

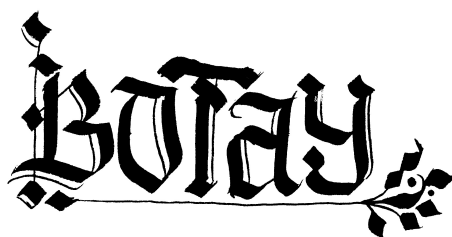
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

---

Общая физика.  
Электричество и магнетизм.

---



СОСТАВИТЕЛИ:

АЙВАЗОВ Д.А.

ДОМРАЧЕВ А.В.

ЛЕВЧЕНКО Д.Н.

ЛЯПУСТИНА М.С.

ШАМСИМУХАМЕТОВ Д.Р.

Над текстом работала команда проекта "Физтех.Билеты"

*при поддержке студсоветов ФРТК и ФУПМ*

*Автор проекта: Шамсимухаметов Д.Р.*



## Содержание

- 1 1. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля. Элементарный заряд. Принцип суперпозиции. Единицы измерения заряда(в системе Гаусса и СИ). Поле точечного диполя. 6
- 2 2. Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме (интегральная и дифференциальная формы). Примеры применения. 8
- 3 3. Потенциальный характер электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Теорема о циркуляции в электростатическом поле. Связь потенциала с напряжённостью поля. Потенциал поля точечного диполя. 11
- 4 4. Потенциал электростатического поля. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа. Граничные условия и метод зеркальных изображений. 13
- 5 5. Проводники в электростатическом поле. Электростатическая защита. Граничные условия на поверхности проводника. Проводящий шар в электростатическом поле. 15
- 6 6. Диэлектрики в электростатическом поле. Механизм поляризации диэлектриков. Свободные и связанные(поляризационные) заряды. Вектор поляризации. Связь вектора поляризации с поляризационными зарядами. Поверхностные и объёмные поляризационные заряды. 18
- 7 7. Вектор поляризации и его связь с поляризационными зарядами. Вектор электрической индукции. Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость. 21
- 8 8. Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектриках (интегральная и дифференциальная формы). Граничные условия на границе раздела двух диэлектриков. 22
- 9 9. Электрическая ёмкость уединённых проводников и конденсаторов. Расчёт ёмкости плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов. 23
- 10 10. Электрическая энергия и её локализация в пространстве. Объёмная плотность энергии. Взаимная энергия зарядов. Энергия диполя во внешнем поле (жёсткий и упругий диполи). 24
- 11 11. Силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле.

Энергетический метод вычисления сил.	25
12 12. Постоянный ток. Сила и плотность тока. Сторонние силы. Закон сохранения заряда и уравнение непрерывности. Токи в неограниченных средах.	26
13 13. Закон Ома (интегральная и локальная формы). Постоянный ток в замкнутом контуре. Электродвижущая сила. Правила Кирхгофа. Примеры применения.	28
14 14. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля–Ленца в интегральной и локальной форме.	30
15 15. Магнитное поле постоянного тока. Вектор магнитной индукции. Сила Лоренца и сила Ампера. Закон Био–Савара. Магнитный момент рамки с током. Момент сил, действующий на рамку с током в магнитном поле.	31
16 16. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме. Примеры применения. Магнитное поле соленоида. Теорема Гаусса для магнитного поля.	32
17 17. Магнитное поле в веществе. Молекулярные токи. Вектор намагниченности и его связь с молекулярными токами.	34
18 18. Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе. Вектор $H$ . Применение к расчёту магнитных цепей.	36
19 19. Граничные условия для векторов $B$ и $H$ на границе раздела двух магнетиков.	37
20 20. Постоянный магнит. Магнитные поля $B$ и $H$ постоянного магнита.	38
21 21. Магнитные свойства сверхпроводника I-го рода. Эффект Мейсснера. Граничные условия на поверхности сверхпроводника. Сверхпроводящий шар в магнитном поле.	39
22 22. Работа сил Ампера по перемещении витка с током в магнитном поле.	40
23 23. Электромагнитная индукция в движущихся проводниках. Правило Ленца.	42
24 24. Электромагнитная индукция в неподвижных проводниках. Фарадеевская и максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле.	43

- 25 25. Нерелятивистское преобразование полей при переходе от одной инерциальной системы к другой. Магнитное поле равномерно движущегося заряда. 44
- 26 26. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Дрейфовое движение. Циклотронная частота. 45
- 27 27. Магнитный поток. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции. Индуктивность соленоида и тороидальной катушки. 46
- 28 28. Установление тока в цепи, содержащей индуктивность. Магнитная энергия тока. Локализация магнитной энергии в пространстве. 47
- 29 29. Взаимная энергия токов. Теорема взаимности. Взаимная индукция двух катушек на общем магнитопроводе. 49
- 30 30. Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле. Подъёмная сила электромагнита. 51
- 31 31. Переменное электрическое поле и его магнитное действие. Ток смещения. 52
- 32 32-33. Системы уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме. Граничные условия. Материальные уравнения. 53
- 35 34. Волновое уравнение как следствие уравнений Максвелла. Плоские электромагнитные волны в однородной среде. Скорость распространения. Поперечность электромагнитных волн. Связь полей  $B$  и  $E$  в плоской волне. 55
- 36 35. Монохроматическая (гармоническая) плоская волна. Стоячие электромагнитные волны. Отражение электромагнитной волны от плоской поверхности идеального проводника 57
- 37 36. Электромагнитные волны в волноводах. Простейшие типы электромагнитных волн в волноводе прямоугольного сечения. Критическая частота. Длина волны и фазовая скорость волн в волноводе. 59
- 38 37. Двухпроводная линия как пример не квазистационарной цепи. Электромагнитная волна в двухпроводной линии. Скорость волны. Волновое сопротивление. Согласованная нагрузка. 61
- 39 38. Поток энергии. Вектор Пойнтинга. Теорема Пойнтинга. Примеры

применения.	63
40 39. Давление излучения. Опыты Лебедева. Электромагнитный импульс.	64
40 40. Излучение электромагнитных волн. Излучение колеблющегося диполя (без вывода). Диаграмма излучения. Зависимость мощности излучения от частоты (закон Релея).	65
42 42. Скин-эффект. Толщина скин-слоя, её зависимость от частоты и проводимости	66
43 43. Квазистационарные процессы. Уравнение гармонического осциллятора. Свободные колебания осциллятора с затуханием	67
44 44. Коэффициент затухания, логарифмический декремент, добротность колебательного контура. Превращения энергии при затухающих колебаниях. Энергетический смысл добротности.	68
45 45. Вынужденные колебания в линейных системах (гармоническая внешняя ЭДС). Амплитудно-фазовая характеристика линейных фильтров. Колебательный контур. Резонанс. Ширина резонансной кривой и её связь с добротностью.	70
46 46. Процессы установления вынужденных колебаний. Биения	71
47 47. Расчёт цепей, содержащих сопротивления, индуктивности и ёмкости при гармоническом внешнем воздействии. Метод комплексных амплитуд. Векторные диаграммы. Резонанс.	72
48 48. Правила Кирхгофа для переменных токов. Работа и мощность переменного тока	74
49 49. Вынужденные колебания в линейных системах под действием негармонической внешней силы – спектральный анализ линейных систем.	75
50 50. Модулированные колебания. Амплитудная и фазовая модуляция. Векторное изображение, спектры колебаний, представление в виде суперпозиции гармонических сигналов. Опыт Мандельштама.	76
51 51. Понятие о разложении Фурье. Примеры спектрального разложения. Соотношение неопределенностей.	78
52 52. Параметрические колебания. Условия возбуждения индуктивной па-	

раметрической машины. Параметрический резонанс.	79
53 53. Понятие об автоколебаниях. Обратная связь. Условия самовозбуждения.	80
54 54. Понятие о плазме. Давыдовский радиус. Плазменные колебания и плазменная частота.	82
55 55. Диэлектрическая проницаемость плазмы. Закон дисперсии.	84

# 1. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля. Элементарный заряд. Принцип суперпозиции. Единицы измерения заряда(в системе Гаусса и СИ). Поле точечного диполя.

Закон Кулона. Заряд — это мера взаимодействия заряженного тела с полем.

Электромагнитным полем называется область пространства, где действуют электрические и магнитные силы.

Точечный заряд — заряд, размерами и формой которого в рассматриваемых условиях можно пренебречь.

## Закон Кулона

Сила взаимодействия  $F$  двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величинам  $q_1$  и  $q_2$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними  $r_{12}$ . Она является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковы:

$$\vec{F} = C \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12},$$

где  $C$ -числовой коэффициент.

Напряженность электрического поля. Напряженностью электрического поля в некоторой точке называется сила, действующая на единичный точечный положительный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

В соответствии с законом Кулона напряженность поля точечного заряда  $Q$  равна

$$\vec{E} = \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

Для наглядного изображения электрических полей используются **силовые линии**.

**Силовой линией** — называется такая линия, в каждой точке которой направление касательной к ней совпадает с направлением напряжённости поля в той же точке.

Принцип суперпозиции. Напряженность поля в данной точке равно векторной сумме напряжённостей полей, независимо создаваемых в данной точке каждым из зарядов системы:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

**Единицы измерения заряда.** За единицу заряда принимается величина такого точечного заряда, который действует на такой же точечный заряд в вакууме с силой в одну дина, если расстояние между обоими зарядами равно одному сантиметру.

Любой ненулевой заряд кратен **элементарному заряду**, численно равному заряду электрона  $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$  ед.СГСЭ =  $1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл.

**Поле точечного диполя.** Простейшей системой точечных зарядов является **электрический диполь**.

**Электрический диполь** — система, состоящая из двух точечных зарядов, одинаковых по величине и противоположных по знаку.

**Плечо диполя** — вектор, идущий от отрицательного заряда к положительному, длина которого равна расстоянию между зарядами.

**Дипольным моментом диполя** называется вектор  $\vec{p} = q\vec{l}$ .

**Поле точечного диполя** можно найти по принципу суперпозиции:

$$\vec{E} = \vec{E}_- + \vec{E}_+ = \frac{(-q)\vec{r}_-}{r_-^3} + \frac{(+q)\vec{r}_+}{r_+^3}, \quad \vec{r}_- = \vec{r}_+ + \vec{l}$$

Обозначим  $\vec{E}_0 = \frac{q\vec{r}}{r^3}$ ,  $\vec{r}_+ = \vec{r}$ . Считая  $l \ll r_+, r_-$  и разлагая функцию  $\vec{E}$  по степеням малого смещения  $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ , получаем:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{E}_0(\vec{r} + \vec{l}) + \vec{E}_0(\vec{r}) = - \left[ l_x \frac{\partial \vec{E}_0(\vec{r})}{\partial x} + l_y \frac{\partial \vec{E}_0(\vec{r})}{\partial y} + l_z \frac{\partial \vec{E}_0(\vec{r})}{\partial z} \right] \equiv - \left( l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}_0(\vec{r}) \equiv \\ &\equiv -(\vec{l} \nabla) \vec{E}_0 = \frac{3(\vec{p} \vec{r}) \vec{r} - \vec{p} r^2}{r^5} \end{aligned}$$

Поле точечного диполя: 
$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \vec{r}) \vec{r} - \vec{p} r^2}{r^5}$$



## 2. Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме (интегральная и дифференциальная формы). Примеры применения.

**Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме** Теорема Гаусса в интегральной форме.

Поток напряжённости электрического поля через любую замкнутую поверхность равен (с коэффициентом  $4\pi$ ) суммарному заряду, находящемуся внутри поверхности:

$$\Phi = 4\pi q \text{ или } \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q,$$

где  $q = \int_V \rho dV$  — полный заряд, находящийся в объёме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ ,  $\rho$  — объёмная плотность заряда.

**Теорема Гаусса в дифференциальной форме** имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

Доказательство:

### 1. Точечный заряд $q$ в центре сферы радиуса $r$

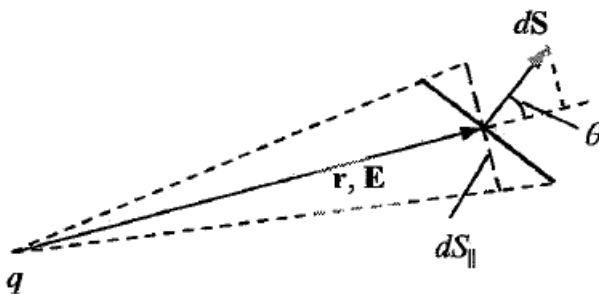
Поместим начало координат в центр сферы. В этом случае вектор элементарной площадки на поверхности сферы параллелен радиус вектору этой площадки  $d\vec{S} \parallel \vec{r}$  (в случае замкнутой поверхности за направление вектора  $d\vec{S}$  принимается внешняя нормаль к поверхности). Поскольку  $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$ , то поток напряжённости поля через рассматриваемую площадку равен

$$d\phi = \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{r^2} dS$$

Суммируя потоки по всем элементарным площадкам, находим поток через всю поверхность сферы:

$$\phi = \frac{q}{r^2} \vec{S} = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q$$

### 2. Поверхность - не сферическая



В этом случае для элементарного потока имеем выражение

$$d\phi = \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{r^3} \vec{r} d\vec{S} = \frac{q}{r^2} dS_{\parallel}$$

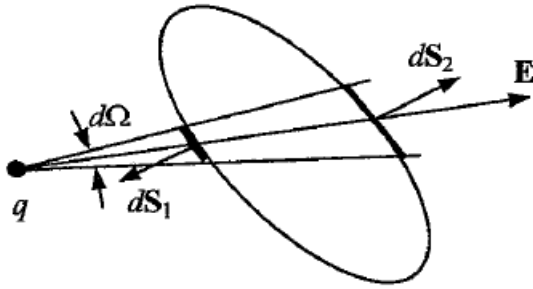
где  $dS_{\parallel}$  - проекция вектора  $d\vec{S}$  на радиус-вектор  $\vec{r}$

Если  $d\Omega$  - телесный угол, под которым видна площадка, то  $dS_{\parallel} = dS \cos \theta = r^2 d\Omega$  и, следовательно,

$$d\phi = \frac{q}{r^2} dS_{\parallel} = \frac{q}{r^2} r^2 d\Omega = q d\Omega, \quad \phi = \int_{4\pi} q d\Omega = 4\pi q$$

### 3. Заряд находится вне замкнутой поверхности

Выберем произвольную силовую линию, дважды пересекающую поверхность, и вокруг неё конус с телесным углом при вершине  $d\Omega$ . Этот конус вырезает на рассматриваемой поверхности две элементарные площадки. Соответственно поток напряжённости поля через эти площадки  $d\vec{\phi} = d\vec{\phi}_1 + d\vec{\phi}_2$



Подобно тому, как было сделано выше, находим:

$$d\phi_1 = \vec{E} d\vec{S}_1 = -\frac{q}{r_{\perp}^2} dS_{1,\parallel} = -q d\Omega$$

$$d\phi_2 = \vec{E} d\vec{S}_2 = +\frac{q}{r_2^2} dS_{2,\parallel} = +q d\Omega$$

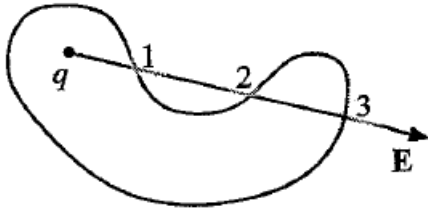
Здесь учтено, что площадки  $d\vec{S}_1$  и  $d\vec{S}_2$  ориентированы противоположно по отношению к радиус-вектору, идущему от точечного заряда, q. таким образом, для каждой силовой линии, пересекающей поверхность дважды,  $d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = 0$ . Если же силовая линия не пересекает поверхность, то соответствующий поток напряжённости равен нулю по смыслу понятия потока.

### 4. Заряд находится внутри поверхности, но силовая линия пересекает поверхность в более чем в одной точке

В простейшем случае число пересечений составляет три (рисунок 3). В общем случае число пересечений нечётно.

Выбирая элементарный конус вокруг соответствующей силовой линии, и суммируя потоки напряжённости через площадки, высекаемые конусом на поверхности, имеем  $d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3$ . Как видно из рисунка, потоки напряжённости через площадки 1, 2 и 3 чередуются по знаку вследствие чередования ориентации внешних нормалей к поверхности силовой линии  $d\phi_1 = -d\phi_2 = +d\phi_3$ . Равенство этих потоков по модулю доказывается точно так же, как это сделано выше и следует из равенств  $|d\vec{S}| = r^2 d\Omega$  и того, что в произведении  $\vec{E} d\vec{S}$  множитель  $r^2$  сокращается. Таким образом, получаем, что если заряд находится внутри поверхности, то независимо от числа точек пересечения силовой линии с поверхностью выполняется равенство типа

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3 = d\phi_1 \Rightarrow \phi = \int_{4\pi} q d\Omega = 4\pi q$$



## 5. Система зарядов

Пусть теперь имеется произвольная система зарядов  $q_1$ . В силу принципа суперпозиции поле, создаваемое этой системой, равно

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

где  $\vec{r}_i$  - радиус-вектор точки наблюдения, относительно положения  $i$ -го заряда. Выберем некоторую замкнутую поверхность. Соответственно поток напряжённости поля  $\vec{E}$  можно представить как сумму потоков, создаваемых отдельными зарядами системы:

$$\vec{\phi} = \oint_S \vec{E} dS = \sum_i \oint_S \vec{E}_i dS = \sum_i \vec{\phi}_i$$

Разобьём заряды на две группы: одни находятся внутри поверхности, а другие вне её. Как было показано, если заряд находится вне поверхности, то создаваемый им поток равно нулю. Следовательно, для нахождения потока достаточно учитывать только заряды, находящиеся внутри поверхности. Для них  $\phi_i = 4\pi q_i$ . Окончательно получаем

$$\phi = \sum_i \phi_i = \sum_i 4\pi q_i = 4\pi q$$

Для доказательства теоремы Гаусса в дифференциальной форме применим доказанное интегральное соотношение к малому объёму  $\Delta V$ , поделив обе части равенства на  $\Delta V$ :

$$\frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{E} dS = 4\pi \frac{q}{\Delta V}$$

Перейдём к пределу  $\Delta V \rightarrow 0$ , когда поверхность  $S$  стягивается в точку и учтём, что

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} \vec{E} dS \right) = \text{div } \vec{E}$$

Где  $S(\Delta V)$  - поверхность, ограничивающая объём  $\Delta V$ . Поскольку предел  $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{q}{\Delta V} \right) = \rho$  получаем

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho$$

### 3. Потенциальный характер электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Теорема о циркуляции в электростатическом поле. Связь потенциала с напряжённостью поля. Потенциал поля точечного диполя.

Потенциальный характер электростатического поля. Работа сил поля при перемещении заряда  $q$  из точки 1 в точку 2 равна

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} q \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = qQ \int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r^3} = qQ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Так как электростатическое поле произвольной системы зарядов консервативно, и можно ввести потенциальную энергию заряда  $q$  в этом поле: работа сил поля на пути  $1 \rightarrow 2$  равна убыли потенциальной энергии рассматриваемого заряда:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} q \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = U_1 - U_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

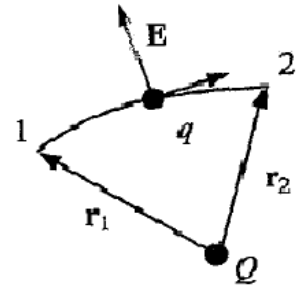


Рис. 1: Перемещение пробного заряда  $q$  в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом  $Q$

Потенциал и разность потенциалов. Электрический потенциал — скалярная энергетическая характеристика электростатического поля, характеризующая потенциальную энергию, которой обладает единичный положительный пробный заряд, помещённый в данную точку поля.

**Разностью потенциалов**  $\varphi_1 - \varphi_2$  поля между точками 1 и 2 называется работа сил поля по перемещению единичного заряда из точки 1 в точку 2:

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Поскольку электростатическое поле можно характеризовать потенциалом  $\varphi(\vec{r})$ , то говорят, что поле *потенциальное*.

Теорема о циркуляции в электростатическом поле. Теорема о циркуляции в интегральной форме: Для произвольной траектории  $L$  при совпадении начальной и конечной точек имеем

$$\oint_L \vec{E} d\vec{r} \equiv \oint_L (E_x dx + E_y dy + E_z dz) = 0$$

Теорема о циркуляции в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \Rightarrow \text{rot} E = 0 \quad (1)$$

Доказательство:

Пусть замкнутый контур  $L(\Delta S)$  охватывает малую поверхность площадью  $\Delta S$ .  $\vec{\Delta S}$  направлен по нормали к площадке и равен  $\vec{\Delta S} = \vec{n}\Delta S$ . Направление вектора  $\vec{n}$  задается положительным направлением обхода контура  $L$ .

Применим теорему о циркуляции, используя указанный контур:

$$\oint_{L(\Delta S)} \vec{E} d\vec{r} = 0$$

Рассмотрим предел  $(\text{rot} \vec{E})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta S} \oint_{L(\Delta S)} (\vec{E} d\vec{r}) \right)$ , когда контур стягивается в точку.

Этот предел представляет собой проекцию  $\text{rot} \vec{E}$  на направление нормали  $\vec{n}$ . Ввиду произвольности выбора контура заключаем, что  $\text{rot} \vec{E} = 0$ . Из этого мы получаем (1).

**Связь потенциала с напряжённостью поля.** На бесконечно малой траектории  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$  имеем

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) = -d\varphi = \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Поскольку  $\vec{E} d\vec{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$ , то

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Rightarrow \boxed{E = -\text{grad} \varphi}$$

**Потенциал поля точечного диполя.** Потенциал поля диполя в точке  $A$  складывается из потенциалов полей, создаваемых зарядами  $(-q)$  и  $(+q)$ :

$$\varphi_A \equiv \varphi(\vec{r}) = \varphi_- + \varphi_+$$

Пусть  $\vec{r}_-, \vec{r}_+$  - радиус-векторы. Поскольку  $\vec{r}_- = \vec{r}_+ + \vec{l}$ , то обозначая  $r = r_+$  и вводя вектор дипольного момента  $\vec{p} = q\vec{l}$ , получаем в пределе точечного диполя ( $l \ll r$ ):

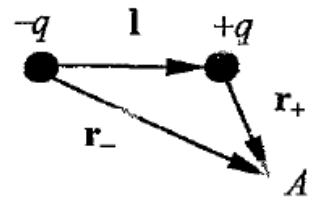


Рис. 2: К расчёту потенциала диполя

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{q}{|\vec{r} + \vec{l}|} + \frac{q}{|\vec{r}|} = -(\vec{l} \nabla) \frac{q}{r} \Rightarrow \boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^3}}.$$

#### 4. Потенциал электростатического поля. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа. Граничные условия и метод зеркальных изображений.

##### Потенциал электростатического поля.

Найдём потенциал однородного электрического поля  $\vec{E}_0 = const.$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_{0x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -E_{0y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -E_{0z} \Rightarrow \varphi = -(E_{0x}x + E_{0y}y + E_{0z}z) \Rightarrow \boxed{\varphi = -\vec{E}_0 \vec{r}}$$

Константа интегрирования здесь выбрана так, что  $\varphi = 0$  в начале координат  $\vec{r} = 0$ .

##### Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа.

Поскольку  $\vec{E} = -grad\varphi$ ,  $div\vec{E} = 4\pi\rho$ , отсюда следует **уравнение Пуассона**:

$$div grad\varphi = -4\pi\rho \text{ или } \boxed{\Delta\varphi = -4\pi\rho}$$

Здесь введён **оператор Лапласа (лапласиан)**

$$\Delta = div grad = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

В области, без зарядов ( $\rho = 0$ ), уравнение Пуассона переходит в **уравнение Лапласа**.

##### Граничные условия.

При переходе через границу раздела сред электрическое поле меняется по определённым законам.

1. Применим теорему Гаусса у бесконечно малому прямоугольному параллелепипеду, охватывающему часть границы раздела двух сред. (рисунок слева)  
Полагая:  $dS_1 = dS_2 = dS$ ,  $q = \sigma dS$ ,  $d\vec{S}_2 = -d\vec{S}_1$ ,  $d\vec{S}_1 = \vec{n}dS$ , имеем

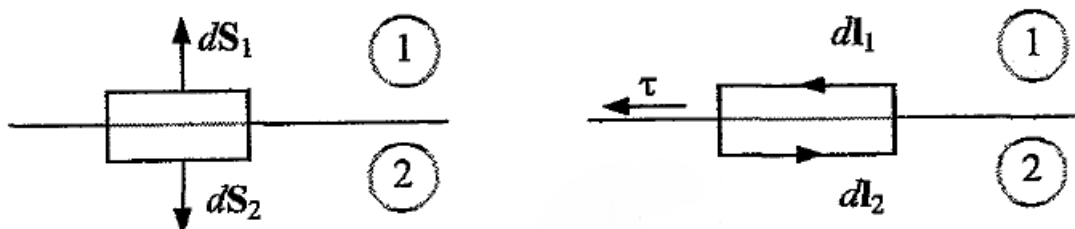
$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q \Rightarrow \vec{E}_1 d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 d\vec{S}_2 = 4\pi\sigma dS$$

Отсюда следует первое граничное условие:

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\vec{n} = 4\pi\sigma$$

Или что эквивалентно,

$$\boxed{E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma}$$



2. Применяя теорему о циркуляции к бесконечно малому прямоугольному контуру, проходящему на бесконечно малом расстоянии над и под поверхностью раздела сред (рисунок справа) получаем:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 d\vec{l}_2 = 0$$

Поскольку  $d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_1$ ,  $d\vec{l}_1 = \tau dl$ , то  $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\tau = 0$ . Отсюда находим второе граничное условие:

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$$

### Метод зеркальных изображений.

Пусть имеется система зарядов:

$$\{q\} + \{q'\}, \{q\} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}, \{q'\} = \{q'_1, q'_2, \dots, q'_m\}$$

Проведём мысленно эквипотенциальную поверхность  $S$  (на ней  $\phi = \phi_0$ ), разделяющую пространство на 2 области I и II. В этих областях находятся соответственно группы зарядов  $\{q\}$  и  $\{q'\}$  (рисунок)

Поле в области I однозначно определяется зарядами  $\{q\}$  и значением потенциала  $\phi = \phi_0$  на границе раздела областей. Иными словами поле в этой области (и только здесь!) не изменится, если заменить систему зарядов  $\{q'\}$  другой системой  $\{q''\}$ , если только эта новая система (совместно с зарядами  $\{q\}$ ) создаёт на поверхности  $S$  тот же потенциал  $\phi = \phi_0$ . Это значит, что для расчёта поля в области I можно, например, заменить группу зарядов  $\{q'\}$  проводящей поверхностью, имеющей потенциал  $\phi = \phi_0$ .

Обратно, если имеется группа зарядов  $\{q\}$  и проводящая поверхность  $S$  с потенциалом  $\phi = \phi_0$ , то для расчёта поля можно заменить эту поверхность такой группой зарядов  $\{q'\}$ , которая совместно с зарядами  $\{q\}$  создаёт в точках поверхности  $S$  требуемый потенциал  $\phi = \phi_0$ . Фиктивные заряды  $\{q'\}$  в этом случае называются **изображениями зарядов  $\{q\}$** .

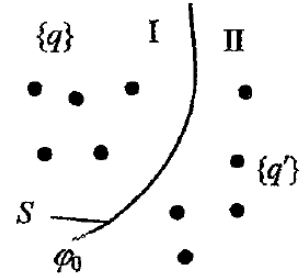


Рис. 3: Система зарядов, разделённая эквипотенциальной поверхностью  $\phi_0$  на две группы, находящиеся по разные стороны от неё.

## 5. Проводники в электростатическом поле. Электростатическая защита. Граничные условия на поверхности проводника. Проводящий шар в электростатическом поле.

### Проводники в электростатическом поле.

**Проводниками** называют вещества, обладающие малым сопротивлением. В них имеются свободные заряды(электроны), которые могут перемещаться под действием сколь угодно малых полей.

Если рассматривается стационарное состояние, когда нет токов, то в объёме проводника электрическое поле  $\vec{E} = 0$ . Если бы поле было не нуль, то возникло бы упорядоченное движение зарядов - ток.

В состоянии равновесия

1. поле в объёме вещества равно нулю:  $\vec{E}^{(i)} = 0$
2. поскольку  $\rho = \frac{1}{4\pi} \text{div } \vec{E}^{(i)}$ , то объёмная плотность зарядов в веществе равна нулю:  $\rho = 0$ . Это значит, что **свободные заряды могут располагаться только на поверхности**.

### Электростатическая защита.

Объект можно защитить от воздействия внешнего электростатического поля, поместив его в проводящую оболочку. Идея этой защиты основана на **теоремах Фарадея**.

#### Теорема 1.

Пусть заряды  $q$  находятся внутри металлической оболочки. Тогда сумма зарядов, индуцированных на внутренней стороне оболочки, равна по величине и противоположна по знаку сумме зарядов, находящихся внутри оболочки:  $q + q' = 0$ .

#### Доказательство.

Выберем поверхность  $S$ , целиком проходящую в объёме оболочки.

Так как оболочка проводящая, то на этой поверхности поле всюду равно нулю. Поэтому на основании теоремы Гаусса имеем.

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi(q + q') = 0$$

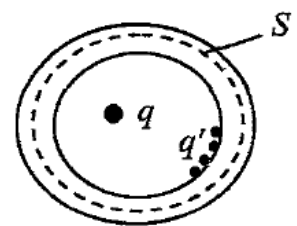


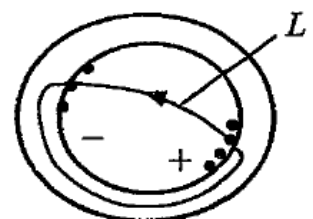
Рис. 4: Заряды  $q$ , находящиеся внутри металлической оболочки.

#### Теорема 2.

Если в полости зарядов нет, то электростатическое поле в ней равно нулю.

#### Доказательство.

Предположим противное, то есть поле отлично от нуля. Поскольку силовые линии электростатического поля могут начинаться и





кончатся только на зарядах, то где-то на внутренней поверхности оболочки должны присутствовать заряды, причём суммарный заряд должен быть равен нулю. Выберем силовую линию, идущую от положительных зарядов к отрицательным, и замкнём её в объёме оболочки (рисунок). Циркуляция напряжённости поля по построенному контуру ( $L$ ) отлична от нуля,  $\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} > 0$ , поскольку

в полости контур совпадает с силовой линией и на нём  $\vec{E} d\vec{l} > 0$ , а в оболочке  $\vec{E} = 0$ . Но согласно теореме о циркуляции  $\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = 0$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

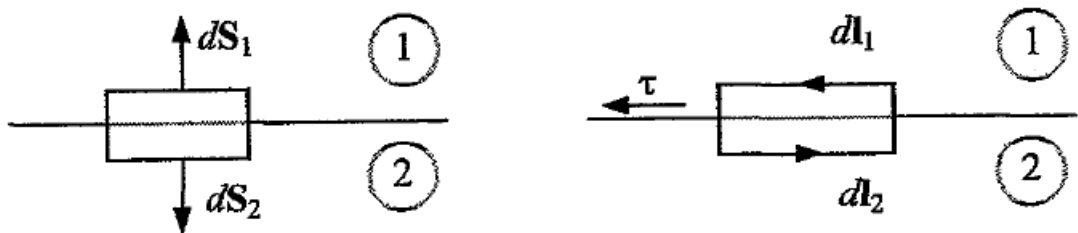
### Граничные условия на поверхности проводника.

1. (рисунок слева) Пусть среда 1 - вакуум, а среда 2 - проводник. Применим теорему Гаусса к бесконечно малому прямоугольному параллелепипеду, охватывающему часть границы раздела двух сред, имеем

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q \Rightarrow \vec{E}_1 d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 d\vec{S}_2 = 4\pi \sigma dS$$

где  $dS_1 = dS_2 = dS$ ,  $q = \sigma dS$ . Поскольку  $d\vec{S}_2 = -d\vec{S}_1$ ,  $d\vec{S}_1 = \vec{n} dS$ , то  $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{n} = 4\pi \sigma$ . Учтём также, что в проводнике 2 поле равно нулю,  $\vec{E}_2 = 0$ . Отсюда следует, что

$$E_{1n} = 4\pi \sigma$$



2. (рисунок справа) Применяя теорему о циркуляции к бесконечно малому контуру, проходящему над и под поверхностью раздела сред, получаем

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 d\vec{l}_2 = 0$$

Поскольку  $d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_1$ ,  $d\vec{l}_1 = \vec{\tau} dl$ ,  $\vec{E}_2 = 0$ , то

$$E_{1\tau} = 0$$

Таким образом, поле вблизи поверхности проводника направлено по нормали к поверхности и пропорционально поверхностной плотности заряда.

**Проводящий шар в электростатическом поле.**

Пусть металлический шар помещён во внешнее однородное электрическое поле  $\vec{E}_0$  (рисунок). В соответствии с теоремой Фарадея поле внутри шара отсутствует:  $E^{(i)} = 0$ . С другой стороны, это поле складывается из внешнего поля  $\vec{E}_0$  и поля  $\vec{E}_{\text{инд.}}$ , создаваемого индуцированными поверхностными зарядами:

$$\vec{E}^{(i)} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{инд.}} = 0$$

Поскольку внешнее поле однородное, то и индуцированное поле  $\vec{E}_{\text{инд.}} = -\vec{E}_0$  однородное. Если заряды распределены по поверхности шара с  $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ , то поле внутри шара однородное и равно

$$\vec{E}_{\text{инд.}} = -\frac{4\pi}{3}\sigma_0\vec{n}$$

(Вывод Кириченко стр. 25-2017)

где  $\vec{n}$  - единичный вектор, направленный как показано на рисунке. В рассматриваемом случае  $\vec{E}_{\text{инд.}} = -\vec{E}_0$ , так что  $\vec{n} \parallel \vec{E}_0$ . В результате получаем

$$\sigma = +\sigma_0 \cos\theta, \quad \sigma_0 = \frac{3}{4\pi}\vec{E}_0$$

Такое распределение зарядов получается смещением шаров с плотностями зарядов  $+\rho$  и  $-\rho$  на расстояние  $\delta l$ , то  $\sigma_0 = \rho \delta l$ . Но в случае шара радиуса  $R$  это приводит к появлению дипольного момента

$$\vec{p} = (\rho \frac{4\pi}{3} R^3) \delta \vec{l} = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 R^3 = R^3 \vec{E}_0$$

С учётом сказанного находим поле во внешнем пространстве:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5}, \quad \vec{p} = R^3 \vec{E}_0$$

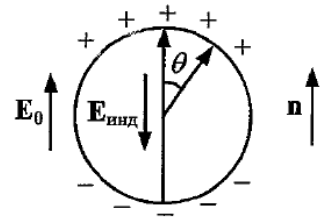


Рис. 6: Металлический шар во внешнем электрическом поле приобретает дипольный момент вследствие перераспределения зарядов по его поверхности

## 6. Диэлектрики в электростатическом поле. Механизм поляризации диэлектриков. Свободные и связанные(поляризационные) заряды. Вектор поляризации. Связь вектора поляризации с поляризационными зарядами. Поверхностные и объёмные поляризационные заряды.

Диэлектрики в электростатическом поле. При помещении вещества в электрическое поле происходит пространственное перераспределение заряда.

**Свободные заряды** - это заряды, которые могут перемещаться на большие расстояния в веществе (много больше межатомных расстояний). В диэлектриках свободных зарядов, как правило, мало.

**Связанные (поляризационные) заряды** - это заряды, которые под действием внешних полей или сил мало смещаются относительно своего положения равновесия и возвращаются назад, в положение равновесия, после снятия внешнего воздействия.

**Диэлектриками** называются вещества, плохо проводящие электрический ток. Их большое сопротивление связано с тем, что в них очень мало свободных зарядов. Связанные же заряды тока не производят.

**Микрополе**  $\vec{E}_M$  - это результат сложения полей многих зарядов (покоящихся или движущихся). Это поле быстро меняется от точки к точке и во времени

**Среднее поле**  $\vec{E}$  - это результат усреднения микрополя по **физически** бесконечно малому объёму  $\Delta V$  (содержащему большое число зарядов):

$$\vec{E} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{E}_M dV$$

Это поле меняется существенно медленнее, чем микрополе. При изучении среднего поля можно вводить объёмное распределение зарядов (с объёмной плотностью  $\rho = \frac{dq}{dV}$ ), учитывая отдельно заряды, локализованные на поверхности (с поверхностной плотностью  $\sigma = \frac{dq}{dS}$ ) или на нити (с линейной плотностью  $\tau = \frac{dq}{dl}$ ). Далее мы будем рассматривать только среднее поле

Механизм поляризации диэлектриков. Можно выделить два основных типа диэлектриков, отличающихся механизмов возникновения в них поляризации

### 1. Полярные диэлектрики

Если молекулы вещества имеют собственный дипольный момент, то под действием внешнего поля эти элементарные диполи начинают ориентироваться по направлению поля. Упорядочению препятствует тепловое движение, стремящееся разориентировать диполи. Конкуренция таких факторов определяет поляризацию среды в зависимости от величины приложенного поля и температуры. В данном случае говорят о веществе с **жёсткими диполями**, или с **полярными молекулами**.

### 2. Неполярные диэлектрики

Если молекулы (атомы) среды не имеют собственного дипольного момента, то под действием внешнего поля заряды внутри молекулы могут смещаться относительно друг друга, приводя к появлению дипольного момента. В этом случае говорят о веществе, составленном из **упругих диполей**, или о веществе с **неполярными молекулами**.

Поляризация вещества может возникать не только под действием внешнего ЭП.

1. Если поляризация возникает в результате приложения механических усилий, то вещество называют **пьезоэлектриком**.
2. Если поляризация проявляется в результате нагрева твёрдого вещества, то говорят о **пироэлектриках**.
3. В особую группу выделяют **сегнетоэлектрики**. Эти вещества способны спонтанно переходить в состояние с ненулевой поляризацией в отсутствие внешнего электрического поля.

Спонтанная поляризация возникает при температуре ниже некоторой характерной величины  $T_k$ , называемой **температурой Кюри**. Направление поляризации в общем случае случайно.

Выше температуры Кюри ведёт себя как обычный диэлектрик.

### Вектор поляризации.

**Поляризация** - это пространственное перераспределение связанных зарядов, приводящее к появлению объёмного дипольного момента среды. Поляризация может возникать как под действием электрических полей, так и при воздействии иных внешних факторов - механических усилий, изменения температуры и так далее.

**Вектор поляризации**  $\vec{P}$  - это дипольный момент единицы объёма вещества.

Поляризация называется **однородной**, если вектор поляризации  $\vec{P}$  является постоянным по объёму вещества:  $\vec{P} = const$ , и **неоднородной**, если  $\vec{P}$  меняется от точки к точке.

### Связь вектора поляризации с поляризационными зарядами.

#### 1. Поверхностная плотность поляризационных зарядов

Пусть поляризация однородная, рассмотрим косоугольный параллелепипед, вырезанный из поляризованного вещества. Если  $S$  - площадь боковой грани, а  $l$  - длина параллелепипеда, то его объём  $V = Sl \cos \theta = (\vec{S} \vec{l})$

Если на гранях параллелепипеда находятся поверхностные заряды с плотностью  $\sigma$ , то его дипольный момент составит  $\vec{p} = (\sigma S) \vec{l}$ , где  $\vec{l}$  - плечо диполя,  $S$  - площадь боковой грани параллелепипеда. Соответственно вектор поляризации окажется равным  $\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V}$ .

Найдём проекцию вектора поляризации на нормаль к торцу параллелепипеда (то есть проекцию  $\vec{P}$  на вектор площади торца  $\vec{S}$ ):

$$P_n = \frac{\vec{P} \vec{S}}{S} = \frac{1}{S} (\sigma S \vec{l}) \vec{S} = \sigma \Rightarrow \boxed{P_n = \sigma}$$

#### 2. Поверхностная плотность поляризационных зарядов

Пусть теперь поляризация неоднородная. Рассмотрим в веществе некоторый объём произвольной формы. Разобьём всю его поверхность на элементарные площадки. Если в результате поляризации на площадке  $d\vec{S}$  внешней поверхности оказывается заряд  $dq_{pol} = \sigma dS$ , то это можно интерпретировать так, что в объёме через рассматриваемую площадку

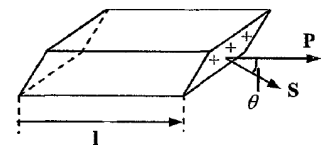


Рис. 7: К нахождению связи вектора поляризации с плотностью поляризационных зарядов.

вошёл заряд  $(dq)_{in} = -dq_{pol} = -\sigma dS$ . Тогда через всю поверхность в выделенный объём вещества вошёл поляризационный заряд

$$q_{pol} = -\oint_S \sigma dS = -\oint_S P_n dS = -\oint_S \vec{P} d\vec{S}$$

Преобразовывая поверхностный интеграл в объёмный получаем

$$q_{pol} = -\int_V \text{div } \vec{P} dV$$

Если ввести объёмную плотность поляризационных зарядов по формуле  $q_{pol} = \int_V \rho_{pol} dV$ , то ввиду произвольности выбранного объёма находим

$$\boxed{\rho_{pol} = -\text{div } \vec{P}}$$

В частном случае однородной поляризации, когда  $\vec{P} = \text{const}$ , имеет место  $\rho_{pol} = 0$

## 7. Вектор поляризации и его связь с поляризационными зарядами. Вектор электрической индукции. Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость.

### Вектор поляризации и его связь с поляризационными зарядами.

**Поляризация** — пространственное перераспределение (смещение) связанных зарядов, приводящее к появлению объёмного дипольного момента среды.

### Вектор электрической индукции.

В общем случае в теореме Гаусса следует учесть наличие не только свободных, но и связанных зарядов:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_{pol}),$$

где  $\rho$  - плотность свободных зарядов, а  $\rho_{pol}$  - плотность поляризационных зарядов. Учитывая равенство  $\rho_{pol} = -\operatorname{div} \vec{P}$  получаем  $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \vec{P})$ .

Обозначим  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ , где  $\vec{D}$  - **вектор электрической индукции**

Тогда теорема Гаусса в дифференциальной форме примет вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$$

А в интегральной форме вид

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q.$$

### Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость.

При относительно слабых внешних полях смещение поляризационных зарядов мало и пропорционально приложенному полю. Поэтому

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}.$$

Коэффициент  $\alpha$  называется **поляризуемостью** среды. Соответственно из определения вектора  $\vec{D}$  приведенного выше находим

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1 + 4\pi\alpha)\vec{E} = \varepsilon \vec{E}.$$

Введённая здесь величина  $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$  называется **диэлектрической проницаемостью** среды.

## 8. Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектриках (интегральная и дифференциальная формы). Граничные условия на границе раздела двух диэлектриков.

### Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектриках.

В общем случае в теореме Гаусса (в дифференциальной форме) следует учесть наличие не только свободных, но и связанных зарядов:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_{pol}),$$

где  $\rho$  - плотность свободных зарядов, а  $\rho_{pol}$  - плотность поляризационных зарядов. Учитывая равенство  $\rho_{pol} = -\operatorname{div} P$  получаем  $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \vec{P})$ .

Обозначим  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ , где  $\vec{D}$  - **вектор электрической индукции**

Теорема Гаусса в **дифференциальной форме** примет вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$$

Сформулируем теорему Гаусса в **интегральной форме**. Разделяя заряды на свободные и поляризованные, имеем

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi(q + q_{pol}); \quad q_{pol} = -\oint_S \vec{P} d\vec{S}.$$

Вводя вектор электрической индукции, получаем

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q$$

### Граничные условия на границе раздела двух диэлектриков.

1. Применим теорему Гаусса к бесконечно малому прямоугольному параллелепипеду, охватывающему часть границы раздела двух сред. (рисунок слева)

Полагая:  $dS_1 = dS_2 = dS$ ,  $q = \sigma dS$ ,  $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2 = \vec{n} dS$ , имеем

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q \Rightarrow \vec{D}_1 d\vec{S}_1 + \vec{D}_2 d\vec{S}_2 = 4\pi\sigma dS,$$

где  $\sigma$  - поверхностная плотность только *свободных* зарядов. Отсюда следует первое граничное условие:

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2)\vec{n} = 4\pi\sigma \Leftrightarrow \boxed{D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma}$$

2. Применяя теорему о циркуляции к бесконечно малому прямоугольному контуру, проходящему на бесконечно малом расстоянии над и под поверхностью раздела сред (рисунок справа) получаем:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 d\vec{l}_2 = 0$$

Поскольку  $d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_1$ ,  $d\vec{l}_1 = \tau dl$ , то  $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\tau = 0$ . Отсюда находим второе граничное условие:

$$\boxed{E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0}$$

## 9. Электрическая ёмкость уединённых проводников и конденсаторов. Расчёт ёмкости плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов.

### Электрическая ёмкость уединённых проводников и конденсаторов.

$C = \frac{q}{\varphi}$  называется ёмкостью проводника, где  $q$  - заряд, который несет проводник,  $\varphi$  - его потенциал.

Для шара радиуса  $a$  имеем  $\varphi = \frac{q}{\varepsilon a} \Rightarrow C = \varepsilon a$ .

$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-}$  - называется ёмкостью конденсатора, где  $\varphi_-, \varphi_+$  - потенциалы на двух обкладках.

### Расчёт ёмкости плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов.

**Плоский конденсатор** — это две близко расположенные плоские металлические пластины. Поле внутри такого конденсатора однородно.

Если размеры пластин велики, то вне конденсатора поле практически отсутствует, а внутри оно почти всюду однородное с напряжённостью

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \int_{(-)}^{(+)} E dx = Ed = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} d = \frac{4\pi q}{\varepsilon S} d \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$$

где  $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость среды в конденсаторе,  $\sigma$  - пов. плотность зарядов.

**Сферический конденсатор** — это две концентрические проводящие сферы, из которых одна несёт положительный заряд, а другая - такой же, но отрицательный.

По теореме Гаусса поле вне такого конденсатора равно нулю, поскольку суммарный заряд системы равен нулю, а система сферически симметрична.

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{q}{\varepsilon R_1} - \frac{q}{\varepsilon R_2} \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

**Цилиндрический конденсатор** — это система из двух коаксиальных проводящих цилиндрических оболочек, между которыми находится диэлектрик.

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q \Rightarrow D \cdot 2\pi r l = 4\pi q \Rightarrow D = \frac{2q}{rl}.$$

Отсюда для напряжённости поля получаем  $E = \frac{2q}{\varepsilon r l}$ , так что разность потенциалов между обкладками конденсатора оказывается равной

$$\varphi_+ - \varphi_- = \int_{(-)}^{(+)} E dr \equiv \int_a^b E dr = \frac{2q}{\varepsilon l} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon l}{2 \ln(b/a)}.$$

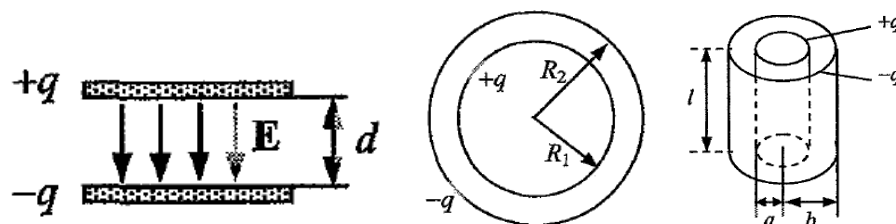


Рис. 8: Плоский, сферический и цилиндрический конденсаторы.



## 10. Электрическая энергия и её локализация в пространстве. Объёмная плотность энергии. Взаимная энергия зарядов. Энергия диполя во внешнем поле (жёсткий и упругий диполи).

### Электрическая энергия и её локализация

Работа внешних сил по переносу заряда идёт на увеличение электрической энергии конденсатора  $W$ :

$$\delta A^e = \delta W = \varphi dq = \frac{q dq}{C} \Rightarrow W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{1}{2} C \varphi^2$$

Вся электрическая энергия *локализована* внутри обкладок конденсатора.

### Объёмная плотность энергии

Выразим  $V$  из формулы для энергии конденсатора,  $w$  – объёмная плотность энергии:

$$W = \frac{1}{2} C \varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S}{4\pi d} (Ed)^2 = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} V, \quad w = \frac{W}{V} \Rightarrow w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}$$

### Взаимная энергия зарядов.

Если имеется система зарядов  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ , то их **взаимная энергия** равна

$$W = \sum_{i < k} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{i, k, i \neq k} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}$$

где  $U_{ij} = A_{ij} = q_i q_j / r_{ij}$  работа, по сближению  $i$  и  $j$  заряда на расстояние  $r_{ij}$

Если заряды непрерывно распределены в пространстве с объёмной плотностью  $\rho(\vec{r})$ , а также по поверхностям с поверхностной плотностью  $\sigma(\vec{r})$ , то энергия системы будет иметь выражение

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dS$$

### Энергия диполя во внешнем поле.

Работа поля по повороту **жёсткого диполя** от  $\Theta_0$  до  $\Theta$  равна внутренней энергии диполя, момент сил, действующих на диполь –  $M = pE \sin \Theta$ , выбираем  $\Theta_0 = \pi/2$ :

$$\delta A = -M d\Theta = -pE \sin \Theta d\Theta \Rightarrow A = \int_{\Theta_0}^{\Theta} \delta A = pE (\cos \Theta - \cos \Theta_0) = U(\Theta_0) - U(\Theta) \Rightarrow W = -\vec{p}\vec{E}$$

Мы нашли энергию диполя с неизменным расстоянием между зарядами. У **упругого диполя это не так**. Представим диполь как пружину с жёсткостью  $k$ , тогда сила со стороны поля уравнивается упругостью пружины –  $k\vec{l} = q\vec{E}$ . Потенциальная энергия деформации пружины равна энергии упругого диполя в электрическом поле:

$$U = \frac{kl^2}{2} = \frac{q\vec{E}\vec{l}}{2} = \frac{\vec{p}\vec{E}}{2} \Rightarrow W = \frac{\vec{p}\vec{E}}{2}$$

## 11. Силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле. Энергетический метод вычисления сил.

### Силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле.

Найдём силу, действующую на диполь, как целое в неоднородном внешнем поле:

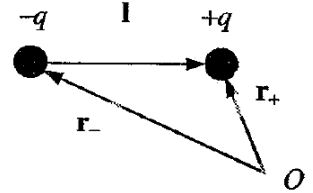
$$\vec{F} = (+q)\vec{E}_+ + (-q)\vec{E}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q[\vec{E}(\vec{r}_- + \vec{l}) - \vec{E}(\vec{r}_-)] = q(\vec{l}\nabla)\vec{E}$$

Здесь разность  $\vec{E}(\vec{r}_- + \vec{l}) - \vec{E}(\vec{r}_-)$  разложена по степеням малой величины  $\vec{l}$ ,  $|\vec{l}| \ll |\vec{r}|$ , и положено, что радиус-вектор заряда  $(-q)$  равен радиус-вектору диполя  $\vec{r}_- = \vec{r}$ :

$$\vec{F} = q(\vec{l}\nabla)\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = (\vec{p}\nabla)\vec{E}}, \text{ так если } \vec{E} \parallel OZ \Rightarrow F \equiv F_z = p \frac{dE}{dz}$$

При этом силу можно вычислять как по формуле  $\vec{F} = (\vec{p}\nabla)\vec{E}$ , так и в силу потенциальности  $E = -grad\varphi$  по формуле:

$$\boxed{\vec{F} = -gradU = grad(\vec{p}\vec{E})}$$



Отметим, что равенство  $grad(\vec{p}\vec{E}) = (\vec{p}\nabla) = (\vec{p}\nabla)\vec{E}$  оказывается, вообще говоря, несправедливым в случае поля, не являющегося потенциальным. Если поле однородное, то  $\vec{F} = 0$ .

### Энергетический метод вычисления сил.

Будем рассматривать действие сил поля в условиях, когда температура неизменна.

Одним из эффективных приёмов расчёта сил является метод виртуальных перемещений, в котром вычисляется работа сил поля  $\delta A = F\delta x$  при бесконечно малом смещении  $\delta x$ , после чего сила находится из равенства  $F = \frac{\delta A}{\delta x}$ .

**Пример.** Таким способом найдём силу притяжения пластин заряженного конденсатора с ёмкостью  $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi x}$ :

$$\delta A = \frac{1}{2}\varphi^2\delta C, \quad \delta C = -\frac{\varepsilon S}{4\pi x^2}\delta x = -\frac{C}{x}\delta x \Rightarrow \delta A = F\delta x = \frac{1}{2x}\varphi^2 C\delta x$$

Полагая  $x = d$ , находим  $F$ :

$$\boxed{F = \frac{1}{2x}\varphi^2 C = -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}S}$$

Отсюда следует, что объёмная плотность энергии равна поверхностной плотности силы.

## 12. Постоянный ток. Сила и плотность тока. Сторонние силы. Закон сохранения заряда и уравнение непрерывности. Токи в неограниченных средах.

### Постоянный ток. Сила и плотность тока.

**Электрический ток** - это упорядоченное движение зарядов (электронов и ионов)

**Постоянный ток** - это неизменное во времени движение зарядов.

Пусть ток течёт по проводнику. Тогда **силой тока** называется количество заряда, переносимого через сечение за единицу времени:  $[J] = \frac{\text{заряд}}{c}$

**Плотностью тока** - называется количество заряда, переносимого за единицу времени через единичную площадку.

$$j = \frac{dq}{dt dS}, \quad dq = edN = endV = enu \cdot dt dS \Rightarrow \boxed{\vec{j} = en\vec{u} = \rho\vec{u}}$$

$\vec{u}$  называется **дрейфовой скоростью** – средняя скорость носителей в единице объёма.

**Полный ток** –  $J = \int_S \vec{j} d\vec{S}$

### Сторонние силы.

Силу, действующую на электрон, можно разложить на две части: электрическую и неэлектрическую, включающую в себя все прочие силы. Эти прочие силы принято называть *сторонними*. В соответствии с этим, полагая  $\mathbf{F}/e = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}$  где  $\mathbf{E}^{\text{стор}}$  – *напряженность поля сторонних сил*.

### Закон сохранения заряда и уравнение непрерывности.

Заряды не исчезают и не рождаются, но только со временем могут перераспределяться в пространстве. Если в объёме  $V$  находился заряд  $q$ , то  $\oint_{S(V)} \vec{j} d\vec{S}$  – скорость убыли этого заряда через поверхность  $S(V)$ :

$$\boxed{-\frac{\partial q}{\partial t} = \oint_{S(V)} \vec{j} d\vec{S}} \text{ – закон сохранения заряда (в интегральной форме)}$$

Полный заряд в объёме  $V$  равен  $q = \int_V \rho dV \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \oint_{S(V)} \vec{j} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{j} dV \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0} \text{ – уравнение непрерывности (ЗСЗ в дифференциальной форме)}$$

### Токи в неограниченных средах.

В проводящую среду с проводимостью  $\lambda$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  помещены два электрода А и В с потенциалами соответственно  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$ . Поверхность электрода эквипотенциальна. Найдём полное сопротивление среды.

Введём взаимную ёмкость системы электродов:

$$C = \frac{q}{\varphi_A - \varphi_B}$$

где принято, что на обкладках такого конденсатора, размещены заряды  $+q$  и  $-q$

По закону Ома плотность тока, стекающего с электрода А, равна  $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ , где  $\vec{E}$  - напряжённость поля вблизи поверхности. Используя теорему Гаусса найдем полный ток:

$$J = \oint \vec{j} dS = \lambda \oint \vec{E} d\vec{S} = \lambda \cdot \frac{4\pi}{\varepsilon} q = \lambda \frac{4\pi}{\varepsilon} C(\varphi_A - \varphi_B), \quad R = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{J} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C}}$$

Т.к.  $C \sim \varepsilon \Rightarrow$ , сопротивление между электродами  $R$  не зависит от  $\varepsilon$ .

Для шаров с радиусами  $r_A$  и  $r_B$

$$C_A = \varepsilon r_A, \quad C_B = \varepsilon r_B, \quad \boxed{R = \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} \right)}$$

Для плоского конденсатора, с площадью пластин  $S$  и расстоянием между обкладками  $d$

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \Rightarrow \boxed{R = \frac{d}{\lambda S}}$$

### 13. Закон Ома (интегральная и локальная формы). Постоянный ток в замкнутом контуре. Электродвижущая сила. Правила Кирхгофа. Примеры применения.

**Закон Ома.** Георг Ом экспериментально установил, что в однородном металлическом проводнике, в котором не действуют сторонние силы:

$$J = \frac{U}{R}$$

#### Дифференциальная форма

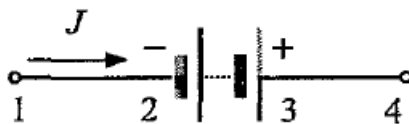
Плотность тока в веществе, пропорциональна напряжённости электрического поля:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}, \quad \vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}^{\text{стор}}) \quad \text{— при наличии сторонних сил}$$

$\lambda$  - проводимость среды,  $\rho = \frac{1}{\lambda}$  - удельное сопротивление.

#### Интегральная форма

Рассмотрим участок цепи, содержащий источник ЭДС и проводящие участки с удельной проводимостью  $\lambda$



Пусть  $S$  - площадь поперечного сечения проводника. Тогда полный ток равен

$$J = jS, \quad \vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}^{\text{стор}}) \Rightarrow E + E^{\text{стор}} = \frac{J}{\lambda S} \Rightarrow \int_{(1)}^{(2)} (E + E^{\text{стор}}) dl = J \int_{(1)}^{(4)} \frac{dl}{\lambda S} \Rightarrow R = \int_{(1)}^{(4)} \frac{dl}{\lambda S}$$

Для полного сопротивления рассматриваемого участка. Если удельное сопротивление  $\lambda$  и поперечное сечение  $S$  постоянны по всей длине проводника, то  $R = \frac{l}{\lambda S} = \frac{\rho l}{S}$

**Электродвижущая сила.** Далее учтём, что  $\int_{(1)}^{(4)} E dl = \varphi_1 - \varphi_4$ . Введем понятие ЭДС:

$$\int_{(1)}^{(4)} E^{\text{стор}} dl = \varepsilon \quad \text{— электродвижущая сила (ЭДС) — источник сторонней силы}$$

Здесь используется правило знаков:

$\varepsilon > 0$  - при прохождении источника в направлении от - к +

$\varepsilon < 0$  - при прохождении источника в направлении от + к -

В итоге приходим к закону Ома в *интегральной форме*:

$$\varphi_1 - \varphi_4 + \varepsilon = JR$$

Если участок замкнутый, т.е. точки 1 и 4 совпадают, то закон Ома принимает вид:

$$\varepsilon = JR$$

**Правила Кирхгофа.**

1. Для любого узла сумма токов, входящих в узел (с учётом знаков), равна нулю

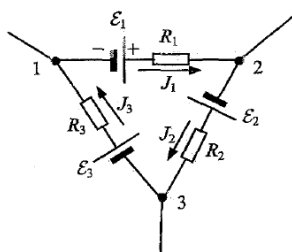
$$\sum_k J_k = 0$$

Это правило выражает ЗСЗ: заряды в узлах не могут рождаться или исчезать

2. Для любого замкнутого участка цепи выполняется равенство

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_k J_k R_k$$

Получим 2 правило. Выберем положительный обход как на рисунке и применим закон Ома к участкам 12, 23, 31:



$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 + J_1 R_1 = \varepsilon_1 \\ \varphi_2 - \varphi_3 + J_2 R_2 = \varepsilon_2 \\ \varphi_3 - \varphi_1 + J_3 R_3 = \varepsilon_3 \end{cases} \Rightarrow J_1 R_1 + J_2 R_2 + J_3 R_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

## 14. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля–Ленца в интегральной и локальной форме.

### Работа и мощность постоянного тока.

**Работа постоянного тока** — это работа электрического поля по переносу электрических зарядов вдоль проводника:

$$A = UIt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t$$

**Мощность постоянного тока** — это отношение работы тока за время  $t$  к этому интервалу времени:

$$P = \frac{A}{t} = \frac{U \cdot q}{t} = \frac{UIt}{t} = UI$$

### Закон Джоуля–Ленца в интегральной и локальной форме.

**Закон Джоуля Ленца в дифференциальной форме:**

Мощность тепла  $w$ , выделяемого в единице объёма среды при протекании постоянного электрического тока:

$$w = n \vec{F} \vec{u} = j \vec{E}.$$

#### Доказательство:

Пусть заряд движется со скоростью  $\vec{v}$ . Скорость заряда можно представить как сумму средней (дрейфовой) скорости  $\vec{u}$  и случайной составляющей  $\vec{v}_{сл}$ , обусловленной столкновениями с атомами среды:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_{сл}$$

За время  $dt$  заряд сместится на  $\vec{v}dt$ , над ним совершена работа  $dA = \vec{F}(\vec{u} + \vec{v}_{сл})dt$ . Если в единице объёма находится  $n$  зарядов, то над ними за единицу времени совершается работа:

$$w = n \vec{F} \vec{u} = j \vec{E}, \quad j = en\vec{u}$$

При усреднении по всем зарядам считаем  $\langle \vec{F} \vec{v}_{сл} \rangle = 0$

### **Закон Джоуля Ленца в интегральной форме:**

Количество теплоты, выделяемое в единицу времени в рассматриваемом участке цепи:

$$W = J^2 R$$

#### Доказательство:

При наличии в среде объемных токов мощность энерговыделения, то работа над зарядами в объеме  $V$  за единицу времени, равна

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{j^2}{\lambda} dV.$$

Применим это равенство к току в проводнике. Если площадь сечения проводника  $S$ , его длина  $l$ , а ток в проводнике равен  $J$ , то  $j = J/S$ ,  $dV = Sdl$ , мы получаем

$$W = \int \frac{1}{\lambda} \left( \frac{J}{S} \right)^2 S dl = J^2 \int \frac{dl}{\lambda S} = J^2 R.$$

## 15. Магнитное поле постоянного тока. Вектор магнитной индукции. Сила Лоренца и сила Ампера. Закон Био–Савара. Магнитный момент рамки с током. Момент сил, действующий на рамку с током в магнитном поле.

### Магнитное поле постоянного тока. Вектор магнитной индукции.

**Магнитным полем** называется силовое поле, действующее на *движущиеся* заряды, токи и тела, обладающие магнитным моментом. Неизменные во времени токи создают постоянные магнитные поля. Магнитное поле характеризуется вектором **магнитной индукции**  $\vec{B}$ , определяющим силу, действующую на движущийся заряд.

### Сила Лоренца и сила Ампера.

**Силой Лоренца** называется сила, действующая на движущийся заряд  $q$  со стороны магнитного поля:

$$\vec{F}_л = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

**Силой Ампера** называют силу, действующую на токи со стороны магнитного поля.

Будем называть произведение  $\vec{j}dV$  *объёмным элементом тока*, а произведение  $Jd\vec{l}$  - *линейным элементом тока*.

Тогда **законом Ампера** называются соотношения:

$$d\vec{F} = \frac{dV}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] = \frac{J}{c} [d\vec{l} \times \vec{B}]$$

### Закон Био–Савара.

**Закон Био-Савара** определяет магнитное поле, создаваемое объёмным и линейным элементами тока.

Если радиус-вектор точки наблюдения по отношению к рассматриваемому элементу тока есть  $r$ , то поле, создаваемое объёмным или линейным элементом тока равно:

$$d\vec{B} = \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{cr^3} dV = J \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{cr^3}.$$

### Магнитный момент рамки с током.

**Магнитный момент** рамки с током  $J$  площадью  $S$  –  $\vec{m} = \frac{J\vec{S}}{c}$

### Момент сил, действующий на рамку с током в магнитном поле.

В плоскости витка считаем поле  $\vec{B}$  однородным

$$dF_1 = \frac{J}{c} B dl_1 \sin \alpha_1, dF_2 = \frac{J}{c} B dl_2 \sin \alpha_2, dl_1 \sin \alpha_1 = dl_2 \sin \alpha_2 = dh \Rightarrow dF_1 = dF_2$$

Тогда  $dM = dF \cdot a = \frac{J}{c} B dh \cdot a = \frac{J}{c} B dS \Rightarrow M = \frac{J}{c} BS = \vec{m}B$ . Следовательно:

$$\vec{M} = [\vec{m}\vec{B}]$$



**16. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме. Примеры применения.****Магнитное поле соленоида. Теорема Гаусса для магнитного поля.****Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме.**1) Введём *векторный потенциал*  $A$  :  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ 

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV_1 \Rightarrow \Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Найдем ротор магнитного поля:

$$\text{rot} \vec{B} = \text{rot} \text{rot} \vec{A} \equiv \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} \Rightarrow \boxed{\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}}$$

приходим к **теореме о циркуляции в дифференциальной форме**:2) Выберем какую-либо поверхность  $S$  и проинтегрируем почленно последнее уравнение по этой поверхности:

$$\int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S}, \text{ полный ток } - \int_S \vec{j} d\vec{S} = J, \text{ теорема Стокса } - \int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \oint_{L(S)} \vec{B} d\vec{l}$$

Отсюда вытекает **теорема о циркуляции в интегральной форме**:

$$\boxed{\oint_{L(S)} \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J}$$

**Пример. Магнитное поле прямого провода..**

Из закона Био-Савара для линейного элемента  $d\vec{B} = J d\vec{l} \times \vec{r} / cr^3$  следует, что силовые линии - это окружности с центрами в точках провода. Применяя теорему о циркуляции и используя в качестве контура окружность радиуса  $R$ , находим

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J \rightarrow B \cdot 2\pi R = \frac{4\pi}{c} J \rightarrow B = \frac{2J}{cR} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{2J}{cR} \vec{\tau}}$$

**Магнитное поле соленоида.**

Рассмотрим длинный идеальный соленоид. Магнитное поле в точке  $P$ , создаваемое выбранными элементами тока, равно

$$d\vec{B} = d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2, d\vec{B}_1 = \frac{J d\vec{l}_1 \times \vec{r}_1}{c r_1^3}, d\vec{B}_2 = \frac{J d\vec{l}_2 \times \vec{r}_2}{c r_2^3},$$

Учтем, что  $d\vec{l}_1 = d\vec{l}_2 \equiv d\vec{l}$ ,  $r_1 = r_2 \equiv r$ . Тогда  $d\vec{B} = \frac{J d\vec{l} \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)}{c r^3}$ .

Векторы  $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$  и  $d\vec{l}$  направлены перпендикулярно оси соленоида  $\Rightarrow$  вектор  $d\vec{B}$  направлен вдоль оси соленоида  $\Rightarrow$  поле бесконечно длинного идеального соленоида всюду направлено параллельно его оси.

**1. Поле вне соленоида (вдали от торцов).**

Пусть  $R$  - радиус соленоида. Возьмем прямоугольный контур, начинающийся на расстоянии  $r > R$ .

Контур целиком проходит вне соленоида, а значит  $J_{per} = 0$ . Поэтому по теореме о циркуляции находим

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J_{per} = 0.$$

Т.к. на бесконечности поле обращается в нуль, то всюду вне соленоида поле отсутствует:

$$B(r) = 0, \quad r > R$$

**2. Поле внутри соленоида (вдали от торцов).** Выберем контур, который начинается внутри соленоида ( $r < R$ ), а так же уходит на бесконечность.

Плоскость контура пересекают линии тока. Тогда ток, пересекающий контур ширины  $dh$ , равен  $J_{per} = i \cdot dh$ , где  $i$  - линейная плотность тока.

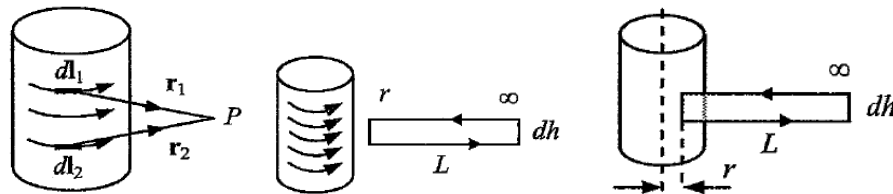
Применим теорему о циркуляции:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J_{per} \Rightarrow B(r)dh - B(\infty)dh = \frac{4\pi}{c} nJ \cdot dh.$$

Поскольку  $B(\infty) = 0$ , то находим

$$B(r) = \frac{4\pi}{c} nJ = \frac{4\pi}{c} i$$

Таким образом, в объеме длинного идеального соленоида вдали от его торцов поле однородное.

**Теорема Гаусса для магнитного поля.**

Имея ввиду тождество  $\text{div rot } \vec{A} \equiv 0$ , из формулы  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  получаем **теоремы Гаусса в дифференциальной форме**:

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса

$$\int_V \text{div } \vec{B} dV = \oint_{S(V)} \vec{B} d\vec{S}.$$

Тогда получаем **теорему Гаусса в интегральной форме**:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

## 17. Магнитное поле в веществе. Молекулярные токи. Вектор намагниченности и его связь с молекулярными токами.

**Магнитное поле в веществе.** В веществе магнитное поле формируется как внешним полем, там и циркулирующими в этом веществе токами. На микроуровне поле резко меняется во времени и пространстве. Это поле называется *микроролем*  $\vec{B}_{\text{микро}}$ . Однако если произвести усреднение по малому объёму  $\Delta V$ , в котором, тем не менее, имеется много частиц-зарядов, то получим *среднее* поле:

$$\vec{B} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{B}_{\text{микро}} dV$$

Среднее поле меняется существенно медленнее вследствие статического усреднения при случайном движении частиц.

**Молекулярные токи.** Токи проводимости связаны с перемещением свободных зарядов и являются сторонними по отношению к веществу.

**Молекулярные токи** обусловлены орбитальным движением и спином (собственным моментом импульса) электронов в атомах (молекулах) и ядер вещества. Частицы, формирующие молекулярные токи, мало смещаются от своего положения равновесия.

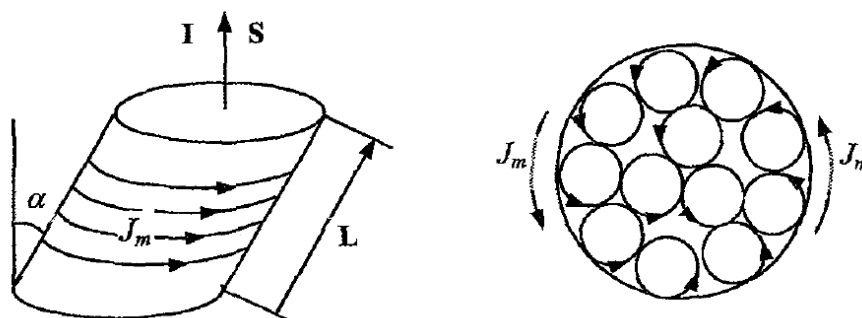
### Вектор намагниченности и его связь с молекулярными токами.

Вектором намагничивания называется магнитный момент объёма вещества

$$\vec{I} = d\vec{m}/dV$$

Намагниченность называется *однородной*, если  $\vec{I}$  не зависит от выбора точки в веществе, иначе не *неоднородная*.

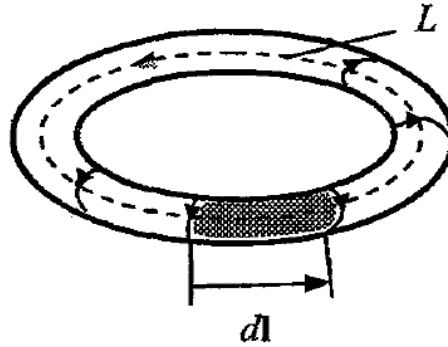
Выделим в веществе достаточно малый цилиндр, так что поле в нём можно считать практически однородным. В его объёме молекулярные токи компенсируют друг друга. Кольцевые токи, циркулирующие в объёме, компенсируют друг друга всюду, кроме точек боковой поверхности, в результате остаётся только поверхностный ток, текущий по боковой поверхности цилиндра.



По определению вектора намагничивания магнитный момент цилиндра равен

$$\vec{m} = V\vec{I} = \frac{J_m}{c}\vec{S}, \quad V = LS\cos\alpha = \vec{L}\vec{S} \Rightarrow I\cos\alpha = \frac{J_m}{cL}$$

Вводя линейную плотность тока,  $i_m = cI_l$ , где введено обозначение  $I_l = I\cos\alpha$ , выберем в веществе произвольный замкнутый контур  $L$  и возьмём вокруг него тонкую трубку (рисунок)



Связь молекулярного тока с вектором намагничивания в интегральной форме

$$dJ_m = i_m dl = cI_l dl = c\vec{I} d\vec{l} \Rightarrow J_m = c \oint_L \vec{I} d\vec{l}$$

$J_m$  – полный ток намагничивания, пересекающий контур  $L$ .

Связь молекулярного тока с вектором намагничивания в дифф. форме

Это выражение с помощью теоремы Стокса преобразуется к виду

$$\int_S \vec{j}_m d\vec{S} = J_m = c \int_S \text{rot} \vec{I} d\vec{S} \Rightarrow \vec{j}_m = c \text{rot} \vec{I}$$

## 18. Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе. Вектор $\vec{H}$ . Применение к расчёту магнитных цепей.

Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе. Вектор  $\vec{H}$ . Применим теорему о циркуляции для магнитного поля, сформулированную для поля в вакууме:

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} (J + J_m)$$

Здесь  $J$  и  $J_m$  соответственно ток проводимости и молекулярный ток, пронизывающие контур  $L$

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} (J + c \oint_L \vec{I} dl)$$

Введём вектор  $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{I}$  – **напряжённость магнитного поля** и перепишем.

Теорема о циркуляции для магнитного поля в веществе в интегральной форме:

$$\boxed{\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J}$$

Аналогично модифицируется теорема о циркуляции в дифференциальной форме.

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_m) = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + c \text{rot} \vec{I})$$

Теорема о циркуляции для магнитного поля в веществе в дифференциальной форме:

$$\boxed{\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}}$$

## 19. Граничные условия для векторов В и Н на границе раздела двух магнетиков.

1) Применяя теорему Гаусса к бесконечно маленькому прямоугольному параллелепипеду, охватывающему часть границы раздела двух сред имеем

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{B}_1 d\vec{S}_1 + \vec{B}_2 d\vec{S}_2 = 0$$

Поскольку  $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2 = \vec{n}dS$ , то  $(\vec{B}_1 - \vec{B}_2)\vec{n} = 0$ . Окончательно

$$B_{1n} = B_{2n}$$

2) Применяя теорему о циркуляции к бесконечно малому контуру, проходящему над и под поверхностью получаем

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J \Rightarrow \vec{H}_1 d\vec{l}_1 + \vec{H}_2 d\vec{l}_2 = \frac{4\pi}{c} i_N dl$$

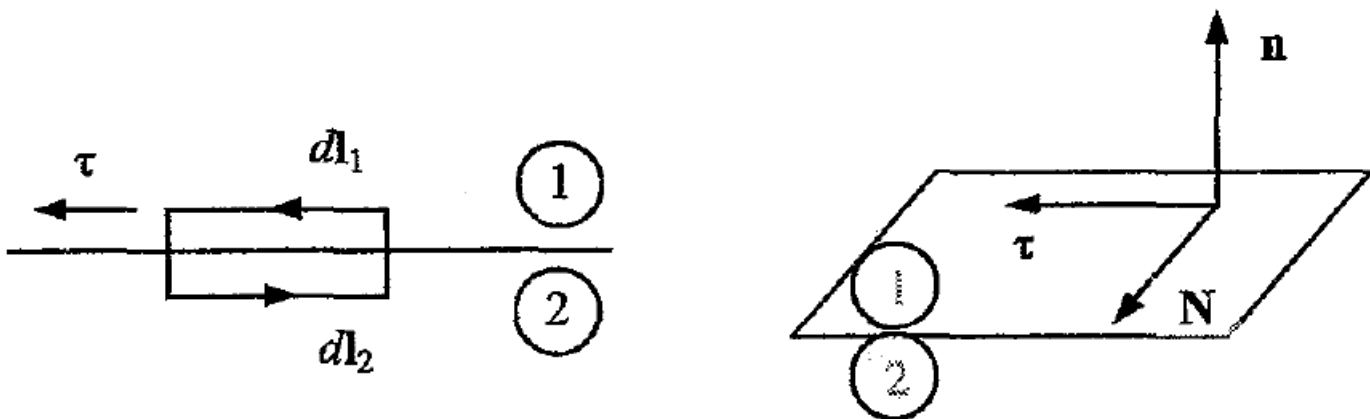
Здесь вектор N задаёт нормаль к плоскости контура, так что величина  $i_N$  есть линейная плотность тока, пересекающего контур по нормали к нему.

Поскольку  $d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_1$ ,  $d\vec{l}_1 = \tau dl$ ,  $(\vec{H}_1 - \vec{H}_2)\tau = i_N$  Отсюда находим

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N$$

Последнему условию можно придать иной вид, не связанный с выбором векторов N и  $\tau$ . Положим  $\vec{\tau} = \vec{N} \times \vec{n}$  Тогда

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2)\vec{\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N, (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)(\vec{N} \times \vec{n}) = \frac{4\pi}{c} i_N$$



Циклически сдвинем сомножители в смешанном произведении

$$[\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] \vec{N} = \frac{4\pi}{c} i \vec{N}$$

В силу произвольности N

$$\vec{n}(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \frac{4\pi}{c} i$$

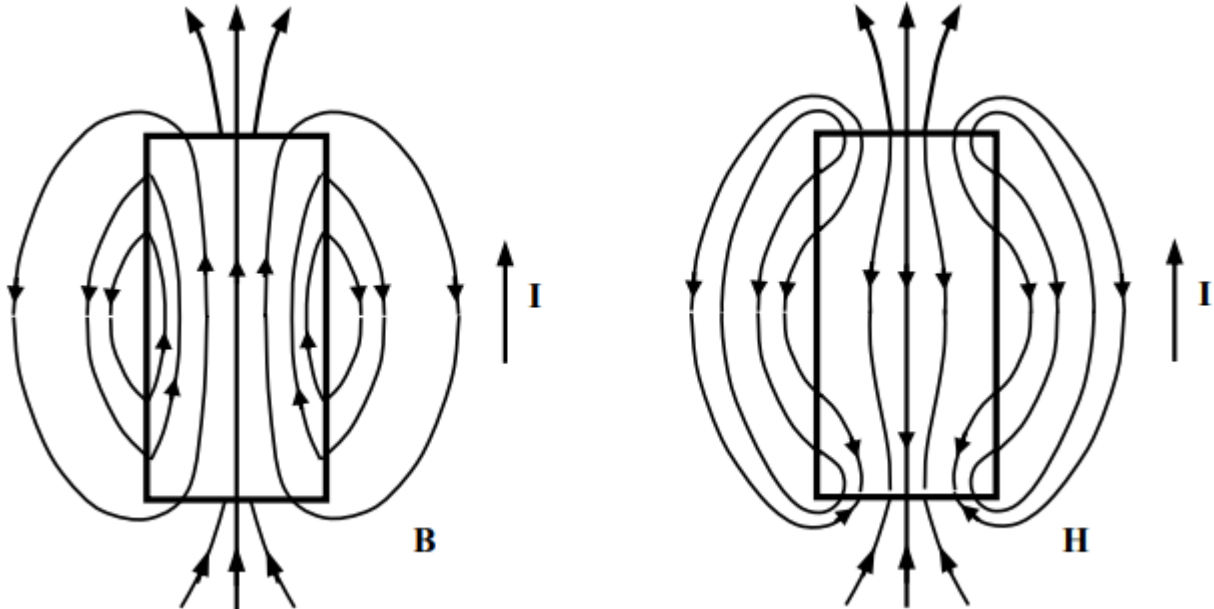
## 20. Постоянный магнит. Магнитные поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ постоянного магнита.

**Постоянный магнит** — это ферромагнитное вещество с некоторой ненулевой намагниченностью.

Поскольку силовые линии индукции магнитного поля  $\vec{B}$  всегда замкнуты, то они ведут себя так же, как у витка с током или соленоида. Пусть магнит представляет собой длинный стержень с постоянной намагниченностью. Этот магнит эквивалентен соленоиду, по боковой поверхности которого текут молекулярные токи. Если соленоид имеет длину  $l$ , площадь  $S$  поперечного сечения и число витков  $N$ , а по его обмотке течет ток  $J$ , то его магнитный момент равен  $m = N(JS/c)$ . Следовательно намагниченность эквивалентного магнита равна

$$I = \frac{m}{V} = \frac{1}{c} \frac{NJS}{lS} = \frac{1}{c} Jn \Rightarrow J = \frac{cI}{n}$$

В объеме длинного соленоида вдали от торцов  $B = \frac{4\pi nJ}{c}$ , поэтому в объеме длинного намагниченного стержня  $B_i = 4\pi I$ .



В векторной форме имеем  $\vec{B}_i = 4\pi \vec{I}$ . На торцах длинного соленоида поле вдвое меньше, поэтому на торцах магнита

$$B_S = 2\pi I.$$

Напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  во внешнем по отношению к магниту в пространстве, где  $\mu = 1$ , совпадает с индукцией:  $\vec{H} = \vec{B}$ . Поэтому там совпадают и силовые линии  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$ . В объеме магнита силовые линии  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  направлены противоположно.

## 21. Магнитные свойства сверхпроводника I-го рода. Эффект Мейсснера. Граничные условия на поверхности сверхпроводника. Сверхпроводящий шар в магнитном поле.

### Магнитные свойства сверхпроводника I-го рода.

**Сверхпроводимость** – это свойство проводников, состоящее в скачкообразном уменьшении до нуля их сопротивления при понижении температуры ниже некоторого значения (рис.9) Температура  $T_c$ , ниже которой вещество находится в сверхпроводящем состоянии, называется **критической температурой**.

Переход вещества в сверхпроводящее состояние есть фазовый переход, связанный с перестройкой электронной подсистемы.

Сверхпроводимость разрушается как при повышении температуры, так и при помещении сверхпроводника в достаточно сильное магнитное поле.

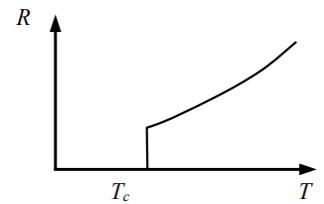


Рис. 9: Зависимость критического магнитного поля от температуры для сверхпроводников I рода ( $n$  - нормальная,  $s$  - сверхпроводящая фазы)

### Эффект Мейсснера.

Эффект Мейсснера состоит в том, что при температуре ниже критической магнитное поле полностью выталкивается из объема сверхпроводника независимо от момента перевода вещества в сверхпроводящее состояние: до или после наложения магнитного поля.

Полный эффект Мейсснера имеет место в случае проводников I рода при  $T < T_c$ .

### Граничные условия на поверхности сверхпроводника.

Поскольку в объеме сверхпроводника  $\vec{B} = 0$ , то из граничного условия  $B_{1n} = B_{2n}$  следует, что на *внешней* поверхности сверхпроводника  $B_n = 0$ . Это значит, что магнитное поле может иметь только касательную к поверхности компоненту.

### Сверхпроводящий шар в магнитном поле.

Пусть сверхпроводящий шар находится в однородном магнитном поле. Поле вне шара складывается из внешнего поля  $\vec{B}_0$  и поля индуцированных поверхностных токов. Последнее равно полю точечного магнитного диполя  $m$ , расположенного в центре шара:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 + \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}.$$

Так как на поверхности шара должно выполняться условие  $B_n \equiv B_r = 0$ , то  $\vec{r}\vec{B}(\vec{r})|_{r=R} = 0$ , следовательно

$$B_0 \cos \theta + \frac{2m}{R^3} \cos \theta = 0.$$

Отсюда находим магнитный момент шара:

$$\vec{m} = -\frac{R^3 \vec{B}_0}{2}$$



## 22. Работа сил Ампера по перемещении витка с током в магнитном поле.

Рассмотрим рамку, по которой может свободно скользить перемычка, помещенную в магнитное поле.

Пусть поле направлено под углом к плоскости рамки:  $\vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel$ ,

где  $\vec{B}_\parallel$  - лежащая в плоскости контура,  $\vec{B}_\perp$  - составляющая, направленная по нормали.

- Для  $\vec{B}_\perp$ :  $l$  - длина перемычки

Если по рамке течет ток  $J$ , то на перемычку действует сила Лоренца  $F = \frac{J}{c}lB$ .

Пусть  $\vec{B}_\perp$  направлена к нам, тогда  $\vec{F}$  направлена вправо. При смещении на  $dx$ :

$$dA = Fdx = \frac{J}{c}Bldx = \frac{J}{c}d\Phi, \text{ где } d\Phi = d(BS), ldx = dS$$

При смещении на конечное расстояние:

$$A_{12} = \frac{J}{c}(\Phi_2 - \Phi_1)$$

- Для  $\vec{B}_\parallel$ :

Создается сила перпендикулярная плоскости и, следовательно, перпендикулярная смещению перемычки и поэтому не производящая работу.

**Магнитный поток, приводящий к производству работы, определяется только компонентой поля  $\vec{B}_\perp$ :**

$$\Phi = \vec{B}_\perp S = \vec{B} \vec{S}.$$

Рассмотрим теперь произвольно деформируемый виток и поле, меняющееся от точки к точке. В этом случае весь замкнутый контур нужно мысленно разбить на бесконечно малые замкнутые элементы тока. Поскольку токи в общих участках соседних витков равны по величине и противоположны по направлению, то токи по всей площади исходного контура компенсируют друг друга, и остаётся только ток  $J$  в исходном контуре.

Считая поле в пределах одного элемента однородным, получаем:

$$dA = \frac{J}{c}d\Phi, \text{ где } \Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

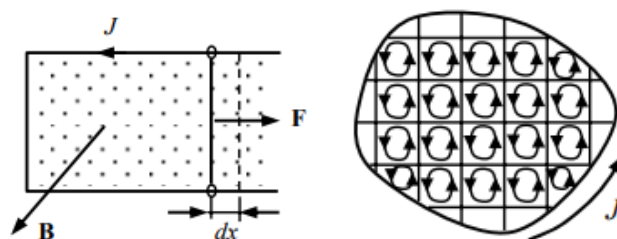


Рис. 10: Рамка с током и произвольный контур с током.

В рассматриваемом процессе совершается работа над зарядами в проводнике, сообщая им дополнительную энергию. В то же время само магнитное поле работу не может производить, поскольку сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения зарядов. Для разрешения этого противоречия учтём, что заряды в перемычке движутся не только в направлении проводника ( $\vec{u}_{\parallel}$ ), но и в направлении скорости движения перемычки ( $\vec{u}_{\perp}$ ):  $\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$ . Эта вторая составляющая скорости приводит к появлению силы Лоренца:  $\Delta F = e\vec{u}_{\perp} \times \vec{B}/c$ , действующей против направления тока  $J$ . **Поэтому для поддержания неизменного тока в цепь обязательно должны быть включены сторонние ЭДС. Именно благодаря им и производится работа, сообщаящая электронам дополнительную энергию.**

## 23. Электромагнитная индукция в движущихся проводниках. Правило Ленца.

### Электромагнитная индукция в движущихся проводниках.

Рассмотрим проводящую рамку, замкнутую подвижной перемычкой, помещенную в магнитное поле с индукцией:

$$\vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel.$$

- Для  $\vec{B}_\perp$ :

Пусть  $\vec{B}_\perp$  направлен к нам, тогда если перемычка движется со скоростью  $v$ , то на заряды в ней действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}.$$

Эта сила приводит заряды в движение, вызывая индукционный ток в отрицательном направлении обхода контура. Она эквивалентна силе, создаваемой сторонним электрическим полем

$$\vec{E}_{stor} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B},$$

и индуцирует в перемычке длиной  $l$  ЭДС индукции, равную

$$\varepsilon_{ind} = \oint \vec{E}_{stor} d\vec{l} = -E_{stor} l = -\frac{1}{c} B l v.$$

Знак «-» здесь связан с тем, что ЭДС индукции создаёт ток в отрицательном направлении.

Получается, что учтя  $lv = \frac{dS}{dt}$ ,  $d\Phi = B dS$ :

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

- Для  $\vec{B}_\parallel$  нет индукционного тока, так как составляющая силы Лоренца перпендикулярна плоскости контура.

**В итоге:**

$$\boxed{\varepsilon_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}}.$$

### Правило Ленца.

Пусть магнитный поток растёт со временем. Тогда возникает ЭДС индукции  $\varepsilon_{ind}$ , создающая ток  $J_{ind}$  в отрицательном направлении. Этот ток создаёт дополнительное магнитное поле  $\Delta\vec{B}$ , ориентированное против исходного поля  $\vec{B}$ . Таким образом, приходим к **правилу Ленца**:

*Индукцированный ток имеет такое направление, чтобы с помощью создаваемого им магнитного поля препятствовать изменению магнитного потока, то есть чтобы ослабить действие причины, возбуждающей этот ток.*

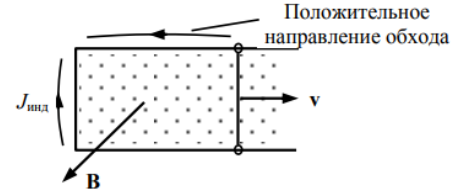


Рис. 11: Рамка с током в магнитном поле

## 24. Электромагнитная индукция в неподвижных проводниках. Фарадеевская и максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле.

### Электромагнитная индукция в неподвижных проводниках.

1. Если постоянный магнит неподвижен, а движется провод (замкнутый виток), то в проводе возникнет индукционный ток, обусловленный ЭДС индукции:  $\varepsilon_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$ .
2. Если перейти в систему отсчёта, связанную с проводником, то ток остаётся, но движется уже магнит.
3. Магнитный поток  $\Phi$  в случаях 1 и 2 меняется за счёт изменения относительного расположения магнита и провода. Но такое же изменение  $\Phi$  можно получить, используя переменное магнитное поле, точно совпадающее с полем движущегося магнита в месте нахождения провода.

Из сказанного следует, что **при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего контур движущегося или неподвижного проводника, возникает индукционный ток, причём ЭДС индукции во всех случаях равна**

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

### Фарадеевская и максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции.

**Фарадеевская трактовка:** Электромагнитная индукция состоит в возникновении индукционного электрического тока. Для её наблюдения требуется замкнутый проводник.

**Максвелловская трактовка:** Явление электромагнитной индукции состоит в том, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в пространстве электрическое поле; проводники для этого не требуются. Индукционные же токи возбуждаются в проводниках индуцированным электрическим полем.

### Вихревое электрическое поле.

Поскольку магнитный поток равен  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ , а ЭДС индукции  $\varepsilon_{ind} = \oint_L \vec{E} d\vec{l}$ , то из закона индукции:  $\varepsilon_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$  следует:

$$\varepsilon_{ind} = \oint_{L(S)} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \text{ теорема Стокса } - \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Полученное равенство представляет собой **дифференциальную форму закона электромагнитной индукции**. В отличие от электростатики теперь  $\text{rot} \vec{E} \neq 0$ . Это значит, что индуцируемое электрическое поле является не *потенциальным*, а *вихревым*.

## 25. Нерелятивистское преобразование полей при переходе от одной инерциальной системы к другой. Магнитное поле равномерно движущегося заряда.

### Нерелятивистское преобразование полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$ .

- Пусть заряженная частица в системе отсчёта  $S$  движется со скоростью  $\vec{v}$  в полях  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Тогда на неё действует сила  $\vec{F}$ . Перейдём в систему отсчёта  $S'$ , движущуюся со скоростью  $\vec{v}$ , в которой частица покоится. В этой системе на частицу действует только сила  $\vec{F}'$  со стороны электрического поля (магнитное поле на покоящуюся частицу не действует). В нерелятивистском пределе сила есть инвариант:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}), \vec{F}' = q\vec{E}' \Rightarrow \boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}, \vec{E} = \vec{E}' - \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}'}$$

- Из закона Био–Савара следует, что магнитное поле заряда, движущегося со скоростью  $\vec{v}$ , равно

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E}', \vec{E}' = \frac{q\vec{r}}{r^3}$$

Перейдём в систему отсчёта  $S$ , движущуюся со скоростью  $\vec{v}$ . Тогда каждый из зарядов системы создаёт магнитное поле  $\vec{B}_k = \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E}'_k$ , а все вместе они создают поле

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E}'.$$

Таким образом, в системе отсчёта, в которой заряды движутся, возникает магнитное поле. Если в собственной системе зарядов присутствует магнитное поле  $\vec{B}'$ , то суммарное магнитное поле даётся формулой:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}' + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E}', \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E}}$$

Обратный переход от системы  $S$  к системе  $S'$  получается изменением знака скорости:

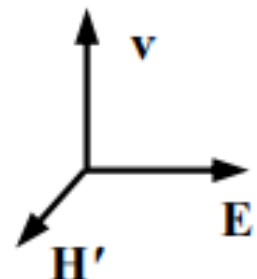
### Магнитное поле равномерно движущегося заряда.

Пусть частица массой  $m$  движется со скоростью  $\vec{v}$  в однородном электрическом поле  $\vec{E}$ , тогда

- Если  $\vec{v} = \vec{0}$ , то сила со стороны поля не действует на частицу, так как частица электронейтральна.
- Если  $\vec{E} \neq \vec{0}$ , тогда появляется момент сил, вызывающий поворот магнитного момента.

Пусть  $|v| \ll c$ , тогда перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с моментом  $M$ . В этой системе отсчета появляется магнитное поле равномерно движущегося заряда:

$$\boxed{\vec{H}' = -\frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E}}$$



## 26. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Дрейфовое движение. Циклотронная частота.

### Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях..

1. Если напряжённость поля  $\vec{E} = \text{const}$ , то из уравнения движения  $m\dot{\vec{v}} = q\vec{E}$  следует:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}}{m}t, \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{q\vec{E}}{2m}t^2$$

то есть имеет место *равноускоренное движение с ускорением, направленным вдоль вектора напряжённости поля.*

2. Пусть  $\vec{B} = \text{const}$ , тогда на частицу действует сила Лоренца, так что уравнение движения имеет вид:

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}.$$

Очевидно, что  $\dot{\vec{v}} \perp \vec{v}$ ,  $\dot{\vec{v}} \perp \vec{B}$ . Разложим вектор скорости на составляющие  $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ . Для этих составляющих имеем уравнения:

$$m\dot{\vec{v}}_\parallel = 0 \Rightarrow \vec{v}_\parallel = \text{const}$$

$$m\dot{\vec{v}}_\perp = \frac{q}{c}\vec{v}_\perp \times \vec{B} \Rightarrow \dot{\vec{v}}_\perp = \vec{\omega} \times \vec{v}_\perp, \vec{\omega} = -\frac{q}{mc}\vec{B}.$$

Второе уравнение описывает *вращение вокруг направления магнитного поля с угловой скоростью  $\omega = \frac{qB}{mc}$ , называемой **циклотронной частотой***

### Дрейфовое движение.

Рассмотрим движение в скрещенных полях, когда  $\vec{B} \perp \vec{E}$ . Разложим скорость на составляющие:  $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ , тогда для этих составляющих имеем уравнения:

$$\begin{cases} m\dot{\vec{v}}_\parallel = 0 \Rightarrow \vec{v}_\parallel = \text{const} \\ m\dot{\vec{v}}_\perp = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}_\perp \times \vec{B}) \end{cases}$$

Для нахождения компоненты  $\vec{v}_\perp$  положим  $\vec{v}_\perp = \vec{u} + \vec{v}'$  и подберём вектор  $\vec{u}$  так, чтобы исключить электрическое поле:

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{u} \times \vec{B} = 0$$

В этом уравнении можно считать  $\vec{u} \perp \vec{B}$ ,  $\vec{u}\vec{B} = 0$ . Для нахождения вектора  $\vec{u}$  умножим почленно это уравнение векторно слева на  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{B} \times (\vec{u} \times \vec{B}) = \vec{B} \times \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{u}B^2 - \vec{B}(\vec{u}\vec{B})] = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{u} = c \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}} - \text{дрейфовая скорость}$$

*Это движение представляет собой дрейф (с постоянной скоростью) в направлении, перпендикулярном обоим полям.*

## 27. Магнитный поток. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции. Индуктивность соленоида и тороидальной катушки.

### Магнитный поток. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции.

**Магнитный поток** - скалярная величина, количественно описывающая прохождение магнитного поля через некоторую поверхность.

1) Если имеется замкнутый контур  $L$  и опирающаяся на него поверхность  $S$ , то магнитный поток через этот контур равен:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

2) Пусть по витку течёт ток  $J$ . Он создаёт магнитное поле  $\vec{B}$ , величина которого пропорциональна величине тока:  $B \sim J$ . Соответственно магнитный поток также пропорционален току:  $\Phi \sim J$ . Полагают (в гауссовой системе единиц):

$$\Phi = \frac{1}{c} L J, \quad \text{где } L - \text{коэффициентом самоиндукции.}$$

3) Пусть теперь имеются два витка, по одному из которых течёт ток  $J_1$ . Тогда магнитное поле, создаваемое этим током,  $B \sim J_1$ , а магнитный поток через второй виток  $\Phi_{21} \sim J_1$ :

$$\Phi_{21} = \frac{1}{c} L_{21} J_1, \quad \text{где } L_{21} - \text{коэффициентом взаимной индукции}$$

### Индуктивность соленоида.

Рассмотрим идеальный соленоид со следующими параметрами:  $S$  - площадь основания,  $l$  - длина,  $N$  - число витков.  $\Phi_1$  - поток через 1 виток. Тогда полный магнитный поток:

$$\Phi = N \Phi_1 = N B S = \mu H N S = \frac{4\pi}{c} \mu i N S = \frac{4\pi \mu}{c l} N^2 S J \equiv \frac{1}{c} L J$$

Таким образом, находим **индуктивность соленоида**:

$$L = \frac{4\pi \mu N^2 S}{l}.$$

### Индуктивность тороидной катушки.

Магнитное поле локализовано в объёме катушки и может быть найдено с помощью теоремы о циркуляции. Выберем круговой контур  $L$  радиуса  $r$  с центром на оси катушки. Поскольку силовые линии магнитного поля являются окружностями с центрами на оси катушки, то:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} N J \Rightarrow H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} N J \Rightarrow H = \frac{2N J}{c r} \Rightarrow B = \frac{2\mu N J}{c r}.$$

Найдём магнитный поток, пронизывающий контур и учтём, что  $dS = b dr$ :

$$\Phi = N \Phi_1 = N \int_S B dS = N \int_R^{R+a} \frac{2\mu N J}{c r} b dr = \frac{2\mu N^2 J}{c} b \ln\left(1 + \frac{a}{R}\right) \equiv \frac{1}{c} L J \Rightarrow \boxed{L = 2\mu N^2 b \ln\left(1 + \frac{a}{R}\right)}$$

## 28. Установление тока в цепи, содержащей индуктивность. Магнитная энергия тока. Локализация магнитной энергии в пространстве.

**Установление тока в цепи, содержащей индуктивность (СИ).** При изменении магнитного потока через проводящий контур (или в общем случае через катушку индуктивности), возникает ЭДС индукции:  $\varepsilon_{\text{инд.}} = -\frac{d\Phi}{dt}$ . Имея ввиду связь потока  $\Phi$  с током в катушке  $J$ :  $\Phi = LJ$ , получаем:

$$\varepsilon_{\text{инд.}} = -L \frac{dJ}{dt}$$

Пусть в электрической цепи присутствует сопротивление  $R$  и сторонняя ЭДС (рисунок 12). Тогда по закону Ома ток в цепи:

$$J = \frac{\varepsilon + \varepsilon_{\text{инд.}}}{R} \Rightarrow L \frac{dJ}{dt} + JR = \varepsilon$$

Пусть  $\varepsilon = \text{const.}$  Считая в начальный момент  $t = 0$  ток в цепи отсутствует:  $J(0) = 0$ , Из полученного уравнения находим:

$$J(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - \exp(-\frac{R}{L}t))$$

Отсюда видно, что при  $t \rightarrow \infty$  в цепи устанавливается постоянный ток:  $J \rightarrow j_0 = \varepsilon/R$ , такой же, как в отсутствие индуктивности. Эта зависимость показана на рисунке 13. Характерное время установления составляет  $\tau = L/R$ . На малых временах  $t \ll \tau$  имеем  $J(t) = \varepsilon t/L$

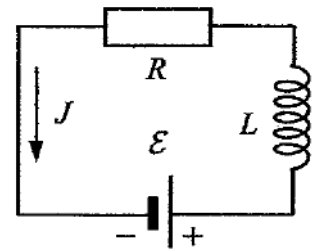


Рис. 12: LR контур, содержащий ЭДС

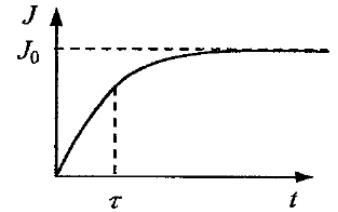


Рис. 13: Установление тока в контуре

**Магнитная энергия тока.** Рассмотрим проводящую рамку с перемычкой, которая может свободно скользить вдоль проводов.

Пусть по цепи течёт ток в отрицательном направлении. Тогда на перемычку со стороны магнитного поля будет действовать сила Ампера, направленная влево:  $F_A = J l B / c$ . Сместим перемычку вправо на  $dx$ . Для этого нужно совершить работу

$$\delta A = F_A dx = \left(\frac{1}{c} J l B\right) dx = \frac{1}{c} J d\Phi, \quad d\Phi = B dS, \quad dS = l dx$$

Эта работа совершается внешней силой против сил поля, то есть против ЭДС индукции. Поэтому она идёт на увеличение магнитной энергии.

В общем случае работа против ЭДС индукции равна

$$\delta A = J(-\varepsilon_{\text{инд.}}) dt = J \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{1}{c} J d\Phi$$

Здесь учтено, что в соответствии с законом Джоуля-Ленца мощность энерговыделения равна  $Q = J\varepsilon$ , где следует положить  $\varepsilon = -\varepsilon_{\text{инд.}} = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$ . Поскольку  $\Phi = LJ/c$ , то

$$\delta A = LJ \cdot dJ / c^2$$

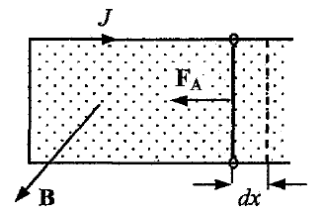


Рис. 14: Рамка с током в магнитном поле. Перемычка может скользить, непрерывно замыкая верхний и нижний провода рамки



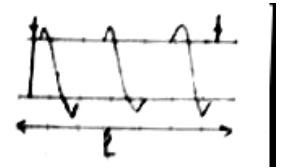
При возрастании тока от нуля до некоторого конечного значения  $J$  магнитная энергия тока достигает значения

$$U = \int_0^J \delta A = \frac{LJ^2}{2c^2} \Rightarrow \boxed{W_m = \frac{LJ^2}{2c^2} = \frac{J\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L}}$$

Локализация магнитной энергии в пространстве. В виде:

$$W_m = \frac{LJ^2}{2c^2} = \frac{J\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L}$$

может рассматриваться как потенциальная энергия токов, взаимодействующих по закону Ампера. Это соответствует представлению о непосредственном действии на расстоянии. Но выражение для  $W_m$  можно преобразовать в другую форму, соответствующую представлению о нахождении энергии:



$$H = \frac{4\pi}{c}i = \frac{4\pi}{c} \frac{JN}{l} \rightarrow J = \frac{Hcl}{4\pi N}$$

$$d\Phi = NSdB \Rightarrow$$

$$dW_m = \frac{J}{c}d\Phi = \frac{1}{c} \frac{Hcl}{4\pi N} * NSdB = \frac{HdB}{4\pi} (Sl)$$

$$dw_m = \frac{dW_m}{V} = \frac{Hdb}{4\pi} \rightarrow \boxed{w_m = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu} = \frac{(\vec{H}\vec{B})}{8\pi}}$$

Последнее выражение обозначает **магнитную плотность энергии**. Таким образом можно говорить, что магнитная энергия локализована в пространстве с  $w_m$ .

## 29. Взаимная энергия токов. Теорема взаимности. Взаимная индукция двух катушек на общем магнитопроводе.

### Взаимная энергия токов.

$$A = \frac{L_{11}J_1^2}{2c^2} + \frac{L_{22}J_2^2}{2c^2} + \int \frac{J_1 d\Phi_{12}}{c}$$



$$\begin{aligned} \int \frac{J_1 d\Phi_{12}}{c} &= \frac{J_1}{c} \int L_{12} dJ_2 = \frac{L_{12}J_1J_2}{c^2} \\ A_{\text{ист.}} = W_{\text{магн.}} &= \frac{L_{11}J_1^2}{2c^2} + \frac{L_{12}J_1J_2}{c^2} + \frac{L_{22}J_2^2}{2c^2} = \\ &= \frac{L_{11}J_1^2}{2c^2} + \frac{L_{22}J_2^2}{2c^2} + \frac{L_{12}J_1J_2}{2c^2} + \frac{L_{21}J_1J_2}{2c^2} \end{aligned}$$

$$W_{\text{магн.}} = \frac{1}{2c^2} \sum_i \sum_j L_{ij} J_i J_j \quad - \text{взаимная энергия токов в общем виде}$$

**Теорема взаимности.** Пусть имеется набор  $n$  витков, по которым циркулируют токи  $J_i$ . Энергия этой системы есть функция только токов –  $U = U(J_1, J_2, \dots, J_n)$ .

Соответственно изменение энергии системы токов можно записать в виде:

$$dU = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n J_i d\Phi_i, \quad \Phi_i = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n L_{ik} J_k \Rightarrow d\Phi_i = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n L_{ik} dJ_k \Rightarrow dU = \frac{1}{c^2} \sum_{i,k=1}^n L_{ik} J_i dJ_k$$

Здесь  $L_{ii} \equiv L_{ik}|_{i=k}$  – коэффициент самоиндукции  $i$ -го витка, а  $L_{ik}|_{i \neq k}$  – коэффициент взаимной индукции  $i$ -го и  $k$ -го витков. Предполагаем  $L_{ik} = \text{const}$ . Отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial J_k} = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^n L_{ik} J_i \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial J_i \partial J_k} = \frac{1}{c^2} L_{ik} = \frac{\partial^2 U}{\partial J_k \partial J_i} = \frac{1}{c^2} L_{ki}$$

Получаем **теорему взаимности:**

$$L_{ik} = L_{ki}$$

**Взаимная индукция двух катушек на общем магнитопроводе.** Пусть на одном сердечнике насажены 2 катушки с числом витков соответственно  $N_1$  и  $N_2$ . Считаем, что сердечник имеет длину  $l$  и постоянное сечение площадью  $S$ . Роль сердечника сводится к тому, что он полностью передаёт магнитный поток от одной катушки к другой. Катушки считаем идеальными соленоидами.

Пустим по катушке 1 ток  $J_1$ . Тогда в ней создаётся магнитное поле и соответствующий магнитный поток:

$$B_1 = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N_1 J_1}{l}, \quad \Phi_1 = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N_1 J_1}{l} S$$

Этот поток пронизывает все  $N_2$  витков второй катушки, что даёт полный магнитный поток через вторую катушку:

$$\Phi_{21} = N_2 \Phi_1 = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N_1 N_2 J_1}{l} S = \frac{1}{c} L_{21} J_1 \Rightarrow L_{21} = \frac{4\pi\mu N_1 N_2}{l} S$$

Аналогично пуская ток  $J_2$  через вторую катушку и вычисляя магнитный поток, пронизывающий первую катушку, находим

$$L_{12} = \frac{4\pi\mu N_1 N_2}{l} S \Rightarrow L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Их справедливость связана, во-первых, с тем, что мы пренебрегли рассеянием магнитного потока, а во-вторых, с тем, что магнитная проницаемость сердечника не зависит от величины магнитного поля. Соотношение  $L_{12} = L_{21}$  не будет выполняться, если окажется  $\mu = \mu(H)$  и  $N_1 \neq N_2$ . Тогда обмотки при одинаковых токах создают в сердечнике различные магнитные поля, так что в выражения для  $L_{12}$  и  $L_{21}$  будут входить различные коэффициенты  $\mu$ , что и приводит к неравенству  $L_{12} \neq L_{21}$ .

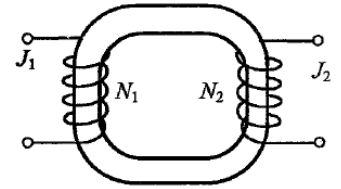


Рис. 15: Две катушки на общем сердечнике.

### 30. Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле. Подъёмная сила электромагнита.

**Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле.** Энергетический метод основан на методе виртуальных смещений, стартовавшем от определения работы искомой силы поля  $\vec{f}$  при  $T = const$  на бесконечно малом перемещении  $\delta\vec{r}$ , в частном случае в одном направлении  $\delta x$ :

$$\delta A_{\text{поле}} = \vec{f} \delta \vec{x}$$

Выделяют 2 основных подхода к нахождению работы поля, когда при виртуальных смещениях ( $dF$  – изменение свободной энергии)

$$1. \text{ неизменны магнитные потоки } - \delta A_{\text{поле}} = f dx = -(dF)_{\Phi, T}$$

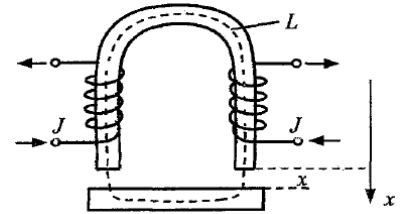
$$F = \frac{1}{2c} \sum_i J_i \Phi_i \Rightarrow (dF)_{\Phi, T} = \frac{1}{2c} \sum_i \Phi_i dJ_i$$

$$2. \text{ неизменны токи } - \delta A_{\text{поле}} = f dx = (dF)_{J, T}$$

$$F = \frac{1}{2c} \sum_i J_i \Phi_i \Rightarrow (dF)_{J, T} = \frac{1}{2c} \sum_i J_i d\Phi_i$$

$$\boxed{\delta A_{\text{поле}} = f dx = -(dF)_{\Phi, T} = +(dF)_{J, T}}$$

**Подъёмная сила электромагнита.** Найдём силу, с которой подковообразный электромагнит притягивает перемычку, расположенную вблизи ножек.  $S$  – площадь основания ножки подковы. Считаем  $x \ll \sqrt{S}$ ,  $l \gg \sqrt{S}$ . Воспользуемся теоремой о циркуляции для магнитного поля:



Поскольку ток в обмотке пронизывает выбранный контур  $N$  раз, то по теореме о циркуляции

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} NJ \Rightarrow H_m l + 2H_3 x = \frac{4\pi}{c} NJ$$

$H_m$  – поле в металле сердечника,  $H_3$  – поле в зазоре  
Граничные условия:

$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow H_3 = \mu H_m \Rightarrow H_m(l + 2\mu x) = \frac{4\pi}{c} NJ \Rightarrow B_m = \mu H_m = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{NJ}{l + 2\mu x}$$

Магнитный поток через всю обмотку электромагнита равен:

$$\Phi = NB_m S = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N^2 J}{l + 2\mu x} S, \quad dU = \frac{J d\Phi}{2c} = f dx \Rightarrow f = \frac{J}{2c} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \Rightarrow \boxed{f = -4\pi S \left( \frac{\mu N J}{cl} \right)^2}$$

Поскольку  $f < 0$ , то перемычка притягивается к электромагниту. Максимального значения достигается при  $x=0$ .

Рис. 16: Электромагнит (катушки на общем сердечнике) и перемычка. Штриховой линией показан контур интегрирования в теореме о циркуляции

### 31. Переменное электрическое поле и его магнитное действие. Ток смещения.

Теорема о циркуляции для постоянного магнитного поля

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J \text{ или } \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

оказывается неверной в случае переменного электрического поля. Действительно, применяя почленно операцию  $\text{div}$  ко второму уравнению и учитывая тождество  $\text{div} \text{rot} \vec{H} = 0$ , получаем  $\text{div} \vec{j} = 0$ . С другой стороны, если плотность заряда меняется со временем,  $dp/dt \neq 0$ , то в силу уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

получаем  $\text{div} \vec{j} \neq 0$ . Это противоречие показывает, что необходимо видоизменить теорему о циркуляции. Для решения этой задачи Дж. Максвелл ввёл ток смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$  соотношением

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}})$$

и потребовал, чтобы выполнялось условие непрерывности  $\partial \rho / \partial t + \text{div} \vec{j} = 0$ . Применяя почленно операцию  $\text{div}$

$$\text{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{j}_{\text{см}} = -\text{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Согласно теореме Гаусса для электрического поля  $\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho$  имеем  $\rho = \frac{1}{4\pi} \text{div} \vec{D}$ . Подставляя это выражение для плотности заряда в полученное выше выражение для  $\text{div} \vec{j}_{\text{см}}$

$$\text{div} \vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi} \text{div} \vec{D} \right) \Rightarrow \boxed{\vec{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Таким образом, *теорема о циркуляции для магнитного поля*, которая согласуется с законом сохранения заряда:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{теорема о циркуляции в дифференциальной форме}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} (J + J_{\text{см}}) - \text{теорема о циркуляции в интегральной форме}$$

$$J_{\text{см}} = \int_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} - \text{полный ток, пронизывающий контур}$$

### 32-33. Системы уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме. Граничные условия. Материальные уравнения.

#### Системы уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме.

1. Теорема Гаусса для электрического поля (утверждение, что силовые линии электрического поля могут начинаться и кончатся только на зарядах):

$$\oint_{S(V)} \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q, \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho \quad q = \int_V \rho dV$$

2. Теорема о циркуляции для электрического поля (следствие закона Фарадея)

$$\oint_{L(S)} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3. Теорема Гаусса для магнитного поля (утверждение, что нет свободных магнитных зарядов):

$$\oint_{S(V)} \vec{B} d\vec{S} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

4. Теорема о циркуляции для магнитного поля (Следствие закона Био-Савара и представления о токах смещения):

$$\oint_{L(S)} \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}, \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

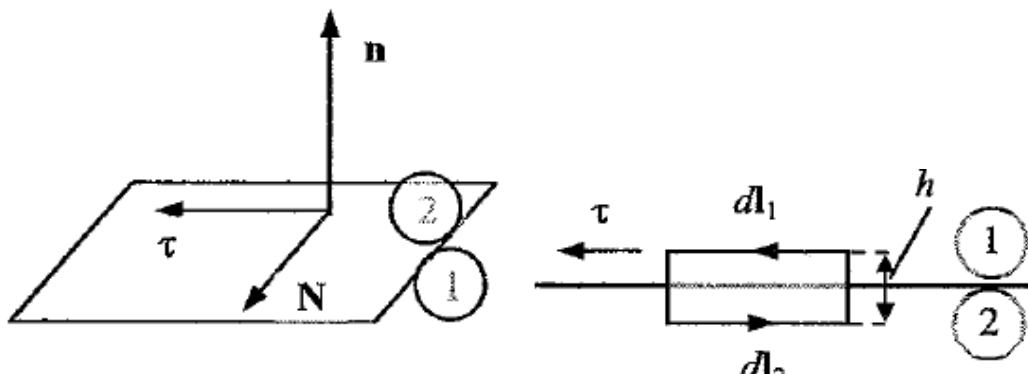
Здесь  $J$  - полный ток проводимости, пересекающий поверхность  $S$

**Граничные условия.** При наличии чётко выраженной границы раздела сред 1 и 2 должны выполняться следующие граничные условия:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad E_{2t} = E_{1t} \quad B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N$$

Последнее условие в векторной форме имеет вид

$$\vec{n} \times \vec{H}_2 - \vec{n} \times \vec{H}_1 = \frac{4\pi}{c} \vec{i}$$



Строго говоря, вывод граничных условий для касательных компонент векторов напряжённости электрического и магнитного полей немного отличается от вывода, приведенного для случая стационарных полей. Покажем соответствующий вывод для случая электрического поля.

Применяя теорему о циркуляции к бесконечно малому контуру, проходящему над и под поверхностью раздела сред (рисунок), получаем:

$$\oint_{L(dS)} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_{dS} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \Rightarrow \vec{E}_1 d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 d\vec{l}_2 = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial B_n}{\partial t} \right) dS$$

С учётом  $dS = hdl$ :

$$(E_{1t} - E_{2t})dl = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial B_n}{\partial t} \right) hdl$$

Переходя здесь к пределу  $h \rightarrow 0$ , приходим к граничному условию  $E_{2t} = E_{1t}$ .

Аналогично устанавливается граничное условие для напряжённости магнитного поля

$$\begin{aligned} \oint_{L(S)} \vec{H} d\vec{l} &= \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \Rightarrow \\ \vec{H}_1 d\vec{l}_1 + \vec{H}_2 d\vec{l}_2 &= \frac{4\pi}{c} i_N dl + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial D_n}{\partial t} \right)_0 S \Rightarrow \\ (H_{1t} - H_{2t})dl &= \frac{4\pi}{c} i_N dl + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial D_n}{\partial t} \right)_0 hdl \Rightarrow_{h \rightarrow 0} H_{1t} - H_{2t} = \frac{4\pi}{c} i_N \end{aligned}$$

**Материальные уравнения.** Уравнения Максвелла должны быть дополнены соотношениями, связывающими векторы полей.

1. Определение вектора электрической индукции

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

где  $\vec{P}$  - вектор поляризации. Если  $\vec{P} = \alpha\vec{E}$ , то

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$$

2. Определение вектора напряжённости магнитного поля в веществе

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{I}$$

где  $\vec{I}$  - вектор намагничивания. Если  $\vec{I} = \kappa\vec{H}$ , то

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\kappa$$

$\kappa$  - магнитная восприимчивость среды,  $\mu$  - магнитная проницаемость

3. В случае тока, вызываемого электрическим полем в проводящей среде, имеет место закон Ома

$$\vec{j} = \lambda\vec{E}$$

### 34. Волновое уравнение как следствие уравнений Максвелла. Плоские электромагнитные волны в однородной среде. Скорость распространения. Поперечность электромагнитных волн. Связь полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ в плоской волне.

**Волновое уравнение как следствие уравнений Максвелла.** Получим уравнение, описывающее распространение электромагнитного поля в области пространства, в которой отсутствуют свободные заряды и токи проводимости. Рассмотрим сначала частный случай, когда электрическое и магнитное поля направлены соответственно по осям  $x$  и  $y$ , как показано на рисунке. Будем считать также, что они зависят только от координаты  $z$ . Применим уравнения Максвелла, считая, что ток проводимости отсутствует:

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (1)$$

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{H} d\vec{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} \quad (2)$$

В которых интегрирование ведется по контурам

$$\Gamma_1 = A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$$

$$\Gamma_2 = A \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow A$$

1. Вычисляем циркуляцию вектора напряжённости электрического поля по контуру  $\Gamma_1$  в уравнении

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{E} d\vec{l} = -E_x(z)dx + E_x(z+dz)dx = \frac{\partial E_x}{\partial z} dx dz$$

Правая часть уравнения 1 равна

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} dx dz$$

Учтено, что  $d\vec{S}$  направлен по  $y$  и равен  $dx dz$ .

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

2. Вычисляем циркуляцию вектора  $\mathbf{H}$  по  $\Gamma_2$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_2} \vec{H} d\vec{l} &= H_y(z)dy - H_y(z+dz)dy = \\ &= -\frac{\partial H_y}{\partial z} dy dz \end{aligned}$$

Правая часть уравнения 2

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t} dy dz$$

Учтено, что  $d\vec{S}$  направлен вдоль  $x$  и равен  $dy dz$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t}$$

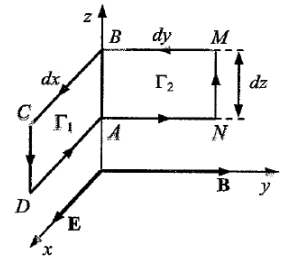


Рис. 17: К выводу волновых уравнений для электрического и магнитного полей. Начальной точке контура соответствуют координаты  $x, y, z$



Ограничиваясь случаем линейных сред, переходим к системе

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Обозначим  $v = c/n$  – **скорость распространения ЭМ волны в среде**,  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$

С учётом этого получаем уравнение:

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}}$$

Это уравнение совпадает по виду с волновым уравнением, описывающим волны, распространяющиеся со скоростью  $v$  вдоль  $z$ .  $n$  – показатель преломления среды

Аналогично получаем волновое уравнение для магнитного поля:

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}}$$

**Поперечность электромагнитных волн.** Рассмотрим гармонические электромагнитные волны, которые представим в комплексной форме.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp i(k\vec{r} - \omega t), \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \exp i(k\vec{r} - \omega t)$$

Напряжённости электрического и магнитного полей удовлетворяют уравнения Максвелла. Рассмотрим сначала следствия теорем Гаусса:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0$$

(Это справедливо для волн в однородных средах) Обозначим  $\xi = k\vec{r} - \omega t$  и найдём  $\operatorname{div} \vec{E}$

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \\ &= i(E_{0x}k_x + E_{0y}k_y + E_{0z}k_z) \exp i(k\vec{r} - \omega t) = i\vec{k}\vec{E} \end{aligned}$$

Таким образом  $\vec{k}\vec{E} = 0$ , аналогично  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ , устанавливается равенство  $\vec{k}\vec{H} = 0$ . Следовательно векторы перпендикулярны направлению распространения волны, задаваемом вектором  $\vec{k}$

$$\boxed{\vec{E} \perp \vec{k}, \quad \vec{H} \perp \vec{k}}$$

Это свойство называется *поперечностью электромагнитных волн*.

### 35. Монохроматическая (гармоническая) плоская волна. Стоячие электромагнитные волны. Отражение электромагнитной волны от плоской поверхности идеального проводника

**Плоская волна. Стоячая волна.** Плоская волна — волна, фронт которой имеет форму плоскости. Данная волна описывается уравнением

$$u(\mathbf{r}, t) = a \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t),$$

а данная плоскость

$$\mathbf{k}\mathbf{r} = \varphi_0 - \omega t$$

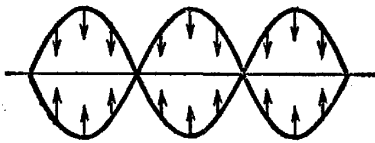


Рис. 18: картина колебаний в стоячей волне

Пусть в натянутом шнуре слева направо распространяется поперечная синусоидальная волна  $s_1 = a \cos(\omega t - kx)$ . Если изменить знак у  $kx$ , то получится волна  $s_2 = a \cos(\omega t + kx)$ , распространяющаяся справа налево. Волну  $s_1$  называют *падающей*, а волну  $s_2$  — *отраженной*. Предположим, что отражение полное, т.е. амплитуды падающей и отраженной волн *одинаковы*. От наложения таких волн возникает возмущение

$$s = s_1 + s_2 = 2a \cos kx \cos \omega t$$

называемое **стоячей волной**. Амплитуда таких колебаний обращается в нуль в тех точках, где  $\cos kx = 0$ , такие точки называются *узлами смещения*. Посередине между двумя соседними узлами амплитуда колебаний  $2a \cos kx$  максимальна, соответствующие точки называются *пучностями смещения*.

Рассуждения выше подходят для случая со шнуром с неограниченной длиной, но если в шнуре с закрепленными концами возбудить какое-то произвольно возмущение и затем предоставить его самому себе, то это возмущение побежит в обе стороны и начнет отражаться от концов шнура. В шнуре возникает довольно сложное *нестационарное движение*. *Стационарное движение в виде стоячей волны возможно лишь при вполне определенных частотах*. Дело в том, что на закрепленных концах шнура должны выполняться определенные *граничные условия*; в них смещение  $s$  все время должно равняться нулю, т.е. концы шнура должны быть узлами рассматриваемой волны. Отсюда следует, что на длине шнура  $l$  должно укладываться целое число полуволн:  $l = n\lambda/2$ , откуда

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \quad \omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{\pi v}{l} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

получается бесконечный набор возможных типов стационарных колебаний, они называются *собственными* или *нормальными* колебаниями шнура.

#### Стоячая волна ЭМ волна. Отражение ЭМ волны от проводника.

Применим данную теорию к электромагнитным волнам. Так как они описываются двумя взаимно перпендикулярными векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , то рассмотрим случай, когда волна распространяется в положительном направлении оси  $X$  и представляется уравнениями

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad H_z = H_0 \cos(\omega t - kx),$$

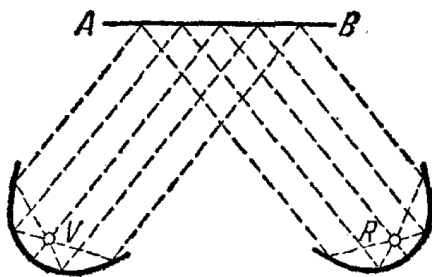
напомним, что волну, распространяющуюся в обратном направлении, можно получить отсюда, если изменить знаки у  $k$  и направление одного из векторов  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ , например магнитного

$$E_y = E_0 \cos(\omega t + kx), \quad H_z = -H_0 \cos(\omega t + kx),$$

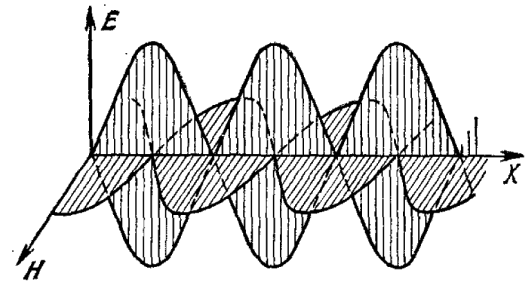
В результате суперпозиции этих волн получим:

$$E_x = 2E_0 \cos kx \cos \omega t, \quad H_y = 2H_0 \sin kx \sin \omega t$$

Это и есть **стоячая электромагнитная волна**.



чем диэлектрики.



Направляя электромагнитную волну от параболического зеркала вибратора на плоское зеркало АВ (металлический лист), можно наблюдать *отражение волны*. Оказалось, что угол падения волны равен углу отражения, а нормали к падающей и отраженной волнам лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности зеркала. Кроме того, легко убедиться, что металлы значительно лучше отражают электромагнитные волны,

### 36. Электромагнитные волны в волноводах. Простейшие типы электромагнитных волн в волноводе прямоугольного сечения. Критическая частота. Длина волны и фазовая скорость волн в волноводе.

Электромагнитные волны в волноводах. Волновод — канал, способный поддерживать распространяющейся в нем волны. Волноводы относятся к линиям передачи, т.е. к системам, предназначенным для передачи по ним электромагнитной энергии.

Электромагнитная волна в волноводе отличается от волны в свободном пространстве, поскольку в формировании поля теперь участвует не только исходная волна, но также заряды и токи, индуцированные этой волной на стенках волновода. В результате суммарная волна уже не является поперечной.

Простейшие типы ЭМ волн в волноводе прямоугольного сечения. Пусть волновод передает сигнал вдоль оси  $z$ . Соответственно выделяют два основных типа волн:

1. E-волна, или ТМ-волна:  $\mathbf{H} \perp z$ ,  $E_z \neq 0$ ,
2. H-волна, или ТЕ-волна:  $\mathbf{E} \perp z$ ,  $H_z \neq 0$ .

\* — символ  $T$  в обозначении волны указывает, какой вектор (электрический или магнитный) является поперечным по отношению к направлению распространения волны.

Рассмотрим H-волну в прямоугольном волноводе

$$E_z = 0, H_n = 0; E|_{Oy}; E(a) = E(0) = 0$$

Запишем волновое уравнение и положим, что волна зависит от времени по гармоническому закону с частотой  $\omega$ . В вакууме считаем  $v = c$ . Получим **уравнение Гельмгольца**:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0}$$

Пусть  $E_y \sim \sin k_x x$ , а волна распространяется вдоль  $Oz$ :  $E_y = E_0 \sin k_x x \exp(i[\omega t - k_z z])$

$$\Delta E = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$-k_x^2 E_y + 0 - k_z^2 E_y = -\frac{\omega^2}{c^2} E_y \Leftrightarrow \boxed{k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}} - \text{дисперсионное соотношение}$$

В вакууме волна с частотой  $\omega$  имеет длину волны  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega \Leftrightarrow \omega = kc = 2\pi c/\lambda_0$

$$k^2 = k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow k_z = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$$

Введем длину волны вдоль оси волновода:  $\lambda = 2\pi/k_z$ . Теперь можно выразить **длину волны в волноводе**  $\lambda$  через длину волны в вакууме  $\lambda_0$ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2}} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}}$$

Если  $k_z$  — мнимая, то волна перестанет существовать, т.к. исчезнет мнимость в экспоненте.

$\omega_{\text{гр}} = \frac{\pi c}{a}$  — **граничная частота** ( $\omega > \frac{\pi c}{a}$ ), волны меньшей частоты в волноводе распространяться не могут.

Запишем зависимость напряженности поля от координаты  $z$  и времени  $t$  в виде

$$\exp(ik_z z - i\omega t) = \exp[ik_z(z - v_\phi t)],$$

профиль волны перемещается вдоль оси волновода со скоростью

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}.$$

Таким образом, фазовая скорость волны превышает скорость света:  $v_\phi > c$

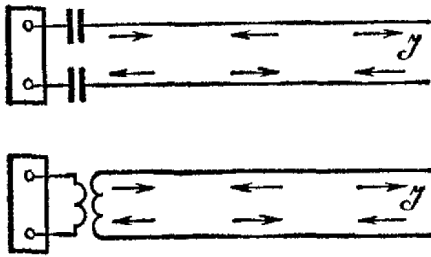
Скорость переноса энергии равна *групповой скорости*:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{ck_z}{\omega} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}, \quad v_{\text{гр}} < c$$

$$* - v_\phi v_{\text{гр}} = c^2$$

### 37. Двухпроводная линия как пример не квазистационарной цепи. Электромагнитная волна в двухпроводной линии. Скорость волны. Волновое сопротивление. Согласованная нагрузка.

Рассмотрим два одинаковых параллельных провода, в которых с помощью генератора могут возбуждаться переменные токи высокой частоты. Такие два провода называются *системой Лехера*. Связь проводов с генератором может быть либо *емкостной*, либо *индуктивной*.



По отношению к поперечным размерам системы выполнено условие квазистационарности, т.е. расстояние между проводами может быть мало по сравнению с длиной волны. В то же время будем предполагать провода длинными — на их длине должно укладываться по меньшей мере несколько волн, поэтому электрические токи в проводах *не квазистационарны*, сила тока  $I(x)$  и линейная плотность заряда  $q(x)$  существенно меняются вдоль проводов. Ток  $I(x)$  вдоль одного из проводов

равен и противоположно направлен току, текущему вдоль другого провода. Аналогичное утверждение относится к величинам зарядов на проводах и их знакам.

Возьмем на одном из проводов системы Лехера бесконечно малый участок  $dx$ . Через конец А за время  $dt$  внутрь рассматриваемого участка входит электрический заряд  $I(x)dx$ , а через конец D выходит заряд  $I(x+dx)dt$ . Избыток входящего электричества над выходящим составляет

$$[I(x) - I(x + dx)]dt = -\frac{\partial I}{\partial x}dxdt$$

Ту же величину можно представить в виде  $\dot{q}dxdt$ . Таким образом,

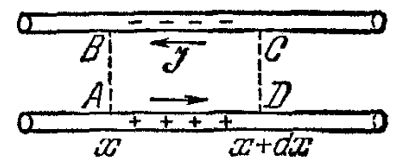


Рис. 19: бесконечно малый участок  $dx$

$$\dot{q} = -\frac{\partial I}{\partial x} \quad (1)$$

Это уравнение выражает закон сохранения эл. заряда.

Применим к контуру ADCB уравнение  $\oint E dl = -\frac{1}{c}\dot{\Phi}dx$ , где  $\Phi(x)dx$  — магнитный поток, пронизывающий этот контур. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{DC} E dl &= V(x + dx) \\ \int_{BA} E dl &= -V(x) \\ \int_{DC+BA} E dl &= V(x + dx) - V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}dx \end{aligned}$$

$$\int_{AD+CB} E dl = RI dx$$

где  $R dx$  — суммарное сопротивление элементов проводов AD и CB. Следовательно

$$\frac{\partial V}{\partial x} + RI = -\frac{1}{c} \dot{\Phi} \quad (2)$$

Величины  $q$ ,  $\Phi$  и  $R$  суть заряд, магнитный поток и сопротивление единицы длины рассматриваемой двухпроводной линии. В дальнейшем будем предполагать, что сопротивление  $R$  равно нулю. Используем условия квазистационарности по отношению к поперечным размерам линии. При выполнении этого условия можно ввести емкость и индуктивность  $L$  единицы длины линии. Эти величины определяются соотношениями

$$q = CV, \quad \Phi = LI$$

Исключив из уравнений (1) и (2) величины  $q$  и  $\Phi$ , при  $R = 0$  получим

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{L}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t} \quad (3)$$

Для электромагнитной волны верны соотношения (см. пункт 34)

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4)$$

Уравнения (3) формально тождественны с уравнениями (4). Поэтому все следствия, полученные из уравнения (4), остаются справедливыми и для системы Лехера. Надо только сделать замену  $H \rightarrow I$ ,  $E \rightarrow V$ ,  $\varepsilon \rightarrow cC$ ,  $\mu \rightarrow L/c$ . Таким путем приходим к выводу, что выражение и ток распространяются вдоль проводов в виде волны со скоростью

$$v = \frac{c}{\sqrt{LC}}$$

В бегущей волне напряжение и ток связаны соотношением

$$V = \pm WI,$$

и

$$W = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Величина  $W$  называется **волновым сопротивлением** линии. Знак плюс относится к волне, распространяющейся в положительном, а минус — в отрицательном направлении оси  $X$ .

### 38. Поток энергии. Вектор Пойнтинга. Теорема Пойнтинга. Примеры применения.

Пусть в некоторой области пространства присутствуют переменные во времени электрическое и магнитное поля. Получим закон сохранения энергии.

Используем уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5)$$

Запишем выражение для изменения плотности энергии электромагнитного поля:

$$dw = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} d\mathbf{D} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} d\mathbf{B}$$

Отсюда следует

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (6)$$

Подставим сюда выражения для производных  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  и  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  из уравнений (5)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \left[ \mathbf{E} \left( \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \right) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} \right] = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}] - \mathbf{j} \mathbf{E}$$

В силу известного векторного тождества

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$$

Поэтому, если ввести обозначение

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]} \text{ — вектор Пойнтинга}$$

то уравнение (6) примет вид:  $\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{j} \mathbf{E}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{j} \mathbf{E} = \frac{\partial u}{\partial t}$  — внутренняя энергия в 1 см<sup>3</sup>  $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0} \text{ — теорема Пойнтинга} \quad (7)$$

где слагаемое  $\mathbf{j} \mathbf{E}$  отвечает за тепловые потери,  $\mathbf{S}$  определяет количество энергии поля, протекающее через единичную площадку в единицу времени, и называется вектором плотности потока энергии, или **вектором Пойнтинга**.

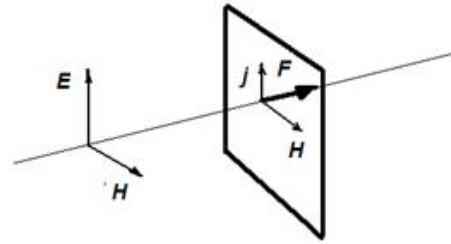
Равенство (7) называется **теоремой Пойнтинга** в дифференциальной форме.

**Примеры применения** вы можете посмотреть в 4 пункте §84 Сивухина или пункте 10.3 Кириченко, они там объяснены досконально.



### 39. Давление излучения. Опыты Лебедева. Электромагнитный импульс.

**Давление электромагнитного излучения.** Пусть свет – ЭМ волна бежит вдоль оси  $z$  и при  $z = 0$  попадает в какое-то вещество (падает на стенку). Среда полностью поглощает свет и обладает слабой проводимостью. Рассмотрим произвольную точку внутри среды. В ней  $\vec{E} = E_x$ ,  $\vec{B} = B_y$ . Раз среда обладает проводимостью, то в этом месте возникает электрический ток  $j_x || E_x$  по закону Ома.



Тогда сила, действующая на единицу объёма среды равна:  $f = \frac{[\vec{j}_x \times \vec{B}]}{c}$ , а полное давление на стенку:

$$P = \int_0^\infty f dz$$

Запишем 2 и 4 уравнений Максвелла в дифференциальной форме, считая  $\varepsilon = 1, \mu = 1$  и учитывая, имеющийся ток проводимости  $j_x$  – ток смещения.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_x \end{array} \right. \cdot \frac{E_x}{4\pi} + \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{E_x^2 + B_y^2}{8\pi} \right) = \frac{1}{c} j_x B_y + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (E_x B_y) \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial w}{\partial z} = f + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (E_x B_y) - \text{усредним это соотношение по времени}$$

$$E_x, B_y \sim \cos(\omega t - kz) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (E_x B_y) \sim \frac{\partial}{\partial t} \cos^2(\omega t - kz) \sim \frac{\partial}{\partial t} \sin 2(\omega t - kz), \quad \overline{\sin 2(\omega t - kz)} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \bar{f} \Rightarrow P = - \int_0^\infty \bar{f} dz = w(0) - w(\infty) = w(0) \Rightarrow$$

Давление электромагнитной волны на стенку равна объёмной плотности электромагнитной энергии, падающей на эту стенку:

$$P = w$$

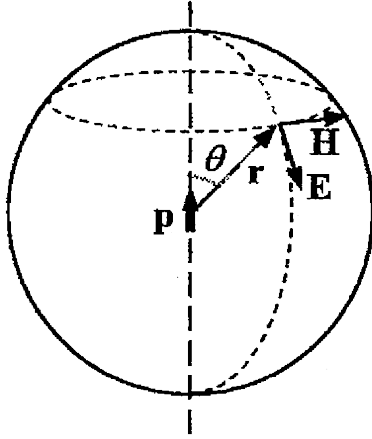
**Опыты Лебедева.** заключались в экспериментальном нахождении давления света на твердые тела и газы.

**Импульс электромагнитного поля:** Если энергия с плотностью массы  $w/c^2$  движется со скоростью  $\mathbf{v}$ , то с этим движением связан импульс, значение которого в единице объёма среды дается выражением  $\mathbf{g} = w\mathbf{v}/c^2$  – **импульс электромагнитного поля.**  
 $w\mathbf{v} = \mathbf{S}$  :

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$$

#### 40. Излучение электромагнитных волн. Излучение колеблющегося диполя (без вывода). Диаграмма излучения. Зависимость мощности излучения от частоты (закон Релея).

**Излучение** — это процесс, в котором электромагнитное поле отрывается от источника и уносит некоторую энергию.



Для появления излучения, уносящего энергию от источника, необходимо неравномерное движение, т.е. наличие ускорения:  
 $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} \neq 0$

Рассмотрим электромагнитную волну, создаваемую точечным диполем с переменным дипольным моментом в среде с  $\varepsilon = \mu = 1$ . В волновой зоне волновой фронт излучения — сферический, т.е. напряженности и потенциалы полей зависят от времени по закону

$$\sim f(r - ct)$$

В небольшой области волнового фронта волну можно рассматривать как плоскую, распространяющуюся от центра, в котором находится излучающий диполь. Поэтому локально волну можно считать поперечной, так что напряженности электрического и магнитного полей связаны соотношением  $\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{8\pi c^3} \frac{p_0^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{r^2} \quad (8)$$

Это соотношение определяет угловое распределение, или **диаграмму направленности излучения**. Максимум излучения идет в направлении перпендикулярном дипольному моменту.

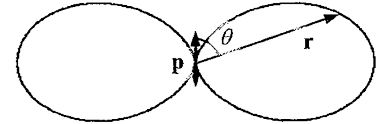


Рис. 20: диаграмма излучения

В случае дипольного излучения поля пропорциональны  $\ddot{\mathbf{p}}$ , причем:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 r} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c^2 r} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}; \quad \mathbf{S} = \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 r^2} \mathbf{n} \quad \mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}$$

Полная энергия, излучаемая диполем в единицу времени, равна:

$$Q = \oint_{\Pi} \mathbf{S} d\Pi = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}$$

где  $\Pi$  — замкнутая поверхность, окружающая колеблющийся диполь,  $d\Pi = \mathbf{n} d\Pi$  — вектор элементарной площади. Значение дипольного момента  $\mathbf{p}$  берется в момент времени  $t - r/c$ , учитывающий запоздание.

Пусть дипольный момент меняется по закону:  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t$

Тогда для средней (по периоду колебаний) мощности излучения получаем выражение

$$\overline{Q} = \frac{p_0^2}{3c^3} \omega^4 \quad \text{— закон Рэлея} \quad (9)$$

## 42. Скин-эффект. Толщина скин-слоя, её зависимость от частоты и проводимости

**Скин-эффект** - это протекание токов высокой частоты в тонком поверхностном слое проводника. Возникает благодаря электромагнитной индукции, по правилу Ленца.

Далее считаем:  $\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ,  $\vec{j} = \lambda \vec{E} = \vec{j}_0 \cos \omega t$ ,  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$

Для этих предположений запишем уравнения Максвелла для э-м. поля в металле:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{div} \vec{E} = 0, \quad \text{div} \vec{H} = 0.$$

Здесь предполагается, что заряды скомпенсированы, поэтому  $\text{div} \vec{D} = \varepsilon \text{div} \vec{E} = 4\pi \rho = 0$ . Запишем первые два уравнения Максвелла, используя закон Ома и применим операцию  $\text{rot}$  к обеим частям уравнений:

$$\text{rot} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{H}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{4\pi \lambda}{c} \vec{E} \right)$$

Для левой части:  $\text{rot} \text{rot} \vec{E} = \text{grad} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$ . Т.к.  $\text{div} \vec{E} = 0$  получим уравнение:

$$\Delta \vec{E} = \frac{4\pi \mu \lambda}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10)$$

По проводнику течёт переменный ток  $J = J_0 \cos \omega t$ , поддерживаемый электрическим полем той же частоты (из закона Ома  $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ ). Найдём распределение тока по проводнику в простейшем случае, когда переменное электрическое поле действует вдоль границы раздела вакуум-металл. И считаем, что ток и напряжённость поля зависят только от расстояния до поверхности металла, т.е. от координаты  $z$ . ( $= E(z, t), j = j(z, t)$ ).

В этих предположениях формула 10:  $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{4\pi \mu \lambda}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$  в металле

Запишем условие колебаний с частотой  $\omega$  в комплексной форме:  $E(z, t) = E_0(z) e^{-i\omega t}$ . При подстановке в 10 получим диффур (и учтём что  $\sqrt{-i} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$ )

$$\frac{d^2 E_0}{dz^2} = k^2 E_0, \quad k = \sqrt{-\frac{4\pi i \mu \lambda \omega}{c^2}} = \sqrt{\frac{4\pi \mu \lambda \omega}{c^2}} \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\Lambda}, \quad \boxed{\Lambda = \frac{c}{\sqrt{2\pi \mu \lambda \omega}}}$$

Решение уравнения имеет вид:  $E_0(z) = E_0(0) \exp(-kz) = E_0(0) \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}(1-i)\right)$

Плотность тока:  $j(z, t) = \lambda E(z, t) = \lambda E_0(z) e^{-i\omega t} = j_0(0) \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) \exp\left[i\left(\frac{z}{\Lambda} - \omega t\right)\right]$

Таким образом, переменный ток (как и переменное поле) проникает в проводник на глубину порядка  $\Lambda$ , называемую **толщиной скин-слоя**. Чем выше частота колебаний тока, тем на меньшую глубину он проникает в проводник. Аналогично, с ростом проводимости толщина скин-слоя убывает. В пределе идеального проводника переменный ток течёт в бесконечно узком слое вблизи поверхности.

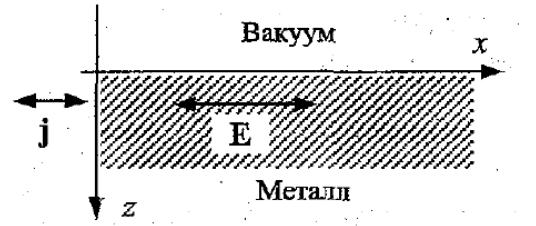


Рис. 21: Переменное электрическое поле поддерживает переменный ток в металле

### 43. Квазистационарные процессы. Уравнение гармонического осциллятора.

#### Свободные колебания осциллятора с затуханием

**Квазистационарные процессы.** Процесс считается **квазистационарным**, если мгновенные значения тока во всех участках проводника (не разветвлённой цепи) одинаковы, а электрические поля в конденсаторах такие же, как в электростатике.

Для сигнала частоты  $\omega$  имеем длину волны  $\lambda = 2\pi c/\omega = cT$ , где период  $T = 2\pi/\omega$ .

Если  $l \ll \lambda$  или  $l \ll cT$ , то во всех участках токи и напряжения меняются синхронно в одной фазе. Время прохождения всей цепи  $\tau \sim l/c$ . Тогда:

**Условие квазистационарности:**  $\tau \ll T$

**Вывод уравнения колебательного контура:** Здесь используем систему СИ, в которой:  $\varphi = LJ, \varepsilon = -d\varphi/dt$ .

По т. о циркуляции эл. поля для контура  $\Gamma = \{12341\}$ :

$$\oint_{(12341)} E_l dl = \int_{(12)} E_l dl + \int_{(23)} E_l dl + \int_{(34)} E_l dl + \int_{(41)} E_l dl.$$

$\int_{(41)} E_l dl = 0$  т.к. потенциал не меняется.  $\int_{(12)} E_l dl = \varphi_1 - \varphi_2$ , где  $\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon$  это ЭДС. На участке 23 только проводники с проводимостью  $\lambda$ .  $S$  - площадь поперечного сечения. Закона Ома:  $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ . Полный ток  $J = jS$ .

Получим:

$$\int_{(23)} E_l dl = \int_{(23)} \frac{j}{\lambda} dl = \int_{(23)} \frac{J}{\lambda S} dl = J \int_{(23)} \frac{dl}{\lambda S} = JR$$

Где **сопротивление цепи** это:  $R = \int_{(23)} \frac{dl}{\lambda S}$ . Для участка 34 с конденсатором имеем: ток

$J = dq/dt$ , напряжение на C это:  $V = \varphi_3 - \varphi_4$ . Тогда получим:  $\int_{(34)} E_l dl = \varphi_3 - \varphi_4 = V = q/C$ .

Где **ёмкость конденсатора** это:  $C = q/V$ . В итоге:

$$-\varepsilon + JR + \frac{q}{C} = -\frac{d\varphi}{dt} \text{ учитывая } \varphi = LJ \text{ получим: } L \frac{dJ}{dt} + JR + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

**Уравнение свободных колебаний.** В той же цепи, но без ЭДС:  $L \frac{dJ}{dt} + JR + \frac{q}{C} = 0$ . Введём обозначения:  $2\gamma = \frac{R}{L}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  и учтём  $J = dq/dt$ . Тогда у нас получится:

$$\text{Уравнение свободных колебаний: } \ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

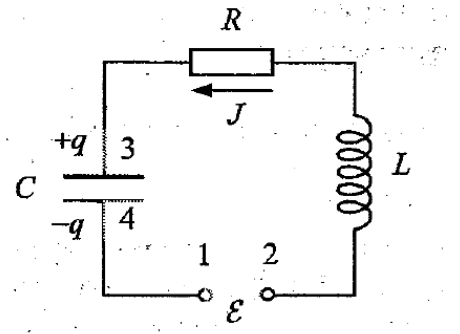
Система, совершающая колебания называется **осциллятором**.

**Гармонические колебания:** колебания при сопротивлении цепи  $R = 0$ . Тогда  $\gamma = 0$ :

$$\text{Уравнение гармонического осциллятора: } \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Его решение:  $q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Амплитуда  $q_0$  и начальная фаза  $\varphi_0$  определяются начальными условиями. Частота:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

$$\text{Формула Томсона: } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}$$



#### 44. Коэффициент затухания, логарифмический декремент, добротность колебательного контура. Превращения энергии при затухающих колебаниях. Энергетический смысл добротности.

**Затухающие колебания.** В общем случае:  $\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$ . Введём комплекснозначную функцию  $\hat{q}$ , такую, что  $\text{Re } \hat{q}(t) = q(t)$  и будем искать решение вида:  $\hat{q}(t) = q_0 \exp(i\Omega t)$ .

Подставим это в  $\frac{d^2\hat{q}}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\hat{q}}{dt} + \omega_0^2\hat{q} = 0$  и получим:  $(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2)\hat{q} = 0$ .

Получим выражение для  $\Omega$ :  $-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Omega_{1,2} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Общее решение диффура:  $\hat{q}(t) = q_{10} \exp(i\Omega_1 t) + q_{20} \exp(i\Omega_2 t)$ . Частные случаи:

1. **Слабое затухание** ( $\omega_0 > \gamma$ ). Введём  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  и получим:  $\Omega_{1,2} = i\gamma \pm \omega$ ;

$$\hat{q}(t) = \exp(-\gamma t) (q_{10} \exp(i\omega t) + q_{20} \exp(-i\omega t)) \Rightarrow q(t) = \exp(-\gamma t) (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$$

2. **Сильное затухание** ( $\omega_0 < \gamma$ ). Введём  $\Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  и получим:  $\Omega = i(\gamma \pm \Gamma)$

$$q(t) = \exp(-\gamma t) (q_{10} \exp(\Gamma t) + q_{20} \exp(-\Gamma t))$$

3. **Вырожденный случай** ( $\omega_0 = \gamma$ ) тогда  $\Omega_1 = \Omega_2$  и решение вырождается в:  $q(t) = \exp(-\gamma t) (C_1 + C_2 t)$ , где  $C_1, C_2$  - произвольные константы

На рисунке представлены периодические (гармонические) колебания с убывающей амплитудой:

$$q(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi_0), \quad A(t) = q_0 \exp(-\gamma t)$$

**Коэффициент затухания**  $\gamma$  показывает, с какой скоростью убывает амплитуда колебаний  $A(t)$ . Для LRC-контура  $\gamma = R/(2L)$ .

**Время затухания**  $\tau = 1/\gamma$  показывает, за какое время амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз. **Фазовая плоскость** это плоскость  $q, \dot{q}$ . Точка на ней (**фазовая точка**) показывает состояние системы в данный момент.

**Фазовая траектория** - кривая, описываемая фазовой точкой. На рисунке: а — фазовый портрет незатухающих колебаний; б — фазовая траектория затухающих колебаний.

**Закон сохранения энергии.** Уравнение затухающих колебаний можно записать так:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = -R\dot{q}$$

Умножив на  $\dot{q}$ , учитывая равенства для  $\dot{q}\ddot{q} = d/dt(1/2\dot{q}^2)$ ,  $\dot{q}q = d/dt(1/2q^2)$  и  $\dot{q} = J$  получим равенство:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{LJ^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = -RJ^2 = -N, \quad \text{где} \quad \boxed{W = W_L + W_C, \quad W_L = \frac{LJ^2}{2}, \quad W_C = \frac{q^2}{2C}}$$

По закону Джоуля-Ленца  $\frac{dW}{dt} = -N$ .

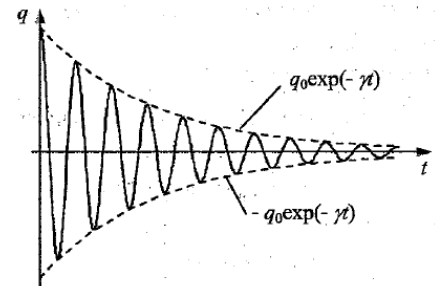
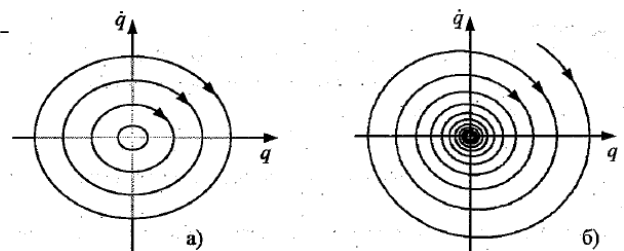


Рис. 22: Свободные затухающие колебания в LRC-контуре



**Логарифмический декремент.** Рассмотрим затухающие колебания:  $q(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi_0)$ ,  $A(t) = \exp(-\gamma t)$ . Выберем два последовательных максимума  $q_n, q_{n+1}$ .

**Логарифмический декремент затухания** это  $\delta = \ln(q_n/q_{n+1})$ .

Максимумы функций  $q(t)$  определяются условием  $\dot{q} = 0$ . Из выражения  $\dot{q} = q_0 \exp(-\gamma t) (-\gamma \cos(\omega t + \phi_0) - \omega \sin(\omega t + \phi_0)) = -q_0 \omega_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \phi_0 + \phi_1)$ .

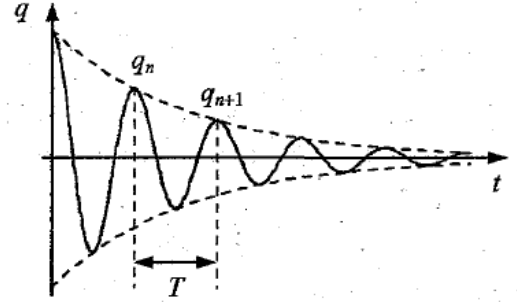


Рис. 23: Определение логарифмического декремента

$$\phi_1 \text{ задаётся } \cos \phi_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} = \frac{\gamma}{\omega_0}; \quad \sin \phi_1 = -\frac{\omega}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} = -\frac{\omega}{\omega_0};$$

При  $\dot{q} = 0$  время между соседними максимумами составляет  $T = 2\pi/\omega$  и это же период колебаний множителя  $\cos(\omega t + \phi_0)$  в  $q(t)$ , значит

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{A(t_n)}{A(T_{n+1})} = e^{\gamma T} \Rightarrow \text{Логарифмический декремент равен: } \boxed{\delta = \gamma T = \frac{2\pi\gamma}{\omega}}$$

Для слабого затухания ( $\gamma \ll \omega_0$ ) для LRC-контура находим:

$$\omega \equiv \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \gamma = \frac{R}{2L} \Rightarrow \delta = \frac{2\pi\gamma}{\omega} = \pi R \sqrt{\frac{L}{C}}$$

И смысл лог. декремента состоит в том, что за характерное время колебаний  $\tau = 1/\gamma$  осциллятор совершит  $n = \tau/T = 1/(\gamma T) = 1/\delta$  колебаний.

**Добротность колебательной системы** это величина  $\boxed{Q = \pi n = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{\pi}{\delta}}$

$$n = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\gamma T} = \frac{\omega}{2\pi\gamma} - \text{число колебаний осциллятора за характерное время затухания}$$

$$\text{Из вышесказанного не сложно вывести для LCR контура: } Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

**Энергетический смысл добротности.** За один период колебаний амплитуда колебаний заряда и тока убывает в  $e^{\gamma T}$  раз. Если в начале в контуре запасена энергия  $W(t)$  то к началу следующего цикла остаётся энергия  $W(t+T) = e^{2\gamma T} W(t)$ .

**Потери энергии за цикл** составляют  $\Delta W = W(t) - W(t+T) = (1 - e^{-2\gamma T}) W(t)$ . При слабых затуханиях  $2\gamma T \ll 1$ ,  $\Delta W = 2\gamma T \cdot W(t)$  следует:

$$\frac{W}{\Delta W} = \frac{1}{2\gamma T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{2\pi} Q. \quad \text{Энергетический смысл добротности } \boxed{Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}}$$

#### 45. Вынужденные колебания в линейных системах (гармоническая внешняя ЭДС). Амплитудно-фазовая характеристика линейных фильтров. Колебательный контур. Резонанс. Ширина резонансной кривой и её связь с добротностью.

##### Вынужденные колебания

$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = x(t) = x_0 \cos \omega t$  гармоническая внешняя сила:  $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ ,  $x(t) = \varepsilon(t)/L$   
 Частное решение ищем в виде  $q = q_0 e^{i\omega t}$ , откуда  $\dot{q} = i\omega q_0 e^{i\omega t}$ ,  $\ddot{q} = -\omega^2 q$ .

Подставим в исходное и получим:

$$q = \frac{x}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} e^{i\omega t} - \text{описывает вынужденные колебания осциллятора}$$

$$\text{Общее решение } q = \frac{x}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} e^{i\omega t} + e^{-\gamma t} (C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t))$$

Добавленное слагаемое описывает свободные колебания осциллятора.

В частном решении только вещественная часть:  $\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma = \rho e^{i\delta}$  где  $\rho, \delta \in \mathbb{R}$

$$q = x_0/\rho \exp(i(\omega t - \delta)) \text{ или } q = a \cos(\omega t - \delta) \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 = \rho \cos \delta; \quad 2i\omega\gamma = i\rho \sin \delta$$

**Вынужденное колебание будет гармоническим**  $q = a \cos(\omega t - \delta)$

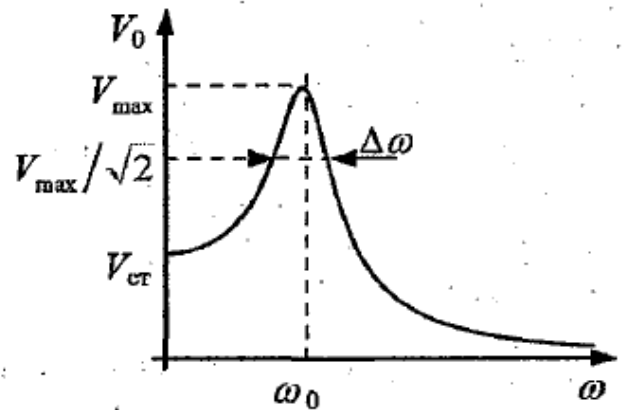
$$\text{амплитуда и фаза определяются: } a = \frac{x}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}, \quad \tan \delta = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

**Резонанс.** Исследуем поведение амплитуды в зависимости от частоты  $\omega$ . Оставляя амплитуду силы  $x_0$  неизменной, будем менять частоту. При  $\omega = 0$  получаем статистическое отклонение:  $a_0 = X_0/\omega_0^2$ .

Найдем максимум амплитуды:

$$\frac{\partial a}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

При малых затуханиях  $\gamma$  считаем  $\omega = \omega_0$ :



$$a_{max} = \frac{x_0}{2\omega_0\gamma} = \frac{\omega_0}{2\gamma} a_0; \quad \frac{a_{max}}{a_0} = Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Отношение максимального значения амплитуды к статистическому отклонению называется **добротностью колебательного контура**.

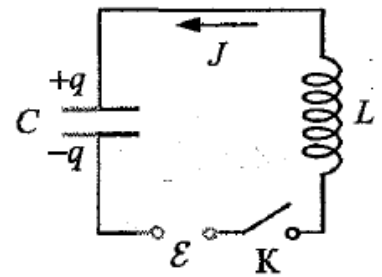
Пусть теперь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – значения частоты, при которых энергия колебаний вдвое меньше энергии в максимуме:

$$(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_1^2\gamma^2, \quad (\omega_2^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_2^2\gamma^2 \Rightarrow \text{при малых } \gamma \text{ получим } \omega_1 = \omega_0 - \gamma, \quad \omega_2 = \omega_0 + \gamma.$$

$$\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma = \omega_0/Q - \text{ширина резонансной кривой.}$$

## 46. Процессы установления вынужденных колебаний. Биения

**Установление вынужденных колебаний** . Имеется LC-контур с ЭДС  $\varepsilon$  и ключом К. При  $t < 0$  ток отсутствовал, при  $t = 0$  ключ замкнули и ток появился. Уравнение для напряжения на конденсаторе:  $\ddot{V} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 \varepsilon \cos(\omega t)$ .  $V(t) = V_s(t) + V_f(t)$ . Где  $V_s(t)$  - отвечают свободным колебаниям, а  $V_f(t)$  - вынужденным.



$$V_s(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t); \quad V_f(t) = \frac{\omega_0^2 \varepsilon}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

Подберём а и b из условия:  $V(0) = 0$ ,  $\dot{V}(0) = 0$ . При  $t = 0$ :

$$a + \varepsilon \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \Rightarrow a = -\varepsilon \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad b\omega = 0 \Rightarrow b = 0. \Rightarrow V(t) = \varepsilon \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

$$\text{Преобразуем выражение: } \Delta\omega = \omega - \omega_0, \bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_0}{2} \Rightarrow \omega = \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \omega_0 = \bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$\text{Тогда решение выглядит так: } V(t) = \varepsilon \frac{2\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin(\bar{\omega}t)$$

### Биения.

При  $|\Delta\omega \ll \bar{\omega}|$  это быстро меняющийся гармонический сигнал  $\sin(\bar{\omega}t)$  у которого

Амплитуда  $A(t) = \varepsilon \frac{2\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$  медленно меняется по гармоническому закону

Такие колебания называются **биениями**. Период высокочастотных колебаний определяется периодом:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = \frac{4\pi}{\omega + \omega_0}$$

Период огибающей (биений) это:

$$T_A = \frac{\pi}{\Delta\omega/2} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

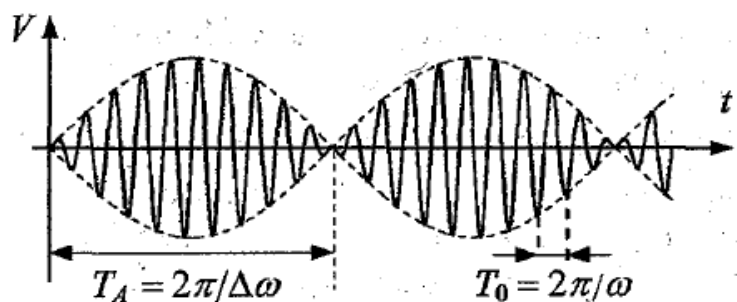


Рис. 24: График биений

Если коэффициент затухания ненулевой, то свободные колебания со временем затухнут:  $V_s(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  и в контуре установятся гармонические вынужденные колебания  $V_f(t)$



## 47. Расчёт цепей, содержащих сопротивления, индуктивности и ёмкости при гармоническом внешнем воздействии. Метод комплексных амплитуд. Векторные диаграммы. Резонанс.

### Метод комплексных амплитуд, импеданс

Для периодической функции  $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi_0)$  введём  $z(t) = z_0 \exp(i\omega t)$  :  $\text{Re} z(t) = x(t)$ . Тогда  $\phi_0$  - начальная фаза.  $z_0 = x_0 \exp(i\phi_0)$  - **комплексная амплитуда**.

Рассмотрим последовательный LRC - контур, содержащий периодическую ЭДС:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp(i\omega t). \quad q = q_0 \exp(i\omega t), J = \dot{q} = i\omega q_0 \exp(i\omega t) = J_0 \exp(i\omega t)$$

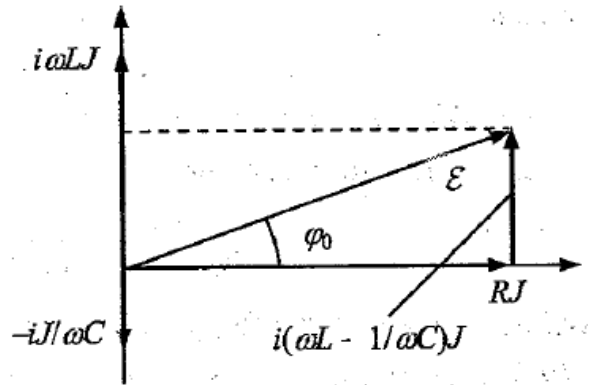
Продифференцируем уравнение и учтём  $\dot{\varepsilon}(t) = i\omega \varepsilon_0 \exp(i\omega t) = i\omega \varepsilon(t)$ . Тогда получим:

$$L\ddot{J} + R\dot{J} + J/C = i\omega \varepsilon(t), \quad J = J_0 \exp(i\omega t). \text{ поделим на } (i\omega) : \left( J(i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C}) = \varepsilon \right)$$

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Окончательно:  $JZ = \varepsilon$

$Z$  - это **Импеданс**.  $\text{Re}(Z) = R$  - активное сопротивление (приводит к потерям энергии).  $\text{Im}(Z) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  - реактивное сопротивление (не меняет энергию, но может менять динамику изменения тока).



### Резонанс напряжений и токов

$$J_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} \xrightarrow{\omega L - 1/(\omega C) = 0} \frac{\varepsilon_0}{R}$$

Начальные условия:  $J_0 \omega L = \frac{J_0}{\omega C} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ ;  $|U_{C_0}| = |U_{L_0}| = \varepsilon_0 Q$ .  $i_0 = \varepsilon_0 / R$

$$U_{C_0} = i_0 X_c = \frac{\varepsilon_0}{R \omega_0 C} \approx \varepsilon_0 Q; \quad U_{L_0} = i_0 X_L = i_0 \omega_0 L = \frac{\varepsilon_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx \varepsilon_0 Q$$

$$\text{Вблизи резонанса, когда } \omega \rightarrow \omega_0 : J_0 = \frac{\varepsilon_0}{z} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - (\frac{1}{\omega C}))^2}} = \frac{\varepsilon_0 / R}{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}$$

Поскольку  $Q = \omega_0 L / R = 1/(\omega_0 RC)$  :

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L \omega_0}{R \omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega RC \omega_0}\right)^2} = \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{1 + Q^2 \left(2\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} \approx \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0 \omega} = \frac{\Delta\omega 2\omega}{\omega_0 \omega} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \Rightarrow J_0 = \frac{J_0^{\text{рез}}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

**Параллельный контур. Резонанс токов** Т.к. элементы этого LRC-контра соединены параллельно, то импеданс определяется равенствами:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_R} + \frac{1}{z_L} + \frac{1}{z_C}, \quad z_R = R, \quad z_L = i\omega L, \quad z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Ток во внешней части цепи равен сумме токов через отдельные элементы  $J = J_R + J_L + J_C$ . напряжение на источнике  $U$ , тогда  $U = JZ$ . Т.к. напряжение на параллельно соединённых элементах одинаково, то

$$J_R = \frac{U}{Z_R} = \frac{U}{R}, \quad J_L = \frac{U}{Z_L} = \frac{U}{i\omega L}, \quad J_C = \frac{U}{Z_C} = i\omega CU$$

$$\text{Из } U = JZ \text{ имеем } J_R = \frac{J}{1 + \frac{R}{i\omega L} + i\omega CR}, \quad J_L = \frac{J}{1 - \omega^2 LC + \frac{i\omega L}{R}}, \quad J_C = \frac{J}{1 - \frac{1}{\omega^2 LC} + \frac{1}{i\omega CR}},$$

Учитывая  $R/L = 2\gamma$ ,  $1/(LC) = \omega_0^2$  получим:

$$\frac{J_{R0}}{J_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} - \omega CR\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4\gamma^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}$$

Видно, что здесь имеет место резонансное поведение тока  $J_R$ , причём максимум амплитуды Достигается при  $\omega = \omega_0$  и составляет  $(J_{R0})_{max} = J_0$ . Выражения амплитуд токов через катушку и конденсатор:

$$J_{L0} = J_{R0} \frac{R}{|z_L|} = J_{R0} \frac{R}{\omega L}, \quad J_{C0} = J_{R0} \frac{R}{|z_C|} = J_{R0} \omega RC$$

Аналогично из предыдущих выражений получим:

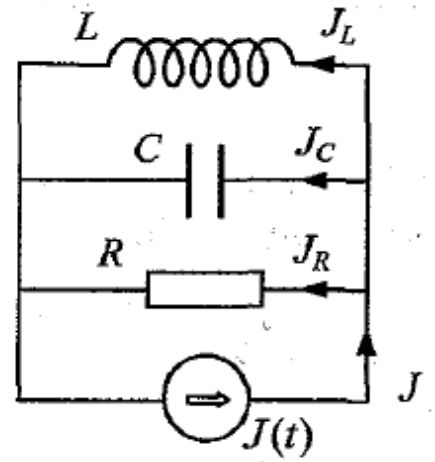
$$\frac{J_{L0}}{J_0} = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4\gamma^2}}, \quad \frac{J_{C0}}{J_0} = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0^2}{4\gamma^2\omega}\right)^2},$$

$$\text{При частоте колебаний тока равной } \omega_0 \text{ получим: } J_{L0} = \frac{2\gamma}{\omega_0} J_0 = J_{C0} = \frac{2\gamma}{\omega} J_0 = \frac{J_0}{Q}$$

Таким образом, на резонансной частоте по замкнутому LC-контру циркулирует ненулевой ток. Этот ток возникает на начальной стадии при включении внешнего источника и оказывается тем меньше, чем выше добротность цепи (меньше сопротивление  $R$ ). Если бы вместо источника тока использовали источник ЭДС, то в цепи был бы ток:  $J_0 = \varepsilon_0/|z_0|$  и модуль импеданса цепи был бы равен:

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + \frac{4\gamma^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}}$$

На частоте  $\omega = \omega_0$  величина достигает максимума  $|z| = R$  и на источнике ЭДС мы имели бы минимум тока во внешней цепи, а не максимум (как в последовательном контуре). Это явление называется **антирезонансом**



## 48. Правила Кирхгофа для переменных токов. Работа и мощность переменного тока

### Правила Кирхгофа для переменных токов

Расчёт произвольных квазистационарных цепей (как не разветвлённых, так и разветвлённых) при наличии переменных ЭДС может осуществляться по правилам Кирхгофа, аналогичных тем, что имеют место в случае постоянных токов и напряжений. Разница состоит лишь в замене сопротивлений  $R$  на импедансы  $Z$ . Правила:

1. Арифметическая сумма токов, входящих в узел, равна 0:  $\sum_k J_k = 0$ . Это следствие Закона Сохранения Заряда, которое значит, что заряды в узле не накапливаются
2. Для любого замкнутого контура в квазистационарной электрической цепи выполняется равенство:  $\sum_k J_k Z_k = \sum_i \varepsilon_i$ , где  $\varepsilon_i$  - ЭДС, входящие в выбранный контур, а  $J_k$  - токи, имеющие импедансы  $z_k$ . Это правило вытекает из Теоремы о Циркуляции для электрического поля в интегральной форме (закона индукции):  $\oint_{\Gamma} E_l dl = -d\Phi/dt$ ,  $\Phi = LJ$

### Работа и мощность переменного тока

По определению работы и мощности:  $\delta A = \varepsilon dq$ ;  $P = \delta A/\delta t$ ;  $\Rightarrow P = \varepsilon dq/dt = \varepsilon J$  Т.к. ток переменный:  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\Omega t)$ ;  $J = J_0 \cos(\Omega t - \psi)$ .

$$P = \varepsilon_0 J_0 \cos(\Omega t) \cos(\Omega t - \psi) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 J_0 (\cos \psi + \cos(2\omega t - \psi))$$

$$\text{Значит мощность переменного тока равна: } \overline{P} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 J_0 \cos \psi = \varepsilon_{\text{эфф}} J_{\text{эфф}} \cos \psi$$

где введены обозначения:  $\varepsilon_{\text{эфф}} = \varepsilon_0/\sqrt{2}$ ,  $J_{\text{эфф}} = J_0/\sqrt{2}$

## 49. Вынужденные колебания в линейных системах под действием негармонической внешней силы – спектральный анализ линейных систем.

При исследовании отклика *линейных систем* на внешнее воздействие  $\varepsilon(t)$  основной задачей является поиск решений уравнения вида:

$$\hat{A}(q) = \varepsilon(t) \quad (11)$$

где  $\hat{A}$  – *линейный* оператор соответствия.  $\hat{A} : q(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ .

*Линейность* оператора означает, что для любых функций вида  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  (из области его определения) и любых констант  $C_1$  и  $C_2$  (в общем случае комплексных) выполняется тождество:

$$\hat{A}(C_1 q_1 + C_2 q_2) = C_1 \hat{A}(q_1) + C_2 \hat{A}(q_2)$$

**Пример:** Приведем в пример исследование вынужденных колебаний в  $LCR$ -контуре. Запишем для него уравнение колебаний:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon(t)$$

Это уравнение можно переписать в виде (1) если ввести *линейный* (очевидно) оператор:

$$\hat{A} = L \frac{d^2}{dt^2} + R \frac{d}{dt} + \frac{1}{C}$$

Будем считать задачу об отклике системы на внешнее *гармоническое* воздействие в общем случае разрешимой, тогда вследствие линейности (1) можно найти отклик и на *не гармоническое* воздействие, представимое в виде линейной комбинации гармонических:

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = \varepsilon_{0k} e^{i\omega_k t} - \text{гармоническое} \quad q_k : \hat{A}(q_k) = \varepsilon_k(t) \Rightarrow q(t) = \sum_{k=1}^n q_k(t)$$

**Отклик на суммарное воздействие  $\varepsilon(t)$  равен сумме откликов  $q_k$  на элементарные воздействия  $\varepsilon_k(t)$ .**

Чтобы разложить произвольную функцию  $\varepsilon(t)$  воспользуемся теоремой Фурье. Периодическая функция может быть разложена в ряд Фурье:

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i\omega_k t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

А непериодическая – в интеграл Фурье.

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t) e^{-i\omega t} dt$$

## 50. Модулированные колебания. Амплитудная и фазовая модуляция. Векторное изображение, спектры колебаний, представление в виде суперпозиции гармонических сигналов. Опыт Мандельштама.

### Модулированные колебания.

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \psi(t)) \quad (12)$$

Сигнал вида (2) называют **модулированным**, если за времена, на которых изменение  $A(t)$  и  $\psi(t)$  существенно, функция  $x(t)$  совершит большое число колебаний с почти постоянными амплитудой и частотой. Здесь функции  $A(t)$  и  $\psi(t)$  имеют смысл *амплитуды* и *сдвига фазы*.

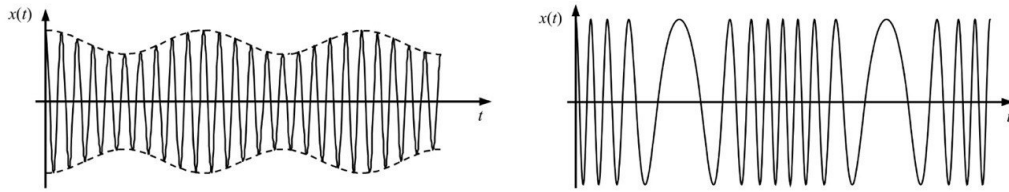


Рис. 25: примеры АМ и ФМ сигналов.

### Амплитудная модуляция.

Сигнал (2) называется **амплитудно-модулированным**, если нет сдвига фаз  $\psi(t) = 0$ .

$$x(t) = A(t)\cos\omega_0 t$$

Пусть периодический сигнал  $\cos\omega_0 t$  модулирован так, что амплитуда модуляции меняется по гармоническому закону  $A(t) = A_0(1 + m\cos\Omega t)$ .

Здесь используется следующая терминология:  $\omega_0$  – *несущая частота*,  $\Omega$  – *частота модуляции*,  $m$  – *глубина модуляции*. Обычно полагается, что  $m \ll 1$ .

Найдем разложение Фурье АМ сигнала. Запишем его в комплексной форме:

$S(t) = A_0(1 + m\cos\Omega t)e^{i\omega_0 t}$ . Пользуясь формулой Эйлера  $\cos\Omega t = \frac{1}{2}(e^{i\Omega_0 t} + e^{-i\Omega_0 t})$  получаем:

$$S(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} + \frac{mA_0}{2} e^{i(\omega_0 - \Omega)t} + \frac{mA_0}{2} e^{i(\omega_0 + \Omega)t}$$

Таким образом спектр состоит из трех гармоник:  $\omega_0, \omega_0 - \Omega, \omega_0 + \Omega$ .

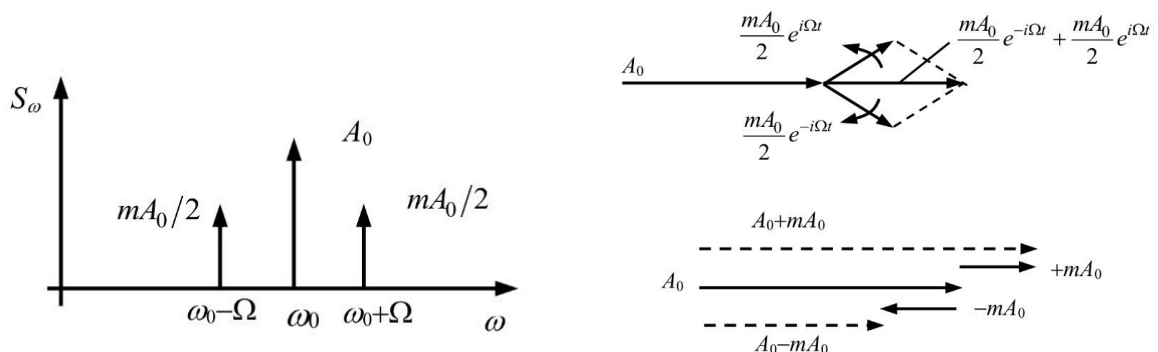


Рис. 26: Фурье-спектр АМ сигнала и его векторная диаграмма.

**Фазовая модуляция.**

Если сигнал представим в виде  $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + m\psi(t))$ ,  $|\psi(t)| \leq 1$ , то он называется **фазовомодулированным**. Индекс фазовой модуляции как правило мал:  $m \ll 1$ .

Найдем разложение Фурье ФМ сигнала, где  $\beta \ll 1$ . Запишем его в комплексной форме:  $S(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t)}$ . Пользуясь формулой Эйлера  $\sin \Omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t})$  и малостью  $\beta$  получаем:

$$S(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} - \frac{\beta A_0}{2} e^{i(\omega_0 - \Omega)t} + \frac{\beta A_0}{2} e^{i(\omega_0 + \Omega)t}$$

Таким образом спектр состоит из трех гармоник:  $\omega_0, \omega_0 - \Omega, \omega_0 + \Omega$ .

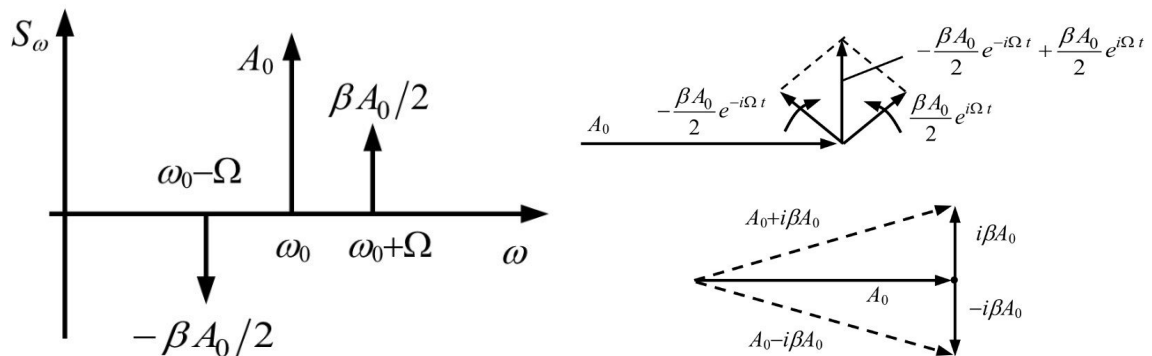


Рис. 27: Фурье-спектр ФМ сигнала и его векторная диаграмма.

**Опыт Мандельштама.**

АМ сигнал это *одно колебание с меняющейся амплитудой* или *три колебания с меняющейся частотой*? Мандельштам использовал два камертона на одной частоте, колесо с прорезями и шарик на нитки, см. рис., чтобы выделить боковую компоненту АМ сигнала.

1) Запустим первый камертон, шарик будет совершать *гармонические* колебания.

2) С помощью магнетика настроим второй камертон на другую частоту. И пусть теперь колесо вращается с постоянной угловой скоростью. Шарик будет вовлечен в АМ колебания.

Данный опыт показывает, что мы можем выделить боковую компоненту АМ сигнала (см. Фурье-спектр) и эта компонента существует как отдельный процесс.

*В зависимости от прибора АМ колебания можно представлять либо суммой отдельно чисто гармонических колебаний, либо колебанием с медленно меняющейся амплитудой.*

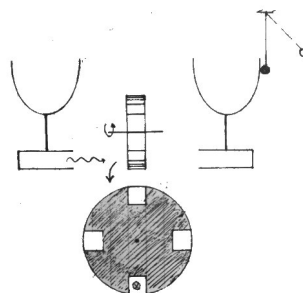


Рис. 28: Опыт Мандельштама.

## 51. Понятие о разложении Фурье. Примеры спектрального разложения. Соотношение неопределенностей.

### Ряд и интеграл Фурье.

По теореме Фурье *периодическая* функция  $f(t) = f(t+T)$  может быть разложена в ряд:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i\omega_k t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

Сама сумма называется **рядом Фурье** функции  $f(t)$ . В зависимости от функции эта сумма может содержать *конечное* число слагаемых (например разложение АМ сигнала). Величины  $C_k$  называются **коэффициентами Фурье**.

Теорема Фурье имеет обобщения на случай *непериодической* функции  $f(t)$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Функция  $a(\omega)$  называется **фурье-спектром** функции  $f(t)$ .

### Пример спектрального разложения.

Получим спектральное разложение для функции  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau/2, \\ f_0, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ 0, & t > \tau/2. \end{cases}$

Фурье-спектр этой функции определятся по формуле:

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = f_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{f_0}{i\omega} (e^{i\omega\tau/2} - e^{-i\omega\tau/2}) = f_0 \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

Таким образом функцию  $f(t)$  можно представить в виде *интеграла Фурье*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{f_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega} d\omega = \frac{f_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega t \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega} d\omega$$

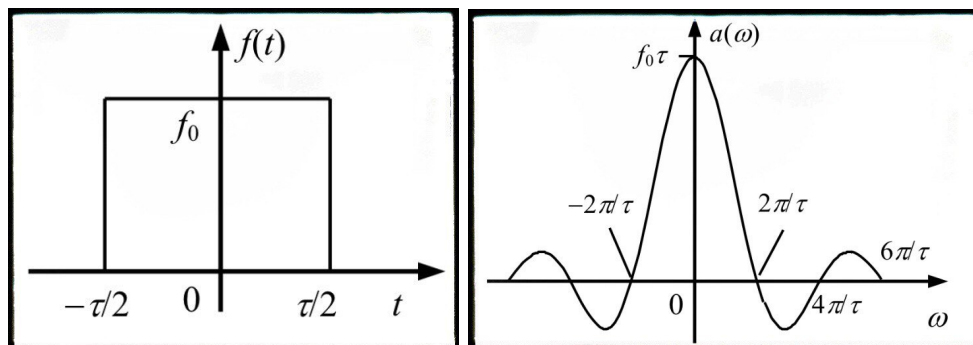


Рис. 29: График функции и её фурье-спектр.

### Соотношение неопределенностей.

Для функции из примера оценим ширину фурье-спектра, учитывая, что длительность импульса  $\Delta t = \tau$ :

$$\Delta\omega \sim 2\pi/\tau \Rightarrow \Delta\omega \Delta t \sim 2\pi - \text{соотношение неопределенностей}$$

Его смысл в том, что произведение длительности процесса на ширину соответствующего фурье-спектра есть величина порядка  $2\pi$ .

## 52. Параметрические колебания. Условия возбуждения индуктивной параметрической машины. Параметрический резонанс.

### Параметрические колебания.

Рассмотрим  $LCR$ -контур с периодически меняющимся во времени  $L$  и  $C$ . Свободные колебания такой системы описываются уравнением:

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{dq}{dt}\right) + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

**Параметрическим возбуждением колебаний** называется случайно возникшее отклонение от состояния равновесия, приводящее систему к возникновению и нарастанию колебаний, которые называются **параметрическими**.

### Условия возбуждения.

Для простоты рассмотрим условие возбуждение таких колебаний, где параметры меняются *скачкообразно*, а в промежутках между этими скачками остаются постоянными.

Раз сигнал меняется скачкообразно, то за время изменения параметров  $L$  и  $C$  заряд  $q$  практически не успевает измениться, следовательно и магнитный поток  $\Phi$  через катушку самоиндукции тоже. На промежутке времени  $\Delta t$  получим:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{d\Phi}{dt} dt + \int_t^{t+\Delta t} RI dt + \int_t^{t+\Delta t} \frac{q}{C} dt = 0 \Rightarrow \Delta\Phi + R\Delta q + \int \frac{q}{C} dt = 0$$

При  $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta\Phi = \text{const}$

### Параметрический резонанс.

Пусть теперь  $C = \text{const}$ , а  $L$  скачком меняет два значения  $L_1 > L_2$ .

Обозначим соответствующие значения собственной частоты  $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C}$ ,  $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C}$ , а периоды собственных колебаний –  $T_1$  и  $T_2$ . Для простоты  $R = 0$ ;

1) ( $L_1 \rightarrow L_2$ ) Пусть в начальный момент  $L = L_1$ . Когда ток в катушке максимален  $I_{10}$ , а заряд конденсатора обращается в нуль, скачкообразно уменьшим  $L$  до  $L_2$ .  $\Delta\Phi = \text{const} \Rightarrow I_{20} = (L_1/L_2)I_{10}$ . С этого момента начнутся свободные колебания тока  $I = I_{20}\cos\omega_2 t$

2) ( $L_1 \leftarrow L_2$ ) Через время  $t = T_2/4$ , когда  $I = 0$ , увеличим  $L$  до  $L_1$ . Т.к. в этот момент ток не течет, амплитуда колебаний не изменится, а изменится только их частота.  $I = I_{20}\cos\omega_1 t$

Так будем поступать дальше, всякий раз, когда ток максимален уменьшать  $L$ , и всякий раз, когда ток обращается в нуль, увеличивать его до прежнего значения.  $I_{k0} = (L_1/L_2)^{(k-1)}I_{10}$

В результате амплитуда колебаний тока будет возрастать в геометрической прогрессии

$$A_0 = A_{10} \left[ 1 + \frac{L_1}{L_2} + \left( \frac{L_1}{L_2} \right)^2 + \dots \right]$$

несмотря на то, что в системе отсутствуют какие-либо источники тока или напряжений. Такая раскачка колебаний называется **параметрическим резонансом**.



### 53. Понятие об автоколебаниях. Обратная связь. Условия самовозбуждения.

#### Автоколебания. Обратная связь.

**Автоколебания** – это незатухающие колебания в диссипативной нелинейной системе, параметры которых (амплитуда и период) определяются свойствами только самой системы и в широких пределах не зависят от начального состояния системы.

Автоколебания возникают при наличии положительной *обратной связи*, приводящей к неустойчивости состояния равновесия.

**Обратная связь** – это воздействие результата какого-либо процесса на его протекание. Примером системы с обратной связью является усилитель с громкоговорителем. Если сигнал с громкоговорителя подать на микрофон, то может возникнуть самовозбуждение системы – появление и усиление случайных звуковых сигналов.

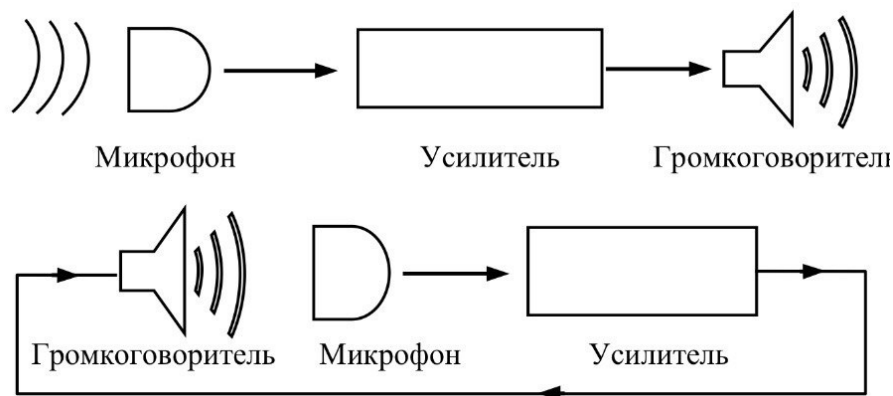


Рис. 30: Сверху исходная схема приема, усиления и воспроизведения звука; снизу включение обратной связи

#### Пример обратной связи. Генератор Ван-дер-Поля.

Примером системы, где реализуется положительная обратная связь и возникают автоколебания, является генератор Ван-дер-Поля, собранный на лампе-триоде.

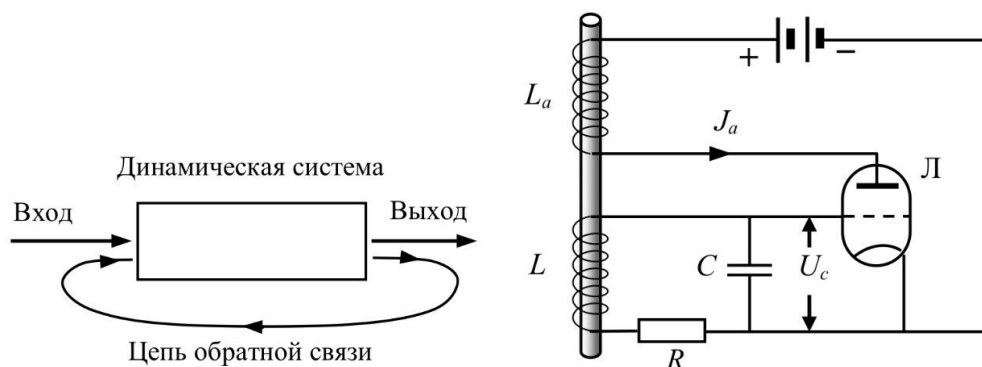


Рис. 31: Система с обратной связью и схема генератора Ван-дер-Поля.

Колебания в нем описываются уравнением относительно напряжения  $U_c$  на сетке:

$$\ddot{U}_c + 2(\gamma + \beta U_c^2)\dot{U}_c + \omega_0^2 U_c = 0 \quad (13)$$

Здесь используются обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, 2\gamma = \frac{RC - MS_0}{LC}, 2\beta = \frac{MS_2}{LC}$$

где  $M$  – коэффициент взаимной индукции.  $S_0$  и  $S_2$  – коэффициенты функции *крутизны сеточной характеристики*  $S(U_c) = dJ_a/dU_c$ , вблизи максимума при  $U_c = 0$  аппроксимированной параболой  $S = S_0 - S_2 U_c^2$ .

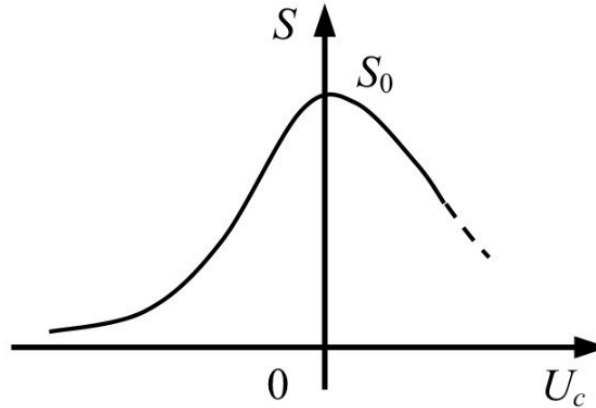


Рис. 32: Крутизна сеточной характеристики

Условие самовозбуждения –  $MS_0 > RC$ , то есть  $\gamma < 0$ , для этого необходимо  $M > 0$ . При этом возникает ЭДС индукции, которая создает ток в положительном направлении, увеличивая напряжение на конденсаторе  $U_c$ . В свою очередь, это вызывает дальнейший рост анодного тока  $J_a$  и последующий рост  $U_c$ .

В результате начинается раскачка колебаний, то есть развивается неустойчивость. Ограничение раскачки связано с тем, что при больших значениях  $U_c$  анодный ток перестаёт расти, и устанавливаются равновесные колебания.

## 54. Понятие о плазме. Дабаевский радиус. Плазменные колебания и плазменная частота.

### Понятие о плазме.

**Плазма** – это частично или полностью ионизованный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы.

На микроуровне плазма отличается от обычного нейтрального газа. Если в газе частицы почти свободны и взаимодействуют друг с другом в моменты столкновений, то в плазме частицы непрерывно взаимодействуют друг с другом благодаря дальнодействующим силам.

### Уравнения, описывающие плазму.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{E}, \mathbf{B}) ; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 ; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

### Квазинейтральность.

В плазме плотности положительных и отрицательных зарядов должны практически совпадать по величине. Это свойство называется **квазинейтральностью** плазмы. Отклонения от *квазинейтральности* приводят к возникновению сильных полей, которые быстро восстанавливают её.

Условие квазинейтральности:  $Zn_i = n_e$

Концентрация ионов –  $n_i$ , электронов –  $n_e$ , каждый ион отдаёт в плазму  $Z$  электронов.

### Дабаевский радиус.

Оценим параметры области, в которых может нарушаться квазинейтральность. Случай однократно ионизированной плазмы  $Z = 1$ .

Пусть в слое толщиной  $l$  и объемом  $V = Sl$  произошло разделение зарядов, причем все электроны собрались вблизи верхней плоскости, а ионы вблизи нижней.

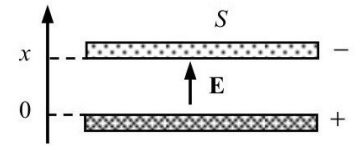
Возникают нескомпенсированные заряды поверхностной плотностью  $\sigma = neV/s = nel \Rightarrow$  возникает поле  $E = 4\pi\sigma = 4\pi nel \Rightarrow$  плотность энергии электрического поля  $w_E = \frac{E^2}{8\pi}$ . Эта энергия образуется за счет кинетической энергии  $w_T = nkT$  теплового движения электронов и ионов. В данной оценке рассматриваем разделение зарядов вдоль одного направления.

$$\text{ЗСЭ: } w_T = w_E \Rightarrow E = \sqrt{8\pi nkt} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{kT}{2\pi ne^2}} \Rightarrow r_D = l/2 = \sqrt{\frac{kT}{8\pi ne^2}}$$

Величина  $r_D$  называется **дебаевским радиусом** и указывает пространственный масштаб, на котором может происходить отклонении от квазинейтральности.

**Плазменные колебания и плазменная частота.**

Пусть в слое плазмы толщиной  $x$  произошло разделение зарядов: все электроны собрались вблизи верхней плоскости, а ионы – вблизи нижней. В сформировавшемся конденсаторе возникло электрическое поле  $E = 4\pi\sigma = -4\pi n e x$ .



( $\sigma$  – поверхностная плотность заряда положительно заряженной пластины)

Запишем уравнение движения электрона:

$$m\ddot{x} = eE \Rightarrow m\ddot{x} = -4\pi n e^2 x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega_p^2 x$$

Величина  $\omega_p = \sqrt{4\pi n e^2 / m}$  называется **плазменной частотой**.

Как видно из полученного уравнения, электроны совершают *гармонические колебания* относительно ионов с плазменной частотой. Эти колебания называют *плазменными*. Их амплитуда порядка *дебаевского радиуса*.

## 55. Диэлектрическая проницаемость плазмы. Закон дисперсии.

### Диэлектрическая проницаемость плазмы.

Пусть на плазму падает излучение – электромагнитная волна. Плазма представляет собой квазинейтральную смесь электронов и ионов. Масса иона во много больше электрона, поэтому в поле внешней ЭМ волны движутся главным образом электроны. Можно рассматривать движение электрона как движение в однородном электрическом поле волны, периодически меняющемся со временем ( $\vec{E} \parallel OX$ ):

$$E = E_0 \cos \omega t$$

Условие движения отдельного электрона:

$$m\ddot{x} = eE = eE_0 \cos \omega t \Rightarrow x = -\frac{eE_0}{m\omega^2} \cos \omega t = -\frac{eE}{m\omega^2}$$

В рассматриваемой ситуации электроны плазмы можно уподобить связанным зарядам в диэлектрике. Смещение  $x$  приводит к появлению дипольного момента электрона:

$$\vec{p} = e\vec{x} = -e^2\vec{E}/m\omega^2 \Rightarrow \mathbf{P} = n\mathbf{p} = -\frac{ne^2}{m\omega^2}\mathbf{E} = \alpha\mathbf{E}$$

$n$  - число электронов в единице объема плазмы.  $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$ ,  $\omega_p = \sqrt{4\pi ne^2/m}$  Получаем, что диэлектрическая проницаемость плазмы равна:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Диэлектрическая проницаемость плазмы оказывается меньше единицы:  $\varepsilon < 1$ .

### Закон дисперсии.

Частота  $\omega$  и волновое число  $k$  связаны соотношением:  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)$

Подставляя соотношение для диэлектрической проницаемости, получаем закон дисперсии:

$$\omega(k) = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}$$