1. Свойства кратных интегралов

Теорема 1. *Если* $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ *- измеримая область, то* $\int\limits_{\Omega} = m(\Omega)$
$f(x) \equiv 1$ на $\overline{\Omega}.\forall x \in \overline{\Omega}$, Ω - измеримое множество.

Теорема 2 (интегрируемость подмнож.). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ *и* $\Omega' \subset \Omega$ *измеримые области и функция* $\omega = f(x)$ *интегрируема на* Ω *, тогда* f *интегрируема на множестве* Ω'

Доказательство. $\Omega' \neq \Omega$; f интегрируема на Ω. $T = \{\Omega_k\}, T' = \{\Omega'_k\}$, где $\Omega'_k = \Omega_k \cap \Omega'$ тогда $\forall \varepsilon > 0 \, \exists T : S^*(T) - S_*(T) < \varepsilon$;
$M'_k = \sup\limits_{\overline{\Omega}'_k} f \leq \sup\limits_{\overline{\Omega}_k} f = M_k; m'_k = \inf\limits_{\overline{\Omega}'_k} f \geq \inf\limits_{\overline{\Omega}_k} f = m_k \Rightarrow$

$$S^*(T') - S_*(T') \leq S^*(T) - S_*(T) < \varepsilon \tag{1}$$

□

Теорема 3 (аддитивность интеграла). *Пусть* Ω *и* Ω' *измеримые области в* $\mathbb{E}^m, \Omega' \subset \Omega$ *и* $\Omega'' = \Omega \backslash \overline{\Omega}'$. *Если функция* $\omega = f(x)$ *интегрируема на* Ω, *то* f *интегрируема на* Ω' *и* Ω'' *и* $\int\limits_{\Omega} f d\omega = \int \Omega' f d\omega + \int \Omega'' f d\omega$
Доказательство. Из теоремы 2 $\Rightarrow$ f интегрируема на Ω' и Ω'' и существует интеграл в 1. T' - разбиение Ω'. T'' - разбиение Ω''. Тогда $T = T' \cup T''$ -разбиение множества Ω.
$\Delta_t = \max\{\Delta_{T'}, \Delta_{T''}\}$. $\forall \xi', \xi'' : \xi = \xi' \cup \xi'' \rightarrow I\{T, \xi\} = I\{T', \xi'\} + I\{T'', \xi''\}$ $\Delta_T \rightarrow 0 \Rightarrow 1$ □

Теорема 4 (линейность интеграла). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ *измеримая область.* $\omega = f(x)$ *и* $\omega = g(x)$ *интегрируемые на* Ω *функции. Тогда* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *функция* $\omega = \alpha f(x) + \beta g(x)$ *интегрируема на* Ω:
$\int\limits_{\Omega} \big[\alpha f + \beta g\big] d\omega = \alpha \int\limits_{\Omega} f d\omega + \beta \int\limits_{\Omega} g d\omega$
Кроме того функция $\omega = f \cdot g$ *так же интегрируема на* Ω

Теорема 5 (Инт. от положительной функции). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ *измеримая область. Функция* $\omega = f(x)$ *определена на* $\overline{\Omega}$, $f(x) \geq 0 \forall x \in \Omega$ *и* f *интегр на* Ω. *Тогда:* $\int\limits_{\Omega} f d\omega \geq 0$

Теорема 6. *Если* f *и* g *интегрируема на измеримой области* $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ *и* $\forall x \in \overline{\Omega} \rightarrow f(x) \geq g(x)$, *то* $\int\limits_{\Omega} f d\omega \geq \int\limits_{\Omega} g d\omega$

Теорема 7. *Если* f *интегрируемость на измеримой области* $\Omega \subset \mathbb{E}$, *то функция* $|f|$ *интегрируема на* Ω *и выполнено:* $|\int\limits_{\Omega} f d\omega| \leq \int\limits_{\Omega} |f| d\omega \leq cm(\Omega)$, *где* $c : \forall x \in \overline{\Omega} \rightarrow |f(x)| \leq c$

Замечание: В обратную сторону не верно. Контрпример - функция Дирихле.

Теорема 8. *Если* $\Omega \subset \mathbb{E}$ *и* $\Omega' \subset \mathbb{E} : \Omega' \subset \Omega, \omega = f(x)$ *интегрируема на* Ω *и* $f(x) \geq 0 \; \forall x \in \Omega$, *тогда* $\int\limits_{\Omega'} f d\omega \leq \int\limits_{\Omega} f d\omega$

Теорема 9. *Пусть функции* $\omega = f(x)$ *и* $\omega = g(x)$ *интегрируемы на измеримой области* $\Omega \subset \mathbb{E}$. g *не меняет знак на* $\overline{\Omega}$, $m \leq f(x) \leq M \; \forall x \in \overline{\Omega}$, *тогда* $\exists \mu : m \leq \mu \leq M : \int\limits_{\Omega} fg d\omega = \mu \int\limits_{\Omega} g d\omega$. *Если же* f *непрерывна на* $\overline{\Omega}$, *то* $\exists x^0 \in \overline{\Omega} : \int\limits_{\Omega} fg d\omega = f(x^0) \int\limits_{\Omega} g d\omega$

Теорема 10. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ *- измеримая область* $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \dots \subset \Omega$

Доказательство. $\forall x \in \overline{\Omega} \to |f(x)| \le C, \widetilde{\Omega}_k = \Omega \backslash \overline{\Omega}_k$ - измеримое множество и $m(\widetilde{\Omega}_k) = m(\Omega) \backslash m(\overline{\Omega}) \backslash m(\overline{\Omega}) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 : m(\widetilde{\Omega}_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{4c}$
Ω_{k_0}, f интегрируема на $\Omega_{k_0} \Rightarrow \exists T^{k_0}$ область $\Omega_{k_0} : S^*(T^{k_0}) - S_*(T^{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists T = T^{k_0} \cup \widetilde{T}^{k_0},$ где $\widetilde{T}^{k_0}$ разбиение множества $\Omega \backslash \overline{\Omega}_{k_0} = \widetilde{\Omega}_{k_0}$
$S^*(T) - S_*(T) = S^*(T^{k_0}) - S^*(T^{k_0}) + S^*(\widetilde{\Omega}^{k_0}) - S_*(\widetilde{\Omega}^{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + 2c\frac{\varepsilon}{4c} = \varepsilon$
$|\int\limits_{\Omega} f d\omega - \int\limits_{\Omega_k} f d\omega| = |\int\limits_{\widetilde{\Omega}} f d\omega| < cm(\widetilde{\Omega}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ □