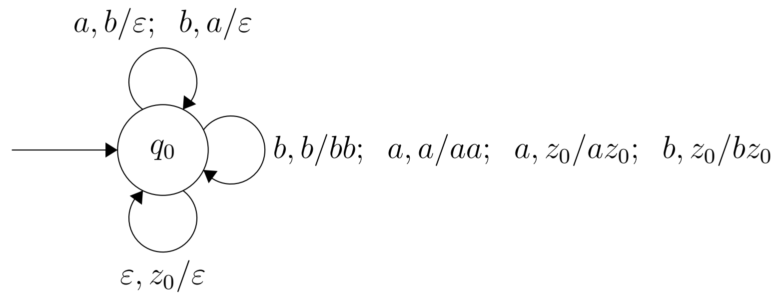
Домашняя работа по ТРЯП №8

Автор - Айвазов Денис из 671 группы

25 октября 2017

1 Простроить и доказать ДМП для $L^=$

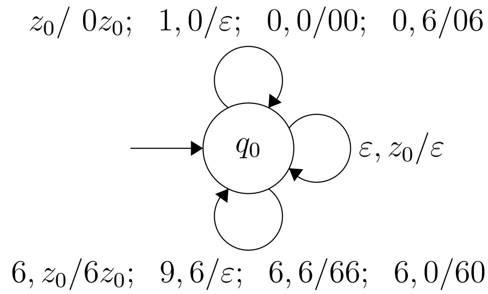


Во-первых этот автомат является детерменированным по определению - в нем для любых $q \in Q, a \in \Sigma$ или $a = \varepsilon, X \in \Gamma$ выполнено, что $\delta(q, \sigma, X)$ имеет не более одного элемента.
Теперь по индукции по длине обработанной части слова докажем, что при обработке слова $\omega \in \Sigma^*$ разность числа букв a и b ($\Delta := |\omega|_a - |\omega|_b$) храниться в автомате. $n := |\omega|$
База: n=0;$\omega = \varepsilon$ - мы сразу перешли по нижней(принимающей) стрелке - слово принялось автоматом, $\Delta(MP) = \Delta(\omega) = 0$
Предположение: допустим для n букв выполнено, и текущая разность в слове и в автомате равна: $\Delta(MP) = \Delta(\omega) = k \in \mathbb{Z}$. Тогда шаг индукции: мы принимаем букву(для определенности -a. С b аналогично) и можем перейти по переходам боковой стрелки ($a, a/aa; \;\; a, z_0/az_0;$), которые значат увеличение числа букв a или по переходам верхней стрелки: $a, b/\varepsilon$ что значило компенсирование прошлой b-шки новой поступившей a-шкой. В итоге разность увеличилась на 1. Если поступила буква b, разность уменьшилась бы на 1. В любом случае свойство $\Delta(MP) = \Delta(\omega) = k$ не нарушилось, значит доказано что автомат сохраняет разность между буквами. Причем если $\Delta(MP) = \Delta(\omega) = k > 0$ то в магазине лежит a^k, если же $k < 0$ в магазине будет $b^{|k|}$. Это следует из шага индукции.
Теперь из этого доказательство не сложно получить взаимное включение $L^= \equiv L(MP)$. И это следует просто из того, что $L^= = \{\omega \mid |\omega|_a - |\omega|_b = 0\}$ и наш автомат принимает (по пустому магазину, разумеется) только те слова, у которых было $|\omega|_a - |\omega|_b$ (т.к. выполнился переход по нижней стрелке $\varepsilon, z_0/\varepsilon$. И причем это единственный "принимающий"переход).
Значит автомат корректен. Ч.т.д.

2 Язык Дика с двумя типами скобок D_2

2.1 Построить НМП

Для удобства обозначим (как 0,) как 1, 6 как [, 9 как]. Тогда МП:



Докажем по индукции, что МП-автомат МР принимает слова из языка Дика2: $\forall \omega \in D_2 \to \omega \in L(MP)$.
База: ε принимается по средней (принимающей) стрелке. Вот протокол: $(q_0, \varepsilon, z_0) \vdash q_0, \varepsilon, \varepsilon$. $n = 2$; $\omega = 69$; (для 01 аналогично) принимается так:$(q_0, 69, z_0) \vdash (q_0, 9, 6z_0) \vdash (q_0, \varepsilon, z_0) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$.
Предположение: допустим, что автомат принимает все слова $\omega : |\omega| = 2n$.
Шаг индукции: слово u длины 2n+2 могло получиться тремя способами:

1. $u = (\omega) = 6\omega 9$ тогда оно обработается так:
   $(q_0, 6\omega 9, z_0) \vdash (q_0, \omega 9, 6z_0) \vdash^* (q_0, 9, z_0) \vdash (q_0, 9, 6z_0) \vdash (q_0, \varepsilon, z_0) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$. Второй переход получился из-за того, что слово ω длины 2n принимается. И поэтому после обработки ничего за собой не оставляет в магазине. А дальше ход как в базе индукции.

2. $u = (\omega) = 0\omega 1$ точно так же, как и первый пункт.

3. $u = \omega_1\omega_2$ т.е. конкатенация двух слов из языка Дика2
   $\exists \omega_1, \omega_2 \in D_2 : \omega_1, \omega_2 \in L(MP)\ \&\ 2n + 2 \geq |\omega_1| \geq 2$. Т.е. наша строка разбивается на две подстроки, которые принимаются по предположению индукции. А из этого сразу следует, что протокол будет выглядеть так: $(q_0, \omega_1\omega_2, z_0) \vdash^* (q_0, \omega_2, z_0) \vdash^* (q_0, \varepsilon, z_0) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$. Т.е. после обработки ω_1 в нашем магазине будет только z_0. Но т.к. слово еще не обработано, то мы обработаем ω_2 (которое по предположению принимается) и в итоге получим пустой магазин. Значит $u = \omega_1\omega_2$ принимается языком $L(MP)$.

Доказано, что наш МП автомат принимает все слова из языка D_2.
Теперь по индукции докажем, что $\forall \omega \in L(MP) \Rightarrow \omega \in D_2$.
База: эпсилон принимается D_2 и распознается автоматом. Предположение-слова длины n принимаются. Шаг индукции: опять таки рассмотрим варианты построения слова $u \in L(MP)$:

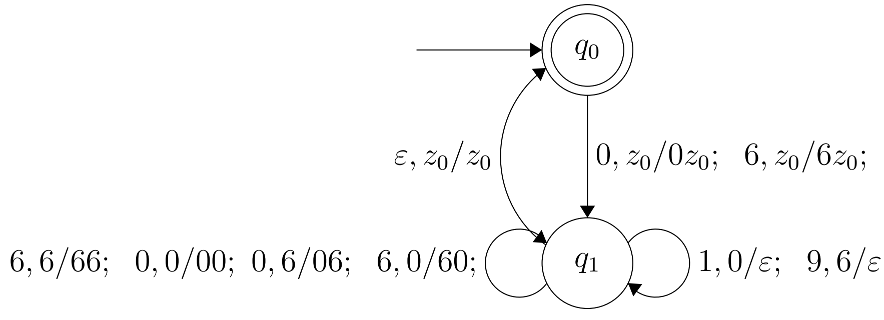
1. $u = (\omega) = 6\omega 9$. Аналогично первому пункту у нас есть вывод ω и тогда протокол обработки слова автоматом будет: $(q_0, 6\omega 9, z_0) \vdash (q_0, \omega 9, 6z_0) \vdash^* (q_0, 9, z_0) \vdash (q_0, 9, 6z_0) \vdash (q_0, \varepsilon, z_0) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$

2. $u = (\omega) = 0\omega 1$ точно так же, как и первый пункт.

3. $u = \omega_1\omega_2,\ \omega_1, \omega_2 \in D_2$. Тогда аналогично 3 пункту 1ого доказательства из принимаемости слов ω_1 и ω_2 автоматом и описания переходов мы получаем вывод: $(q_0, \omega_1\omega_2, z_0) \vdash^* (q_0, \omega_2, z_0) \vdash^* (q_0, \varepsilon, z_0) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$,

Значит слово $u \in L(MP)$ и по индукции доказано, что $\forall \omega \in L(MP) \Rightarrow \omega \in D_2$.
Мы доказали включение в обе стороны, отсюда следует равенство множеств, значит наш автомат распознает язык Дика с двумя типами скобок.

2.2 Построить ДМП и доказать по индукции



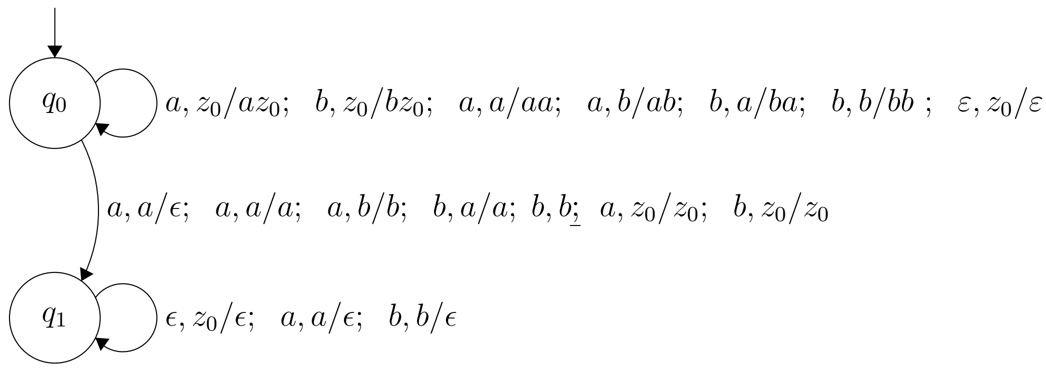
Вот Детерменированный МП автомат, принимающий по принимающему состоянию. Его суть в том, что если мы в q_0, то мы обработали подслово с скобочным итогом равным 0 для обоих типов скобок (это следует из того, что в q_0 можно попасть сначала(пустое слово) или по переходу $\varepsilon, z_0/z_0$ который значит, что стек, в котором мы по сути хранили разность

скобок, пуст) и что у нас никогда скобочный итог не был меньше 0 (это не сложно заметить, ведь у нас нет переходов, понижающих скобочный итог без гарантии, что он больше 0. Т.е. мы обрабатываем закрывающие скобки только тогда, когда у нас на верхушке магазина лежит открывающая, что и гарантирует нам это условие). Переход из q_0 в q_1 осуществляется только получением первого символа (начатой последовательности с ненулевым скобочным итогом) в магазин. Правая стрелочка состояния q_1 характеризует компенсирование закрывающих скобок открывающими (уменьшение соответствующего скобочного итога на 1). Левая стрелочка же говорит об его увеличении - "законном"добрасывании новых открывающих скобок. Простейшей индукцией по длине слова по переходам (правила которых описаны выше) из состояния q_1 в себя доказывается, что автомат за одну итерацию от q_0 до q_0 через n итераций по q_1 принимает слово из языка D_2 (т.к. эти переходы не нарушают законы правильной скобочной последовательности). несколько итераций он примет их конкатенацию (эквивалентно переходу $S \to SS$ в описании граматики).
Таким образом, этот автомат принимает язык D_2. $L(R) \subseteq D_2$
А то, что он принимает только этот язык следует из логики переходов, ведь они не нарушают правильность скобочной последовательности при прохождении до финального состояния. Т.е. $L(R) \supseteq D_2$

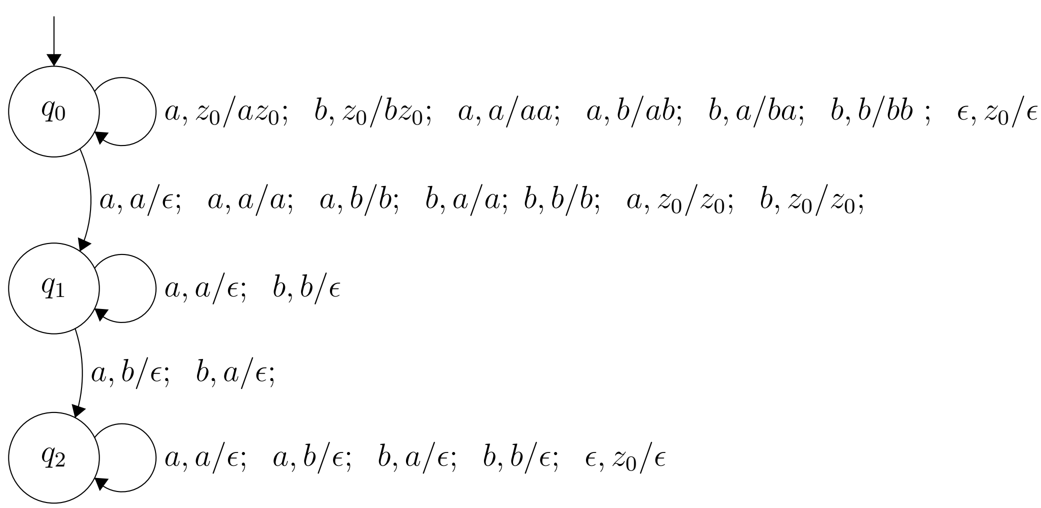
Если такое доказательство не нравится, то можно доказать абсолютно аналогично 1ому пункту данной задачи. Только теперь конкатенация выполняется в состояниия q_0, а взятие в скобки в состоянии q_1. Хотя механика обработки слов будет примерно той же. Поэтому я решил не повторяться и доказать со стороны механики самого языка и автомата. Это же так красиво.

3 Построить МП-автомат для языка непалиндромов

На семинаре был построен и доказан МП для языка палиндромов.



Он принимает все слова $u \in PAL$. Принцип его работы:
Пока автомат находится в состоянии q_0 он получает на вход ω и кладет его в стек в обратном порядке. А затем он переходит в состояние q_1 и уже обрабатывает ω^R побуквенно сравнивая его со стеком - если буква в стеке равна принятой, то он выкидывает букву из стека и продолжает работать. И так до тех пор, пока в стеке не останется ε.Отдельно заметим, что слово принимается единственным переходом $\varepsilon, z_0/\varepsilon$, и пока до него не дойдет, слово принято не будет, т.к. стек не будет до конца очищен.
Отрицание к нему мы построим вот так:



Пояснение: в состоянии q_0(получающее) автомат получает слово ω и закидывает его в магазин(стек). В какой-то момент он может перескочить в состояние q_1(проверяющее на палиндром) которое будет попарно обрабатывать букву из стека и из слова, и при их совпадении выкидывать из стека. А вот если хоть раз произойдет "сбой"т.е. несовпадение букв, то нас выкидывает в состояние q_2(перемалывающее), в котором слово просто добивается до конца и опустошает стек, в итоге слово принимается.

Спустя день я понял, что это решение вообще не верно, но попытаться стоило.

4 Построить КСГ или МП-автомат для

4.1 $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ } or \text{ } i = k;\ i, j, k \geq 0\}$

Построим грамматику: $S \to S_1 | S_2 | \varepsilon$
$S_1 \to aMbC_1 | \varepsilon;\ M \to ab | \varepsilon;\ C_1 \to C_1 C_1 | c | \varepsilon$
$S_2 \to aS_2 c | B_2;\ B_2 \to B_2 B_2 | \varepsilon | b$

Суть: переходы $S \to S_2 | \varepsilon$ $S_1 \to aMbC_1 | \varepsilon;\ M \to ab | \varepsilon;\ C_1 \to C_1 C_1 | c | \varepsilon$ порождают язык $L_1 = \{a^i b^i c^k; i, k \geq 0\}$ Доказательство: по индукции любое слово(кроме пустого, его принимаемость следует из $S \to \varepsilon$) этого языка будет иметь вывод:
$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow aMbC_1 \Rightarrow^* a^n M b^n C_1 \Rightarrow a^n b^n C_1 \Rightarrow^* a^n b^n C_1^k \Rightarrow^* a^n b^n c^l; \forall i, l \geq 0$
Это следует из переходов грамматики. Это и значит, что грамматика порождает язык L_1
Переходы $S \to S_2 | \varepsilon;\ S_2 \to aS_2 c | B_2;\ B_2 \to B_2 B_2 | \varepsilon | b$ порождают язык $L_2 \{a^i b^k c^i; i, k \geq 0\}$. Доказательство: вывод любого слова имеет вид: $S \Rightarrow S_2 \Rightarrow^* a^n S_2 c^n \Rightarrow a^n B_2 c^n \Rightarrow^* a^n B_2^k c^n \Rightarrow^* a^n B_2^l c^n \forall n, l \geq 0$
Все следует прямо из выводов грамматики. Таким образом грамматика еще порождает язык L_2. А их объединение это и есть язык L. Доказано, что КСГ порождает $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ } or \text{ } i = k;\ i, j, k \geq 0\}$

4.2 $^* L = \{\omega \mid \omega = uv \to u \neq v\}$

5 Доказать, что КС замкнуты относительно пересечения с REG

Работает оно точно так же, как и конструкция произведения у ДКА. Будем считать, что регулярный язык задан ДКА $R = \{Q_R, \Sigma, q_0^R, \delta_R, F_R\}$, а КС задан МП-автоматом $M = \{Q_M, \Sigma, \Gamma, \delta_M, q_0^M, z_0, F_M\}$. Будем считать, что он принимает по принимающим состояниям (эквивалентность с автоматом, принимающим по пустому магазину в Хокрофт, Мотвани, Ульман на стр. 251). Тогда аналогично конструкции произведения с 3ого семинара можно построить МП автомат P, принимающий пересечение $L(M) \cap L(R)$ по правилам:
Состояния нового автомата это $Q_P = \{(Q_R, Q_M)\}$ - т.е. упорядоченные пары из декартова произведения множеств состояний ДКА и МП. Начальное состояние $q_0^P = (q_0^R, q_0^M)$. Алфавит Σ у всех один. Магазин тоже один. Функцию переходов δ_P определим так: $\delta((q_R, q_M), \sigma, Z) = (\delta_R(q, \sigma), \delta_M(Q, \sigma, Z)$. По сути мы ходим параллельно по двум автоматам, как и в конструкуции произведения. Принимающие состояния это $F_P = (F_R, F_Q)$ - если мы попали в состояние, эквивалентное принимающим у двух языков, значит слово было принято автоматом, т.е. принято его Регулярной часть и принято его Контекстно свободной частью в один момент времени.
Мы показали алгоритм построения МП-автомата, задающего пересечение REG и КС языков. $P = \{(Q_R, Q_M), \Sigma, \Gamma, \delta_P, (q_0^R, q_0^M), Z_0, (F_R, F_Q)\}$