1 Кинематика точки: траектория, скорость, ускорение (нормальное, тангенциальное)

Материальная точка - геометрическая точка, которой поставлена в соответствие масса m.

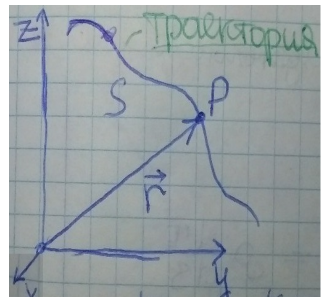


Рис. 1: Траектория

Траектория точки - годограф радиус-вектора $\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Скорость материальной точки $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = v\bar{\tau}$

$v = \sqrt{(\bar{v}, \bar{v})} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{ds}{dt}$

Ускорение материальной точки $\overline{W} = \frac{d\bar{v}}{t} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x(t)} \\ \ddot{y(t)} \\ \ddot{z(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix}$

Значение ускорения: $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$;
s- длина дуги $\bar{r}(s)$, $\rho-$ радиус кривизны траектории
Т.к. $\bar{v} = \dot{\bar{r}}(s) = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \bar{\tau}v \Rightarrow \overline{W} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(v\bar{\tau})}{dt} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}$; $W_\tau = \dot{v} = \frac{d^2s}{dt^2}$, $W_{\bar{n}} = \frac{v^2}{\rho}$;

2 Касательная, нормаль, бинормаль

- **Орт касательной**: Направлен в сторону увеличения длины дуги

$$\tau = \frac{d\overline{r}}{ds} = \frac{\bar{v}}{v}; \quad s = s(t); \quad (\overline{\tau}, \overline{\tau}) = 1$$

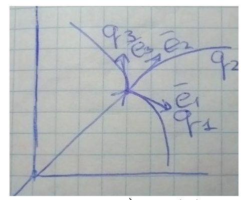
- **Орт нормали:** $\overline{n}$ - направление вектора кривизны. $\overline{n} \perp \overline{\tau}$

$$\text{Вектор кривизны: } \overline{k} = \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\overline{n}$$

- **Орт бинормали** $\overline{b} = [\overline{\tau}, \overline{n}]$

3 Криволин. координаты, коэфф. Ламе. Разложение скорости и ускорения по базису ортогональных криволинейных координат

$\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3)$;
Тогда q_1, q_2, q_3 - криволинейные координаты, если



1. q_1, q_2, q_3 находятся во взаимном положении (однозначном) с $\forall$ положением точки в системе отсчета
2. Фиксируем q_1^0, q_2^0, q_3^0. Пусть q_1 меняется. Тогда $r(q_1, q_2^0, q_3^0)$ прочертит кривую - **координатную линию**

$$H_i = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right|; i = \overline{1,3} \text{ - коэффициенты Ламе}$$

$$\text{В ПДСК } H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2};\ \bar{v} = \sum_{j=1}^{3} H_j \dot{q}_j \bar{e}_j;$$

$$W_k = (\overline{W}, \bar{e}_k) = \frac{1}{H_k}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\frac{v^2}{2})}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial(\frac{v^2}{2})}{\partial q_k}\right)$$

где $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - локальный базис криволинейных координат $\bar{e}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\frac{1}{H_i}$

4 Формулы Эйлера и Ривальса (распределение скоростей и ускорений в твердом теле)

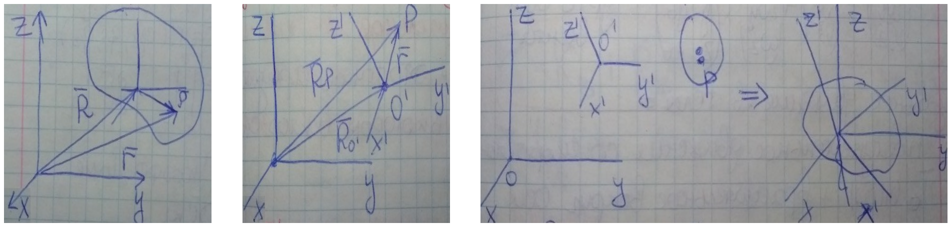
Теорема 1 (Эйлера о распределении скоростей точек). *При произвольном движении твердого тела в любой момент времени* $\exists! \bar{\omega}$: *скорости* $\forall$ *точек* A *и* B *выполнено:* $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}$

Доказательство. $\dot{\bar{r}} = \omega \times \bar{r} \Rightarrow \dot{\bar{r}}_B - \dot{\bar{r}}_A = \omega \times \bar{r}_B - \omega \times \bar{r}_A = \omega \times \overline{AB}$ □

Теорема 2 (Формула Ривальса). *При произвольном движении твердого тела в любой момент времени* $\exists! \bar{\omega}$: *скорости* $\forall$ *точек* A *и* B *выполнено:* $\exists! \bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$: $\forall$ *точек* A *и* B *выполнено:* $\overline{W}_B = \overline{W}_A + \varepsilon \times \overline{AB} + \left[\bar{\omega}; [\bar{\omega}, \overline{AB}]\right]$

Доказательство. $\frac{d(\text{Эйлер})}{dt} : \overline{W}_B = \overline{W}_A + \bar{\omega} \times \underbrace{(\dot{\bar{r}}_A - \dot{\bar{r}}_B)}_{\bar{v}_B - \bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{AB}} + \varepsilon \times \overline{AB}$

□



(a) Эйлер (b) Сл. движ. (c) Кориолис

5 Сложное движение. Сложение линейных и условных скоростей и ускорений

abs (absolute) - абсолютное, por (portable) - переносное, rel (relative) - отн. cor(Coriolis). $\bar{r} = \bar{r}^{abs} = \bar{r}^{por} + \bar{r}^{rel}$; $\bar{r}_O = \bar{r}^{por}$; $\bar{\rho} = \bar{r}^{rel} = \sum\limits_{k=1}^{3} y_k(t)\bar{e}(t)$

Теорема 3. $\bar{v}^{por} = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}$ *(как т. Эйлера);* $\bar{v}^{abs} = \bar{v}^{por} + \bar{v}^{rel}$;

Теорема 4 (Кориолиса)**.**

$\overline{W}^{abs} = \overline{W}^{por} + \overline{W}^{rel} + \overline{W}^{cor}$

$\overline{W}^{por} = \overline{W}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ *(как т. Ривальса но* $\bar{r} = \overline{AB}$; $\overline{W}_B = \overline{W}^{por}$)

$\overline{W}^{cor} = 2\bar{\omega}^{por} \times \bar{v}^{rel}$

И все вместе: $\overline{W}^{abs} = \underbrace{\overline{W}_{O'} + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})}_{\overline{W}^{por}} + \overline{W}^{rel} + \underbrace{2\bar{\omega}^{por} \times \bar{v}^{rel}}_{\overline{W}^{cor}}$

соотношения:$\bar{\omega}^{abs} = \bar{\omega}^{por} + \bar{\omega}^{rel}$; $\bar{\varepsilon}^{abs} = \bar{\varepsilon}^{por} + \bar{\varepsilon}^{rel} + \bar{\omega}^{por} \times \bar{\omega}^{rel}$

6 Кинематический винт. Разложение движения на поступательное и вращательное

Определение 1 (Кинематический винт)**.** - *это такое представление движения тела, в котором вектор скорости* $\bar{v}_c \parallel \bar{\omega}$, *т.е.* $\bar{v}_c \times \bar{\omega} = 0$

Т.к. $\forall i, j \in$ телу, выполнено, $\bar{v}_j = \bar{v}_i + \bar{\omega} \times \bar{r}_{ij}$ то $(\bar{v}_j, \bar{\omega}) = (\bar{v}_i, \bar{\omega})$. Инварианты: $\bar{\omega} = const$ и

$$\bar{v}_{min} = \frac{(\bar{v}_A, \bar{\omega})}{|\bar{\omega}|} = \bar{v}_c = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \overline{OC} = \alpha\bar{\omega}$$

$$\forall i \Rightarrow \begin{pmatrix} v_i^x \\ v_i^y \\ v_i^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0^x \\ v_0^y \\ v_0^z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^x \\ \omega^y \\ \omega^z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}; \text{ ось винта: } \frac{v_i^x}{\omega^x} = \frac{v_i^y}{\omega^y} = \frac{v_i^z}{\omega^z}$$

Поступательное движение в твердом теле = поступательное движение со скоростью $\bar{v}_o(\parallel \bar{\omega})$ + вращательное движение вокруг оси винта $(\parallel \bar{\omega})$

7 Определение кинетического момента, кинетической энергии. Формулы преобразования кин. момента при замене полюса, разложение кин. энергии на энергию движения ц. масс и вращательную

Определение 2 (МИ/КМ). *Кинетическим моментом (моментом импульса) относительно точки O с радиус вектором $\bar{r}_O$ называется:*

$$\overline{K}_O = \int\limits_S (\bar{r} - \bar{r}_O) \times \bar{v} dm; \quad \left(\overline{K}_O = \sum_{i=1}^{N} m_i \Big[(\bar{r}_i - \bar{r}_O) \times \bar{v}_i \Big] \right)$$

Определение 3 (Кин. энергия). *Кинетической энергией называется:*

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_S (\bar{v}, \bar{v}) dm; \quad \left(T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\bar{v}, \bar{v}) \right)$$

Т.к. $\bar{r} = \frac{1}{m} \int\limits_S \bar{r} dm,\ m = \int\limits_S dm;\ \ \overline{K}_A = \overline{K}_B + \overline{R}_{AB} \times m_\Sigma \bar{v}_C$

З. изм. МИ: $\boxed{\dot{\overline{K}}_O = \overline{M}^{\text{внеш}} - m\big[\overline{V}_O, \overline{V}_C\big]} \xrightarrow{\overline{V}_O = 0 \text{ or } O \equiv C}$ ЗСМИ: $\boxed{\dot{\overline{K}}_O = \overline{M}^{\text{внеш}}}$

Теорема 5 (Кенига). *Кинетическая энергия = кин. энергия материальной точки, помещенной в центр масс и кин энергии движения системы относительно центра масс*

$$T = \frac{m v_c^2}{2} + T_{rel} + \Big(\bar{v}_\delta; m_\Sigma (\bar{r}_C - \bar{v}_A) \Big)$$

Для твердого тела: $\boxed{T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}$, *(где I относительно оси $\parallel \bar{\omega}$ и проходящей через центр масс)*

8 Основные законы динамики. Законы Ньютона, закон изменения кин. момента, ЗСЭ.

$\overline{F} = \overline{F}^e + \overline{F}^i$, где $\overline{F}^e$ - внешние силы. $\overline{F}^i$ -силы внутри системы. Работа сил: $\delta A = (\overline{F}, \delta \bar{r})$. $A_{12} = T_2 - T_1;\ N = \frac{\delta A}{\delta t}$ - мощность.

$\overline{M} = \bar{r} \times \overline{F}$ - момент силы. $\bar{r}$ проведен от оси вращения до точки приложения силы. **2 Закон Ньютона:** $\overline{F} = m\overline{W}$, $\dot{p} = \overline{F}^e$, где $\overline{F}^e$ – $\sum$ внешняя сила.

Теорема 6 (о движении центра масс:)**.** $m\dot{\bar{v}}_C = \overline{F}^e$

Теорема 7 (Закон изменения кин. момента)**.** $\dot{\overline{K}}_0 = -m\bar{v}_0 \times \bar{v}_C + \overline{M}_0^e$ *где* $\overline{M}_0^e$ *- момент внешних сил*

Теорема 8 (ЗСЭ)**.** *Полная механическая энергия системы не изменяется во времени, если все действующие силы потенциальны, а их потенциал не зависит от времени*

9 Законы динамики для НСО. Кориолисовы и переносные силы инерции

$$\overline{W}_p^{abs} = \overline{W}_p^{por} + \overline{W}_p^{rel} + \overline{W}_p^{cor} \quad \Rightarrow \quad m\overline{W}_{rel} = \overline{F} + \overline{F}_{por} + \overline{F}_{cor}$$

$$\overline{F}_{por} = -m\overline{W}_{por};\ \overline{F}_{cor} = -2m\bar{\omega}^{por} \times \bar{v}^{rel}$$

$$\dot{\overline{K}}_A = \overline{M}_F + \overline{M}_{per} + \overline{M}_{cor}$$

$$\overline{W}_{por} = \overline{W}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})$$

10 Динамика систем переменного состава. Закон изменения импульса. Закон изменения кин. момента

p_1 -уходит. p_2 - приходит. $\Delta\bar{p} = \Delta\bar{p} - \Delta\bar{p}_1 + \Delta\bar{p}_2$;
$m = m_0 - m_1 + m_2$; $\dot{\overline{K}}_0 = \overline{M}_0 - \overline{M}_1 + \overline{M}_2$;

$$\dot{\bar{p}} = \overline{F} - \overline{F}_1 + \overline{F}_2;\ \ \overline{F}_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p_1}{\Delta t};\ \ \overline{F}_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p_2}{\Delta t}$$

Где $\bar{u}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}$; $\bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \bar{v}$ - абсолютные скорости

$\boxed{m\dot{\bar{v}} = \overline{F} - \dot{m}_1(\bar{v}_1 - \bar{v}) + \dot{m}_2(\bar{v}_2 - \bar{v});}$ - Уравнение Мещерского

Тогда при $\overline{F}_{\text{внеш}} = 0$, $m_2 = const$; и после интегрирования получим:

$\boxed{v(t) = v_0 + u \ln \dfrac{m_0}{m(t)}}$ - формула Циолковского

11 Движение точки в центральном поле. Интеграл площадей, интеграл энергии

Закон сохранения кин. момента $\overline{K}_0 = const$ $\overline{F} = f(r)\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$; $f = f(t, \bar{r}, \dot{r})$; $\rho^2\dot{\varphi} = c$; $\bar{c} = \bar{r} \times \bar{v}$; - приведенный момент импульса

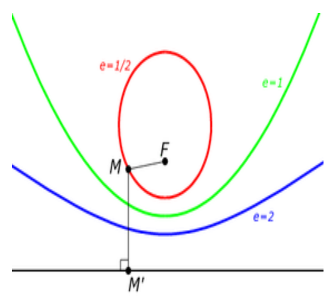
$$\textbf{Интеграл площадей:}\ \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}\frac{K_0}{m} = const$$

$$\textbf{Уравнение Бине:}\ u'' + u = -\frac{f}{mc^2u^2} \Rightarrow \dot{r} = -c\dot{u},\ \text{где}\ u = \frac{1}{r}$$

Рассмотрим поля тяготения $f = -\frac{\gamma M}{r^2} = -\frac{\mu}{r^2}$
Тогда ЗСЭ выполнимо: $\Rightarrow v^2 - 2\frac{\mu}{r} = const$

$$u'' + u = \frac{\mu}{c^2}; \Rightarrow u = \frac{\mu}{c^2} + A\cos(\varphi + \varphi_0) \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi + \varphi_0)}$$

Где $\boxed{p = \dfrac{\mu}{c^2}; e = \dfrac{Ac^2}{\mu} \geq 0}$ - эксцентриситет.



Тогда возможны случаи:

1. e=0 - окр радиуса p
2. 0<e<1 - эллипс
3. e=1 - парабола
4. e>1 - гипербола

Теорема 9 (Третий закон Кеплера).

$$\frac{T^2}{a^3} = const$$