1. Понятие условного экстремума

Пример $\omega = x^2 + y^2$, при условии $x + y - 1 = 0$.
$y = 1 - x, \omega = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$
$\omega' = 2(2x+1) = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}$ $\omega'' = x > 0 \to x_0$ - локальный минимум $\omega = \omega(x)$
$M_0(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ - т. условного минимума $\omega = x^2 + y^2$ при $x + y - 1 = 0; \omega = \frac{1}{2}$. Абсолютный экстремум $\omega = 0$ в (0;0)

1.1. Общая постановка задачи

$\omega = f(x,y),\ x \in \mathbb{E}^m,\ y \in \mathbb{E}^n;\ x = (x_1,x_2,\ldots,x_m),\ y = (y_1,\ldots,y_n);$

$$\Phi_1(x,y) = 0,\ \Phi_2(x,y) = 0,\ \ldots \Phi_n(x,y) = 0;\ \text{ - условия связи} \tag{1}$$

Условия связи 1 в пространстве $\mathbb{E}^{m+n}$ определяют множество $\mathbb{X}$:

$$\mathbb{X} = \{(x,y) : \Phi_1(x,y) = 0,\ \Phi_2(x,y) = 0,\ \ldots \Phi_n(x,y) = 0\};\ dim\mathbb{X} = m$$

Определение 1 (Точка условного минимума)**.** точка $M_0(x^0, y^0) : \Phi_i(x^0, y^0) = 0, \forall i = \overline{1,n}$, называется точкой лок. min [max] функции $\omega = f(x,y)$, при условиях связи 1, если

$$\exists B_\varepsilon(M_0) :\ \forall (x,y) \in B_\varepsilon(M_0) \cap \mathbb{X} \Rightarrow f(x^0, y^0) < f(x,y)\ [f(x^0,y^0) > f(x,y)]$$

1.2. Необходимые условия существования лок. экстремума

$M_0(x^0, y^0) : \Phi_i(x^0, y^0) = 0, i = \overline{1,n};\ \ f, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ - непр дифф в некоторой окр $U(M_0)$

$$\frac{D(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)} = \Delta_{\Phi,y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} (M_0) \neq 0$$

$\exists \Pi = \Pi(x^0) \times \Pi(y^0) \subset U(M_0) : y_1 = \varphi_1(x1,\ldots,x_m) \ldots y_n = \varphi_n(x1,\ldots,x_m)$
$\omega) = f(x) = f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n) = f(x,\varphi_1(x),\ldots\varphi_n(x)$
Если x^0- точка лок. экстремума f, $\Rightarrow df(x^0) \equiv 0\ \forall dx_1,\ldots,dx_m \Rightarrow$
$\Rightarrow df(x^0,y^0) \equiv 0 = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0)dx_k + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(M_0)dy_j$
где $dy_j(M_0) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0)dx_i, j = \overline{1,n}$
$A_1 dx_1 + \cdots + A_m dx_m \equiv 0\ \forall dx_1,\ldots,dx_m \Rightarrow$
Необх. условие существования лок. условного экстремума: $A_1 = \cdots = A_m = 0$.
Замечания:

1. Теорема о функциях, заданных неявно системой уравнений, говорит только о существовании функций $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, но не дает метода их нахождения

2. В приведенных рассуждениях $x_1,\ldots x_m$ - независимые переменные, а $y_1,\ldots y_n$ - зависимые

Если $\varphi_1 \dots \varphi_n$ - неизвестны, то $dy_j(M_0)$ можно найти как:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_m}(M_0)dx_m + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(M_0)dy_1 + \dots \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n}(M_0)dy_n = 0 \tag{2}$$

$$\vdots \tag{3}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_m}(M_0)dx_m}_{D+\mathbb{J}dy=0} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(M_0)dy_1 + \dots \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n}(M_0)dy_n = 0 \tag{4}$$

1.3. Метод Лагранжа

Выполненные условия связи 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)dx_m + \dfrac{\partial f}{\partial y_1}(M_0)dy_1 + \dots \dfrac{\partial f}{\partial y_n}(M_0)dy_n = 0 \\ D + \mathbb{J}dy = 0 \mid \times \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{cases} \Bigg| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k}(M_0) \right] dx_k +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial y_j}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_j}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_j}(M_0) \right] dy_j = 0$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ выбираются таким образом, чтобы

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1}(M_0) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_n}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n}(M_0) \end{cases} \tag{5}$$

$$\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}(M_0) = 0, \ k = \overline{1,m} \right] \tag{6}$$

$\exists! \ \lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$;
Подставляем λ_0 : $\sum\limits_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) + \lambda_1^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k}(M_0) + \dots + \lambda_n^0 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k}(M_0) \right] dx_k = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) + \lambda_1^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(M_0) + \dots + \lambda_n^0 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(M_0) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0) + \lambda_1^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_m}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_m}(M_0) \end{cases} \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial y_j}(M_0) = 0, \ j = \overline{1,n} \right] \tag{8}$$

В итоге из этого всего имеем 2n+m уравнений для нахождения $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Теорема 1 (необходимое условие существования локального экстремума). *Пусть функции $f, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ непрерывно дифф. в $U(M_0)$, $\Delta_{\Phi,y} \neq 0$, и $M_0(x_0, y_0)$ - т. локального условного экстремума функции $\omega = f(x,y)$ при условиях связи $\Phi_1(x,y) = 0, \ldots, \Phi_n(x,y) = 0$ Тогда найдутся числа $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0) = \lambda^0$ такие, что в точке M_0 выполнены 7 и 5 $\Lambda(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda_1\Phi_1(x,y) + \cdots + \lambda_n\Phi_n(x,y)$ - функция Лагранжа*

Следствие:

Пусть выполнены условия теоремы 1. Если т M_0 является точкой локального условного экстремума функции $\omega = f(x, y)$ при условии связи $\Phi_1(x,y) = 0, \ \ldots \Phi_n(x,y) = 0$; то в ней выполнены равенства 8 и 6, т.е. M_0 - стационарная точка функции Лагранжа.

1.4. Достаточные условия существования локального экстремума

$\Lambda(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda_1\Phi(x,y) + \cdots + \lambda_n\Phi_n(x,y);$
$\lambda^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_1^0);\ \ x^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0);\ \ y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{x_k} = 0 & k = \overline{1,m} \\ \frac{\partial \Lambda}{y_j} = 0 & j = \overline{1,n} \\ Q\Phi_i = 0; & i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{9}$$

$f, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ дважды непрерывно дифференцируемы в $U(M_0),\ \Delta_{\Phi,y}(M_0) \neq 0;\ M_0(x^0, y^0) \in X,\ M(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) \in X$
$\Delta f(M_0, (\Delta x, \Delta y)) = f(M) - f(M_0) = \Lambda(M, \lambda^0) - \Lambda(M_0, \lambda^0) = \Delta\Lambda(M_0, \lambda^0, \Delta x, \Delta y)$

$$\begin{aligned} &\Delta\Lambda\left(M_0,(\Delta x, \Delta y)\right) = \\ &\quad = \frac{1}{2}\left[\sum_{k,j=1}^{m} \frac{\partial^2\Lambda(M_0)}{\partial x_k \partial x_j}\Delta x_k \Delta x_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2\Lambda(M_0)}{\partial x_k \partial y_j}\Delta x_k \Delta y_j + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2\Lambda(M_0)}{\partial y_k \partial y_j}\Delta y_k \Delta y_j\right] + \\ &\qquad + \sum_{k,j=1}^{m} \alpha_{kj}^1 \Delta x_k \Delta x_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^2 \Delta x_k \Delta y_j + \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_{kj}^3 \Delta y_k \Delta y_j = \end{aligned}$$

$$= \Bigg/ \begin{array}{cl} \alpha_{kj}^i \to 0 & \text{при } \Delta x \to 0;\ \ \alpha_{kj}^2, \alpha_{kj}^3 \text{ зависят от } \Delta x, \Delta y \\ \Delta y_j \to 0 & \text{при } \Delta x \to 0;\ j = \overline{1,n} \\ \Delta x_j = dx_j;\ \Delta y_j = \alpha y_j + \gamma_j, \gamma \to 0 & \text{при } \Delta x \to 0;\ j = \overline{1,n} \end{array} \Bigg/ =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k,j=1}^{m} \frac{\partial^2\Lambda}{\partial x_k \partial x_j}dx_k dx_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2\Lambda}{\partial x_k \partial y_j}dx_k dy_j + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2\Lambda}{\partial y_k \partial y_j}dy_k dy_j\right] + \\ &\qquad + \sum_{k,j=1}^{m} \widetilde{\alpha_{kj}^1} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \widetilde{\alpha_{kj}^2} dx_k dy_j + \sum_{k,j=1}^{n} \widetilde{\alpha_{kj}^3} dy_k dy_j \end{aligned}$$

$dy_j(M_0) = \sum\limits_{k=1}^{m} C_k dx_k;\ d^2\widetilde{\Lambda}(M_0, (\Delta x, \Delta y)) = \sum\limits_{k,j=1}^{m} A_{kj} dx_k dx_j;\ A_{kj} = A_{jk}$
$\Delta = \Lambda(M_0,(\Delta x, \Delta y)) = d^2\hat{\Lambda}(M_0) + \beta(\Delta x),\ \beta(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$
$d^2\hat{\Lambda}(M_0) = d^2\Lambda(M_0)$ т.к. первые производные функции Лагранжа в стационарной точке M_0; $= 0\ \Rightarrow d^2y$ равны 0

Теорема 2. *Пусть f и $\Phi_j, j = \overline{1,n}$ дважды дифф функции в $U(M_0)$ (M_0 - стационарная точка функции Лагранжа) и $\Delta_{\Phi,y}(M_0) \neq 0$ тогда*

1. *Если $d^2\hat{\Lambda}(M_0)$ положительно определенная квадратичная форма, то M_0 - точка условного минимума функции f при условии связи*
2. *Если $d^2\hat{\Lambda}(M_0)$ отрицательно определенная квадратичная форма, то M_0 - точка условного максимума функции f при условии связи*
3. *Есои $d^2\hat{\Lambda}(M_0)$ неопределенная квадратичная форма, то экстремума нет*

Замечание: если $d^2\hat{\Lambda}(M_0)$ полуопределенная кв. форма, то нужно проводить дополнительные исследования