Математический анализ. Семинар 5

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

3 октября 2017

1 Семинар 5

1.1 §8№148(3)

$$I = \iiint_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dxdydz$$

$$G : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$x = arcos\phi \cos\psi$
$y = br \sin\phi \cos\psi$
$z = cr \sin\psi$

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\phi\cos\psi & -ar\sin\phi\cos\psi & -ar\cos\phi\sin\psi \\ b\sin\phi\cos\psi & br\cos\phi\cos\psi & -br\sin\phi\sin\psi \\ c\sin\psi & 0 & cr\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= abc\sin\psi r^2(\sin^2\phi\sin\psi\cos\phi + \cos^2\phi\sin\psi\cos\psi) +$$
$$+ abcr^2\cos\psi(\cos^2\phi\cos^2\psi + \sin^2\phi\cos^2\psi) =$$
$$= abcr^2\sin^2\psi\cos\psi + abcr^2\cos^2\psi\cos\psi = abcr^2 cos\psi$$

Переход к обобщенным сферическим координатам:

$$\int\limits_0^1 dr \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2} abcr^2 cos\psi d\phi = abc2\pi \int_0^1 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-r^2} r^2 \cos\psi d\psi =$$

$$= 2\pi abc2 \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r^2 dr = (!!!!!) = 4\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt =$$

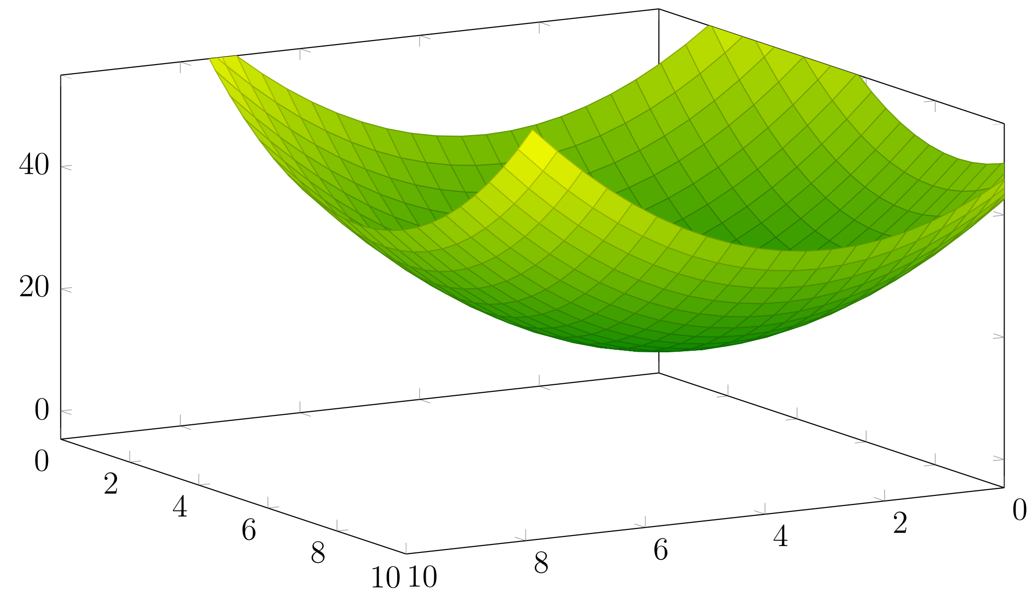
$$= \pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2} dt = \frac{\pi}{2} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{\pi}{8} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t d4t =$$
$$= \frac{1}{4}\pi^2 abc$$

1.2 №133(5)

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z) dz$$

(x,y,z)

$$\int_0^1 dx \int_0^2 dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy$$



1.3 §8 №146(3)

$$I = \iiint_G (x^2+y^2) = dxdydz$$

$$G : \begin{cases} x^2+y^2 = 2z \\ z = 2 \end{cases}$$

Делаем замену. Т.е. режем на маленькие цилиндрики, параллельные oXY

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

$$\int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{2z}} r^2 r dr = \frac{16\pi}{3}$$

1.4 №9.16(5) Геометрические приложения

Обьем считается так: $\mathbb{V}_G = \iiint\limits_G dxdydz$ Вопрос: найти

$$\mathbb{V}_G$$

$$G : (x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz, \quad a > 0 \;\; x, y, z > 0$$

$$\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]; \psi \in [0, \frac{\pi}{2}];$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\cos\psi \\ y = r\sin\phi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

Тогда $r(\psi, \phi) = a\cos\phi\cos\psi\sin\phi\cos\psi\sin\psi$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{r(\psi,\phi)} r^2\cos\phi dr = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi a^3\cos^3\phi\cos^3\psi\sin^3\phi\sin^3\psi\sin^3 d\phi = \dots$$

посчитаем отдельно для ϕ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi\cos^3\phi d\phi = \frac{1}{8}\int_0^{frac\pi 2} \sin^3 2\phi d\phi =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\phi d\phi - \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 6\phi d\phi = -\frac{3}{64} + \frac{1}{192} = -\frac{1}{24}$$

Посчитаем отдельно для ψ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\psi\sin^3\psi d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\psi(\sin^4\psi\cos^3\psi)d\psi = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\psi(*****)d\psi;$$

т.к. $\cos^4\psi = \left(\frac{1+\cos 2\psi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \cos 2\psi + \frac{\cos^2 2\psi}{4}$ и посчитаем интеграл для каждого отдельно

И того:Ответ: $\frac{a^3}{3} : (-\frac{1}{24})(-\frac{1}{96} + \frac{1}{64} + \frac{\pi}{1024})$