# Математический анализ. Семинар 8

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

7 ноября 2017

# 1 Семинар 8.

## 1.1 Пов. инт. I рода

### 1.1.1 Конус внутри цилиндра

Найти площадь поверхности конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, заключенного внутри цилиндра $x^2+y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = 1$
$\bar{r} = (x, y, z);\ u = x;\ v = y$

$$\int_S dS = \iint_G |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| dS$$

$$\bar{r}_x = (0, 1, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}});\quad \bar{r}_y = (1, 0, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}});$$

$$|[\bar{r}_x \times \bar{r}_y]| = |det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix}| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

$$S = \int_S dS = \iint_G |\bar{r}_x \times \bar{r}_y| dS = \iint_G \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2}\iint_G dxdy = \sqrt{2}\cdot \underbrace{\pi \cdot 1^2}_{\text{круг R=1}};$$

## 1.2 Пов. инт. II рода

**Определение 1.** *Потоком векторого поля $A$ через поверхность $S$ называется поверхностный интеграл I рода: $\iint_S (\bar{a}, \bar{n}) dS$, он же поверхностный интеграл II рода.*

**Вектор нормали:** $\bar{N} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v;\ \ \bar{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|}$

$$\int\limits_S (\bar{a}, \bar{n}) dS = \iint\limits_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint\limits_G \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} dudv;\ \bar{a} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

*Доказательство.*

$$\iint_S (\bar{a}, \bar{n}) dS = \iint_S \left(\bar{a}, \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|}\right) dS = \iint_S (\bar{a}, \bar{r}_u \times \bar{r}_v) \frac{1}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|} dS =$$
$$= \iint_G (\bar{a}, \bar{r}_u \times \bar{r}_v) \frac{1}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|} |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| dudv = \iint_G (\bar{a}, \bar{r}_u \times \bar{r}_v) dudv$$

□

### 1.2.1 №11.31(1)

$\mathbb{J} = \iint_S (x^5+z)dydz$; Где S - внутр. сторона полусферы $x^2+y^2+z^2 = R^2, z \le 0$

$\bar{a} = \begin{pmatrix} x^5+z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; Параметризуем поверхность: $\begin{matrix} x = R\cos\phi\cos\psi; \\ y = R\sin\phi\cos\psi; \\ z = R\sin\psi \end{matrix}$

Чтобы учесть ориентацию, посчитаем вектор нормали

$\bar{N} = |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_\phi & y_\phi & z_\phi \\ x_\psi & y_\psi & z_\psi \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} n_z = x_\phi y_\psi - x_\psi y_\phi = -R\sin\phi\cos\psi(-R\sin\phi\cos\psi) - \\ -(-R\cos\phi\sin\psi)(R\cos\phi\cos\psi) = \\ = R^2\cos\psi\sin\psi < 0 \;\Rightarrow\; \bar{n} \end{aligned}$$

$$\iint_S Pdydz = \iint\limits_G \begin{vmatrix} (R\cos\phi\cos\psi)^5 + R\sin\psi & 0 & 0 \\ -R\sin\phi\cos\psi & R\cos\phi\cos\psi & 0 \\ -R\cos\phi\sin\psi & -R\sin\phi\sin\psi & R\cos\psi \end{vmatrix} d\phi d\psi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \Big((R\cos\phi\cos\psi)^5 + R\sin\psi\Big) R^2\cos\phi\cos^2\psi d\phi d\phi = -\frac{2R^7\pi}{7}$$

# 2 Дивергенция, ротор и их друзья

**Определение 2.** *Говорят, что в области $G$ задано скалярное поле $f$(векторное поле $\bar{a}$), если $\forall M \in G$ поставлено в соответствие число $f(M)$ (вектор $\bar{a}(M)$)*

1. *Градиент скалярного поля:* $\nabla f = gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$
2. *Производная по направлению:* $\frac{\partial f}{\partial l} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(M)-f(M_0)}{t}$, *где* $\overline{M_0M} = t\bar{l}, \;\; t > 0$ $\frac{\partial f}{\partial l}(gradf, \bar{l})$
3. $div\ \bar{a} = (\bar{\nabla}, \bar{a}) = \left(\frac{\partial a_x}{x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{z}\right)$

### 2.0.1 №12.24

Посчитать производную по направлению $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ функции: $u = f(r);\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = (grad\ f(r), \bar{n})$; $\frac{f(n)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,
$\frac{f(n)}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r}, \frac{f(n)}{\partial z} = f'(r)\frac{z}{r}$;
$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = \frac{f'(r)}{r}(\bar{r}, \bar{n})$

### 2.0.2 №12.41(5)

Посчитать: $div\ grad\ f(r) = div(f'(r)\frac{\bar{r}}{r})$

$$\frac{\partial(grad\ f(r)|_x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f'(r)\frac{x}{r}) = \frac{f'(r)}{r} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'(r)}{r}\right) = \frac{f'(r)}{r} + x\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f'(r)}{r}\right) =$$
$$= \frac{f'(r)}{r} + \frac{x^2}{r}\left(\frac{f''(r)r - f'(r)}{r^2}\right) = \frac{f'(r)}{r} + \frac{x^2}{r^2}\left(f'' - \frac{f'}{r}\right)$$
$$\to div = 3\frac{f'(r)}{r} + (f'' - \frac{f'}{r})(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2})$$