1 Семинар

1.1 Основная теория

Определение 1. ***Тригонометрический ряд***- *это ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k sin(kx)) \qquad (1)$$

Определение 2. ***Тригонометрическая система***- *это система функций* $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \dots$

В этом семестре мы будем иметь дело с функциональными пространствами - пространствами, в которых базис состоит из функций.

Мы будем в дальнейшем раскладывать функции в ряд Фурье, то есть по тригонометрической системе, значит, логично предположить, что эта система - базис в некотором функциональном пространстве (т.е. для некоторого множества функций). Причем ортогональный.

Почему же эта система является ортогональным базисом?
Для ортогональности надо, чтобы (по аналогии с привычной нам декартовой прямоугольной системой координат) $(\bar{i}, \bar{j}) = 0$, где i и j - в нашем случае не базисные единичные векторы, а базисные функции, а именно функции из тригонометрической системы. (а для нормированности $|\bar{i}| = 1$.)

$$(\cos(kx), \cos(mx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(mx)dx = /k \neq m/ = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{1}{2}\cos(x(k-m)) + \cos(x(k+m))\Big)dx$$

$\Rightarrow$ (т.к $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(xn)dx = 0$.) $(\cos(kx), \cos(mx)) = 0$. Аналогично с $(\sin(kx), \sin(mx) = 0$ при $m \neq k$ и $(\sin(kx), \cos(mx) = 0$

Теперь найдем длину базисных векторов, т.е. $|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ (покажем, что они не нормированы).
$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2mx))dx = \frac{x}{2}|_{-\pi}^{\pi} = \pi$
Аналогично получим для $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)dx = \pi$.

Определение 3. *Пусть f - это 2π-периодическая абсолютно интегрируемая функция. Тогда тригонометрический ряд (1), где*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx; \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx;$$

называется ***Рядом Фурье функции*** $f(x)$. *В этом случае пишут:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big)$$

Рассмотрим случаи:

1. $f(x)$ - нечетная функция.
   $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ - очевидно: площади под графиком справа и слева от нуля равны по модулю и противоположны по знаку.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-t)\cos(kt)d(-t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = 0;$$

$$(k \geq 0)$$

Предпоследнее равенство верно, т.к.: -1 вынесли из-под знака дифференциала, для нечетной функции $f(-t) = -f(t)$ и если поменять местами пределы интегрирования в определенном интеграле, вылезет минус. Итого вылезло три минуса, которые, умножившись, дали один минус.

$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)dx$ - получим аналогично (разница с коэффициентами произвольной функции в двоечке перед интегралом и пределах интегрирования. Можно считать этот коэффициент и по общей формуле.)

2. $f(x)$ - четная функция.
   $b_k = 0$
   $a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)dx,$
   $a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos(kx)dx$

Определение 4. *Пусть x_0 - точка разрыва 1-ого рода. Тогда обобщцнные односторонние производные это*

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0\boldsymbol{+0})}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0\boldsymbol{-0})}{h}$$

Обобщенные потому, что жирным выделено. Разница с обычными в том, что значения $f(x_0)$ не существует, поэтому вместо него $f(x_0+0)$ или $f(x_0-0)$

Определение 5. *Пусть x_0 - точка разрыва 1-ого рода. Тогда x_0 называется* ***почти регулярной точкой****, если $\exists f(x_0+0), f(x_0-0), f'_+(x_0), f'_-(x_0)$*
Если при этом $f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$, то x_0 - ***регулярная точка***

Теорема 1 (Поточечная сходимость ряда Фурье)**.** *Пусть $f -$ 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция, и при этом x_0 - ее почти регулярная точка. Тогда ряд Фурье функции f в этой точке сходится к $\frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$, а если точка регулярная, то к значению $f(x_0)$*

Теорема 2 (Равномерная сходимость ряда Фурье)**.** *Пусть $f -$ 2π-периодическя, непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая функция, тогда ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно т.е.*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$$

То есть можно уже писать не $\sim$, а $=$. $\sim$, впрочем, тоже можно.

Замечание: если f только 2π-периодическая, **кусочно** непрерывная и кусочно непрерывно-дифференцируемая функция, то она сходится всего-навсего поточечно к $\frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$.

Теорема 3 (нужная для доказательства, что ряд Фурье разрывной функции не сходится равномерно)**.** *Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве E. Пусть $u_k(x_0)$ - непрерывна $\forall k, x_0 \in E$. Тогда сумма ряда $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ - непрерывна в x_0*

Цель: найти откуда берутся a_k, b_k. Будем их искать в предположении, что ряд сходится равномерно т.е. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.
Домножим обе части на функцию $\cos(nx)$ и возьмем интеграл от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx = \frac{a}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx) dx \Big)$$

Т.к. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \pi & , k = n \end{cases}$ Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx = a_n \pi \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx, \ n \geq 1$$

Теорема 4 (Лемма Римана об осцилляции)**.** *Пусть функция f абсолютно интегрируема на конечном (или бесконечном) интервале (a, b). Тогда*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$$

$\Rightarrow$ *при* $n \to \infty$ *получаем* $a_n, b_n \to 0$

Замечание: Если $2\pi-$периодическая функция интегрируема на отрезке $[a, a + 2\pi]$, то она интегрируема на любом отрезке $[b, b + 2\pi]$

1.2 Пример 1

Разложить $\sin^2 x$ в ряд Фурье.
$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$. Т.е. $a_0 = 1;\ a_2 = -\frac{1}{2}$ а остальные коэффициенты равны 0.

1.3 Пример 2

Найти ряд Фурье функции $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x),\ x \in (0, 2\pi)$. Нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд Фурье данной функции на равномерную сходимость (на всем $\mathbb{R}$).
Решение:

1. Пусть $\tilde{f}$ -2π-периодическая функция, совпадающая с f на $(0, 2\pi)$

   Дополняем ее $\tilde{f}(x) = 0$, при $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

   Построим ее график. Он изображен на рис.1.

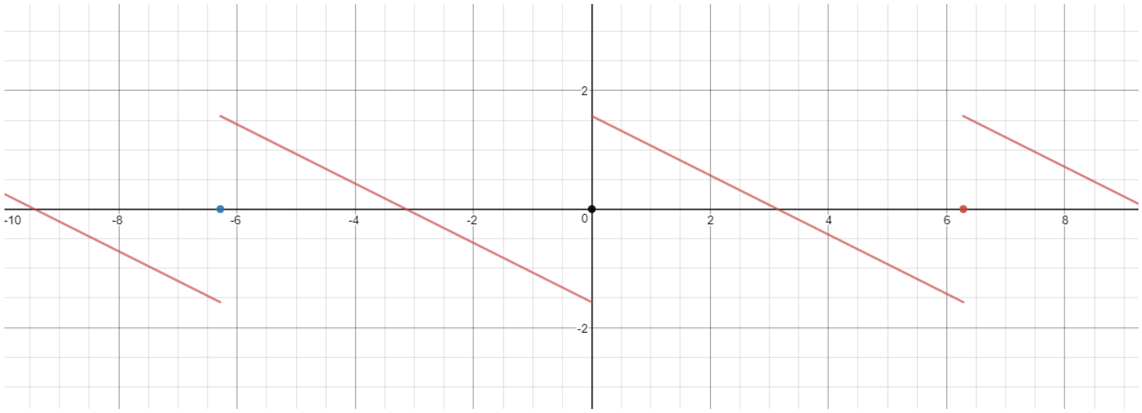

Рис. 1

Далее в этом пункте будем доказывать, что график суммы ряда функции $\tilde{f}(x)$ совпадает с графиком самой функции $\tilde{f}(x)$.

Будем доказывать с помощью теоремы 1. То, что $\tilde{f}(x)$ 2π-периодическая и каждая ее точка регулярная мы знаем, это очевидно(даже точки разрыва, мы специально в них выбрали значение функции $\tilde{f}(x) = (f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$, т.е. таким образом, чтобы они были регулярными. Точки непрерывности же по дефолту регулярные).

Осталось доказать, что $\tilde{f}(x)$ абсолютно интегрируемая на $[0,2\pi]$.

Доказывается с помощью теоремы из 2го семестра: т.к. $\tilde{f}(x)$ непрерывна на $(0,2\pi)$ и ограничена на $[0,2\pi] \Rightarrow$ то $\tilde{f}(x)$ - абсолютно интегрируема на $[0,2\pi]$.

Т.о., все условия теоремы 1 выполняются. Значит, ряд Фурье функции $\tilde{f}(x)$ сходится поточечно во всех точках. Причем сходится к $\tilde{f}(x_0) \forall x_0 \in \mathbb{R}$. То есть значение суммы ряда в каждой точке стремится к значению нашей функции, то есть их графики совпадают. Ч.т.д.

2. Представим эту функцию в виде ряда. Заметим, что $\tilde{f}(x)$ нечетная. Значит $a_k = 0$.

$$\text{Найдем } b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin(kx)dx = \Big/ u = \frac{\pi-x}{2};\ dv = \sin(kx)dx \Big/ =$$
$$= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi-x}{2}\frac{1}{k}(-\cos(kx))\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{2k}\cos(kx)dx\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{\pi}{2}\frac{1}{k}(-1) - \frac{\pi}{2}\frac{1}{k}(-1)\Big) = \frac{1}{k}$$

(второй интеграл, т.е. от косинуса, ноль, можете проверить сами, если вам не очевидно)

Таким образом:

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} \quad x \in (0,2\pi)$$

Разложение f на $(0,2\pi)$ совпадает с этим.

3. Ряд Фурье не сходится равномерно т.к. поскольку $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ - непрерывные функции, то если бы ряд сходился равномерно, то он сходился бы к непрерывной функции по теореме 3, но $\tilde{f}$ не является непрерывной.

Ответ: $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}, x \in (0, 2\pi)$; не сходится равномерно.

Замечание. На рис.2 показано, как себя ведет сумма ряда, особенно в точках разрыва, при конечном (~ 50) числе членов ряда. Видим, что в точках разрыва возникают всплески, и сумма ряда сильно отклоняется от значений функции. Если бы ряд сходился равномерно, такой фигни бы не было.

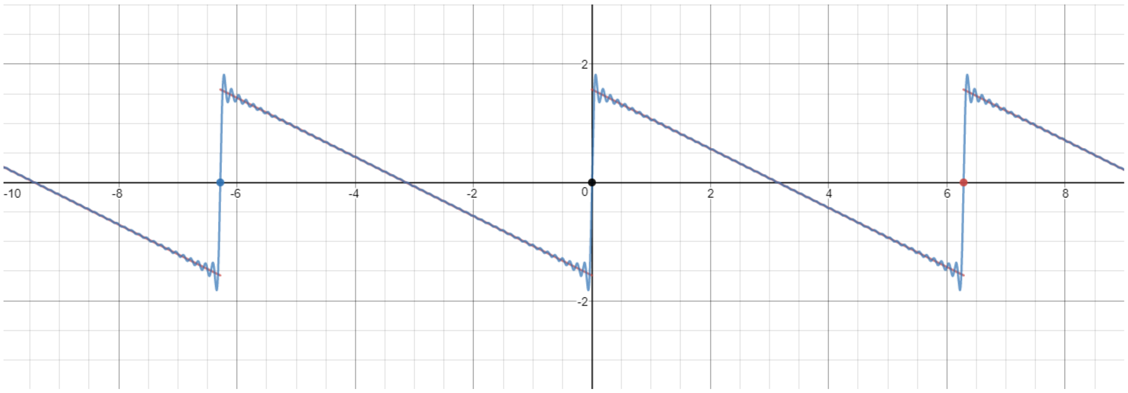

Рис. 2

1.4 Пример 3

Разложить функцию $f(x) = 2x - 1, x \in (0, \pi)$ в ряд Фурье по $\{\cos(nx), n \in \mathbb{N}\}$. Нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд Фурье данной функции на равномерную сходимость (на всем $\mathbb{R}$).

1. $\tilde{f}(x)$ зададим так: $\tilde{f}(x) = 2x - 1, x \in (0, \pi)$; относительно нуля отразим четно (т.к. надо разложить по косинусам), т.е. $\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x)$. Потом продолжим на всю ось с периодом 2π. Ее график:

   График суммы ряда кстати с ним совпадает, т.к. ряд Фурье сходится равномерно (будет доказано в пункте 3).

   График суммы (и самой функции $\tilde{f}(x)$) представлен на рис.3.

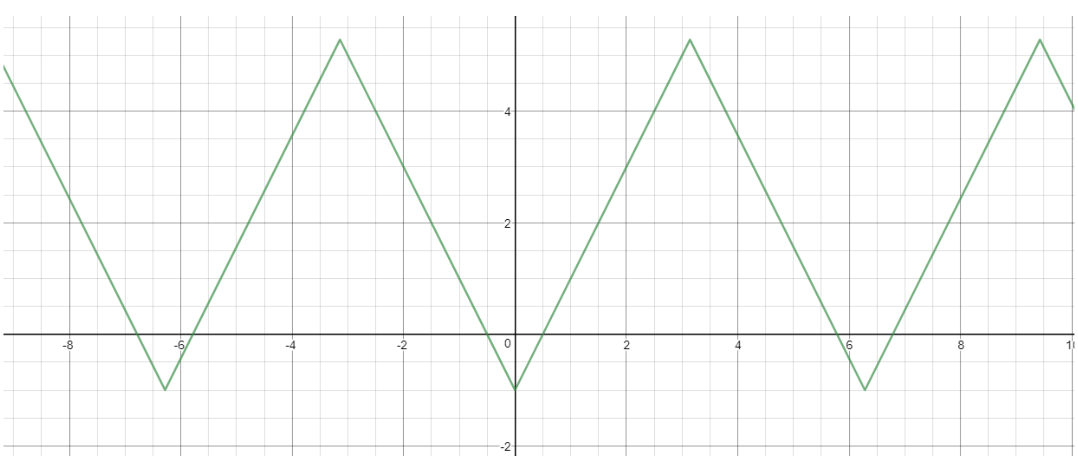

Рис. 3

2. Найдем ряд Фурье: $b_k = 0$ т.к. функция четная.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-1)dx = \frac{2}{\pi}x^2\,|_0^\pi - \frac{2}{\pi}x\,|_0^\pi = 2\pi - 2$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (2x-1)\cos(kx)dx = /u = (2x-1);\ dv = \cos(kx)dx/ = \\ &= \frac{2}{\pi}\Big((2x-1)\frac{1}{k}\sin(kx)|_0^\pi - \frac{2}{k}\int_0^\pi \sin(kx)dx\Big) = \frac{4}{\pi k^2}\cos(kx)|_0^\pi = \frac{4}{\pi k^2}\big((-1)^k - 1\big), k \geq 1 \end{aligned}$$

таким образом: $\tilde{f}(x) \sim (\pi - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k^2}\big((-1)^k - 1\big)\cos(kx)$

Ряд Фурье сходится равномерно, т.к. $\tilde{f}$ – 2π-периодическая, непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая функция.

Ответ: $f(x) = (\pi - 1) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k^2}\big((-1)^k - 1\big)\cos(kx), \;\; x \in (0, \pi)$; ряд Фурье сходится равномерно.

Замечание. В силу равномерной сходимости сумма ряда даже при небольшом числе членов будет очень похожа на саму функцию и не будет скакать как огалтелая. На рис.4 приведен график суммы всего-навсего первых 5 членов ряда (а уже весьма похоже на правду!).

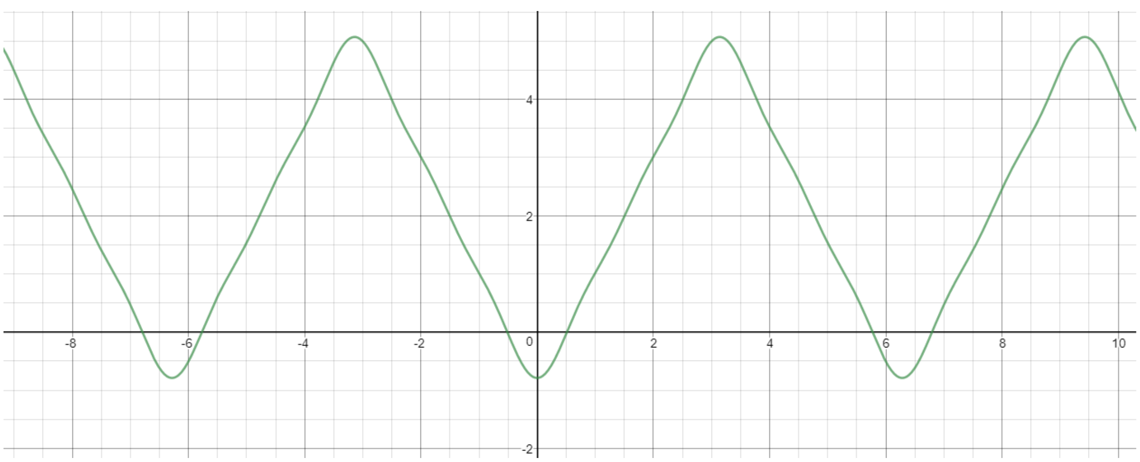

Рис. 4

1.5 Пример 4

Разложить в ряд Фурье $f(x) = signx$ на $(-\pi, \pi)$. Нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд Фурье данной функции на равномерную сходимость (на всем $\mathbb{R}$).

Где $signx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

1. Зададим функцию $\tilde{f}(x)$, равную $f(x)$ на $(-\pi, \pi)$

   Далее зададим ее значение в точках разрыва, так, чтобы сумма ее ряда сходилась к ней поточечно: $\tilde{f}(\pi + 2\pi n) = 0$. И затем продолжим на всю ось с периодом 2π.

   График к этому примеру, а заодно и к следующему приведен на рис.4.

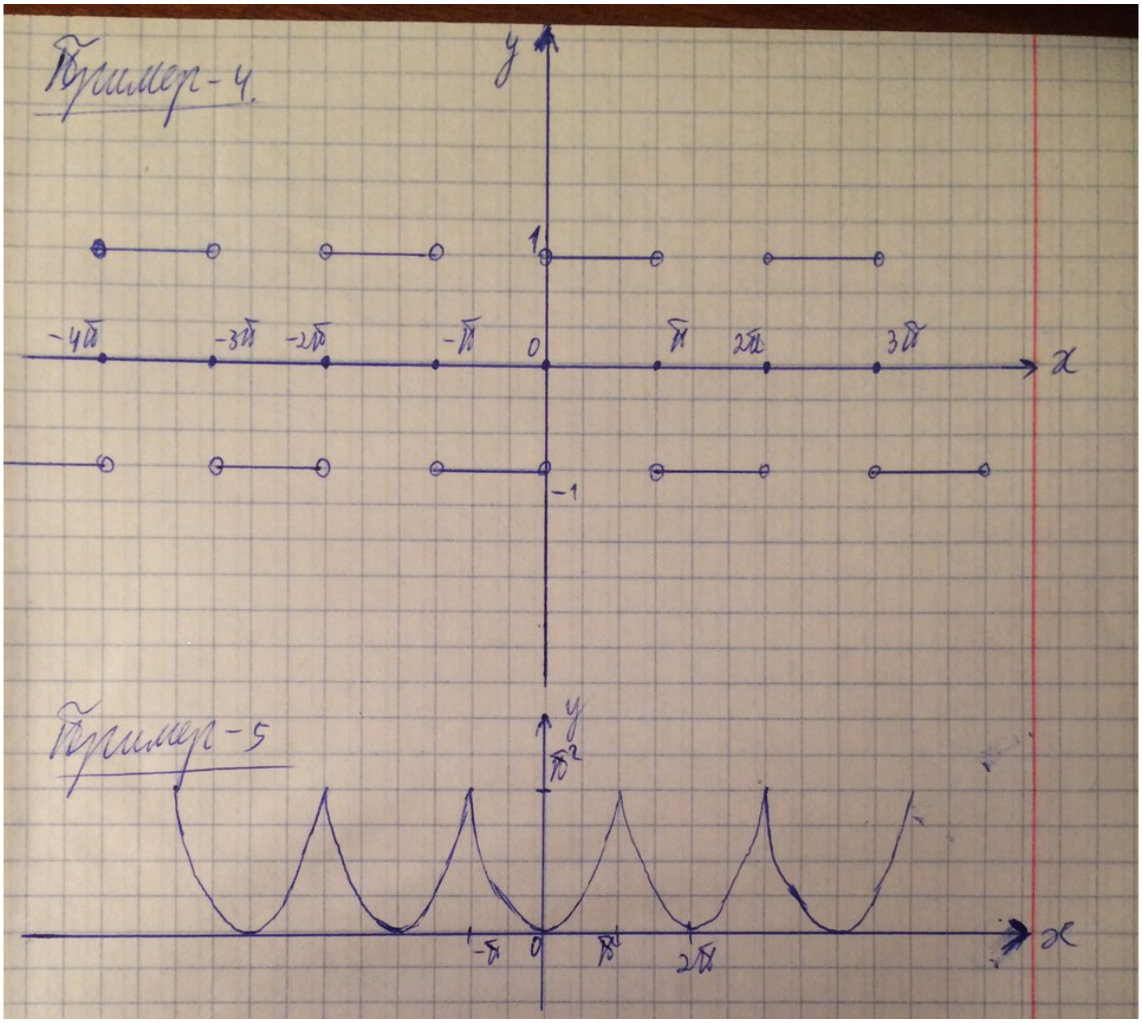

Рис. 5

2. $\tilde{f}(x)$– неччтная, значит $a_k = 0, k \geq 0$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi k}(-\cos(kx)|_0^{\pi}) = \frac{2}{\pi k}\big((-1)^{k+1}+1\big)$$

3. Ряд Фурье не сходится равномерно т.к. поскольку $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ - непрерывные функции, то если бы ряд сходился равномерно, то он сходился бы к непрерывной функции по теореме 3, но $\tilde{f}$ не является непрерывной.

Ответ: $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k}\big((-1)^{k+1}+1\big)\sin kx,\ x \in (-\pi, pi)$
Не сходится равномерно.

1.6 Пример 5

Разложить x^2 на $[-\pi,\pi]$. Нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд Фурье данной функции на равномерную сходимость (на всем $\mathbb{R}$).

1. Зададим $\tilde{f}(x)$: $\tilde{f}(x) = f(x)$ на $[-\pi, \pi]$, а потом продолжим на всю числовую ось с периодом 2π.

2. Т.к. четная, $b_k = 0$
   $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$
   $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 cos(nx) dx = ... = \frac{(-1)^n 4\pi}{n^2}$
   $$\tilde{f}(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^2 4\pi}{k^2} cos(kx)$$

3. Ряд Фурье данной функции сходится равномерно по Теореме 2 на всей числовой оси.