4 Семинар

4.1 Функциональные пространства

Определение 1. ***Метрическое пространство -*** *пространство, в котором введена метрика, т.е. функция* $\rho(x, y)$:

1. $\rho(x, y) \geq 0; \quad \rho = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Пример 1: $\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$
Пример 2: $C([a, b])-$ *пространство функций, непрерывных на* $[a, b]$.
Тогда $\rho(f, g) = \underset{a \leq t \leq b}{max}|f(t) - g(t)|$

Определение 2. $E-$*действительное линейное пространство, если* $\forall x, y \in E \Rightarrow \exists(x + y) \in E, \exists(\lambda x) \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Кроме того:

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\exists 0 : \ x + 0 = x$
4. $\forall x \exists \overline{x} : \ x + \overline{x} = 0$
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
8. $\exists 1 : \ x \cdot 1 = x$

Здесь λ, $\mu \in \mathbb{R}$

Определение 3 (Нормированное пространство)**.** *это линейное пространство* E*, в котором* $\forall x \in E$ *сопоставленна скалярная функция* $||x||$*, называемая* ***нормой*** *и удовлетворяющая следующим свойствам:*

1. $||x|| \geq 0; \ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \ (\forall \lambda \in \mathbb{R})$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Примеры:

1. $||x|| = |x|, x \in \mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}^n$*: в нем можно ввести норму различными способами, не только как модуль:*

(a) $||x|| = |x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$

(b) $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

(c) $\max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$

3. $C([a,b])$. $||f|| = \max\limits_{a \le t \le b} |f(t)|$

Определение 4 ($\varepsilon-$окрестность). *это* $U_\varepsilon(x_0) = \{x : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$

Определение 5 (Точка прикосновения). *. Точка x_0 называется точкой прикосновения множества E, если в любой ее окрестности есть точки из этого множества.*

Определение 6 (Внутренняя точка). *. Точка x_0 называется внутренней точкой множества E, если найдется ее окрестность, полностью лежащая в этом множестве.*

Определение 7 (Открытое множество). *Множество E называется открытым, если все его точки внутренние.*

Определение 8 (Предельная точка). *Точка x_0 называется предельной точкой множества E, если в любой ее проколотой окрестности есть точки из этого множества.*

Определение 9 (Замкнутое множество). *Это множество, содержащее все свои предельные точки*

Определение 10 (Фундаментальность). *Последовательность $\{x_k\}$ называется **фундаментальной**, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \ge N \ ||x_n - x_m|| < \varepsilon$$

Определение 11 (Сходимость). *Последовательность $\{x_k\}$ называется **сходящейся** к A, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \ge N \ ||x_n - A|| < \varepsilon$$

В этом случае, как и всегда, записывают:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A$$

Подчеркнем, что в данном случае A - не число, а некий элемент нашего множества.

Если последовательность сходится, то она фундаментальная (аналогично док-ву для $\mathbb{R}^n$). Но из фундаментальности не следует сходимость. Но бывают пространства, в которых фундаментальность и сходимость - равносильные понятие (например, $\mathbb{R}^n$ или $C([a,b])$). Такие пространства называются полными.

Определение 12. *Полное пространство - пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится. (т.е. в нцм фундаментальность и сходимость эквивалентны).*

Приведем пример неполного пространства, то есть пространства, в котором из фундаментальности последовательности не следует не следует ее сходимость.

Определение 13. $CL_1([a,b])$ *это линейное пространство непрерывных функций на* $[a,b]$, *норма в котором:* $||f(x)|| = \int_a^b |f(x)| dt$

Пример фундаментальной, но не сходящейся последовательности в $CL_1([-1,1])$:

$$f_k(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le 0 \\ kt, & 0 \le t \le \frac{1}{k} \\ 1, & \frac{1}{k} \le t \le 1 \end{cases}$$

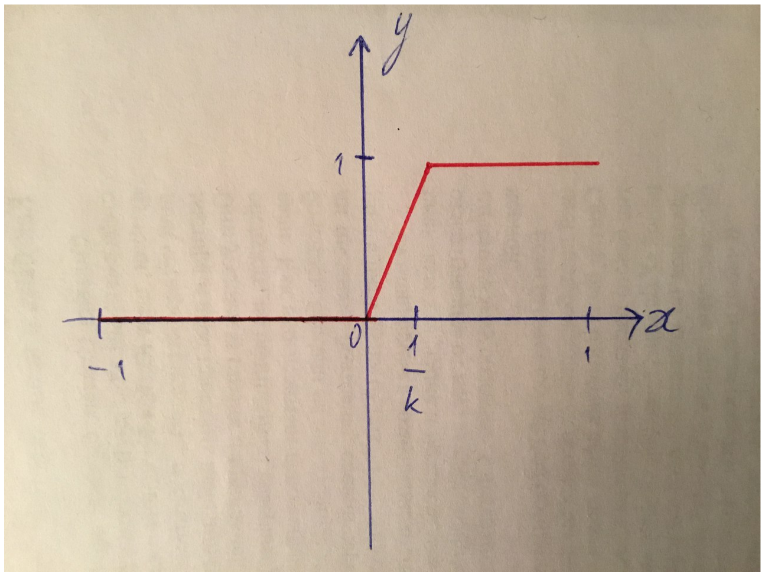


Рис. 1

Начнем с того, что все элементы данной последовательности лежат в $CL_1([-1,1])$ в силу своей непрерывности.

1. фундаментальность:

$$||f_m - f_k|| = \int\limits_{-1}^{1} |f_m(t) - f_k(t)|\, dt = \int\limits_{0}^{1} |f_m(t) - f_k(t)| dt \le \int\limits_{0}^{\max\{\frac{1}{k},\frac{1}{m}\}} 2dt = 2\max\{\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\} \to 0 \Rightarrow \text{ фундам.}$$

2. Не сходится. Положим $\exists \phi(t) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(t)$.
   При $t \in [-1,0]$ имеем $\phi(t) = 0$. При $t \in [0,1]$ должно выполняться : $||\phi(t) - f_k(t)|| \to 0 (k \to \infty)$, то есть:
   $$\int_0^1 |\phi(t) - f_k(t)| \to 0 \Rightarrow \phi(t) = 1 \text{ при } t \in (0,1]$$
   Получили, что $\phi(t)$ разрывная функция, то есть она не из пространства $CL_1([-1,1])$. Получается, не существует функции, к которой последовательность сходится. Мы доказали, что не всякая фундаментальная последовательность сходится.

Замечание: в понятии "последовательность сходится"подразумевается, что сходится к элементу нашего пространства.

Определение 14. *$CL_1([a,b])$ - пространство функций, непрерывных на $[a,b]: ||f|| = \int_a^b |f(x)|dx$.*

Определение 15. *$CL_2([a,b])$ - пространство функций непрерывных на $[a,b]: ||f||_{CL_2} = \sqrt{\int_a^b |f(a)|^2 dx}$*

Определение 16. *$L_1(\{a,b\})$ - пространство функций, абсолютно интегрируемых на $\{a,b\}$ т.е. $f(x) \in L_1\{a,b\} \Leftrightarrow \exists \int_a^b |f(x)|dx$*
Норма: $||f||_{L_1} = \int_a^b |f(x)|dx$

Определение 17. *L_2 - множество функций таких, что $\int_a^b |f(x)|^2 dx$ сходится.*
Норма: $||f||_{L_2} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$

В $\mathbb{R}^n : \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix};$ выполнено неравенство Коши-Буняковского:

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right|^2 \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

Определение 18. *Расстояние связано с нормой следующим образом: $\rho(f,g) = ||f-g||$. Логично сделать вывод, что в известных нам пространствах расстояние вводится следующим образом:*

$$\rho : CL_1([a,b]) : \rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

$$\rho : C([a,b]) : \rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

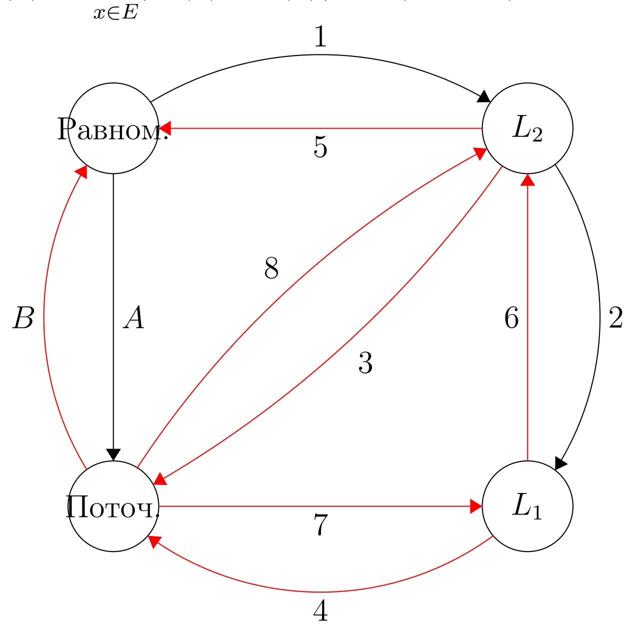
$$\rho : L_1([a,b]) : \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

$$\rho : L_2([a,b]), CL_2([a,b]) : \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

Равномерная сходимость: $f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \underset{x\in E}{sup}|f_n(x) - f(x)| \to 0 (n \to \infty)$

Сходимости:
Равномерная: $f_n \rightrightarrows f(x)$
Сходимость в L_2 (к функции f имеется в виду): $f_n \underset{||\cdot||_{L_2}}{\to} f(x) \Leftrightarrow ||f_n - f||_{L_2[a,b]} \to 0 (n \to \infty) \Leftrightarrow \sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \leftrightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \to 0$
Сходимость в $L_1 : f_n \underset{||\cdot||_{L_1}}{\to} f(x)$

Поточечная: $f_n(x) \to f(x)$



Докажем (1). Надо показать, что $||f_n(x) - f(x)||^2_{L_2} \to 0,$ при $n \to \infty$

$\underset{x\in[a,b]}{max}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.е. $\forall\varepsilon\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow \underset{x\in[a,b]}{max}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ Тогда $||f_n(x) - f(x)||^2_{L_2} = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_a^b \underset{x\in[a,b]}{max}|f_n(x) - f(x)|^2 dx < \int_a^b \varepsilon^2 dx = \varepsilon^2(b-a)$ □

Докажем (2). Нужно доказать, что $\int_a^b |f_n - f|dx \to 0, n \to \infty$. Докажем, что $\left(\int_a^b |f_n - f|dx\right)^2 \to 0$. В целом, это одно и то же.

Через неравенство КБШ:

$$|(f,g)_{L_2}| \leq ||f||^2_{L_2} \cdot ||g||^2_{L_2} \Leftrightarrow \left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| | \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

Возведем в квадрат

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right) \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)$$

В качестве функций в этом неравенстве возьмем $f(x) = |f_n(x) - f(x)|;\ g(x) = 1$ и подставим в это неравенство.

$$\left|\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx\right) \cdot \left(\int_a^b 1 \cdot dx\right) = (b-a)\underbrace{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx}_{||f_n(x)-f(x)||^2_{L_2} \to 0} \to 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \to 0 \quad \Rightarrow ||f_n(x) - f(x)||_{L_1} \to 0$$

□

Докажем (4) и (6). т.е. из $f_n(x) \xrightarrow{||\cdot||_{L_1}} f(x)$ не следует поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$ и также не следует $f_n(x) \xrightarrow{||\cdot||_{L_2}} f(x)$

На $[a,b] = [0,1]$ возьмем функциональную последовательность $f_n(x) = \begin{cases} n - n^3 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2} \\ 0, & \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

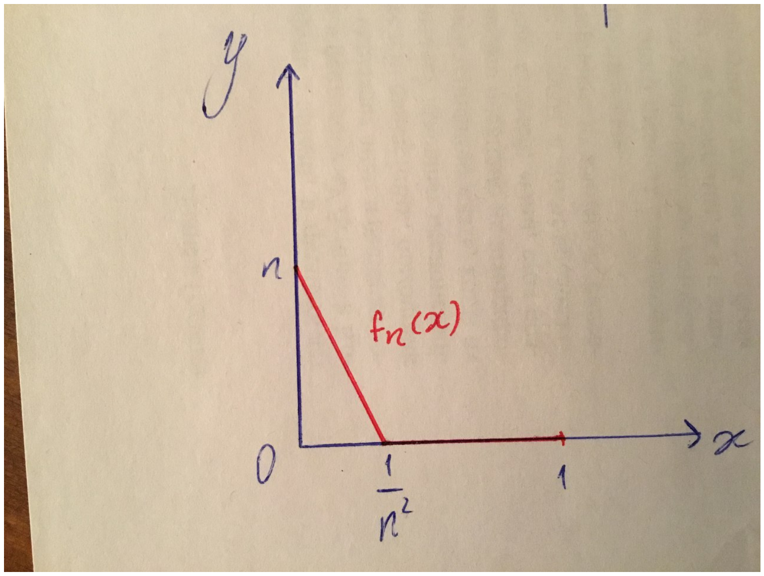


Рис. 2

Докажем, что $f_n(x) \xrightarrow{||\cdot||_{L_1}} f(x) = 0$:

$$\int_a^b |f_n(x) - 0|dx = \int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^{n^2} |n - n^3x|dx \leq \int_0^{\frac{1}{n^2}} |n|dx = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Докажем отсутствие поточечной сходимости. В точке 0 имеем $f_n(0) \nrightarrow 0 = f(0) \Rightarrow \ f_n \nrightarrow f$
Докажем отсутствие сходимости по норме L_2: $||f_n(x) - 0|| \nrightarrow_{L_2} 0$

$$||f_n(x)||^2_{L_2} = \int_a^b |f_n(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left(n - n^3x\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left(n^2 - 2n^4x + n^6x^2\right)^2 dx =$$

$$= n^2x\Big|_0^{\frac{1}{n^2}} - n^4x^2\Big|_0^{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{3}n^6x^3\Bigg|_0^{\frac{1}{n^2}} = 1/3 \neq 0$$

□

Докажем (7), (8) и (B). . Т.е. что из поточечной сходимости не следует вообще ничего. На отрезке $[a, b] = [0, 1]$ возьмем функциональную последовательность $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x, & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

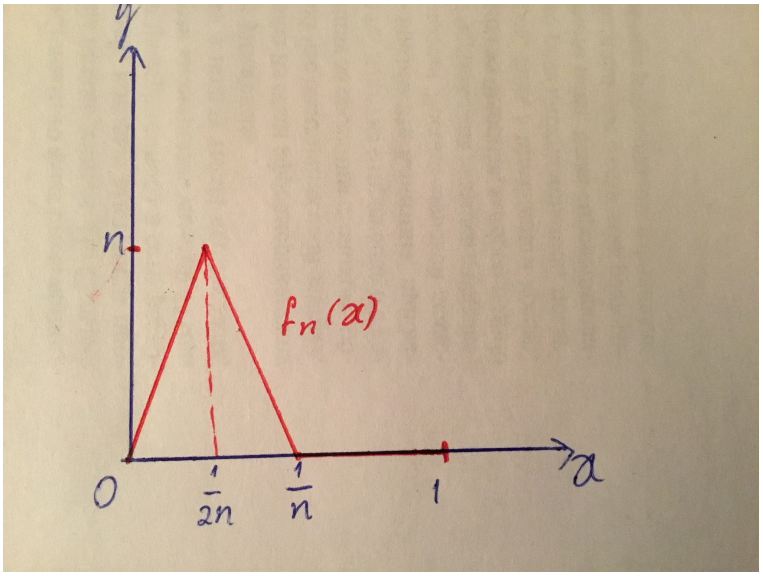


Рис. 3

Докажем поточечную сходимость: $f_n(x) \to f(x) = 0$. Это верно, т.к. $f_n(0) = 0 \to f(0) = 0$, а при иксах больше нуля:$\forall x_0 > 0 \exists n : \frac{1}{n} < x_0$

Докажем(В), что равномерной сходимости нет: **Очевидно**

Докажем (7), что сходимости в L_1 нет:

$$||f_n(x) - 0||_{L_1} = ||f_n(x)||_{L_1} = \int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} 2n^2 x dx + \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} (2n - 2n^2 x)dx = \frac{1}{2} \nrightarrow 0$$

Докажем (7), что сходимости в L_2 нет: Поскольку из сходимости в L_2 следует сходимость L_1 (что было доказано выше), но сходимости в L_1 нет, значит и в L_2 сходимости нет. □

Докажем (3) и (5).

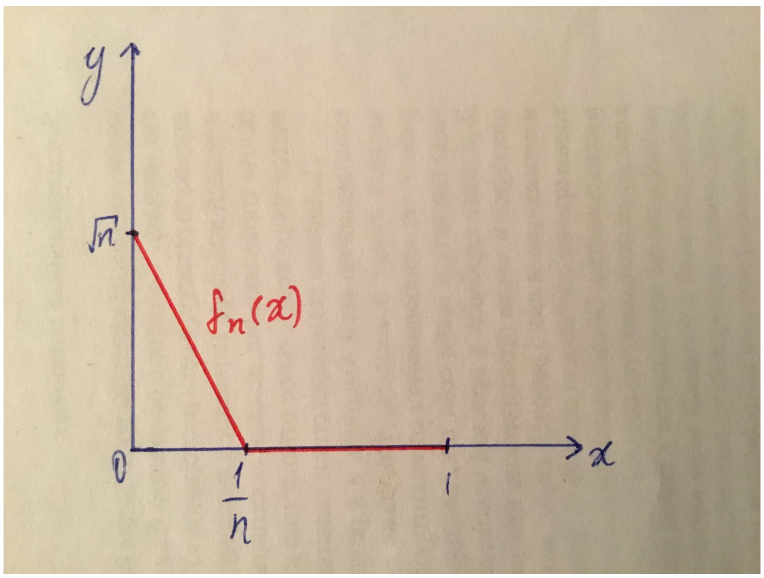


Рис. 4

На отрезке $[a, b] = [0, 1]$ возьмем функциональную последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} - n^{1.5}x, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & else \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность $\sqrt{f_n(x)}$
Докажем, что в L_2 сходится к $f(x) = 0$

$$||\sqrt{f_n(x)}||^2_{L_2} = \int\limits_0^{\frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{\sqrt{n} - n^{1.5}x}\right)^2 dx = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0, (n \to \infty)$$

Очевидно, что $\sqrt{f_n(x)} \nrightarrow 0$ поточечно.
(5): не сходится поточечно $\Rightarrow$ не сходится равномерно □

4.2 Полнота систем функций в функциональных пространствах

По теореме Вейерштрасса любую непрерывную функцию можно аппроксимировать многочленом, т.е. системой функций: $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$. Значит $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ полна в пространстве $C([a, b])$

задача 1. *Полна ли система многочленов с нечетными степенями $\{x, x^3, \cdot, x^{2k-1}, \cdots\}$ в пространстве $C([1, 2])$?*

Решение. $\forall f \in C([1, 2])$ продолжим нечетно на $[-2, 2]$. Этим продолжением будет $\tilde{f}$.

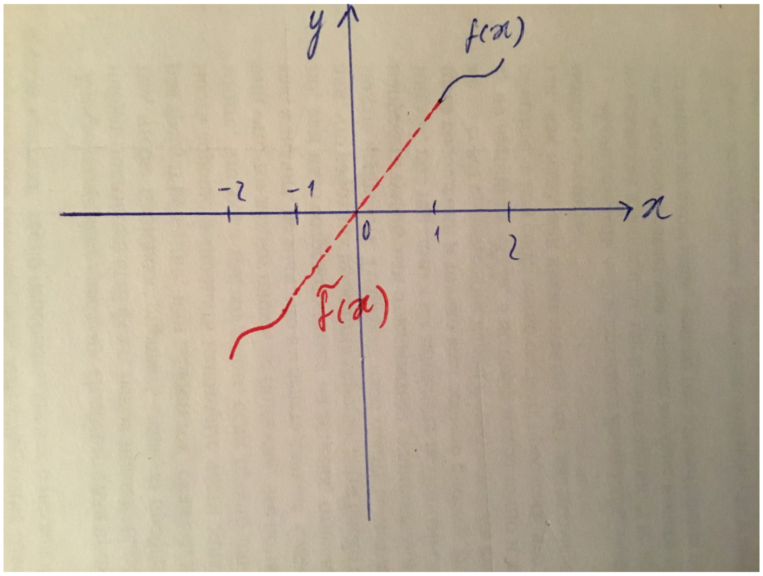


Рис. 5

$\tilde{f}$ раскладывается по системе $\{1, x, x^2, \cdot, x^k, \cdots\}$, т.е.

$$\forall \varepsilon \exists \alpha_0, \cdots, \alpha_n : |\tilde{f}(x) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i| < \varepsilon \quad (1)$$

Заменим x на $-x$. Т.к. нечетная: $|-\tilde{f}(x)-\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i x^i(-1)^i|<\varepsilon$ Тогда

$$\left|\tilde{f}(x)+\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i(-1)^i\right|<\varepsilon \tag{2}$$

По неравенству треугольника

$$|2\tilde{f}-2\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^{2i+1}|\le|\tilde{f}-\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i|+|\tilde{f}-\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i(-1)^i|<2\varepsilon$$

То есть $\tilde{f}$ можно разложить по этой системе функций со сколь угодно малой погрешностью. Значит, f (как часть $\tilde{f}$, ту часть, которая $\in[1,2]$) тем более можно. Значит система многочленов с нечетными степенями $\{x,x^3,\cdot,x^{2k-1},\cdots\}$ полна в пространстве $C([1,2])$. □

Рассмотрим похожую задачу, но на другом отрезке

задача 2. *Полна ли система многочленов с нечетными степенями $\{x,x^3,\cdot,x^{2k-1},\cdots\}$ в пространстве $C([0,1])$?*

Решение. Возьмем $f(x)=1,x\in[0,1]$ Предположим, что наша система $\{x,x^3,\cdot,x^{2k-1},\cdots\}$ полна в $C([0,1])$.
Тогда $\forall\varepsilon\exists\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n :\Rightarrow |f(x)-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x^{2i+1}|<\varepsilon$ Подставим $x=0$. Но тогда $|1-0|<\varepsilon$ - противоречие. Значит система не полна в таком пространстве. □

Теперь в той же задаче дополним семейство функций единицей:

задача 3. *Полна ли система $\{1,x,x^3,\cdot,x^{2k-1},\cdots\}$ в пространстве $C([0,1])$?*

Решение. Введем функцию $g(x)=f(x)-f(0)$ - сдвигаем функцию в 0 (т.е. $g(0)=0$). Значит ее можно продолжить нечетно как и в первой задаче в этом разделе. Значит, эта система полна в этом пространстве. □