Математический анализ. Семинар 1

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

10 сентября 2017

1 Семинар 1

Определение 1. *Точка* x_0 *- точка локального минимума функции* f*, если* $\exists U(x^{(0)})$*, что* $\forall x \in U(x^{(0)}) \to f(x^{(0)}) \leq f(x)$

Теорема 1. *Если* $x^{(0)}$ *- точка экстремума функции a и* $\exists \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$

Определение 2. x_0 *- стационарная точка функции* f*, если функция* f *дифференцируема в этой точке и* $df = 0$

Теорема 2. *Если* x_0 *- точка экстремума и функция* f *в ней дифференцируема в* $U(x_0)$*, тогда* x_0 *- стационарная точка.*

Квадратичная форма:

$$A(\xi) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$$

Квадратичная форма положительно определена, если $\forall \overline{\xi} \neq \overline{0}, A(\xi) > 0$

$$d^2 f(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

Теорема 3 (Достаточное условие экстремума)**.** *Пусть* f *дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки* x_0*. Пусть* $d^2 f$ *a* x_0 *- положительно(отрицательно) определённая квадратичная форма. Тогда* x_0 *- точка минимума (максимума)*

Критерий Сильвестра:
$\Delta_1 = \alpha_{11}$
$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} \end{vmatrix}$
$\begin{Vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{Vmatrix}$ Пусть $f(x, y)$ дважды непрерывно-дифференцируема в окрестности стационарной точки x_0 Тогда:

1. если в (x_0, y_0) $f_{xx} \cdot f_{yy} - f^2_{x,y})$, тогда строгий экстремум
   $f_{xx} > 0 \to min$
   $f_{xx} < 0 \to max$

2. если $f_{xx}f_{yy} - f_{x,y}^2) < 0$ - нет экстремума

3. если $f_{xx}f_{yy} - f_{x,y}^2) = 0$ - хз: $f(x,y) = x^4 + y^4$ - min $f(x,y) = x^4 - y^4$ - нет экстремума

1.1 §5#2(1)

$4 = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y; \quad df = 0;$

1. $$\frac{du}{dx} = 6x - 3x^2 = 0; \to x = (0,2)$$
$$\frac{du}{dy} = 6y + 4 = 0; \quad y = -\frac{2}{3}$$
Две стационарные точки: $(0, -\frac{2}{3}); (2, -\frac{2}{3})$

2. $u_{xx}^{''} = 6 - 6x;$
$u_{yy}^{''} = 6$
$u_{xy} = 0$
$d^2f = u_{xx}dx^2 + u_{yy}dy^2 = (6 - 6x)dx^2 + 6dy^2$

   (a) $(2; -\frac{2}{3})$
   $u_{xx} = 6;$
   $u_{yy} = 6$
   $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 36 > 0$ и $u_{xx} = 6 > 0 \Rightarrow (0; -\frac{2}{3})$
   $u(0, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$

   (b) $(2; -\frac{2}{3}) : u_{xx} = -6;$
   $u_{yy} = 6$
   $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = -36 < 0$ и $u_{xx} = -6 < 0 \Rightarrow (0; -\frac{2}{3}) \Rightarrow$

Ответ: min: $u(0, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$

Пусть на открытом множестве $G \in R^n$ заданы функции $f, \phi_1, ...\phi_m \quad (1 \leq m \leq n)$; Уравнение связи:
$$\{\phi = 0\}_m^1 \tag{1}$$
$E = \{x, x \in G, \phi(x) = 0, 1 \leq j \leq n\}$

Определение 3. *Точка $x_0 \in E$ называется точкой условного минимума функции f при связях* (1), *если* $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \to f(x_0) \leq (x)$;

Теорема 4 (Функция Лагранжа)**.** x_0 *- условная стационарная точка* $\leftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \dots \lambda_m$ *такие, что* x_0 *стационарная точка для*

$$L = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \phi_j(x)$$

где λ_j - множитель Лагранжа.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \phi_j(x) = 0; \end{cases} \quad = x_0; \lambda_1 \dots \lambda_m$$

Теорема 5 (Достаточное условие условного экстремума)**.** *Пусть* $f, \phi_1, \dots \phi_m$ *дважды непрерывно-дифференцируемой фукнции в некоторой окрестности стационарной точки* x_0 *функции* L*. Тогда:*

1. $d^2L(x_0) > 0$*- строгий условный min*
   $d^2L(x_0) < 0$*- строгий условный max*

2. $\widetilde{d^2L}(x_0) \lesseqgtr \Leftrightarrow$ *Если* $\widetilde{d^2L}$ *- неопределенной кв формы - нет экстр*

3. $d^2L(x_0)$ *- неопределенной кв формы - хз*

План исследования на условный экстремум:

1. Составить функцию Лагранжа

2. Найти стационарные точки функции Лагранжа

3. для каждой стац точки исследовать $d^2L(x_0)$.

   (a) Если d^2L положительная или отрицательная квадратичная форма, то ответ.

   (b) Если же d^2L неопределенная квадратичная форма, то дифференцируем уравнения связи и в них выражаем dx, dy друг через друга и подставляем в d^2L. Это и будет называться $\widetilde{d^2L}$

1.2 §5#25.5

$u = x - 2y + 2z;$
$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ - уравнение связи ϕ. Найти экстремумы

1. $L = \underbrace{x - 2y + 2z}_{u} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$

2. $\begin{cases} \frac{dL}{dx} = 1 + 2\lambda x = 0; \\ \frac{dL}{dy} = -2 + 2\lambda y = 0; \\ \frac{dL}{dz} = 2 + 2\lambda z = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = \frac{-1}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^2 = 9$
   $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 9$
   $\frac{9}{4\lambda^2} = 9 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$

   (a) $\begin{cases} x = \frac{-1}{2\lambda} = -1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$ $\rightarrow$ Стационарная точка: (-1,2,-2)

   (b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$ $\rightarrow$ Стационарная точка: (1,-2,2)

   (c) Рассмотрим стац. точку (-1,2,-2) при $\lambda = \frac{1}{2}$
   $L_{xx} = 2\lambda = 1;$
   $L_{yy} = 2\lambda = 1;$
   $L_{zz} = 2\lambda = 1;$
   Смешанные производные $= 0$
   $d^2L = dx^2 + dy^2 + dz^2$ - положит. опр. кв. ф. - условный min

   (d) Рассмотрим стац. точку (1,-2,2) при $\lambda = -\frac{1}{2}$
   $L_{xx} = 2\lambda = -1;$
   $L_{yy} = 2\lambda = -1;$
   $L_{zz} = 2\lambda = -1;$
   Смешанные производные $= 0$
   $d^2L = -dx^2 - dy^2 - dz^2$ - отриц. опр. кв. ф. - условный min

Ответ: $U(-1, 2, -2) = -9$ - строгий условный Min,$U(1, -2, 2) = 9$ - строгий условный Min.

1.3 #2

u=xy+yz при $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

1. $L = xy + yz + \lambda_1(x^2+y^2-2)_+\lambda(y+z-2)$
2. Стационарные точки
   $\begin{cases} \frac{dL}{dx} = y + 2x\lambda_1 = 0 \\ \frac{dL}{dy} = x + z + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{dL}{dz} = y + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2y + z = 2 \end{cases}$
   $x = y = z = 1; \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}; \lambda_2 = -1$ - стационарные точки
3. Рассмотрим стац. точку (-1,2,-2) при $\lambda = \frac{1}{2}$
   $L_{xx} = 2\lambda = -1;$
   $L_{yy} = 2\lambda = -2;$
   $L_{zz} = 0;$
   $L_{xy} = 1$
   $L_{yz} = 1$
   $L_{xz} = 0$ $d^2L = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz$ - неопределённая кв форма
4. Исследуем $\widetilde{d^2L}$. Продифференцируем уравнение связи.
   $x^2 + y^2 = 2 \rightarrow 2xdx + 2ydy = 0$(в стац точке x=y=1)$\Rightarrow$ $dx + dy = 0 \rightarrow dx = -dy$
   $y + z = 0 \rightarrow dz = -dy$ $\widetilde{d^2L} = -dy^2 - dy^2 - 2dy^2 - 2dy^2 = 6dy^2$ - отрицательно определённая кв форма.

Ответ: (1,1,1)=2, строгий условный максимум.