Математический анализ. Семинар 6

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

24 октября 2017

1 Семинар 6. Криволинейные интегралы

1.1 Криволинейный интеграл I рода

$r : [a, b] \to \mathbb{R}^3;\ r \in \mathbb{C}^1([a, b]);\ f : \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \to R$

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y, z)ds \equiv \int\limits_{a}^{b} f(x(t), y(t), z(t))|\overline{r}'(t)|dt =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

Частный случай двух переменных. $y = g(x)$. Геометрический смысл $f = 1 \Rightarrow \int\limits_{\Gamma} f(x, y)ds$ - длина кривой Γ

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y)ds \equiv \int\limits_{a}^{b} f(x, g(x))\sqrt{1 + (g'(x))^2}dt$$

1.2 Пример 1

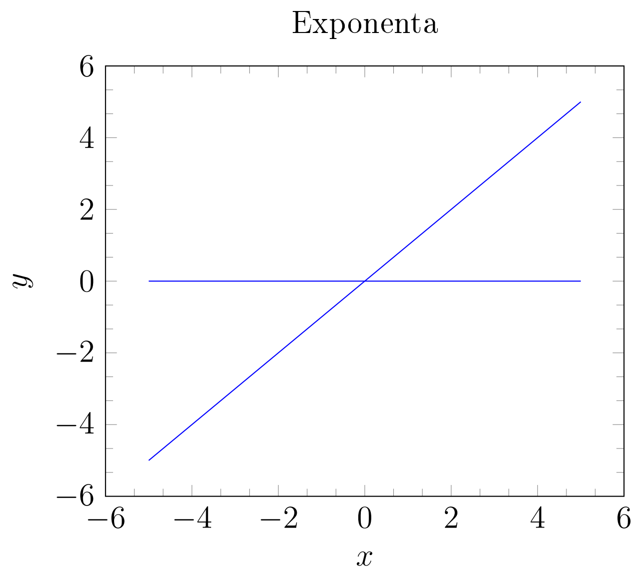
$\int\limits_{\Gamma} xydx$, если $\Gamma : x(t) = \sinh(t), y(t) = \cosh(t), t \in [0; 0.5 \ln 2]$

$$\int\limits_{\Gamma} xydx = \int_0^{0.5 \ln 2} \sinh t \cosh t \sqrt{\cosh^2 t + \sinh^2 t}dt =$$

$$= \int_0^{0.5 \ln 2} 0.5 \sinh 2t \sqrt{\cosh 2t}dt = ...$$

$$=$$

1.3 Пример 2



ТУТ НУЖНА КАРТИНКА ТРЕУГОЛЬНИЧКА!!!!!"!!!"Найти интеграл по картинке $\int\limits_{\Gamma}(x+y)ds$. Разобьем на три куска

$$\int\limits_0^1 (x+x)\sqrt{1+1} + \int\limits_0^1 (1+y)\sqrt{0+1}dy + \int\limits_1^0 (x+0)\sqrt{1+0}dx = \sqrt(2) - 2$$

1.4 Пример 3

А ТУТ ЕЩЕ КЛАССНЫЙ РИСУНОЙ ШАРИКА!!! $\int\limits_{\gamma}(x+y)ds$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2; a > 0 \\ x = y \\ x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; \end{cases}$$

Параметр: $x = y = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t;\ z = a\sin t;\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}a\cos t)\sqrt{a^2\sin^2 t\frac{1}{2} + a^2\sin^2 t\frac{1}{2} + a^2\cos^2 t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}a^2\cos t dt = a^2\sqrt{2}$$

1.5 Пример 4

$$I = \int\limits_{\gamma} x^2 ds \;\; where \;\; \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \\ x + y + z = 0; \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}\int\limits_{\gamma}(x^2 + x^2 + x^2)ds = \int\limits_{\gamma} x^2 ds = \int\limits_{\gamma} y^2 ds = \int\limits_{\gamma} z^2 ds = \frac{1}{3}\int\limits_{\gamma}(x^2 + y^2 + z^2)ds$$

$I = \frac{2}{3}\pi a^3$

1.6 Криволинейные интегралы II рода

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, векторное поле $f = (P, Q, R)$

$$\int\limits_{\Gamma}(\overline{f}, d\overline{r}) = \int(\overline{f}, r'(t))dt$$

Физический смысл - работа вектороного поля вдоль Г. Т.к. $\delta A = (\overline{F}, d\overline{r})$

$$\int Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{a}^{b}[P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + \\ + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)]dt \quad (1)$$

1.7 Пример 5

$$I = \int\limits_{\gamma}((y + x^2)dx - xdy) = \int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy; \qquad \gamma : \begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = \sin t; \end{cases}; \; t \in [0, \pi]$$

$$I = \int\limits_0^\pi ((\sin t + 4\cos^2 t)(-2\sin t) + (-2\cos t)\cos t)dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi (-2\sin^2 t - 8\sin t\cos^2 t - 2\cos^2 t)dt =$$

$$= -2\pi - 8\int\limits_0^\pi \cos^2 t d(-\cos t) = -2\pi + \frac{8}{3}\cos^3 t\,|_0^\pi = -2\pi - \frac{16}{3}$$

1.8 Пример 6

$$I = \int\limits_\gamma (xdx + zdy + xdz) \qquad \gamma : \begin{cases} x = a\cos t; \\ y = a\sin t; \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = bt; \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} (a\cos t(-a\sin t) + btb\cos t + a\cos tb)dt = \int\limits_0^{2\pi} (-a^2\sin t\cos t + b^2 t\cos t + ab\cos t)dt = 0$$

т.к. $\int\limits_0^{2\pi} t\cos tdt = t\sin t|_0^\pi - \int\limits_0^{2\pi} \sin t = 0$ и $\int\limits_0^{2\pi} \cos tdt = 0$ и вот еще $\int\limits_0^{2\pi} \sin t\cos tdt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin 2tdt = 0$ Ответ: 0;

1.9 Формула Грина

Теорема 1. *Область G - ограничена, $G \subset \mathbb{R}^2$, ∂G состоит из конечного числа кусочно гладких кривых $\Gamma = \partial G; P, G \in \mathbb{C}^1(G) \cap \mathbb{C}(G)$. Тогда:*

$$\int\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_G (Q_x - P_y)dxdy \tag{2}$$

1.10 Пример 7

$$I = \int\limits_{\gamma^+} (xydx + (x+3)dy), \gamma \text{ - гр. } G = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1; x < 0; y > 0\}$$

По формуле Грина 2: $I = \iint_G (1-x)dxdy = \Bigg/ \begin{cases} x = a\cos t; \\ y = a\sin t; \\ z = bt; \end{cases} \Bigg/ = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$