Московский Физико-Технический Институт

Кафедра высшей математики

Гармонический анализ

Семинары

Преподователь: Скубачевский Антон

Верстка: Айвазов Денис

при поддержке студсоветов ФРТК и ФУПМ

1 Семинар

1.1 Основная теория

Определение 1. ***Тригонометрический ряд***- *это ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k sin(kx)) \tag{1}$$

Определение 2. ***Тригонометрическая система***- *это система функций* $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \ldots$

В этом семестре мы будем иметь дело с функциональными пространствами - пространствами, в которых базис состоит из функций.

Мы будем в дальнейшем раскладывать функции в ряд Фурье, то есть по тригонометрической системе, значит, логично предположить, что эта система - базис в некотором функциональном пространстве (т.е. для некоторого множества функций). Причем ортогональный.

Почему же эта система является ортогональным базисом?
Для ортогональности надо, чтобы (по аналогии с привычной нам декартовой прямоугольной системой координат) $(\bar{i}, \bar{j}) = 0$, где i и j - в нашем случае не базисные единичные векторы, а базисные функции, а именно функции из тригонометрической системы. (а для нормированности $|\bar{i}| = 1$.)

$$(\cos(kx), \cos(mx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(mx)dx = /k \neq m/ = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{1}{2}\cos(x(k-m)) + \cos(x(k+m))\Big)dx$$

$\Rightarrow$ (т.к $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(xn)dx = 0$.) $(\cos(kx), \cos(mx)) = 0$. Аналогично с $(\sin(kx), \sin(mx) = 0$ при $m \neq k$ и $(\sin(kx), \cos(mx) = 0$

Теперь найдем длину базисных векторов, т.е. $|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ (покажем, что они не нормированы).
$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2mx))dx = \frac{x}{2}|_{-\pi}^{\pi} = \pi$
Аналогично получим для $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)dx = \pi$.

Определение 3. *Пусть f - это 2π-периодическая абсолютно интегрируемая функция. Тогда тригонометрический ряд (1), где*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx; \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx;$$

называется ***Рядом Фурье функции*** $f(x)$. *В этом случае пишут:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big)$$

Рассмотрим случаи:

1. $f(x)$ - нечетная функция.
   $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ - очевидно: площади под графиком справа и слева от нуля равны по модулю и противоположны по знаку.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-t)\cos(kt)d(-t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = 0;$$

$$(k \geq 0)$$

Предпоследнее равенство верно, т.к.: -1 вынесли из-под знака дифференциала, для нечетной функции $f(-t) = -f(t)$ и если поменять местами пределы интегрирования в определенном интеграле, вылезет минус. Итого вылезло три минуса, которые, умножившись, дали один минус.

$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)dx$ - получим аналогично (разница с коэффициентами произвольной функции в двоечке перед интегралом и пределах интегрирования. Можно считать этот коэффициент и по общей формуле.)

2. $f(x)$ - четная функция.
   $b_k = 0$
   $a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)dx,$
   $a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos(kx)dx$

Определение 4. *Пусть x_0 - точка разрыва 1-ого рода. Тогда обобщцнные односторонние производные это*

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0\boldsymbol{+0})}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0\boldsymbol{-0})}{h}$$

Обобщенные потому, что жирным выделено. Разница с обычными в том, что значения $f(x_0)$ не существует, поэтому вместо него $f(x_0+0)$ или $f(x_0-0)$

Определение 5. *Пусть x_0 - точка разрыва 1-ого рода. Тогда x_0 называется* ***почти регулярной точкой****, если $\exists f(x_0+0), f(x_0-0), f'_+(x_0), f'_-(x_0)$*
Если при этом $f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$, то x_0 - ***регулярная точка***

Теорема 1 (Поточечная сходимость ряда Фурье)**.** *Пусть $f -$ 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция, и при этом x_0 - ее почти регулярная точка. Тогда ряд Фурье функции f в этой точке сходится к $\frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$, а если точка регулярная, то к значению $f(x_0)$*

Теорема 2 (Равномерная сходимость ряда Фурье)**.** *Пусть $f -$ 2π-периодическя, непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая функция, тогда ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно т.е.*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$$

То есть можно уже писать не $\sim$, а $=$. $\sim$, впрочем, тоже можно.

Замечание: если f только 2π-периодическая, **кусочно** непрерывная и кусочно непрерывно-дифференцируемая функция, то она сходится всего-навсего поточечно к $\frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$.

Теорема 3 (нужная для доказательства, что ряд Фурье разрывной функции не сходится равномерно)**.** *Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве E. Пусть $u_k(x_0)$ - непрерывна $\forall k, x_0 \in E$. Тогда сумма ряда $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ - непрерывна в x_0*

Цель: найти откуда берутся a_k, b_k. Будем их искать в предположении, что ряд сходится равномерно т.е. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.
Домножим обе части на функцию $\cos(nx)$ и возьмем интеграл от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx = \frac{a}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx \Big)$$

Т.к. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \pi & , k = n \end{cases}$ Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx = a_n \pi \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx, \ n \geq 1$$

Теорема 4 (Лемма Римана об осцилляции)**.** *Пусть функция f абсолютно интегрируема на конечном (или бесконечном) интервале (a, b). Тогда*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$$

$\Rightarrow$ *при* $n \to \infty$ *получаем* $a_n, b_n \to 0$

Замечание: Если $2\pi-$периодическая функция интегрируема на отрезке $[a, a + 2\pi]$, то она интегрируема на любом отрезке $[b, b + 2\pi]$

1.2 Пример 1

Разложить $\sin^2 x$ в ряд Фурье.
$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$. Т.е. $a_0 = 1; \ a_2 = -\frac{1}{2}$ а остальные коэффициенты равны 0.

1.3 Пример 2

Найти ряд Фурье функции $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x), \ x \in (0, 2\pi)$. Нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд Фурье данной функции на равномерную сходимость (на всем $\mathbb{R}$).
Решение:

1. Пусть $\tilde{f}$ $- 2\pi$-периодическая функция, совпадающая с f на $(0, 2\pi)$

   Дополняем ее $\tilde{f}(x) = 0$, при $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

   Построим ее график. Он изображен на рис.1.

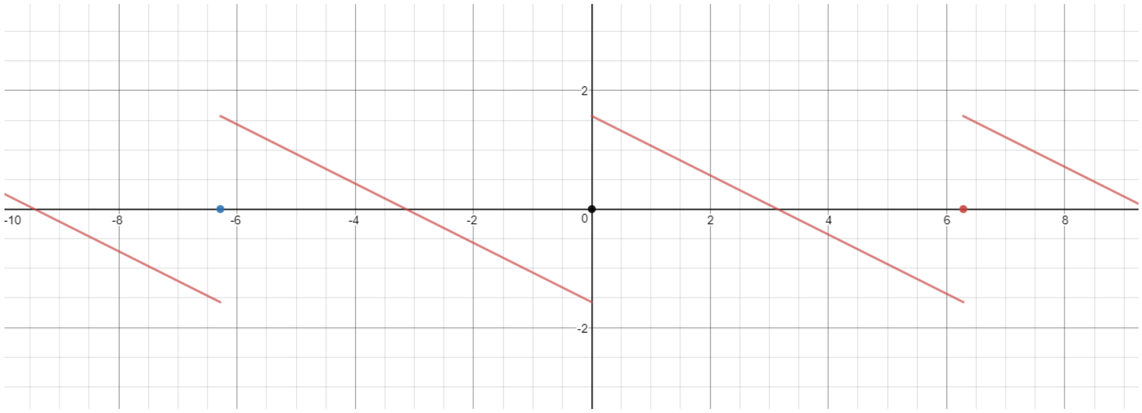


Рис. 1

Далее в этом пункте будем доказывать, что график суммы ряда функции $\tilde{f}(x)$ совпадает с графиком самой функции $\tilde{f}(x)$.

Будем доказывать с помощью теоремы 1. То, что $\tilde{f}(x)$ 2π-периодическая и каждая ее точка регулярная мы знаем, это очевидно(даже точки разрыва, мы специально в них выбрали значение функции $\tilde{f}(x) = (f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$, т.е. таким образом, чтобы они были регулярными. Точки непрерывности же по дефолту регулярные).

Осталось доказать, что $\tilde{f}(x)$ абсолютно интегрируемая на $[0, 2\pi]$.

Доказывается с помощью теоремы из 2го семестра: т.к. $\tilde{f}(x)$ непрерывна на $(0, 2\pi)$ и ограничена на $[0, 2\pi] \Rightarrow$ то $\tilde{f}(x)$ - абсолютно интегрируема на $[0, 2\pi]$.

Т.о., все условия теоремы 1 выполняются. Значит, ряд Фурье функции $\tilde{f}(x)$ сходится поточечно во всех точках. Причем сходится к $\tilde{f}(x_0) \forall x_0 \in \mathbb{R}$. То есть значение суммы ряда в каждой точке стремится к значению нашей функции, то есть их графики совпадают. Ч.т.д.

2. Представим эту функцию в виде ряда. Заметим, что $\tilde{f}(x)$ нечетная. Значит $a_k = 0$.

$$\text{Найдем } b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(kx)dx = \Big/ u = \frac{\pi-x}{2};\ dv = \sin(kx)dx \Big/ =$$
$$= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi-x}{2}\frac{1}{k}(-\cos(kx))\,\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{2k}\cos(kx)dx\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{\pi}{2}\frac{1}{k}(-1) - \frac{\pi}{2}\frac{1}{k}(-1)\Big) = \frac{1}{k}$$

(второй интеграл, т.е. от косинуса, ноль, можете проверить сами, если вам не очевидно)

Таким образом:

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} \quad x \in (0, 2\pi)$$

Разложение f на $(0, 2\pi)$ совпадает с этим.

3. Ряд Фурье не сходится равномерно т.к. поскольку $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ - непрерывные функции, то если бы ряд сходился равномерно, то он сходился бы к непрерывной функции по теореме 3, но $\tilde{f}$ не является непрерывной.

Ответ: $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}, x \in (0, 2\pi)$; не сходится равномерно.

Замечание. На рис.2 показано, как себя ведет сумма ряда, особенно в точках разрыва, при конечном (~ 50) числе членов ряда. Видим, что в точках разрыва возникают всплески, и сумма ряда сильно отклоняется от значений функции. Если бы ряд сходился равномерно, такой фигни бы не было.

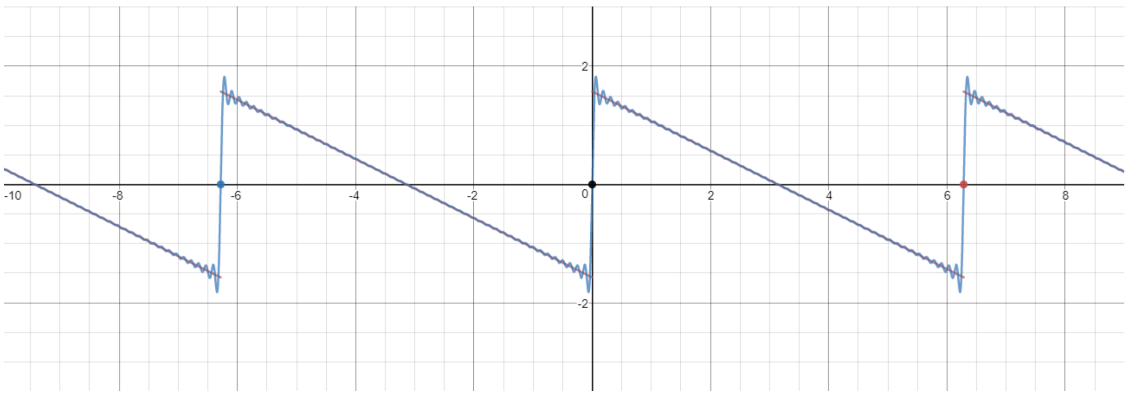


Рис. 2

1.4 Пример 3

Разложить функцию $f(x) = 2x - 1, x \in (0, \pi)$ в ряд Фурье по $\{\cos(nx), n \in \mathbb{N}\}$. Нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд Фурье данной функции на равномерную сходимость (на всем $\mathbb{R}$).

1. $\tilde{f}(x)$ зададим так: $\tilde{f}(x) = 2x - 1, x \in (0, \pi)$; относительно нуля отразим четно (т.к. надо разложить по косинусам), т.е. $\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x)$. Потом продолжим на всю ось с периодом 2π. Ее график:

   График суммы ряда кстати с ним совпадает, т.к. ряд Фурье сходится равномерно (будет доказано в пункте 3).

   График суммы (и самой функции $\tilde{f}(x)$) представлен на рис.3.

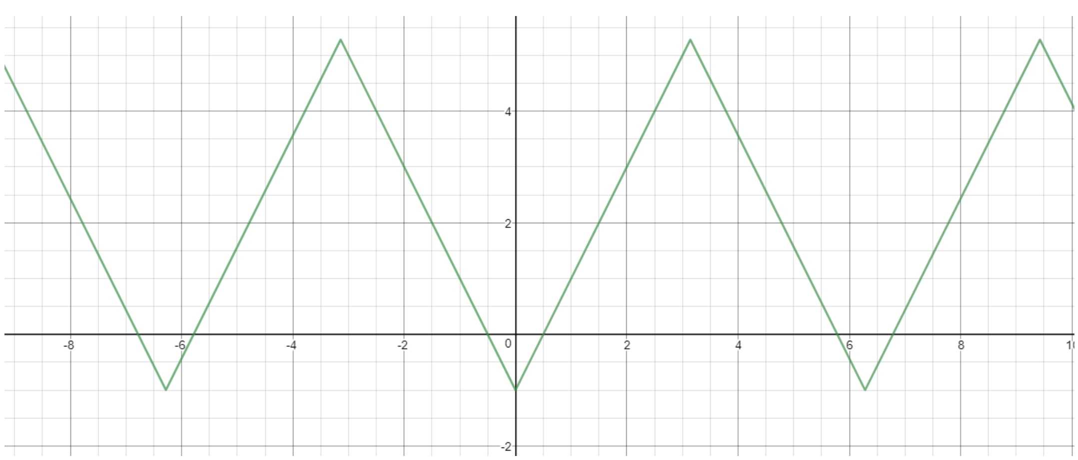


Рис. 3

2. Найдем ряд Фурье: $b_k = 0$ т.к. функция четная.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-1)dx = \frac{2}{\pi}x^2\,|_0^\pi - \frac{2}{\pi}x\,|_0^\pi = 2\pi - 2$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (2x-1)\cos(kx)dx = /u = (2x-1);\ dv = \cos(kx)dx/ =$$
$$= \frac{2}{\pi}\Big((2x-1)\frac{1}{k}\sin(kx)|_0^\pi - \frac{2}{k}\int_0^\pi \sin(kx)dx\Big) = \frac{4}{\pi k^2}\cos(kx)|_0^\pi = \frac{4}{\pi k^2}\big((-1)^k - 1\big), k \geq 1$$

таким образом: $\tilde{f}(x) \sim (\pi - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k^2}\big((-1)^k - 1\big)\cos(kx)$

Ряд Фурье сходится равномерно, т.к. $\tilde{f}$ – 2π-периодическая, непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая функция.

Ответ: $f(x) = (\pi - 1) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k^2}\big((-1)^k - 1\big)\cos(kx),\ \ x \in (0, \pi)$; ряд Фурье сходится равномерно.

Замечание. В силу равномерной сходимости сумма ряда даже при небольшом числе членов будет очень похожа на саму функцию и не будет скакать как огалтелая. На рис.4 приведен график суммы всего-навсего первых 5 членов ряда (а уже весьма похоже на правду!).

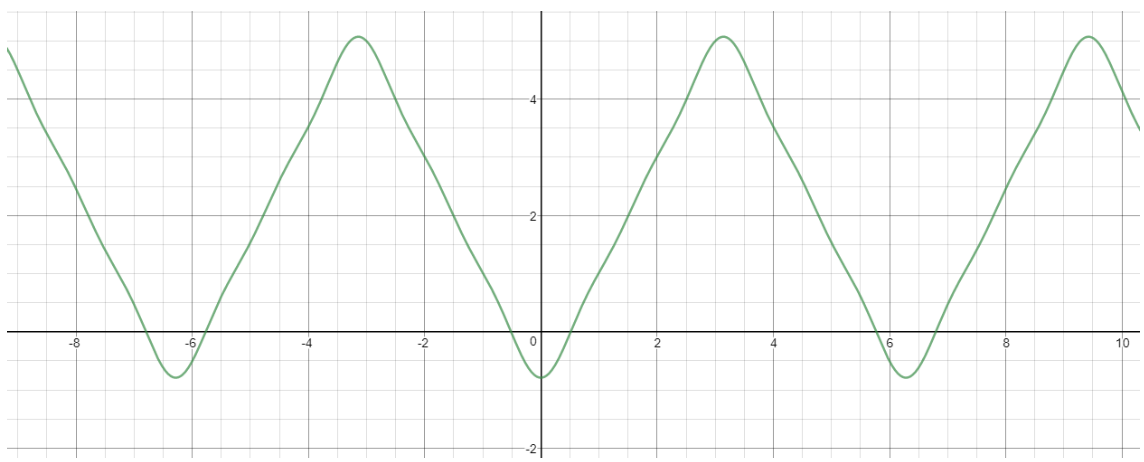


Рис. 4

1.5 Пример 4

Разложить в ряд Фурье $f(x) = signx$ на $(-\pi, \pi)$. Нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд Фурье данной функции на равномерную сходимость (на всем $\mathbb{R}$).

Где $signx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

1. Зададим функцию $\tilde{f}(x)$, равную $f(x)$ на $(-\pi, \pi)$

   Далее зададим ее значение в точках разрыва, так, чтобы сумма ее ряда сходилась к ней поточечно: $\tilde{f}(\pi + 2\pi n) = 0$. И затем продолжим на всю ось с периодом 2π.

   График к этому примеру, а заодно и к следующему приведен на рис.5.

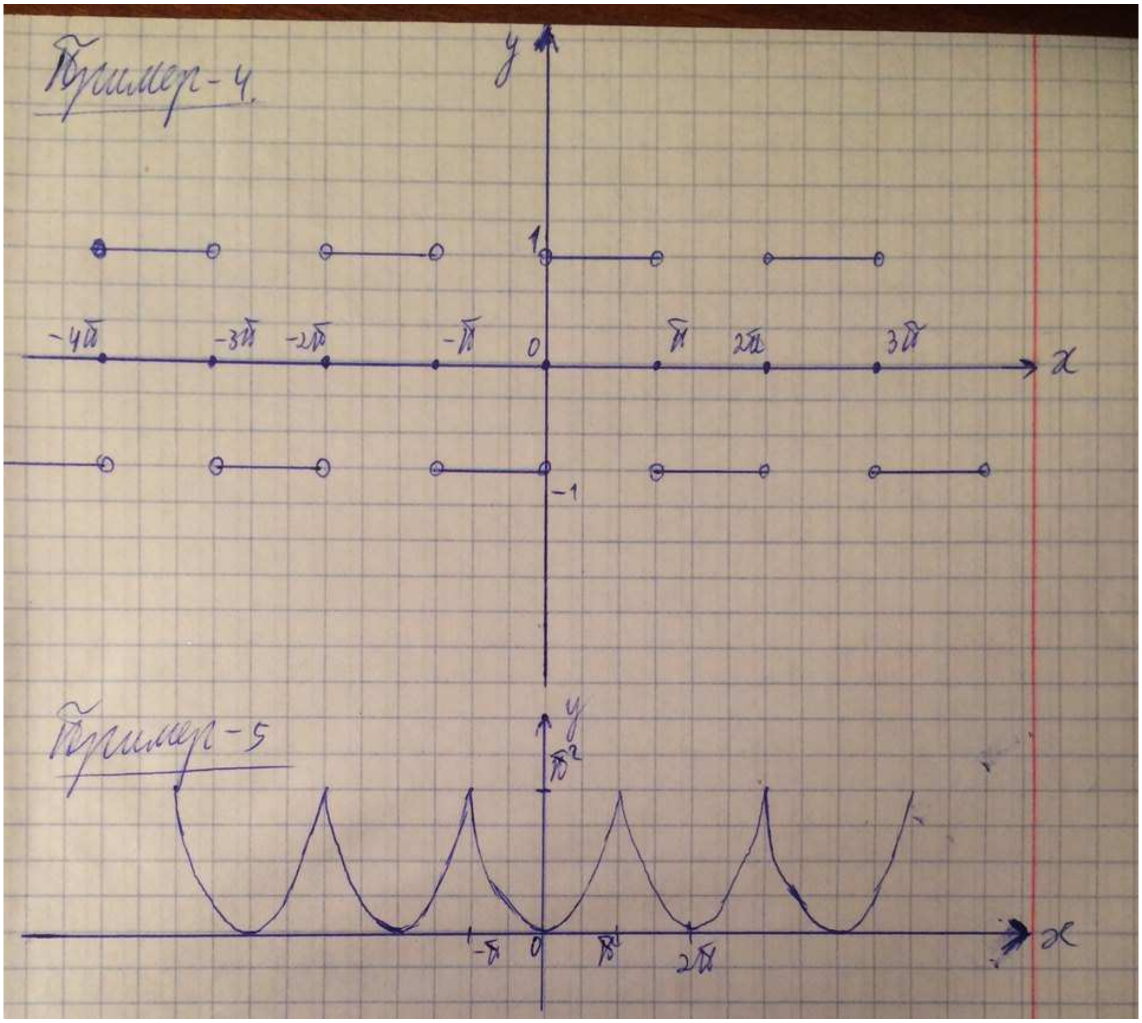


Рис. 5

2. $\tilde{f}(x)-$ нечетная, значит $a_k = 0, k \geq 0$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi k}(-\cos(kx)|_0^{\pi}) = \frac{2}{\pi k}\big((-1)^{k+1}+1\big)$$

3. Ряд Фурье не сходится равномерно т.к. поскольку $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ - непрерывные функции, то если бы ряд сходился равномерно, то он сходился бы к непрерывной функции по теореме 3, но $\tilde{f}$ не является непрерывной.

Ответ: $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k}\big((-1)^{k+1}+1\big)\sin kx,\ x \in (-\pi, \pi)$
Не сходится равномерно.

1.6 Пример 5

Разложить x^2 на $[-\pi, \pi]$. Нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд Фурье данной функции на равномерную сходимость (на всем $\mathbb{R}$).

1. Зададим $\tilde{f}(x)$: $\tilde{f}(x) = f(x)$ на $[-\pi, \pi]$, а потом продолжим на всю числовую ось с периодом 2π.

2. Т.к. четная, $b_k = 0$
   $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$
   $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 cos(nx) dx = ... = \frac{(-1)^n 4\pi}{n^2}$

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^2 4\pi}{k^2} cos(kx)$$

3. Ряд Фурье данной функции сходится равномерно по Теореме 2 на всей числовой оси.

Семинар 2.

2 Семинар

2.1 Пример 1

Разложить x^2 на $[0;\pi)$ по sin

Заметим, что x^2 - функция четная, следовательно, должна быть разложена по косинусам. Но в этой задаче дело в том, что x^2 задан только на $[0;\pi)$. Поэтому мы вольны продолжить x^2 на всю ось как четно, так и нечетно. В задаче сказано разложить по синусам, значит, продолжим нечетно. Приступим к решению.

1. Построим $\tilde{f}$, такую что $\tilde{f} = f$ при $x \in [0;\pi)$, $\tilde{f}$ - нечетно продолжена на $[-\pi;0)$, $\tilde{f}(\pi+2\pi n) = 0$ и $\tilde{f}$ $2\pi-$ периодическая

2. $$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin(kx)dx = \text{... по частям ...} = \frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1} + \frac{4}{\pi k^3}\Big((-1)^2 - 1\Big)$$
   $a_k = 0;\ (k \geq 0)$, т.к. $\tilde{f}$ нечетная.
   Таким образом, на $[0;\pi)$ получим:
   $$x^2 \sim \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1} + \frac{4}{\pi k^3}((-1)^2 - 1)\Big)\sin(kx)$$

3. Исследуем на равномерную непрерывность. Видим, что $\tilde{f}$ (график суммы ряда) - разрывна, значит про себя сразу понимаем, что равномерной непрерывности, скорее всего, нет. Докажем это четко. Т.к. sin, cos непрерывны на $\mathbb{R}$, то если бы ряд из них сходился бы равномерно, то он сходился бы к непрерывной функции, но $\tilde{f}$ - не непрерывный $\Rightarrow$ ряд не может сходится равномерно, ч.т.д.

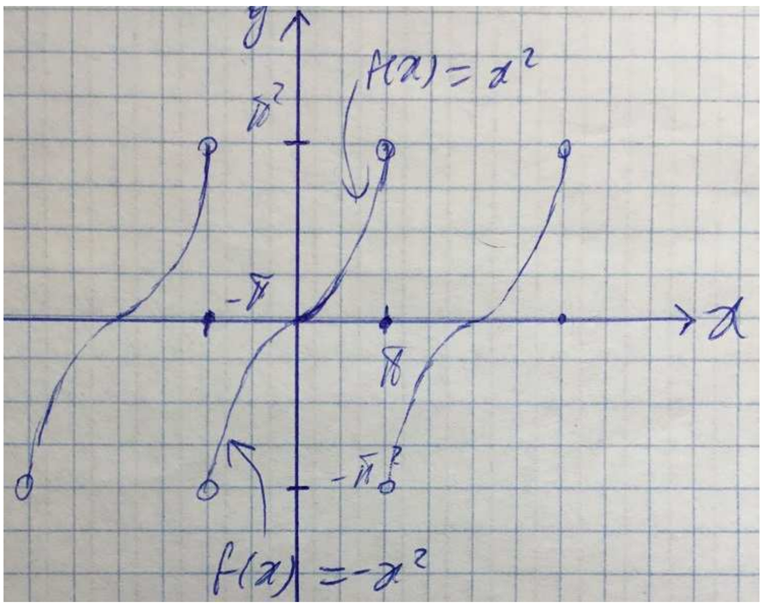


Рис. 6

2.2 Пример 2

Разложить x^2 на $(0; 2\pi)$ по sin и cos

1. Построим $\tilde{f}$, такую что $\tilde{f} = f$ при $x \in (0; 2\pi)$ $\tilde{f}(2\pi n) = \frac{4\pi^2+0}{2} = 2\pi^2$; $\tilde{f}$ - $2\pi-$ периодическая

2. Посчитаем коэффициенты

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8}{3}\pi^2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{4}{k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin(kx) dx = -\frac{4\pi}{k}$$

(Последние 2 интеграла посчитаны по частям).

$$\text{На } (0; 2\pi): \; x^2 \sim \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\cos(kx) - \frac{4\pi}{k}\sin(kx)$$

3. $\tilde{f}$ не сходится равномерно (на $\mathbb{R}$) (рассуждения аналогичны предыдущей задаче).

Посмотрим теперь, как решать примеры, если функция 2l-периодическая, а не $2\pi-$ периодическая.

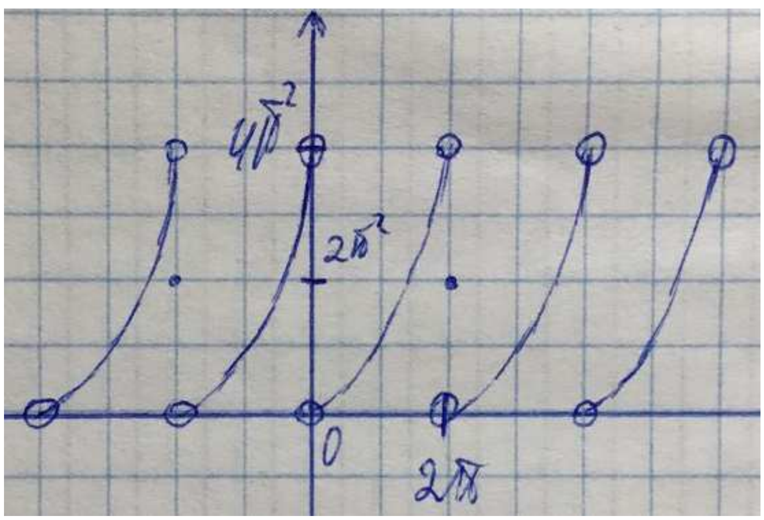


Рис. 7

2.3 $2l-$ периодическая

Пусть f не $2\pi-$ периодическая, а $2l-$ периодическая, где $l \in \mathbb{R}$; f - абсолютно интегрируема на $[-l; l]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx\frac{\pi}{l}) + b_k \sin(kx\frac{\pi}{l}); \quad a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(kx\frac{\pi}{l})dx; b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(kx\frac{\pi}{l})dx;$$

2.4 Пример 3

Разложить $f(x) = \begin{cases} 2, x \in (-2; 0] \\ x+2, x \in (0, 2) \end{cases}$ в ряд Фурье с периодом 4. Построить график суммы и исследовать, сходится ли равномерно.

1. Построим $\tilde{f} = f$ при $x \in (-2, 2)$; $\tilde{f}(2+4n) = 3$, и $\tilde{f}$ – 4–периодическая функция. ($l = 2$).

2. Далее просто подставляем в формулы.

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(nx\frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(x+2)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = (x+2)\frac{\sin(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n}\ |_0^2 - \int_0^2 \frac{\sin(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n}dx = \frac{\cos(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n \frac{\pi n}{2}} = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{\pi^2 n^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\tilde{f}(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}2dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(x+2)dx = 3,5$$
$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}2\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(x+2)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

Ответ:

$$f(x) \sim \frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(((-1)^n - 1)\frac{2}{\pi n}^{2}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) + 2\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\right),\quad x \in (-2, 2)$$

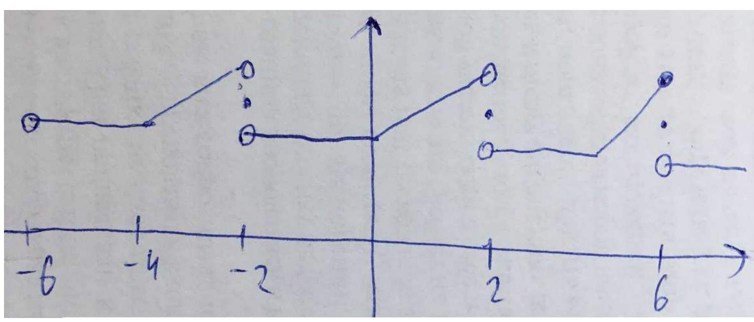


Рис. 8

2.5 Комплексный ряд Фурье

Если f - 2π - периодическая:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Если $2l$– периодическая, то $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-ikx\frac{\pi}{l}}dx$; $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx\frac{\pi}{l}}$

2.6 Пример 4

Найти комплексную форму ряда Фурье функции с периодом π $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x \le \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$

Вспомним, что $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}; cosx = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$ и $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}; sinx = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$

$$c_x = \frac{1}{2\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(x)e^{-2nxi}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}e^{-2nxi}dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} e^{ix(1-2n)}dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} e^{ix(-1-2n)}dx = \underbrace{\left.\frac{exp(ix(1-2n))}{2\pi i(1-2n)}\right|_0^{\pi/2}}_{A} + \underbrace{\left.\frac{exp(ix(-1-2n))}{2\pi i(-1-2n)}\right|_0^{\pi/2}}_{B}$$

Немного причешем A и B (начнем с подстановки концов палки Ньютона-Лейбница в экспоненту; будем пользоваться формулой $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$):

$$e^0 = 1$$

$$exp(i\frac{\pi}{2}(1-2n)) = cos(\frac{\pi}{2} - \pi n) + isin(\frac{\pi}{2} - \pi n) = i(-1)^n$$

$$exp(i\frac{\pi}{2}(-1-2n)) = cos(-\frac{\pi}{2} - \pi n) + isin(-\frac{\pi}{2} - \pi n) = i(-1)^{n+1}$$

Подставим найденное в A и B и воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$A = \frac{i(-1)^n - 1}{2\pi i(1-2n)}$$

$$B = \frac{-i(-1)^n - 1}{2\pi i(-1-2n)};$$

$$\text{в итоге } c_n = A + B = \frac{i(-1)^n - 2n}{\pi i(1-4n^2)}$$

Ответ:

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{i(-1)^n - 2n}{\pi i(1-4n^2)}e^{2inx}$$

Семинар 3.

3 Семинар

3.1 Пример 1

Пусть f(x) задана на $(0; \frac{\pi}{2})$

Разложить $f(x)$ по $sin(2k-1)x$

Ранее мы встречались с задачами разложить просто по синусам или косинусам. В таком случае мы продолжали соответственно функцию на всю ось нечетным или четным образом. Теперь же нужно не просто разложить по синусам (т.е. как минимум продолжить нечетно), а еще и избавиться от половины этих синусов (от синусов "четных дуг"). Логично предположить, что это можно сделать, продолжив функцию определенным образом с $(0; \frac{\pi}{2})$ на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Паучье чутье подсказало нам, что нужно продолжить на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ "четно относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ т.е. $f(\pi - x) = -f(x)$ $(\forall x \in (0; \frac{\pi}{2}))$

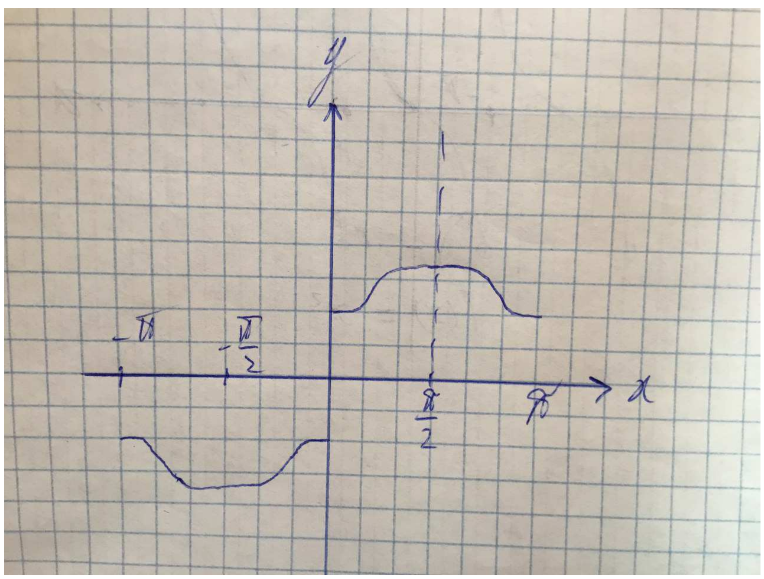


Рис. 9

Итак, рассмотрим продолжение функции с $(0; \frac{\pi}{2})$ на $(-\pi; \pi)$: $\begin{cases} f(\pi - x) = f(x); x \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ f(x) - \text{ нечетная} \end{cases}$

Вторая строчка говорит нам, что разложение будет по синусам, а первая (по нашему паучьему предположению) убьет синусы четных дуг ($sin(2kx)$). Покажем, что наше паучье чутье нас не подвело и синусы четных дуг правда убьются. Будем это делать, считая в лоб коэффициенты Фурье.

При таком продолжении $a_k = 0$ т.к. функция нечетная.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)sin(nx)dx = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sin(nx)dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)sin(nx)dx}_{I_2}$$

Посчитаем их поотдельности, приняв во втором интеграле (с целью, чтобы в нем пределы интегрирования стали как в первом) $x = \pi - t$. Значит $t = \pi - x$:

$$I_2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - t) sin(n(\pi - t)) d(\pi - t) = +\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t)\sin(n(\pi - t))dt.$$

Рассмотрим синусы, стоящие под этим интегралом, отдельно при $n = 2k$ и $n = 2k - 1$:

- n=2k;
$$\sin n(\pi - t) = \sin 2k(\pi - t) = \sin(2\pi k - 2kt) = -\sin 2kt$$
- n=2k -1;
$$\sin n(\pi - t) = \sin(2k-1)(\pi - t) = \sin(2\pi k - 2kt - \pi + t) =$$
$$= \sin(-\pi - (2k-1)t) = -\sin(\pi + (2k-1)t) = \sin(2k-1)t$$

Тогда посчитаем I_2

$$n = 2k: \quad I_2 = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t)(\sin 2kt)dt$$

$$n = 2k - 1: \quad I_2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t)(\sin((2k-1)t)dt$$

$$n = 2k; \quad I = I_1 + I_2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2kt)dt - \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2kt)dt = \text{ интегралы равны } = 0$$

Значит, наше паучье чутье нас не подвело, и синусы четных дуг взаправду убились.

$$n = 2k - 1; \quad I = I_1 + I_2 = 2I_1 = \frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2k-1)tdt$$

$$\textbf{Ответ: } f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2k-1)tdt\right) sin(2k-1)x$$

Замечание. Если нужно разложить по синусам четным дуг, а не нечетных, то продолжаем функцию с $(0; \frac{\pi}{2})$ на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ следующим образом: $f(\pi - x) = -f(x)$, т.е. нечетно относительно точки $(\pi/2; 0)$. С разложением по косинусам же дело обстоит наоборот: во-первых, разумеется, относительно нуля уже нужно отражать четно. Во-вторых, чтобы остались только косинусы четных дуг, нужно $f(\pi - x) = f(x)$ продолжать, а нечетных - $f(\pi - x) = -f(x)$.

3.2 Интегрирование и дифференцирование рядов Фурье

Теорема 5. *$f -$ $2\pi-$периодическая и кусочно непрерывная на $[-\pi;\pi]$;*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Тогда мы можем почленно проинтегрировать этот ряд:

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \frac{1}{k}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \sin(k\tau)|_0^x + b_k(-\cos(k\tau)|_0^x \Big) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\sin(kx) + \frac{b_k}{k}\big(1-\cos(kx)\big)\right)$$

Замечание:Т.е. коэффициенты ряда Фурье для F(x) выглядят так: $\alpha_k = -\frac{b_k}{k}$ (по cos) и $\beta_k = \frac{a_k}{k}$ (по sin). Новый свободный член $\alpha_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}$. Выглядит крайне некрасиво, поэтому его можно посчитать обычным, привычным нам способом через интеграл $\frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$. В общем-то, α_k и β_k также можно посчитать этим способом, но зачем лишний раз брать интеграл, если его можно не брать, а просто написать $\alpha_k = -\frac{b_k}{k}$, если b_k - известный нам коэффициент фурье функции, ряд которой мы интегрировали.

3.3 Пример 2

Исходя из разложения $x = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k};\quad x \in (-\pi;\pi)$. Получить разложение в ряд Фурье функций x^2, x^3.

Решение. Проинтегрируем почленно, чтобы найти разложение x^2:

$$\int\limits_0^x tdt = x^2/2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\int\limits_0^x \sin(kx)dt = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(1-\cos(kx)\right)\frac{1}{k} =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{2(-1)^k}{k^2}}_{\alpha_k, k\geq 1}\cos(kx)$$

α_0 имеет форму числового ряда. Посчитаем его обычным методом:

$$\frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^3}{3}\cdot 2 = \frac{\pi^2}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$$

Заметим, что в коэффициенте суммы стоит четверка, а не двойка, которую мы получили, когда почленно интегрировали, потому что двойка стояла бы в разложении $x^2/2$, а мы хотим получить разложение x^2.

Получим разложение в ряд Фурье x^3, проинтегрировав разложение x^2.

$$\int\limits_0^x t^2 dt = \frac{\pi^2 x}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \int_0^x \cos(kt)dt$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^3} \sin(kx) = \Big/ x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} \Big/ = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) \left(\frac{2\pi^2(-1)^{k+1}}{3k} + \frac{4(-1)^k}{k^3} \right)$$

$$\textbf{Ответ: } x^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi^2(-1)^{k+1}}{k} + \frac{12(-1)^k}{k^3} \right) \sin(kx)$$

□

3.4 Равенство Парсеваля, неравенство Бесселя

Теорема 6 (Равенство Парсеваля)**.** *Пусть f — $2\pi-$периодическая, непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая и* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$*. Тогда:*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Теорема 7 (Неравенство Бесселя)**.** *Пусть f — $2\pi-$периодическая и кусочно непрерывная и* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$*. Тогда:*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

3.4.1 Пример на Парсеваля

Посчитать ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Решение. Воспользуемся равенством Парсеваля, для разложения x $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$;

В нем:

$$a_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}; \quad a_k^2 = \frac{4}{k^2}; \quad f(x) = x;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi}{3}$$

Подставим это теперь в равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

□

3.4.2 Еще пример на Парсеваля

С помощью равенства Парсеваля найти: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

Воспользуемся разложением:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{4}{n^2}(-1)^n}_{a_n} \cos(nx);$$

$b_n = 0; \quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}; \quad f(x) = x^2$

Тогда равенство Парсеваля дачт нам:

$$\frac{4\pi^4}{9 \cdot 2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} + 0^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2)^2 dx$$

$$\frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^5}{5}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 2\frac{\pi^4}{5}$$

$$\frac{\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}$$

3.5 Оценить порядок убывания коэффициентов Фурье

По Лемме Римана по осцилляции коэффициенты Фурье стремятся к нулю. Значит $a_n = o(1), n \to \infty$. Но можно оценить еще более жестко:

Теорема 8 (О порядке убывания коэффициентов Фурье)**.** *Пусть функция $f-$ $2\pi-$периодическая, $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируема и имеет m-ю кусочно непрерывную производную.$\Big($При этом $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi); j = \overline{1, m-1}$ (условие сшивки)$\Big)$. Тогда*

$$|a_k| + |b_k| = o\left(\frac{1}{k^m}\right), \; k \to \infty$$

3.5.1 Пример на порядок убывания

$f(x) = x^{2013}$. Найти порядок убывания коэффициентов Фурье. $x \in [-\pi; \pi]$

Решение. Т.к. $f-$нечетная, то $a_k = 0$. Остается только оценить b_k.
Заметим, что условие сшивки не выполняется не то чтобы для производных, а даже для самой функции: $(-\pi)^{2013} \neq (\pi)^2 013$. Функция это 0-я производная от самой себя. Получаем что $m = 0$ и по Теореме о порядке убывания производной $|b_k| = o\left(\frac{1}{k^0}\right) = o(1)$

□

3.5.2 Пример 2 на порядок убывания

$f(x) = x^{2012}$. Найти порядок убывания коэффициентов Фурье. $x \in [-\pi; \pi]$

Доказательство. Т.к. $f-$четная, то $b_k = 0$. Оценим $a_k, k \to 0$.
Будем опять же проверять условие сшивки (т.к. внутри интервала $(-\pi, \pi)$ функция непрерывна и бесконечное число раз непрерывна дифференцируема, а значит, гладкость может нарушаться только на границе.) Ищем такое n, когда $f^{(n)}(-\pi) \neq f^{(n)}(\pi)$

$f^{(0)}(-\pi) = f^{(0)}(\pi)$, очевидно.

$\tilde{f'} = 2012x^{2011}$, значит, $f^{(1)}(-\pi) \neq f^{(1)}(\pi)$

Отсюда n=1.

Ответ: $|a_k| = o\left(\frac{1}{k^1}\right)$

□

3.5.3 Пример 3 на порядок убывания

$f(x) = (x^2 - \pi^2)\sin^2 x$. Найти порядок убывания коэффициентов Фурье. $x \in [-\pi; \pi]$

Доказательство. $f^{(0)}(-\pi) = 0 = f^{(0)}(\pi) \Rightarrow$ условия не нарушены
Продифференцируем $f' = 2x\sin^2 x + x^2\sin(2x) - \pi^2\sin(2x)$. Снова $f^{(1)}(-\pi) = 0 = f^{(1)}(\pi) = 0$.
Вторая производная $f^{(2)} = 2\sin^2 x + 2x\sin(2x) + 2x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x) - 2\pi^2\cos(2x)$. Опять получим $f^{(2)}(-\pi) = 0 = f^{(2)}(\pi)$
Третья производная $f^{(3)} = 2\sin(2x) + 4\sin(2x) + 8x\cos(2x) + 4x\cos(2x) + 4x^2\sin(2x) + 4\pi^2\sin(2x)$.
В итоге: $f^{(3)}(\pi) = -12\pi \neq f^{(3)}(\pi) = 12\pi$

Ответ: $|a_k| = o\left(\frac{1}{k^3}\right)$

□

3.5.4 Является ли рядом Фурье?

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Является ли он рядом Фурье какой-то функции?

Есть такая теорема: "Равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы"
Т.е. для равномерно сходящегося ряда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin kx$ его сумма это $f(x)$, и он, как мы видим, является ее рядом Фурье.

Значит, если мы докажем равномерную сходимость ряда, то получается, он будет рядом Фурье некой функции, а именно своей суммы.

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Значит, этот ряд является рядом Фурье некой функции, а именно своей суммы.

3.5.5 Является ли рядом Фурье?

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$. Является ли он рядом Фурье какой-то функции?

Доказательство. Заметим, что $\forall n \Rightarrow b_n = 1 \neq 0$? ? по теореме Римана об осцилляции этот ряд не может быть рядом Фурье, т.к. его коэффициенты Фурье не стремятся к 0. □

Семинар 4.

4 Семинар

4.1 Функциональные пространства

Определение 6. ***Метрическое пространство*** **-** *пространство, в котором введена метрика, т.е. функция* $\rho(x, y)$:

1. $\rho(x, y) \geq 0; \quad \rho = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Пример 1: $\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$
Пример 2: $C([a, b])-$ *пространство функций, непрерывных на* $[a, b]$.
Тогда $\rho(f, g) = \underset{a \leq t \leq b}{max}|f(t) - g(t)|$

Определение 7. $E-$*действительное линейное пространство, если* $\forall x, y \in E \Rightarrow \exists(x + y) \in E, \exists(\lambda x) \in E\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$.
Кроме того:

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\exists 0 :\ x + 0 = x$
4. $\forall x \exists \overline{x} :\ x + \overline{x} = 0$
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
8. $\exists 1 :\ x \cdot 1 = x$

Здесь λ, $\mu \in \mathbb{R}$

Определение 8 (Нормированное пространство)**.** *это линейное пространство* E*, в котором* $\forall x \in E$ *сопоставленна скалярная функция* $||x||$*, называемая* ***нормой*** *и удовлетворяющая следующим свойствам:*

1. $||x|| \geq 0;\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||\ (\forall\lambda \in \mathbb{R})$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Примеры:

1. $||x|| = |x|, x \in \mathbb{R}$

2. $\mathbb{R}^n$*: в нем можно ввести норму различными способами, не только как модуль:*

   (a) $||x|| = |x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$

   (b) $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

   (c) $\max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$

3. $C([a,b])$. $||f|| = \max\limits_{a \le t \le b} |f(t)|$

Определение 9 ($\varepsilon-$окрестность)**.** *это* $U_\varepsilon(x_0) = \{x : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$

Определение 10 (Точка прикосновения)**.** *. Точка x_0 называется точкой прикосновения множества E, если в любой ее окрестности есть точки из этого множества.*

Определение 11 (Внутренняя точка)**.** *. Точка x_0 называется внутренней точкой множества E, если найдется ее окрестность, полностью лежащая в этом множестве.*

Определение 12 (Открытое множество)**.** *Множество E называется открытым, если все его точки внутренние.*

Определение 13 (Предельная точка)**.** *Точка x_0 называется предельной точкой множества E, если в любой ее проколотой окрестности есть точки из этого множества.*

Определение 14 (Замкнутое множество)**.** *Это множество, содержащее все свои предельные точки*

Определение 15 (Фундаментальность)**.** *Последовательность $\{x_k\}$ называется **фундаментальной**, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \ge N \; ||x_n - x_m|| < \varepsilon$$

Определение 16 (Сходимость)**.** *Последовательность $\{x_k\}$ называется **сходящейся** к A, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \ge N \; ||x_n - A|| < \varepsilon$$

В этом случае, как и всегда, записывают:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A$$

Подчеркнем, что в данном случае A - не число, а некий элемент нашего множества.

Если последовательность сходится, то она фундаментальная (аналогично док-ву для $\mathbb{R}^n$). Но из фундаментальности не следует сходимость. Но бывают пространства, в которых фундаментальность и сходимость - равносильные понятие (например, $\mathbb{R}^n$ или $C([a,b])$). Такие пространства называются полными.

Определение 17. *Полное пространство - пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится. (т.е. в нҷм фундаментальность и сходимость эквивалентны).*

Приведем пример неполного пространства, то есть пространства, в котором из фундаментальности последовательности не следует не следует ее сходимость.

Определение 18. $CL_1([a,b])$ *это линейное пространство непрерывных функций на* $[a,b]$*, норма в котором:* $||f(x)|| = \int_a^b |f(x)|dt$

Пример фундаментальной, но не сходящейся последовательности в $CL_1([-1,1])$:

$$f_k(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le 0 \\ kt, & 0 \le t \le \frac{1}{k} \\ 1, & \frac{1}{k} \le t \le 1 \end{cases}$$

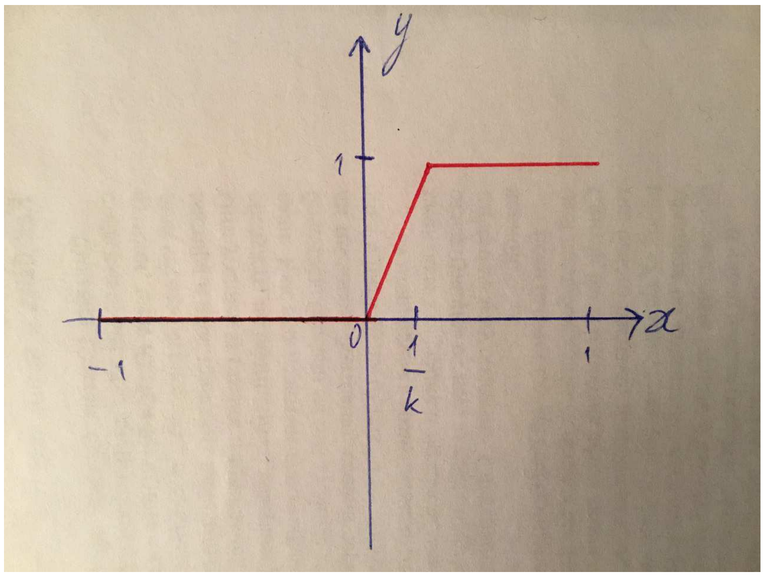


Рис. 10

Начнем с того, что все элементы данной последовательности лежат в $CL_1([-1,1])$ в силу своей непрерывности.

1. фундаментальность:

$$||f_m - f_k|| = \int\limits_{-1}^{1} |f_m(t) - f_k(t)|\,dt = \int\limits_{0}^{1} |f_m(t) - f_k(t)|dt \le \int\limits_{0}^{\max\{\frac{1}{k},\frac{1}{m}\}} 2dt = 2\max\{\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\} \to 0 \Rightarrow \text{ фундам.}$$

2. Не сходится. Положим $\exists \phi(t) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(t)$.

   При $t \in [-1,0]$ имеем $\phi(t) = 0$. При $t \in [0,1]$ должно выполняться : $||\phi(t) - f_k(t)|| \to 0 (k \to \infty)$, то есть:

   $$\int_0^1 |\phi(t) - f_k(t)| \to 0 \Rightarrow \phi(t) = 1 \text{ при } t \in (0,1]$$

   Получили, что $\phi(t)$ разрывная функция, то есть она не из пространства $CL_1([-1,1])$. Получается, не существует функции, к которой последовательность сходится. Мы доказали, что не всякая фундаментальная последовательность сходится.

Замечание: в понятии "последовательность сходится"подразумевается, что сходится к элементу нашего пространства.

Определение 19. $CL_1([a,b])$ - *пространство функций, непрерывных на* $[a,b] : ||f|| = \int_a^b |f(x)|dx$.

Определение 20. $CL_2([a,b])$ - *пространство функций непрерывных на* $[a,b] : ||f||_{CL_2} = \sqrt{\int_a^b |f(a)|^2 dx}$

Определение 21. $L_1(\{a,b\})$ - *пространство функций, абсолютно интегрируемых на* $\{a,b\}$ *т.е.* $f(x) \in L_1\{a,b\} \Leftrightarrow \exists \int_a^b |f(x)|dx$
Норма: $||f||_{L_1} = \int_a^b |f(x)|dx$

Определение 22. L_2 - *множество функций таких, что* $\int_a^b |f(x)|^2 dx$ *сходится.*
Норма: $||f||_{L_2} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$

В $\mathbb{R}^n : \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix};$ выполнено неравенство Коши-Буняковского:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

Определение 23. *Расстояние связано с нормой следующим образом:* $\rho(f,g) = ||f-g||$. *Логично сделать вывод, что в известных нам пространствах расстояние вводится следующим образом:*

$$\rho : CL_1([a,b]) : \rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

$$\rho : C([a,b]) : \rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

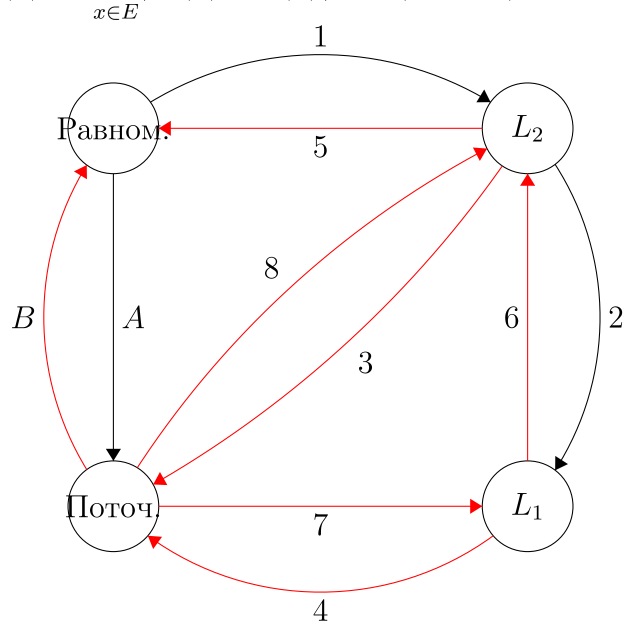
$$\rho : L_1([a,b]) : \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

$$\rho : L_2([a,b]), CL_2([a,b]) : \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

Равномерная сходимость: $f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \underset{x\in E}{sup} |f_n(x) - f(x)| \to 0 (n \to \infty)$

Сходимости:
Равномерная: $f_n \rightrightarrows f(x)$
Сходимость в L_2 (к функции f имеется в виду): $f_n \underset{||\cdot||_{L_2}}{\to} f(x) \Leftrightarrow ||f_n - f||_{L_2[a,b]} \to 0 (n \to \infty) \Leftrightarrow \sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \leftrightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \to 0$
Сходимость в $L_1 : f_n \underset{||\cdot||_{L_1}}{\to} f(x)$

Поточечная: $f_n(x) \to f(x)$



Докажем (1). Надо показать, что $||f_n(x) - f(x)||^2_{L_2} \to 0$, при $n \to \infty$

$\underset{x\in[a,b]}{max}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.е. $\forall\varepsilon\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow \underset{x\in[a,b]}{max}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ Тогда $||f_n(x) - f(x)||^2_{L_2} = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_a^b \underset{x\in[a,b]}{max}|f_n(x) - f(x)|^2 dx < \int_a^b \varepsilon^2 dx = \varepsilon^2(b-a)$ □

Докажем (2). Нужно доказать, что $\int_a^b |f_n - f|dx \to 0, n \to \infty$. Докажем, что $\left(\int_a^b |f_n - f|dx\right)^2 \to 0$. В целом, это одно и то же.

Через неравенство КБШ:

$$|(f,g)_{L_2}| \leq ||f||^2_{L_2} \cdot ||g||^2_{L_2} \Leftrightarrow \left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| | \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

Возведем в квадрат

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right) \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)$$

В качестве функций в этом неравенстве возьмем $f(x) = |f_n(x) - f(x)|;\ g(x) = 1$ и подставим в это неравенство.

$$\left|\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx\right) \cdot \left(\int_a^b 1 \cdot dx\right) = (b-a)\underbrace{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx}_{||f_n(x) - f(x)||^2_{L_2} \to 0} \to 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \to 0 \quad \Rightarrow ||f_n(x) - f(x)||_{L_1} \to 0$$

□

Докажем (4) и (6). т.е. из $f_n(x) \xrightarrow{||\cdot||_{L_1}} f(x)$ не следует поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$ и также не следует $f_n(x) \xrightarrow{||\cdot||_{L_2}} f(x)$

На $[a,b] = [0,1]$ возьмем функциональную последовательность $f_n(x) = \begin{cases} n - n^3 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2} \\ 0, & \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

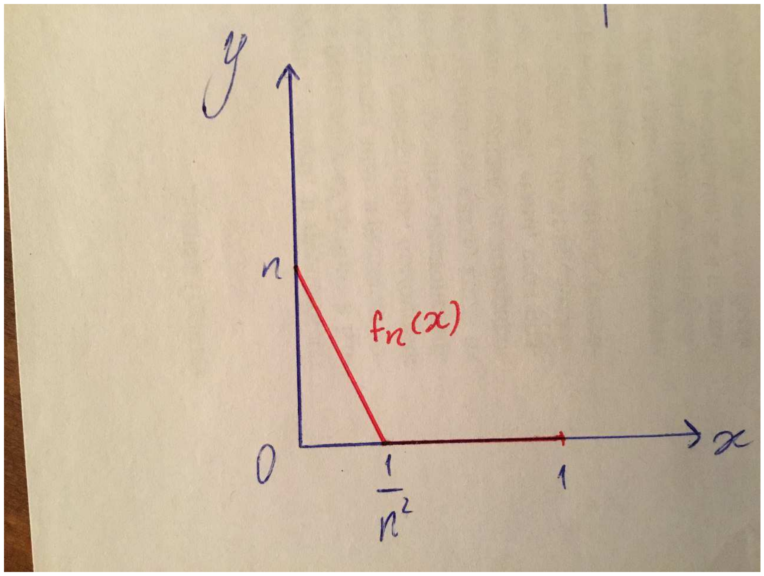


Рис. 11

Докажем, что $f_n(x) \xrightarrow{||\cdot||_{L_1}} f(x) = 0$:

$$\int_a^b |f_n(x) - 0|dx = \int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^{n^2} |n - n^3x|dx \leq \int_0^{\frac{1}{n^2}} |n|dx = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Докажем отсутствие поточечной сходимости. В точке 0 имеем $f_n(0) \nrightarrow 0 = f(0) \Rightarrow\ f_n \nrightarrow f$
Докажем отсутствие сходимости по норме L_2: $||f_n(x) - 0|| \nrightarrow_{L_2} 0$

$$||f_n(x)||^2_{L_2} = \int_a^b |f_n(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n^2}} \Big(n - n^3x\Big)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n^2}} \Big(n^2 - 2n^4x + n^6x^2\Big)^2 dx =$$

$$= n^2x\Big|_0^{\frac{1}{n^2}} - n^4x^2\Big|_0^{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{3}n^6x^3\Bigg|_0^{\frac{1}{n^2}} = 1/3 \neq 0$$

□

Докажем (7), (8) и (B). . Т.е. что из поточечной сходимости не следует вообще ничего. На отрезке $[a,b] = [0,1]$ возьмем функциональную последовательность $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x, & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

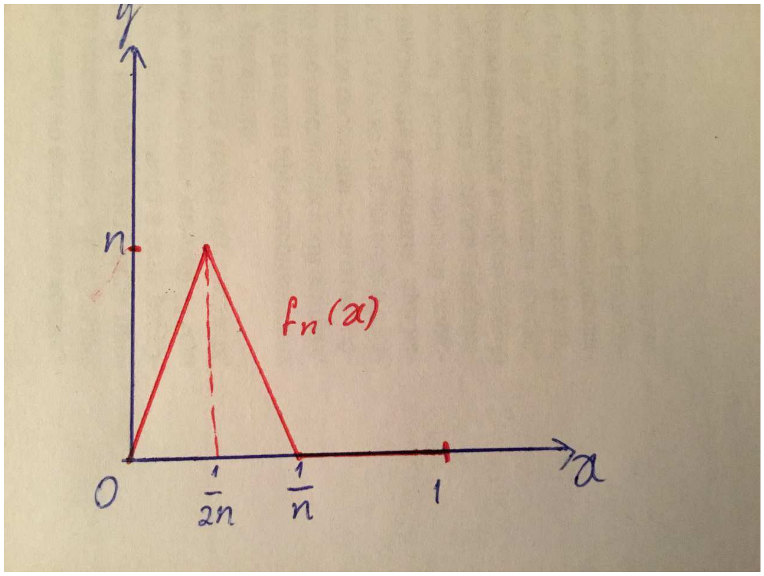


Рис. 12

Докажем поточечную сходимость: $f_n(x) \to f(x) = 0$. Это верно, т.к. $f_n(0) = 0 \to f(0) = 0$, а при иксах больше нуля:$\forall x_0 > 0 \exists n : \frac{1}{n} < x_0$

Докажем(B), что равномерной сходимости нет: **Очевидно**

Докажем (7), что сходимости в L_1 нет:

$$||f_n(x) - 0||_{L_1} = ||f_n(x)||_{L_1} = \int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} 2n^2 x dx + \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} (2n - 2n^2 x)dx = \frac{1}{2} \nrightarrow 0$$

Докажем (7), что сходимости в L_2 нет: Поскольку из сходимости в L_2 следует сходимость L_1 (что было доказано выше), но сходимости в L_1 нет, значит и в L_2 сходимости нет. □

Докажем (3) и (5).

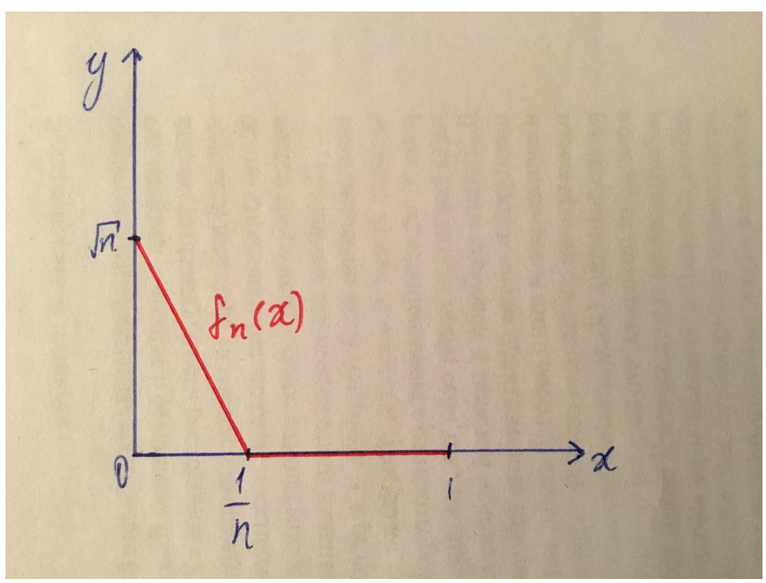


Рис. 13

На отрезке $[a, b] = [0, 1]$ возьмем функциональную последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} - n^{1.5}x, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & else \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность $\sqrt{f_n(x)}$
Докажем, что в L_2 сходится к $f(x) = 0$

$$||\sqrt{f_n(x)}||^2_{L_2} = \int\limits_0^{\frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{\sqrt{n} - n^{1.5}x}\right)^2 dx = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0, (n \to \infty)$$

Очевидно, что $\sqrt{f_n(x)} \nrightarrow 0$ поточечно.
(5): не сходится поточечно $\Rightarrow$ не сходится равномерно □

4.2 Полнота систем функций в функциональных пространствах

По теореме Вейерштрасса любую непрерывную функцию можно аппроксимировать многочленом, т.е. системой функций: $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$. Значит $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ полна в пространстве $C([a, b])$

задача 1. *Полна ли система многочленов с нечетными степенями* $\{x, x^3, \cdot, x^{2k-1}, \cdots\}$ *в пространстве* $C([1, 2])$*?*

Решение. $\forall f \in C([1, 2])$ продолжим нечетно на $[-2, 2]$. Этим продолжением будет $\tilde{f}$.

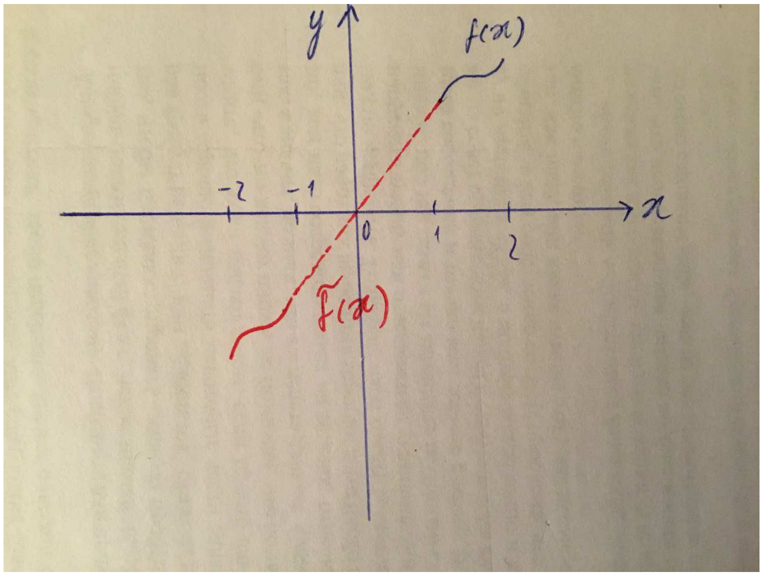


Рис. 14

$\tilde{f}$ раскладывается по системе $\{1, x, x^2, \cdot, x^k, \cdots\}$, т.е.

$$\forall \varepsilon \exists \alpha_0, \cdots, \alpha_n : |\tilde{f}(x) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i| < \varepsilon \tag{2}$$

Заменим x на $-x$. Т.к. нечетная: $|-\tilde{f}(x)-\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i x^i(-1)^i|<\varepsilon$ Тогда

$$\left|\tilde{f}(x)+\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i(-1)^i\right|<\varepsilon \tag{3}$$

По неравенству треугольника

$$|2\tilde{f}-2\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^{2i+1}|\le|\tilde{f}-\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i|+|\tilde{f}-\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i(-1)^i|<2\varepsilon$$

То есть $\tilde{f}$ можно разложить по этой системе функций со сколь угодно малой погрешностью. Значит, f (как часть $\tilde{f}$, ту часть, которая $\in[1,2]$) тем более можно. Значит система многочленов с нечетными степенями $\{x,x^3,\cdot,x^{2k-1},\cdots\}$ полна в пространстве $C([1,2])$. □

Рассмотрим похожую задачу, но на другом отрезке

задача 2. *Полна ли система многочленов с нечетными степенями* $\{x,x^3,\cdot,x^{2k-1},\cdots\}$ *в пространстве* $C([0,1])$*?*

Решение. Возьмем $f(x)=1, x\in[0,1]$ Предположим, что наша система $\{x,x^3,\cdot,x^{2k-1},\cdots\}$ полна в $C([0,1])$.
Тогда $\forall\varepsilon\exists\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n :\Rightarrow |f(x)-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x^{2i+1}|<\varepsilon$ Подставим $x=0$. Но тогда $|1-0|<\varepsilon$ - противоречие. Значит система не полна в таком пространстве. □

Теперь в той же задаче дополним семейство функций единицей:

задача 3. *Полна ли система* $\{1,x,x^3,\cdot,x^{2k-1},\cdots\}$ *в пространстве* $C([0,1])$*?*

Решение. Введем функцию $g(x)=f(x)-f(0)$ - сдвигаем функцию в 0 (т.е. $g(0)=0$). Значит ее можно продолжить нечетно как и в первой задаче в этом разделе. Значит, эта система полна в этом пространстве. □

5 Семинар

5.1 Интегралы, зависящие от параметров

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

Будем исследовать свойства функции $I(y)$ в зависимости от функции $f(x,y)$

Теорема 9. *Пусть $f-$непрерывна на $\underbrace{[a,b]}_{x\in} \times \underbrace{[c,d]}_{y\in}$, тогда $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ непрерывная функция на $[c,d]$*

Доказательство. Рассмотрим $|I(y+\Delta y) - I(y)|$. Для непрерывности он должен $\to 0$ при $\Delta y \to 0$.

$$|I(y+\Delta y) - I(y)| = \left| \int\limits_a^b f(x, y+\Delta y)dx - \int\limits_a^b f(x,y)dx \right| = \left| \int\limits_a^b f(x, y+\Delta y) - f(x,y)dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b |f(x, y+\Delta y) - f(x,y)|\, dx \leq \underbrace{\omega(f,[c,d])}_{\to 0} \cdot \underbrace{(b-a)}_{const} \to 0$$

Пояснение: модуль непрерывности $\omega \to 0$, т.к. f, как функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, равномерно непрерывна на нем.

□

Рассмотрим: $I(y) = \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$

Теорема 10. *Пусть $\phi(y), \psi(y)$ непрерывные на $[c,d]$, причем $\forall y \in [c,d] \Rightarrow \phi(y) \leq \psi(y)$. Пусть f непрерывна на области $\overline{G}\{(x,y), x \in [\phi(y), \psi(y)], y \in [c,d]\}$*
Тогда $I(y)$ - непрерывная функция на $[c,d]$

Теорема 11 (О дифференцировании интеграла по параметру)**.** *Пусть функции f и $\frac{\partial f}{\partial y}-$ непрерывные на $[a,b] \times [c,d]$.*
Тогда $I(y)$ - дифференцируема на $[c,d]$ и выполняется 4:

$$\frac{d(I(y))}{dy} = \int_a^b f'_y(x,y)dx \tag{4}$$

Теорема 12 (О дифференцировании интеграла с переменными пределами интегрирования по параметру)**.** *Пусть функции f и $\frac{\partial f}{\partial y}-$ непрерывные на $[\phi(y), \psi(y)] \times [c,d]$. Пусть $\phi(y), \psi(y)$ - непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$.*
Тогда $I(y)$ - дифференцируемая на $[c,d]$ функция и

$$\frac{dI}{dy} = \left(\int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)dx \right) + \psi'(y) \cdot f(\psi(y), y) - \phi'(y) \cdot f(\phi(y), y)$$

Утверждение.(занесение предела под знак интеграла) Теперь мы знаем свойства интеграла, зависящего от параметра, связанные с непрерывностью и дифференцируемостью (или, иначе говоря, занесением производной под знак интеграла). А можно ли заносить предел под знак интеграла? Оказывается, если f(x,y) непрерывна, то можно. В самом деле, если f непрерывна, то по теореме 1 $J(y)$ - непрерывная функция в каждой точке $y_0 \in [c,d]$. По определению непрерывности это значит, что $\underset{y\to y_0}{lim}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \underset{y\to y_0}{lim} I(y) = I(y_0) = \int\limits_a^b f(x,y_0)dx =$ [в силу непрерывности f(x, y) в точке y_0
$\int\limits_a^b \underset{y\to y_0}{lim} f(x,y)dx$, ч.т.д.

Решим с помощью данного утверждения следующий пример: посчитать предел от интеграла:

$$\lim_{\alpha\to 0}\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{(x+\cos\alpha x)e^{x\sin\alpha}}_{f(x,\alpha)}dx}^{I(\alpha)}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\lim_{\alpha\to 0}\left(x+\cos\alpha x)e^{x\sin x}\right)\right)dx = \int_{-\pi}^{\pi}(x+x)e^0 dx = x^2\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi^2 - \pi^2 = 0$$

задача 4. *Пример функции, для которой предел интеграла не равен интегралу предела*

$$\underbrace{\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{xe^{-\frac{x^2}{y^2}}}{y^2}dx}_{1} \neq \underbrace{\int_0^1 \lim_{y\to 0}\frac{xe^{-\frac{x^2}{y^2}}}{y^2}dx}_{2}$$

Решение. Посчитаем сначала 1:

$$\int_0^1 \frac{xe^{-\frac{x^2}{y^2}}}{y^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}}d(-\frac{x^2}{y^2}) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(e^{-1\frac{1}{y}} - 1\right)$$

Посчитаем предел

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{y^2}}}{y^2}dx = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{2}e^{-1\frac{1}{y}} - 1\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$$

Теперь второе:

$$\lim_{y\to 0}\frac{xe^{-\frac{x^2}{y^2}}}{y^2} = \Big/\frac{x^2}{y^2} := t\Big/ = \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{x}e^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{xe^t} = \frac{1}{x}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t} = \frac{1}{x}\cdot 0 = 0$$

Интеграл нуля - ноль.

Таким образом, получили, что предел нельзя заносить под знак интеграла, если функция не непрерывна, т.к. $0 \neq 1/2$

□

задача 5. $I(y) = \int\limits_{3y}^{y^2} e^{yx^2}dx$;. *Найти* $I'(y)$*–?*

По формуле из теоремы 4:

$$\frac{dI}{dy} = \left(\int\limits_{3y}^{y^2} x^2 e^{yx^2} dx \right) + 2y \cdot e^{y(y^2)^2} - 3e^{y(3y)^2}$$

Вот и все решение. Интеграл брать от нас не требуется.

задача 6. $I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + \alpha \cos^2 x) dx; \alpha \neq 0$. *Нужно посчитать этот интеграл.*

Попробуем найти $I'(\alpha)$

$$I'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha \cos^2 x}{\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha}{\tan^2 x + \alpha^2} dx = \Big/ t := \tan x;\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \Big/ =$$

$$= 2\alpha \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+\alpha^2)(t^2+1)} dt = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+\alpha^2} \right) dt = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \left(\arctan t - \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{t}{\alpha} \right) \Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\pi}{2} \right) - 0 \right] = \frac{\pi}{\alpha+1} \quad (5)$$

Тогда

$$I(\alpha) = \int I'(\alpha) d\alpha = \pi \ln(|\alpha + 1|) + C;$$

Найдем C. Подставляя в интеграл из условия $\alpha = 1$, получим $I(1) = 0$, тогда :

$$I(1) = 0 = \pi \ln(1+1) + C; \quad C = -\pi \ln 2;$$

Ответ: $\pi \ln \frac{|\alpha+1|}{2}$

6 Семинар

6.1 Несобственные интегралы, зависящие от параметров

Определение 24. *Y - числовое множество, $y \in Y; x \in [a,b]$. $f(x,y)$ - определенела на $[a,b) \times Y$. Если $y \in Y, \forall \eta \in [a,b]\ \exists \int_a^\eta f(x,y)dx$, то $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx-$ несобственный интеграл, зависящий от параметра, с особой точкой в b*

Определение 25. *$I(y)$ - **сходится**, если*

$$\exists \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x,y)dx$$

Определение 26. *Пусть $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx-$ сходится на множестве Y. Говорят, что он **сходится равномерно** на Y, если*

$$\lim_{\xi \to b} \sup_{y \in Y} \int_\xi^b f(x,y)dx = 0$$

или в кванторах:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b' \in [a,b) : \forall \xi \in [b',b), \forall y \in Y : \left| \int_\xi^b f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Отрицание формулы выглядит так:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall b' \in [a,b) \exists \xi_0 \in [b',b), \exists y_0 \in Y : \left| \int_\xi^b f(x,y)dx \right| \geq \varepsilon$$

Пример 1:

$$I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx$$

Доказать:

1. сходится равномерно на $[a,+\infty), a > 0$
2. сходится неравномерно на $(0,+\infty)$

Доказательство. $\forall y_0 \geq 0\ \ I(y)$ сходится поскольку

$$\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx = |-e^{xy}|_A^{+\infty} = \begin{cases} e^{-Ay}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

1. при $y \in [a,+\infty), a > 0$:
$$\left| \int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx \right| = e^{-Ay} \leq e^{-Aa}$$

 Чтобы интеграл сходился, он должен быть $< \varepsilon$. То есть e^{-Aa} должно быть равно ε

$$\Rightarrow \quad -Aa = ln\varepsilon \ \Rightarrow\ A = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

То есть выполняется определение равномерной сходимости:

$$\forall\varepsilon\exists A_0 = \frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}\forall A > A_0, \forall y\in[a,+\infty) \Rightarrow \int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx < \varepsilon$$

Значит сходится равномерно по определению

2. Исследуем теперь на множестве $(0,+\infty)$. На этот раз у нас нет жесткой "отделенности от нуля что приведет к отсутствию равномерной сходимости. Равномерной сходимости нет, т.к.

$$\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx = e^{-Ay} \xrightarrow{y\to 0} 1 \neq 0$$

Теперь докажем неравномерную сходимость строго, в кванторах:

$$\exists\varepsilon_0 = e^{-1} : \forall\delta\exists A_\delta = 1+\delta, y_\delta = \frac{1}{1+\delta} : \int_{A\delta}^{+\infty} y_\delta e^{-xy_\delta}dx = e^{-A_\delta y_\delta} = e^{-1} = \varepsilon_0$$

Заметим, что этот контрпример не подойдчт в предыдущем пункте, т.к. там все отделено от нуля константой, поэтому мы не сможем подобрать для любой дельты достаточно малый (стремящийся к нулю) y.

□

Теорема 13 (Признак Вейерштрасса)**.** *Пусть* $\forall y\in Y$ *функция* $f(x,y)$ *интегрируема по* x *на* $\forall[a,b']\subset[a,b)$ *и* $\exists\phi(x) : \forall y\in Y \quad |f(x,y)|\leq\phi(x), \int_a^b\phi(x)dx$ *- сходится. Тогда*

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx - \text{ сходится равномерно на } Y$$

Пример 2

Доказать, что $I(y)$ сходится равномерно на E:

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin yx}{1+x^2}}_{f(x,y)}dx, \quad E = \mathbf{R}$$

Доказательство.

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{1+x^2} = \phi(x); \quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \sim \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx - \text{ сходится}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\phi(x)dx - \text{сходится по признаку сравнения}$$

Следовательно, $\int_0^{+\infty} f(x,y)dx$ – сходится равномерно на $\mathbf{R}$ по признаку Вейерштрасса □

Ниже будет приведем признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Запомнить его очень легко, сравнив с признаком Дирихле из 2го семестра: $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ - сходится, если:

1. $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ непрерывно дифференцируема

2. $f(x)$ имеет ограниченную первообразную

3. $g(x) \downarrow 0$

Теорема 14 (Признак Дирихле)**.**

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx; y \in Y \text{ - сходится равномерно на } Y\text{, если}:$$

1. f,g - непрерывны, а $\frac{\partial g}{\partial x}$ - непрерывна как функция x на $[a, +\infty)$

2. f(x,y) - как функция x $\forall y \in Y$ имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$

3. $g(x, y) \to 0$ как функция x монотонна и равномерно по y стремится к нулю при $x \to +\infty$. Это значит, что:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} \le 0; \exists \psi(x) : \lim_{x \to +\infty} \psi(x) = 0, |g(x,y)| \le \psi(x)\right)$$

Пример 3: Доказать что I(y) сходится равномерно по y на $[b, +\infty)\,, b > 0$

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx$$

Доказательство. $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$ монотонно и равномерно по y. Покажем, что sin xy имеет ограниченную первообразную:

$$|\int_0^x \sin ytdt| = |\frac{\cos yx - 1}{y}| \le \frac{2}{b}$$

В итоге по признаку Дирехле $I(y)$ сходится равномерно на $[b, +\infty)$ □

Пример 4

$$I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ - шаблон, который сходится } \forall \alpha > 1 (1 \text{ семестр})$$

Исследовать на равномерную сходимость в случаях

1. $1 < \alpha_0 \le \alpha < +\infty$

2. $1 < \alpha < +\infty$

Рассмотрим:

1. $$\left|\frac{1}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^{\alpha_0}}$$

   Т.е. $|\frac{1}{x^\alpha}| = |f(x, \alpha)| \le \phi(x) = \frac{1}{x^{\alpha_0}}$

   $$\int_1^{+\infty} \phi(x)dx - \text{ сходится (шаблон)} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} - \text{ сходится на множестве 1 по признаку Вейерштрасса}$$

2.

$$\int_A^{+\infty} \frac{d\alpha}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} \xrightarrow{\alpha\to 1+0} +\infty \Rightarrow \text{ нет равномерной сходимости}$$

Теорема 15 (Критерий Коши). *$\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на $Y \Leftrightarrow \forall\varepsilon\exists b' \in [a,b) : \forall \xi,\xi' \in [b,b')\,, \forall y \in Y \Rightarrow \left|\int_\xi^{\xi'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$*

Отрицание критерия Коши (для неравномерной сходимости):

$$\exists\varepsilon_0 > 0 \forall b \in [a,b)\,\exists \xi_0, \xi_0' \in [b',b)\,, \exists y_0 \in Y : \left|\int_{\xi_0}^{\xi_0'} f(x,y_0)dx\right| \geq \varepsilon_0$$

Пример 5 Доказать:

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx \text{ сходится неравномерно на } E = [0,1]$$

Применим отрицание критерия Коши:

$$\exists\varepsilon_0 : \forall\delta\exists y_\delta = \delta, \xi_\delta = \frac{\pi}{3\delta}, \xi_\delta' = \frac{\pi}{2\delta} : \left|\int_{\frac{\pi}{3\delta}}^{\frac{\pi}{2\delta}} \frac{sin\delta x}{x} dx\right| = \left|\int_{\frac{\pi}{3\delta}}^{\frac{\pi}{2\delta}} \frac{\sin\delta x}{\delta x} dx\right| =$$

$$= \Big/ x = \frac{\pi}{\delta} \to t = \delta x; \Big/ = \left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt\right| - \text{конечное число } \Rightarrow I(y) = \left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt\right| = \varepsilon_0 \quad (6)$$

Следовательно, интеграл не сходится равномерно по критерию Коши.
Пример 6 $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$ Доказать что не сходится равномерно на $[0,1]$

Доказательство.

$$\exists\varepsilon : \forall\delta\exists\xi_\delta', \xi_\delta'', \exists\alpha(\delta) : \left|\int_{\xi_\delta'}^{\xi_\delta''} f(x,\alpha)dx\right| \geq \varepsilon$$

Возьмем $\xi' = \delta+1; \xi'' = 2(\delta+1); \alpha_\delta = \frac{1}{\delta+1}$

$$\left|\int_{\xi_\delta'}^{\xi_\delta''} \alpha_\delta e^{-\alpha_\delta x} dx\right| = \left|- e^{\alpha_\delta x}\Big|_{\xi'}^{\xi''}\right| = \left|e^{-\alpha_\delta\xi'} - e^{-\alpha_\delta\xi''}\right| = \left|e^{-1} - e^{-2}\right| = \varepsilon_0$$

Следовательно, интеграл расходится по критерию Коши.

□

Пример 7 $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^y}$ Доказать, что не сходится равномерно на $E = (0,2)$

Доказательство. Вводим замену $\frac{1}{x} = t; x = \frac{1}{t}$. $dx = -\frac{1}{t^2}dt$. Получим $\int \frac{\sin t}{t^{2-y}}dt$

$$\left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} \frac{\sin t}{t^{2-y}} dt\right| = \left|\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^{2-y}} dt\right| \geq \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi n}} \left|\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} sintdt\right| = \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi n}} > 0.1$$

Получили минимум при n =1 т.к. $\frac{1}{\sqrt[n]{2\pi n}}$ возрастает

$$\exists\varepsilon=0,1:\forall n\exists\xi'=2\pi n;\xi''=2\pi n+\frac{\pi}{2};y_n=2-\frac{1}{n}:\left|\int_{\xi'}^{\xi''}f(x,y)dx\right|\geq\varepsilon$$

□

Пример 8 (на признак Дирихле)

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^y}dx$$

Исследовать на сходимость на $E=[0,+\infty)$. Сделаем замену: $x^2=t;x=\sqrt{t};dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{\sin t}{1+t^{\frac{y}{2}}}dt$$

Из ограниченности первообразной синуса, т.е.

$$\left|\int\limits_0^x\sin t dt\right|=|\cos x|\leq 1$$

и из того, что

$$\frac{1}{2(1+t^{\frac{y}{2}})}\leq\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\to 0$$

Получим: I сходится равномерно на E по признаку Дирихле

Теорема 16 (о дифференцировании несобственных интегралов)**.** *Если $f(x,y)$ и $f_y(x,y)$ - непрерывны при $x\in[a,+\infty)$. Пусть*

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx-\text{ сходится. А интеграл}\int_a^{+\infty}f_y(x,y)dx-\text{ сходится равномерно.}$$

Тогда

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}f_y(x,y)dx$$

Теорема 17 (об интегрировании несобственных интегралов)**.** *Если $f(x,y)$ непрерывна при всех y и $x\in[a,+\infty)$.*

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx-\text{ сходится равномерно, тогда:}\int_{y_1}^{y_2}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}dx\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)dy$$

Пример 9 (Интеграл Дирихле)

$$I_D=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

Доказательство. рассмотрим интеграл $I(k,y)=\int_0^{+\infty}e^{-kx}\frac{\sin xy}{x}dx$

$$\frac{\partial I}{\partial y}=\overbrace{\int_0^{+\infty}e^{-kx}\cos xydx}^{\mathbb{I}}=e^{-kx}\,\frac{1}{y}\sin xy\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{y}\int_0^{+\infty}sinxyde^{-kx}=\frac{k}{y}\int_0^{+\infty}\underbrace{e^{-kx}sinxydx}_{dv}=$$
$$=\frac{k}{y}(-e^{-kx}\,\frac{1}{y}\cos xy\Big|_0^{+\infty})$$

В итоге мы получили выражение вида:

$$\mathbb{I}=\frac{k}{y}\left(\frac{1}{y}-\frac{k}{y}\mathbb{I}\right)$$

Далее выразим:

$$\mathbb{I}=\frac{k}{y^2+k^2}=\frac{\partial I}{\partial y}$$
$$I=\int\frac{\partial I}{\partial y}dy=k\cdot\frac{1}{k}arctg\left(\frac{y}{k}\right)+\underbrace{C(k)}_{?}$$

Из условия (интеграл в начале, подставим в него y=0): $I(0,k)=0\Rightarrow C(k)=0\Rightarrow I=arctg\frac{y}{k}\xrightarrow{k\to0}\frac{\pi}{2}$

Таким образом, интеграл Дирихле

$$I_D=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

□

Пример 10 (Интеграл Пуассона)

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

Доказательство. Рассмотрим

$$I(u)=u\int_0^{+\infty}e^{-u^2t^2}dx;\text{ домножим на } e^{-u^2}\text{ и проинтегрируем по u}$$

$$\underbrace{\int_0^{+\infty}I(u)e^{-u^2}du}_{I^2}=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-u^2t^2}e^{-u^2}dtdu$$

$$I^2=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}udy=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}d(u^2(-1-t^2))=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}e^{-u^2(1+t^2)}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$$

Ответ: интеграл Пуассона равен $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

□

Пример 11 (Интегралы Лапласа)

$$y = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx; \tag{7}$$

$$z = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{1+x^2} \tag{8}$$

Доказательство. Заметим, что $\frac{dy}{d\beta} = -z$

Вспомним чему равен интеграл Дирихле: $\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$

Сложим 2 этих равенства:

$$\frac{dy}{d\beta} + \frac{\pi}{2} = -z + \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx =$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{-x^2 \sin \beta x + \sin \beta x + x^2 \sin \beta x}{x(1+x^2)} dx$$

Продифференцируем полученное выражение еще раз по y:

$$\frac{d^2 y}{d\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{x \cos \beta x}{x(1+x^2)} dx = y$$

Получили дифференциальное уравнение с решением вида: $y = C_1 e^{\beta} + C_2 e^{-\beta}$

Подставим в (7) $\beta = 0$ и получим:

$$y(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Кроме того, y ограничена (то есть не может стремиться к ∞ при $\beta \to +\infty$):

$$|y| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Т.к. y не может стремиться к ∞ при $\beta \to +\infty$ $C_1 = 0$. Тогда $\Rightarrow C_2 = \frac{\pi}{2}$, т.к. $y = C_1 e^{\beta} + C_2 e^{-\beta}$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Ответ } z = -\frac{dy}{d\beta} = \frac{\pi}{2} e^{-\beta}; \quad y = C_2 e^{-\beta} = \frac{\pi}{2} e^{-\beta}$$

□

Пример 12

$$\int_0^{+\infty} \frac{sinx^2}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{sinx^2}{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{sinx^2}{x^2} dx^2 = [x^2 = t] \; = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Пример 13

$$\text{Найти интеграл: } I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx; \; \alpha > 0; \; \beta > 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = -\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx^2 = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}d(-\alpha x^2) = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2\alpha}$$

$\Rightarrow\ I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln(\alpha) + C(\beta)$

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}dx$$

Подставим вместо α β:

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}dx = 0$$

$I(\beta) = -\frac{1}{2}\ln(\beta) + C(\beta) = 0 \Rightarrow C(\beta) = \frac{1}{2}\ln(\beta)$ Ответ: $I = -\frac{1}{2}ln\alpha + \frac{1}{2}\ln(\beta)$

6.2 Эйлеровы интегралы

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx - \text{ гамма функция}$$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx - \text{ бета функция}$$

Их свойства:

1. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \forall p > 0$
2. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}; p \in (0,1)$
3. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$
4. $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}$
5. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$
6. $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ (сведение бета-функции к гамма-функции)

Примерное док-во 5 свойства: Пусть $p = \frac{1}{2}, (2) \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ Из (1) свойства: $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \Rightarrow \text{ Доказано (5)}$$

Пример 1(применение основных свойств)

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = /x = a\sqrt{t}/ = \frac{a^2}{2}\int_0^1 t^{0.5}(1-t)^{0.5}dt = \frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{a^4}{2}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{a^4}{2}\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^2}{2!} = \frac{\pi a^4}{16}$$

Пример 2

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x dx = \Big/\sin x = \sqrt{t}\Big/ = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt = \frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2};\frac{n+1}{2}) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}$$

7 Семинар

7.1 Интеграл в смысле главного значения

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$$

Этот интеграл не берется. (Видно, что нижняя и верхняя суммы Дарбу отличаются не на маленькое значение). Тем не менее, суммы под графиками по разную сторону нуля равны по модулю и противоположны по знаку, а значит хотелось бы сказать, что интеграл этот не не берется, а равен нулю. Для таких вот неберущихся интегралов и придумали понятие "интеграл в смысле главного значения".

Определение 27 (Интеграл в смысле главного значения)**.**

1. *Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]/\{x_0\}$ и интегрируема по Риману $\forall [a,b] \backslash \{U_\varepsilon(x_0)\}$*
   Тогда v.p. $\int_a^b f(x)dx := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$
2. *Пусть f- определена на $(-\infty; \infty)$ и интегрируема по Риману на $[-\eta, \eta](\forall \eta)$.*

$$\textit{Тогда v.p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx$$

Пример 1

$$v.p. \int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\ln|x| |_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| |_{\varepsilon}^{1} \right) = \lim_{\varepsilon \to +0} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon + 1 - 1) = 0$$

То есть, как и хотелось, этот интеграл в смысле главного значения равен 0.
Пример 2

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} sinx dx = \lim_{\varepsilon \to +\infty} (-\cos x|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}) = 0$$

7.2 Интеграл Фурье

Определение 28. *Пусть f- абсолютно интегрируемая функция на $(-\infty, \infty)$. Интегралом Фурье функции f называется интеграл*

$$S(x,f) = \int_0^{+\infty} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy)\, dy,$$

где $a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos yt dt$;
$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin yt dt$

Теорема 18 (Достаточное условие сходимости интеграла Фурье)**.** *Пусть f — абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. $a(y), b(y)$ определены выше. Тогда*

- *Если x_0 - почти регулярная точка функции f, то*

$$S(x_0, f) = \int_0^{+\infty} (a(y) \cos x_0 y + b(y) \sin(x_0 y))\, dy = \frac{1}{2} \left(f(x_0+0) + f(x_0-0) \right)$$

- x_0 - *регулярная* $\Rightarrow S(x_0, f) = f(x_0)$

Пример 3 $f(x) = e^{-x}, x \geq 0$. Представить интегралом Фурье функцию f, подолжив ее на $(-\infty, 0)$: 1) четно, 2) нечетно.

Доказательство. 1. четно.

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos yt f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos ytdt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos ytdt =$$
$$= /\text{с.м. Интеграл Дирихле}/ = \frac{2}{\pi}\frac{1}{y^2+1}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ytdt = 0$$

$$e^{-x} = \int_0^{+\infty} a(y)\cos xydy = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{y^2+1}dy$$

2. Нечетно
$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos yt f(t)dt = 0$$
$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ytdt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin ytdt = \frac{2}{\pi}\frac{y}{1+y^2}$$
$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y\sin xy}{y^2+1}dy$$

□

7.3 Преобразование Фурье

Определение 29. $F[f] = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$ *называется* ***преобразованием Фурье функции f***

Определение 30. $F^{-1}[f] = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx$ *называется* ***обратным преобразованием Фурье функции f***

Свойства:

1. Если f(x) абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}, \Rightarrow$ v.p. можно опустить
2. $\left[F^{-1}F[f]\right] = F\left[F^{-1}[f]\right] = f$
3. Если $f(x)$ - непрерывна и абсолютно интегрируема и $f'(x)$ кусочно непрерывна и абсолютно интегрируема $\Rightarrow F[f'] = iyF[f]$
   Если же $f^{(k)}$- кусочно непрерывны и абсолютно интегрируемы $\forall k = \overline{1,n} \Rightarrow F[f^{(n)}] = (iy)^n F[f]$
4. Пусть f- непрерывна. Пусть функции f, xf - абсолютно интегрируемы. Тогда $F[f]$ имеет непрерывную производную и $\frac{d}{dy}F[f] = F[(-ix)f]$
   Если же $f-$ непрерывна и функции $f, xf, \dots x^n f$ - абсолютно интегрируемы $\Rightarrow F[f]$ - имеет $n-$ю непрерывную производную. $\frac{d^n}{dy^n}F[f] = F[(-ix)^n f]$

Пример 4 Найти преобразование Фурье функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$F[e^{-\frac{x^2}{2}}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{x^2}{2} - ixy - \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2}\Big)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dx = -\frac{\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{2}\right)d\left(\frac{x+iy}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \Bigg/\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} - \text{Интеграл Пуассона}\Bigg/ = \exp\left(-\frac{(y)^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Пример 5 (на свойство преобразования Фурье) Доказать, что преобразование Фурье $f(x) = \frac{1}{1+x^{12}}$ имеет 10 непрерывных производных.

Доказательство. По свойству 4 преобразования Фурье $F[f]$ - имеет $n-$ю непрерывную производную при выполнении указанных условий. Проверим, выполняются ли они, а именно, выполняется ли условие интегрируемости до десятого порядка (непрерывность очевидна).

$$\text{Проверим } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^{12}}dx \sim \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^{12}}dx \sim \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{12}}dx$$

$$\text{сходится по шаблону из второго семестра: } \int \frac{1}{x^\alpha}dx, \text{ при } \alpha > 1 \Rightarrow \text{ сходится}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{10}f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{10}}{1+x^{12}}dx \sim$$

$$\sim \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx \text{ — сходится. Следовательно, условие теоремы выполнено, следовательно, ч.т.д.}$$

□

Пример 6

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2e^{-|x|}\right); \text{ Найти } F[f(x)]$$

$$F[f] = F\Big[\frac{d}{dx}\left(x^2e^{-|x|}\right)\Big] = iyF[x^2e^{-|x|}]$$

Мы знаем: $F[e^{-\alpha|x|}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}$. Сведем наш интеграл к этому. Видим икс квадрат под преобразованием Фурье, избавимся от него с помощью: $\frac{d^n}{dy^n}F[f] = F[(-ix)^n f]$

$$\frac{d^2}{dy^2}F[e^{-|x|}] = F[-x^2f] = -F[x^2f] \Rightarrow F[x^2e^{-|x|}] = -\frac{d^2}{dy^2}F[e^{-|x|}] = -\frac{d^2}{dy^2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{6y^2-2}{(y^2+1)^3}$$

$$\Rightarrow F[f] = iyF[x^2e^{-|x|}] = iy\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{6y^2-2}{(y^2+1)^3}\right)$$

8 Семинар

8.1 Обобщенные функции

8.1.1 Примеры обобщенных функций

Определение 31. ***Функционал*** *— отображение, которое каждой функции некоторого класса ставит в соответствие число.*

Примером функционала является дельта-функция:

Определение 32. ***Дельта функция*** *это функционал, ставящий в соответствие произвольной непрерывной функции $\phi(x)$ ее значение в нуле:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

Вообще говоря, дельта функцию можно понимать как "резкий скачок": $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & else \end{cases}$

То есть если в некоторой точке пространства какая-то величина принимает значение, резко отличающееся от остальных, то, чтобы описать ее хоть сколько-нибудь математично, придумали дельта-функцию.

Также известно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\phi(x)dx = \phi(x_0)$$

К примеру, дельта функцию используют, чтобы задать плотность заряда в пространстве, в котором расположено несколько точечных зарядов. Пусть в точках x_0 и x_1 расположены заряды q_0 и q_1. Тогда функция плотности: $\rho(x) = q_0\delta(x - x_0) + q_1\delta(x - x_1)$. Проверим, логично ли так задать плотность, найдя суммарный заряд (он должен быть $q_0 + q_1$). Суммарный заряд это интеграл от плотности заряда по всему пространству, в котором расположены заряды (в качестве подынтегральной функции $\phi(x)$ в интеграле ниже - 1):

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(q_0\delta(x - x_0) + q_1\delta(x - x_1)\Big)dx = q_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\delta(x - x_0) \cdot 1\Big)dx + q_1 \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\delta(x - x_1) \cdot 1\Big)dx = q_0 + q_1$$

Получили то, что и хотели. Все вполне физично.

8.1.2 Основные определения

Определение 33. *Функия f называется* ***финитной****, если $f = 0$ вне некоторого отрезка.*

Определение 34. ***Носитель функции*** *f — замыкание множества точек x: $f(x) \neq 0$. Он обозначается $supp\ f$*

Определение 35. *C_0^∞ — множество бесконечно дифференцируемых финитных функций.*

Определение 36. *Последовательность $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ функций из C_0^∞ называется* ***сходящейся к функции*** *$\phi \in C_0^\infty$, если:*

1. $\exists [a,b] : supp\ \phi_k \in [a,b] \forall k$

2. $\sup|\phi_k^{(s)} - \phi^{(s)}| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \forall s$

Определение 37. *Линейное пространство C_0^∞ с введенным в нем понятием сходимости, называется пространством основных функций D*

Определение 38. *Функционал f на D называется **линейным**, если: $(f, \alpha\phi + \beta\psi) = \alpha(f,\phi) + \beta(f,\psi)\ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall \phi,\psi \in D$ Здесь скобки значат, что мы действуем функционалом f на то, что справа от него. Не путать со скалярным произведением. Чтобы было понятнее, напишем для дельта-функции: $(\delta(x-x_0); \phi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\phi(x)dx = \phi(x_0)$. То есть значение обобщенной функции (являющейся функционалом) - обычное число, а аргумент (то, что в скобках стоит справа) - некая бесконечно дифференцируемая функция, $\in D$.*

Определение 39. *Функционал f на D называется непрерывным, если при $k \to \infty$ из $\phi_k \to \phi$ в D $\Rightarrow\ (f,\phi_k) \to (f,\phi)$*

Определение 40. *Всякий линейный непрерывный функционал на пространстве D называется **обобщенной функцией**.*

Определение 41. ***Пространством обобщенных функций*** *D' называется множество всех обобщенных функций, с введенными в нем операциями сложения, умножения на число и сходимости:*

1. $(\alpha f + \beta g, \phi) = \alpha(f,\phi) + \beta(g,\phi) \forall f,g \in D', \phi \in D, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$
2. *Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty, f_k \in D', \forall k \in \mathbb{N}$ называется **сходящейся в D к** $f \in D$ при $k \to \infty$, если $(f_k,\phi) \to (f,\phi)$ при $k \to \infty, \forall \phi \in D$*

Определение 42. *Обобщенная функция f называется **регулярной**, если ее значение $\forall \phi \in D$ представимо в виде:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx,\ \text{где } \phi(x) \in D,\ \text{а } f(x) \text{ - "локально абсолютно интегрируема"}$$

"локально абсолютно интегрируема" значит, что она интегрируема по модулю на любом отрезке $[a,b]$

Определение 43 (то же определение регулярности, но в квантерах, как мы любим)**.** *Обобщенная функция f — регулярная, если:*

$$\forall \phi \in D\ \exists h \in L_1^{local}:\quad (f,\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\phi(x)dx$$

L_1^{local} значит локально абсолютно интегрируема. В этом определении также в интеграл я засунул некоторую функцию h(x), а не f(x), чтобы не возникало лишней путаницы между функционалом f, действующим на пространстве D, и функцией f(x), действующей на R, "соответствующей"функционалу f.

Примером такой функции является дельта-функция.

Определение 44. *Обобщенная функция называется **сингулярной**, если она не регулярная.*

Пример 1. Функция - шапочка

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right), & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

где $C_\varepsilon : \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x)dx = 1$ (условие нормировки)

Эта функция является примером функции класса C_0^∞, то есть бесконечно дифференцируемая, финитная. На экзамене как раз могут попросить привести пример такой функции.

Пример 2

$$\text{Доказать: } \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \delta(x) \text{ в } \mathrm{D}'$$

Доказательство.

$$\forall \phi(x) \in D : \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \phi(x) \right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon \phi(x)}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\phi(x) + \phi(0) - \phi(0))}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon \phi(0)}{\pi(x^2 + \epsilon^2)} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(\phi(x) - \phi(0))}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} dx \right) = (1)$$

$|\phi(x) - \phi(0)| = |\phi'(\varepsilon) \cdot x| \leq \max\limits_{x \in (-\infty, +\infty)} (|\phi'(x)|)x = cx$, где $c \in \mathbb{R}$. Кроме того, т.к. функция $\phi(x)$ финитна, пределы интегрирования можно заменить на -a; a.

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \varepsilon \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \varepsilon \frac{|\phi(x) - \phi(0)|}{x^2 + \varepsilon^2} dx \leq \frac{\varepsilon c}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \frac{\varepsilon c}{\pi} \ln \left(\frac{a^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

В итоге в (1) в пределе остается только один интеграл, который является табличным:

$$(1) = \frac{2}{\pi} \phi(0) \arctan \frac{a}{\varepsilon} \to \phi(0)$$

То есть при действии нашего функционала на произвольную функцию $\phi(x)$ мы получаем $\phi(0)$, значит, наш функционал в пределе это дельта функция, ч.т.д.

□

8.1.3 Дифференцирование обобщенных функций

Определение 45. *Пусть $f \in D'$. f' называется производной обобщенной функции f, если:*

$$(f', \phi) = -(f, \phi') \forall \phi \in D$$

Аналогично, n-я производная:

$$(f^{(n)}, \phi) = (-1)^n (f, \phi^{(n)}) \forall \phi \in D$$

Свойства:

- Линейность: $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ $\forall f, g \in D'$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Непрерывность: Если при $k \to \infty$ $f_k \to f$ в D', то $f'_k \to f'$ в D'.

Пример 3

Найти производную функции Хевисайда: $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & else \end{cases}$

Решение:

$$(\theta', \phi) = -(\theta, \phi') = (\text{ т.к. функция = 0 если x<0}) \; - \int\limits_0^{+\infty} \phi'(x)dx =$$

$$(\text{по формуле Ньютона-Лейбница и т.к. финитна}) = \phi(0) = (\delta, \phi)$$

Значит, $\theta' = \delta$

Пример 4

Найти первую и вторую производные |x| в D'.

Решение:

Воспользуемся еще одним свойством: $(\psi f, \phi) = (f, \phi\psi)$, где $\psi \in C^\infty,\ f \in D',\ \phi \in D$

$$|x| = xsignx = x(2\theta(x) - 1)$$

$$|x|' = signx + x(2\theta'(x)) = signx + 2x\delta(x) = signx$$

(т.к., пользуясь свойством из начала, $(x\delta, \phi) = (\delta, x\phi) = x\phi|_{x=0} = 0$)

$$|x|'' = (signx)' = (2\theta(x) - 1) = 2\theta'(x) = 2\delta(x)$$