Домашняя работа по ТРЯП №1

Автор - Айвазов Денис из 671 группы

7 сентября 2017

1 Предбазовый уровень

1. $\{a, a, a\} \cdot \{b, b, b\} = \{ab, abb, aab, aabb\}$

2. $\{a, a, a\} + \{b, b, b\} = \{a, b, aa, bb\}$

3. $\{a, a, a\} \times \{b, b, b\} = \{ab, abb, aab, aabb, ba, bba, baa, bbaa\}$

4. $((aa|b)^*(a|bb)^*)^*$
   Заметим, что даже используя лишь часть этих множеств мы можем получить все комбинации т.е. из $(aa|b)^*$ будем использовать лишь b. А из $(a|bb)^*$ только a. Доказательство:
   $(b^*a^*)^* = ((\varepsilon + b + b^2 + \dots)(\varepsilon + a + a^2 + \dots))^* = (\varepsilon + a + b + a^2 + b^2 + ba + b^2a + ba^2 + b^3 + a^3 + \dots)^* = \varepsilon + a + b + a^2 + b^2 + ab + ba + b^2a + ba^2 + a^2b + ab^2 + b^3 + a^3 + \dots = (a|b)*$
   Все эти комбинации получаются по определению звёздочки Клини и конкатенации букв a и b.

5. $\{a^{3n} | n > 0\} \cap \{a^{5n+1} | n \geq 0\}^*$ рассмотрим языки поотдельности:
   I:$\{a^{3n} | n > 0\} = \{a^3 + a^6 + a^9 + a^{12} + a^{15} ...\}$.
   II:$\{a^{5n+1} | n \geq 0\}^* = /(\varepsilon + a + a^6 + a^{11} + \dots)^* = \varepsilon + a + a^2 + a^3 + \dots$
   Благодаря * можно только элементом a получить a^n $\forall n \in \mathbb{N}$.
   И т.к. это пересечение мн-в, где II содержит I, то ответ I множество $\{a^{3n} | n > 0\}$

6. $\emptyset \cap \{\varepsilon\} = \emptyset$. На семинаре мы разобрали, что пустое множество пусто и пересечение его с чем-либо ещё будет являться пустым множеством по определению.

2 Ровно одно подслово ab

Заметим, что конструкция вида $\omega_{i,j} := b^i a^j$ не содержит в себе подстроки ab. Тогда все слова искомого языка должны иметь вид $\omega_{i,j}(ab)\omega_{k,m}$ Иначе в нём либо не будет содержаться ab. Тогда $\forall i, j, k, m$ получим предложения вида:

- (ab)
- $a \dots a(ab)$
- $b \dots b(ab)$
- $(ab)a \dots a$
- $(ab)b \dots b$
- $a \dots a(ab)a \dots a$
- $a \dots a(ab)b \dots b$
- $b \dots ba \dots a(ab)a \dots a$
- $b \dots ba \dots a(ab)b \dots b$
- $a \dots a(ab)b \dots ba \dots a$
- $b \dots ba \dots a(ab)b \dots ba \dots a$

Запишем в более приятном виде: $\omega_{i,j}(ab)\omega_{k,m} = b^*a^*(ab)b^*a^*$
Корректность следует из построения. И по индукции по длине последовательностей(база очевидна, а на каждом шаге добавления к последовательности из b-шек новой буквы b или к посл. из a-шек новой буквы a у нас не появляется новое сочетание ab) Под выражением вида $b \dots b$ подразумевается последовательность из 1 и более букв b.

3 Слова только чётной длины

Ответ: Необходимое нам РВ R имеет следующий вид: $((a|b)(a|b))^*$ или $(aa|ab|ba|bb)^*$, т.к. они эквивалентны(видно из раскрытия множества (a|b)).

1. Докажем методом математической индукции по степени утверждение: все слова из РВ чётной длины. Т.е. $R \supseteq L$.
   Всё будет основываться на определении звёздочки клини:
   $((a|b)(a|b))^* = \varepsilon + (a|b)(a|b) + ((a|b)(a|b))^2 + (a|b)(a|b)^3 + \dots$
   База: ε и $(a|b)(a|b) = aa + ab + ba + bb$ принадлежат и R и L.
   Предположение: $((a|b)(a|b))^{n-1}$ тоже имеет чётную длину.
   Шаг: $((a|b)(a|b))^n = ((a|b)(a|b))^{n-1} \cdot ((a|b)(a|b))$
   Так как Чётное+Чётное=чётное, то длина слова=n=ч+2=ч. Чтд.

2. Теперь докажем от противного, что в R нет слов нечётной длины (значит $R \subseteq L$).
   $\forall v \in R : |v| = n$. По определению операции конкатенации $((a|b)(a|b))^n = ((a|b)(a|b))^{n-1} \cdot ((a|b)(a|b))$ обозначим $v((a|b)(a|b))^n =: v; v = v' * s$, где s это какое-то слово из $(a|b)(a|b) = aa + ab + ba + bb$. Т.е. $|s| = 2$. Тогда будем итеративно рассматривать v' т.е. часть слова v, которая получается отделением s от v. Вычитая каждый раз из n 2 (отделяя от v слово s) мы в итоге(потому что n - конечное число) дойдём до слова ω длины 0 или 1. Если осталось пустое слово, значит v было чётной длины т.е $v \in L$. Если же получаем слово нечётной длины т.е. либо букву a, либо букву b, мы приходим к противоречию, ведь их не было в начальном множестве (базе) ε и $(a|b)(a|b) = aa + ab + ba + bb$. Чтд.

3. Таким образом мы доказали $R \supseteq L$ и $R \subseteq L$ и следовательно $R = L$

4 Автоматы A и B

1. Автомат A это пять элементов: $A = \Sigma, Q, \delta, q_0, F$, где:
   $Q = q_1, q_2, q_3$ - множество промежуточных состояний
   $\Sigma = a, b$ - алфавит
   q_0 - начальное состояние
   $F = q_1$ - конечные состояния
   Матрица переходов δ:

	q_0	q_1	q_2
a	q_1	q_0	q_2
b	q_0	q_2	q_1

   Автомат B: $A = \Sigma, Q, \delta, q_0, F$, где:
   $Q = q_1, q_2, q_3$ - множество промежуточных состояний
   $\Sigma = a, b$ - алфавит
   q_0 - начальное состояние
   $F = q_1$ - конечные состояния
   $\delta(q_0, a) = q_1;$
   $\delta(q_0, b) = q_0;$
   $\delta(q_1, a) =?$ не определено!!!!
   $\delta(q_1, b) = q_0, q_2;$!!!!
   $\delta(q_2, a) = q_2,$
   $\delta(q_2, b) = q_1$

2. Автомат A детерменирован, т.к. все переходы определены однозначно (док-во таблица выше). А вот в автомате B существует неоднозначность в функции перехода, значит он не детерменирован.

3. $\omega = aababab$:
   $q_0(a) \to q_1(a) \to q_0(b) \to q_0(a) \to q_1(b) \to q_2(a) \to q_2(b) \to q_1$
   Мы остановились в финальном состоянии q_1, значит обработка окончена и слово $\omega \in L(A)$

4. $q_0(a) \to q_1(b) \to q_2(b) \to q_1(b) \to q_2(a) \to q_2$ Обработка завершилась не в принимающем состоянии, значит слово не принято автоматом.

5. $\omega_1 = bba \in A : q_0(b) \to q_0(b) \to q_0(a) \to q_1$принимающее
   $\omega_2 = baa \notin A : q_0(b) \to q_0(a) \to q_1(a) \to q_0$ не принимающее
   $\omega_3 = abb \in B : q_0(a) \to q_1(b) \to q_2(b) \to q_1$принимающее
   $\omega_4 = aba \notin B : q_0(a) \to q_1(b) \to q_2(a) \to q_2$не принимающее

5 Язык слов без подслова bbb

Определим язык $L \subseteq \{a, b\}^*$ индуктивными правилами:
(*1*) $\varepsilon, b, bb \in L$;
(*2*) вместе с любым словом $x \in L$ в L также входят слова $ax, bax, bbax$;
(*3*) никаких других слов в L нет.

Язык $T \subseteq \{a, b\}^*$ состоит из всех слов, в которых нет трёх букв b подряд.

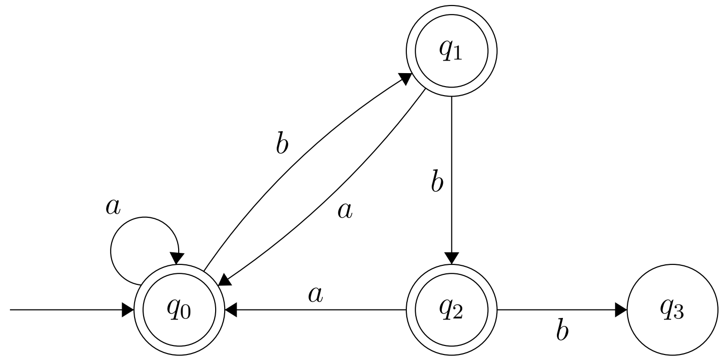
1. Докажем сначала включение: $T \subseteq L$:по индукции (которую ведём по длине слова)
   База: $\varepsilon, a = a \cdot (\varepsilon), b, aa = a \cdot a, bb, ab = a \cdot (b), ba = b \cdot a(\varepsilon) \in L \cap T$
   Пусть предположение индукции верно до слов длины n-1. Возьмём $\forall \omega \in T : |\omega| = n$ и рассмотрим его первые три буквы $\omega_1\omega_2\omega_3$(? в данном случае будет значить, что обе буквы подходят):

   - Если ($\omega_1\omega_2\omega_3 = a??$) значит $\omega = a \cdot (v)$ по правилу 1.
   - Если ($\omega_1\omega_2\omega_3 = ba?$) значит $\omega = ba \cdot (v)$ по правилу 2.
   - Если ($\omega_1\omega_2\omega_3 = bba$) значит $\omega = baa \cdot (v)$ по правилу 3.
   - Если ($\omega_1\omega_2\omega_3 = bbb$) противоречит условию выбора.

   Мы рассмотрели все варианты и тем самым доказали предложение индукции.

2. Теперь докажем обратное включение $T \supseteq L$ тоже по индукции (по длине слова).
   База остаётся той же: $\varepsilon, a = a \cdot (\varepsilon), b, aa = a \cdot a, bb, ab = a \cdot (b), ba = b \cdot a(\varepsilon) \in L \cap T$
   Шаг индукции: предположим что верно $\forall \omega : |\omega| = n$.
   Их объединим во множество А. Причём видно, что $A \subseteq L; A \subseteq T$
   Заметим, что мы не можем получить подслово bbb по правилам построения(см. выше). Т.е. множество А это множество всех слов не содержащих bbb в качестве подслова. А значит из написанного выше: $T = A \subseteq L$
   Из этих двух шагов получаем, что $T = L$.

3. Построим КА по имени КА.



Доказательство того, что автомат распознаёт язык T через два включения множеств:

- Сначала докажем, что КА распознаёт все слова из T. Т.е. $KA \subseteq T$. База: ε. Шаг: пусть $\forall \omega \in T : |\omega| = n$.
  Слово распознаётся, значит что КА закончил работу в одном из принимающих состояний q_0, q_1, q_2. Слово не распознаётся значит, что автомат дошёл до q_3 и либо там остановился, либо сломался в попытке перейти куда-то ещё. Алгоритм построения на каждом шаге можно отследить по таблице переходов:
  Матрица переходов δ:

	q_0	q_1	q_2	q_3
a	q_0	q_0	q_0	-
b	q_1	q_2	q_3	-

  Каждый переход определён и противоречий с тем, что нам нужно нет. Значит слово $v = w \cdot (a|b) : \ |v| = n + 1$ тоже принимается КА. ЧТД.

- Теперь докажем обратное включение: что все слова, которые принимает КА являются словами без bbb в качестве подслова. Т.е. $KA \supseteq T$. Из таблицы переходов видно, что если у нас есть слово ω в каком-то состоянии и если оно принимается, значит это не состояние q_3. См. как мы рассматривали $\omega_1\omega_2\omega_3$ в пункте 1 этой задачи. Значит потихоньку возвращаясь по этим правилам построения назад мы в итоге получим одно из слов $\varepsilon, a = a \cdot (\varepsilon), b, aa = a \cdot a, bb, ab = a \cdot (b), ba = b \cdot a(\varepsilon) \in L \cap T$. Если же мы в какой-то момент времени оказались в q_3, то это значит, что в слове ω нашлась подстрока bbb.
  Таким образом $KA = T$ из $KA \supseteq T$ и $KA \subseteq T$. Корректность автомата доказана.