰减正弦序列的频谱在信号频率、镜像频率的混叠频率上呈现出峰值。 $f=0.0625$ 和 $f=0.4375$ 时, 采样定理满足, 对应的镜像分量分别为 15 和 9, 幅频特性如图 (b)、(d); 信号频率 $f=0.5625$ 时, 大于 0.5 倍的采样频率, 采样定理不满足, 频谱的周期延拓产生混叠。

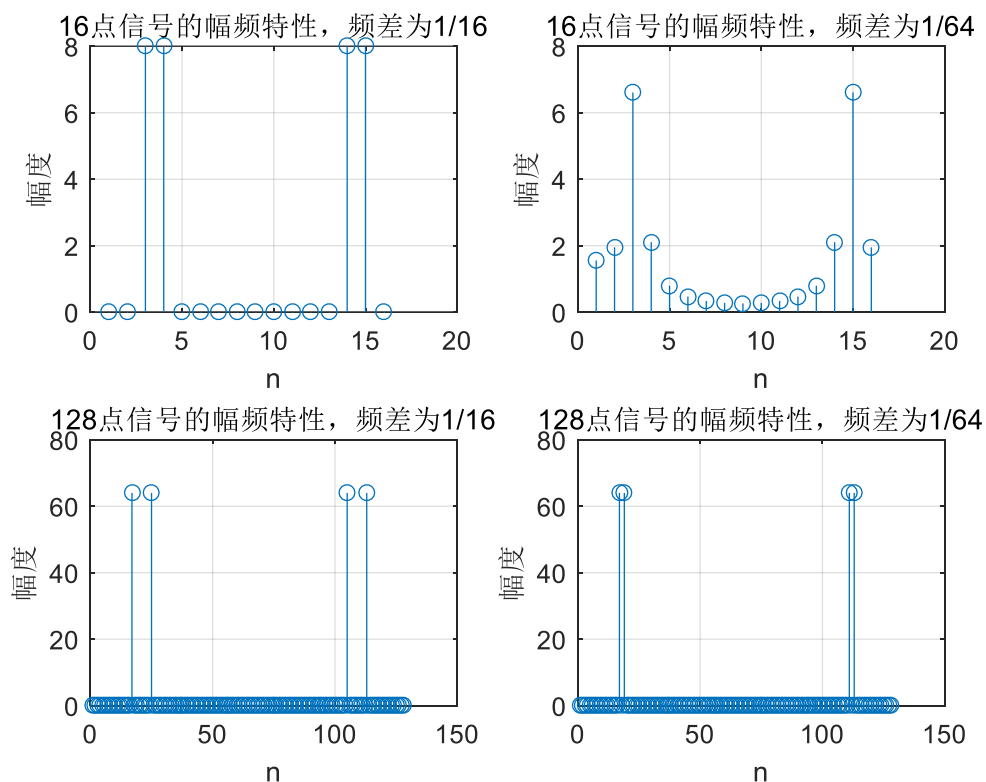
3. 观察三角波和反三角波序列的时域和幅频特性，用 $N=8$ 点FFT分析信号序列 $x_c(n)$ 和 $x_d(n)$ 的幅频特性，观察两者的序列形状和频谱曲线有什么异同？绘出两序列及其幅频特性曲线。在 $x_c(n)$ 和 $x_d(n)$ 末尾补零，用 $N=32$ 点FFT分析这两个信号序列的幅频特性，观察频谱特性发生了什么变化？两种情况下的FFT频谱还有相同之处吗？这些变化说明了什么？



周期延拓后，反三角波序列可由三角波序列圆周位移 4 点得到。根据 DFT 循环移位特性，两者具有相同的幅频特性；将 8 点三角波和反三角波补零到 32 位后再做 DFT，周期延拓后得到两个不同的序列，故其幅频特性也不相同。

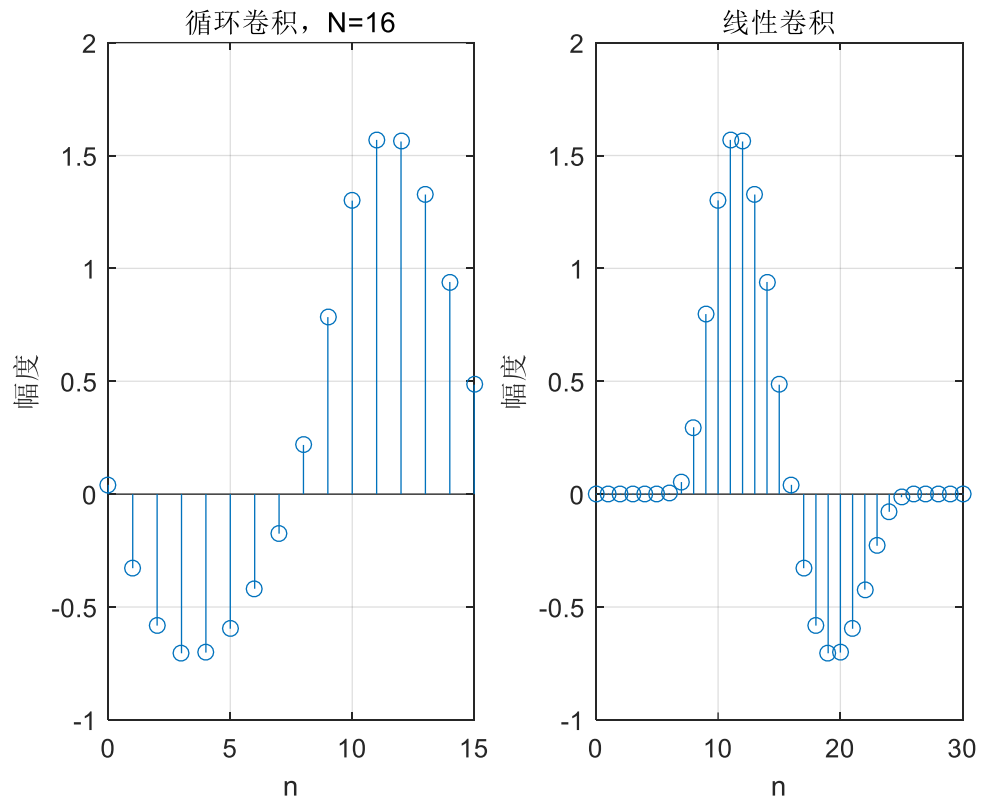
4. 一个连续信号含两个频率分量，经采样得 $x(n) = \sin[2\pi * 0.125n] + \cos[2\pi * (0.125 + \Delta f)n]$

$n=0, 1, \dots, N-1$ 。已知 $N=16$ ， Δf 分别为 $1/16$ 和 $1/64$ ，观察其频谱；当 $N=128$ 时， Δf 不变，其结果有何不同？



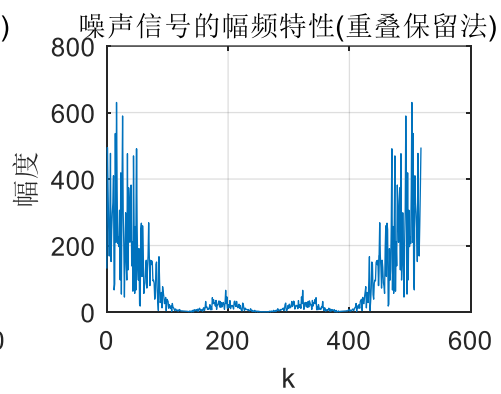
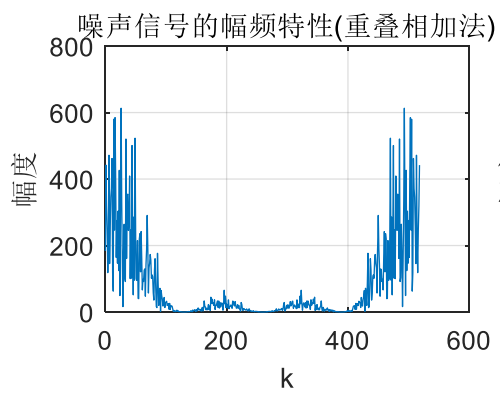
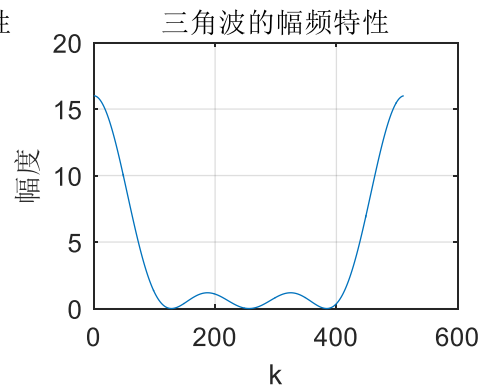
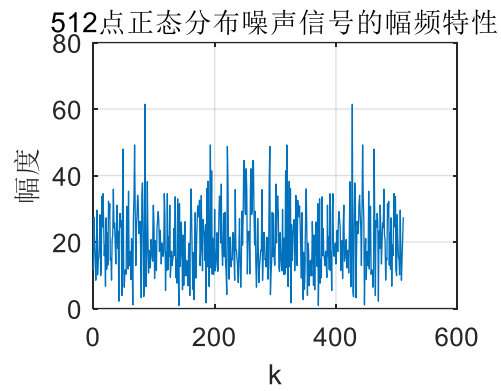
当两个信号的频差为 $1/16\text{Hz}$ 时，16 点的 FFT 能够分辨；但当两个信号的频差为 $1/64\text{Hz}$ 时，16 点的 FFT 不能分辨；增加信号长度为 128 点时，对于 $1/16\text{Hz}$ 和 $1/64\text{Hz}$ 两种情况都能正确分辨。

5. 用FFT 分别计算 $x_a(n)$ ($p=8, q=2$) 和 $x_b(n)$ ($a=0.1, f=0.0625$) 的16点循环卷积和线性卷积。

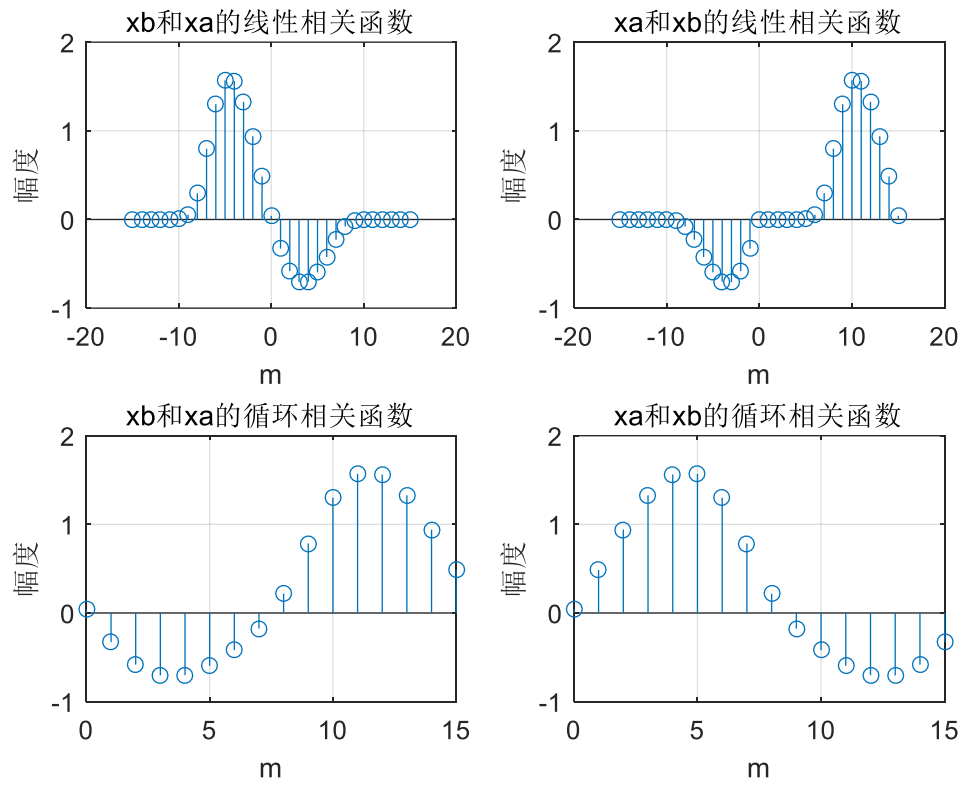


6. 产生—512点的随即序列 $x_e(n)$ 并用 $x_c(n)$ 和 $x_e(n)$ 做线形卷积，观察卷积前后 $x_e(n)$

频谱的变化。要求将 $x_e(n)$ 分成8段，分别采用重叠相加法和重叠保留法。

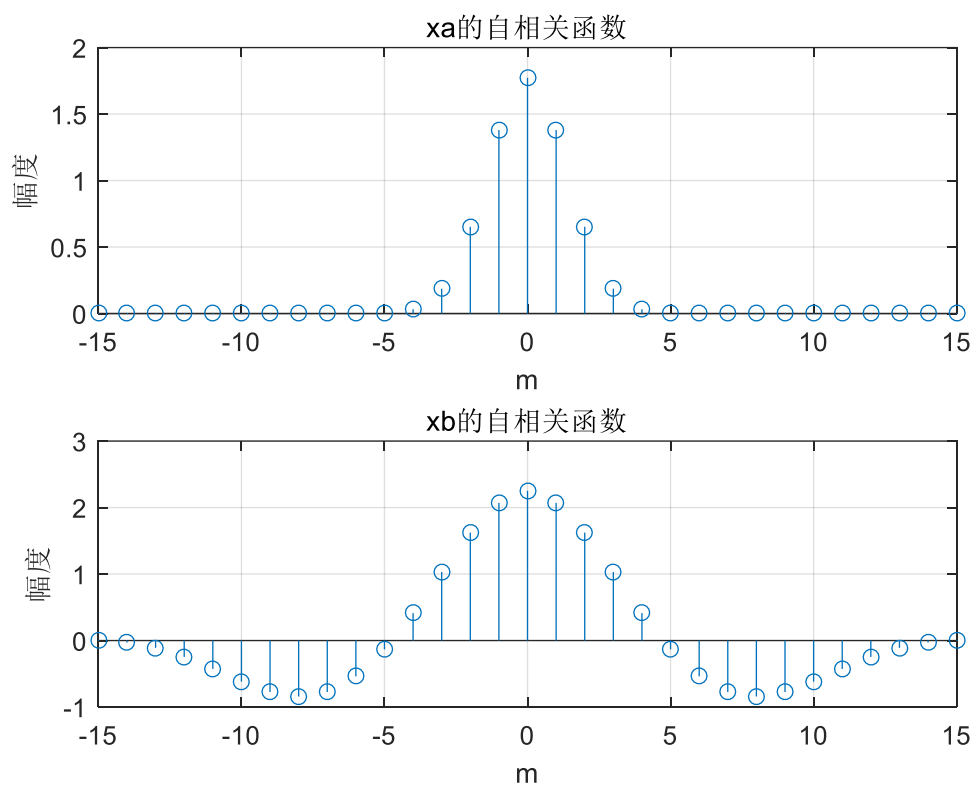


7. FFT分别计算 $x_a(n)$ ($p=8, q=2$) 和 $x_b(n)$ ($a=0.1, f=0.0625$) 的16点循环相关和线形相关, 问一共有多少种结果, 他们之间有何异同点。



各有两种情况, 从图上可以看出互为时间反转, 频谱大致呈镜像对称。

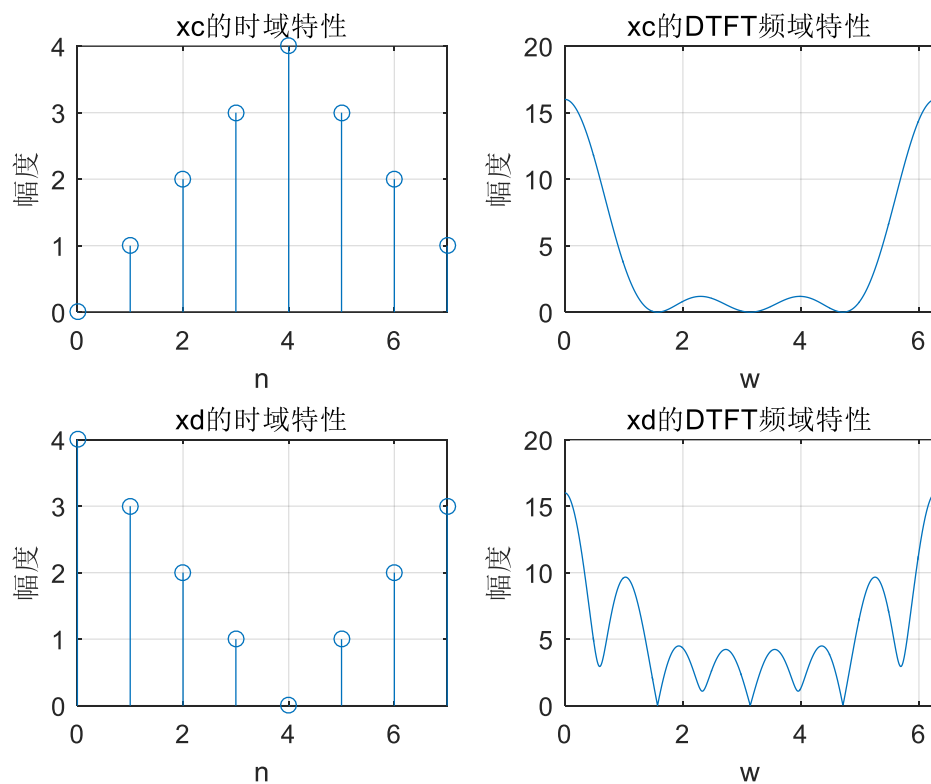
8. 用FFT分别计算 $x_a(n)$ ($p=8, q=2$) 和 $x_b(n)$ ($a=0.1, f=0.0625$) 的自相关函数。



5. 思考题

(1) 实验中的信号序列 $x_c(n)$ 和 $x_d(n)$, 在单位圆上的 Z 变换频谱 $|X_c(j\omega)|$ 和 $|X_d(j\omega)|$ 会相同吗? 如果不同, 你能说出哪一个低频分量更多一些吗? 为什么?

答:



由图可以看出: $x_c(n)$ 的时域波形较平缓, 低频分量更多。

(2) 对一个有限长序列进行 DFT 等价于将该序列周期延拓后进行 DFS 展开, 因为 DFS 也只是取其中一个周期来计算, 所以 FFT 在一定条件下也可以用以分析周期信号序列。如果实正弦信号 $\sin(2\pi fn)$, $f=0.1$ 用 16 点 FFT 来做 DFS 运算, 得到的频谱时信号本身的真实谱吗?

答:

不是信号本身的真实谱。因为原信号的周期是 $1/f=10$, 用 16 点 FFT 作 DFS 运算时, 截取信号长度不是其周期整数倍, 故在周期延拓时会发生频谱泄漏现象。若取 10 的整数倍 FFT, 得到的就是真实频谱。

