

1 Семинар

1.1 Пример 1

Пусть $f(x)$ задана на $(0; \frac{\pi}{2})$

Разложить $f(x)$ по $\sin(2k-1)x$

Ранее мы встречались с задачами разложить просто по синусам или косинусам. В таком случае мы продолжали соответственно функцию на всю ось нечетным или четным образом. Теперь же нужно не просто разложить по синусам (т.е. как минимум продолжить нечетно), а еще и избавиться от половины этих синусов (от синусов "четных дуг"). Логично предположить, что это можно сделать, продолжив функцию определенным образом с $(0; \frac{\pi}{2})$ на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Паучье чутье подсказало нам, что нужно продолжить на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ "четно относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ т.е. $f(\pi - x) = -f(x)$ ($\forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$)

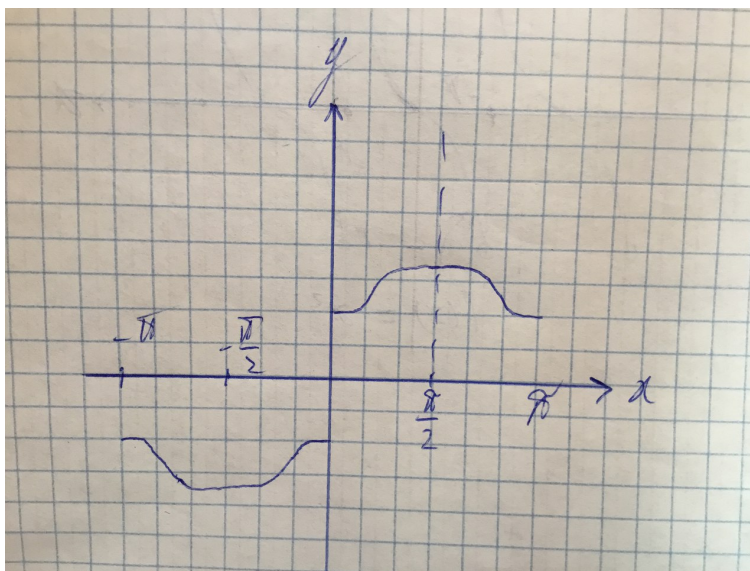


Рис. 1

Итак, рассмотрим продолжение функции с $(0; \frac{\pi}{2})$ на $(-\pi; \pi)$:
$$\begin{cases} f(\pi - x) = f(x); x \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ f(x) - \text{нечетная} \end{cases}$$

Вторая строчка говорит нам, что разложение будет по синусам, а первая (по нашему паучьему предположению) убьет синусы четных дуг ($\sin(2kx)$). Покажем, что наше паучье чутье нас не подвело и синусы четных дуг правда убьются. Будем это делать, считая в лоб коэффициенты Фурье.

При таком продолжении $a_k = 0$ т.к. функция нечетная.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(nx) dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx}_{I_2}$$

Посчитаем их поотдельности, приняв во втором интеграле (с целью, чтобы в нем пределы

интегрирования стали как в первом) $x = \pi - t$. Значит $t = \pi - x$:

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\pi - t) \sin(n(\pi - t)) d(\pi - t) = + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t) \sin(n(\pi - t)) dt.$$

Рассмотрим синусы, стоящие под этим интегралом, отдельно при $n = 2k$ и $n = 2k - 1$:

- $n=2k$;

$$\sin n(\pi - t) = \sin 2k(\pi - t) = \sin(2\pi k - 2kt) = -\sin 2kt$$

- $n=2k-1$;

$$\begin{aligned} \sin n(\pi - t) &= \sin(2k - 1)(\pi - t) = \sin(2\pi k - 2kt - \pi + t) = \\ &= \sin(-\pi - (2k - 1)t) = -\sin(\pi + (2k - 1)t) = \sin(2k - 1)t \end{aligned}$$

Тогда посчитаем I_2

$$n = 2k : \quad I_2 = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t) (\sin 2kt) dt$$

$$n = 2k - 1 : \quad I_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t) (\sin((2k - 1)t)) dt$$

$$n = 2k; \quad I = I_1 + I_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin(2kt) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin(2kt) dt = \text{интегралы равны} = 0$$

Значит, наше паучье чутье нас не подвело, и синусы четных дуг взаправду убились.

$$n = 2k - 1; \quad I = I_1 + I_2 = 2I_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin(2k - 1)t dt$$

$$\text{Ответ: } f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin(2k - 1)t dt \right) \sin(2k - 1)x$$

Замечание. Если нужно разложить по синусам четным дуг, а не нечетных, то продолжаем функцию с $(0; \frac{\pi}{2})$ на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ следующим образом: $f(\pi - x) = -f(x)$, т.е. нечетно относительно точки $(\pi/2; 0)$. С разложением по косинусам же дело обстоит наоборот: во-первых, разумеется, относительно нуля уже нужно отражать четно. Во-вторых, чтобы остались только косинусы четных дуг, нужно $f(\pi - x) = f(x)$ продолжать, а нечетных - $f(\pi - x) = -f(x)$.

1.2 Интегрирование и дифференцирование рядов Фурье

theorem 1. f — 2π -периодическая и кусочно непрерывная на $[-\pi; \pi]$;

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Тогда мы можем почленно проинтегрировать этот ряд:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \frac{1}{k} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \sin(k\tau)|_0^x + b_k (-\cos(k\tau))|_0^x \right) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k} \sin(kx) + \frac{b_k}{k} (1 - \cos(kx)) \right)$$

Замечание: Т.е. коэффициенты ряда Фурье для $F(x)$ выглядят так: $\alpha_k = -\frac{b_k}{k}$ (по \cos) и $\beta_k = \frac{a_k}{k}$ (по \sin). Новый свободный член $\alpha_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$. Выглядит крайне некрасиво, поэтому его можно посчитать обычным, привычным нам способом через интеграл $\frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx$. В общем-то, α_k и β_k также можно посчитать этим способом, но зачем лишний раз брать интеграл, если его можно не брать, а просто написать $\alpha_k = -\frac{b_k}{k}$, если b_k — известный нам коэффициент Фурье функции, ряд которой мы интегрировали.

1.3 Пример 2

Исходя из разложения $x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k}$; $x \in (-\pi; \pi)$. Получить разложение в ряд Фурье функций x^2, x^3 .

Решение. Проинтегрируем почленно, чтобы найти разложение x^2 :

$$\begin{aligned} \int_0^x t dt &= x^2/2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \int_0^x \sin(kx) dt = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (1 - \cos(kx)) \frac{1}{k} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2(-1)^k}{k^2}}_{\alpha_k, k \geq 1} \cos(kx) \end{aligned}$$

α_0 имеет форму числового ряда. Посчитаем его обычным методом:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^3}{3} \cdot 2 = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos(kx) \end{aligned}$$

Заметим, что в коэффициенте суммы стоит четверка, а не двойка, которую мы получили, когда почленно интегрировали, потому что двойка стояла бы в разложении $x^2/2$, а мы хотим получить разложение x^2 .

Получим разложение в ряд Фурье x^3 , проинтегрировав разложение x^2 .

$$\int_0^x t^2 dt = \frac{\pi^2 x}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \int_0^x \cos(kt) dt$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^3} \sin(kx) = \left/ x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} \right/ = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) \left(\frac{2\pi^2(-1)^{k+1}}{3k} + \frac{4(-1)^k}{k^3} \right)$$

$$\text{Ответ: } x^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi^2(-1)^{k+1}}{k} + \frac{12(-1)^k}{k^3} \right) \sin(kx)$$

□

1.4 Равенство Парсеваля, неравенство Бесселя

theorem 2 (Равенство Парсеваля). Пусть f — 2π -периодическая, непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая и $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. Тогда:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

theorem 3 (Неравенство Бесселя). Пусть f — 2π -периодическая и кусочно непрерывная и $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. Тогда:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

1.4.1 Пример на Парсеваля

Посчитать ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Решение. Воспользуемся равенством Парсеваля, для разложения $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$; В нем:

$$a_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}; \quad a_k^2 = \frac{4}{k^2}; \quad f(x) = x;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi}{3}$$

Подставим это теперь в равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

□

1.4.2 Еще пример на Парсеваля

С помощью равенства Парсеваля найти: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$
 Воспользуемся разложением:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx)}_{a_n};$$

$$b_n = 0; \quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}; \quad f(x) = x^2$$

Тогда равенство Парсеваля дадут нам:

$$\frac{4\pi^4}{9 \cdot 2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} + 0^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2)^2 dx$$

$$\frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2 \frac{\pi^4}{5}$$

$$\frac{\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \right) = \frac{\pi^4}{90}$$

1.5 Оценить порядок убывания коэффициентов Фурье

По Лемме Римана по осцилляции коэффициенты Фурье стремятся к нулю.
 Значит $a_n = o(1), n \rightarrow \infty$. Но можно оценить еще более жестко:

theorem 4 (О порядке убывания коэффициентов Фурье). Пусть функция f — 2π -периодическая, $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируема и имеет m -ю кусочно непрерывную производную. (При этом $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi); j = \overline{1, m-1}$ (условие сшивки)). Тогда

$$|a_k| + |b_k| = o\left(\frac{1}{k^m}\right), \quad k \rightarrow \infty$$

1.5.1 Пример на порядок убывания

$f(x) = x^{2013}$. Найти порядок убывания коэффициентов Фурье. $x \in [-\pi; \pi]$

Решение. Т.к. f — нечетная, то $a_k = 0$. Остается только оценить b_k .

Заметим, что условие сшивки не выполняется не то чтобы для производных, а даже для самой функции: $(-\pi)^{2013} \neq (\pi)^{2013}$. Функция это 0-я производная от самой себя. Получаем что $m = 0$ и по Теореме о порядке убывания производной $|b_k| = o\left(\frac{1}{k^0}\right) = o(1)$

□

1.5.2 Пример 2 на порядок убывания

$f(x) = x^{2012}$. Найти порядок убывания коэффициентов Фурье. $x \in [-\pi; \pi]$

Доказательство. Т.к. f — четная, то $b_k = 0$. Оценим $a_k, k \rightarrow 0$.

Будем опять же проверять условие сшивки (т.к. внутри интервала $(-\pi, \pi)$ функция непрерывна и бесконечное число раз непрерывна дифференцируема, а значит, гладкость может нарушаться только на границе.) Ищем такое n , когда $f^{(n)}(-\pi) \neq f^{(n)}(\pi)$

$$f^{(0)}(-\pi) = f^{(0)}(\pi), \text{ очевидно.}$$

$$\tilde{f}' = 2012x^{2011}, \text{ значит, } f^{(1)}(-\pi) \neq f^{(1)}(\pi)$$

Отсюда $n=1$.

$$\text{Ответ: } |a_k| = o\left(\frac{1}{k^1}\right)$$

□

1.5.3 Пример 3 на порядок убывания

$f(x) = (x^2 - \pi^2) \sin^2 x$. Найти порядок убывания коэффициентов Фурье. $x \in [-\pi; \pi]$

Доказательство. $f^{(0)}(-\pi) = 0 = f^{(0)}(\pi) \Rightarrow$ условия не нарушены

Продифференцируем $f' = 2x \sin^2 x + x^2 \sin(2x) - \pi^2 \sin(2x)$. Снова $f^{(1)}(-\pi) = 0 = f^{(1)}(\pi) = 0$.

Вторая производная $f^{(2)} = 2 \sin^2 x + 2x \sin(2x) + 2x \sin(2x) + 2x^2 \cos(2x) - 2\pi^2 \cos(2x)$. Опять получим $f^{(2)}(-\pi) = 0 = f^{(2)}(\pi)$

Третья производная $f^{(3)} = 2 \sin(2x) + 4 \sin(2x) + 8x \cos(2x) + 4x \cos(2x) + 4x^2 \sin(2x) + 4\pi^2 \sin(2x)$.

В итоге: $f^{(3)}(\pi) = -12\pi \neq f^{(3)}(-\pi) = 12\pi$

$$\text{Ответ: } |a_k| = o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

□

1.5.4 Является ли рядом Фурье?

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Является ли он рядом Фурье какой-то функции?

Есть такая теорема: "Равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы"

Т.е. для равномерно сходящегося ряда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin kx$ его сумма это $f(x)$, и он, как мы видим, является ее рядом Фурье.

Значит, если мы докажем равномерную сходимость ряда, то получается, он будет рядом Фурье некой функции, а именно своей суммы.

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Значит, этот ряд является рядом Фурье некой функции, а именно своей суммы.

1.5.5 Является ли рядом Фурье?

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$. Является ли он рядом Фурье какой-то функции?

Доказательство. Заметим, что $\forall n \Rightarrow b_n = 1 \neq 0$? ? по теореме Римана об осцилляции этот ряд не может быть рядом Фурье, т.к. его коэффициенты Фурье не стремятся к 0. □