1. Функции, заданные неявно

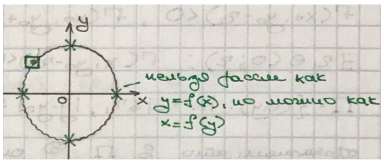
1.1. Основные понятия

$$f(x,y) = 0; \tag{1}$$

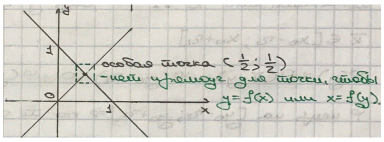
$D_f = \{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : f(x,y) = 0\}$ - график уравнения 1. $D_f \leftrightarrow Ox$

1.1.1. Примеры

1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$
   $f_x = 2x;\ f_y = 2y$
   Точку (0,1), например, нельзя рассматривать как y=f(x), но можно как x=f(y)



2. $(x - y)(x + y - 1) = 0$
   $f_x = (x+y-1)+(x-y);\quad f_y = -(x+y-1)+(x-y)$
   $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ - особая точка, где обе 0. Ни по Ox, ни по Oy нет биекции.



1.2. Теорема о неявно заданной функции

Достаточное условие, при котором уравнение 1 локально определеяет y как f(x) и y обладает некоторыми дифф. свойствами.

Теорема 1. *Если*

1. $f(x_0,y_0) = 0$
2. *в некоторой* $u(x_0,y_0)$ *функция* f *обладает непрерывной частной производной*
3. $f_y(x_0,y_0) \neq 0$,

То $\exists \Pi = \{(x,y) : |x - x_0| \leq r_1, |y - y_0| \leq r_2\} \in U(x_0,y_0)$ *в пределах которого уравнение 1 определяет* y *как функцию переменной* x ($y = f(x)$)*, которая непрерывно дифференцируема на* $(x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ *и* $y' = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}\,|_{y=f(x)}$

Доказательство. **I. Существование неявно заданной функции**
$3 \Rightarrow$ Пусть $f_y(x_0,y_0) > 0\ \rightarrow_{(2)} \exists \Pi_1 = \{(x,y) : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r_2\} \in U(x_0,y_0)$ такой, что $\forall (x.y) \in \Pi_1 \Rightarrow f_y(x,y) > 0$
$\psi = f(x_0,y),\ \psi(y_0) = 0,\ \psi$- возрастает на $[y_0 - r_2, y_0 + r_2]$
$\psi'(y) = f_y(x_0,y) > 0,\ \forall y \in [y_0 - r_2, y_0 + r_2] \Rightarrow \psi(y_0 - r_2) < 0, \psi(y_0 + r_2) > 0$
$f(x_0, y_0 - r_2) < 0,\ f(x_0,y_0 + r_2) > 0$
$\exists r_1 \in (0,r) :\ f(x,y_0 - r_2) < 0, f(x,y_0 + r_2) > 0, \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$
$\Pi = \{(x,y) : |x - x_0| \leq r_1, |y - y_0| \leq r_2\} \in U(x_0,y_0)$
Покажем, что в П1 определяет y как функцию от x

$\overline{x} \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$
$\phi(y) = f(\overline{x},y),\ \phi(y_0 - r_2) < 0\ \phi(y_0 + r_2) > 0$
$\phi(y)$ непрерывна на $[y_0 - r_2; y_0 + r_2]$ $\Rightarrow$ по теореме о промежуточном значении $\exists\overline{y} \in (y_0 - r_2; y_0 + r_2) : \phi(\overline{y}) = 0$ и эта точна единственная.
$\phi'(y) = f_y(\overline{x},y) > 0$ в $\Pi_1 \subset \Pi$
$f(\overline{x},\overline{y}) = 0\ \ y = f(x)$
II.
$\Pi_1 = \{(x,y) : |x - x_0| \leq r_1, |y - y_0| \leq r_2\}$
$(x_0,y_0) \in \Pi,\ f(x_0,y_0) = 0,\ (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in \Pi$ и $f(x_0 + \Delta x,y_0 + \Delta y) = 0;$
$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = 0;$
$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0 + \Delta y) + f(x_0,y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = 0;$
$\exists\Theta_1, \Theta_2 : 0 < \Theta_I < 1 : \Delta f = f_x(x_0 + \Theta_1\Delta x,y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x,y_0 + \Theta_2\Delta y)\Delta y = 0;$

$$\Delta y = -\frac{f_x(x_0 + \Theta_1\Delta x,y_0 + \Delta y)}{f_y(x_0 + \Delta x,y_0 + \Theta_2\Delta y)}\Delta x \Rightarrow |Deltay| \leq \frac{M}{m}|\Delta x|/$$

$\Rightarrow$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ $\ f_y$ непрерывно в Π - компакт $\Rightarrow \exists m > 0 : f_y(x,y) \geq m;\ \exists M > 0 : |f_y(x,y)| \leq M$ на Π

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f_x(x_0 + \Theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y)}{f_y(x_0,y_0 + \Theta_2\Delta y)};\ \ f'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,f(x_0))}{f_y(x_0,f(x_))};\ \ y_0 = -f(x_0);$$

В силу произвольности (x_0,y_0) производная существует на всем $(x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ $\square$

Замечание
Теорема остается справедливой, если в $f(x,y) = 0,\ x = (x_1,x_2,\ldots,x_m)$
$\Pi = \{(x_1,x_2,\ldots,x_m,y) : |x_i - x_i^0|_{i=\overline{1,m}} \leq r_i, |y - y_0| \leq \rho\}$

1.3. Неявные функции, определяемые системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots y_n) = 0 \\ f_2(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots y_n) = 0 \\ \hfill\ldots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots y_n) = 0 \end{cases}$$

$x^0 \in \mathbb{E}^m, y^0 \in \mathbb{E}^n;\ \Pi(x^0) = \{x \in \mathbb{E}^m : |x_i - x_i^0| \leq r_i, i = \overline{1,m}\}$
$\Pi(y^0) = \{y \in \mathbb{E}^n : |y_i - y_i^0| \leq \rho_i, i = \overline{1,n}\}$
$\Pi = \Pi(x^0) \times \Pi(y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{E}^n + m : x \in \Pi(x^0), y \in \Pi(y^0)\}$
Система определяет в Π $y_1,\ldots,y_n$ как неявные функции переменных $x_1,\ldots x_m$, если $\forall x \in \Pi(x^0)$ ставится в соответствие такое $y \in \Pi(x^0)$, что $f_i(x,y) = 0,\ i \in \overline{1,n}$

Теорема 2. *Пусть*

1. $f_i(x^0,y^0) = 0,\ i \in \overline{1,n}$
2. *Функции* $f_i, i \in \overline{1,n}$ *обладают в некоторой окрестности* $U(x^0,y^0)$ *непрерывностью частных проихводных по переменным* $x_j, j \in \overline{1,m}$ *и* $y_i, i \in \overline{1,n}$

3. $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ & \dots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} (x^0,y^0) \neq 0$

Тогда $\exists \Pi = \Pi(x^0) \times |pi(y^0) \in U$*, в пределах которого система определяет переменные* $y_1, \dots ,y_n$ *как неявно заданные функции переменных* $x_1, \dots ,x_m$ *и эти функции* $y_i = f_i(x)$ *обладают непрерывными частными производными в* $\Pi(x^0)$ *и* $y_i^0 = f'^i(x^0), \overline{1,n}$