Математический анализ. Семинар 2

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

12 сентября 2017

1 Семинар 2

1.1 Задача на экстремумы

$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.
Найти глобальный минимум и максимум при условии $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$

1. Сначала посчитаем лагранжиан: $L = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 100)$

2.
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda x = 0 \tag{1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4y + 2\lambda y = 0 \tag{2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 6z + 2\lambda z = 0 \tag{3}$$
$$x^2 + z^2 + z^2 = 100 \tag{4}$$

   Выражаем x, y и я через λ и подставляем
   $x(1+\lambda) = 0 \quad \Rightarrow x = 0; or \lambda = -1$
   $y(2+\lambda) = 0 \quad \Rightarrow y = 0; or \lambda = -2$
   $z(3+\lambda) = 0 \quad \Rightarrow z = 0; or \lambda = -3$
   Если $x = 0, y = 0 \Rightarrow z = \pm 10$ Имеем стационарные точки $M_{1,2}(\lambda =) = (0, 0, \pm 10)$, $M_{3,4} = (0, \pm 10, 0)$ и $M_{5,6} = (\pm 10, 0, 0)$

3. d^2L
   $L_{xy} = L_{yz} = L_{xz} = 0;$
   $L_{xx} = 2 + 2\lambda$
   $L_{yy} = 4 + 2\lambda$
   $L_{zz} = 6 + 2\lambda$
   Т.о. $d^2L = (2 + 2\lambda)dx^2 + (4 + 2\lambda)dy^2 + (6 + 2\lambda)dz^2$

   (a) $M_{1,2} = (0, 0, \pm 10) \quad \lambda = -3;$
   $\Rightarrow d^2L = (2-6)dx^2 + (4-6)dy^2 + (6-6)dz^2 = -4dx^2 - 2dy^2$
   $x^2 + y^2 + z^2 = 100$
   Продифф ур-я связи: $x_0dx + y_0dy + z_0dz = 0$; для $M_{1,2}$; $dz = 0$;

Подставим в d^2L имеем: $\widetilde{d^2L}(x,y) = -4dx^2 - 2dy^2$. По критерию сильвестра $\widetilde{d^2L}$ - отрицательно определённая квадратичная форма $\Rightarrow M_{1,2}-$ max(локальный) и $u(M_{1,2}) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0 + 0 + 300 = 300$

(b) $M_{3,4} = (0, \pm 10, 0) \quad \lambda = -3;$
Аналогично d^2L полуопределённая $\Rightarrow$ про наличие экстремума ничего не можем сказать. Продифференцируем уравнение связи.
$xdx + ydy + zdz = 0$; для $M_{3,4};\ dy = 0;$
$\Rightarrow \widetilde{d^2L}(x,z) = -2dx^2 - 2dz^2.$
По критерию Сильвестра $\widetilde{d^2L}$ - неопределённая квадратичная форма следовательно нет экстремума.

(c) $M_{5,6} = (\pm 10, 0, 0)$ аналогично из уравнения связи $dx = 0 \Rightarrow \widetilde{d^2L} = 2dy^2 + 4dz^2$ - положительно определённая кв. форма. Т.е. это строгий условный min. $u(M_{5,6}) = 100$

4. Очевидно, что (0,0,0) - точка безусловного min функции u. $u(0,0,0) = 0$. Имеем 6 точек на границе и 1 точка внутри множества на место глобального максимума.
Ответ: глобальный min u(0,0,0)=0. глобальный $max(0,0,\pm 10) = 300$

1.2 Теорема о неявной функции.

Определение 1. *Функция $f \quad X \to R$ -неявная функция, определённая уравнением $F(x, y) = 0$. Если $F(x, f(x)) = 0 \ \ \forall x \in X$*

Если на некотором множестве $E \in R^2$
$(x, y) = 0$ и $y = f(x)$ - эквивалентны, то говорят, что уравнение разрешимо относительно y.

Теорема 1 (Теорема о неявной функции). *Пусть функция f двух переменных удовлетворяет следующим условиям:*

1. *F - непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0)*
2. *$F(x_0, y_0) = 0$*
3. *$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, F'_y - непрер. в (x_0, y_0) (или) $\exists F'_y$ и сохраняет знак $\Rightarrow \exists$ прямоугольная окрестность $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$*
4. *F - дифференцируема в (x_0, y_0)*
   $\Rightarrow f$ - дифференцируема и $f'(x) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$
   Добавление: если >2 переменных то

$$f'_{x_1} = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

Теорема 2 (О системе неявных функций). *Пусть выполнено:*

1. *$F_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$. $j = \overline{1, m}$*
2. *$F_j(x^{(0)}, y^{(0)})$; $j = \overline{1, m}$*
3. $$\mathcal{J} = \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots y_m)} \neq 0 \quad (x^{(0)}, y^{(0)})$$
   $$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$
   Тогда $\exists Q_\varepsilon(x^{(0)}, y^{(0)}) \Rightarrow \{F_0(x, y) = 0\}_{j=1} \Leftrightarrow \{y_j = f_j(x)\}$

4. Если F непрер. диф, то

$$\begin{pmatrix} (f_1)'_x, \ldots, (f_1)'_{x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ (f_m)'_x, \ldots, (f_m)'_{x_n} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (F_1)'_{y_1}, \ldots, (F_1)'_{y_m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ (F_m)'_{y_1}, \ldots, (F_m)'_{y_m} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} (F_1)'_{x_1}, \ldots, (F_1)'_{x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ (F_m)'_{x_1}, \ldots, (F_m)'_{x_n} \end{pmatrix}^{-1}$$

Зачем нужно это всё?

Теорема о неявной функции(система)

$\Downarrow$

Теорема об обратном отображении в ТФКП

$\Downarrow$

Можно работать с конформными отображениями

$\Downarrow$

Переходим к более приятным для работы областям

Теорема 3 (Следствие)**.** *Отображение открытого множества непрерывно $\Leftrightarrow$ Прообраз всякого открытого множества открыт.*

1.3 §5#60(1)

Найти в точке (0,1) все частные производные неявной функции $u^3 + 2xyu + 1 = 0$

1. $u^3 + 2 \cdot 0 + 1 = 0 \quad \Rightarrow (0,1) = -1$
2. $u_x = -\frac{F_x}{F_u} = \frac{-2uy}{3u^2+2xy} = \frac{2}{3}$
3. $u_x = -\frac{F_y}{F_u} = -\frac{-2ux}{3u^2+2xy} = 0$