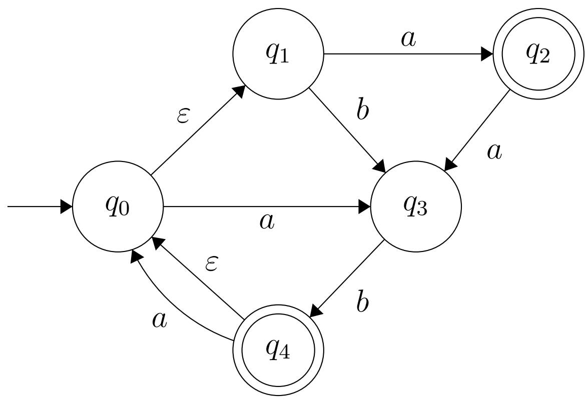
Домашняя работа по ТРЯП №6

Автор - Айвазов Денис из 671 группы

11 октября 2017

1 Грамматика по автомату



Сразу напрашивается такой алгоритм построения:

- Начальное состояние q_0 будет выделяться переходом вида $S \to Q_0$.

- Для каждого состояния q_i создадим нетерминал Q_i, а правила вывода будут аналогичны правилам перехода, т.е.: каждому переходу по букве x в автомате $q_i \to_x q_j$ будет соответствовать правило вывода $Q_i \to xQ_j$. Эпсилон переходы работают как смены нетерминалов $Q_0 \to Q_1$.

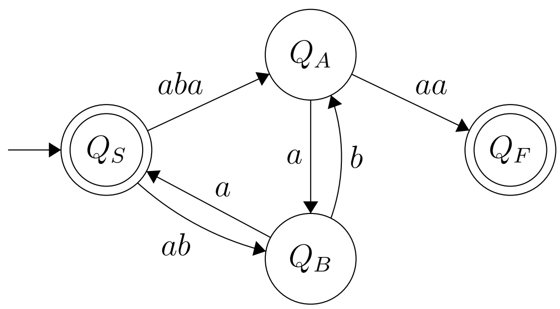
- Принимающие состояния будут дополнительно иметь правила вывода в эпсилон. Т.е. если q_i принимающее, то добавляем правило вывода $Q_i \to \varepsilon$ (т.к. справа теперь нет нетерминалов, то это слово становится выводимым грамматикой)

В итоге получим грамматику: $\Gamma = G(N, T, P, S)$, где $N = \{S, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, $T = \{a, b\}$, $P = \{S \to Q_0, Q_0 \to Q_1, Q_0 \to aQ_3, Q_1 \to bQ_3, Q_1 \to aQ_2, Q_2 \to aQ_3, Q_2 \to \varepsilon, Q_3 \to bQ_4, Q_4 \to aQ_0, Q_4 \to Q_0, Q_4 \to \varepsilon\}$ и S - аксиома. Теперь докажем корректность:
$if\ \omega \in L\ then\ \exists q_0 \to_{\omega_1} q_i \cdots \to_{\omega_{|\omega|}} q_f$ - последовательность переходов по состояниям, которая приводит нас в принимающее. А по алгоритму как раз существует последовательность выводов $S \to Q_0 \to_{\omega_1} \omega_1 Q_i \cdots \to_{\omega_{|\omega|}} |\omega| Q_f \to \varepsilon$ которая и выводит это слово.
Теперь покажем, что этот алгоритм не избыточен (т.е. что он не принимает слова, не принадлежащие языку): слово принимается автоматом значит, что он закончил работу в принимающем состоянии. А для принимающих состояний у нас было правило вывода $Q_i \to \varepsilon$, что и означало

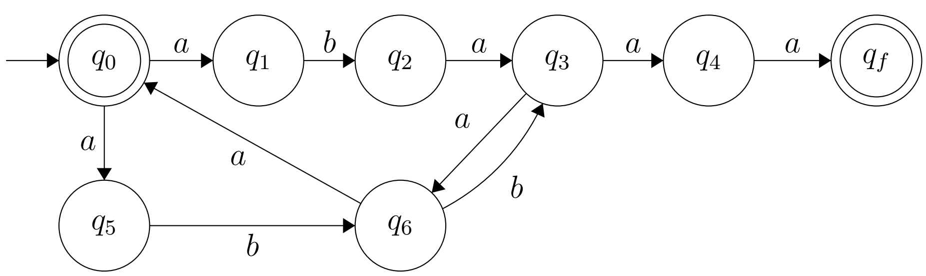
окончание работы (с учетом того, что слева в правилах вывода у нас есть только нетерминалы). А в этом переходе справа нетерминалов нет, и значит мы закончили работу в принимающем состоянии для принадлежащих. Если же слово не принадлежит, то такого исхода не произойдет и мы не выведем эпсилон-слово. Т.к. вместо обычного слова наша грамматика породит сентенсиальную форму с нетерминалом на конце. Это и будет значить непринимаемость слова.

2 Автомат по грамматике

Дана грамматика. По ней надо построить автомат $G : S \to abaA|abB|\varepsilon, A \to aB|aa, B \to bA|aS$ Заметим, что приведенный и доказанный в прошлой задаче работает в обе стороны. С некоторыми особенностями и разъяснениями применим его обращение к грамматике G. Будем брать каждое правило вывода за переход в "полуфабрикатном"автомате(схема ниже). Каждому нетерминалу I поставим в соответствие состояние Q_I. В аксиому (нетерминал S) будет вести внешняя стрелка(обозначающая, что это состояние начальное). Выводы, в которых в правой части одни терминалы(в т.ч. и ε) будут принимающими(т.к. порождение слова на них заканчивается). Таким образом, посередине процесса у нас есть он:



А теперь нам надо просто раскрыть переходы по словам (aba, aa, ab) через переходы по буквам, создав пару новых состояний: Функционально ничего не изменилось, кроме того, что построенную конструкцию теперь смело можно назвать ДКА. таким образом мы построили ДКА по грамматике.



3 Является ли грамматика однозначной?

Грамматика не является однозначно по определению, т.к. для слова $\omega = abbaa$ $\exists$ два различных вывода:

$$S \Rightarrow abB \Rightarrow abbA \Rightarrow abbaa$$

$$S \Rightarrow abB \Rightarrow abbA \Rightarrow abbaB \Rightarrow abbaaS \Rightarrow abbaa$$

4 Язык задан КСГ

4.1 L - регулярный?

Язык L задан КСГ: $S \to aSa|aSb|bSa|bSb|a$. Сразу докажем взаимное включение грамматики и языка слов нечетной длины с а посередине.
По индукции докажем, что Г порождает язык L: база - слово а. Шаг: каждый раз используя 1-4 правило вывода мы получаем, что число букв слева и число букв справа от нетерминала увеличиваются на 1. А затем на нужном шаге мы просто заменяем S на a и получаем слово, с буквой а посередине.
В обратную сторону(от хвоста к голове): возьмем слово длины 2n+3. Оно могло получиться 4мя разными способами(нужный выберем) из слова длины 2n+1. И т.д. пока n>0. А когда n=0 слово из языка L (всех слов четной длины, с а посередине) будет содержать только букву а. А это эквивалентно переходу $S \to a$ в обратную сторону. Взаимное включение доказано. Покажем, что язык нерегулярен по т. Майхилла-Нероуда:
Регулярность языка значила бы, что все слова разбивались бы на счетное число классов эквивалентности по L. Но тогда посмотрим на $b^i a$ и $b^j a$ при i<j. Если мы допишем к ним b^i, то первое слово станет приниматься, а второе - нет. Это и значит, что они по определению лежат в разных классах эквивалентности. А число пар i,j счетно (эквивалетно $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$), значит этих классов счетное число, а не конечное. ч.т.д.

4.2 Дополнение к L - регулярный?

Нет. регулярные языки замкнуты относительно дополнения. Значит если допустить, что $\overline{L}$ регулярный, то его дополнение(сам язык L) тоже был бы регулярным. Но обратное доказано в предыдущем пункте, значит и L и $\overline{L}$ нерегулярные языки.

5 Построить грамматику, порождающую язык

Язык: $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 2n\}$ Вот наша контекстно-свободная грамматика: $\Gamma = G(N, T, P, S)$, где $N = \{S, A\}$, $T = \{a, b\}$; , $P = \{S \to aSb \mid aSAb \mid \varepsilon;\ A \to b \mid \varepsilon\}$, S=S;
Докажем по индукции, что Г порождает язык L.
База: $S \Rightarrow \varepsilon \in L$. Шаг: слово с n буквами апринадлежит языку. Тогда мы на k-ом шаге имеем вывод вида $S \Rightarrow aSAb \Rightarrow \cdots \Rightarrow a^n S A^n b^n$. Тогда либо мы еще раз применяем вывод $S \Rightarrow aSAb$, либо (если S закончились. т.е. мы использовали $S \Rightarrow \varepsilon$) A либо на b либо на ε. Таким образом из n нетерминалов мы можем получить $b^k :\ \ 0 \leq k \leq n$ и в итоге у нас не останется нетерминалов. Таким образом, мы получили слова вида $a^n b^k b^n = a^n b^m :\ n \leq m \leq 2n$ т.е. породили язык L.
В обратную сторону: Г не порождает слова не из L. Очевидно, что из правил вывода буквы b не могут стоять в начале. Кроме того, очевидно что не будут порождаться слова вида $a * b * (a|b)(a|b)*$ ведь, после последовательности букв b у нас ничего не может быть выведено. Так же из предыдущей индукции видно, что не может оказаться, что $k \geq n$ ведь каждым из n выводов вида $S \Rightarrow aSAb$ мы порождаем $a^n S A^n b^n$ и терминалы A потом либо исчезают($A \Rightarrow \varepsilon$), либо заменяются на буквы b $A \Rightarrow b$, которых получится не более n штук. ч.т.д.