Математический анализ. Семинар 9

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

21 ноября 2017

1 Семинар 9.

1.1 Дивергенция, ротор и их друзья 2

$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = [\bar{\nabla} \times \bar{a}]$

Градиент $\bar{a}$ по $\bar{b}$: $(\bar{b}\nabla)\bar{a} = b_x\frac{\partial \bar{a}}{\partial x} + b_y\frac{\partial \bar{a}}{\partial y} + b_z\frac{\partial \bar{a}}{\partial z}$
Правило Лейбница (аналог $(fg)' = fg' + g'f$): $\nabla(p,q) = \nabla(\mathbf{p},q) + \nabla(p,\mathbf{q})$
Примеры: (жирным выделено то, по чему мы берем оператор Набла)

1. $div(f\bar{a}) = (\nabla, f\bar{a}) = (\nabla, \mathbf{f}\bar{a}) + (\nabla, f\bar{\mathbf{a}}) = (\nabla\mathbf{f}, \bar{a}) + f\cdot(\nabla, \bar{\mathbf{a}}) = (gradf, \bar{a}) + fdiv(\bar{a})$;

2. $div[\bar{a},\bar{b}] = (\nabla, [\bar{a},\bar{b}]) = (\nabla, \bar{a}, \bar{b}) = (\nabla, \bar{\mathbf{a}}, \bar{b}) + (\nabla, \bar{a}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{b}, p\nabla, \bar{\mathbf{a}}) - (\bar{a}, [\nabla, \bar{\mathbf{b}}]) = (\bar{b}, rot\bar{a}) - (\bar{a}, rot\bar{b})$.

3. $rot[\bar{a},\bar{b}] = [\nabla, [\bar{a},\bar{b}]] = [\nabla, [\bar{\mathbf{a}},\bar{b}]] + [\nabla, [\bar{a},\bar{\mathbf{b}}]] = ((\nabla\bar{b})\bar{a} - \bar{b}(\nabla,\bar{a})) + (\bar{a}(\nabla,\bar{b}) - (\nabla,\bar{a})\bar{b}) = ((\bar{b}\nabla)\bar{a} - \bar{b}div\bar{a}) + (\bar{a}div\bar{b} - (\bar{a}\nabla)\bar{b})$

1.2 Формула Остроградского- Гаусса

Это способ свести поверхностный интеграл 2 рода к кратному инт.

Теорема 1 (Формула Остроградского-Гаусса)**.** *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно гладкой границей δG, ориентируемой внешними нормалями. В G задано векторное поле $\bar{a} \in C^1(\overline{G})$(а непр. диф на замыкании области G). Тогда:*

$$\iint\limits_{\delta G} (\bar{a},\bar{n})dS = \iiint_G div\ \bar{a}\ dG$$

1.2.1 №11.47(2)

$\mathbb{J} = \iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy; \bar{a} = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$

S - внутр. сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

$div\bar{a} = 3(x^2+y^2+z^2)$
по формуле Остроградского-Гаусса. '-' т.к. S ориентирована не внешними нормалями. Переходим к сферическим: $\mathbb{J} = -\iiint\limits_G 3(x^2+y^2+z^2)dG = -3\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\psi\psi \int\limits_0^R r^2 \cdot r^2 dR = -3\cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5}\cdot 2 = -\frac{12\pi R^5}{5}$

1.3 Формула Стокса

Сведение криволин. интеграла II рода к пов. интегралу II рода

Теорема 2 (Формула Стокса)**.** *γ - плоский замкнутый кусочно гладкий контур. S - кусочно гладкая поверхность, натянутая на γ. $\bar{a}$ - непрерывно дифференцируема в окрестности S. В $\mathbb{R}^3$ задан правый ОНБ. Ориентации γ и S согласованы по правилу буравчика.*
Тогда справедлива формула Стокса:

$$\oint(\bar{a}, d\bar{r}) = \iint\limits_S (rot\bar{a}, \bar{n})dS$$

1.3.1 №11.63

Найти $\oint_L ydx + zdy + xdz-?$. Где $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ориент. положит. относительно $\bar{n} = (0,0,1)$.
Заметим, что L это пересечение сферы и плоскости т.е. окружность.

$\bar{N} = (1,1,1)$; $\bar{n} = \frac{\bar{N}}{\bar{N}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$; Ориентация нормальная т.к. $(\bar{n}, \bar{k}) > 0$.

$$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = [\bar{\nabla}\times\bar{a}] = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\oint_\gamma(\bar{n}, d\bar{r}) = \iint\limits_S (rot\bar{a}, \bar{n})dS = -\sqrt{3}\iint_S dS = -\sqrt{3}\pi R^2$