3 Семинар

3.1 Пример 1

Пусть f(x) задана на $(0; \frac{\pi}{2})$

Разложить $f(x)$ по $sin(2k-1)x$

Ранее мы встречались с задачами разложить просто по синусам или косинусам. В таком случае мы продолжали соответственно функцию на всю ось нечетным или четным образом. Теперь же нужно не просто разложить по синусам (т.е. как минимум продолжить нечетно), а еще и избавиться от половины этих синусов (от синусов "четных дуг"). Логично предположить, что это можно сделать, продолжив функцию определенным образом с $(0; \frac{\pi}{2})$ на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Паучье чутье подсказало нам, что нужно продолжить на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ "четно относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ т.е. $f(\pi - x) = -f(x)$ $(\forall x \in (0; \frac{\pi}{2}))$

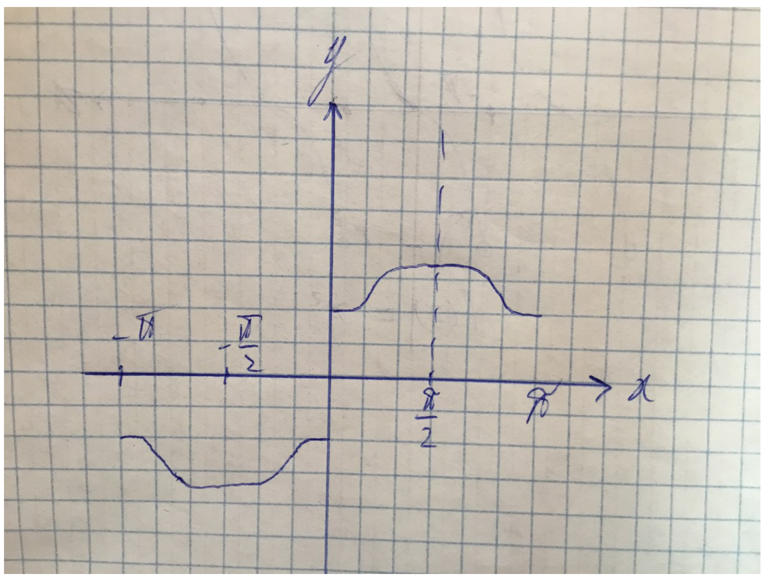

Рис. 1

Итак, рассмотрим продолжение функции с $(0; \frac{\pi}{2})$ на $(-\pi; \pi)$: $\begin{cases} f(\pi - x) = f(x); x \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ f(x) - \text{ нечетная} \end{cases}$

Вторая строчка говорит нам, что разложение будет по синусам, а первая (по нашему паучьему предположению) убьет синусы четных дуг $(sin(2kx))$. Покажем, что наше паучье чутье нас не подвело и синусы четных дуг правда убьются. Будем это делать, считая в лоб коэффициенты Фурье.

При таком продолжении $a_k = 0$ т.к. функция нечетная.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sin(nx)dx = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sin(nx)dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)sin(nx)dx}_{I_2}$$

Посчитаем их поотдельности, приняв во втором интеграле (с целью, чтобы в нем пределы интегрирования стали как в первом) $x = \pi - t$. Значит $t = \pi - x$:

$$I_2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - t) sin(n(\pi - t))d(\pi - t) = + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t)\sin(n(\pi - t))dt.$$

Рассмотрим синусы, стоящие под этим интегралом, отдельно при $n = 2k$ и $n = 2k - 1$:

- n=2k;
$$\sin n(\pi - t) = \sin 2k(\pi - t) = \sin(2\pi k - 2kt) = -\sin 2kt$$
- n=2k -1;
$$\sin n(\pi - t) = \sin(2k - 1)(\pi - t) = \sin(2\pi k - 2kt - \pi + t) =$$
$$= \sin(-\pi - (2k - 1)t) = -\sin(\pi + (2k - 1)t) = \sin(2k - 1)t$$

Тогда посчитаем I_2

$$n = 2k: \quad I_2 = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t)(\sin 2kt)dt$$

$$n = 2k - 1: \quad I_2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t)(\sin((2k - 1)t)dt$$

$$n = 2k; \quad I = I_1 + I_2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2kt)dt - \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2kt)dt = \text{ интегралы равны } = 0$$

Значит, наше паучье чутье нас не подвело, и синусы четных дуг взаправду убились.

$$n = 2k - 1; \quad I = I_1 + I_2 = 2I_1 = \frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2k - 1)tdt$$

$$\textbf{Ответ: } f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2k - 1)tdt\right) sin(2k - 1)x$$

Замечание. Если нужно разложить по синусам четным дуг, а не нечетных, то продолжаем функцию с $(0; \frac{\pi}{2})$ на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ следующим образом: $f(\pi - x) = -f(x)$, т.е. нечетно относительно точки $(\pi/2; 0)$. С разложением по косинусам же дело обстоит наоборот: во-первых, разумеется, относительно нуля уже нужно отражать четно. Во-вторых, чтобы остались только косинусы четных дуг, нужно $f(\pi - x) = f(x)$ продолжать, а нечетных - $f(\pi - x) = -f(x)$.

3.2 Интегрирование и дифференцирование рядов Фурье

Теорема 1. *$f -$ $2\pi-$периодическая и кусочно непрерывная на $[-\pi;\pi]$;*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Тогда мы можем почленно проинтегрировать этот ряд:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \frac{1}{k}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \sin(k\tau)|_0^x + b_k(-\cos(k\tau)|_0^x \Big) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\sin(kx) + \frac{b_k}{k}\big(1-\cos(kx)\big)\right)$$

Замечание:Т.е. коэффициенты ряда Фурье для F(x) выглядят так: $\alpha_k = -\frac{b_k}{k}$ (по cos) и $\beta_k = \frac{a_k}{k}$ (по sin). Новый свободный член $\alpha_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$. Выглядит крайне некрасиво, поэтому его можно посчитать обычным, привычным нам способом через интеграл $\frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$. В общем-то, α_k и β_k также можно посчитать этим способом, но зачем лишний раз брать интеграл, если его можно не брать, а просто написать $\alpha_k = -\frac{b_k}{k}$, если b_k - известный нам коэффициент фурье функции, ряд которой мы интегрировали.

3.3 Пример 2

Исходя из разложения $x = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}$; $\ x \in (-\pi;\pi)$. Получить разложение в ряд Фурье функций x^2, x^3.

Решение. Проинтегрируем почленно, чтобы найти разложение x^2:

$$\int_0^x t dt = x^2/2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\int_0^x \sin(kx)dt = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(1-\cos(kx)\right)\frac{1}{k} =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{2(-1)^k}{k^2}}_{\alpha_k, k\geq 1}\cos(kx)$$

α_0 имеет форму числового ряда. Посчитаем его обычным методом:

$$\frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^3}{3}\cdot 2 = \frac{\pi^2}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$$

Заметим, что в коэффициенте суммы стоит четверка, а не двойка, которую мы получили, когда почленно интегрировали, потому что двойка стояла бы в разложении $x^2/2$, а мы хотим получить разложение x^2.

Получим разложение в ряд Фурье x^3, проинтегрировав разложение x^2.

$$\int\limits_0^x t^2 dt = \frac{\pi^2 x}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \int_0^x \cos(kt)dt$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^3} \sin(kx) = \Bigg/ x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} \Bigg/ = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) \left(\frac{2\pi^2(-1)^{k+1}}{3k} + \frac{4(-1)^k}{k^3} \right)$$

$$\textbf{Ответ: } x^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi^2(-1)^{k+1}}{k} + \frac{12(-1)^k}{k^3} \right) \sin(kx)$$

□

3.4 Равенство Парсеваля, неравенство Бесселя

Теорема 2 (Равенство Парсеваля)**.** *Пусть f — $2\pi-$периодическая, непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая и $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. Тогда:*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Теорема 3 (Неравенство Бесселя)**.** *Пусть f — $2\pi-$периодическая и кусочно непрерывная и $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. Тогда:*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

3.4.1 Пример на Парсеваля

Посчитать ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Решение. Воспользуемся равенством Парсеваля, для разложения x $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$;

В нем:

$$a_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}; \quad a_k^2 = \frac{4}{k^2}; \quad f(x) = x;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi}{3}$$

Подставим это теперь в равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

□

3.4.2 Еще пример на Парсеваля

С помощью равенства Парсеваля найти: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$
Воспользуемся разложением:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{4}{n^2}(-1)^n}_{a_n} \cos(nx);$$

$b_n = 0$; $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$; $f(x) = x^2$
Тогда равенство Парсеваля дачт нам:

$$\frac{4\pi^4}{9 \cdot 2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} + 0^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2)^2 dx$$

$$\frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^5}{5}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 2\frac{\pi^4}{5}$$

$$\frac{\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}$$

3.5 Оценить порядок убывания коэффициентов Фурье

По Лемме Римана по осцилляции коэффициенты Фурье стремятся к нулю.
Значит $a_n = o(1), n \to \infty$. Но можно оценить еще более жестко:

Теорема 4 (О порядке убывания коэффициентов Фурье)**.** *Пусть функция $f-$ $2\pi-$периодическая, $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируема и имеет m-ю кусочно непрерывную производную.$\Big($При этом $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi); j = \overline{1, m-1}$ (условие сшивки)$\Big)$. Тогда*

$$|a_k| + |b_k| = o\left(\frac{1}{k^m}\right), \ k \to \infty$$

3.5.1 Пример на порядок убывания

$f(x) = x^{2013}$. Найти порядок убывания коэффициентов Фурье. $x \in [-\pi; \pi]$

Решение. Т.к. $f-$нечетная, то $a_k = 0$. Остается только оценить b_k.
Заметим, что условие сшивки не выполняется не то чтобы для производных, а даже для самой функции: $(-\pi)^{2013} \neq (\pi)^2 013$. Функция это 0-я производная от самой себя. Получаем что $m = 0$ и по Теореме о порядке убывания производной $|b_k| = o\left(\frac{1}{k^0}\right) = o(1)$

□

3.5.2 Пример 2 на порядок убывания

$f(x) = x^{2012}$. Найти порядок убывания коэффициентов Фурье. $x \in [-\pi; \pi]$

Доказательство. Т.к. $f-$четная, то $b_k = 0$. Оценим $a_k, k \to 0$.
Будем опять же проверять условие сшивки (т.к. внутри интервала $(-\pi, \pi)$ функция непрерывна и бесконечное число раз непрерывна дифференцируема, а значит, гладкость может нарушаться только на границе.) Ищем такое n, когда $f^{(n)}(-\pi) \neq f^{(n)}(\pi)$

$f^{(0)}(-\pi) = f^{(0)}(\pi)$, очевидно.

$\tilde{f}' = 2012x^{2011}$, значит, $f^{(1)}(-\pi) \neq f^{(1)}(\pi)$

Отсюда n=1.

Ответ: $|a_k| = o\left(\frac{1}{k^1}\right)$

□

3.5.3 Пример 3 на порядок убывания

$f(x) = (x^2 - \pi^2)\sin^2 x$. Найти порядок убывания коэффициентов Фурье. $x \in [-\pi; \pi]$

Доказательство. $f^{(0)}(-\pi) = 0 = f^{(0)}(\pi) \Rightarrow$ условия не нарушены
Продифференцируем $f' = 2x\sin^2 x + x^2\sin(2x) - \pi^2\sin(2x)$. Снова $f^{(1)}(-\pi) = 0 = f^{(1)}(\pi) = 0$.
Вторая производная $f^{(2)} = 2\sin^2 x + 2x\sin(2x) + 2x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x) - 2\pi^2\cos(2x)$. Опять получим $f^{(2)}(-\pi) = 0 = f^{(2)}(\pi)$
Третья производная $f^{(3)} = 2\sin(2x) + 4\sin(2x) + 8x\cos(2x) + 4x\cos(2x) + 4x^2\sin(2x) + 4\pi^2\sin(2x)$.
В итоге: $f^{(3)}(\pi) = -12\pi \neq f^{(3)}(\pi) = 12\pi$

Ответ: $|a_k| = o\left(\frac{1}{k^3}\right)$

□

3.5.4 Является ли рядом Фурье?

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Является ли он рядом Фурье какой-то функции?

Есть такая теорема: "Равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы"
Т.е. для равномерно сходящегося ряда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k \sin kx$ его сумма это $f(x)$, и он, как мы видим, является ее рядом Фурье.

Значит, если мы докажем равномерную сходимость ряда, то получается, он будет рядом Фурье некой функции, а именно своей суммы.

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Значит, этот ряд является рядом Фурье некой функции, а именно своей суммы.

3.5.5 Является ли рядом Фурье?

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$. Является ли он рядом Фурье какой-то функции?

Доказательство. Заметим, что $\forall n \Rightarrow b_n = 1 \neq 0$? ? по теореме Римана об осцилляции этот ряд не может быть рядом Фурье, т.к. его коэффициенты Фурье не стремятся к 0. □