2 Семинар

2.1 Пример 1

Разложить x^2 на $[0;\pi)$ по sin

Заметим, что x^2 - функция четная, следовательно, должна быть разложена по косинусам. Но в этой задаче дело в том, что x^2 задан только на $[0;\pi)$. Поэтому мы вольны продолжить x^2 на всю ось как четно, так и нечетно. В задаче сказано разложить по синусам, значит, продолжим нечетно. Приступим к решению.

1. Построим $\tilde{f}$, такую что $\tilde{f} = f$ при $x \in [0;\pi)$, $\tilde{f}$ - нечетно продолжена на $[-\pi;0)$, $\tilde{f}(\pi+2\pi n) = 0$ и $\tilde{f}$ $2\pi-$ периодическая

2. $$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin(kx)dx = \text{... по частям ...} = \frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1} + \frac{4}{\pi k^3}\Big((-1)^2 - 1\Big)$$

   $a_k = 0;\ (k \geq 0)$, т.к. $\tilde{f}$ нечетная.

   Таким образом, на $[0;\pi)$ получим:

   $$x^2 \sim \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1} + \frac{4}{\pi k^3}((-1)^2 - 1)\Big)\sin(kx)$$

3. Исследуем на равномерную непрерывность. Видим, что $\tilde{f}$ (график суммы ряда) - разрывна, значит про себя сразу понимаем, что равномерной непрерывности, скорее всего, нет. Докажем это четко. Т.к. sin, cos непрерывны на $\mathbb{R}$, то если бы ряд из них сходился бы равномерно, то он сходился бы к непрерывной функции, но $\tilde{f}$ - не непрерывный $\Rightarrow$ ряд не может сходится равномерно, ч.т.д.

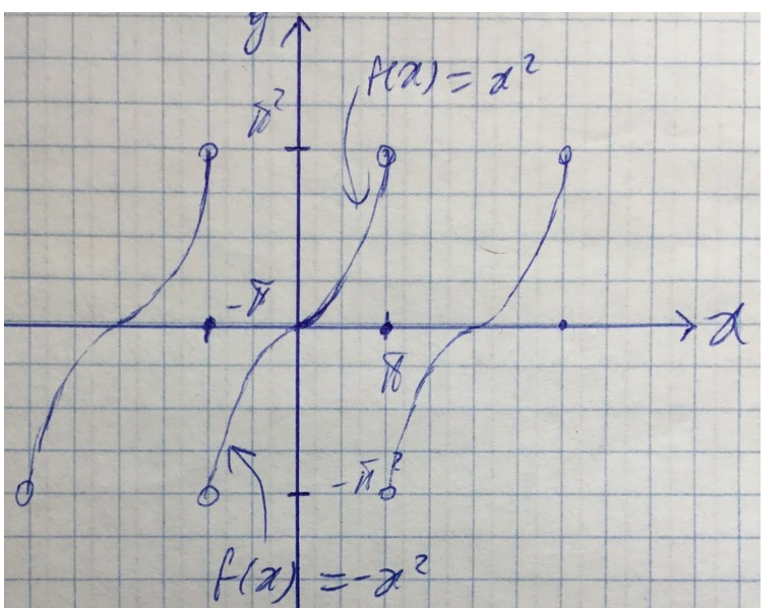

Рис. 1

2.2 Пример 2

Разложить x^2 на $(0; 2\pi)$ по sin и cos

1. Построим $\tilde{f}$, такую что $\tilde{f} = f$ при $x \in (0; 2\pi)$ $\tilde{f}(2\pi n) = \frac{4\pi^2+0}{2} = 2\pi^2$; $\tilde{f}$ - $2\pi-$ периодическая
2. Посчитаем коэффициенты
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8}{3}\pi^2$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{4}{k^2}$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin(kx) dx = -\frac{4\pi}{k}$$
(Последние 2 интеграла посчитаны по частям).
$$\text{На } (0; 2\pi):\ x^2 \sim \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\cos(kx) - \frac{4\pi}{k}\sin(kx)$$
3. $\tilde{f}$ не сходится равномерно (на $\mathbb{R}$) (рассуждения аналогичны предыдущей задаче).

Посмотрим теперь, как решать примеры, если функция 2l-периодическая, а не $2\pi-$ периодическая.

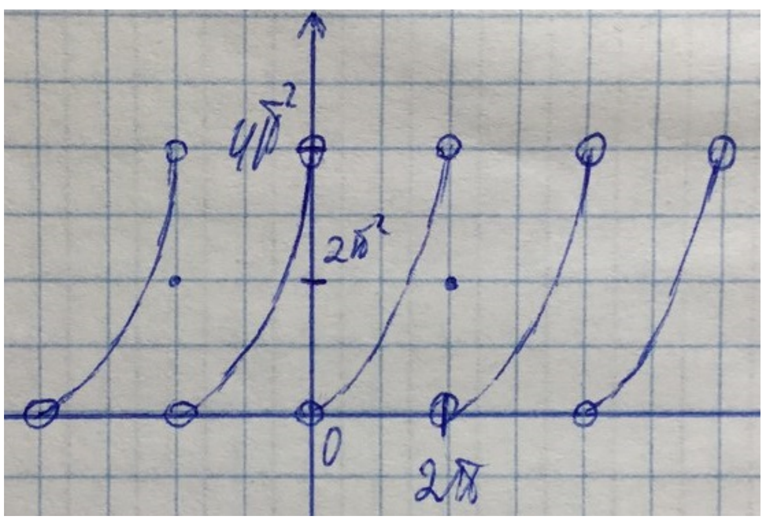

Рис. 2

2.3 $2l-$ периодическая

Пусть f не $2\pi-$ периодическая, а $2l-$ периодическая, где $l \in \mathbb{R}$; f - абсолютно интегрируема на $[-l; l]$
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx\frac{\pi}{l}) + b_k \sin(kx\frac{\pi}{l});\quad a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$
$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(kx\frac{\pi}{l})dx; b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(kx\frac{\pi}{l})dx;$$

2.4 Пример 3

Разложить $f(x) = \begin{cases} 2, x \in (-2; 0] \\ x+2, x \in (0, 2) \end{cases}$ в ряд Фурье с периодом 4. Построить график суммы и исследовать, сходится ли равномерно.

1. Построим $\tilde{f} = f$ при $x \in (-2, 2)$; $\tilde{f}(2+4n) = 3$, и $\tilde{f}$ – 4–периодическая функция. ($l = 2$).

2. Далее просто подставляем в формулы.

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(nx\frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(x+2)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = (x+2)\frac{\sin(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n}\,|_0^2 - \int_0^2 \frac{\sin(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n}dx = \frac{\cos(\frac{\pi n x}{2})}{\pi n\frac{\pi n}{2}} = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{\pi^2 n^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\tilde{f}(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}2dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(x+2)dx = 3,5$$
$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}2\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(x+2)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

Ответ:

$$f(x) \sim \frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(((-1)^n - 1)\frac{2}{\pi n}^{2}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) + 2\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\right),\quad x \in (-2, 2)$$

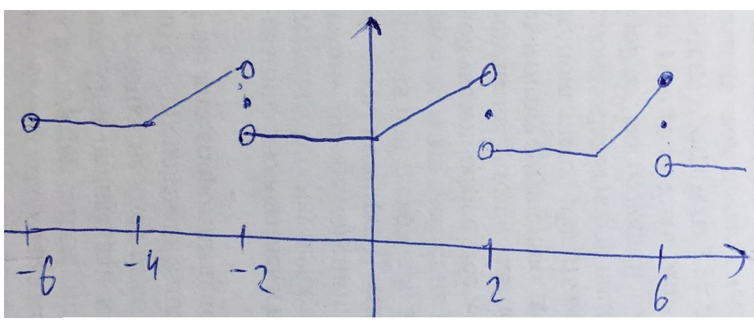

Рис. 3

2.5 Комплексный ряд Фурье

Если f - 2π - периодическая:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Если $2l$– периодическая, то $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-ikx\frac{\pi}{l}}dx$; $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx\frac{\pi}{l}}$

2.6 Пример 4

Найти комплексную форму ряда Фурье функции с периодом π $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Вспомним, что $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}; cosx = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$ и $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}; sinx = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$

$$c_x = \frac{1}{2\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(x)e^{-2nxi}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}e^{-2nxi}dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} e^{ix(1-2n)}dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} e^{ix(-1-2n)}dx = \underbrace{\left.\frac{exp(ix(1-2n))}{2\pi i(1-2n)}\right|_0^{\pi/2}}_{A} + \underbrace{\left.\frac{exp(ix(-1-2n))}{2\pi i(-1-2n)}\right|_0^{\pi/2}}_{B}$$

Немного причешем A и B (начнем с подстановки концов палки Ньютона-Лейбница в экспоненту; будем пользоваться формулой $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$):

$$e^0 = 1$$

$$exp(i\frac{\pi}{2}(1-2n)) = cos(\frac{\pi}{2} - \pi n) + isin(\frac{\pi}{2} - \pi n) = i(-1)^n$$

$$exp(i\frac{\pi}{2}(-1-2n)) = cos(-\frac{\pi}{2} - \pi n) + isin(-\frac{\pi}{2} - \pi n) = i(-1)^{n+1}$$

Подставим найденное в A и B и воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$A = \frac{i(-1)^n - 1}{2\pi i(1-2n)}$$

$$B = \frac{-i(-1)^n - 1}{2\pi i(-1-2n)};$$

$$\text{в итоге } c_n = A + B = \frac{i(-1)^n - 2n}{\pi i(1-4n^2)}$$

Ответ:

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{i(-1)^n - 2n}{\pi i(1-4n^2)}e^{2inx}$$