SRT 创新计划专项结题报告
倒立摆控制

刘锦坤

2024 年 5 月 15 日

目录

1 摘要

在本次 SRT 项目中主要完成了利用 PD 控制器对倒立摆进行控制。但是在传统的 PD 控制中，PD 控制的各个参数往往难以确定，需要大量的时间和精力调节。而本次 SRT 中完成了利用模块叠加法从理论上计算 PD 控制器的参数。为此，首先通过第二类 Lagrange 方程建立了倒立摆的动力学模型，然后分析了倒立摆在 $\theta = 0$ 下的本征模块。随后设计 PD 控制器，并且利用模块叠加方法确定了 PD 控制器参数的稳定域，解释了 PD 控制中各个参数的来源。

2 PD 控制参数的理论计算

在本次 SRT 项目中，选用 PD 方法来完成对倒立摆的控制，可以建立动力学模型，对 PD 控制器的参数进行理论计算。

2.1 动力学方程

系统动力学模型示意图如图所示：

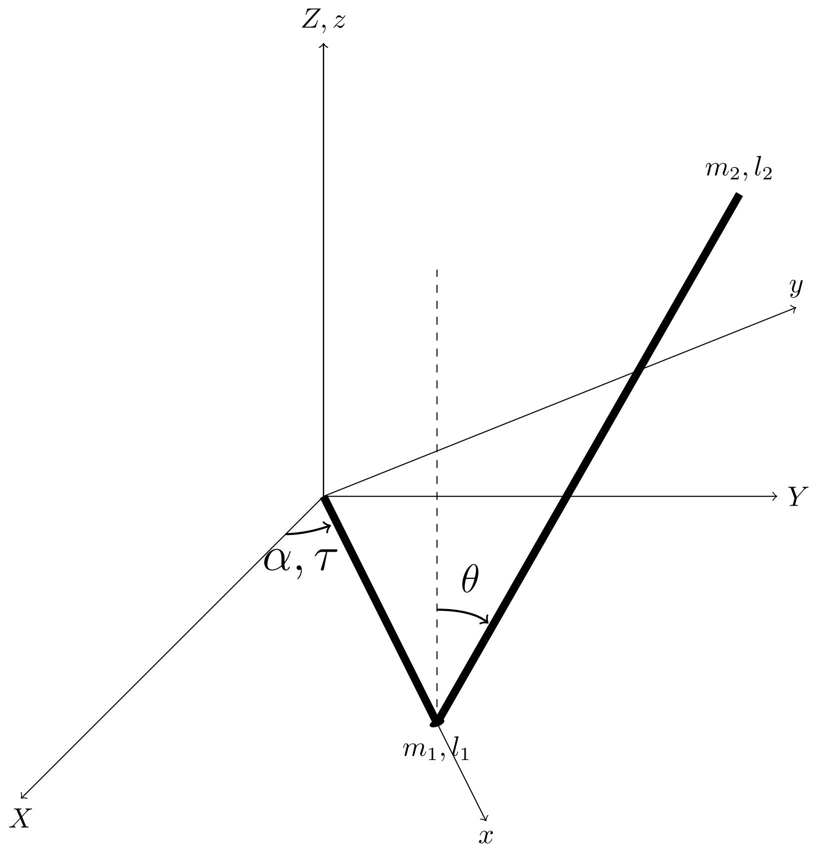

图 1: 倒立摆示意图

XYZ 坐标系为固定坐标系，而 xyz 为随着水平杆转动的坐标系。记水平杆的质量 m_1，长度 l_1，树枝干的质量 m_2，长度 l_2，水平杆的转动角度为 α，竖直杆的转动角度 θ，假设两杆的质量都是均匀分布。电机的驱动力矩为 τ，重力加速度为 g，下面从第二类 Lagrange 方程出发推倒倒立摆的动力学方程。

水平杆的动能为

$$T_1 = \frac{1}{6}m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \tag{1}$$

竖直杆的动能为为质心动能和相对之心动能之和，其质心速度为：

$$\vec{v} = -\frac{1}{2}l_2\dot{\alpha}sin\theta\hat{x} + (\dot{\alpha}l_1 + \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}cos\theta)\hat{y} - \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}sin\theta\hat{z} \tag{2}$$

其中 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 为 xyz 坐标系各个方向的单位矢量，故其质心动能为

$$\begin{aligned} T_{2c} &= \frac{1}{2}m_2\vec{v}^2 \\ &= \frac{1}{2}m_2{l_1}^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\alpha}\dot{\theta}l_1 l_2 cos\theta + \frac{1}{8}m_2{l_2}^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}m_2{l_2}^2\dot{\alpha}^2 sin^2\theta \end{aligned} \tag{3}$$

而竖直杆的相对质心动能为转动贡献，即为

$$T_{2r} = \frac{1}{24}m_2 l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}m_2 l_2^2\dot{\alpha}^2 sin^2\theta \tag{4}$$

系统势能为

$$V = \frac{1}{2}m_2 g l_2 cos\theta \tag{5}$$

系统的 Lagrange 量为

$$\begin{aligned} L &= T - V = T_1 + T_{2c} + T_{2r} - V \\ &= \frac{1}{6}m_1 l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2{l_1}^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\alpha}\dot{\theta}l_1 l_2 cos\theta + \frac{1}{8}m_2{l_2}^2\dot{\theta}^2 \\ &+ \frac{1}{8}m_2{l_2}^2\dot{\alpha}^2 sin^2\theta + \frac{1}{24}m_2 l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}m_2 l_2^2\dot{\alpha}^2 sin^2\theta - \frac{1}{2}m_2 g l_2 cos\theta \end{aligned} \tag{6}$$

保留到二阶小量，可以得到：

$$L = \frac{1}{6}m_1 l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2{l_1}^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\alpha}\dot{\theta}l_1 l_2 + \frac{1}{8}m_2{l_2}^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}m_2 l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m_2 g l_2\theta^2 \tag{7}$$

带入第二类 Lagrange 方程，得到

$$\begin{cases} \frac{1}{3}m_1 l_1^2\ddot{\alpha} + m_2 l_1^2\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\ddot{\theta} = \tau \\ \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\ddot{\alpha} + \frac{1}{3}m_2 l_2^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_2 g l_2\theta = 0 \end{cases} \tag{8}$$

记 $\boldsymbol{q} = [\alpha, \theta]^T$，有

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\tau} \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 & \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \\ \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 & \frac{1}{3}m_2 l_2^2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}m_2 g l_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

这就是倒立摆的动力学方程。

2.2 本征模块

我们先分析系统的本征模块，设其一个本征模块为 $\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{\eta_i}e^{\lambda_i t}$，代入方程 $\boldsymbol{M\ddot{q}}+\boldsymbol{Kq}=0$ 得到：

$$\det(\lambda_i^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{\eta_i}=0 \tag{11}$$

解特征方程得到其特征值

$$\lambda_1=0,\lambda_2=\pm\sqrt{\frac{6(m_1+3m_2)g}{(4m_1+3m_2)l_2}} \tag{12}$$

对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2] \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(m_1+3m_2)l_1^2}}\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\sqrt{\frac{12(m_1+3m_2)}{m_2(4m_1+3m_2)l_2^2}}\begin{bmatrix}-\frac{3m_2l_2}{2(m_1+3m_2)l_1}\\ 1\end{bmatrix} \tag{14}$$

由于存在一个 λ_2 的实部大于 0，这表明倒立摆的本征模块不是稳定的，因此需要进行控制。

2.3 PD 控制器

接下来，我们用模块叠加方法来设计 PD 控制器[1]，我们实际可调节输入为 τ，控制变量为 θ,α，因此实际上这是一个欠驱动问题，先用模块分解法将方程 (9) 进行处理，设 $\boldsymbol{q(t)}=\boldsymbol{\eta s(t)},\boldsymbol{s(t)}=[s_1(t),s_2(t)]^T$ 带入方程 (9)，再左乘 $\boldsymbol{\eta}^T$，得到

$$\begin{cases}\ddot{s_1}-\eta_{11}\tau=0\\ \ddot{s_2}-\lambda_2^2s_2-\eta_{21}\tau=0\end{cases} \tag{15}$$

且有

$$\begin{cases}\alpha(t)=\eta_{11}s_1(t)+\eta_{21}s_2(t)\\ \theta(t)=\eta_{21}s_2(t)\end{cases} \tag{16}$$

设置控制器为

$$\eta_{21}\tau=-k_1s_1-k_2s_2-c_1\dot{s_1}-c_2\dot{s_2}-\lambda_2^2\dot{s_2} \tag{17}$$

并记 $\mu=\eta_{11}/\eta_{21}$，代入方程 (15) 得到

$$\begin{cases}\ddot{s_1}-\mu\ddot{s_2}+\mu\lambda_2^2s_s=0\\ \ddot{s_2}+k_2s_2+c_2\dot{s_2}+k_1s_1+c_1\dot{s_1}=0\end{cases} \tag{18}$$

写为矩阵形式

$$\boldsymbol{M_s\ddot{s}}+\boldsymbol{C_s\dot{s}}+\boldsymbol{K_s s}=0 \tag{19}$$

[1]参考了赵治华老师《动力学于控制》课程讲义

其中

$$\boldsymbol{M_s}=\begin{bmatrix}1 & -\mu\\ 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{C_s}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ c_1 & c_2\end{bmatrix},\boldsymbol{K_s}=\begin{bmatrix}0 & \mu\lambda_2^2\\ k_1 & k_2\end{bmatrix} \tag{20}$$

我们期望这样的控制器能够使得系统稳定，因此我们需要对于新的模块 $\boldsymbol{s(t)}=\boldsymbol{\xi}e^{\beta_i t}$ 所有的 β_i 的实部均小于 0. 因此我们需要满足

$$\det(\beta^2\boldsymbol{M_s}+\beta\boldsymbol{C_s}+\boldsymbol{K_s})=0 \tag{21}$$

的 β_i 的实部全部小于 0，这样我们就可以得到合适的 k_1,k_2,c_1,c_2。由于我们知道在临界阻尼时，系统的衰减速度最快，因此我们可以设定上述特征方程的解是两个负的重实根 β_1,β_2，即

$$(\beta-\beta_1)^2(\beta-\beta_2)^2=0 \tag{22}$$

对比方程 (21)，(22) 可以得到

$$\begin{cases} k_1=-\frac{\beta_1^2\beta_2^2}{\mu\lambda_2^2}\\ c_1=\frac{2\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\mu\lambda_2^2}\\ k_2=\beta_1^2+\beta_2^2+4\beta_1\beta_2+\frac{\beta_1^2\beta_2^2}{\lambda_2^2}\\ c_2=-2(\beta_1+\beta_2)-2\frac{2\beta_1\beta_2}{\lambda_2^2}\end{cases} \tag{23}$$

利用方程

$$\begin{aligned}\tau&=-\frac{1}{\eta_{21}}([k_1,k_2+\lambda_2^2]\boldsymbol{s}+[c_1,c_2]\dot{\boldsymbol{s}}\\ &=-\frac{1}{\eta_{21}}([k_1,k_2+\lambda_2^2]\boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{q}+[c_1,c_2]\boldsymbol{\eta}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}})\end{aligned} \tag{24}$$

就能得到 PD 控制器的参数 $K_{p\alpha},K_{p\theta},K_{d\alpha},K_{d\theta}$

$$\begin{cases}\boldsymbol{K_p}=[K_{p\alpha},K_{p\theta}]=-\frac{1}{\eta_{21}}[k_1,k_2+\lambda_2^2]\boldsymbol{\eta}^{-1}\\ \boldsymbol{K_d}=[K_{d\alpha},K_{d\theta}]=-\frac{1}{\eta_{21}}[c_1,c_2]\boldsymbol{\eta}^{-1}\end{cases} \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ 可以算出为

$$\boldsymbol{\eta}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{l_1^2(m_1+3m_2)}{\sqrt{3}\sqrt{l_1^2(m_1+3m_2)}} & \frac{\sqrt{3}l_1l_2m_2}{2\sqrt{l_1^2(m_1+3m_2)}}\\ 0 & \frac{l_2^2m_2(4m_1+3m_2)}{2\sqrt{3}(m_1+3m_2)\sqrt{\frac{l_2^2m_2(4m_1+3m_2)}{m_1+3m_2}}}\end{bmatrix} \tag{26}$$

至此，我们就完成了倒立摆的 PD 控制参数的理论计算，只要我们选定两个负实数根 β_1,β_2，就能计算得到合适的 PD 控制参数使得倒立摆在 $\theta=0$ 稳定。

3 基于 Simulink 的控制及理论验证

3.1 Simulink 程序说明

如图所示的 Simulink 程序成功的完成了对倒立摆的控制：

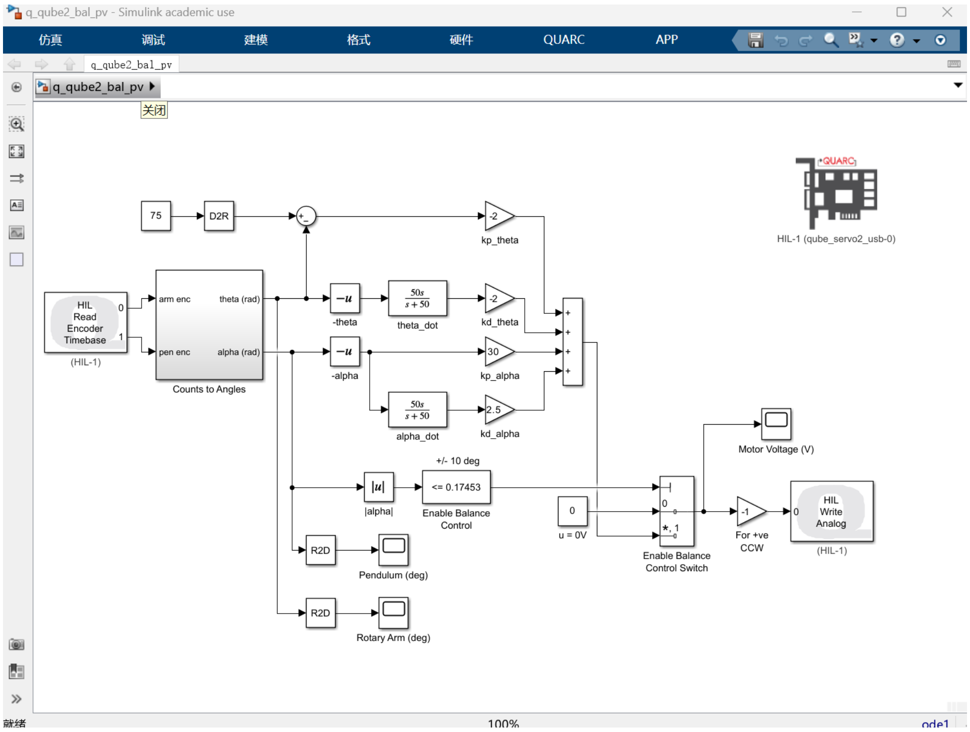

图 2: Simulink 模型

程序在 $|\theta| < 10^\circ$ 时启动 PD 控制，中从倒立摆的 Encoder 中读取得到 α, θ，并由传递函数 $\frac{50s}{s+50}$ 滤波后得到 $\dot{\alpha}, \dot{\theta}$，然后经过 PD 控制器得到 τ，作为倒立摆的输入，实现对倒立摆的倒立控制。

3.2 PD 参数的理论解释

注意到在 Simulink 程序中，PD 控制参数中的 $K_{p\theta}, K_{d\theta}$ 两项为负，而 $K_{p\alpha}, K_{d\alpha}$ 两项为正，这个符号特性并不是偶然的，事实上这时方程 (23) 的结果，在方程 (23) 中可以看出，$k_1, c_1 < 0$ 而 $k_2, c_2 > 0$，因此经过方程 (25) 的计算，$K_{p\theta}, K_{d\theta}$ 两项为负，而 $K_{p\alpha}, K_{d\alpha}$ 两项为正。

4 结论

本次 SRT 项目中，成功的利用模块叠加法计算了 PD 控制器的参数。也在 Simulink 程序中成功的验证了计算得到的 PD 控制器的参数的正确性，实现了对倒立摆的控制。

值得注意的是，模块叠加法的思想是将一个复杂的系统分解为多个简单的模块，这其实是振动理论中简正模块的思想。这种方法也可以用于分析其他的控制问题，其基本思路如下：

1. 建立系统的动力学模型，并且计算得到系统的动力学方程，在控制稳定点附近进行线性化

2. 计算线性化后的动力学方程的特征方程，得到系统的本征模块 $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{\eta}(t)e^{\lambda t}$

3. 添加控制器后将系统进行本征模块的分解，选择新的特征方程的解（这里选择了两个负实数重根），反解得控制器的参数。

这样通过理论计算可以得到控制器的参数，再结合实验的微调，可以大大减少调节的时间和精力。