1. Локальные экстремумы функций многих переменных

1.1. Определение и необходимые условия существования экстремумов

$\omega = f(x),\ x \in \mathbb{E}^m,\ x = (x_1, x_2, \dots, x_m), x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$

Определение 1. Точка x^0 называется точкой локального минимума [максимума] функции $\omega = f(x)$, если $\exists B_\delta(x^0) : \forall x \in B_\delta(x^0)$ выполнено $f(x^0) < f(x)\ \ [f(x^0) > f(x)]$

Теорема 1 (Необходимое условие существования локального экстремума)**.** *Если функция $\omega = f(x)$ дифференцируема в точке x^0 и имеет в этой точке локальный экстремум, и все ее частные производные в этой точке =0 т.е.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) = 0$$

Доказательство. Фиксируем $x_2^0, \dots, x_m^0;\ f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) = f(x_1);\ f'(x_1^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$. f диф. в точке x_1^0 и имеет в ней локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма $f'(x_1^0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$. Равенство 0 остальных ч.п. доказывает аналогично. □

Предложение. *1 - необходимое, но не достаточное условие существования локального экстремума. например:*
$\omega = xy;\ (0,0) : \frac{\partial \omega}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \omega}{y}(0,0) = 0,$ *но* $\nexists B_\delta(0,0) : \forall (x,y) \in B_\delta \to \omega(x,y) > \omega(0,0) = 0$ *или* $\omega(x,y) < \omega(0,0) = 0$*. Точка* $x^0 : \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) = 0$ *- стационарная точка*

Теорема (1'). *Если $\omega = f(x)$ дифференцируема в точке x^0 и имеет в этой точке лок. экстремум, то дифференциал $df(x^0) \equiv 0$ относ дифф. независ. перем. $dx_1, \dots dx_m$*

Доказательство. $df(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0)dx_m;$ из т.1 $\Rightarrow df(x^0) = 0$ □

1.2. Достаточное условие существования локального экстремума

$\omega = f(x),\ x^0 : \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_m^0) = 0;$ f -дважды непрерывно дифференцируема в точке x^0 т.е. $d^2 f(x^0) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} dx_i dx_j;\ a_{ij} = a_{ji};$

Это квадратичная форма относительно $dx_i, i = \overline{1,m};\ k = k(x) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j;\ a_{ij} = a_{ji}$

1. k(x) - положительно определенная кв. форма: $\forall x \neq 0 \to k(x) > 0$
2. k(x) - отрицательно определенная кв. форма: $\forall x \neq 0 \to k(x) < 0$
3. k(x) - положительно полуопредел. кв. форма: $\forall x \to k(x) \geq 0\ \&\ \exists x \neq 0 : k(x) = 0$
4. k(x) - отрицательно полуопредел. кв. форма: $\forall x \to k(x) \leq 0\ \&\ \exists x \neq 0 : k(x) = 0$
5. k(x) - неопределенная кв. форма: $\exists x', x'' : k(x') > 0\ \&\ k(x'') < 0$

Теорема 2. *Пусть $\omega = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x^0.*

1. *Если $d^2f(x^0)$ положительно определенная кв. форма, то т x^0 - точка лок. min*
2. *Если $d^2f(x^0)$ отрицательно определенная кв. форма, то т x^0 - точка лок. max*
3. *Если $d^2f(x^0)$ неопределенная кв. форма, то т x^0 не является точкой лок. экстремума функции*

Доказательство. 1. $f(x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{1}{2}d^2f(x^0) + o(\rho^2), \rho \to 0;\ df(x^0) = 0$ по т. 1.1.
$dx_1 = x_1 - x_1^0 \dots dx_m = x_m - x_m^0;\ \rho = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2}$
$o(\rho^2) \overset{\rho\to 0}{=} \alpha(\rho)\rho^2$, $\alpha(\rho) \xrightarrow{rho \to 0} 0$,
Обозначим $h_i = \frac{x_i - x_i^0}{\rho}; i = \overline{1,m};\ |h_i| \le 1;\ h_i^2 + \dots h_m^2 = 1;\ h = (h1, \dots, h_m)$. Тогда:

$$f(x) - f(x^0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}h_ih_j + \alpha(\rho)\right]$$

Функция $k(h) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}h_ih_j$ - непрерывна на компакте $S = \{h : h_1^2 + \dots h_m^2 = 1\}$
Тогда по 2 теореме Вейерштрасса:
$\exists h' \in S : h' \ne 0, k(h') = \mu > 0, \exists \rho' > 0 : \forall \rho < \rho' \to |\alpha(\rho)| < \frac{\mu}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \rho < \rho' \to f(x) - f(x^0) > 0. \sum\limits_{i=1}^{m}(x_i - x_i^0)^2 < \rho^2$

2. Аналогично 1 пункту

3. Как и в первом пункте $f(x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{1}{2}d^2f(x^0) + o(\rho^2), \rho \to 0;\ df(x^0) = 0$ по т. 1.1. $dx_1 = x_1 - x_1^0 \dots dx_m = x_m - x_m^0;\ \rho = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2}$
$o(\rho^2) \overset{\rho\to 0}{=} \alpha(\rho)\rho^2$, $\alpha(\rho) \xrightarrow{\rho \to 0} 0$,
$h_i = \frac{x_i - x_i^0}{\rho}; i = \overline{1,m};\ |h_i| \le 1;\ h_i^2 + \dots h_m^2 = 1$; Тогда $h_i' = \frac{x_i' - x^0}{\rho},\ h_i'' = \frac{x_i'' - x_0}{\rho}; i = \overline{1,m}$;
$\exists h' = (h_1', \dots, h_m'), h'' = (h_1'', \dots, h_m'') : k(h') > 0, k(h'') < 0$
$f(x') - f(x^0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{i,j}h_i'h_j' + \alpha(\rho)\right] \Rightarrow \exists \rho' : \forall \rho < \rho'\ f(x') - f(x^0) > 0$
$f(x'') - f(x^0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{i,j}h_i''h_j'' + \alpha(\rho)\right] \Rightarrow \exists \rho'' : \forall \rho < \rho''\ f(x'') - f(x^0) < 0$

□

Предложение. 1. *Если x^0 - стационарная точка, $\omega = f(x)$ и $d^2f(x^0)$ - положительно [отрицательно] полуопределенная кв. форма, то о существовании локального экстремума нельзя ничего сказать. $\omega = f_1(x,y) = (x-y)^4$, $\omega = f_2(x,y) = x^4 + y^4$; $(x^0,y^0) = (0,0)$ - стационарная точка f_1 и f_2. Тогда:*
$df_1 = 4(x-y)^3(dx - dy)$; $d^2f_1 = 12(x-y)^2(dx-dy)^2$; $d^2f_1(x,x) = 0$ - полуопределенная кв. форма.
$df_2 = 4x^3dx + 4y^3dy$; $d^2f_2 = 12x^2dx^2 + 12y^2dy^2 > 0$ везде кроме (0,0) - точки локального минимума функции f_2; $f_2(0,0) = 0$

2. *Условие $d^2f(x^0) \ge 0$ $[d^2f(x^0) \le 0]$ - необходимое условие локального экстремума.*

Примеры

(a) $\omega = x^4 + y^4 - 2x^2$; $d\omega = (4x^3 - 4x)dx + 4y^3dy$; $d^2\omega = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy^2$
$M_1(0{,}0), M_2(1{,}0), M_3(-1{,}0)$
$d^2\omega(M_1) = -4dx^2 < 0$; $\forall dx \neq 0 \Rightarrow M_1-$ *локальный max*
$d^2\omega(M_2) = 8dx^2 > 0$; $\forall dx \neq 0 \Rightarrow M_2-$ *локальный min*
$d^2\omega(M_3) = 8dx^2 > 0$; $\forall dx \neq 0 \Rightarrow M_3-$ *локальный min*

(b) $\omega = \lambda x_1^2 + x_2^2 + \cdots + 2x_2 + \cdots + 2x_m, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$
$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 2\lambda x_1, \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 2x_2 + 2, \ldots, \frac{\partial \omega}{\partial x_m} = 2x_m + 2;$
Стационарная точка M(0,-1,..., -1)
$d^2\omega = 2\lambda dx_1^2 + 2dx_2^2 + \ldots 2dx_m^2$; *Тогда есть два случая:*

i. $\lambda > 0 \Rightarrow d^2\omega^{(M)} > 0 \ \forall (dx_1, \ldots, dx_m) \neq (0, \ldots, 0)$ *M - точка лок. min*

ii. $\lambda < 0$ $(dx_1, \ldots, dx_m) = (1{,}0, \ldots, 0)$ $d^2\omega < 0$
$(dx_1, \ldots, dx_m) = (0{,}1{,}0, \ldots, 0)$ $d^2\omega > 0$ *локальный экстремум*