1. Кратные интегралы

1.1. Определения и свойства

Определение 1. Совокупность измеримых открытых множеств $T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$ называется разбиением множества Ω, если:

1. $\Omega_k \subset \Omega,\ k = \overline{1{,}n}$
2. $\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset$, если $k \neq j$
3. $\cup_{k=1}^n \overline{\Omega}_k = \overline{\Omega}$

Определение 2. $\Delta(\Omega) = \sup\limits_{x,y \in \Omega} \rho(x,y)$ - диаметр множества. (Ω - огранич. мн-во)

Определение 3. Число $\Delta_T = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \Delta(\Omega_k)$ - называется мелкостью разбиения $T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$

Определение 4. Разбиение $T' = \{\Omega'_j\}$ - называется измельчением разбиения $T = \{\Omega_k\}$ если $\forall \Omega'_j \subset T\ \ \exists \Omega_k \subset T : \Omega'_j \subset \Omega_k$

Свойства измельчения:

1. Если T' измельчение T, а T'' - измельчение T' то T' измельчение T''
2. Для двух разбиений $T' = \{\Omega'_k\}$ и $T'' = \{\Omega''_j\}$ множества Ω $\exists$ разбиение T множества Ω , что Т будет измельчением разбиений T' и T''

Замечание: Если $G = \cup_{j=1}^p Q_j$ клеточное множество и $\Omega \subset G$ то в качестве разбиения множества Ω можно взять $T = \{\Omega_k\}$, где $\Omega_k = \Omega \cap int(Q_k),\ k = \overline{1{,}p}$

1.2. Интегральные суммы. Кратный интеграл Римана. Необходимое усл. существования кр. интеграла Римана

$T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n, \omega = f(x), x \in \mathbb{E}$, опред. на $\overline{\Omega}$; $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} : \xi \in \overline{\Omega_k}$

Определение 5. $I\{T, \xi\} = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k) m(\Omega_k) -$ интегральная сумма функции f

Определение 6. $m(\Omega_k)$ - мера множества Ω_k

Определение 7. Число I называется пределом интегральных сумм $I\{T,\xi\}$, при мелкости разбиения стремящейся к 0, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall T : \Delta_T < \delta \ \&\ \forall \varepsilon \Rightarrow |I\{T,\xi\} - T| < \varepsilon$$

Определение 8 (Кратный интеграл Римана)**.** Число I, являющееся пределом интегральных сумм при $\Delta_t \to 0$ называется кратным интегралом Римана функции f по множеству Ω [$\overline{\Omega}$]. А функция f называется интегрируемой по риману по множеству Ω [$\overline{\Omega}$].

Обозначение: $\int\limits_{\Omega} f(x) d\omega = \int \ldots \int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \ldots dx_m = \int \ldots \int\limits_{\Omega} f dx_1 \ldots dx_m$

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{E}^m f$ - измеримая область, а $\omega = f(x)$ опред. и инт. на $\overline{\Omega}$ тогда эта функция ограничена на $\overline{\Omega}$*

Пример: $\omega = f(x) \equiv c$; $\forall x \in \overline{\Omega}$, Ω - измеримое множество.
$\forall T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n \ \forall \xi \ \ I = \{T, \xi\} = \sum\limits_{k=1}^{n} C \cdot m(\Omega_k) = C \cdot m(\Omega)$

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ *- измеримая область,* $\omega = f(x)$ *опр. и огр на* $\overline{\Omega}$. $f(x) \equiv 0$ *на* $\overline{\Omega} \backslash \Gamma$, $m(\Gamma) = 0$, *тогда* f *интегрируема на* Ω *и* $\int\limits_{\Omega} f d\omega = 0$

Доказательство. $\exists c > 0 : \forall x \in \overline{\Omega} \to |f(x)| \leq c$
$\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon = \cup_{j=1}^{p} Q_j : \Gamma \subset G_\varepsilon$ и $0 \leq m\Gamma \leq m(G_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{c}$
$T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n, \widetilde{T} = T' \cup T'' = \{\Omega_k'\} \cup \{\Omega_j''\}$; где $\Omega_k' = \Omega_k \backslash \overline{G_\varepsilon}$ и $\Omega_j'' = \Omega_j \cap (int(Q_i)), i = \overline{1,p}, j = \overline{1,n}$. И т.к. на Ω_k' функция $f(x) \equiv 0$, а Ω_j'' содержит точки из Γ получим:
$\forall \xi \to |I\{\widetilde{T}, \xi\}| = |\sum\limits_{j} f(\xi_i) m(\Omega_j'')| \leq c \cdot m(G_\varepsilon) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ □

1.3. Суммы Дарбу. критерий интегрируемости. Интеграл непрерывных функций

$\Omega \subset \mathbb{E}^m$ измеримая область. $\omega = f(x)$ определена и ограниченна на $\overline{\Omega}$. $T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$ - разбиение Ω. $m_k = \inf\limits_{x \in \overline{\Omega}_k} f(x), M_k = \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}_k} f(x)$

$S_*(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k m(\Omega_k)$; $S^*(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k m(\Omega_k)$; - **нижняя и верхняя суммы Дарбу**

Теорема 3 (Критерий интегрируемости)**.** *Пусть* $\omega \subset \mathbb{E}$ *- измеримая область, а функция* $\omega = f(x)$ *опр. и огр. на* $\overline{\Omega}$*. Для того, чтобы* f *была интегрируема на* Ω *необходимо и достаточно чтобы* $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : |S^*(T) - S_*(T)| < S}$

Теорема 4 (Интегрируемость функции, непрерывной на замкнутом измеримом мн-ве)**.** *Функция* $\omega = f(x)$ *непр. на замыкании измеримой области* Ω *интегрируема на ней.*