

1 Семинар

1.1 Пример 1

Разложить x^2 на $[0; \pi)$ по \sin

Заметим, что x^2 - функция четная, следовательно, должна быть разложена по косинусам. Но в этой задаче дело в том, что x^2 задан только на $[0; \pi)$. Поэтому мы вольны продолжить x^2 на всю ось как четно, так и нечетно. В задаче сказано разложить по синусам, значит, продолжим нечетно. Приступим к решению.

1. Построим \tilde{f} , такую что $\tilde{f} = f$ при $x \in [0; \pi)$, \tilde{f} - нечетно продолжена на $[-\pi; 0)$, $\tilde{f}(\pi + 2\pi n) = 0$ и \tilde{f} 2π -периодическая

2.

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \sin(kx) dx = \dots \text{ по частям } \dots = \frac{2\pi}{k} (-1)^{k+1} + \frac{4}{\pi k^3} ((-1)^2 - 1)$$

$a_k = 0$; ($k \geq 0$), т.к. \tilde{f} нечетная.

Таким образом, на $[0; \pi)$ получим:

$$x^2 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{k} (-1)^{k+1} + \frac{4}{\pi k^3} ((-1)^2 - 1) \right) \sin(kx)$$

3. Исследуем на равномерную непрерывность. Видим, что \tilde{f} (график суммы ряда) - разрывна, значит про себя сразу понимаем, что равномерной непрерывности, скорее всего, нет. Докажем это четко. Т.к. \sin, \cos непрерывны на \mathbb{R} , то если бы ряд из них сходилась бы равномерно, то он сходилась бы к непрерывной функции, но \tilde{f} - не непрерывный \Rightarrow ряд не может сходиться равномерно, ч.т.д.

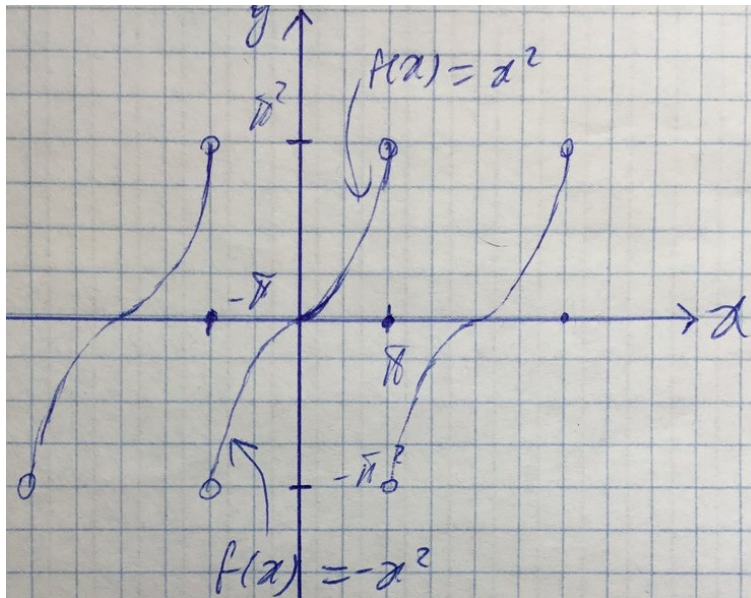


Рис. 1

1.2 Пример 2

Разложить x^2 на $(0; 2\pi)$ по \sin и \cos

1. Построим \tilde{f} , такую что $\tilde{f} = f$ при $x \in (0; 2\pi)$ $\tilde{f}(2\pi n) = \frac{4\pi^2+0}{2} = 2\pi^2$; \tilde{f} - 2π - периодическая
2. Посчитаем коэффициенты

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8}{3}\pi^2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{4}{k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin(kx) dx = -\frac{4\pi}{k}$$

(Последние 2 интеграла посчитаны по частям).

$$\text{На } (0; 2\pi) : x^2 \sim \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos(kx) - \frac{4\pi}{k} \sin(kx)$$

3. \tilde{f} не сходится равномерно (на \mathbb{R}) (рассуждения аналогичны предыдущей задаче).

Посмотрим теперь, как решать примеры, если функция $2l$ -периодическая, а не 2π - периодическая.

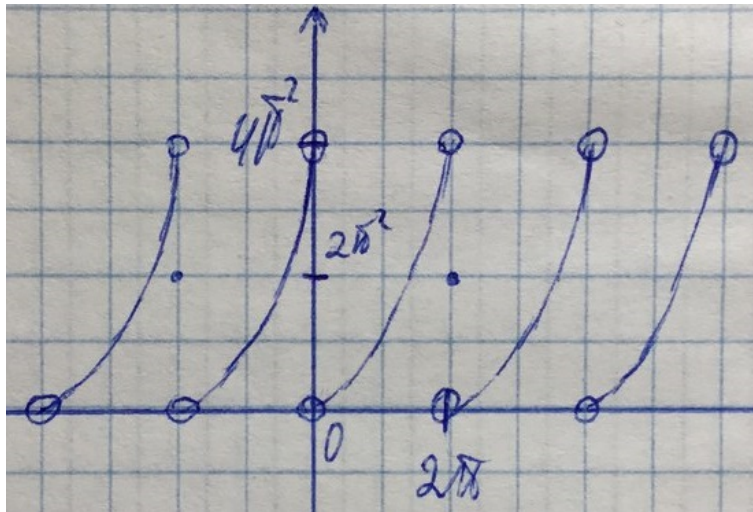


Рис. 2

1.3 $2l$ - периодическая

Пусть f не 2π - периодическая, а $2l$ - периодическая, где $l \in \mathbb{R}$; f - абсолютно интегрируема на $[-l; l]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx \frac{\pi}{l}) + b_k \sin(kx \frac{\pi}{l}); \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx;$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos(kx \frac{\pi}{l}) dx; \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin(kx \frac{\pi}{l}) dx;$$

1.4 Пример 3

Разложить $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-2; 0] \\ x + 2, & x \in (0, 2) \end{cases}$ в ряд Фурье с периодом 4. Построить график суммы и исследовать, сходится ли равномерно.

1. Построим $\tilde{f} = f$ при $x \in (-2, 2)$; $\tilde{f}(2 + 4n) = 3$, и \tilde{f} — 4-периодическая функция. ($l = 2$).
2. Далее просто подставляем в формулы.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(nx \frac{\pi}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 2 \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 (x+2) \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx = (x+2) \frac{\sin(\frac{\pi nx}{2})}{\pi n} \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{\sin(\frac{\pi nx}{2})}{\pi n} dx = \frac{\cos(\frac{\pi nx}{2})}{\pi n \frac{\pi n}{2}} = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \tilde{f}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 2 dx + \frac{1}{2} \int_0^2 (x+2) dx = 3, 5$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 2 \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 (x+2) \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

Ответ:

$$f(x) \sim \frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(((-1)^n - 1) \frac{2}{\pi n^2} \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) + 2 \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right) \right), \quad x \in (-2, 2)$$

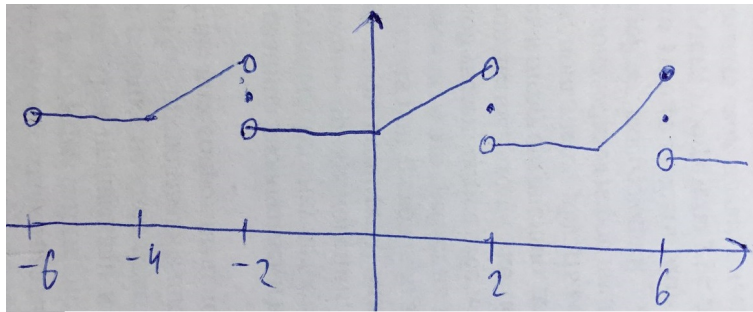


Рис. 3

1.5 Комплексный ряд Фурье

Если f — 2π -периодическая:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \\ c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

$$\text{Если } 2l\text{-периодическая, то } \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-ikx \frac{\pi}{l}} dx; \quad f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx \frac{\pi}{l}}$$

1.6 Пример 4

Найти комплексную форму ряда Фурье функции с периодом π $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Вспомним, что $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; и $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$;

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{1}{2\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos(x) e^{-2nxi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} e^{-2nxi} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} e^{ix(1-2n)} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} e^{ix(-1-2n)} dx = \underbrace{\frac{\exp(ix(1-2n))}{2\pi i(1-2n)} \Big|_0^{\pi/2}}_A + \underbrace{\frac{\exp(ix(-1-2n))}{2\pi i(-1-2n)} \Big|_0^{\pi/2}}_B \end{aligned}$$

Немного причешем А и В (начнем с подстановки концов палки Ньютона-Лейбница в экспоненту; будем пользоваться формулой $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$):

$$e^0 = 1$$

$$\exp(i\frac{\pi}{2}(1-2n)) = \cos(\frac{\pi}{2} - \pi n) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \pi n) = i(-1)^n$$

$$\exp(i\frac{\pi}{2}(-1-2n)) = \cos(-\frac{\pi}{2} - \pi n) + i\sin(-\frac{\pi}{2} - \pi n) = i(-1)^{n+1}$$

Подставим найденное в А и В и воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$A = \frac{i(-1)^n - 1}{2\pi i(1-2n)}$$

$$B = \frac{-i(-1)^n - 1}{2\pi i(-1-2n)};$$

$$\text{в итоге } c_n = A + B = \frac{i(-1)^n - 2n}{\pi i(1-4n^2)}$$

Ответ:

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{i(-1)^n - 2n}{\pi i(1-4n^2)} e^{2inx}$$