Математический анализ. Семинар 3

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

19 сентября 2017

1 Семинар 3

1.1 §3 № 86

Решим:

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{1}$$

система:

$$\begin{cases} \phi = arcctg(\frac{x}{y}) \\ r = \frac{y}{\sin\phi} = \frac{y}{\sin(arcctg\frac{x}{y})} = y\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} \end{cases} \quad \to (1)$$

$$x = y\frac{\cos\phi}{\sin\phi} = y\cot\phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x\sqrt{y^2}}{y\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\phi$$

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{r}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$r\cos\phi\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial r\phi}\frac{\cos\phi}{r}\right) - r\sin\phi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\phi - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin\phi}{r}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} r\cos\phi\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}\cos^2\phi - \frac{\partial u}{\partial r} r\cos\phi\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial r}\sin^2\phi = 0$$

$u_\phi = 0 \Rightarrow$ и не зависист от $\phi \quad \Rightarrow u = u(\phi) = u(\sqrt{x^2+y^2}) = u(x^2+y^2)$
Ответ: $u = f(x^2+y^2)$ где f любое.

1.2 Кратные интегралы

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Определение 1. *Пусть на измеримом по Жордану множестве $X \subset R^n$ определена функция f; $\tau = \tau(x) = \{X_i, i = \overline{1,n}\}$ - разбиение x. $\theta_\tau = \xi^{(i)}, i = \overline{1,N}$ - произвольный набор точек $\xi^{(i)} \in x_i$ $i = \overline{1,N}$*
Тогда $\sigma_\tau(f,\theta_\tau) = \sum_{i=1}^N f(\xi_i)\mu(X_i)$ -называется интегральной суммой Римана f по X

Определение 2. *I называется интегралом Римана от f по x, если*

$$\forall\epsilon \ \exists\delta \quad : \forall\tau(x) \ \ \exists\Theta_\tau(|\tau(x)| < \delta) \quad \Rightarrow \quad |I - \sigma_\tau(l,\Theta_\tau)| < \epsilon$$

Одномерный и многомерный интегралы:

$$\int_X f(x)\,dx \qquad ortexttint \int\cdots\int_X f(x_1,x_2\ldots x_n)dx_1dx_2...dx_n$$

****рисуночек***

1. x от x_1 до x_1
2. $\forall x_0 \in [x_1,x_2]$ $y \in [\phi_1(x_0),\phi_2(x_0)]$

Определение 3 (Элементарная область относительно оси)**.** *Множество $X : \{(x,y), \quad a \le x \le b, \quad \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$ - элементарно относительно OY*

Если f - инт на множестве X; элементарное относительно OY то

$$\Rightarrow \iint_X f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\phi_1}^{\phi_2} f(x,y)dy$$

Пример:
$$\int_a^b xdx \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{y^2}dy = \int_a^b xdx \left(-1 + \frac{1}{x}\right) dx$$
$$\int_a^b dx \int_x^1 \frac{x}{y^2} + \int_c^a \int_{x^2}^{1-x} dx$$
Если f - интегрируема на X, элементарной относительно OX то

$$\iint_X f(x,y)dxdy = \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{beta(x)} f(x,y)dx$$

1.3 №1

$$I = \iint_G f(x,y)dxdy$$

Где G область, ограниченная $y = 2x^2$ и $x + y = 1$ Сведём кратный интеграл к повторному двумя способами:
рисуночек
Заметим, что относительно OY эта область элементарная. Найдём точки пересечения: $(0,5;0,5)$ и$(-1;2)$

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{0,5} dx \int_{2x^2}^{1-x} f(x,y)dy$$

Вторым способом. Возьмём две области, элементарные относ. OX

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_0^{0,5} dy \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dx + \int_{0,5}^{2} dy \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y} f(x,y)dx$$

Пусть $f(x,y) = xy^2$

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{0,5} dx \int_{2x^2}^{1-x} xy^2 dy = \int_{-1}^{0,5} dx \int_{2x^2}^{1-x} xy^2 dy =$$
$$\int_{-1}^{0,5} x \left(\frac{1}{3}(y)^3\right)\Bigg|_{2x^2}^{1-x} dx = \int_{-1}^{0,5} \frac{1}{3}x \left((1-x)^3 - 8x^6\right) dx \quad (2)$$

1.4 №2

Посчитаем повторный интеграл

$$\int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

Разобьём и поменяем порядок интегрирования ****рисуночек****

$$\begin{aligned}\int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy = \\ = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \int_0^x dy = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} x dx = \\ = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x|_0^\pi = 1 + 1 = 2 \quad (3)\end{aligned}$$