Математический анализ. Семинар 7

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

31 октября 2017

1 Семинар 7.

1.1 Криволинейные интегралы vol.2

1.1.1 Пример 1

$\mathbb{J} = \oint \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, где Г простой(без самопересечения) замкнутый контур, проходящий через начало координат.

1. Если Г не охватывает начало координат т.е. (0, 0) не лежит в Г

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \ \ Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Воспользуемся формулой Грина: $\int\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_{G} (Q_x - P_y)dxdy$

$$\mathbb{J} = \iint \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) dxdy = 0$$

2. Контур Г охватывает начало координат. Явно формула Грина не работает, т.к. знаменатель - 0. Обведем (0, 0) ε-кругом в положительном направлении обхода (область остается слева):

$$\underbrace{\int\limits_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}}_{\text{надо посчитать}} + \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \int\limits_{\Gamma\cup\gamma_\varepsilon} = 0 \text{ см. пункт 1}$$

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \Bigg/ \begin{array}{l} x = \varepsilon\cos\varphi \\ y = \varepsilon\sin\varphi \\ \varepsilon = const \end{array} \Bigg/ = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2\cos^2\varphi + \varepsilon^2\sin^2\varphi}{\varepsilon^2} = 2\pi$$

Заметим, что направление интегрирования в полярных координатах обратно направлению положительного обхода по γ получается $\oint_{\gamma^+} = -\oint_{\gamma^-} \Rightarrow \int_\Gamma = 2\pi$

1.1.2 Пример 2

Найти площадь S области, ограниченной кривой $x^3 + y^3 = 3axy$ (Декартов лист).

А ТУТ МОЖНО ГРАФИК КРАСИВОЙ ПЕТЕЛЬКИ

Площадь области, ограниченной кривой: $\frac{S}{2} = \int_\gamma xdy - ydx$ *(это действительно площадь, т.к. если использовать формулу Грина: $P = -y, Q = x$; $\iint_\Gamma (Q_x - P_y)dxdy = 2\iint_\Gamma dxdy$)

$$x = \frac{3at}{1+t^3};\ y = \frac{3at^2}{1+t^3};\ t \in [-\infty, -1) \cup (-1, +\infty]$$

$$\frac{S}{2} = \int\limits_{\gamma_{ABCA}} = \int\limits_{\gamma} \frac{3at}{1+t^3}dy - \frac{3at^2}{1+t^3}dx = -\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^1 d\left(\frac{1}{1+t^3}\right) = \frac{3a^2}{4}$$

$$\int\limits_{\gamma ABDA} = \int\limits_{\gamma ABCA} + \int\limits_{\gamma ACBDA} = 2\int\limits_{\gamma ABCA} \Rightarrow\ S = 4\int_{\gamma_{ABCA}} = 3a^2$$

1.1.3 Пример 3

Случай потенциального векторного поля. Если в односвязной области $G \subset \mathbb{R}^2$ выполнено: $Q_x = P_y$, то $\exists u:\ u_x = P; u_y = Q$; тогда

$$\Gamma \subset G \Rightarrow \int\limits_\Gamma Pdx + Qdy = u(B) - u(A),\ \text{где A и B - нач. и конечные точки}$$

Посчитать $\mathbb{J} = \int\limits_\Gamma 2xydx + x^2dy$. A(0, 0), B(-2, -1) - точки.

Удостоверимся, что поле векторное: $P_y = 2x;\ Q_x = 2x; \Rightarrow P_y = Q_x \Rightarrow$ поле потенциальное $\Rightarrow \exists u : u_x = P,\ u_y = Q$.

Найдем u:

$$\begin{cases} u_x = 2xy \Rightarrow u = x^y + \varphi(y) \\ u_y = x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + \varphi'(y) = x^2; \Rightarrow \varphi(y) = C, C \in \mathbb{R}$. Возьмем C=0 и $\varphi(y) = x^2y$

$$\mathbb{J} = u(B) - u(A) = -4 + C - 0 - C = -4$$

1.2 Поверхностные интегралы I рода

Пусть G - измеримая область в $\mathbb{R}^2$. S - поверхность, заданная параметрически т.е. $x = x(u, v); y = y(u, v); z = z(u, v)$. x, y, z - дифференцируемые функции на G. И на S задана $f(x, y, z)$

Определение 1 (Поверхностный интеграл первого рода)**.**

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_G f\left(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\right)|[\overline{r}_u \times \overline{r}_v]|dudv$$

где $\overline{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

1.2.1 №11.11

$\mathbb{J} = \iint\limits_S zdS;\ f(x, y, z) = z;\ \overline{r} = (u\cos v, u\sin v, v)$

$$S = \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{cases}$$

$$\overline{r}'_u = (\cos v, \sin v, 0);\ \overline{r}'_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$$

$$|[\overline{r}_u \times \overline{r}_v =]| = \left| det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & sinv & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} \right| = |(i(sinv) + j(-cosv) + k(ucos^2 v + usin^2 v)|$$
$$= \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 u + u^2} = \sqrt{1 + u^2}$$

$$\mathbb{J} = \iint\limits_G v\sqrt{1 + u^2}dudv = \int\limits_0^{2\pi} vdv \int\limits_0^1 \sqrt(1 + u^2)du = \pi^2(\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}$$