

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

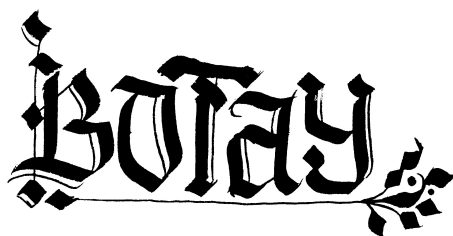
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

## Кратные интегралы и теория поля

---

БИЛЕТЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ЛЕКЦИЯМ ЗНАМЕНСКОЙ Л.Н.



АЙВАЗОВ Д.А.

ДОМРАЧЕВ А.В.

ШАМСИМУХАМЕТОВ Д.Р.

ШЕВЦОВ А.Е.

*Над текстом работала команда проекта "Физтех.Билеты"*  
*при поддержке студсоветов ФРТК и ФУПМ*  
АВТОР ПРОЕКТА: ШАМСИМУХАМЕТОВ Д.Р.



# Содержание

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Первый билет.</b>  | <b>4</b>  |
| <b>1</b>   | <b>Функции, заданные неявно</b>                                       | <b>4</b>  |
| 1.1        | Основные понятия . . . . .  | 4         |
| 1.1.1      | Примеры . . . . .   | 4         |
| 1.2        | Теорема о неявно заданной функции . . . . .                           | 4         |
| 1.3        | Неявные функции, определяемые системой уравнений . . . . .            | 6         |
| 1.4        | Локальная обратимость регулярных отображений . . . . .                | 6         |
| <b>II</b>  | <b>Второй билет</b>   | <b>9</b>  |
| <b>2</b>   | <b>Локальные экстремумы функций многих переменных</b>                 | <b>9</b>  |
| 2.1        | Определение и необходимые условия существования экстремумов . . . . . | 9         |
| 2.2        | Достаточное условие существования локального экстремума . . . . .     | 9         |
| <b>3</b>   | <b>Понятие условного экстремума</b>                                   | <b>11</b> |
| 3.1        | Общая постановка задачи . . . . .                                     | 11        |
| 3.2        | Необходимые условия существования усл. экстремума . . . . .           | 12        |
| 3.3        | Метод Лагранжа . . . . .  | 13        |
| 3.4        | Достаточные условия существования условного экстремума . . . . .      | 14        |
| <b>III</b> | <b>Третий билет</b>   | <b>15</b> |
| <b>4</b>   | <b>Кратные интегралы</b>  | <b>15</b> |
| 4.1        | Определения и свойства . . . . .                                      | 15        |
| 4.2        | Интегральные суммы. Кратный интеграл Римана. . . . .                  | 15        |
| 4.3        | Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Инт. непр. функций . . . . .   | 16        |
| <b>5</b>   | <b>Свойства кратных интегралов</b>                                    | <b>16</b> |
| 5.1        | Интегрирование неравенств. Непрерывность инт. по множеству . . . . .  | 17        |
| <b>6</b>   | <b>Сведение кратного интеграла к повторному</b>                       | <b>18</b> |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 6.1       | Двойные интегралы . . . . .                            | 18        |
| 6.2       | m-кратные интегралы . . . . .                          | 19        |
| <b>IV</b> | <b>Четвертый билет</b>                                 | <b>20</b> |
| <b>7</b>  | <b>Формула Грина.</b>                                  | <b>20</b> |
| 7.1       | Вывод формулы. . . . .                                 | 20        |
| 7.2       | Некоторые приложения формулы Грина. . . . .            | 21        |
| <b>V</b>  | <b>Пятый билет</b>                                     | <b>23</b> |
| <b>8</b>  | <b>Замена переменных в кратном интеграле.</b>          | <b>23</b> |
| 8.1       | Преобразование плоских областей . . . . .              | 23        |
| 8.2       | Выражение площади в криволинейных координатах. . . . . | 24        |
| 8.3       | Геометрический смысл модуля якобиана. . . . .          | 24        |
| 8.4       | Замена переменных в двойном интеграле. . . . .         | 25        |
| <b>VI</b> | <b>Шестой билет</b>                                    | <b>26</b> |
| <b>9</b>  | <b>Понятие поверхности.</b>                            | <b>26</b> |
| 9.1       | Простейшие примеры задания поверхности. . . . .        | 26        |
| 9.2       | Параметрическое задание поверхности. . . . .           | 26        |
| 9.3       | Допустимые замены переменных. . . . .                  | 28        |
| 9.4       | Касательная плоскость и нормаль к поверхности. . . . . | 28        |
| 9.5       | Двусторонние и односторонние поверхности. . . . .      | 29        |
| 9.6       | Ориентация поверхности. . . . .                        | 29        |
| 9.7       | Кусочно гладкие поверхности . . . . .                  | 30        |
| <b>10</b> | <b>Площадь поверхности</b>                             | <b>30</b> |
| 10.1      | Пример Шварца (сапог Шварца) . . . . .                 | 30        |
| 10.2      | Другое выражение для площади поверхности . . . . .     | 31        |
| <b>11</b> | <b>Поверхностные интегралы</b>                         | <b>31</b> |
| 11.1      | Поверхностный интеграл первого рода (ПИПР) . . . . .   | 31        |

|             |   |           |
|-------------|---|-----------|
| 11.2        | Сведение поверхностного интеграла I рода к двойному интегралу . . . . . | 31        |
| 11.3        | Поверхностный интеграл второго рода (ПИВР) . . . . .                    | 32        |
| 11.4        | Общий вид поверхностного интеграла 2-го рода. . . . .                   | 32        |
| 11.5        | Сведение ПИВР-а к ПИПР-у. . . . .                                       | 33        |
| <b>VII</b>  | <b>Седьмой билет</b>  | <b>34</b> |
| <b>12</b>   | <b>Элементы векторного анализа</b>                                      | <b>34</b> |
| 12.1        | Скалярные и векторные поля . . . . .                                    | 34        |
| 12.2        | Вектор Гамильтона . . . . .   | 34        |
| <b>13</b>   | <b>Формула Остроградского – Гаусса</b>                                  | <b>35</b> |
| 13.1        | Доказательство формулы . . . . .  | 35        |
| 13.2        | Приложения формулы Остроградского–Гаусса . . . . .                      | 36        |
| 13.3        | Соленоидальные векторные поля. . . . .                                  | 36        |
| <b>VIII</b> | <b>Восьмой билет</b>  | <b>38</b> |
| <b>14</b>   | <b>Формула Стокса.</b>  | <b>38</b> |
| 14.1        | Простая гладкая поверхность. . . . .                                    | 38        |
| 14.2        | Кусочно гладкая поверхность. . . . .                                    | 38        |
| 14.3        | Инвариантность ротора. . . . .  | 39        |
| 14.4        | Потенциальные векторные поля. . . . .                                   | 39        |

## Часть I

# Первый билет.

## Функции, заданные неявно

### Основные понятия

$$F(x, y) = 0 \text{ - уравнение функции двух переменных;} \quad (1)$$

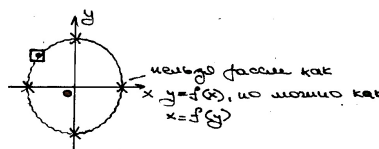
$$D_F = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : F(x, y) = 0\} \text{ - график уравнения 1. } D_F \leftrightarrow Ox$$

### Примеры

$$1. x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$f_x = 2x; f_y = 2y$$

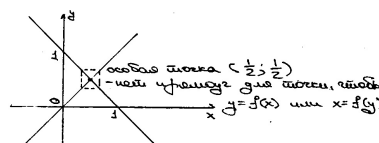
Точку  $(1, 0)$ , например, нельзя рассматривать как  $y=f(x)$ , но можно как  $x=f(y)$



$$2. (x - y)(x + y - 1) = 0$$

$$f_x = (x + y - 1) + (x - y); f_y = -(x + y - 1) + (x - y)$$

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  - особая точка, где обе 0. Ни по  $Ox$ , ни по  $Oy$  нет биекции.



## Теорема о неявно заданной функции

Достаточное условие, при котором уравнение 1 локально определяет  $y$  как  $f(x)$  и  $y$  обладает некоторыми дифф. свойствами.

**Теорема 1.** Если для  $F(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  выполнены условия (1 – 3):

$$1. F(x_0, y_0) = 0$$

2. в некоторой окр  $U(x_0, y_0)$  функция  $F$  обладает непрерывными частными производными

$$3. F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

То  $\exists \Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq r_1, |y - y_0| \leq r_2\} \in U(x_0, y_0)$  в пределах которого уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет  $y$  как функцию переменной  $x$  ( $y = f(x)$ ), которая непрерывно дифференцируема на  $(x_0 - r_1, x_0 + r_1)$  и  $y' = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \big|_{y=f(x)}$

## Доказательство. I. Существование неявно заданной функции

- $3 \Rightarrow$  Пусть  $F_y(x_0, y_0) > 0 \rightarrow_{(2)} \exists \Pi_1 = \{(x, y) : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r_2\} \in U(x_0, y_0)$   
 такой, что  $\forall (x, y) \in \Pi_1 \rightarrow F_y(x, y) > 0$   
 $\psi(y) = F(x_0, y), \psi(y_0) = 0, \psi$ - возрастает на  $[y_0 - r_2, y_0 + r_2]$   
 $\psi'(y) = F_y(x_0, y) > 0, \forall y \in [y_0 - r_2, y_0 + r_2] \Rightarrow \psi(y_0 - r_2) < 0, \psi(y_0 + r_2) > 0$   
 $F(x_0, y_0 - r_2) < 0, F(x_0, y_0 + r_2) > 0$   
 $\exists r_1 \in (0, r) : F(x, y_0 - r_2) < 0, F(x, y_0 + r_2) > 0, \forall x \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$   
 $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq r_1, |y - y_0| \leq r_2\} \in U(x_0, y_0)$
- Покажем, что в  $\Pi$  уравнение  $f(x, y) = 0$  определяет  $y$  как функцию от  $x$ :  
 Выберем произвольный  $\bar{x} \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$   
 $\phi(y) = F(\bar{x}, y), \phi(y_0 - r_2) < 0, \phi(y_0 + r_2) > 0$   
 $\phi'(y) = F_y(\bar{x}, y) > 0$  в  $\Pi \subset \Pi_1$   
 $\phi(y)$  непрерывна на  $[y_0 - r_2; y_0 + r_2] \Rightarrow$  по теореме о промежуточном значении  
 $\exists! \bar{y} \in (y_0 - r_2; y_0 + r_2) : \phi(\bar{y}) = 0$   
 $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  в силу произвольности выбора  $\bar{x} \quad y = f(x)$

## II. Дифференцируемость

$\Pi_1 = \{(x, y) : |x - x_0| \leq r_1, |y - y_0| \leq r_2\}$   
 $(x_0, y_0) \in \Pi, F(x_0, y_0) = 0, (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in \Pi$  и  $F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$ ;  
 $\Delta F = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0$ ;  
 $\Delta F = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0 + \Delta y) + F(x_0, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0$ ;  
 Мы свели приращение функции двух переменных к сумме двух приращений функций, зависящих только от одной переменной  $\Rightarrow$  Можем воспользоваться теоремой Лагранжа.  
 $\exists \Theta_1, \Theta_2 : 0 < \Theta_i < 1 : \Delta F = F_x(x_0 + \Theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + F_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \Theta_2 \Delta y) \Delta y = 0$ ;

$$\Delta y = -\frac{F_x(x_0 + \Theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)}{F_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \Theta_2 \Delta y)} \Delta x \Rightarrow |\Delta y| \leq \frac{M}{m} |\Delta x|$$

$\Rightarrow$  при  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \quad F_y$  непрерывно в  $\Pi$  - компакт  $\Rightarrow \exists m > 0 : f_y(x, y) \geq m; \exists M > 0 : |F_x(x, y)| \leq M$  на  $\Pi$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x_0 + \Theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)}{F_y(x_0, y_0 + \Theta_2 \Delta y)}; \quad f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, f(x_0))}{F_y(x_0, f(x_0))}; \quad y_0 = f(x_0);$$

В силу произвольности  $(x_0, y_0)$  производная существует на всем  $(x_0 - r_1, x_0 + r_1)$  □

## Замечание

Теорема остается справедливой, если в  $F(x, y) = 0, x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

$$\Pi = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, y) : |x_i - x_i^0|_{i=\overline{1, m}} \leq r_i, |y - y_0| \leq \rho\}$$

## Неявные функции, определяемые системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

$x^0 \in \mathbb{E}^m, y^0 \in \mathbb{E}^n$ ;

$\Pi(x^0) = \{x \in \mathbb{E}^m : |x_i - x_i^0| \leq r_i, i = \overline{1, m}\}$

$\Pi(y^0) = \{y \in \mathbb{E}^n : |y_i - y_i^0| \leq \rho_i, i = \overline{1, n}\}$

$\Pi = \Pi(x^0) \times \Pi(y^0) = \{(x, y) \in \mathbb{E}^{n+m} : x \in \Pi(x^0), y \in \Pi(y^0)\}$

Система определяет в  $\Pi$   $y_1, \dots, y_n$  как неявные функции переменных  $x_1, \dots, x_m$ , если  $\forall x \in \Pi(x^0)$  ставится в соответствие такое  $y \in \Pi(y^0)$ , что  $f_i(x, y) = 0, i \in \overline{1, n}$

**Теорема 2.** Пусть

1.  $f_i(x^0, y^0) = 0, i \in \overline{1, n}$
2. Функции  $f_i, i \in \overline{1, n}$  обладают в некоторой окрестности  $U(x^0, y^0)$  непрерывностью частных производных по переменным  $x_j, j \in \overline{1, m}$  и  $y_i, i \in \overline{1, n}$

$$3. \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} (x^0, y^0) \neq 0$$

Тогда  $\exists \Pi = \Pi(x^0) \times \Pi(y^0) \subset U$ , в пределах которого система определяет переменные  $y_1, \dots, y_n$  как неявно заданные функции переменных  $x_1, \dots, x_m$  и эти функции  $y_i = \phi_i(x)$  обладают непрерывными частными производными в  $\Pi(x^0)$  и  $y_i^0 = \phi_i(x^0), i \in \overline{1, n}$

## Локальная обратимость регулярных отображений

$X \subset \mathbb{E}^N, f_1, \dots, f_n; f : X \rightarrow \mathbb{E}^n$

$\forall x \in X \leftrightarrow y = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \Leftrightarrow y$  - образ т. х:  $y = f(x)$ ; прообраз х

$f = (f_1, \dots, f_n)$ ;

$X_1 \subset X; f(X_1) = \{y : y = f(x), x \in X_1\}$  - образ множества  $X_1$  при  $f$ .

$Y_1 \subset f(X); f^{-1}(Y_1) = \{x : y = f(x) \in Y_1\}$  - прообраз  $Y_1$  при  $f$   $f : U \rightarrow \mathbb{E}^n, U$  - открыт

**Определение.** Отображение  $f$  называется непрерывным ( $\Leftrightarrow$  компоненты непрерывны) в точке  $x^0 \in U$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : \rho(x, x^0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x^0)) < \varepsilon$ .

Где  $\rho$  - евклидова метрика

$$y^0 = f(x^0); y = f(x); \forall B_\varepsilon(y^0) \exists B_\delta(x^0) : f(B_\delta(x^0)) \subset B_\varepsilon(y^0)$$

**Определение.** Отображение  $f$  называется непрерывным на  $U$ , если оно непрерывно в каждой точке из  $U$

**Теорема 3.** Если  $U$  открыто и отображение  $f : U \rightarrow \mathbb{E}^n$  непрерывно, то прообраз каждого открытого множества  $V \subset f(U)$  есть открытое множество

*Доказательство.*  $V \subset f(U)$  - открыто.

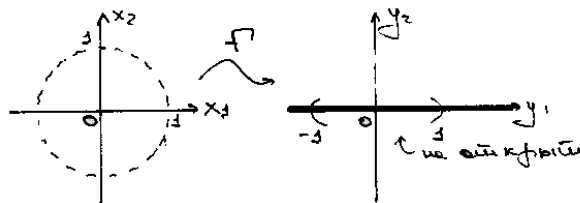
$$\forall y^0 \in V \exists B_\varepsilon(y^0) \subset V \xrightarrow{f - \text{непр.}} \exists B_\delta(x^0) : f(B_\delta(x^0)) \subset B_\varepsilon(y^0) \subset V$$

Здесь  $y^0 = f(x^0)$ ;  $B_\delta(x^0) \subset f^{-1}(V)$  □

$$f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2; f = (f_1, f_2) :$$

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1; y_2 = f_2(x_1, x_2) = 0;$$

$$\Delta_f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$



**Определение.** Отображение  $f$  называется непрерывно дифференцируемым, если  $f_i, i = \overline{1, n}$ , обладает непрерывными частными производными в  $U$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \Delta_f(x) - \text{якобиан отображения } f \text{ в т. } x$$

**Определение.** Непрерывное дифференцируемое отображение  $f$  называется регулярным, если  $\Delta_f(x) \neq 0, \forall x \in U$

**Теорема 4.** Если  $G$  - открытое множество и  $f : G \rightarrow \mathbb{E}^n$  регулярно, то  $f$  локально регулярно обратимо, т.е.  $\forall x^0 \in G : f(x^0) = y^0 \exists U(x^0) \subset G$  и  $V(y^0) \subset f(G)$  - открытые такие, что отображение  $f : U \rightarrow V$  биективно и обратное отображение регулярно.

*Доказательство. I. Биективность.* Зададим систему уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = y_1 - f_1 \equiv 0 \\ \vdots \\ F_n(x, y) = y_n - f_n \equiv 0 \end{cases}$$

Для неё выполнены условия теоремы о неявных функциях, заданных системой.

$$1. F_i(x^0, y^0) = 0, i = \overline{1, n}$$

$$2. F_1 - \text{обл. непрерывными ч.п. по переменным } x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$$

$$3. \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \Delta_f(x) \neq 0, \forall x \in U$$

$\xrightarrow{\text{теорема 2}} \exists \Pi(x^0)$  и  $\exists \Pi(y^0) : \text{в } \Pi = \Pi(x^0) \times \Pi(y^0)$  система определяет переменные  $x_1 = \phi(y_1^0, \dots, y_n^0), i = \overline{1, n}$ ; как неявные непрерывно дифференцируемые на  $\Pi$

$V(y^0) = \text{int } \Pi(y^0), f^{-1}(V(y^0)) = U(x^0)$  - прообраз открытого открыт  
 $f : U(x^0) \rightarrow V(y^0); f^{-1} : V(y^0) \rightarrow U(x^0)$



**II. Регулярность.**  $y_j = f_j(\phi_1(y_1, \dots, y_n), \dots, \phi_n(y_1, \dots, y_n)), j = \overline{1, n}$  дифф по  $y_k$

$$\frac{y_j}{y_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_k}; \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Delta_f(x) \cdot \Delta_{f^{-1}}(y) = 1 \Rightarrow \Delta_{f^{-1}}(y) \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f^{-1}$  – регулярное отображение (т.к.  $\Delta_f(x) \neq 0$ ) □

**Следствие:**

Если  $G$  - открытое и  $f : G \rightarrow \mathbb{E}^n$  регулярно, то образ любого открытого множества открыт.

*Доказательство.*  $V = f(G)$ ;  $U_1 \subset G$  - открыто,  $x^0 \in U_1$ ;  $y^0 = f(x^0)$

по теореме 3  $\Rightarrow \exists U(x^0)$  и  $\exists V(y^0) : f : U(x^0) \rightarrow V(y^0)$ ;

$\forall x^0 \in U_1 \exists V(y^0) \subset f(U_1) = V_1 \subset G, f(x^0) = y^0$  □

## Часть II

# Второй билет

## Локальные экстремумы функций многих переменных

### Определение и необходимые условия существования экстремумов

$$\omega = f(x), x \in \mathbb{E}^m, x = (x_1, x_2, \dots, x_m), x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$$

**Определение.** Точка  $x^0$  называется точкой локального минимума [максимума] функции  $\omega = f(x)$ , если  $\exists B_\delta(x^0) : \forall x \in B_\delta(x^0)$  выполнено  $f(x^0) < f(x)$  [ $f(x^0) > f(x)$ ]

**Теорема 1** (Необходимое условие существования локального экстремума). Если функция  $\omega = f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$  и имеет в этой точке локальный экстремум, то все ее частные производные в этой точке равны 0 т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) = 0$$

*Доказательство.* Фиксируем  $x_2^0, \dots, x_m^0$ ;  $f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) = f(x_1)$ ;  $f'(x_1^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$ .  $f$  диф. в точке  $x_1^0$  и имеет в ней локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма  $f'(x_1^0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$ . Равенство 0 остальных ч.п. доказывает аналогично.  $\square$

**Предложение.** Теорема 1 - необходимое, но не достаточное условие существования локального экстремума. например:

$\omega = xy$ ;  $(0,0) : \frac{\partial \omega}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \omega}{\partial y}(0,0) = 0$ , но  $\nexists B_\delta(0,0) : \forall (x,y) \in B_\delta \rightarrow \omega(x,y) > \omega(0,0) = 0$  или  $\omega(x,y) < \omega(0,0) = 0$ .

**Определение.** Точка  $x^0 : \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) = 0$  - стационарная точка

**Теорема (1').** Если  $\omega = f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$  и имеет в этой точке лок. экстремум, то дифференциал  $df(x^0) \equiv 0$  относ дифф. независ. перем.  $dx_1, \dots, dx_m$

*Доказательство.*  $df(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0)dx_m$ ; из т.1  $\Rightarrow df(x^0) = 0$   $\square$

### Достаточное условие существования локального экстремума

$\omega = f(x)$ ,  $x^0 : \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_m^0) = 0$ ;  $f$  -дважды непрерывно дифференцируема в точке  $x^0$  т.е.  $d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} dx_i dx_j$ ;  $a_{ij} = a_{ji}$ ;

Это квадратичная форма относительно  $dx_i, i = \overline{1, m}$ ;  $k = k(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i x_j$ ;  $a_{ij} = a_{ji}$

1.  $k(x)$  - положительно определенная кв. форма:  $\forall x \neq 0 \rightarrow k(x) > 0$

2.  $k(x)$  - отрицательно определенная кв. форма:  $\forall x \neq 0 \rightarrow k(x) < 0$
3.  $k(x)$  - положительно полуопредел. кв. форма:  $\forall x \rightarrow k(x) \geq 0$  &  $\exists x \neq 0 : k(x) = 0$
4.  $k(x)$  - отрицательно полуопредел. кв. форма:  $\forall x \rightarrow k(x) \leq 0$  &  $\exists x \neq 0 : k(x) = 0$
5.  $k(x)$  - неопределенная кв. форма:  $\exists x', x'' : k(x') > 0$  &  $k(x'') < 0$

**Теорема 2.** Пусть  $\omega = f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки  $x^0$ .

1. Если  $d^2 f(x^0)$  положительно определенная кв. форма, то  $x^0$  - точка лок. *min*
2. Если  $d^2 f(x^0)$  отрицательно определенная кв. форма, то  $x^0$  - точка лок. *max*
3. Если  $d^2 f(x^0)$  неопределенная кв. форма, то  $x^0$  не является точкой лок. экстремума функции

*Доказательство.* 1.  $f(x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{1}{2}d^2 f(x^0) + o(\rho^2), \rho \rightarrow 0; df(x^0) = 0$  по т.1'.  
 $dx_1 = x_1 - x_1^0; \dots; dx_m = x_m - x_m^0; \rho = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2}$   
 $o(\rho^2) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \alpha(\rho)\rho^2, \alpha(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0,$   
 Обозначим  $h_i = \frac{x_i - x_i^0}{\rho}; i = \overline{1, m}; |h_i| \leq 1; h_i^2 + \dots + h_m^2 = 1; h = (h_1, \dots, h_m)$ . Тогда:

$$f(x) - f(x^0) = \rho^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} h_i h_j + \alpha(\rho) \right]$$

Функция  $k(h) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} h_i h_j$  - непрерывна на компакте  $S = \{h : h_1^2 + \dots + h_m^2 = 1\}$

Тогда по 2 теореме Вейерштрасса:

$$\begin{aligned} \exists h' \in S : h' \neq 0, k(h') = \mu > 0, \exists \rho' > 0 : \forall \rho < \rho' \rightarrow |\alpha(\rho)| < \frac{\mu}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \rho < \rho' \rightarrow f(x) - f(x^0) > 0. \sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 < \rho^2 \end{aligned}$$

2. Аналогично 1 пункту

3. Как и в первом пункте  $f(x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{1}{2}d^2 f(x^0) + o(\rho^2), \rho \rightarrow 0; df(x^0) = 0$  по т. 1'.  $dx_1 = x_1 - x_1^0 \dots dx_m = x_m - x_m^0; \rho = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2}$   
 $o(\rho^2) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \alpha(\rho)\rho^2, \alpha(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0,$   
 $h_i = \frac{x_i - x_i^0}{\rho}; i = \overline{1, m}; |h_i| \leq 1; h_i^2 + \dots + h_m^2 = 1; \text{Тогда } h'_i = \frac{x'_i - x^0}{\rho}, h''_i = \frac{x''_i - x^0}{\rho}; i = \overline{1, m};$   
 $\exists h' = (h'_1, \dots, h'_m), h'' = (h''_1, \dots, h''_m) : k(h') > 0, k(h'') < 0$   
 $f(x') - f(x^0) = \rho^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{i,j} h'_i h'_j + \alpha(\rho) \right] \Rightarrow \exists \rho' : \forall \rho < \rho' f(x') - f(x^0) > 0$   
 $f(x'') - f(x^0) = \rho^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{i,j} h''_i h''_j + \alpha(\rho) \right] \Rightarrow \exists \rho'' : \forall \rho < \rho'' f(x'') - f(x^0) < 0$

□

**Предложение.** 1. Если  $x^0$  - стационарная точка,  $\omega = f(x)$  и  $d^2f(x^0)$  - положительно [отрицательно] полуопределенная кв. форма, то о существовании локального экстремума нельзя ничего сказать.  $\omega = f_1(x,y) = (x-y)^4$ ,  $\omega = f_2(x,y) = x^4 + y^4$ ;  $(x^0, y^0) = (0,0)$  - стационарная точка  $f_1$  и  $f_2$ . Тогда:

$df_1 = 4(x-y)^3(dx-dy)$ ;  $d^2f_1 = 12(x-y)^2(dx-dy)^2$ ;  $d^2f_1(x,x) = 0$  - полуопределенная кв. форма.

$df_2 = 4x^3dx + 4y^3dy$ ;  $d^2f_2 = 12x^2dx^2 + 12y^2dy^2 > 0$  везде кроме  $(0,0)$  - точки локального минимума функции  $f_2$ ;  $f_2(0,0) = 0$

2. Условие  $d^2f(x^0) \geq 0$  [ $d^2f(x^0) \leq 0$ ] - необходимое условие локального экстремума.

### Примеры

(a)  $\omega = x^4 + y^4 - 2x^2$ ;  $d\omega = (4x^3 - 4x)dx + 4y^3dy$ ;  $d^2\omega = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy^2$   
 $M_1(0,0)$ ,  $M_2(1,0)$ ,  $M_3(-1,0)$

$d^2\omega(M_1) = -4dx^2 < 0$ ;  $\forall dx \neq 0 \Rightarrow M_1$  - локальный max

$d^2\omega(M_2) = 8dx^2 > 0$ ;  $\forall dx \neq 0 \Rightarrow M_2$  - локальный min

$d^2\omega(M_3) = 8dx^2 > 0$ ;  $\forall dx \neq 0 \Rightarrow M_3$  - локальный min

(b)  $\omega = \lambda x_1^2 + x_2^2 + \dots + 2x_2 + \dots + 2x_m$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$

$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 2\lambda x_1$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 2x_2 + 2$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial x_m} = 2x_m + 2$ ;

Стационарная точка  $M(0, -1, \dots, -1)$

$d^2\omega = 2\lambda dx_1^2 + 2dx_2^2 + \dots + 2dx_m^2$ ; Тогда есть два случая:

i.  $\lambda > 0 \Rightarrow d^2\omega(M) > 0 \forall (dx_1, \dots, dx_m) \neq (0, \dots, 0)$   $M$  - точка лок. min

ii.  $\lambda < 0$   $(dx_1, \dots, dx_m) = (1, 0, \dots, 0)$   $d^2\omega < 0$

$(dx_1, \dots, dx_m) = (0, 1, 0, \dots, 0)$   $d^2\omega > 0$  локальный экстремум

## Понятие условного экстремума

**Пример**  $\omega = x^2 + y^2$ , при условии  $x + y - 1 = 0$ .

$y = 1 - x$ ,  $\omega = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$

$\omega' = 2(2x + 1) = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}$   $\omega'' = x > 0 \rightarrow x_0$  - локальный минимум  $\omega = \omega(x)$

$M_0(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$  - т. условного минимума  $\omega = x^2 + y^2$  при  $x + y - 1 = 0$ ;  $\omega = \frac{1}{2}$ . Абсолютный экстремум  $\omega = 0$  в  $(0;0)$

### Общая постановка задачи

$\omega = f(x,y)$ ,  $x \in \mathbb{E}^m$ ,  $y \in \mathbb{E}^n$ ;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ;

$$\Phi_1(x,y) = 0, \Phi_2(x,y) = 0, \dots, \Phi_n(x,y) = 0; \quad - \text{условия связи} \quad (2)$$

Условия связи 2 в пространстве  $\mathbb{E}^{m+n}$  определяют множество  $\mathbb{X}$ :

$$\mathbb{X} = \{(x,y) : \Phi_1(x,y) = 0, \Phi_2(x,y) = 0, \dots, \Phi_n(x,y) = 0\}; \dim \mathbb{X} = m$$

**Определение** (Точка условного минимума). точка  $M_0(x^0, y^0) : \Phi_i(x^0, y^0) = 0, \forall i = \overline{1, n}$ , называется точкой усл.  $\min$  [ $\max$ ] функции  $\omega = f(x, y)$ , при условиях связи 2, если

$$\exists B_\varepsilon(M_0) : \forall (x, y) \in B_\varepsilon(M_0) \cap \mathbb{X} \Rightarrow f(x^0, y^0) < f(x, y) [f(x^0, y^0) > f(x, y)]$$

## Необходимые условия существования усл. экстремума

$M_0(x^0, y^0) : \Phi_i(x^0, y^0) = 0, i = \overline{1, n}; f, \Phi_1, \dots, \Phi_n$  - непр дифф в некоторой окр  $U(M_0)$

$$\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} = \Delta_{\Phi, y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} (M_0) \neq 0$$

$\exists \Pi = \Pi(x^0) \times \Pi(y^0) \subset U(M_0) : y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m) \dots y_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_m)$

$\omega = f(x) = f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = f(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$

Если  $x^0$ - точка лок. экстремума  $f, \Rightarrow df(x^0) \equiv 0 \forall dx_1, \dots, dx_m \Rightarrow$

$$\Rightarrow df(x^0, y^0) \equiv 0 = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) dx_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(M_0) dy_j$$

где  $dy_j(M_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0) dx_i, j = \overline{1, n}$

$$A_1 dx_1 + \dots + A_m dx_m \equiv 0 \forall dx_1, \dots, dx_m \Rightarrow$$

**Необх. условие существования лок. условного экстремума:**  $A_1 = \dots = A_m = 0$ .

**Замечания:**

1. Теорема о функциях, заданных неявно системой уравнений, говорит только о существовании функций  $\varphi_1 \dots \varphi_n$ , но не дает метода их нахождения
2. В приведенных рассуждениях  $x_1, \dots, x_m$  - независимые переменные, а  $y_1, \dots, y_n$  - зависимые

Если  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  - неизвестны, то  $dy_j(M_0)$  можно найти как:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_m}(M_0) dx_m + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(M_0) dy_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n}(M_0) dy_n = 0 \quad (3)$$

$$\vdots \quad (4)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_m}(M_0) dx_m}_{D+\mathbb{J}dy=0} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1}(M_0) dy_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n}(M_0) dy_n = 0 \quad (5)$$

## Метод Лагранжа

Выполненные условия связи 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)dx_m + \frac{\partial f}{\partial y_1}(M_0)dy_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n}(M_0)dy_n = 0 \\ D + \mathbb{J}dy = 0 \mid \times \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \right\} + \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^m \left[ \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k}(M_0) \right] dx_k +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial y_j}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_j}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_j}(M_0) \right] dy_j = 0$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  выбираются таким образом, чтобы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y_1}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1}(M_0) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_n}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n}(M_0) = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}(M_0) = 0, k = \overline{1, m} \right] \quad (7)$$

$\exists! \lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0);$

Подставляем  $\lambda_0 : \sum_{k=1}^m \left[ \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) + \lambda_1^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k}(M_0) + \dots + \lambda_n^0 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k}(M_0) \right] dx_k = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) + \lambda_1^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(M_0) + \dots + \lambda_n^0 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(M_0) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0) + \lambda_1^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_m}(M_0) + \dots + \lambda_n^0 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_m}(M_0) = 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial y_j}(M_0) = 0, j = \overline{1, n} \right] \quad (9)$$

В итоге из этого всего имеем  $2n+m$  уравнений для нахождения  $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$

**Теорема 3** (необходимое условие существования локального экстремума). Пусть функции  $f, \Phi_1, \dots, \Phi_n$  непрерывно дифф. в  $U(M_0)$ ,  $\Delta_{\Phi, y} \neq 0$ , и  $M_0(x_0, y_0)$  - т. локального условного экстремума функции  $\omega = f(x, y)$  при условиях связи  $\Phi_1(x, y) = 0, \dots, \Phi_n(x, y) = 0$ . Тогда найдутся числа  $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0) = \lambda^0$  такие, что в точке  $M_0$  выполнены 8 и 6. Тогда  $\Lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda_1 \Phi_1(x, y) + \dots + \lambda_n \Phi_n(x, y)$  - функция Лагранжа.

**Следствие:**

Пусть выполнены условия теоремы 3. Если  $M_0$  является точкой локального условного экстремума функции  $\omega = f(x, y)$  при условии связи  $\Phi_1(x, y) = 0, \dots, \Phi_n(x, y) = 0$ ; то в ней выполнены равенства 9 и 7, т.е.  $M_0$  - стационарная точка функции Лагранжа.

## Достаточные условия существования условного экстремума

$$\Lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda_1 \Phi(x, y) + \dots + \lambda_n \Phi_n(x, y);$$

$$\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0); \quad x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0); \quad y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} = 0 & k = \overline{1, m} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y_j} = 0 & j = \overline{1, n} \\ \Phi_i = 0; & i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (10)$$

$f, \Phi_1, \dots, \Phi_n$  дважды непрерывно дифференцируемы в  $U(M_0)$ ,  $\Delta_{\Phi, y}(M_0) \neq 0$ ;  $M_0(x^0, y^0) \in X$ ,  $M(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) \in X$

$$\Delta f(M_0, (\Delta x, \Delta y)) = f(M) - f(M_0) = \Lambda(M, \lambda^0) - \Lambda(M_0, \lambda^0) = \Delta \Lambda(M_0, \lambda^0, \Delta x, \Delta y)$$

$$\begin{aligned} \Delta \Lambda(M_0, (\Delta x, \Delta y)) &= \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k,j=1}^m \frac{\partial^2 \Lambda(M_0)}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_k \Delta x_j + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda(M_0)}{\partial x_k \partial y_j} \Delta x_k \Delta y_j + \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda(M_0)}{\partial y_k \partial y_j} \Delta y_k \Delta y_j \right] + \\ &\quad + \sum_{k,j=1}^m \alpha_{kj}^1 \Delta x_k \Delta x_j + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{kj}^2 \Delta x_k \Delta y_j + \sum_{k,j=1}^n \alpha_{kj}^3 \Delta y_k \Delta y_j = \\ &= \left/ \begin{array}{l} \alpha_{kj}^i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0 \\ \Delta x_j = dx_j; \Delta y_j = \alpha y_j + \gamma_j, \gamma \rightarrow 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{при } \Delta x \rightarrow 0; \alpha_{kj}^2, \alpha_{kj}^3 \text{ зависят от } \Delta x, \Delta y \\ \text{при } \Delta x \rightarrow 0; j = \overline{1, n} \\ \text{при } \Delta x \rightarrow 0; j = \overline{1, n} \end{array} \right/ = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k,j=1}^m \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_k \partial x_j} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_k \partial y_j} dx_k dy_j + \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y_k \partial y_j} dy_k dy_j \right] + \\ &\quad + \sum_{k,j=1}^m \widetilde{\alpha}_{kj}^1 dx_k dx_j + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \widetilde{\alpha}_{kj}^2 dx_k dy_j + \sum_{k,j=1}^n \widetilde{\alpha}_{kj}^3 dy_k dy_j \\ dy_j(M_0) &= \sum_{k=1}^m C_k dx_k; \quad d^2 \widetilde{\Lambda}(M_0, (\Delta x, \Delta y)) = \sum_{k,j=1}^m A_{kj} dx_k dx_j; \quad A_{kj} = A_{jk} \\ \Delta &= \Lambda(M_0, (\Delta x, \Delta y)) = d^2 \hat{\Lambda}(M_0) + \beta(\Delta x), \quad \beta(\Delta x) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \\ d^2 \hat{\Lambda}(M_0) &= d^2 \Lambda(M_0) \text{ т.к. первые производные функции Лагранжа в стационарной точке } M_0; \quad = 0 \Rightarrow d^2 y \text{ равны } 0 \end{aligned}$$

**Теорема 4.** Пусть  $f$  и  $\Phi_j, j = \overline{1, n}$  дважды дифф функции в  $U(M_0)$  ( $M_0$  - стационарная точка функции Лагранжа) и  $\Delta_{\Phi, y}(M_0) \neq 0$  тогда

1. Если  $d^2 \hat{\Lambda}(M_0)$  положительно определенная квадратичная форма, то  $M_0$  - точка условного минимума функции  $f$  при условии связи
2. Если  $d^2 \hat{\Lambda}(M_0)$  отрицательно определенная квадратичная форма, то  $M_0$  - точка условного максимума функции  $f$  при условии связи
3. Если  $d^2 \hat{\Lambda}(M_0)$  неопределенная квадратичная форма, то экстремума нет

**Замечание:** если  $d^2 \hat{\Lambda}(M_0)$  полуопределенная кв. форма, то нужно проводить дополнительные исследования

## Часть III

# Третий билет

## Кратные интегралы

### Определения и свойства

**Определение.** Совокупность измеримых открытых множеств  $T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$  называется разбиением множества  $\Omega$  ( $\bar{\Omega}$  - его замыкание), если:

1.  $\Omega_k \subset \Omega$ ,  $k = \overline{1, n}$
2.  $\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset$ , если  $k \neq j$
3.  $\bigcup_{k=1}^n \bar{\Omega}_k = \bar{\Omega}$

**Определение.**  $\Delta(\Omega) = \sup_{x, y \in \Omega} \rho(x, y)$  - диаметр множества. ( $\Omega$  - огранич. мн-во)

**Определение.** Число  $\Delta_T = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta(\Omega_k)$  - называется мелкостью разбиения  $T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$

**Определение.** Разбиение  $T' = \{\Omega'_j\}$  - называется измельчением разбиения  $T = \{\Omega_k\}$  если  $\forall \Omega'_j \subset T \exists \Omega_k \subset T : \Omega'_j \subset \Omega_k$

### Свойства измельчения:

1. Если  $T'$  измельчение  $T$ , а  $T''$  - измельчение  $T'$  то  $T''$  измельчение  $T$
2. Для двух разбиений  $T' = \{\Omega'_k\}$  и  $T'' = \{\Omega''_j\}$  множества  $\Omega \exists$  разбиение  $T$  множества  $\Omega$ , что  $T$  будет измельчением разбиений  $T'$  и  $T''$

**Замечание:** Если  $G = \bigcup_{j=1}^p Q_j$  ( $\text{int}(Q_k)$  - внутренность) клеточное множество и  $\Omega \subset G$  то в качестве разбиения множества  $\Omega$  можно взять  $T = \{\Omega_k\}$ , где  $\Omega_k = \Omega \cap \text{int}(Q_k)$ ,  $k = \overline{1, p}$

## Интегральные суммы. Кратный интеграл Римана.

$T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$ ,  $\omega = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{E}$ , опред. на  $\bar{\Omega}$ ;  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} : \xi_k \in \bar{\Omega}_k$

**Определение.**  $I\{T, \xi\} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) m(\Omega_k)$  - интегральная сумма функции  $f$

**Определение.**  $m(\Omega_k)$  - мера множества  $\Omega_k$

**Определение.** Число  $I$  называется пределом интегральных сумм  $I\{T, \xi\}$ , при мелкости разбиения стремящейся к 0, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \ \& \ \forall \xi \rightarrow |I\{T, \xi\} - I| < \varepsilon$$

**Определение** (Кратный интеграл Римана). Число  $I$ , являющееся пределом интегральных сумм при  $\Delta_T \rightarrow 0$  называется кратным интегралом Римана функции  $f$  по множеству  $\Omega$   $[\bar{\Omega}]$ . А функция  $f$  называется интегрируемой по риману по множеству  $\Omega$   $[\bar{\Omega}]$ .

**Обозначение:**  $\int_{\Omega} f(x) d\omega = \int \dots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \int \dots \int_{\Omega} f dx_1 \dots dx_m$

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{E}^m$   $f$  - измеримая область, а  $\omega = f(x)$  опред. и инт. на  $\bar{\Omega}$  тогда эта функция ограничена на  $\bar{\Omega}$



**Пример:**  $\omega = f(x) \equiv c; \forall x \in \bar{\Omega}, \Omega$  - измеримое множество.

$$\forall T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n \quad \forall \xi \quad I = \{T, \xi\} = \sum_{k=1}^n C \cdot m(\Omega_k) = C \cdot m(\Omega)$$

**Теорема 2.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{E}^m$  - измеримая область,  $\omega = f(x)$  опр. и огр на  $\bar{\Omega}$ .  $f(x) \equiv 0$  на  $\bar{\Omega} \setminus \Gamma$ ,  $m(\Gamma) = 0$ , тогда  $f$  интегрируема на  $\Omega$  и  $\int_{\Omega} f d\omega = 0$

*Доказательство.*  $\exists c > 0 : \forall x \in \bar{\Omega} \rightarrow |f(x)| \leq c$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists G_{\varepsilon} = \bigcup_{j=1}^p Q_j : \Gamma \subset G_{\varepsilon} \text{ и } 0 \leq m(\Gamma) \leq m(G_{\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{c}$$

$T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n, \tilde{T} = T' \cup T'' = \{\Omega'_k\} \cup \{\Omega''_j\};$  где  $\Omega'_k = \Omega_k \setminus \overline{G_{\varepsilon}}$  и  $\Omega''_j = \Omega_j \cap (\text{int}(Q_i)), i = \overline{1, p}, j = \overline{1, n}$ . И т.к. на  $\Omega'_k$  функция  $f(x) \equiv 0$ , а  $\Omega''_j$  содержит точки из  $\Gamma$  получим:

$$\forall \xi \rightarrow |I\{\tilde{T}, \xi\}| = \left| \sum_j f(\xi_j) m(\Omega''_j) \right| \leq c \cdot m(G_{\varepsilon}) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \quad \square$$

## Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Инт. непр. функций

$\Omega \subset \mathbb{E}^m$  измеримая область.  $\omega = f(x)$  определена и ограничена на  $\bar{\Omega}$ .  $T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$  - разбиение  $\Omega$ .  $m_k = \inf_{x \in \bar{\Omega}_k} f(x), M_k = \sup_{x \in \bar{\Omega}_k} f(x)$

$$S_*(T) = \sum_{k=1}^n m_k m(\Omega_k); S^*(T) = \sum_{k=1}^n M_k m(\Omega_k); \text{ - нижняя и верхняя суммы Дарбу}$$

**Теорема 3** (Критерий интегрируемости). Пусть  $\omega \subset \mathbb{E}$  - измеримая область, а функция  $\omega = f(x)$  опр. и огр. на  $\bar{\Omega}$ . Для того, чтобы  $f$  была интегрируема на  $\Omega$  необходимо и достаточно чтобы  $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists T : |S^*(T) - S_*(T)| < \varepsilon}$

**Теорема 4** (Интегрируемость функции, непрерывной на замкнутом измеримом мн-ве). Функция  $\omega = f(x)$  непр. на замыкании измеримой области  $\Omega$  интегрируема на ней.

Доказательства этих теорем уходят корнями в прошлый семестр.

## Свойства кратных интегралов

**Предложение.** Если  $\Omega \subset \mathbb{E}^m$  - измеримая область, то  $\int_{\Omega} d\omega = m(\Omega)$

*Доказательство.*  $f(x) \equiv 1$  на  $\bar{\Omega}, \forall x \in \bar{\Omega}, \Omega$  - измеримое множество.  $\square$

**Теорема 5** (интегрируемость подмнож.). Пусть  $\Omega \subset \mathbb{E}^m$  и  $\Omega' \subset \Omega$  измеримые области и функция  $\omega = f(x)$  интегрируема на  $\Omega$ , тогда  $f$  интегрируема на множестве  $\Omega'$

*Доказательство.*  $\Omega' \neq \Omega; f$  интегрируема на  $\Omega$ .  $T = \{\Omega_k\}, T' = \{\Omega'_k\}$ , где  $\Omega'_k = \Omega_k \cap \Omega'$  тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists T : S^*(T) - S_*(T) < \varepsilon;$

$$M'_k = \sup_{\bar{\Omega}'_k} f \leq \sup_{\bar{\Omega}_k} f = M_k; m'_k = \inf_{\bar{\Omega}'_k} f \geq \inf_{\bar{\Omega}_k} f = m_k \Rightarrow$$

$$S^*(T') - S_*(T') \leq S^*(T) - S_*(T) < \varepsilon \quad (11) \quad \square$$

**Теорема 6** (аддитивность интеграла). Пусть  $\Omega$  и  $\Omega'$  измеримые области в  $\mathbb{E}^m$ ,  $\Omega' \subset \Omega$  и  $\Omega'' = \Omega \setminus \Omega'$ . Если функция  $w = f(x)$  интегрируема на  $\Omega$ , то  $f$  интегрируема на  $\Omega'$  и  $\Omega''$  и  $\int_{\Omega} f d\omega = \int_{\Omega'} f d\omega + \int_{\Omega''} f d\omega$  (\*)

*Доказательство.* Из теоремы 5  $\Rightarrow f$  интегрируема на  $\Omega'$  и  $\Omega''$  и существуют интегралы  $\int_{\Omega'} f d\omega$  и  $\int_{\Omega''} f d\omega$ .  $T'$  - разбиение  $\Omega'$ .  $T''$  - разбиение  $\Omega''$ . Тогда  $T = T' \cup T''$  - разбиение множества  $\Omega$ .

$$\Delta_t = \max\{\Delta_{T'}, \Delta_{T''}\}. \forall \xi', \xi'' : \xi = \xi' \cup \xi'' \rightarrow I\{T, \xi\} = I\{T', \xi'\} + I\{T'', \xi''\} \quad \Delta_T \rightarrow 0 \Rightarrow (*) \quad \square$$

**Теорема 7** (линейность интеграла). Пусть  $\Omega \subset \mathbb{E}^m$  измеримая область.  $w = f(x)$  и  $w = g(x)$  интегрируемые на  $\Omega$  функции. Тогда  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  функция  $w = \alpha f(x) + \beta g(x)$  интегрируема на  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} [\alpha f + \beta g] d\omega = \alpha \int_{\Omega} f d\omega + \beta \int_{\Omega} g d\omega$$

Кроме того функция  $w = f \cdot g$  так же интегрируема на  $\Omega$

## Интегрирование неравенств. Непрерывность инт. по множеству

**Предложение** (Инт. от положительной функции). Пусть  $\Omega \subset \mathbb{E}^m$  измеримая область. Функция  $w = f(x)$  определена на  $\bar{\Omega}$ ,  $f(x) \geq 0 \forall x \in \Omega$  и  $f$  интегр на  $\Omega$ . Тогда:  $\int_{\Omega} f d\omega \geq 0$

**Предложение.** Если  $f$  и  $g$  интегрируема на измеримой области  $\Omega \subset \mathbb{E}^m$  и  $\forall x \in \bar{\Omega} \rightarrow f(x) \geq g(x)$ , то  $\int_{\Omega} f d\omega \geq \int_{\Omega} g d\omega$

**Предложение.** Если  $f$  интегрируема на измеримой области  $\Omega \subset \mathbb{E}$ , то функция  $|f|$  интегрируема на  $\Omega$  и выполнено:  $|\int_{\Omega} f d\omega| \leq \int_{\Omega} |f| d\omega \leq C m(\Omega)$ , где  $C : \forall x \in \bar{\Omega} \rightarrow |f(x)| \leq C$

**Замечание:** В обратную сторону не верно. Контрпример - функция Дирихле.

**Предложение.** Если  $\Omega \subset \mathbb{E}$  и  $\Omega' \subset \Omega$ ,  $w = f(x)$  интегрируема на  $\Omega$  и  $f(x) \geq 0 \forall x \in \Omega$ , тогда  $\int_{\Omega'} f d\omega \leq \int_{\Omega} f d\omega$

**Теорема 8** (о среднем). Пусть функции  $w = f(x)$  и  $w = g(x)$  интегрируемы на измеримой области  $\Omega \subset \mathbb{E}$ .  $g$  не меняет знак на  $\bar{\Omega}$ ,  $m \leq f(x) \leq M \forall x \in \bar{\Omega}$ , тогда  $\exists \mu : m \leq \mu \leq M : \int_{\Omega} f g d\omega = \mu \int_{\Omega} g d\omega$ . Если же  $f$  непрерывна на  $\bar{\Omega}$ , то  $\exists x^0 \in \bar{\Omega} : \int_{\Omega} f g d\omega = f(x^0) \int_{\Omega} g d\omega$

**Теорема 9** (непрерывность интеграла по множеству). Пусть  $\Omega \subset \mathbb{E}^m$  - измеримая область  $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega_k \dots \subset \Omega$ .  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  - измеримые области такие, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} m(\Omega_k) = m(\Omega)$ . Функция  $f$  определена и ограничена на  $\bar{\Omega}$  и интегрируема на каждом  $\Omega_k$ . Тогда  $f$  интегрируема на  $\Omega$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} f d\omega = \int_{\Omega} f d\omega$

*Доказательство.*  $\forall x \in \bar{\Omega} \rightarrow |f(x)| \leq C$ ,  $\tilde{\Omega}_k = \Omega \setminus \bar{\Omega}_k$  - измеримое множество

$$m(\tilde{\Omega}_k) = m(\Omega) \setminus m(\bar{\Omega}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : m(\tilde{\Omega}_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{4C}$$

$$\Omega_{k_0}, f \text{ интегрируема на } \Omega_{k_0} \Rightarrow \exists T^{k_0} \text{ область } \Omega_{k_0} : S^*(T^{k_0}) - S_*(T^{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists T = T^{k_0} \cup \tilde{T}^{k_0}, \text{ где } \tilde{T}^{k_0} \text{ разбиение множества } \Omega \setminus \bar{\Omega}_{k_0} = \tilde{\Omega}_{k_0}$$

$$S^*(T) - S_*(T) = S^*(T^{k_0}) - S_*(T^{k_0}) + S^*(\tilde{\Omega}_{k_0}) - S_*(\tilde{\Omega}_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + 2C \frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon$$

$$|\int_{\Omega} f d\omega - \int_{\Omega_k} f d\omega| = |\int_{\tilde{\Omega}} f d\omega| < C m(\tilde{\Omega}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \square$$

## Сведение кратного интеграла к повторному

### Двойные интегралы

$\mathbb{E}^2, Oxy, \Pi = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$

**Теорема 1.** Пусть функция  $\omega = f(x, y)$  определена на  $\bar{\Pi}$  и интегрируема на  $\Pi$  и выполнено:  $\forall x \in [a, b] \exists \mathbb{J}(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  тогда функция  $\mathbb{J}(x)$  интегрируема на  $[a, b]$  и существует повторный интеграл:

$$\int_a^b \mathbb{J}(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$$

*Доказательство.*  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$

$\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}$

$\{\Pi_{ij}\}$  - разбиение  $\Pi$ ;  $\Delta_x^i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, k}; \Delta_y^j = y_j - y_{j-1}, j = \overline{1, n}$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  в  $\bar{\Pi}_{ij}$  выполнено  $(inf) m_{ij} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ij} (sup)$

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta_y^j \leq \mathbb{J}(\xi_i) \leq \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta_y^j \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta_y^j \Delta_x^i \leq \sum_{i=1}^k \mathbb{J}(\xi_i) \Delta_x^i \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta_y^j \Delta_x^i; \Delta_T \rightarrow 0$$

□

**Определение.** Область  $\Omega \subset \mathbb{E}^2$  называется элементарной относительно  $Oy$ , если ее граница состоит из графиков двух функций:  $y = \phi(x); y = \psi(x)$  и, быть может, отрезков прямых  $x = a; x = b$ , при этом  $\forall x \in [a, b] \rightarrow \psi(x) \leq \phi(x)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\omega = f(x, y)$  непрерывна на  $\bar{\Omega}$  и область  $\Omega$  элементарна относительно оси  $Oy$ , ее граница состоит из двух графиков непрерывных функций  $y = \phi(x); y = \psi(x)$  и, быть может, отрезков прямых  $x = a; x = b$ , причем  $\forall x \in [a, b] \rightarrow \psi(x) \leq \phi(x)$ . Тогда

$$\text{существует повторный интеграл } \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x, y) dy = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

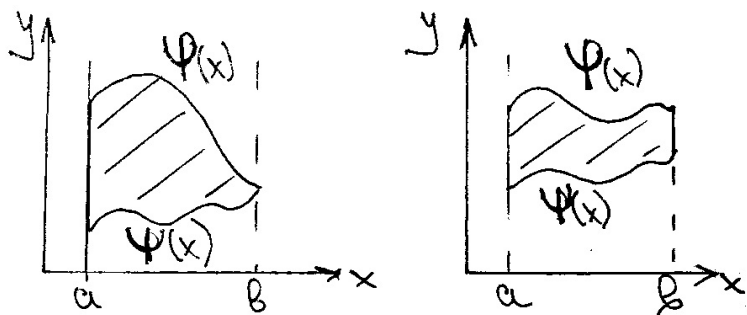
*Доказательство.* Из условия теоремы следует, что:

1.  $\Omega$  - измеримая область
2.  $f$  - интегрируема на  $\Omega$
3. При фикс  $x$  функция  $f$  непрерывна по переменной  $y$ . И  $f$  интегрируема на  $[\phi(x), \psi(x)]$

Пусть  $\Pi$  такой прямоугольник, что  $\bar{\Omega} \subseteq \bar{\Pi}$  Тогда:  $F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & , (x, y) \in \bar{\Omega} \\ 0 & , (x, y) \in \bar{\Pi} \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$

Далее очевиден переход к случаю первой теоремы.

□



## m-кратные интегралы

$\Omega \subset \mathbb{E}^m$ ,  $Ox_1 \dots Ox_m$ ;  $\varepsilon_m \{(x_1, \dots, x_m) : x_m = 0\}$  где  $\Omega_m$  - проекция области  $\Omega$  на мн-во  $\varepsilon_m$

**Определение.** Область  $\Omega \subset \mathbb{E}^m$  называется **элементарной относительно**  $Ox_m$ , если ее проекция на  $\Omega_m$  на множество  $\varepsilon_m$  является областью, а граница  $\Omega$  ( $\partial\Omega$ ) состоит из графиков двух функций:  $x_m = \phi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$ ;  $x_m = \psi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$  и, быть может, боковой поверхности цилиндра, основанием которого является  $\partial\Omega_m$  причем  $\forall (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \overline{\Omega}_m \rightarrow \psi_1(x_1, \dots, x_{m-1}) \leq \phi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\omega = f(x)$  непрерывна на  $\overline{\Omega}$  и область  $\Omega$  элементарна относительно оси  $Ox_m$ , ее граница состоит из двух графиков непрерывных функций  $y = \phi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$ ;  $y = \psi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$  и, быть может, боковой поверхности цилиндра оси  $Ox_m$ , причем  $\forall (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \overline{\Omega}_m \rightarrow \psi_1(x_1, \dots, x_{m-1}) \leq \phi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$ . Тогда существует повтор-

ный интеграл  $\underbrace{\int \dots \int_{\Omega_m} dx_1 \dots dx_{m-1}}_{\Omega_m} \int_{\psi_1(x_1, \dots, x_{m-1})}^{\phi_1(x_1, \dots, x_{m-1})} f(x) dx_m = \underbrace{\int \dots \int_{\Omega_m} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m}_{\Omega_m}$

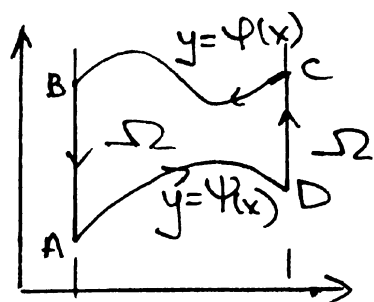
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega; (u, v) \in \Omega^*; \mathbb{J} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}; \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega^*} f(x, y) |\mathbb{J}(u, v)| du dv$$

## Часть IV

# Четвертый билет

## Формула Грина.

### Вывод формулы.



**I случай.**  $\Omega \subset \mathcal{E}$  элементарная область относительно  $Oy$ ,

$y = \varphi(x), y = \psi(x), \psi(x) \leq \varphi(x) \forall x \in [a, b]$

$\omega_1 = P(x, y), \omega_2 = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$  непрерывны в  $\bar{\Omega}$

$\psi, \varphi$  — непрерывны на  $[a, b]$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy = \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \\
 &- \int_a^b P(x, \psi(x)) dx = \int_{BC} P(x, y) dx - \int_{AD} P(x, y) dx = - \int_{CB} P(x, y) dx - \\
 &- \int_{AD} P(x, y) dx = - \oint_{ADCBA} P(x, y) dx = - \oint_{\partial\Omega} P(x, y) dx
 \end{aligned}$$

$$\int_{BA} P(x, y) dx = \int_{DC} P(x, y) dx = 0 \Rightarrow \boxed{\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = - \oint_{\partial\Omega} P(x, y) dx}$$

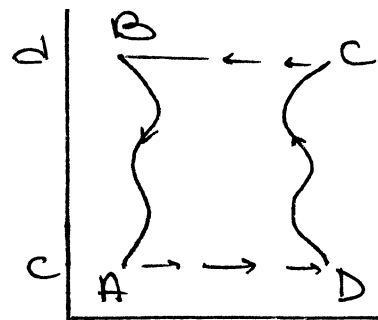
**II случай.**  $\Omega \subset \mathcal{E}$  элементарная область относительно  $Ox$ ,

$x = \varphi(y), x = \psi(y), \psi(y) \leq \varphi(y) \forall y \in [c, d]$

$\omega = Q(x, y), \omega = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$  непрерывны в  $\bar{\Omega}$

$\psi, \varphi$  — непрерывны на  $[c, d]$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy &= \int_c^d dy \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx = \int_c^d Q(\varphi(y), y) dy - \\
 &- \int_c^d Q(\psi(y), y) dy = \int_{DC} Q(x, y) dy + \int_{BA} Q(x, y) dy = \\
 &= \oint_{ADCBA} Q(x, y) dy = \oint_{\partial\Omega} Q(x, y) dy
 \end{aligned}$$



Из того, что  $\int_{AD} Q(x, y) dy = \int_{CB} Q(x, y) dy = 0$  следует  $\boxed{\iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy = \oint_{\partial\Omega} Q(x, y) dy}$

**Теорема 1.** Пусть область  $\Omega$  представляет собой объединение конечного числа измеримых областей элементарных относительно  $Oy$  [  $Ox$  ].  $\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^k \bar{\Omega}'_i, [\bar{\Omega}''_i], i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k}$ .

Функции  $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в  $\bar{\Omega}$ , тогда справедлива формула Грина:

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \int_{\partial\Omega} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

**Теорема (1').** Если граница  $\partial\Omega$  ограниченной области  $\Omega \subset \mathcal{E}^2$  состоит из конечного числа кусочно гладких контуров и эти функции непрерывны, то имеет место формула Грина:

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \int_{\partial\Omega} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

## Некоторые приложения формулы Грина.

### А. Вычисление плоских измеримых областей.

**Предложение.** Если граница  $\partial\Omega$  ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{E}^2$  состоит из конечного числа кусочно гладких контуров, то её  $m(\Omega)$  определяется из формулы:

$$m(\Omega) = 1/2 \int_{\partial\Omega} [xdy - ydx]$$

*Доказательство.* По формуле Грина  $\int_{\partial\Omega} [xdy - ydx] = 2 \iint_{\Omega} dxdy = 2m(\Omega)$  □

### В. Условия, при которых дифференциальное выражение (дифф. форма) $Pdx + Qdy$ является дифференциалом некоторой функции $f = f(x, y)$

**Теорема 2.** Пусть область  $\Omega \subset \mathbb{E}^2$  — произвольная область и функции  $P$  и  $Q$  непрерывны на  $\bar{\Omega}$ , тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\oint_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , где  $\Gamma$  — произв замкнутая кусочно гладкая кривая  $\Gamma \subset \Omega$
2.  $z' = (x', y'), z'' = (x'', y'')$  — т. области  $\Omega$ ,  $\Gamma \subset \Omega$  — кусочно гладкая кривая, соединяющая точки  $z'$  и  $z''$ , то  $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy$  не зависит от кривой  $\Gamma$ , а только от т.  $z'$  и  $z''$ .
3. Существует функция  $w = f(x, y)$  такая, что  $df = Pdx + Qdy$ , при этом если  $z', z'' \in \Omega$  и  $\Gamma \subset \Omega$  — кусочно гладкая кривая, соединяющая точки  $z'$  и  $z''$ , то

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = f(z'') - f(z') \quad (12)$$

*Доказательство.* Схема доказательства:  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$$\boxed{1 \Rightarrow 2} \quad z', z'' \in \Omega, \Gamma', \Gamma'' \text{ — кусочно гладкие кривые соединяющие точки } z' \text{ и } z''$$

$$\Gamma = \Gamma' \cup (\Gamma'')^{-} \text{ — замкнутая кусочно гладкая кривая}$$

$$0 \stackrel{1}{=} \int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma'} Pdx + Qdy - \int_{\Gamma''} Pdx + Qdy \Rightarrow \int_{\Gamma'} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma''} Pdx + Qdy$$

$$\boxed{2 \Rightarrow 3} \quad z^0 = (x_0, y_0) \in \Omega; \Gamma_z \subset \Omega \text{ — кусочно гладкая кривая, соединяющая т. } z_0 \text{ и } z = (x, y)$$

$$f(z) = f(x, y) = \int_{\Gamma_z} Pdx + Qdy.$$

$$z = (x, y), z' = (x + \Delta x, y), z' \in \Omega \text{ и } [z, z'] \subset \Omega; \exists \theta : 0 < \theta < 1 \rightarrow$$

$$\Delta f(z, \Delta x) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \int_{\Gamma\{z, z'\}} Pdx + Qdy = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y)dt = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x$$

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \text{ аналогично } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \{(x, y), x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta\}, z' = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha)), z'' = (\varphi(\beta), \psi(\beta)) \\
 \int_{\Gamma} P dx + Q dy &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)] dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right] dt = \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} [f(\varphi(t), \psi(t))] dt = f(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - f(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = f(z'') - f(z')
 \end{aligned}$$

$$\boxed{3 \Rightarrow 1} \quad \Gamma \subset \Omega \text{ — кусочно гладкая замкнутая кривая, т.е. } z' \text{ и } z'' \Rightarrow (12) \Rightarrow \int_{\Gamma} P dx + Q dy = 0 \quad \square$$

**Теорема 3.** Если в условии теоремы 2  $\Omega \subset \mathbb{E}^2$  — односвязная область и функция  $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в  $\bar{\Omega}$ , то по условиям 1–3 теорема 2 эквивалентна следующему условию:

$$4. \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

$$\text{Доказательство.} \quad \boxed{3 \Rightarrow 4} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\boxed{4 \Rightarrow 1} \quad \Gamma \subset \Omega \text{ простая кусочно гладкая замкнутая кривая } \Gamma = \partial\Omega^*, \Omega^* \subset \Omega.$$

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega^*} \left[ \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right] dx dy = 0 \quad \square$$

Легко доказать, если  $\Gamma$  имеет конечное число точек самопересечения. Для произвольной кусочно гладкой замкнутой кривой все остальное справедливо.

**Пример.**  $w = P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, w = Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \mathbb{E}^2 / \{(0, 0)\}$  — не является односвязной областью

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y); \Gamma = \{(x, y) : x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

## Часть V

# Пятый билет

## Замена переменных в кратном интеграле.

### Преобразование плоских областей

$$\Omega^* \subset \mathbb{E}_{(uv)}^2, \Omega \subset \mathbb{E}_{(x,y)}^2;$$

$$F : \overline{\Omega^*} \rightarrow \overline{\Omega}; \quad F : x = f^1(u,v), y = f^2(u,v) \quad (13)$$

1.  $F$  — взаимно однозначное отображение
2.  $F$  — дважды непрерывно дифференцируема
3.  $\mathcal{J}_F = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$  в  $\overline{\Omega^*}$  (якобиан на области определения сохраняет знак)

$$G = F^{-1}; \quad G : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega^*} \quad G : u = g^1(x,y), v = g^2(x,y)$$

**Свойство А.** При отображении  $F$  внутренние точки множества  $\overline{\Omega^*}$  переходят во внутренние точки  $\overline{\Omega}$ .

**Свойство Б.** При отображении  $F$  гладкая кривая переходит в гладкую кривую.

*Доказательство. Свойства А:*  $w_0 = (u_0, v_0) \in \Omega^* \rightarrow z_0 = (x_0, y_0) \in ?$

Из (13) определены  $u$  и  $v$  как функции переменных  $x$  и  $y$  в некоторой окрестности т.  $z_0$ ,  $z_0 \in \Omega$  □

*Доказательство. Свойства Б:*  $\Gamma^* = \{(u,v) : u = \varphi(t), v = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ ,  $\Gamma^* \subset \Omega^*$ ,  $\Gamma^*$  — гладкая кривая,  $\varphi, \psi$  — непрерывно дифференцируемы на  $[\alpha, \beta]$  функции и  $\forall t \in [\alpha, \beta] \rightarrow [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$

$$\Gamma = \{(x,y) : x = f^1(\varphi(t), \psi(t)), y = f^2(\varphi(t), \psi(t)), \alpha \leq t \leq \beta\}, \Gamma \subset \Omega$$

$x'(t) = \frac{\partial f^1}{\partial u} \varphi'(t) + \frac{\partial f^1}{\partial v} \psi'(t); \quad y'(t) = \frac{\partial f^2}{\partial u} \varphi'(t) + \frac{\partial f^2}{\partial v} \psi'(t)$ . Учтем что  $\mathcal{J} \neq 0$ , предположим что  $\exists t_0 : x'(t_0) = y'(t_0) = 0$  из неравенства якобиана нулю следует  $\varphi'(t) = \psi'(t) = 0$  — противоречие

$$\begin{cases} x = f^1(u_0, v), y = f^2(u_0, v), v \in \mathbb{R} \\ u^0 = g^1(x, y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = f^1(u, v_0), y = f^2(u, v_0), u \in \mathbb{R} \\ v^0 = g^2(x, y) \end{cases}$$

Кривые каждого из семейств не пересекаются в силу взаимно однозначности  $F$ , но через каждую точку проходит 2 кривые по одной из каждого семейства. □



**Пример.**  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi,$   
 $(\rho_0, \varphi_0) \quad (\rho_0, \varphi_0 + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$   
 $\Pi = \{(\rho, \varphi) : 0 < \rho < R, 0 < \varphi < 2\pi\}; F : \Pi \longleftrightarrow K/K_1,$   
 $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}, K_1 = \{(x, y) : y = 0, 0 \leq x < R\}$   
 $m(K_1) = 0. \mathcal{J}_F = \rho > 0$  в  $\Pi$

**Пример 2.**  $F : x = \rho \cos \varphi \cos \psi, y = \rho \sin \varphi \sin \psi$   
 $\Pi = \{(\rho, \varphi, \psi) : 0 < \rho < R, 0 < \varphi < 2\pi, -\pi/2 < \psi < \pi/2\}$   
 $K/K_1, K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$   
 $K_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + z^2 < R^2, y = 0\}, m(K_1) = 0; \mathcal{J}_F = \rho^2 \cos \psi > 0$  в  $\Pi$

**Пример 3.**  $F : x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z$   
 $\Pi = \{(\rho, \varphi, z) : 0 < \rho < R, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < H\}$   
 $K \setminus K_1 : K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < R^2, 0 < z < H\}$   
 $K_1 = \{(x, y, z) : 0 < x < R, y = 0, 0 < z < H\}, m(K_1) = 0; \mathcal{J} = \rho > 0$  в  $\Pi$

## Выражение площади в криволинейных координатах.

$$\begin{aligned} \partial\Omega^* &= \{(u, v) : u = \varphi(t), v = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta\} \\ \partial\Omega &= \{(x, y) : x = f^1(\varphi(t), \psi(t)), y = f^2(\varphi(t), \psi(t)), \alpha \leq t \leq \beta\} \\ \alpha \text{ и } \beta &\text{ выбраны таким образом, что } \partial\Omega \text{ обходится в положительном направлении.} \\ m(\Omega) &= \int_{\partial\Omega} x dy = \int_{\alpha}^{\beta} f^1(\varphi(t), \psi(t)) \left[ \frac{\partial f^2}{\partial u} \varphi'(t) + \frac{\partial f^2}{\partial v} \psi'(t) \right] dt = \pm \int_{\partial\Omega^*} f^1 \frac{\partial f^2}{\partial u} du + f^1 \frac{\partial f^2}{\partial v} dv \\ P(u, v) &= f^1 \frac{\partial f^2}{\partial u}, Q(u, v) = f^1 \frac{\partial f^2}{\partial v} \\ \frac{\partial P}{\partial v} &= \frac{\partial f^1}{\partial v} \frac{\partial f^2}{\partial u} + f^1 \frac{\partial^2 f^2}{\partial v \partial u}, \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial f^1}{\partial u} \frac{\partial f^2}{\partial v} + f^1 \frac{\partial^2 f^2}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} &= \frac{\partial f^1}{\partial u} \frac{\partial f^2}{\partial v} - \frac{\partial f^1}{\partial v} \frac{\partial f^2}{\partial u} = \mathcal{J}_F(u, v) \\ m(\Omega) &= \iint_{\Omega^*} |(J)_F(u, v)| du dv \end{aligned}$$

**Предложение.** Если  $\mathcal{J}_F(u, v) > 0$ , то положительному обходу  $\partial\Omega^*$  соответствует положительному обходу  $\partial\Omega$ . Если  $\mathcal{J}_F(u, v) < 0$ , то положительный обход  $\partial\Omega^*$  соответствует отрицательный обход  $\partial\Omega$

## Геометрический смысл модуля якобиана.

**I. Одномерный случай.**  $\dots[\alpha_k, \beta_k] \subset [\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}] \subset \dots \subset [\alpha, \beta]$

$$\delta_k = \beta_k - \alpha_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty$$

по т. Кантора  $\exists! x_0 : x_0 \in [\alpha_k, \beta_k] \forall k$

$y = f(x)$  — строго монотонна на  $[\alpha, \beta]$ , непрерывна на  $[\alpha, \beta]$  и дифференцируема на  $(\alpha, \beta)$ :  
 $\Rightarrow \forall k \exists x_k \in (\alpha_k, \beta_k) : f(\beta_k) - f(\alpha_k) = f'(x_k) \cdot \delta_k;$

$B_k = f(\beta_k), A_k = f(\alpha_k), \Delta k$  для отрезка  $[A_k, B_k]$  или  $[B_k, A_k]$   
 $|f'(x_k)| = \frac{\Delta k}{\delta k}, k \rightarrow \infty, x_k \rightarrow x_0; |f'(x_0)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta K}{\delta K}$

**II. Многомерный случай.**  $\overline{Q^*} \subset \Omega^*; \dots \overline{Q_k^*} \subset \overline{Q_{k-1}^*} \subset \dots \subset \overline{Q^*}$

$m(\overline{Q_k^*}) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty) \Rightarrow \forall; \exists! \omega_0 = (u_0, v_0) : \omega_0 \in \overline{Q_k^*}$

$\exists \omega_k \in \overline{\Omega_k^*} : m(\overline{Q_k^*}) = |\mathcal{J}_F(\omega_k)| m(\overline{Q_k^*}), \overline{Q_k} = F(\overline{Q_k^*}), \omega_k \rightarrow \omega_0$  при  $k \rightarrow \infty$  значит:

$|\mathcal{J}(\omega_0)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(\overline{\Omega})}{m(\overline{\Omega_k^*})}$  — коэффициент растяжения точки  $\omega_0$  плоскости переменных  $u, v$  при заданном отображении  $F$  в  $x, y$ .

## Замена переменных в двойном интеграле.

Напомним начальные условия:

$F = \overline{\Omega^*} \rightarrow \overline{\Omega} F : x = f^1(u, v), y = f^2(u, v)$

I Взаимно однозначное

II Дважды непрерывна дифференцируема

III  $\mathcal{J}_k(u^*, v^*) \neq 0; (u^*, v^*) \in \overline{\Omega^*}$

Нас теперь будет интересовать  $\iint_{\Omega} g(x, y) dx dy$  причем  $w = g(x, y)$  непрерывна в  $\overline{\Omega}$

**Теорема 4.** Пусть отображение  $F$  удовлетворяет свойствам I–III, функция  $w = g(x, y)$  непрерывна в  $\overline{\Omega}$  и  $F$  преобразование ограниченной замкнутой области с кусочно гладкой границей  $\overline{\Omega^*}$  в ограниченной замкнутой области с кусочно гладкой границей  $\overline{\Omega}$ . Тогда справедлива формула

$$\iint_{\Omega} g(x, y) dx dy = \iint_{\Omega^*} g(f^1(u, v), f^2(u, v)) |\mathcal{J}_F(u, v)| du dv \quad (14)$$

*Доказательство.*  $T^*$  — разбиение области  $\Omega^*$ ,  $T^* = \{\Omega_i^*\}_{i=1}^n$  при  $F T = \{\Omega_i\}_{i=1}^n$  — разбиение  $\Omega$ .

$I = \sum_{i=1}^n g(z^i) m(\Omega_i)$

$z^i = (x^i, y^i) \in \overline{\Omega_i}, \forall i \exists w^i = (u^i, v^i) \in \overline{\Omega^*} : m(\Omega_i) = |\mathcal{J}_F(w^i)| m(\Omega_i^*)$  тогда, учитывая что  $z^i = (f^1(w^i), f^2(w^i))$

$$I = \sum_{i=1}^n g(z^i) m(\Omega_i) = \sum_{i=1}^n g(z^i) |\mathcal{J}_F(w^i)| m(\Omega_i^*) = \sum_{i=1}^n g(f^1(w^i), f^2(w^i)) |\mathcal{J}_F(w^i)| m(\Omega_i^*) \quad (15)$$

Заметим, что первая часть (15) стремится к первой части (14) и аналогично ведут себя вторые части.  $\square$

**Замечание.** Эта же формула справедлива в случае  $m$ -кратного интеграла.

## Часть VI

# Шестой билет

### Понятие поверхности.

#### Простейшие примеры задания поверхности.

Вся эта тема рассматривается на  $\mathbb{E}^3, Oxyz$ .

Перечислим способы задания поверхности:

1° График функции — простейший пример задания поверхности

$$z = f(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}, f(x, y) \geq 0$$

2°  $F(x, y, z) = 0$ , предполагаем, что в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$   $F$  непрерывно дифференцируема и  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Это уравнение задает функцию  $z$  как не явную функцию от  $x$  и  $y$ :  $z = f(x, y)$  в окрестности некоторой точки  $(x_0, y_0, z_0)$ .

3°  $F(x, y) = 0$  — случай задания цилиндрической поверхности.

#### Параметрическое задание поверхности.

$$F : \bar{\Omega} \subset \mathbb{E}_{(u,v)}^2 \rightarrow \mathbb{E}_{(x,y,z)}^3$$

$$\text{I } x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), (u, v) \in \bar{\Omega}$$

II  $\bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in \bar{\Omega}, F$  непрерывно дифференцируема

$$\begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix} \quad A = \Delta_{\psi\chi} = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} \quad B = \Delta_{\chi\varphi} = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix} \quad C = \Delta_{\varphi\psi} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}$$

Предположим, что хотя бы 1 из определителей  $\neq 0$ :  $\Delta_{\varphi\psi} \neq 0, U(u_0, v_0, x_0, y_0)$

$$\begin{cases} x - \varphi(u, v) = 0 \\ y - \psi(u, v) = 0 \end{cases} \quad u = h(x, y), v = g(x, y) \text{ в } \tilde{U}(x_0, y_0), z = \chi(h(x, y), g(x, y)) \Rightarrow z = f(x, y)$$

$(u_0, v_0)$  — особая точка:  $\Delta_{\psi\chi} = \Delta_{\chi\varphi} = \Delta_{\varphi\psi} = 0$

$(u_0, v_0)$  — не является особой:  $[\bar{r}_u(u_0, v_0), \bar{r}_v(u_0, v_0)] \neq \bar{0} \Rightarrow \bar{r}_u(u_0, v_0) \neq \bar{0}, \bar{r}_v(u_0, v_0) \neq \bar{0}$

**Определение.** Множество точек  $S \subset \mathbb{E}_{(x,y,z)}^3$  являющихся образом ограниченной замкнутой плоской области  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{E}_{(u,v)}^2$  при непрерывном отображении  $F$  вида I называется параметрически заданной поверхностью, а отображение I называется ее координатным представлением

$$S = \{x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), (u, v) \in \bar{\Omega}\} \quad (16)$$

**Определение.** Множество точек  $S \subset \mathbb{E}_{(x,y,z)}^3$  являющихся образом ограниченной замкнутой плоской области  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{E}_{(u,v)}^2$  при непрерывном отображении  $F$  вида II называется параметрически заданной поверхностью, а отображение II называется ее векторным представлением

$$S = \{\bar{r} = \bar{r}(u,v), u,v \in \bar{\Omega}\} \quad (17)$$

**Определение.** Непрерывно дифференцируемое отображение  $F$  вида I или II называется гладким, если  $[\bar{r}_u, \bar{r}_v] \neq 0$  в  $\bar{\Omega}$

**Определение.** Поверхность  $S$  вида (16) или (17) называется *простой гладкой поверхностью*, если отображение  $F$  вида I или II соответственно взаимно однозначно или гладкое.

**Пример.**  $z = f(x,y), (x,y) \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{E}_{(x,y)}^2, f$  — непрерывно дифференцируемая функция.  
 $\bar{r} = (x,y,f(x,y)), \bar{r}_x = (1,0,f_x), \bar{r}_y = (0,1,f_y)$

$$[\bar{r}_x, \bar{r}_y] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x i - f_y j + k \neq 0 \quad |[\bar{r}_x, \bar{r}_y]| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

**Определение.** Для простой гладкой поверхности  $S \subset \mathbb{E}^3$ , заданной отображением  $F$  вида I или II образ  $\partial\Omega$  при  $F$  названной краем поверхности  $S$  обозначается  $\delta S$ . Нужно помнить, что грань и граница не совпадают  $\partial S = S$ , но  $\delta S \neq \partial S$

$$S = \{\bar{r} = \bar{r}(u,v), (u,v) \in \Omega\} \quad S = \{x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v), (u,v) \in \bar{\Omega}\}$$

$$u = u_0 \quad F_{u_0} \subset \mathbb{E}^3 : F_{u_0} = \{\bar{r} = \bar{r}(u_0,v), (u_0,v) \in \bar{\Omega}\}$$

$$v = v_0 \quad F_{v_0} \subset \mathbb{E}^3 : F_{v_0} = \{\bar{r} = \bar{r}(u,v_0), (u,v_0) \in \bar{\Omega}\}$$

**Пример.** Рассмотрим в  $\mathbb{E}^3$  сферу  $S = \{x = \cos \varphi \cos \psi, y = \sin \varphi \cos \psi, z = \sin \psi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2\}$ . Тогда формула  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

**Пример.** Зададим параметрически кривую:

$$y = 0 : x = \Phi(u), z = \Psi(u), \alpha \leq u \leq \beta, \Phi(u) \geq 0$$

$$S = \{x = \Phi(u) \cos v, y = \Phi(u) \sin v, z = \Psi(u), \alpha \leq u \leq \beta, 0 \leq v \leq 2\pi\}$$

$$S = \{x = (a + a/2 \cos u) \cos v, y = (a + a/2 \cos u) \sin v, z = a/2 \sin u\} \quad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$$

**Определение.** Точка  $M \in S : \overline{OM} = \bar{r}(u_1, v_1) = \bar{r}(u_2, v_2)$  для различных точек  $(u_1, v_1)$  и  $(u_2, v_2)$  множества  $\bar{\Omega}$ , называются кратными точками поверхности  $S$ .

**Определение.** Поверхность  $S$ , имеющая кратные точки, называется поверхностью с самопересечениями.

**Определение.** Если поверхность  $S$  ограничивает некоторое тело  $G \subset \mathbb{E}^3$ , т.е.  $\partial G = S$ , по поверхности  $S$  называется замкнутой

## Допустимые замены переменных.

$F : \Omega \rightarrow \mathbb{E}^3$ ,  $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$  — взаимнооднозначное, непрерывно дифференцируемое, без особых точек

$$G : \bar{\Omega}^* \rightarrow \mathbb{E}^3 \bar{\rho} = \bar{\rho}(u^*, v^*)$$

Эти отображения называются эквивалентными или задающими одну и ту же поверхность, если  $\exists H : \bar{\Omega}^* \rightarrow \bar{\Omega} : u = h^1(u^*, v^*), v = h^2(u^*, v^*)$  и оно обладает следующими свойствами.

- 1) Взаимнооднозначность
- 2) Непрерывная дифференцируемость
- 3)  $\mathcal{J}_{(u,v)} = \frac{D(u,v)}{D(u^*,v^*)} \neq 0$  в  $\bar{\Omega}^*$
- 4)  $\bar{\rho}(u^*, v^*) = \bar{r}(h^1(u^*, v^*), h^2(u^*, v^*))$

Преобразование параметров осуществляющего переход от одного преобразования поверхности  $S$  к другому ему эквивалентному, **допустимой заменой параметра** называется

**Предложение.** Если  $S = \{\bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in \bar{\Omega}\}$  является простой гладкой поверхностью, то при допустимой замене параметра поверхность  $S = \{\bar{\rho} = \bar{\rho}(u^*, v^*), (u^*, v^*) \in \bar{\Omega}^*\}$  остается простой гладкой поверхностью.

$$\begin{aligned} [\bar{\rho}_{u^*}, \bar{\rho}_{v^*}] &\neq 0 \\ \bar{\rho}_{u^*} &= h_{u^*}^1 \bar{r}_u + h_{u^*}^2 \bar{r}_v, \bar{\rho}_{v^*} = h_{v^*}^1 \bar{r}_u + h_{v^*}^2 \bar{r}_v \\ [\bar{\rho}_{u^*}, \bar{\rho}_{v^*}] &= (h_{u^*}^1 h_{v^*}^2 - h_{v^*}^1 h_{u^*}^2) [\bar{r}_u, \bar{r}_v] \neq 0 \end{aligned}$$

## Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Рассмотрим  $\bar{r}_0 = \bar{r}(u_0, v_0)$

$$\Gamma = \{\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t)), \alpha \leq t \leq \beta\} \subset S; \quad \bar{r}_0 \in \Gamma$$

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv \quad du = u'(t)dt, dv = v'(t)dt$$

**Определение.** Плоскость, проходящая через точку  $r_0 \in S$ , в которой лежат все касательные к кривым  $\Gamma \subset S$ , в точке  $\bar{r}_0$ , называется касательной плоскостью, а т  $\bar{r}_0$  называется точкой касания. В Каждой точке  $\bar{r}_0$ , которая не является особой существует и единственная касательная плоскость.

$$\bar{r} = (x, y, z), \bar{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), x_0 = \varphi(u_0, v_0), y_0 = \psi(u_0, v_0), z_0 = \chi(u_0, v_0)$$

$$\bar{r}_u = (x_u, y_u, z_u)(u_0, v_0), \bar{r}_v = (x_v, y_v, z_v)(u_0, v_0)$$

$$((\bar{r} - \bar{r}_0), \bar{r}_u, \bar{r}_v) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \quad z = f(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}$$

**Пример.**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = 0 \quad f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

**Определение.** Прямая, проходящая через точку  $\overline{r_0} \in S$  (простой гладкой поверхности), перпендикулярно касательной плоскости в этой точке называется нормальной прямой.

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \quad A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{x - x_0}{f_x} = \frac{y - y_0}{f_y} = \frac{z - z_0}{-1}$$

**Определение.** Ненулевой вектор, параллельный нормальной прямой, проходящий через точку  $\overline{r_0} \in S$  касательной плоскости, называется вектором нормали к поверхности  $S$  в т.  $\overline{r_0}$

$$\overline{n} = \pm \frac{[\overline{r_u}, \overline{r_v}]}{|[\overline{r_u}, \overline{r_v}]|}$$

Фиксируя  $+$  или  $-$  задается непрерывная векторная функция.

## Двусторонние и односторонние поверхности.

Рассмотрим поверхность  $S$ , выберем точку на этой поверхности  $A_0 \in S$ , выпустим из нее контур  $\Gamma_0 \in S$ .

Рассматриваемые случаи:

- I Как ушел так и пришел (прим. лента Мебиуса)
- II Ушел и пришел с обратным направлением

**Определение.** Если для любой точки  $A_0 \in S$  при обходе любого контура  $\Gamma_0 \subset S$ ,  $\Gamma_0 \cap \delta S = \emptyset$  с началом и концом в точке  $A_0$  имеем место случай II [I], то поверхность  $S$  называется *односторонней* [двусторонней] поверхностью. Односторонние поверхности рассматривать не будем.

**Предложение.** Для двусторонней гладкой поверхности  $S$  с кусочно гладким краем  $\delta S$  задание направления нормали в одной точке определяет задание направления нормали во всех точках поверхности.

*Доказательство.*  $\overline{n} = \pm \frac{[\overline{r_u}, \overline{r_v}]}{|[\overline{r_u}, \overline{r_v}]|}$ , выберем две точки и нормаль в одной из них:  $A_0, A_1, \overline{n_0}$ ,  $\text{ne } \Gamma_{01}^1 \rightarrow \overline{n_1}, \Gamma_{01}^2 \rightarrow \overline{n_1}^-, \Gamma = \Gamma_{01}^1 \cup (\Gamma_{01}^2)^- - \text{противоречие}$  □

## Ориентация поверхности.

**Определение.** Гладкая поверхность  $S$  называется ориентированной, если единичный вектор нормали  $\overline{n}$  задан на ней как непрерывная векторная функция.

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{\Delta}}, \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{\Delta}}, \cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{\Delta}}, \Delta = A^2 + B^2 + C^2$$

$$z = f(x, y), \cos \alpha = \frac{-f_x}{\pm \sqrt{\Delta}}, \cos \beta = \frac{-f_y}{\pm \sqrt{\Delta}}, \cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{\Delta}}, \Delta = 1 + f_x^2 + f_y^2$$

## Кусочно гладкие поверхности

$S$  — простая гладкая поверхность с кусочно гладким краем  $\delta S$ .

**Определение.** Ориентация края  $\delta S$  поверхности  $S$  согласовывается с ориентацией поверхности  $S$ , если глядя конца вектора нормали на край он обходится против часовой стрелки.

**Определение.** Поверхность  $S$  называется кусочно гладкой поверхностью, если ее можно представить в виде конечного объединения простых гладких поверхностей, которые пересекаются разве что только по общим краям

$$S = \bigcup_{k=1}^m S_k, S_k — \text{простая гладкая поверхность}$$

**Пример.**  $S = \{\bar{r} = \bar{r}(\varphi, \psi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2\}$  — сферические координаты.

$$S : x^2 + y^2 + z = 1$$

$$S_1 = \{z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 1/2\};$$

$$S_2 = \{z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 1/2\}$$

$$S_3 = \{\bar{r} = \bar{r}(\varphi, \psi), |\psi| \leq \pi/4, 0 \leq \varphi \leq \pi\};$$

$$S_4 = \{\bar{r} = \bar{r}(\varphi, \psi), |\psi| \leq \pi/4, \pi \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

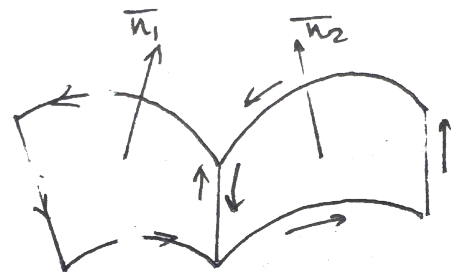


Рис. 1:  $\bar{n} = \{\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_m\}$

## Площадь поверхности

### Пример Шварца (сапог Шварца)

Рассмотрим прямой круговой цилиндр  $\Pi$ , радиуса  $R$  и высотой  $H$

$$S_{\Delta} = R \sin \pi/n \sqrt{(H/m)^2 + R^2 (1 - \cos \pi/n)^2}$$

$$S_{\Pi} = 2mnS_{\Delta} = 2\pi R \frac{\sin \pi/n}{\pi/n} \sqrt{\frac{R^2 \pi^4}{4} (m/n^2)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\pi/2n}\right)^4 + H^2}$$

$$m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty : m/n^2 \rightarrow q \geq 0 \Rightarrow S = 2\pi R \sqrt{\frac{R^2 \pi^4}{4} q^2 + H^2}; S = 2\pi RH \Leftrightarrow q = 0$$

**Предложение.** Площадь простой гладкой поверхности  $S$  не зависит от ее векторного представления.

*Доказательство.* Воспользуемся допустимой заменой координат:

$$H : u = h^1(u^*, v^*), v = h^2(u^*, v^*), (u^*, v^*) \in \bar{\Omega}^*$$

$$m(S) = \iint_{\Omega} |[\bar{r}_u, \bar{r}_v]| du dv = \iint_{\Omega^*} |[\bar{r}_u(h^1, h^2), \bar{r}_v(h^1, h^2)]| |\mathcal{J}_H(u^*, v^*)| du^* dv^* = \iint_{\Omega^*} |[\bar{\rho}_{u^*}, \bar{\rho}_{v^*}]| du^*, dv^*$$

□

## Другое выражение для площади поверхности

$$\begin{aligned}
 |[\bar{r}_u, \bar{r}_v]|^2 + (\bar{r}_u, \bar{r}_v)^2 &= |\bar{r}_u|^2 |\bar{r}_v|^2 \\
 |[\bar{r}_u, \bar{r}_v]| &= \sqrt{EG - F^2}, \quad E = |\bar{r}_u|^2, \quad G = |\bar{r}_v|^2, \quad F = (\bar{r}_u, \bar{r}_v) \\
 m(s) &= \oint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv - \text{первый дифференциал поверхности.}
 \end{aligned}$$

**Пример.**  $z = f(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}$

$$m(S) = \oint_{\Omega} \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy = \oint_{\Omega} \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}$$

## Поверхностные интегралы

### Поверхностный интеграл первого рода (ПИПР)

$$\begin{aligned}
 g = g(x, y, z) \text{ непрерывна на простой гладкой поверхности } S, \quad S = \{\bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in \bar{\Omega}\} \\
 S = \bigcup_{j=1}^k S_j, \quad \xi_j \in S_j, \quad T = \{S_j\}_{j=1}^k; \quad \xi = \{\xi_j\}_{j=1}^k; \quad \sigma\{T, \xi\} = \sum_{j=1}^k g(\xi_j) m(S_j)
 \end{aligned}$$

**Определение.** Число  $I$  называется пределом интегральной суммы  $\sigma\{T, \xi\}$  при  $\Delta_T \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \Rightarrow |\sigma\{T, \xi\} - I| < \varepsilon$

**Определение** Если существует предел  $\sigma\{T, \xi\}$  при  $\Delta_T \rightarrow 0$ , то он называется поверхностным интегралом первого рода от функции  $g$  по поверхности  $S$

**Обозначение.**  $\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_S g dS$

### Сведение поверхностного интеграла I рода к двойному интегралу

**Теорема 1.** Если  $S$  простая гладкая поверхность с кусочно гладким краем  $\delta S$ , а  $g(x, y, z)$  непрерывна на  $S$ , то справедлива формула:

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_S g(\bar{r}(u, v)) |[\bar{r}_u, \bar{r}_v]| du dv$$

*Доказательство.*  $T = \{S_i\}, T_i = \{\Omega_i\}, \Delta_T \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta_{T'} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 F(\Omega_i) &= S_i, \quad \xi_i \in S_i, \quad \bar{\Omega}_i = \bar{r}(\eta_i), \quad \xi = \{\xi_i\}, \quad \eta = \{\eta_i\} \\
 \sigma^S\{T, \xi\} &= \sum_i g(\xi_i) m(S_i) = \sum_i g(\xi_i) \iint_{\Omega_i} |[\bar{r}_u, \bar{r}_v]| du dv
 \end{aligned}$$

$$\exists \eta_i^* \in \bar{\Omega}_i : \sigma^S\{T, \xi\} = \sum_i g(r(\eta_i)) |[\bar{r}_u(\eta_i^*), \bar{r}_v(\eta_i^*)]| m(\Omega_i)$$

$$\sigma\{T', \eta\} = \sum_i g(r(\eta_i)) |[\bar{r}_u(\eta_i), \bar{r}_v(\eta_i)]| m(\Omega_i)$$

$w = |[\bar{r}_u(\eta), \bar{r}_v(\eta)]|$  — непрерывна на  $\bar{\Omega}$  т. Кантора  $\xRightarrow{\text{равномерно}}$  непрерывна на  $\bar{\Omega}$

$$\begin{aligned}
 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall \eta, \eta' \in \bar{\Omega} : \rho(\eta > \eta') < \delta \rightarrow ||[\bar{r}_u(\eta), \bar{r}_v(\eta)]| - |[\bar{r}_u(\eta'), \bar{r}_v(\eta')]| < \frac{\varepsilon}{Mm(\Omega)} \\
 |\sigma^S\{T, \xi\} - \sigma\{T', \eta\}| &\leq M \sum_i ||[\bar{r}_u(\eta), \bar{r}_v(\eta)]| - |[\bar{r}_u(\eta'), \bar{r}_v(\eta')]| |m(\Omega_i)| \leq M \frac{\varepsilon}{Mm(\Omega)} m(\Omega) = \varepsilon
 \end{aligned}$$

$$\Delta_T \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma^S\{T, \xi\} \rightarrow I \leftarrow \sigma\{T', \eta\}$$

□



## Поверхностный интеграл второго рода (ПВР)

$S = \{\bar{r} = \bar{r}(u,v), (u,v) \in \bar{\Omega}\}$  ориентированная гладкая поверхность с кусочно гладким краем  $\delta S$ ,  $\bar{n} = \pm \frac{[\bar{r}_u, \bar{r}_v]}{|\bar{r}_u, \bar{r}_v|}$ ,  $R = R(x,y,z)$  определена на  $S$

$T = \{S_i\}$ ,  $X_i$  — проекция  $S_i$  на плоскость  $xOy$

Из  $T$  отбрасываем те  $S_i$ , которые

1. не взаимно однозначное отображение на плоскость  $xOy$
2. часть  $S_i$  лежит сверху и снизу от поверхности  $S_i$  (согнутый листик)

$T' = \{S_i\}$ ;  $X_i = \pm m(X_i)$ ,  $\Delta_T <$  наибольший диаметр множеств  $S_i \in T'$

Ориентация:  $\delta S_i$ ,  $S_i \in T'$ , согласована с ориентацией поверхности  $S$ ,  $\partial X_i$  обходится таким образом, что  $X_i$  остается слева.

Правило выбора знака:  $X_i = \pm m(X_i)$

'+'  $\rightarrow \delta S_i$ ,  $\partial X_i$  — ориентированы одинаково

'-'  $\rightarrow \delta S_i$ ,  $\partial X_i$  — противоположно ориентированы

$$\bar{\xi}_i \in S_i, S_i \in T', \xi = \{\xi_i\} \rightarrow \sigma\{T', \xi, +\} = \sum_i R(\xi_i) x_i; \quad \sigma\{T', \xi, -\} = -\sigma\{T, \xi, +\}$$

**Определение.** Число  $I$  называется пределом суммы  $\sigma\{T, \xi, +\}$  при  $\Delta_T \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T' : \Delta_{T'} < \delta \& \forall \xi \rightarrow |\sigma\{T', \xi, +\} - I| < \varepsilon$

Если предел  $I$  существует, то он называется поверхностным интегралом второго рода и обозначается:  $I = \iint_S R(x,y,z) dx dy = \iint_S R dx dy$

**Пример.**  $S = \{z = g(x,y), x,y \in \bar{\Omega}\}$ , ориентирована таким образом, что  $\bar{n}$  образует острый угол с  $Oz$ ,  $T = \{S_i\}$ ,  $T = T'$ ,  $R = R(x,y,z)$ ,  $\xi_i \in S_i$ ,  $\xi_i(x_i, y_i, g(x_i, y_i))$

$$\sigma\{T, \xi, +\} = \sum_i R(\xi_i) m(X_i) = \sum_i R(x_i, y_i, g(x_i, y_i)) m(X_i)$$

$$\Delta_T \rightarrow 0 \Rightarrow \iint_{\Omega} R(x,y,g(x,y)) dx dy = \iint_S R(x,y,z) dx dy$$

## Общий вид поверхностного интеграла 2-го рода.

$S = \{\bar{r} = \bar{r}(u,v), (u,v) \in \bar{\Omega}\}$  — ориентированная гладкая поверхность с кусочно гладким краем  $\delta S$

$\bar{n} = \frac{\pm[\bar{r}_u, \bar{r}_v]}{|\bar{r}_u, \bar{r}_v|}$ ,  $Q, P$  на  $S$   $T = \{S_i\}$ ,  $Y_i$  — проекция  $S_i$  на плоскость  $yOz$

из  $T$  отбрасываем те  $S_i$ , которые

1. не биективное отображение на плоскость  $yOz$
2. Часть  $S_i$  лежит сверху и снизу от поверхности

$T' = \{S_i\}$ ,  $Y_i = \pm m(Y_i)$ ,  $\Delta_{T'}$  — диаметр (наиб) множеств  $S'_i \in T'$

$$\iint_S P(x,y,z) dy dz + Q(x,y,z) dz dx + R(x,y,z) dx dy$$

## Сведение ПИВР-а к ПИПР-у.

**Теорема 2.** Пусть  $S$  — ориентированная гладкая поверхность с кусочно гладким краем  $P, Q, R$  непрерывна на  $S$ , тогда справедлива формула

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iint_S [P \cos(\hat{\mathbf{n}}, i) + Q \cos(\hat{\mathbf{n}}, j) + R \cos(\hat{\mathbf{n}}, k)] dS$$

*Доказательство.* 1)  $S = \{x, y, z : z = g(X, y), (x, y) \in \bar{\Omega}\}$

Выбрана верхняя сторона поверхности  $S$ ,  $X_i$  — полож.,  $T = T'$

$$m(S_i) = \iint_{\Omega_i} \frac{dx dy}{\cos \gamma_i} = \cos \gamma_i^* m(X_i); \quad X + i = m(X_i) = \cos \gamma_i^* \cdot m(S_i)$$

$$\xi_i \in S_i, \xi = \{\xi_i\} : \sigma\{T, \xi, +\} = \sum_i R(\xi_i) X_i = \sum_i R(\xi_i) \cos \gamma_i^* m(S_i)$$

$$\sigma'\{T, \xi\} = \sum_i R(\xi_i) \cos \gamma_i m(S_i), \quad \gamma_i^* = \gamma(\xi_i^*), \quad \xi_i^* \in S_i, \quad \gamma_i = \gamma(\xi_i)$$

$\cos \gamma$  — функция непрерывна на  $S$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \xi \& \xi' \quad \rho(\xi, \xi') < \delta \rightarrow |\cos \gamma(\xi) - \cos \gamma(\xi')| < \frac{\varepsilon}{M m(\xi)}$$

$$|\sigma\{\xi, T, +\} - \sigma'\{T, \xi\}| \leq M \frac{\varepsilon}{M m(\xi)} \sum_i m(S_i) = \varepsilon$$

$$T : \Delta_T < \delta$$

$$\iint_S R dx dy = \iint_S R \cos(\hat{\mathbf{n}}, k) dS$$

$$\begin{aligned} \sigma\{T', \xi, +\} &\xrightarrow{\Delta_{T' \rightarrow 0}} \iint_S R \cos(\hat{\mathbf{n}}, k) \\ \sigma\{T', \xi, +\} &\xrightarrow{\Delta_{T' \rightarrow 0}} 0 \end{aligned}$$

2) Общий случай  $T = T' \cup T''$

□

## Часть VII

# Седьмой билет

## Элементы векторного анализа

### Скалярные и векторные поля

Если в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$  задана функция  $u = u(x, y, z)$ , то будем говорить, что в  $\mathcal{D}$  задано *скалярное поле*  $\forall (x, y, z) \in \mathcal{D}, (x, y, z) \rightarrow u$

Если в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$  задана векторная функция  $\bar{a} = (P, Q, R), P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ , то будем говорить, что в области  $\mathcal{D}$  задано *векторное поле*  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{D} (x, y, z) \rightarrow \bar{a}(P, Q, R)$

### Вектор Гамильтона

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

1. Если функция  $u$  или вектор  $\bar{a}$  стоят справа от  $\nabla$ , то он действует на них как дифференциальный оператор
2. Если функция  $u$  или вектора  $\bar{a}$  стоят слева от  $\nabla$ , то получаем новый дифференциальный оператор

#### Пример 1

$$\text{grad} u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \nabla u$$

#### Пример 2

$$\text{grad} uv = u \text{grad} v + v \text{grad} u$$

#### Пример 3

$$\bar{r} = (x, y, z), \rho = |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\nabla u(\rho) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}(\rho), \frac{\partial u}{\partial y}(\rho), \frac{\partial u}{\partial z}(\rho) \right) = u'(\rho) \cdot \left( \frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho} \right) = \frac{u'(\rho)}{\rho} \bar{r}$$

**Пример 4**  $(\nabla, \bar{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div} \bar{a}$

Эта функция называется дивергенцией векторного поля  $\bar{a}$

#### Пример 5

$$[\nabla, \bar{a}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k = \text{rot} \bar{a}$$

**Пример 6**

$$\operatorname{div}(u\bar{a}) = (\nabla, u\bar{a}) = (\operatorname{grad} u, \bar{a}) + u(\nabla, \bar{a}) = (\operatorname{grad} u, \bar{a}) + u \operatorname{div} \bar{a}$$

**Пример 7**

$$\operatorname{div}[\bar{a}, \bar{b}] = (\nabla, [\bar{a}, \bar{b}]) = (\nabla, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \nabla, \bar{a}) - (\bar{a}, \nabla, \bar{b}) = (\bar{b}, \operatorname{rot} \bar{a}) - (\bar{a}, \operatorname{rot} \bar{b})$$

**Пример 8**

$$\operatorname{rot}(u, \bar{a}) = [\nabla, u\bar{a}] = [\nabla u, \bar{a}] + u[\nabla, \bar{a}] = [\operatorname{grad} u, \bar{a}] + u \operatorname{rot} \bar{a}$$

**Пример 9**

$$\operatorname{rot}[\bar{a}, \bar{b}] = [\nabla, [\bar{a}, \bar{b}]] = \bar{a}(\nabla, \bar{b}) - \bar{b}(\nabla, \bar{a}) = \bar{a} \operatorname{div} \bar{b} - \bar{b} \operatorname{div} \bar{a} + \operatorname{grad}_{\bar{b}} \bar{a} - \operatorname{grad}_{\bar{a}} \bar{b}$$

**Пример 10**

$$[\bar{b}, \operatorname{rot} \bar{a}] = [\bar{b}, [\nabla, \bar{a}]] = \nabla(\bar{b}, \bar{a}) - (\bar{b}, \nabla) \bar{a}$$

**Пример 11**

$$(\bar{c}, \bar{b}, \operatorname{rot} \bar{a}) = (\bar{c}, [\bar{b}, \operatorname{rot} \bar{a}]) = (\bar{c}, \nabla(\bar{b}, \bar{a})) - (\bar{c}, (\bar{b} \nabla) \bar{a}) = (\bar{b}, (\bar{c} \nabla) \bar{a}) - (\bar{c}, (\bar{b} \nabla) \bar{a})$$

**Пример 12**

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a} = (\nabla, \operatorname{rot} \bar{a}) = (\nabla, [\nabla, \bar{a}]) = (\nabla, \nabla, \bar{a}) = 0$$

**Пример 13**

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u] = u[\nabla, \nabla] = 0$$

## Формула Остроградского – Гаусса

### Доказательство формулы

**Определение.** Область  $D \subset \mathbb{E}^3$  называется *элементарной относительно оси  $Oz$*  если ее проекция  $\Omega$  на гиперплоскость  $\mathcal{E}_z = \{(x, y, z) : z = 0\}$  является областью и  $\partial D$  состоит из графиков функции  $z = \psi(x, y)$ ,  $z = \varphi(x, y)$  причем  $\psi(x, y) \leq \varphi(x, y) \forall (x, y) \in \bar{\Omega}$  и, быть может, цилиндрическая поверхность, образующая которой параллельна  $Oz$  и направляющей ее является  $\partial\Omega$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : \psi(x, y) \leq z \leq \varphi(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}\}$$

**Замечание.** Элементарная относительно  $Oz$  область  $\mathcal{D}$  измерима, если  $\Omega$  — измерима, и  $\varphi, \psi$  непрерывны на  $\bar{\Omega}$ .

**Теорема 1.** Если измеримая область  $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$  элементарна относительно трех координатных осей одновременно,  $\partial \mathcal{D}$  ориентирована внешней нормалью  $\bar{n}$ , векторное поле  $\bar{a} = (P, Q, R)$  непрерывно дифференцируемо в  $\bar{\mathcal{D}}$ , то справедлива формула Остроградского–Гаусса:

$$\iint_{\partial \mathcal{D}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

*Доказательство.*  $\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz =$  этот интеграл существует в силу наложенных ограничений на поле  $= \iint_{\Omega} dx dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{\Omega} R(x,y,\varphi(x,y)) dx dy - \iint_{\Omega} R(x,y,\psi(x,y)) dx dy = \iint_{S_1} R(x,y,z) dx dy + \iint_{S_2} R(x,y,z) dx dy + \iint_S R(x,y,z) dx dy;$   
 $S_1 = \{(x,y,z) : z = \varphi(x,y), (x,y) \in \overline{\Omega}\},$   
 $S_2 = \{(x,y,z) : z = \psi(x,y), (x,y) \in \overline{\Omega}\};$   
 $S = \{(x,y,z) : (x,y) \in X \subset \partial\Omega\} \cap \perp Oz \rightarrow \iint_S R(x,y,z) dx dy = 0$

Тогда наш интеграл равен  $\iint_{S_1} R(x,y,z) dx dy + \iint_{S_2} R(x,y,z) dx dy + \iint_S R(x,y,z) dx dy = \iint_{\partial\mathcal{D}} R(x,y,z) dx dy$  □

$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS$  — этот интеграл будем называть потоком векторного поля  $\vec{a}$  через поверхность  $S$  в направлении вектора нормали.

$\iint_{\partial\mathcal{D}} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{a} d\mathcal{D}$  — формула Остроградского–Гаусса

## Приложения формулы Остроградского–Гаусса

1.  $m(\mathcal{D}) = 1/3 \iint_{\partial\mathcal{D}} x dy dz + y dz dx + z dx dy$

2. Инвариантность  $\operatorname{div} \vec{a}$

**Теорема 2.** Пусть  $\vec{a}$  — непрерывно дифференцируемое в  $\overline{\mathcal{D}}$  векторное поле.  $S_\varepsilon(M_0)$  — шар с центром в  $M_0$  и радиусом  $\varepsilon$ , причем  $\overline{S_\varepsilon(M_0)} \subset \mathcal{D}$ , тогда  $\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\vec{a}, \vec{n}) dS}{m(S_\varepsilon(M_0))}$

*Доказательство.*  $\iiint_{S_\varepsilon(M_0)} \operatorname{div} \vec{a} d\mathcal{D} = \iint_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\vec{a}, \vec{n}) dS$

$$\exists M^* \in S_\varepsilon(M_0) : \operatorname{div} \vec{a}(M^*) \cdot m(S_\varepsilon(M_0)) = \iint_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\vec{a}, \vec{n}) dS$$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M^*) = \frac{\iint_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\vec{a}, \vec{n}) dS}{m(S_\varepsilon(M_0))} \quad \varepsilon \rightarrow 0 : M^* \rightarrow M_0$$
 □

## Соленоидальные векторные поля.

**Определение.** Область  $\mathcal{D} \in \mathbb{E}^3$  называется объемно–односвязной областью, если любая замкнутая поверхность  $S \subset \mathcal{D}$  является границей области  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$

**Замечание.** Из определения следует, что  $\partial\mathcal{D}$  объемно–односвязной области является связным множеством.

**Определение.** Непрерывное векторное поле  $\vec{a}$  заданное в области  $\mathcal{D}$  называется соленоидальным, если поток векторного поля через любую замкнутую кусочно гладкую поверхность  $S \subset \mathcal{D}$  равен нулю:  $\iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS = 0$

**Теорема 3.** Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\vec{a}$  было соленоидальным в области  $\mathcal{D}$  необходимо, а в случае объемной односвязной области и достаточно, чтобы  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$  в  $\mathcal{D}$

*Доказательство.* **Необходимость**  $\vec{a}$  — соленоидальна в  $\mathcal{D}$

$$\forall M_0 \in \mathcal{D} \quad S_\varepsilon(M_0) \subset \mathcal{D} \quad \operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_\varepsilon(M_0)} (\vec{a}, \vec{n}) dS}{m(S_\varepsilon(M_0))} = 0$$

**Достаточность.**  $\forall S \subset \mathcal{D} \quad \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iiint_{\mathcal{D}'} \operatorname{div} \vec{a} dD \Rightarrow \vec{a}$  — соленоидальна. □

**Пример.**  $\vec{r} = (x, y, z)$ .  $\rho = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\vec{a} = \nabla \frac{1}{\rho} = -\frac{\vec{r}}{\rho^3}$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \left( \nabla, -\frac{\vec{r}}{\rho^3} \right) = -\left( \nabla \frac{1}{\rho^3}, \vec{r} \right) - \frac{1}{\rho^3} (\nabla, \vec{r}) = \frac{3}{\rho^5} (\vec{r}, \vec{r}) - \frac{3}{\rho^3} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^3} = 0$$

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_S \left( -\frac{\vec{r}}{\rho^3}, \frac{\vec{r}}{R} \right) dS = -\frac{1}{R^2} \iint_S dS = -4\pi \neq 0$$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

## Часть VIII

# Восьмой билет

## Формула Стокса.

### Простая гладкая поверхность.

$$S = \{\bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in \bar{\Omega}\}$$

1.  $r$  дважды непрерывно дифференцируема в  $\bar{\Omega}$
2.  $\partial\Omega$  — кусочно гладкая поверхность, следовательно  $\partial S$  — кусочно гладкая
3. Ориентация края  $\partial S$  согласованно с ориентацией нормали поверхности  $S$
4. В  $\mathcal{D}$  задано непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\bar{a} = (P, Q, R)$

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\partial S} (\bar{a}, d\bar{r})$$

**Теорема 1.** При заданных условиях 1 – 4 циркуляция векторного поля  $\bar{a}$  вдоль кривой  $\partial S$  равна потоку вихря векторного поля  $\bar{a}$  через ту сторону поверхности  $S$ , с которой обход  $\partial S$  виден по ходу часовой стрелки.

$$\int_{\partial S} (\bar{a}, d\bar{r}) = \iint_S (\text{rot} \bar{a}, \bar{n}) dS$$

*Доказательство.*  $(\bar{c}, \bar{b}, \text{rot} \bar{a}) = (\bar{b}, (\bar{c}, \nabla) \bar{a}) - (\bar{c}, (\bar{b}, \nabla) \bar{a})$

$$S = \{\bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in \bar{\Omega}\}$$

$$\partial\Omega = \{u = \varphi(t), v = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$$

$$\partial S = \{\bar{r} = \bar{r}(\varphi(t), \psi(t)), \alpha \leq t \leq \beta\}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} (\bar{a}, d\bar{r}) &= \int_{\alpha}^{\beta} (\bar{a}(\varphi(t), \psi(t)), (\bar{r}_u(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + \bar{r}_v(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t))) dt = \int_{\partial\Omega} (\bar{a}, \bar{r}_u) du + (\bar{a}, \bar{r}_v) dv = \\ &= \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (\bar{a}, \bar{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\bar{a}, \bar{r}_u) \right] dudv = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} x_u + \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} y_u + \frac{\partial \bar{a}}{\partial z} z_u, \bar{r}_v \right) - \left( \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} x_v + \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} y_v + \frac{\partial \bar{a}}{\partial z} z_v, \bar{r}_u \right) \right] = \\ &= \iint_{\Omega} [((\bar{r}_u \nabla) \bar{a}, \bar{r}_v) - ((\bar{r}_v \nabla) \bar{a}, \bar{r}_u)] dudv = \iint_{\Omega} (\bar{r}_u, \bar{r}_v, \text{rot} \bar{a}) dudv = \iint_{\Omega} \left( \text{rot} \bar{a}, \frac{[\bar{r}_u, \bar{r}_v]}{|\bar{r}_u, \bar{r}_v|} \right) |\bar{r}_u, \bar{r}_v| dudv = \\ &= \iint_S (\text{rot} \bar{a}, \bar{n}) dS \end{aligned} \quad \square$$

### Кусочно гладкая поверхность.

$$S = \bigcup_{i=1}^k S_i, \partial S_i$$

$$\sum_{i=1}^k \oint_{\partial S_i} (\bar{a}, d\bar{r}) = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} (\text{rot} \bar{a}, \bar{n}) dS$$

$$\oint_{\partial S} (\bar{a}, d\bar{r}) = \iint_S (\text{rot} \bar{a}, \bar{n}) dS$$

На каждой  $S_i$  свой  $\bar{n} \Rightarrow$  формула Стокса остается справедливой

## Инвариантность ротора.

$\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$ , непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\bar{a}$

$M_0(\bar{r}_0) = M_0 \subset \mathcal{D}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\prod : (\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{n}) = 0$

$S_\varepsilon(M_0) \subset \prod$ ,  $\partial S_\varepsilon(M_0)$  — ориентирована положительно, обход согласован с  $\bar{n}$

$$\oint_{\delta_\varepsilon(M_0)} (\bar{a}, d\bar{r}) = \iint_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\text{rot} \bar{a}, \bar{n}) dS$$

$$(\text{rot} \bar{a}, \bar{n})(M^*) m(S_\varepsilon(M_0)) = \oint_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\bar{a}, d\bar{r})$$

$$(\text{rot} \bar{a}, \bar{n})(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\oint_{\delta S_\varepsilon(M_0)} (\bar{a}, d\bar{r})}{m(S_\varepsilon(M_0))}$$

**Теорема 2.** Если в области  $\mathcal{D}$  задано непрерывное дифференцируемое векторное поле  $\bar{a}$  и в нем выбрана точка  $M_0$  в которой задан вектор нормали  $\bar{n}$  и построена плоскость проходящая через эту точку и в ней выбран круг, ориентированный положительно, то выполнена формула

$$(\text{rot} \bar{a}, \bar{n})(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\oint_{\delta S_\varepsilon(M_0)} (\bar{a}, d\bar{r})}{m(S_\varepsilon(M_0))}$$

## Потенциальные векторные поля.

В  $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$  задано непрерывное векторное поле  $\bar{a}$

**Определение.** Непрерывное векторное поле  $\bar{a}$  называют потенциальным, если существует такая функция  $u$ , что  $\bar{a} = \text{grad} u$

**Теорема 3.** Пусть в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$  задано непрерывное дифференцируемое поле  $\bar{a}$ , тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\oint_{\Gamma} (\bar{a}, d\bar{r}) = 0$ , для любой кусочно гладкая замкнутой кривой  $\Gamma \subset \mathcal{D}$
2.  $\int_{\Gamma} (\bar{a}, d\bar{r})$ ,  $\Gamma$  — кусочно гладкая кривая, соединяющая точки  $A, B$ ,  $\Gamma \subset \mathcal{D}$  не зависит от кривой  $\Gamma$  (для любых точек  $A, B \in \mathcal{D}$ )
3. Поле  $\bar{a}$  — потенциальное.

\* — доказательство аналогично плоскому случаю

**Определение.** Область  $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$  называется поверхностно односвязной, если на любой кусочно гладкий контур  $\gamma \subset \mathcal{D}$  можно натянуть поверхность  $S$ , лежащую в области  $\mathcal{D}$

**Замечание.** Шар с выколотой точкой не является объемно-односвязной областью, но этот шар является поверхностно односвязной областью. Тор является объемно-односвязной областью, но не является поверхностно-односвязной областью.



**Теорема 4.** Для потенциальности непрерывно дифференцируемого векторного поля  $\bar{a}$ , определенного в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$ , необходимо, а в случае поверхностно односвязности достаточно, чтобы векторное поле  $\bar{a}$  было безвихревым, т.е.  $\text{rot} \bar{a} = \bar{0}$

*Доказательство. Необходимость.*  $\exists u : \bar{a} = \text{grad} u$  в  $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$   $\bar{a} = \nabla u$   $\text{rot} \bar{a} = [\nabla, \nabla u] = \bar{0}$

*Достаточность.*  $\text{rot} \bar{a} = \bar{0}$

$\forall \gamma \subset \mathcal{D}$ , кусочно гладкий контур  $\gamma = \delta S, S \subset \mathcal{D}$

$$\oint_{\gamma} (\bar{a}, d\bar{r}) = \iint_S (\text{rot} \bar{a}, \bar{n}) dS = 0, \text{ тогда } 1 \Leftrightarrow 3$$

□

**Замечание.** В случае отсутствия поверхностной односвязности  $\mathcal{D}$  из  $\text{rot} \bar{a} = \bar{0}$  не следует потенциальность

$$\bar{a} = \left( -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z \right) \text{ определяет } \mathbb{E}^3 \setminus \{Oz\}, \quad \text{rot} \bar{a} = \bar{0}$$

$$\gamma : \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}, \quad \oint_{\gamma} (\bar{a}, d\bar{r}) = \oint_{\gamma} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy + z dz = 2\pi \neq 0 \Rightarrow \text{нет потенциальности поля.}$$