Содержание

1. Функции, заданные неявно

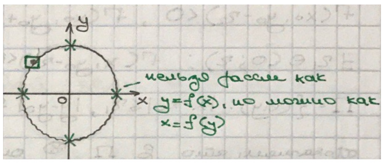
1.1. Основные понятия

$$f(x,y) = 0; \tag{1}$$

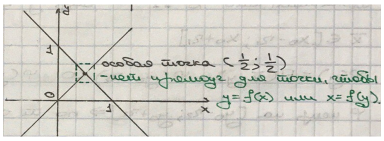
$D_f = \{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : f(x,y) = 0\}$ - график уравнения 1. $D_f \leftrightarrow Ox$

1.1.1. Примеры

1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$
   $f_x = 2x;\ f_y = 2y$
   Точку (0,1), например, нельзя рассматривать как y=f(x), но можно как x=f(y)



2. $(x-y)(x+y-1) = 0$
   $f_x = (x+y-1)+(x-y);\quad f_y = -(x+y-1)+(x-y)$
   $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ - особая точка, где обе 0. Ни по Ox, ни по Oy нет биекции.



1.2. Теорема о неявно заданной функции

Достаточное условие, при котором уравнение 1 локально определеяет y как $f(x)$ и y обладает некоторыми дифф. свойствами.

Теорема 1. *Если*

1. $f(x_0,y_0) = 0$
2. *в некоторой* $u(x_0,y_0)$ *функция f обладает непрерывной частной производной*
3. $f_y(x_0,y_0) \neq 0$,

То $\exists \Pi = \{(x,y) : |x-x_0| \leq r_1, |y-y_0| \leq r_2\} \in U(x_0,y_0)$ *в пределах которого уравнение 1 определяет y как функцию переменной x* ($y = f(x)$)*, которая непрерывно дифференцируема на* $(x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ *и* $y' = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}\ |_{y=f(x)}$

Доказательство. **I. Существование неявно заданной функции**
$3 \Rightarrow$ Пусть $f_y(x_0,y_0) > 0\ \ \to_{(2)} \exists \Pi_1 = \{(x,y) : |x-x_0| \leq r, |y-y_0| \leq r_2\} \in U(x_0,y_0)$ такой, что $\forall (x.y) \in \Pi_1 \Rightarrow f_y(x,y) > 0$
$\psi(y) = f(x_0,y),\ \psi(y_0) = 0,\ \psi$- возрастает на $[y_0 - r_2, y_0 + r_2]$
$\psi'(y) = f_y(x_0,y) > 0,\ \forall y \in [y_0 - r_2, y_0 + r_2] \Rightarrow \psi(y_0 - r_2) < 0, \psi(y_0 + r_2) > 0$
$f(x_0, y_0 - r_2) < 0,\ f(x_0,y_0 + r_2) > 0$
$\exists r_1 \in (0,r) :\ f(x,y_0 - r_2) < 0, f(x,y_0 + r_2) > 0, \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$
$\Pi = \{(x,y) : |x - x_0| \leq r_1, |y - y_0| \leq r_2\} \in U(x_0,y_0)$
Покажем, что в П1 определяет y как функцию от x

$\overline{x} \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$
$\phi(y) = f(\overline{x},y),\ \phi(y_0 - r_2) < 0, \phi(y_0 + r_2) > 0$
$\phi(y)$ непрерывна на $[y_0 - r_2; y_0 + r_2]$ $\Rightarrow$ по теореме о промежуточном значении $\exists \overline{y} \in (y_0 - r_2; y_0 + r_2) : \phi(\overline{y}) = 0$ и эта точна единственная.
$\phi'(y) = f_y(\overline{x},y) > 0$ в $\Pi_1 \subset \Pi$
$f(\overline{x},\overline{y}) = 0\ \ y = f(x)$
II.
$\Pi_1 = \{(x,y) : |x - x_0| \leq r_1, |y - y_0| \leq r_2\}$
$(x_0,y_0) \in \Pi,\ f(x_0,y_0) = 0,\ (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in \Pi$ и $f(x_0 + \Delta x,y_0 + \Delta y) = 0;$
$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = 0;$
$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0 + \Delta y) + f(x_0,y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = 0;$
$\exists \Theta_1, \Theta_2 : 0 < \Theta_I < 1 : \Delta f = f_x(x_0 + \Theta_1 \Delta x,y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x,y_0 + \Theta_2 \Delta y)\Delta y = 0;$

$$\Delta y = -\frac{f_x(x_0 + \Theta_1 \Delta x,y_0 + \Delta y)}{f_y(x_0 + \Delta x,y_0 + \Theta_2 \Delta y)}\Delta x \Rightarrow |\Delta y| \leq \frac{M}{m}|\Delta x|$$

$\Rightarrow$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0\ \ f_y$ непрерывно в Π - компакт $\Rightarrow \exists m > 0 : f_y(x,y) \geq m;\ \exists M > 0 : |f_y(x,y)| \leq M$ на Π

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f_x(x_0 + \Theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)}{f_y(x_0,y_0 + \Theta_2 \Delta y)};\ \ f'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,f(x_0))}{f_y(x_0,f(x_))};\ \ y_0 = -f(x_0);$$

В силу произвольности (x_0,y_0) производная существует на всем $(x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ □

Замечание
Теорема остается справедливой, если в $f(x,y) = 0,\ x = (x_1,x_2, \ldots , x_m)$
$\Pi = \{(x_1,x_2, \ldots , x_m,y) : |x_i - x_i^0|_{i=\overline{1,m}} \leq r_i, |y - y_0| \leq \rho\}$

1.3. Неявные функции, определяемые системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots , x_n, y_1, \ldots y_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots , x_n, y_1, \ldots y_n) = 0 \\ \hfill \ldots \\ f_n(x_1, \ldots , x_n, y_1, \ldots y_n) = 0 \end{cases}$$

$x^0 \in \mathbb{E}^m, y^0 \in \mathbb{E}^n;\ \Pi(x^0) = \{x \in \mathbb{E}^m : |x_i - x_i^0| \leq r_i, i = \overline{1,m}\}$
$\Pi(y^0) = \{y \in \mathbb{E}^n : |y_i - y_i^0| \leq \rho_i, i = \overline{1,n}\}$
$\Pi = \Pi(x^0) \times \Pi(y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{E}^n + m : x \in \Pi(x^0), y \in \Pi(y^0)\}$
Система определяет в Π $y_1, \ldots ,y_n$ как неявные функции переменных $x_1, \ldots x_m$, если $\forall x \in \Pi(x^0)$ ставится в соответствие такое $y \in \Pi(x^0)$, что $f_i(x,y) = 0,\ i \in \overline{1,n}$

Теорема 2. *Пусть*

1. $f_i(x^0,y^0) = 0,\ i \in \overline{1,n}$
2. *Функции* $f_i, i \in \overline{1,n}$ *обладают в некоторой окрестности* $U(x^0,y^0)$ *непрерывностью частных проихводных по переменным* $x_j, j \in \overline{1,m}$ *и* $y_i, i \in \overline{1,n}$

3. $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ & \dots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} (x^0,y^0) \neq 0$

Тогда $\exists \Pi = \Pi(x^0) \times |pi(y^0) \in U$, *в пределах которого система определяет переменные* $y_1, \dots ,y_n$ *как неявно заданные функции переменных* $x_1, \dots ,x_m$ *и эти функции* $y_i = f_i(x)$ *обладают непрерывными частными производными в* $\Pi(x^0)$ *и* $y_i^0 = f'^i(x^0), \overline{1,n}$

2. Локальные экстремумы функций многих переменных

2.1. Определение и необходимые условия существования экстремумов

$\omega = f(x),\ x \in \mathbb{E}^m,\ x = (x_1, x_2, \dots, x_m), x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$

Определение 1. Точка x^0 называется точкой локального минимума [максимума] функции $\omega = f(x)$, если $\exists B_\delta(x^0) : \forall x \in B_\delta(x^0)$ выполнено $f(x^0) < f(x)\ \ [f(x^0) > f(x)]$

Теорема 3 (Необходимое условие существования локального экстремума)**.** *Если функция* $\omega = f(x)$ *дифференцируема в точке* x^0 *и имеет в этой точке локальный экстремум, и все ее частные производные в этой точке =0 т.е.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) = 0$$

Доказательство. Фиксируем $x_2^0, \dots, x_m^0;\ f(x_1,x_2^0, \dots, x_m^0) = f(x_1);\ f'(x_1^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$. f диф. в точке x_1^0 и имеет в ней локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма $f'(x_1^0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$. Равенство 0 остальных ч.п. доказывает аналогично. □

Предложение. *3 - необходимое, но не достаточное условие существования локального экстремума. например:*
$\omega = xy;\ (0,0) : \frac{\partial \omega}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \omega}{y}(0,0) = 0$, *но* $\nexists B_\delta(0,0) : \forall (x,y) \in B_\delta \to \omega(x,y) > \omega(0,0) = 0$ *или* $\omega(x,y) < \omega(0,0) = 0$. *Точка* $x^0 : \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) = 0$ *- стационарная точка*

Теорема (1'). *Если* $\omega = f(x)$ *дифференцируема в точке* x^0 *и имеет в этой точке лок. экстремум, то дифференциал* $df(x^0) \equiv 0$ *относ дифф. независ. перем.* $dx_1, \dots dx_m$

Доказательство. $df(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0)dx_m;$ из т.3 $\Rightarrow df(x^0) = 0$ □

2.2. Достаточное условие существования локального экстремума

$\omega = f(x),\ x^0 : \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_m^0) = 0$; f -дважды непрерывно дифференцируема в точке x^0 т.е. $d^2 f(x^0) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} dx_i dx_j;\ a_{ij} = a_{ji};$

Это квадратичная форма относительно $dx_i, i = \overline{1,m};\ k = k(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j;\ a_{ij} = a_{ji}$

1. k(x) - положительно определенная кв. форма: $\forall x \neq 0 \to k(x) > 0$
2. k(x) - отрицательно определенная кв. форма: $\forall x \neq 0 \to k(x) < 0$
3. k(x) - положительно полуопредел. кв. форма: $\forall x \to k(x) \geq 0$ & $\exists x \neq 0 : k(x) = 0$
4. k(x) - отрицательно полуопредел. кв. форма: $\forall x \to k(x) \leq 0$ & $\exists x \neq 0 : k(x) = 0$
5. k(x) - неопределенная кв. форма: $\exists x', x'' : k(x') > 0$ & $k(x'') < 0$

Теорема 4. *Пусть $\omega = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x^0.*

1. *Если $d^2 f(x^0)$ положительно определенная кв. форма, то т x^0 - точка лок. min*
2. *Если $d^2 f(x^0)$ отрицательно определенная кв. форма, то т x^0 - точка лок. max*
3. *Если $d^2 f(x^0)$ неопределенная кв. форма, то т x^0 не является точкой лок. экстремума функции*

Доказательство. 1. $f(x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(\rho^2), \rho \to 0;$ $df(x^0) = 0$ по т. 2.1.
$dx_1 = x_1 - x_1^0 \ \ldots dx_m = x_m - x_m^0;$ $\rho = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_m - x_m^0)^2}$
$o(\rho^2) \overset{\rho \to 0}{=} \alpha(\rho)\rho^2$, $\alpha(\rho) \xrightarrow{rho \to 0} 0$,
Обозначим $h_i = \frac{x_i - x_i^0}{\rho}; i = \overline{1,m};$ $|h_i| \leq 1;$ $h_i^2 + \ldots h_m^2 = 1;$ $h = (h1, \ldots, h_m)$. Тогда:

$$f(x) - f(x^0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j + \alpha(\rho) \right]$$

Функция $k(h) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j$ - непрерывна на компакте $S = \{h : h_1^2 + \ldots h_m^2 = 1\}$
Тогда по 2 теореме Вейерштрасса:
$\exists h' \in S : h' \neq 0, k(h') = \mu > 0, \exists \rho' > 0 : \forall \rho < \rho' \to |\alpha(\rho)| < \frac{\mu}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \rho < \rho' \to f(x) - f(x^0) > 0. \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 < \rho^2$

2. Аналогично 1 пункту
3. Как и в первом пункте $f(x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(\rho^2), \rho \to 0;$ $df(x^0) = 0$ по т. 2.1. $dx_1 = x_1 - x_1^0 \ \ldots dx_m = x_m - x_m^0;$ $\rho = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_m - x_m^0)^2}$
$o(\rho^2) \overset{\rho \to 0}{=} \alpha(\rho)\rho^2$, $\alpha(\rho) \xrightarrow{\rho \to 0} 0$,
$h_i = \frac{x_i - x_i^0}{\rho}; i = \overline{1,m};$ $|h_i| \leq 1;$ $h_i^2 + \ldots h_m^2 = 1;$ Тогда $h_i' = \frac{x_i' - x^0}{\rho},$ $h_i'' = \frac{x_i'' - x_0}{\rho}; i = \overline{1,m};$
$\exists h' = (h_1', \ldots, h_m'), h'' = (h_1'', \ldots, h_m'') : k(h') > 0, k(h'') < 0$
$f(x') - f(x^0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{i,j} h_i' h_j' + \alpha(\rho) \right] \Rightarrow \exists \rho' : \forall \rho < \rho' \ f(x') - f(x^0) > 0$
$f(x'') - f(x^0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{i,j} h_i'' h_j'' + \alpha(\rho) \right] \Rightarrow \exists \rho'' : \forall \rho < \rho'' \ f(x'') - f(x^0) < 0$

□

Предложение. *1. Если x^0 - стационарная точка, $\omega = f(x)$ и $d^2f(x^0)$ - положительно [отрицательно] полуопределенная кв. форма, то о существовании локального экстремума нельзя ничего сказать.* $\omega = f_1(x,y) = (x-y)^4$, $\omega = f_2(x,y) = x^4 + y^4$; $(x^0,y^0) = (0,0)$ *- стационарная точка f_1 и f_2. Тогда:*
$df_1 = 4(x-y)^3(dx-dy)$; $d^2f_1 = 12(x-y)^2(dx-dy)^2$; $d^2f_1(x,x) = 0$ *- полуопределенная кв. форма.*
$df_2 = 4x^3dx + 4y^3dy$; $d^2f_2 = 12x^2dx^2 + 12y^2dy^2 > 0$ *везде кроме (0,0) - точки локального минимума функции f_2;* $f_2(0,0) = 0$

2. *Условие $d^2f(x^0) \geq 0$ $[d^2f(x^0) \leq 0]$ - необходимое условие локального экстремума.*

Примеры

(a) $\omega = x^4 + y^4 - 2x^2$; $d\omega = (4x^3 - 4x)dx + 4y^3dy$; $d^2\omega = (12x^2-4)dx^2 + 12y^2dy^2$
$M_1(0,0), M_2(1,0), M_3(-1,0)$
$d^2\omega(M_1) = -4dx^2 < 0$; $\forall dx \neq 0 \Rightarrow M_1-$ *локальный max*
$d^2\omega(M_2) = 8dx^2 > 0$; $\forall dx \neq 0 \Rightarrow M_2-$ *локальный min*
$d^2\omega(M_3) = 8dx^2 > 0$; $\forall dx \neq 0 \Rightarrow M_3-$ *локальный min*

(b) $\omega = \lambda x_1^2 + x_2^2 + \dots + 2x_2 + \dots + 2x_m, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$
$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 2\lambda x_1, \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 2x_2 + 2, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial x_m} = 2x_m + 2;$
Стационарная точка M(0,-1,..., -1)
$d^2\omega = 2\lambda dx_1^2 + 2dx_2^2 + \dots 2dx_m^2$; *Тогда есть два случая:*

i. $\lambda > 0 \;\Rightarrow\; d^2\omega^{(M)} > 0 \;\; \forall (dx_1,\dots,dx_m) \neq (0,\dots,0)$ *M - точка лок. min*

ii. $\lambda < 0$ $(dx_1,\dots,dx_m) = (1,0,\dots,0)$ $d^2\omega < 0$
$(dx_1,\dots,dx_m) = (0,1,0,\dots,0)$ $d^2\omega > 0$ *локальный экстремум*

3. Понятие условного экстремума

Пример $\omega = x^2 + y^2$, при условии $x + y - 1 = 0$.
$y = 1 - x, \omega = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$
$\omega' = 2(2x+1) = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}$ $\omega'' = x > 0 \rightarrow x_0$ - локальный минимум $\omega = \omega(x)$
$M_0(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ - т. условного минимума $\omega = x^2 + y^2$ при $x + y - 1 = 0; \omega = \frac{1}{2}$. Абсолютный экстремум $\omega = 0$ в (0;0)

3.1. Общая постановка задачи

$\omega = f(x,y),\ x \in \mathbb{E}^m,\ y \in \mathbb{E}^n;\ x = (x_1,x_2,\dots,x_m),\ y = (y_1,\dots,y_n);$

$$\Phi_1(x,y) = 0,\ \Phi_2(x,y) = 0,\ \dots \Phi_n(x,y) = 0; \text{ - условия связи} \qquad (2)$$

Условия связи 2 в пространстве $\mathbb{E}^{m+n}$ определяют множество $\mathbb{X}$:

$$\mathbb{X} = \{(x,y) : \Phi_1(x,y) = 0,\ \Phi_2(x,y) = 0,\ \dots \Phi_n(x,y) = 0\};\ dim\mathbb{X} = m$$

Определение 2 (Точка условного минимума)**.** точка $M_0(x^0, y^0) : \Phi_i(x^0, y^0) = 0, \forall i = \overline{1,n}$, называется точкой лок. min [max] функции $\omega = f(x,y)$, при условиях связи 2, если

$$\exists B_\varepsilon(M_0) : \ \forall (x,y) \in B_\varepsilon(M_0) \cap \mathbb{X} \Rightarrow f(x^0, y^0) < f(x,y) \ [f(x^0, y^0) > f(x,y)]$$

3.2. Необходимые условия существования лок. экстремума

$M_0(x^0, y^0) : \Phi_i(x^0, y^0) = 0, i = \overline{1,n}$; $f, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ - непр дифф в некоторой окр $U(M_0)$

$$\frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} = \Delta_{\Phi,y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} (M_0) \neq 0$$

$\exists \Pi = \Pi(x^0) \times \Pi(y^0) \subset U(M_0) : y_1 = \varphi_1(x1, \ldots, x_m) \ldots y_n = \varphi_n(x1, \ldots, x_m)$
$\omega) = f(x) = f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = f(x, \varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x)$
Если x^0- точка лок. экстремума f, $\Rightarrow df(x^0) \equiv 0 \ \forall dx_1, \ldots, dx_m \Rightarrow$
$\Rightarrow df(x^0, y^0) \equiv 0 = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) dx_k + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(M_0) dy_j$
где $dy_j(M_0) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0) dx_i, j = \overline{1,n}$
$A_1 dx_1 + \cdots + A_m dx_m \equiv 0 \ \forall dx_1, \ldots, dx_m \Rightarrow$
Необх. условие существования лок. условного экстремума: $A_1 = \cdots = A_m = 0$.
Замечания:

1. Теорема о функциях, заданных неявно системой уравнений, говорит только о существовании функций $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, но не дает метода их нахождения
2. В приведенных рассуждениях $x_1, \ldots x_m$ - независимые переменные, а $y_1, \ldots y_n$ - зависимые

Если $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ - неизвестны, то $dy_j(M_0)$ можно найти как:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_m}(M_0) dx_m + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(M_0) dy_1 + \ldots \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n}(M_0) dy_n = 0 \tag{3}$$

$$\vdots \tag{4}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_m}(M_0) dx_m}_{D + \mathbb{J} dy = 0} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(M_0) dy_1 + \ldots \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n}(M_0) dy_n = 0 \tag{5}$$

3.3. Метод Лагранжа

Выполненные условия связи 2

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)dx_m + \frac{\partial f}{\partial y_1}(M_0)dy_1 + \dots \frac{\partial f}{\partial y_n}(M_0)dy_n = 0 \\ D + \mathbb{J}dy = 0 \mid \times \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{cases} \Bigg| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k}(M_0) \right] dx_k +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial y_j}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_j}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_j}(M_0) \right] dy_j = 0$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ выбираются таким образом, чтобы

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1}(M_0) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_n}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n}(M_0) \end{cases} \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}(M_0) = 0,\ k = \overline{1,m} \right] \tag{7}$$

$\exists!\ \lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0);$

Подставляем λ_0 : $\sum\limits_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) + \lambda_1^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k}(M_0) + \dots + \lambda_n^0 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k}(M_0) \right] dx_k = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) + \lambda_1^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(M_0) + \dots + \lambda_n^0 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(M_0) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0) + \lambda_1^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_m}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_m}(M_0) \end{cases} \tag{8}$$

$$\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial y_j}(M_0) = 0,\ j = \overline{1,n} \right] \tag{9}$$

В итоге из этого всего имеем 2n+m уравнений для нахождения $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Теорема 5 (необходимое условие существования локального экстремума)**.** *Пусть функции $f, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ непрерывно дифф. в $U(M_0)$, $\Delta_{\Phi,y} \neq 0$, и $M_0(x_0, y_0)$ - т. локального условного экстремума функции $\omega = f(x,y)$ при условиях связи $\Phi_1(x,y) = 0, \dots, \Phi_n(x,y) = 0$ Тогда найдутся числа $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0) = \lambda^0$ такие, что в точке M_0 выполнены 8 и 6 $\Lambda(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda_1\Phi_1(x,y) + \dots + \lambda_n\Phi_n(x,y)$ - функция Лагранжа*

Следствие:

Пусть выволнены условия теоремы 5. Если т M_0 является точкой локального условного экстремума функции $\omega = f(x,y)$ при условии связи $\Phi_1(x,y) = 0,\ \dots \Phi_n(x,y) = 0$; то в ней выполнены равенства 9 и 7, т.е. M_0 - стационарная точка функции Лагранжа.

3.4. Достаточные условия существования локального экстремума

$\Lambda(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda_1\Phi(x,y) + \dots + \lambda_n\Phi_n(x,y);$
$\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_1^0);\ \ x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0);\ \ y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial\Lambda}{x_k} = 0 & k = \overline{1,m} \\ \frac{\partial\Lambda}{y_j} = 0 & j = \overline{1,n} \\ Q\Phi_i = 0; & i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{10}$$

$f, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ дважды непрерывно дифференцируемы в $U(M_0)$, $\Delta_{\Phi,y}(M_0) \neq 0$; $M_0(x^0, y^0) \in X$, $M(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) \in X$
$\Delta f(M_0, (\Delta x, \Delta y)) = f(M) - f(M_0) = \Lambda(M, \lambda^0) - \Lambda(M_0, \lambda^0) = \Delta\Lambda(M_0, \lambda^0, \Delta x, \Delta y)$

$$\Delta\Lambda\left(M_0,(\Delta x, \Delta y)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k,j=1}^{m} \frac{\partial^2\Lambda(M_0)}{\partial x_k \partial x_j}\Delta x_k \Delta x_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2\Lambda(M_0)}{\partial x_k \partial y_j}\Delta x_k \Delta y_j + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2\Lambda(M_0)}{\partial y_k \partial y_j}\Delta y_k \Delta y_j\right] +$$
$$+ \sum_{k,j=1}^{m} \alpha_{kj}^1 \Delta x_k \Delta x_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^2 \Delta x_k \Delta y_j + \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_{kj}^3 \Delta y_k \Delta y_j =$$
$$= \Bigg/ \begin{array}{ll} \alpha_{kj}^i \to 0 & \text{при } \Delta x \to 0;\ \ \alpha_{kj}^2, \alpha_{kj}^3 \text{ зависят от } \Delta x, \Delta y \\ \Delta y_j \to 0 & \text{при } \Delta x \to 0;\ j = \overline{1,n} \\ \Delta x_j = dx_j;\ \Delta y_j = \alpha y_j + \gamma_j, \gamma \to 0 & \text{при } \Delta x \to 0;\ j = \overline{1,n} \end{array} \Bigg/ =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k,j=1}^{m} \frac{\partial^2\Lambda}{\partial x_k \partial x_j} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2\Lambda}{\partial x_k \partial y_j} dx_k dy_j + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2\Lambda}{\partial y_k \partial y_j} dy_k dy_j\right] +$$
$$+ \sum_{k,j=1}^{m} \widetilde{\alpha_{kj}^1} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \widetilde{\alpha_{kj}^2} dx_k dy_j + \sum_{k,j=1}^{n} \widetilde{\alpha_{kj}^3} dy_k dy_j$$

$dy_j(M_0) = \sum\limits_{k=1}^{m} C_k dx_k;\ d^2\widetilde{\Lambda}(M_0, (\Delta x, \Delta y)) = \sum\limits_{k,j=1}^{m} A_{kj} dx_k dx_j;\ A_{kj} = A_{jk}$
$\Delta = \Lambda(M_0,(\Delta x, \Delta y)) = d^2\hat{\Lambda}(M_0) + \beta(\Delta x),\ \beta(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$
$d^2\hat{\Lambda}(M_0) = d^2\Lambda(M_0)$ т.к. первые производные функции Лагранжа в стационарной точке M_0; $= 0\ \Rightarrow d^2y$ равны 0

Теорема 6. *Пусть f и $\Phi_j, j = \overline{1,n}$ дважды дифф функции в $U(M_0)$ (M_0 - стационарная точка функции Лагранжа) и $\Delta_{\Phi,y}(M_0) \neq 0$ тогда*

1. *Если $d^2\hat{\Lambda}(M_0)$ положительно определенная квадратичная форма, то M_0 - точка условного минимума функции f при условии связи*
2. *Если $d^2\hat{\Lambda}(M_0)$ отрицательно определенная квадратичная форма, то M_0 - точка условного максимума функции f при условии связи*
3. *Есои $d^2\hat{\Lambda}(M_0)$ неопределенная квадратичная форма, то экстремума нет*

Замечание: если $d^2\hat{\Lambda}(M_0)$ полуопределенная кв. форма, то нужно проводить дополнительные исследования

4. Кратные интегралы

4.1. Определения и свойства

Определение 3. Совокупность измеримых открытых множеств $T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$ называется разбиением множества Ω, если:

1. $\Omega_k \subset \Omega,\ k = \overline{1,n}$
2. $\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset$, если $k \neq j$
3. $\cup_{k=1}^n \overline{\Omega}_k = \overline{\Omega}$

Определение 4. $\Delta(\Omega) = \sup\limits_{x,y\in\Omega} \rho(x,y)$ - диаметр множества. (Ω - огранич. мн-во)

Определение 5. Число $\Delta_T = \max\limits_{1\leq k\leq n} \Delta(\Omega_k)$ - называется мелкостью разбиения $T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$

Определение 6. Разбиение $T' = \{\Omega'_j\}$ - называется измельчением разбиения $T = \{\Omega_k\}$ если $\forall \Omega'_j \subset T\ \ \exists \Omega_k \subset T : \Omega'_j \subset \Omega_k$

Свойства измельчения:

1. Если T' измельчение T, а T'' - измельчение T' то T' измельчение T''
2. Для двух разбиений $T' = \{\Omega'_k\}$ и $T'' = \{\Omega''_j\}$ множества $\Omega\ \ \exists$ разбиение T множества Ω , что T будет измельчением разбиений T' и T''

Замечание: Если $G = \cup_{j=1}^p Q_j$ клеточное множество и $\Omega \subset G$ то в качестве разбиения множества Ω можно взять $T = \{\Omega_k\}$, где $\Omega_k = \Omega \cap int(Q_k),\ k = \overline{1,p}$

4.2. Интегральные суммы. Кратный интеграл Римана. Необходимое усл. существования кр. интеграла Римана

$T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n, \omega = f(x), x \in \mathbb{E}$, опред. на $\overline{\Omega}$; $\ \xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} : \xi \in \overline{\Omega_k}$

Определение 7. $I\{T,\xi\} = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k) m(\Omega_k)-$ интегральная сумма функции f

Определение 8. $m(\Omega_k)$ - мера множества Ω_k

Определение 9. Число I называется пределом интегральных сумм $I\{T,\xi\}$, при мелкости разбиения стремящейся к 0, если:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall T : \Delta_T < \delta \ \&\ \forall\varepsilon \Rightarrow |I\{T,\xi\} - T| < \varepsilon$$

Определение 10 (Кратный интеграл Римана)**.** Число I, являющееся пределом интегральных сумм при $\Delta_t \to 0$ называется кратным интегралом Римана функции f по множеству Ω [$\overline{\Omega}$]. А функция f называется интегрируемой по риману по множеству Ω [$\overline{\Omega}$].

Обозначение: $\int\limits_{\Omega} f(x) d\omega = \int \dots \int\limits_{\Omega} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \int \dots \int\limits_{\Omega} f dx_1 \dots dx_m$

Теорема 7. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{E}^m f$ - измеримая область, а $\omega = f(x)$ опред. и инт. на $\overline{\Omega}$ тогда эта функция ограничена на $\overline{\Omega}$*

Пример: $\omega = f(x) \equiv c$; $\forall x \in \overline{\Omega}$, Ω - измеримое множество.
$\forall T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n \ \forall \xi \ \ I = \{T, \xi\} = \sum\limits_{k=1}^n C \cdot m(\Omega_k) = C \cdot m(\Omega)$

Теорема 8. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ *- измеримая область,* $\omega = f(x)$ *опр. и огр на* $\overline{\Omega}$. $f(x) \equiv 0$ *на* $\overline{\Omega} \backslash \Gamma$, $m(\Gamma) = 0$, *тогда* f *интегрируема на* Ω *и* $\int\limits_{\Omega} f d\omega = 0$

Доказательство. $\exists c > 0 : \forall x \in \overline{\Omega} \to |f(x)| \leq c$
$\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon = \cup_{j=1}^p Q_j : \Gamma \subset G_\varepsilon$ и $0 \leq m\Gamma \leq m(G_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{c}$
$T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n, \widetilde{T} = T' \cup T'' = \{\Omega_k'\} \cup \{\Omega_j''\}$; где $\Omega_k' = \Omega_k \backslash \overline{G_\varepsilon}$ и $\Omega_j'' = \Omega_j \cap (int(Q_i)), i = \overline{1,p}, j = \overline{1,n}$. И т.к. на Ω_k' функция $f(x) \equiv 0$, а Ω_j'' содержит точки из Γ получим:
$\forall \xi \to |I\{\widetilde{T}, \xi\}| = |\sum\limits_j f(\xi_i) m(\Omega_j'')| \leq c \cdot m(G_\varepsilon) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ □

4.3. Суммы Дарбу. критерий интегрируемости. Интеграл непрерывных функций

$\Omega \subset \mathbb{E}^m$ измеримая область. $\omega = f(x)$ определена и ограниченна на $\overline{\Omega}$. $T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$ - разбиение Ω. $m_k = \inf\limits_{x \in \overline{\Omega}_k} f(x), M_k = \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}_k} f(x)$

$S_*(T) = \sum\limits_{k=1}^n m_k m(\Omega_k)$; $S^*(T) = \sum\limits_{k=1}^n M_k m(\Omega_k)$; - **нижняя и верхняя суммы Дарбу**

Теорема 9 (Критерий интегрируемости). *Пусть* $\omega \subset \mathbb{E}$ *- измеримая область, а функция* $\omega = f(x)$ *опр. и огр. на* $\overline{\Omega}$. *Для того, чтобы* f *была интегрируема на* Ω *необходимо и достаточно чтобы* $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : |S^*(T) - S_*(T)| < S|}$

Теорема 10 (Интегрируемость функции, непрерывной на замкнутом измеримом мн-ве). *Функция* $\omega = f(x)$ *непр. на замыкании измеримой области* Ω *интегрируема на ней.*

5. Свойства кратных интегралов

Теорема 11. *Если* $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ *- измеримая область, то* $\int\limits_{\Omega} = m(\Omega)$

$f(x) \equiv 1$ на $\overline{\Omega}.\forall x \in \overline{\Omega}$, Ω - измеримое множество.

Теорема 12 (интегрируемость подмнож.). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ *и* $\Omega' \subset \Omega$ *измеримые области и функция* $\omega = f(x)$ *интегрируема на* Ω *, тогда* f *интегрируема на множестве* Ω'

Доказательство. $\Omega' \neq \Omega$; f интегрируема на Ω. $T = \{\Omega_k\}, T' = \{\Omega_k'\}$, где $\Omega_k' = \Omega_k \cap \Omega'$ тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : S^*(T) - S_*(T) < \varepsilon$;
$M_k' = \sup\limits_{\overline{\Omega}_k'} f \leq \sup\limits_{\overline{\Omega}_k} f = M_k; m_k' = \inf\limits_{\overline{\Omega}_k'} f \geq \inf\limits_{\overline{\Omega}_k} f = m_k \Rightarrow$

$$S^*(T') - S_*(T') \leq S^*(T) - S_*(T) < \varepsilon \tag{11}$$

□

Теорема 13 (аддитивность интеграла). *Пусть* Ω *и* Ω' *измеримые области в* $\mathbb{E}^m$, $\Omega' \subset \Omega$ *и* $\Omega'' = \Omega \backslash \overline{\Omega}'$. *Если функция* $\omega = f(x)$ *интегрируема на* Ω, *то* f *интегрируема на* Ω' *и* Ω'' *и* $\int\limits_{\Omega} f d\omega = \int \Omega' f d\omega + \int \Omega'' f d\omega$

Доказательство. Из теоремы 12 $\Rightarrow$ f интегрируема на Ω' и Ω'' и существует интеграл в 11. T' - разбиение Ω'. T'' - разбиение Ω''. Тогда $T = T' \cup T''$ -разбиение множества Ω.
$\Delta_t = \max\{\Delta_{T'}, \Delta_{T''}\}$. $\forall \xi', \xi'' : \xi = \xi' \cup \xi'' \to I\{T, \xi\} = I\{T', \xi'\} + I\{T'', \xi''\}$ $\Delta_T \to 0 \Rightarrow 11$ □

Теорема 14 (линейность интеграла)**.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ измеримая область. $\omega = f(x)$ и $\omega = g(x)$ интегрируемые на Ω функции. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\omega = \alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на Ω:*
$\int\limits_\Omega \big[\alpha f + \beta g\big] d\omega = \alpha \int\limits_\Omega f d\omega + \beta \int\limits_\Omega g d\omega$
Кроме того функция $\omega = f \cdot g$ так же интегрируема на Ω

Теорема 15 (Инт. от положительной функции)**.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ измеримая область. Функция $\omega = f(x)$ определена на $\overline{\Omega}$, $f(x) \geq 0 \forall x \in \Omega$ и f интегр на Ω. Тогда: $\int\limits_\Omega f d\omega \geq 0$*

Теорема 16. *Если f и g интегрируема на измеримой области $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ и $\forall x \in \overline{\Omega} \to f(x) \geq g(x)$, то $\int\limits_\Omega f d\omega \geq \int\limits_\Omega g d\omega$*

Теорема 17. *Если f интегрируемость на измеримой области $\Omega \subset \mathbb{E}$, то функция $|f|$ интегрируема на Ω и выполнено: $|\int\limits_\Omega f d\omega| \leq \int\limits_\Omega |f| d\omega \leq cm(\Omega)$, где $c : \forall x \in \overline{\Omega} \to |f(x)| \leq c$*

Замечание: В обратную сторону не верно. Контрпример - функция Дирихле.

Теорема 18. *Если $\Omega \subset \mathbb{E}$ и $\Omega' \subset \mathbb{E} : \Omega' \subset \Omega, \omega = f(x)$ интегрируема на Ω и $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \Omega$, тогда $\int\limits_{\Omega'} f d\omega \leq \int\limits_\Omega f d\omega$*

Теорема 19. *Пусть функции $\omega = f(x)$ и $\omega = g(x)$ интегрируемы на измеримой области $\Omega \subset \mathbb{E}$. g не меняет знак на $\overline{\Omega}$, $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in \overline{\Omega}$, тогда $\exists \mu : m \leq \mu \leq M : \int\limits_\Omega f g d\omega = \mu \int\limits_\Omega g d\omega$. Если же f непрерывна на $\overline{\Omega}$, то $\exists x^0 \in \overline{\Omega} : \int\limits_\Omega f g d\omega = f(x^0) \int\limits_\Omega g d\omega$*

Теорема 20. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ - измеримая область $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \dots \subset \Omega$*

Доказательство. $\forall x \in \overline{\Omega} \to |f(x)| \leq C, \widetilde{\Omega}_k = \Omega \backslash \overline{\Omega}_k$ - измеримое множество и $m(\widetilde{\Omega}_k) = m(\Omega) \backslash m(\overline{\Omega}) \backslash m(\overline{\Omega}) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 : m(\widetilde{\Omega}_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{4c}$
Ω_{k_0}, f интегрируема на $\Omega_{k_0} \Rightarrow \exists T^{k_0}$ область $\Omega_{k_0} : S^*(T^{k_0}) - S_*(T^{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists T = T^{k_0} \cup \widetilde{T}^{k_0}$, где $\widetilde{T}^{k_0}$ разбиение множества $\Omega \backslash \overline{\Omega}_{k_0} = \widetilde{\Omega}_{k_0}$
$S^*(T) - S_*(T) = S^*(T^{k_0}) - S^*(T^{k_0}) + S^*(\widetilde{\Omega}^{k_0}) - S_*(\widetilde{\Omega}^{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + 2c\frac{\varepsilon}{4c} = \varepsilon$
$|\int\limits_\Omega f d\omega - \int\limits_{\Omega_k} f d\omega| = |\int\limits_{\widetilde{\Omega}} f d\omega| < cm(\widetilde{\Omega}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ □

6. Сведение кратного интеграла к повторному

6.1. Двойные инитегралы

$\mathbb{E}^2, Oxy, \Pi = \{(x,y) : a < x < b, c < y < d\}$

Теорема 21. *Пусть функция* $\omega = f(x,y)$ *определена на* $\overline{\Pi}$ *и интегрируема на* Π *и выполнено:* $\forall x \in [a,b]\ \exists\ \mathbb{J}(x) = \int\limits_c^d F(x,y)dy$ *тогда функция* $\mathbb{J}(x)$ *интегрируема на* $[a,b]$ *и существует повторный интеграл:*

$$\int\limits_a^b \mathbb{J}(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \text{ и } \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \iint\limits_{\Pi} d(x,y)dxdy$$

Доказательство. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b,\ c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$
$\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), i = \overline{1,k}, j = \overline{1,n}$
$\{\Pi_{ij}\}$ - разбиение Π; $\Delta_x^i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1,k}; \Delta_y^j = y_j - y_{j-1}, j = \overline{1,n}$
$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ в $\overline{\Pi}_{ij}$ выполнено $(inf)\ m_{ij} \le f(\xi_i, y) \le M_{ij}\ (sup)$
$\sum\limits_{j=1}^n m_{ij}\Delta_y^j \le \mathbb{J}(\xi_i) \le \sum\limits_{j=1}^n M_{ij}\Delta_y^j \Rightarrow$
$\sum\limits_{i=1}^k \sum\limits_{j=1}^n m_{ij}\Delta_y^j\Delta_x^i \le \sum\limits_{i=1}^k \mathbb{J}(\xi_i)\Delta_x^i \le \sum\limits_{i=1}^k \sum\limits_{j=1}^n M_{ij}\Delta_y^j\Delta_x^i;\ \Delta_T \to 0$ □

Определение 11. Область $\Omega \subset \mathbb{E}^2$ называется **элементарной относительно Oy**, если ее граница состоит из графиков двух функций: $y = \phi(x);\ y = \psi(x)$ и, быть может, отрезков прямых $x = a;\ x = b$, при этом $\forall x \in [a,b] \to \psi(x) \le \phi(x)$.

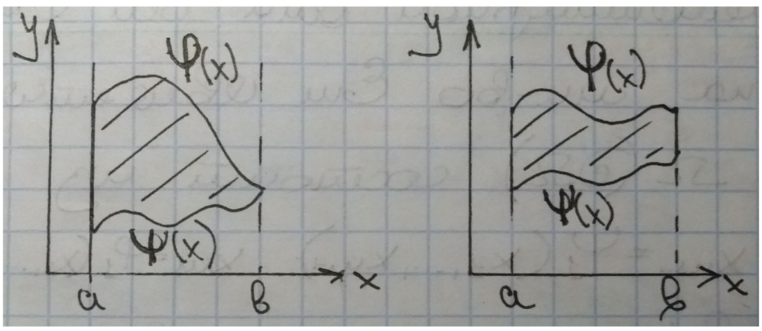
Теорема 22. *Пусть* $\omega = f(x,y)$ *непрерывна на* $\overline{\Omega}$ *и область* Ω *элементарна относительно оси* Oy*, ее граница состоит из двух графиков непрерывных функций* $y = \phi(x);\ y = \psi(x)$ *и, быть может, отрезков прямых* $x = a;\ x = b$*, причем* $\forall x \in [a,b] \to \psi(x) \le \phi(x)$*. Тогда существует повторный интеграл* $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)dy = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$

Доказательство. **Замечание:** из условия теоремы следует, что:

1. Ω - измеримая область
2. f - интегрируема на Ω
3. При фикс x функция f неперерывна по переменной y. И f интегрируема на $[\phi(x), \psi(x)]$

Пусть Π такой прямоугольник, что $\overline{\Omega} \subseteq \overline{\Pi}$ Тогда: $f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,(x,y) \in \overline{\Omega} \\ 0 & ,(x,y) \in \overline{\Pi} \backslash \overline{\Omega} \end{cases}$

□



=

6.2. m-кратные интегралы

$\Omega \subset \mathbb{E}^m$, $Ox_1 \dots x_m$; $\varepsilon_m\{(x_1, \dots, x_m) : x_m = 0\}$ где Ω_m - проекция области Ω на мн-во ε_m

Определение 12. Область $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ называется **элементарной относительно** Ox_m, если ее проекция на Ω_m на множество ε_m является областью, а граница Ω (т.е.$\delta\Omega$) состоит из графиков двух функций: $x_m = \phi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$; $x_m = \psi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$ и, быть может, боковой поверхности цилиндра, основанием которого является $\delta\Omega_m$ причем $\forall(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \overline{\Omega}_m \to \psi(x_1, \dots, x_{m-1}) \leq \phi(x_1, \dots, x_{m-1})$.

Теорема 23. *Пусть $\omega = f(x)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$ и область Ω элементарна относительно оси Ox_m, ее граница состоит из двух графиков непрерывных функций $y = \phi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$; $y = \psi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$ и, быть может, боковой поверхности цилиндра оси Ox_m, причем $\forall(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \overline{\Omega}_m \to \psi_1(x_1, \dots, x_{m-1}) \leq \phi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$. Тогда существует повторный интеграл* $\underbrace{\int \cdots \int}_{\Omega_m} dx_1 \dots dx_{m-1} \int\limits_{\psi_1(x_1,\dots,x_{m-1}}^{\phi_1(x_1,\dots,x_{m-1})} f(x)dx_m = \underbrace{\int \cdots \int}_{\Omega_m} f(x_1, \dots, x_m)dx_1 \dots dx_m$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (x,y) \in \Omega; (u,v) \in \Omega^*; \ \mathbb{J} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}; \ \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} f(x,y)|\mathbb{J}(u,v)|dudv$$