Математический анализ. Семинар 4

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

26 сентября 2017

1 Семинар 4

1.1 №18(2)

1.

$$2x^2{+}2y^2+u^2+8yu-u+8=0 \quad (1)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}:4x+2uu_x+8yu_x-u_x=0 \quad (2)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}:4y+2uu_y+8u+8yu_y-u_y=0 \quad (3)$$

Т.к. производные u по x и y=0. из

$$\begin{cases} 4x=0 \\ 4y+8u=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2u \end{cases}$$

$$x=0; \quad y=-2u; \quad (4)$$

Получим: $(4)\to(1): \quad 8u^2+u^2-16u^2-u+8=0$
$7u^2+u-8=0$ $u_1=$; $y_1=-2$ и $u_2=-\frac{8}{7}$; $y_2=\frac{16}{7}$

2. Вcследуем d^2u

$$\frac{\partial}{\partial x}\ on\ (3)-\ :4+2u_x^2+2uu_{xx}+8yu_{xx}-u_{xx}=0 \quad (5)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\ on\ (3)-\ :2u_yu_x+2uu_{xy}+8u_x+8y_{xy}-u_{xy}=0 \quad (6)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\ on\ (4)-\ :4+2uy^2+2uu_{yy}+8u_y+8u_y+8yu_{yy}-u_{yy}=0 \quad (7)$$

3. (a) (5): $4+0+2u_{xx}-16u_{xx}-u_{xx}=0 \Rightarrow u_{xx}=\frac{4}{15}>0$
(6): $2u_{xy}-16u_{xy}-u_{xy}=0 \Rightarrow\ u_{xy}=0$
(7): $4+2u_yy-16u_{yy}-u_{yy}=0 \Rightarrow u_{yy}=\frac{4}{15}>0$
$\Rightarrow d^2u-$ полож. опред. кв. ф. $\Rightarrow$ (0,-2,1) - локальный min

(b) $(0,\frac{16}{7},-\frac{8}{7})$ $u_{xy}=0$; $u_{xx}=-\frac{4}{15}<0$; $u_{yy}<0$; т.е. d^2u - отрицательно опред. кв. форма и $(0,\frac{16}{7},-\frac{8}{7})$ - локальный max

1.2 Тройные интегралы

$$\iiint\limits_{X} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{X'} dxdy \int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz$$

1.3 §8 №139(1)

$\iiint\limits_{G} f(x,y,z)dxdydz$ где G огр.: $x=0;\ y=0;\ z=0;\ 2x+y+z=4$

1.3.1 Способ 1. Интеграл по сечению

Будем фиксировать x и нарезать наш тетраедр параллельными плоскостями. G_x - плоскость сечения при фиксированном x:

$$\int_0^2 x \iint_{G_x} dydz = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{4-2x-y} ydz = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (4y-2xy-y^2)dy =$$
$$= \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} 4ydy - \int_0^2 2xdx \int_0^{4-2x} ydy - \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} y^2 dy =$$
$$= \int_0^2 2(4-2x)^2 dx - \int_0^2 x(4-2x)^2 dx - \frac{1}{3}\int_0^2 (4-2x)^3 dx =$$
$$= \int_0^2 (32-32x-8x^2)dx - \int_0^2 (16x-16x^2+4x^3)dx - \frac{1}{3}\int_0^2 (64-96x+48x^2-8x^3)dx =$$
$$= \cdots = \frac{16}{3}$$

1.3.2 Способ 2. Интеграл по проекциям

$$\iiint\limits_{G} ydxdydz = \iint\limits_{G''} ydydz \int_0^{\frac{4-y-z}{2}} = \int_0^4 dy \int_{4-y}^0 ydz \int_0^{\frac{4-y-z}{2}} dx = \cdots = \frac{16}{3}$$

1.4 №8.144(6)

$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ G огр $x^2+y^2+z^2=z$
Сделаем замену на сферические координаты.

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\cos\psi \\ y = r\sin\phi\cos\psi \\ z = rsin\psi \end{cases}$$

Теорема 1 (О замене переменных в кратном интеграле)**.** *Пусть X,U - измер. области, ϕ - отображение $\overline{U}$ на $\overline{X}$*

1. *ϕ - взаимооднозначно на U*
2. *ϕ - непр диф на $\overline{u}$*
3. *f(x) - интегрируема на X*

$\Rightarrow$ *$f(\phi(u)\cdot|J|)du$ - интегрируема на U*

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi\cos\psi & -r\sin\phi\cos\psi & -r\cos\phi\sin\psi \\ \sin\phi\cos\psi & r\cos\phi\cos\psi & -r\sin\phi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & rcos\cos\psi \end{vmatrix} =$$
$$= \sin\psi r^2(\sin^2\phi\sin\psi\cos\phi + \cos^2\phi\sin\psi\cos\psi) + 0 +$$
$$+ r\cos\psi r(\cos^2\phi\cos^2\psi + \sin^2\phi\cos^2\psi) =$$
$$= r^2\sin^2\psi\cos\psi + r^2\cos^2\psi\cos\psi = r^2 cos\psi$$

Подставим в ограничения условия сферических координат:

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{sin\psi} r(r^2\cos\psi)dr = 2\pi\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\psi\cos\psi d\psi =$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^4\psi d\sin\psi = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} = t^4 dt = \frac{\pi}{10}t^1 0t^5 \mid_{-1}^{1} = \frac{\pi}{5}$$