



水力机械调节系统二

樊红刚 李光浩

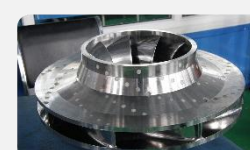
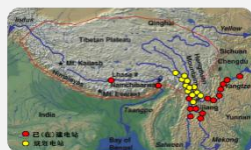
流体机械及工程研究所

办公室：新水利馆230A

电话：62794297

邮箱: fanhg@tsinghua.edu.cn

lgh21@mails.tsinghua.edu.cn





➤ 拉普拉斯变换

💧 把时域上的函数转换成复数域上的函数，简化系统分析难度

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad s = \sigma + j\omega$$

线性叠加性质 $\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$

微分定理 $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$

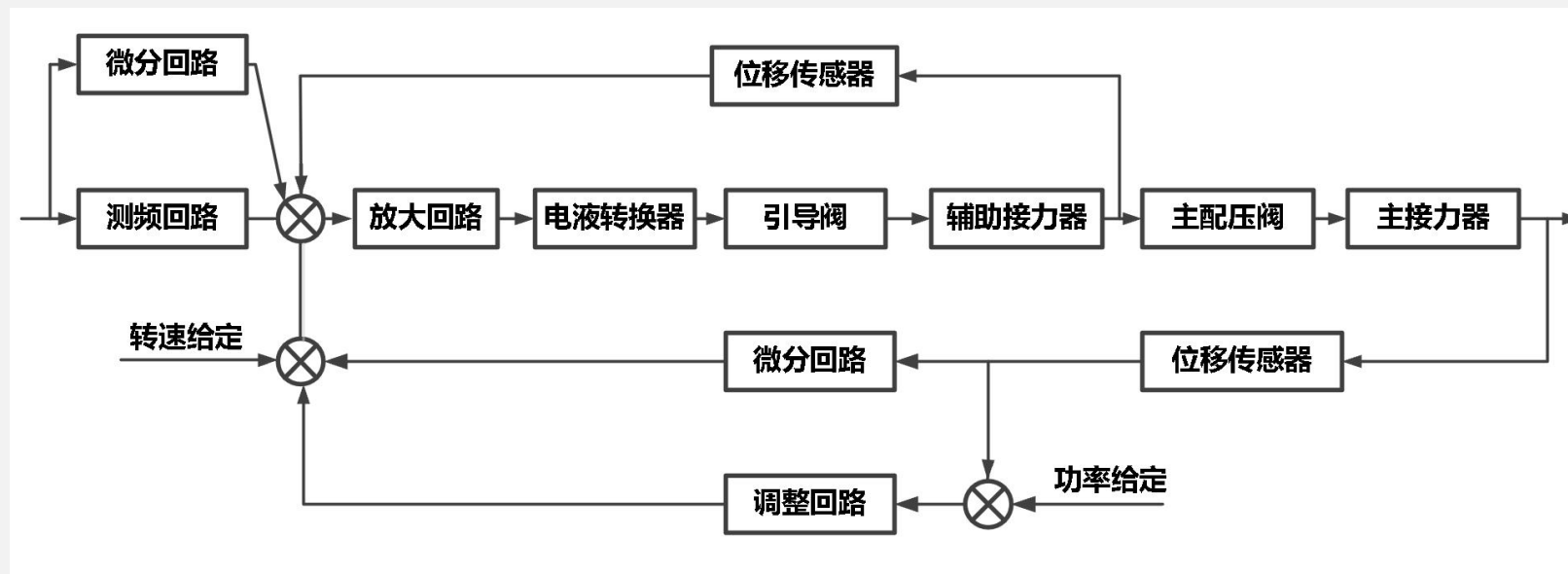
积分定理 $\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$

卷积定理 $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$

原 函 数	拉普拉斯变换
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$
$e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$



- ◆ 电气液压型调速与机械液压型调速器类似均属于**模拟调速器**
- ◆ 除类似的机械液压部分之外，还包括机械位移和电量之间的**转换元件**及**代替机械元件的一些电模拟元件**，如**测频回路**，**频率微分回路**，**暂态反馈**和**永态反馈回路**。



➤ 频率测量回路

用电气线路进行测速或测频的方法很多，国内有**LC永磁机测频回路**及**利用发电机残压测频回路**。不管用何种方法进行测频，其**输入的频率和输出的电压**之间表现出来的特性都可以用以下形式的增量方程来描述

$$\Delta u_f = K_{f0} \Delta f$$

Δu_f 测频回路输出电压的增量值

Δf 为其输入的频率增量值

K_{f0} 为额定转速（频率）附近的放大系数



取频率变化100%额定频率时的输出电压为基准值

$$\frac{\Delta u_f}{u_{f0}} = \frac{K_{f0} \Delta f}{K_{f0} f_r}$$

上式为测频回路的动态方程
该环节的传递函数为：

$$\frac{\eta_f(s)}{x(s)} = 1$$

与飞摆测频时的传递函数完全相同

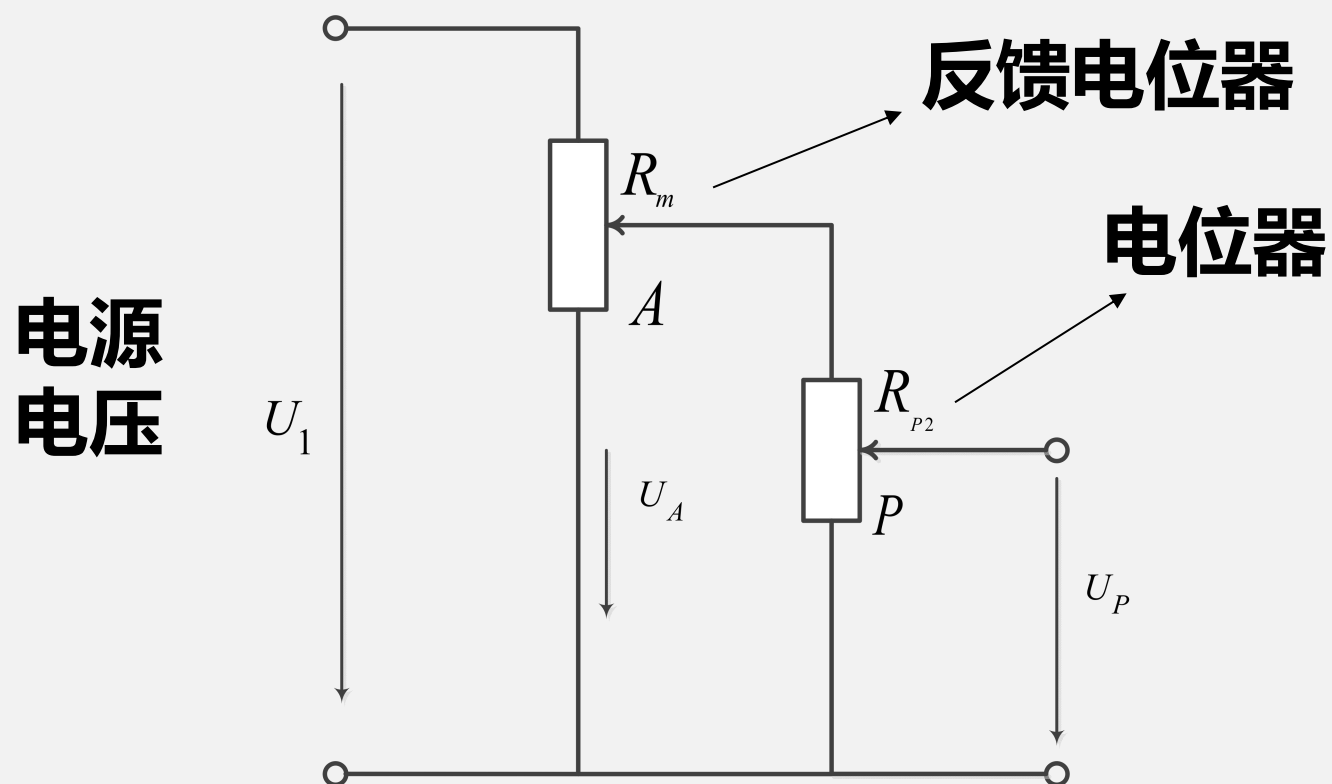
$$\eta_1(s) / x(s) = 1$$

$$\eta_f = \Delta u_f / u_{f0}, x = \Delta f / f_r$$



➤ 永态反馈回路

基本的永态反馈回路由**位移—电压变送器**及**压阻元件**组成。



动点A由接力器活塞位移决定

$$u_A = K_p \cdot Y$$

K_p — 永态反馈电位器的传递系数

$$u_p = K_p \cdot K_{Ap} \cdot Y \quad K_{Ap} \text{ 分压系数}$$

在稳态点附近可得增量方程

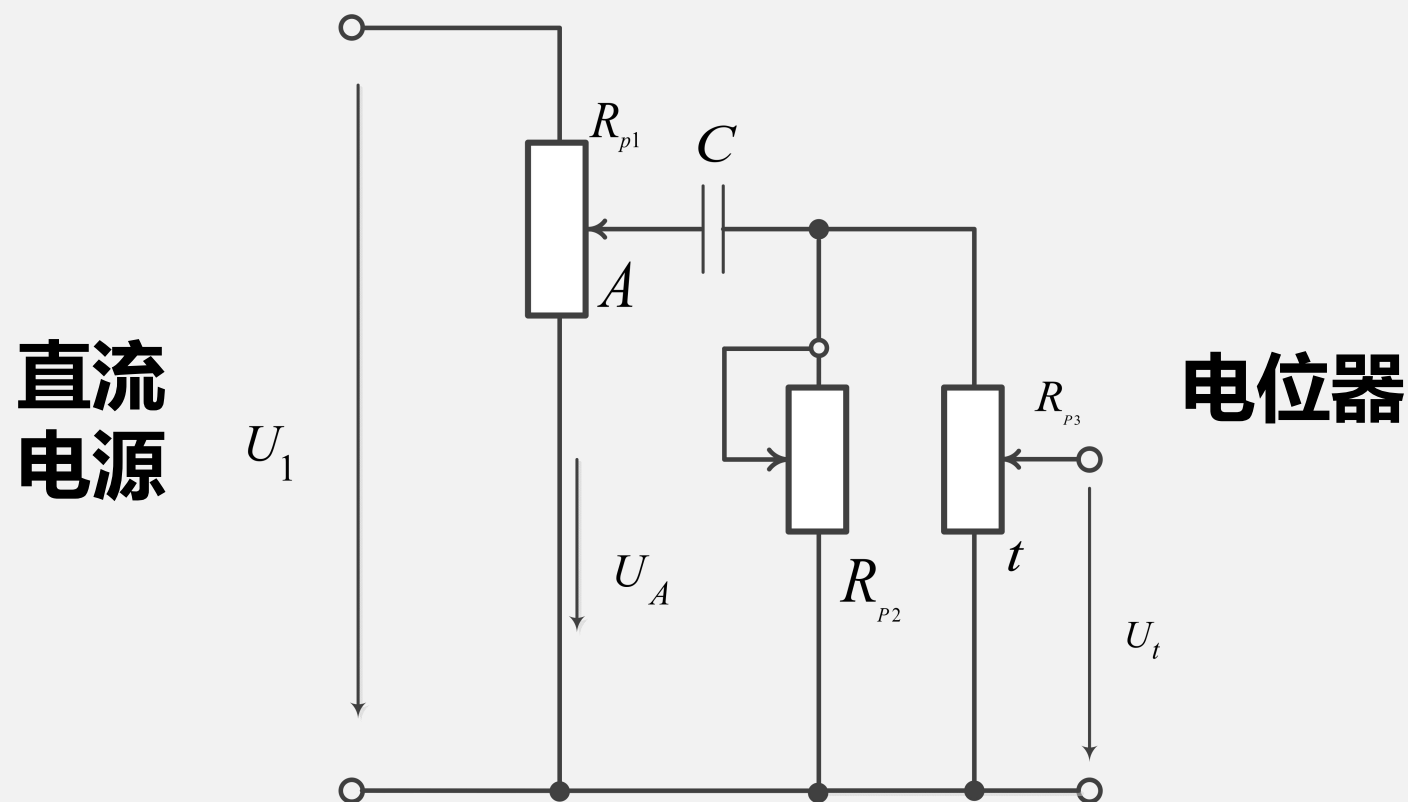
$$\Delta u_p = K_p \cdot K_{Ap} \cdot \Delta Y$$

永态反馈电路运动方程式 $\eta_p = b_p y$

$$b_p = K_{Ap} \cdot K_p \cdot Y_M / u_{f0}, \quad \eta_p = \Delta u_p / u_{f0}$$



- 暂态反馈回路概述及其动态方程
基本的暂态反馈回路，即**RC实际微分回路**



动点A由继电器活塞位移决定

$$u_A(s) = K_t \cdot Y(s) \quad K_t \text{ 传递系数}$$

$$u_A(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + R I(s)$$

$$R = R_{p2} R_{p3} / (R_{p2} + R_{p3})$$

$$u_t(s) = K_{At} \cdot R \cdot I(s)$$

↓
 R_{p3} 的分压系数

$$\frac{\eta_t(s)}{y(s)} = \frac{b_t T_d s}{1 + T_d s}$$

$$\eta_t(s) = \Delta u_t(s) / u_{f0}(s), \quad y(s) = \Delta Y(s) / Y_M(s)$$

$$b_t = \frac{K_{At} K_t Y_M}{u_{f0}} \quad T_d = RC$$

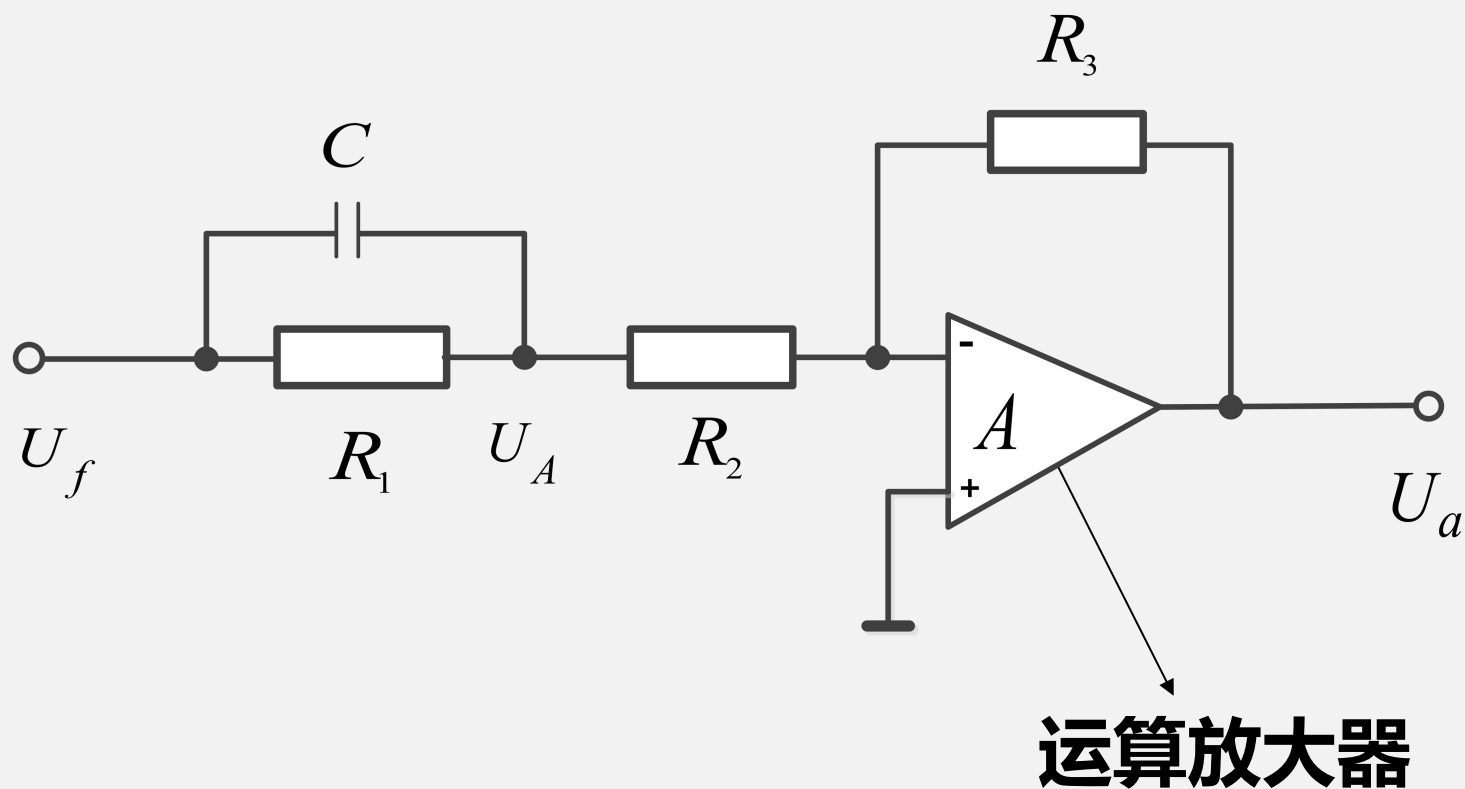
$$\frac{z(s)}{y(s)} = \frac{b_t T_d s}{1 + T_d s}$$

两个物理性质完全不同的系统，却具有完全相同的传递函数，即具有相同形式的微分方程，称为相似系统。



➤ 频率微分回路

电液调速器中很容易引入**频率微分回路**，实现**PID调节**。





$$\frac{u_a(s)}{u_f(s)} = \frac{u_A(s) \cdot R_3}{u_f(s) \cdot R_2}$$

流过 R_2 和 R_3 的电流近似相等 $u_a / R_3 = u_A / R_2$

$$\frac{u_A(s)}{u_f(s)} = \frac{R_2}{\frac{R_1 \frac{1}{Cs}}{R_1 + \frac{1}{Cs}} + R_2} = \frac{R_2 (R_1 Cs + 1)}{R_1 + R_2 + R_1 \cdot R_2 Cs}$$

$$T_n = R_1 C \quad \text{为加速时间常数}$$

$$T'_n = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \quad \text{为惯性时间常数}$$

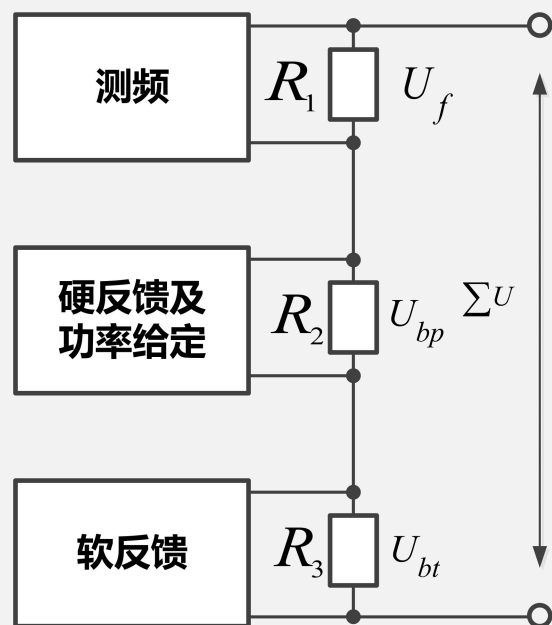
$$R_1 + R_2 = R_3 \quad \frac{u_a(s)}{u_f(s)} = \frac{T_n s + 1}{T'_n s + 1}$$

频率微分环节输出频率的**比例加微分**信号，由调节原理可知，它可起到**超前环节**的作用，选取适当的**加速时间常数**可缩短调节过程，改善动态品质，扩大系统稳定域

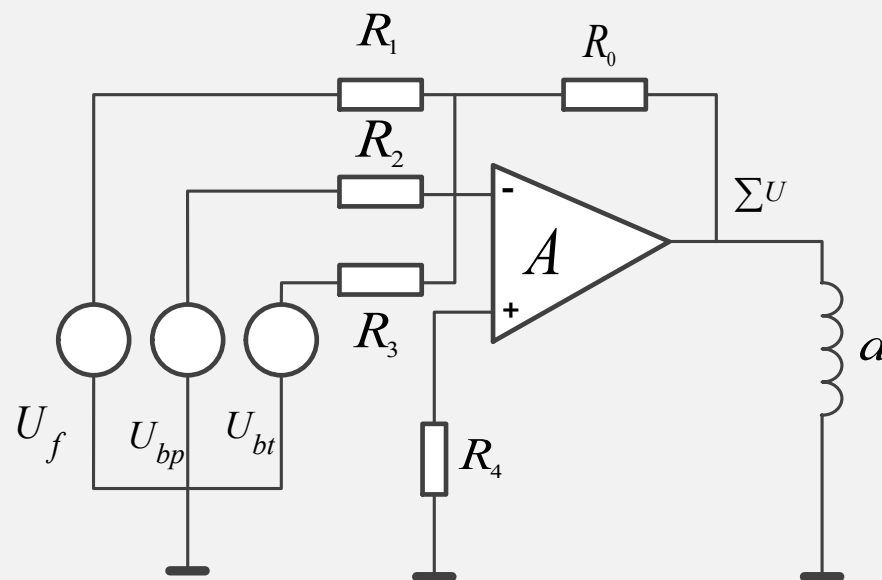


➤ 信号综合放大回路

目前电液调速器中多采用**直流信号**,信号综合方式有**串联**和**并联**两种。



串联回路



并联回路

串联综合回路中，为**消除在综合时信号源内阻的不利影响**，各信号的输出端，分别**并联电阻**，当它们的阻值与放大器的阻抗相比很小时，综合信号为：

$$\sum u = u_f + u_{bp} + u_{bt}$$

并联综合回路中，利用**运算放大器**进行加法运算并对信号进行放大。经综合放大器后的信号为：

$$\sum u = -\left(\frac{R_0}{R_1}u_f + \frac{R_0}{R_2}u_{bp} + \frac{R_0}{R_3}u_{bt}\right)$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R \text{ 时}$$

$$\sum u = -(u_f + u_{bp} + u_{bt}) \frac{R_0}{R}$$

$$= -K(u_f + u_{bp} + u_{bt})$$

$$R = R_0 \text{ 时} \quad \sum u = -(u_f + u_{bp} + u_{bt})$$

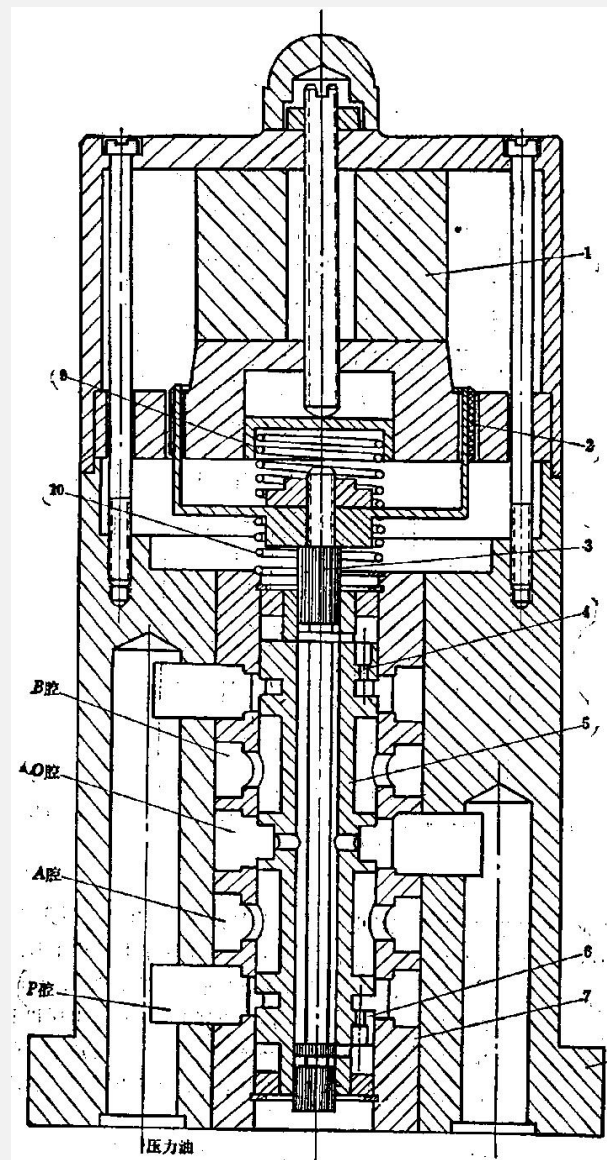
并联综合回路灵活、方便备用通道多且放大系数稳定，信号间相互影响小等优点被较多采用。为克服零点漂移现象，放大器多采用直流差动放大器回路。



➤ 电液伺服阀

💧 电液伺服阀是将电气信号转换为液压信号的元件，以电信号作为输入量，以具有一定压力的流量信号作为输出量的元件。

- | | |
|----------|-----------|
| 1 - 磁钢 | 2 - 工作线阀 |
| 3 - 一级阀芯 | 4 - 固定节流孔 |
| 5 - 二级阀芯 | 6 - 固定节流孔 |
| 7 - 阀套 | 8 - 阀体 |
| 9 - 上弹簧 | 10 - 下弹簧 |





略去一级阀芯和工作圈的质量及液体摩阻的影响，有

$$\Delta S_f = K_f \cdot \Delta U_A$$

ΔS_f ——控制套或第一级阀芯的位移

K_f ——电压位移传递系数

ΔU_A ——综合放大元件的输出电压

将上述量用相对值表示，则

$$\frac{\Delta S_f}{S_{f \max}} = K_f \frac{\Delta U_A}{S_{f \max}} \cdot \frac{U_B}{U_B}$$



$$\sigma_f = \frac{\Delta S_f}{S_{f \max}}$$

$$G_f = K_f \cdot \frac{U_B}{S_{f \max}}$$

$$u_A = \frac{\Delta U_A}{U_B}$$

一级阀芯和二级阀芯之间的液压放大部分的运动方程

$$T_{st} \frac{d\eta}{dt} = \sigma$$

σ 径向排油口的实际相对开度，既受控制套（亦即一级阀芯）位移和二级阀芯位移的控制。

$$\sigma = \sigma_f - \eta$$

$$T_{st} \frac{d\eta}{dt} + \eta = \sigma_f$$

电液伺服阀的运动方程式为：

$$T_{st} \frac{d\eta}{dt} + \eta = G_f \cdot u_A$$

T_{st} —— 电液伺服阀的时间常数

η —— 二级阀芯的相对位移量, 也是电液伺服阀的相对开口

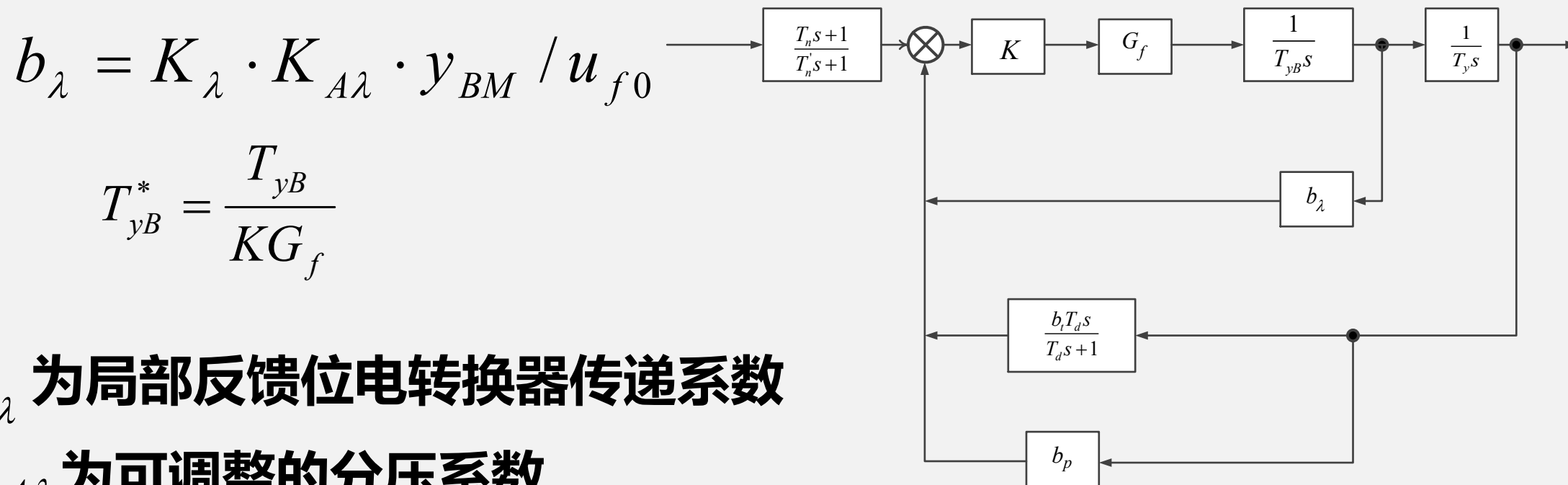
电液伺服阀的传递函数为 $\frac{\eta(s)}{u_A(s)} = \frac{G_f}{T_{st}s + 1}$

由于其时间常数与调速器其它时间常数相比很小,

所以可近似看作比例环节 $\frac{\eta(s)}{u_A(s)} = G_f$



➤ 具有微分校正的PID调速器(加速度缓冲型)

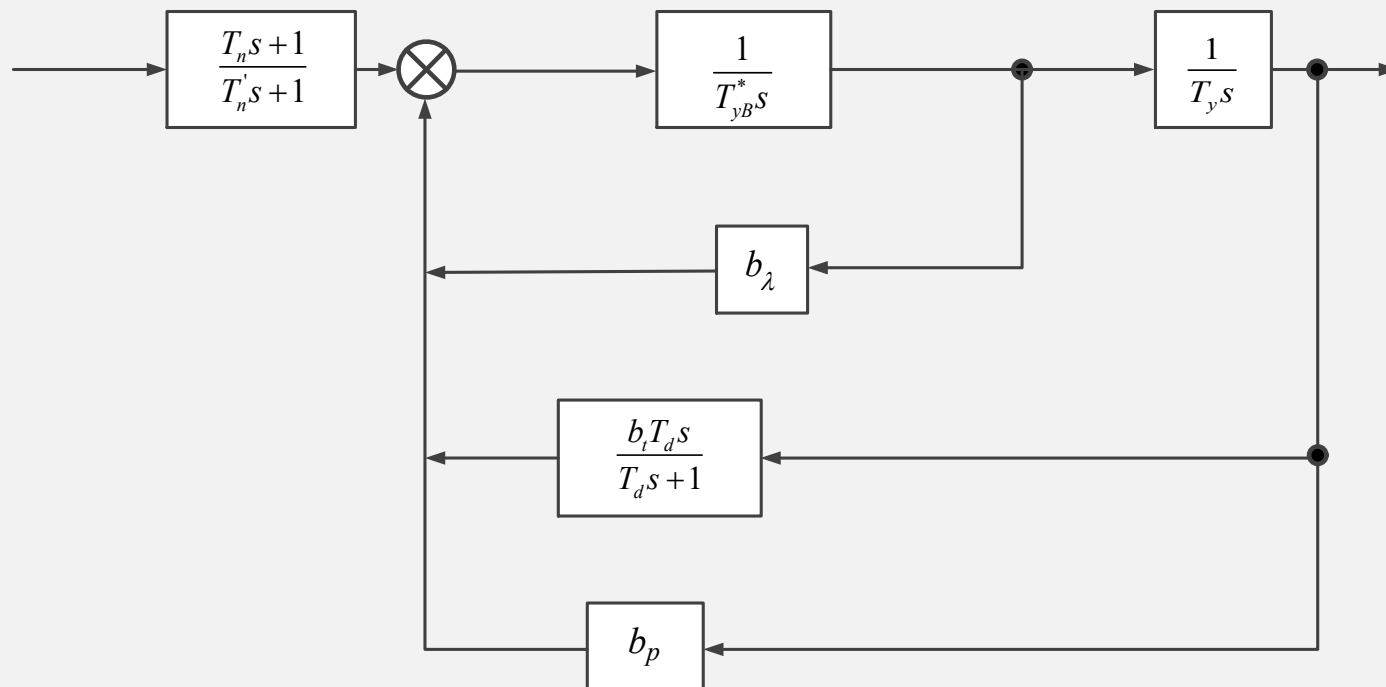


K_{λ} 为局部反馈位电转换器传递系数

$K_{A\lambda}$ 为可调整的分压系数



➤ 具有微分校正的PID调速器(加速度缓冲型)



$$G_{PID}(s) = \frac{T_n s + 1}{T'_n s + 1} \cdot \frac{T_d s + 1}{T_{yB}^* T_y T_d s^3 + (T_y T_{yB}^* + b_\lambda T_y T_d) s^2 + (b_\lambda T_y + T_d b_p + b_t T_d) s + b_p}$$



$$T_y \cdot b_\lambda = T_y^* \quad T_{yB}^* \approx 0 \quad T_n' \ll T_n$$

$$G_{PID}(s) = \frac{(T_n s + 1)(T_d s + 1)}{T_y^* T_d s^2 + [T_y^* + (b_p + b_t) T_d] s + b_p}$$

近似地取 $T_y = 0, b_p = 0$

$$G_{PID}(s) = \frac{(T_n s + 1)(T_d s + 1)}{b_t T_d s} = \frac{T_d T_n s^2 + (T_d + T_n) s + 1}{b_t T_d s}$$

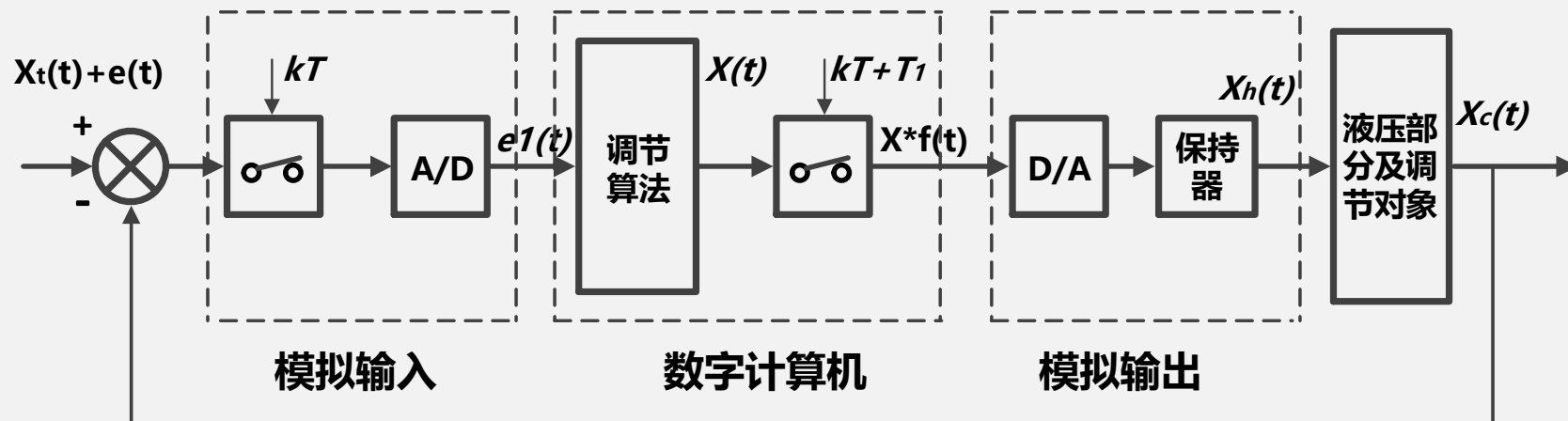
$$= \frac{T_n}{b_t} s + \frac{T_d + T_n}{b_t T_d} + \frac{1}{b_t T_d s}$$

(D) (P) (I)

- 随着计算机科学及控制理论的发展，水利水电工程大量应用计算机控制或调节，与引水系统和机组形成**离散--连续系统**
- 水电厂或抽水蓄能电厂大量应用**采样调节**的数字型调速器
 - 由**计算机控制系统**及**电液随动**系统组成
 - 计算机控制系统是以**计算机**为中心，加上必要的外围设备、电源及有关软件所组成
 - 电液随动系统包括**电液转换器**、**配压阀**、**接力器**、**位电转换器**等



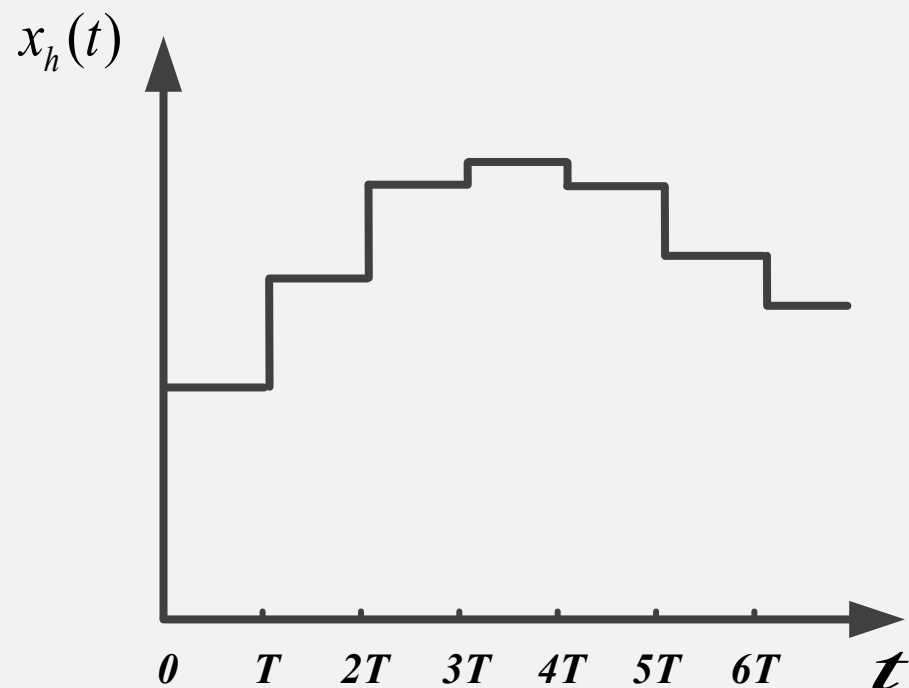
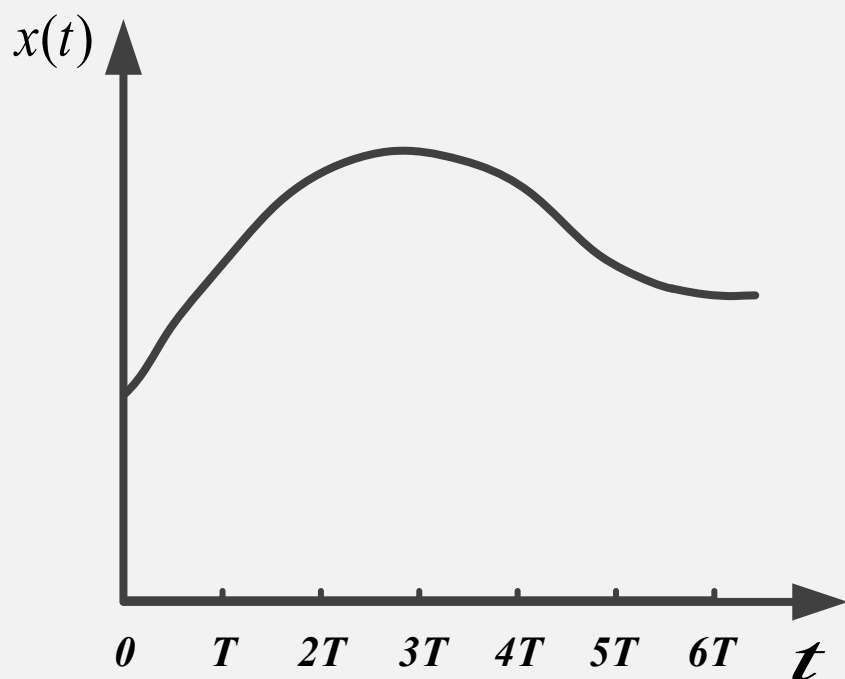
- 数字调速器是用计算机软件通过**数字仿真（模拟）**来实现机组**频率测量、反馈校正、功率和转速给定**等环节的静态动态特性，并且直接输出数字脉冲信号。通过**液压放大元件**来实现调节和控制的功能。



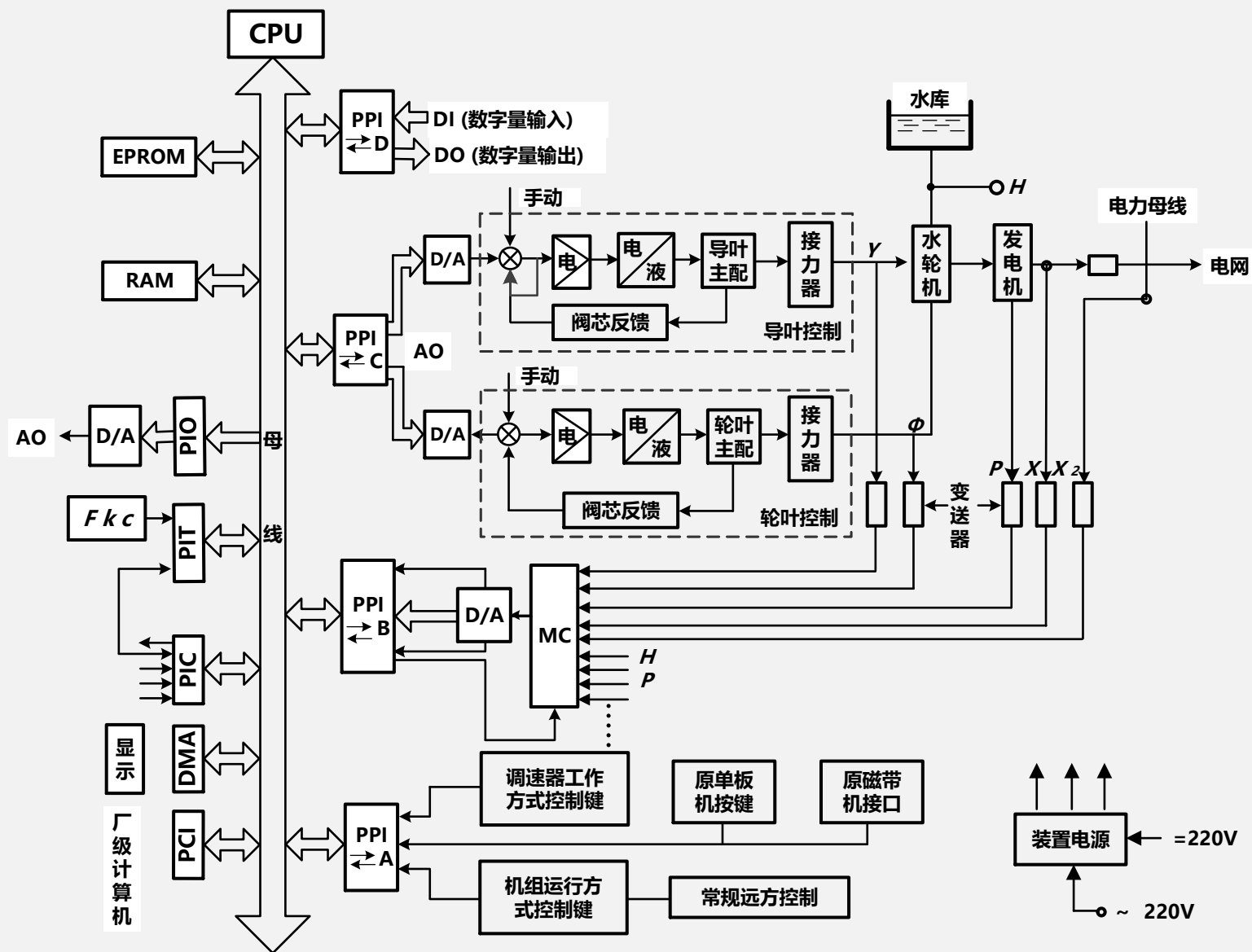


$$x_h(kT + t) = x(kT) \quad (0 \leq t \leq T)$$

T 为采样周期 $k = 0, 1, 2, \dots$



采样器前和保持器后的信号



- CPU - 微型计算机的核心部分（包括运算器和控制器）称为计算机的中央处理单元
- EPROM - 可擦除只读存储器，用来存放应用程序
- RAM - 读写存储器，用来存放参数和辅助变量
- 导叶继电器和转轮叶片继电器的电液随动系统在图中用虚线框出，分别由计算机接口PPI#C输出的数字信号经过数/模转换器（D/A）来控制
- 多路开关MC - 一种用以实现多种信号控制的开关

- ◆ 导叶接力器行程、转轮叶片转角的反馈信号经数据采集系统送至变送器（传感器、放大器），经多路开关MC，再经模/数转换器（A/D）由接口PPI#B输入计算机
- ◆ 水头H、功率P等模拟量也必须经过变送器、多路开关和A/D转换才能输入计算机
- ◆ 数字（开关）量输入DI与输出DO经过接口PPI#D与CPU相连接。DI可以是断路器、灭磁开关、锁定等位置信号以及机组的机械、电气故障或事故信号等，DO可以是转速信号、操作事故电磁阀及允许跳闸等信号
- ◆ PIT - 可编程间隔定时器，用以产生扫描时间的时钟

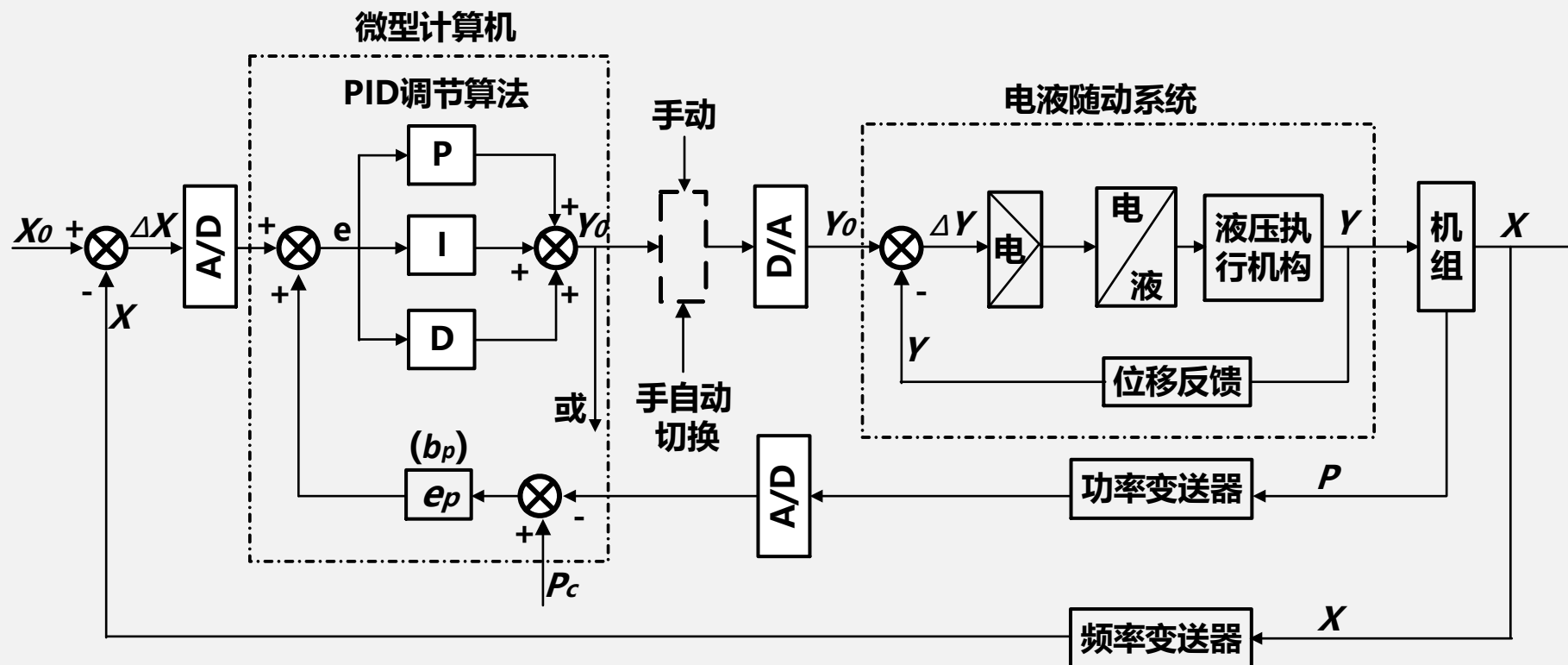
- ◆ **PIC是可编程中断控制器。中断的目的是使外部设备能够以一定的方式暂停CPU的操作，并迫使CPU执行一个服务子程序，待其执行完毕后，CPU就返回原先的程序流程。这样可大大提高CPU的利用率，提高了输入、输出的速度**
- ◆ **DMA控制器是用硬件在外部设备与存储器之间开辟一个直接进行数据交换的通道，它可以不必通过CPU而高速地、成批地传送数据。图中表示用它来管理调速器的数据和信号显示系统**
- ◆ **PIO是并行输入/输出接口芯片，可以用程序来变更其工作方式。图中PIO用来输出 “非常事件信息记忆”**
- ◆ **接口PCI与厂级计算机相联**

➤ 调节算法

- ◆ 数字调速器是**用软件来计算调节规律**的，因此建立与调节规律相适应的调节算法尤其重要，**调节算法**的精确与否直接影响调节品质的好坏
- ◆ 调节算法种类
 - ◆ 位置型算法
 - ◆ 增量型算法
 - ◆ 仿增量型算法



➤ 位置型算法



$Y_0(t)$ PID调速器的输出量

$e(t)$ PID调速器的输入量

$$e(t) = [X_0(t) - X(t)] + e_p [P_c(t) - P(t)]$$

$P_c(t)$ 与 $P(t)$ 分别为功率给定值与实测值

e_p 水轮机调节系统的调差率

K_p 比例系数 T_I 积分时间常数 T_D 微分时间常数

模拟调速器

$$Y_0(t) = K_P \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$



当采样周期 T 较短时，可用差分方程替代微商，以和替代积分。
根据采样时刻 $t = kT$ ($k=0, 1, 2, \dots$)，并用梯形积分原理。

$$Y_0(k) = K_p \left\{ e(k) + \frac{T}{2T_I} \sum_{j=0}^k [e(j) + e(j-1)] + \frac{T_D}{T} [e(k) - e(k-1)] \right\}$$

$$= K_p e(k) + K_I \sum_{j=0}^k [e(j) + e(j-1)] + K_D \Delta e(k)$$

比例系数

$$K_p = K_p$$

积分项系数

$$K_I = K_p \frac{T}{2T_I}$$

微分项系数

$$K_D = K_p \frac{T_D}{T}$$

$e(k)$ 第 k 次采样时刻的偏差值

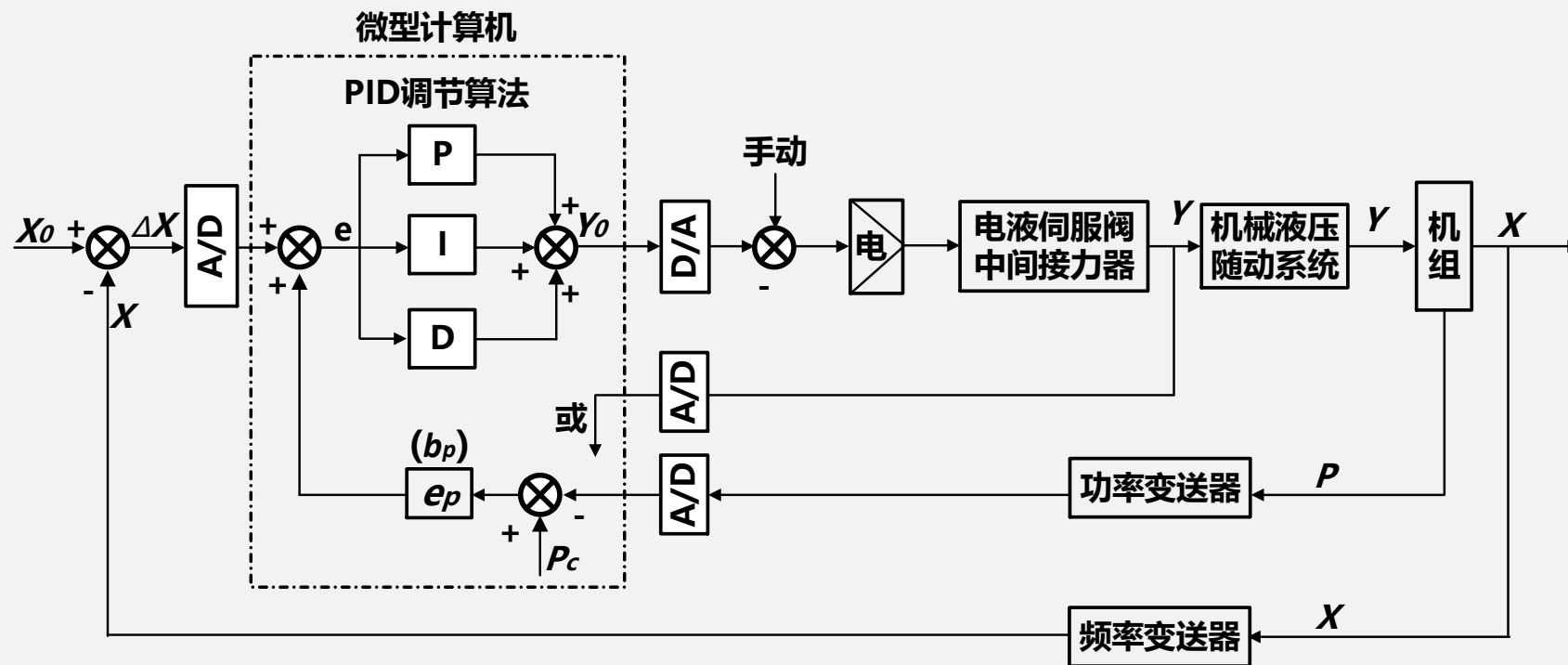
$\Delta e(k) = e(k) - e(k-1)$ 相邻两次偏差实测值之差

$Y_0(k)$ - 微机的全量输出，对应于接力器每次采样时刻所达到的位置。

$$Y_0(k) = K_p \left\{ e(k) + \frac{T}{2T_I} \sum_{j=0}^k [e(j) + e(j-1)] + \frac{T_D}{T} [e(k) - e(k-1)] \right\}$$
$$= K_p e(k) + K_I \sum_{j=0}^k [e(j) + e(j-1)] + K_D \Delta e(k)$$

微机调速器直接应用上式，需要微机对 $e(k)$ 进行累加。需要大量的存储单元，又浪费运算时间。

➤ 增量型（速度型）算法



中间接力器是一个**累加器(积分器)**，液压部分实际上成了一个随动于中间接力器的**机械液压随动系统**。

计算机的输出为 Y_0 的变化量。

$$\Delta Y_0(k) = Y_0(k) - Y_0(k-1)$$

$$Y_0(k) = K_p \left\{ e(k) + \frac{T}{2T_I} \sum_{j=0}^k [e(j) + e(j-1)] + \frac{T_D}{T} [e(k) - e(k-1)] \right\}$$

$$= K_p e(k) + K_I \sum_{j=0}^k [e(j) + e(j-1)] + K_D \Delta e(k)$$

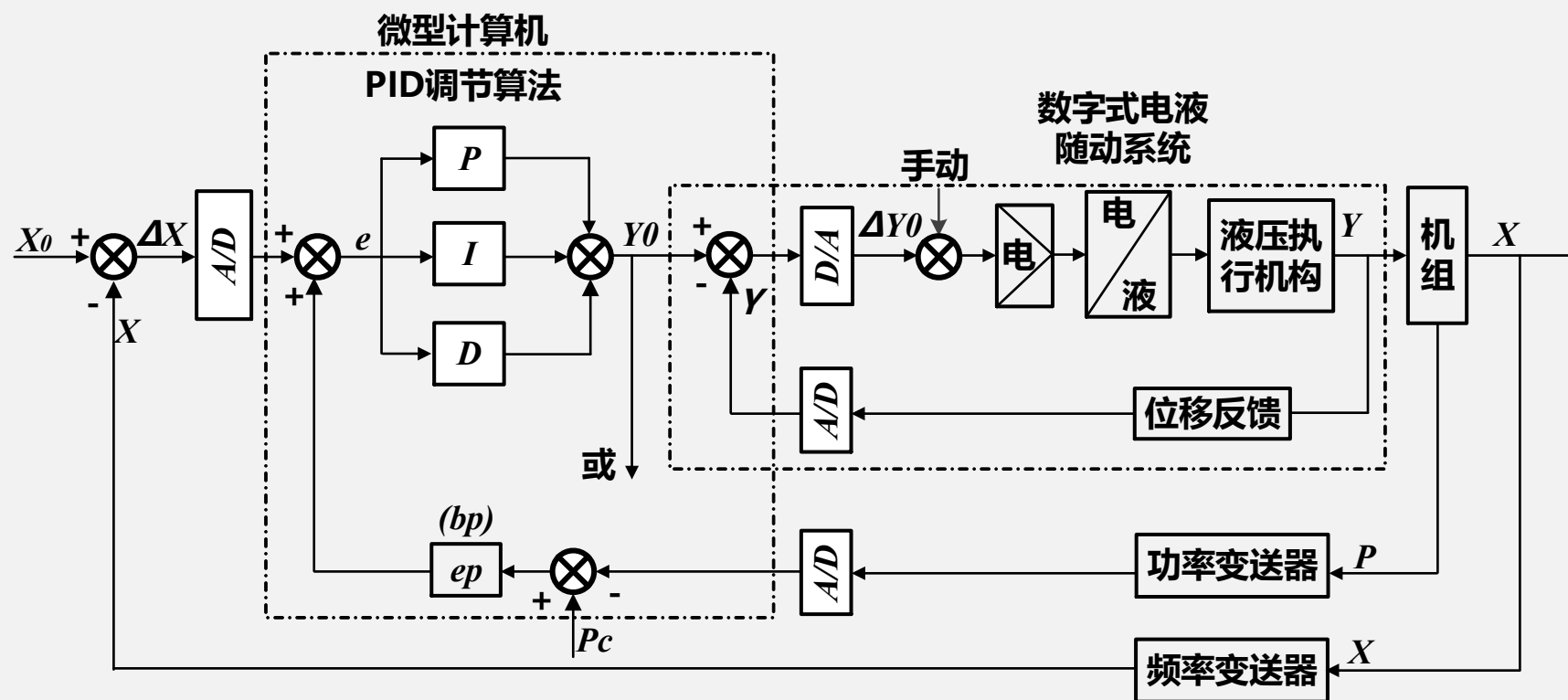
$$Y_0(k-1) = K_p e(k-1) + K_I \sum_{j=0}^{k-1} [e(j-1) + e(j)] + K_D \Delta e(k-1)$$

$$\begin{aligned} \Delta Y_0(k) &= K_p \Delta e(k) + K_I [e(k) + e(k-1)] \\ &\quad + K_D [\Delta e(k) - \Delta e(k-1)] \end{aligned}$$

ΔY_0 只与最近两次采样值有关。可以节省运算时间，减少累计误差。



➤ 仿增量型算法



将模拟式电液随动系统改为数字式电液随动系统，接力器反馈信号 Y 以数字形式在计算机内综合。

$$\Delta Y_0'(k) = Y_0(k) - Y(k)$$

$$= K_p e(k) + K_I \sum_{j=0}^k [e(j) + e(j-1)] + K_D \Delta e(k) - Y(k)$$

采样周期相对于接力器活塞移动所需时间极其微小

$$Y(k) \approx Y(k-1)$$

随动系统的输入量 Y_0 与输出量 Y 都是以相对值表示的，两者差别更是极其微小。

$$Y \approx Y_0$$

$$\begin{aligned}\Delta Y'_0(k) &= Y_0(k) - Y(k) \\ &= K_p e(k) + K_I \sum_{j=0}^k [e(j) + e(j-1)] + K_D \Delta e(k) - Y(k) \\ \Delta Y'_0(k) &\approx Y_0(k) - Y_0(k-1) \\ &= K_p \Delta e(k) + K_I [e(k) + e(k-1)] + K_D [\Delta e(k) - \Delta e(k-1)]\end{aligned}$$

计算机输出增量 $\Delta Y'_0(k)$ 经过 D/A 输入数字式电液随动系统，并随着调节系统趋于平衡而趋向于零。

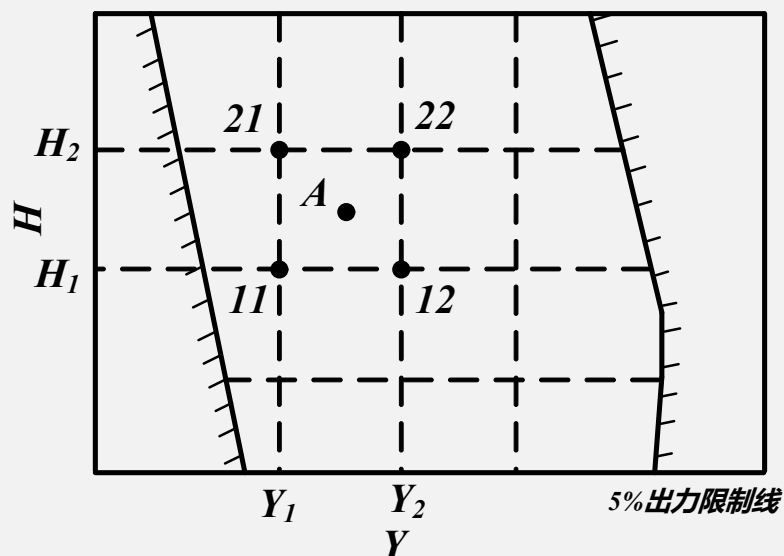
➤ 自适应采样调节器

- ❖ 水力机械，特别是水轮机是一个高度**非线性**的调节对象，随着运行工况的改变，其动态和静态特性亦将随之变化
- ❖ 模拟式调速器中，仅能按照**某些工况来整定调节参数**，在调节的过渡过程中，难以保证调节品质的最佳效果
- ❖ 数字调速器可以设计成**随不同的工况**及其过程信号的特性变化而自动地改变调节参数，使得调节系统的调节性能在任何工况及其过渡过程中都是最佳的，亦就是说可以实现**自适应调节**



➤ 自适应采样调节器

- 根据水电站的具体条件，列出离散水轮机调节系统的数学模型
- 求出对应机组不同工况点的最优调节参数，以表格形式存入计算机
- 测出水轮机的实际运行工况点
- 判断工况点所属子域，按该子域的周围数值，用内插法求出该工况下的最优参数，将其引入调节算法内



离线按子域优化，在线运行时按工况点内插的办法使三个调节参数适应工况点的变化，使过渡过程优化



在忽略次要项后，PI、PID调速器的传递函数分别可写成如下形式为

$$G_{PI}(s) = \frac{Y_1(s)}{\alpha_1(s)} = -\frac{T_d S + 1}{b_\lambda T_y T_d S^2 + [b_\lambda T_y + (b_p + b_t) T_d] \cdot S + b_p}$$

$$G_{PID}(s) = \frac{Y_1(s)}{\alpha_1(s)} = -\frac{(T_d S + 1)(T_n S + 1)}{b_\lambda T_y T_d S^2 + [b_\lambda T_y + (b_p + b_t) T_d] \cdot S + b_p}$$

Y_1 - 主接力器活塞位移相对值 $Y_1 = \frac{\Delta Y}{Y_{\max}} = \frac{Y - Y_{\max}}{Y_{\max}} = y - 1$

$y = Y / Y_{\max}$ Y, Y_{\max} - 主接力器活塞位移及其最大值



α_1 - 机组转速偏差相对值

$$\alpha_1 = \frac{\Delta n}{n_r} = \frac{n - n_r}{n_r} = \alpha - 1$$

$\alpha = n / n_r$ - 机组转速相对值

T_d - 缓冲时间常数

b_λ - 局部反馈系数

T_y - 主接力器反应时间

b_t - 软反馈强度

T_n - 微分时间常数

b_p - 硬反馈强度



$$b_{\lambda} T_y = T_{AL} \quad b_p + b_t = \delta$$

$$T_{ALP} = T_{AL} + \delta \cdot T_d \quad T_{nd} = T_n + T_d$$

PI型:

$$Y_1(s) \cdot [T_{AL} \cdot T_d S^2 + T_{ALP} \cdot S + b_p] = -(T_d S + 1) \cdot \alpha_1(s)$$

PID型:

$$Y_1(s) \cdot [T_{AL} \cdot T_d S^2 + T_{ALP} \cdot S + b_p] = -\alpha_1(s) \cdot [1 + T_{nd} \cdot S + T_n T_d S^2]$$



拉氏反变换得PI，PID型调速器的微分方程：

$$T_d T_{AL} \frac{d^2 Y_1}{dt^2} + T_{ALP} \frac{dY_1}{dt} + b_p \cdot Y_1 + \alpha_1 + T_d \frac{d\alpha_1}{dt} = 0$$

$$T_d T_{AL} \frac{d^2 Y_1}{dt^2} + T_{ALP} \frac{dY_1}{dt} + b_p \cdot Y_1 + \alpha_1 + T_{nd} \frac{d\alpha_1}{dt} + T_n T_d \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} = 0$$

$$\begin{array}{lll} Y_1 = y - 1 & \alpha_1 = \alpha - 1 & \frac{dY_1}{dt} = \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 Y_1}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} & \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \end{array}$$

所以微分方程可进一步简化为：



PI型:

$$T_d T_{AL} \frac{d^2 y}{dt^2} + T_{ALP} \frac{dy}{dt} + b_p \cdot (y - 1) + (\alpha - 1) + T_d \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

PID型:

$$T_d T_{AL} \frac{d^2 y}{dt^2} + T_{ALP} \frac{dy}{dt} + b_p \cdot (y - 1) + (\alpha - 1) + T_{nd} \frac{d\alpha}{dt} + T_n T_d \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0$$

对上述两式差分化即可用计算机求解。



PID型:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{T_{ALP}}{T_d T_{AL}} \frac{dy}{dt} + \frac{b_p}{T_d T_{AL}} (y - 1) + \frac{1}{T_d T_{AL}} (\alpha - 1) \\ + \frac{T_{nd}}{T_d T_{AL}} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{T_n}{T_{AL}} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{d^2 y}{dt^2} dt + \frac{T_{ALP}}{T_d T_{AL}} \int_{t_0}^t \frac{dy}{dt} dt + \frac{b_p}{T_d T_{AL}} \cdot \int_{t_0}^t (y - 1) dt + \frac{1}{T_d T_{AL}} \int_{t_0}^t (\alpha - 1) dt \\ + \frac{T_{nd}}{T_d T_{AL}} \int_{t_0}^t \frac{d\alpha}{dt} dt + \frac{T_n}{T_{AL}} \int_{t_0}^t \frac{d^2 \alpha}{dt^2} dt = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} - \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 + \frac{T_{ALP}}{T_d T_{AL}} (y - y_0) + \frac{b_p}{T_d T_{AL}} \left(\frac{y - y_0 - 2}{2} \right) \Delta t + \frac{1}{T_d T_{AL}} \left(\frac{\alpha - \alpha_0 - 2}{2} \right) \Delta t \\ + \frac{T_{nd}}{T_d T_{AL}} (\alpha - \alpha_0) + \frac{T_n}{T_{AL}} \left[\left(\frac{d\alpha}{dt} \right) - \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_0 \right] = 0 \end{aligned}$$

$$Z_0 = \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 \quad \text{导叶关闭的速度为} \quad \frac{y - y_0}{\Delta t}$$

$$\frac{y - y_0}{\Delta t} = \frac{\frac{dy}{dt} + Z_0}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \frac{y - y_0}{\Delta t} - Z_0$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_0 = W_0$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = 2 \frac{\alpha - \alpha_0}{\Delta t} - W_0$$



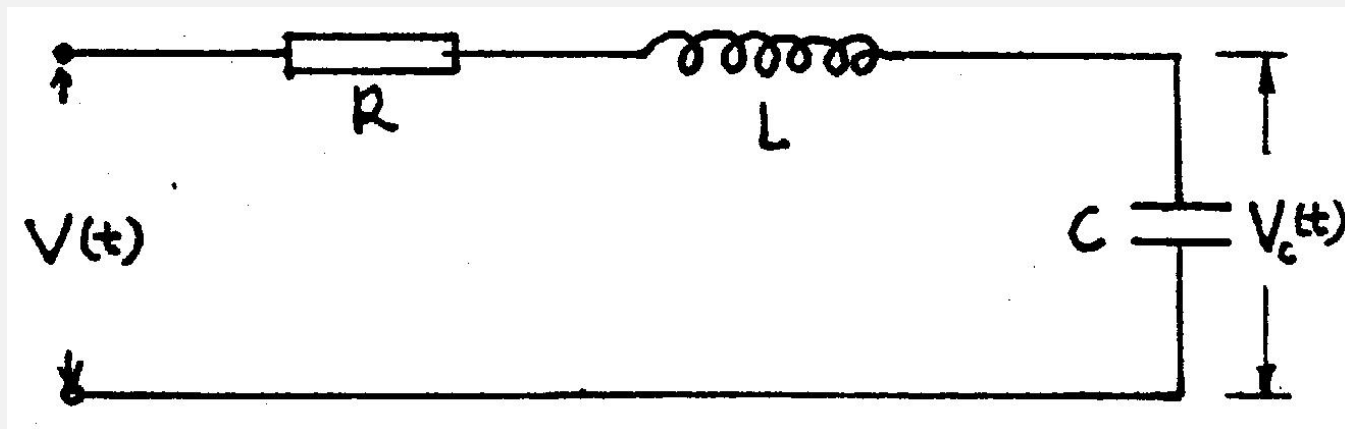
$$2\left(\frac{y-y_0}{\Delta t}-Z_0\right)+\frac{T_{ALP}}{T_d T_{AL}}(y-y_0)+\frac{b_p}{T_d T_{AL}}\left(\frac{y-y_0-2}{2}\right)\Delta t+\frac{1}{T_d T_{AL}}\left(\frac{\alpha-\alpha_0-2}{2}\right)\Delta t$$
$$+\frac{T_{nd}}{T_d T_{AL}}(\alpha-\alpha_0)+\frac{2T_n}{T_{AL}}\left[\frac{\alpha-\alpha_0}{\Delta t}-W_0\right]=0$$

方程中有下标“0”表示 t_0 时刻的值。



➤ 状态方程基本概念及定义

- 状态空间方法的核心是把相互关系复杂的系统都归结为**一阶微分方程组**，利用向量及矩阵记号，简单而直观地用一阶微分矩阵方程来描述系统的特性
- 系统采用矩阵方程来描述，其数学表达式不随系统状态量的增加、输入量和输出量的增加而增加其复杂性。还可较方便地用计算机加以求解



$$\left. \begin{aligned} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + V_c(t) &= V(t) \\ C \frac{dV_c(t)}{dt} &= i(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{V}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V(t)$$



$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{V}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V(t)$$

$$\mathbf{X} = [i(t), V_c(t)]^T$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U = V(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U$$

系统状态方程



$$\dot{X} = AX + BU$$

X — 系统的状态向量 $i(t), V_c(t)$ 为其分量

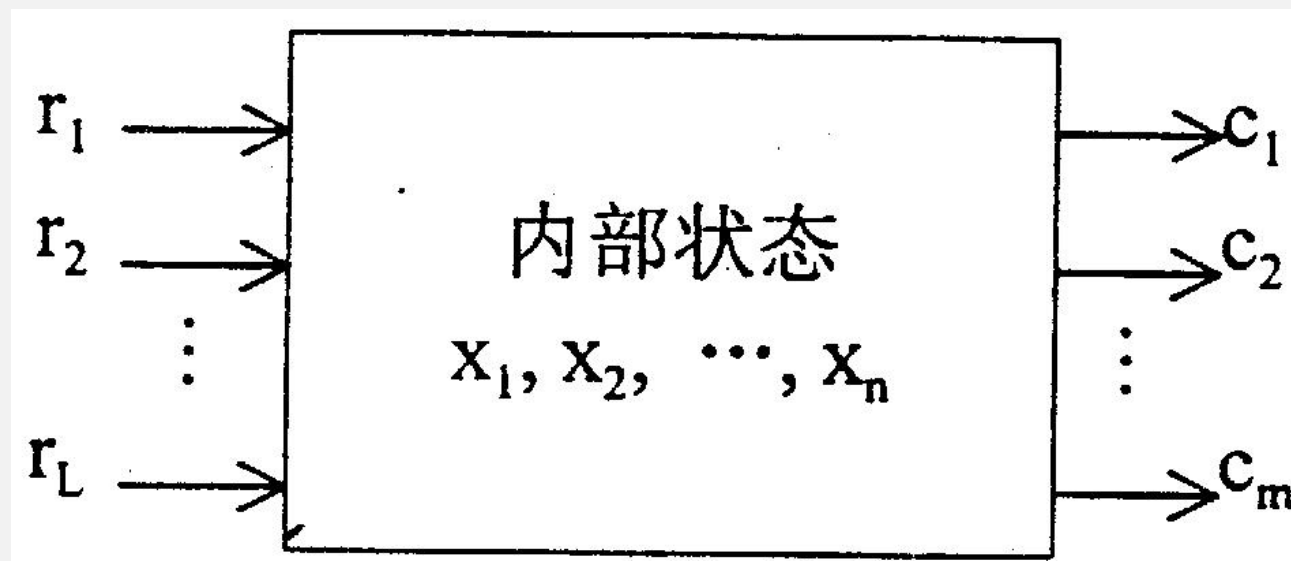
A - 系数矩阵, 由系统参数决定

B - 控制或干扰矩阵, 由系统参数决定

U - 控制向量 $V(t)$ 为其分量



状态 - 表示调节系统的数目最小的一组变量的总体称系统的状态。



若 x_1, x_2, \dots, x_n 可完全描述系统的内部行为
变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的整体称为系统的状态



状态变量——确定系统状态的数目最小的一组变量

状态变量可以是在物理上**不可测**或**不可观察**的量，因为一个系统的状态变量可以选择的，即同一个系统可以由不同的状态变量所组合成的状态来描述，但**对一个系统而言，状态变量的个数是确定的。**

状态向量：完全描述系统行为的几个状态变量

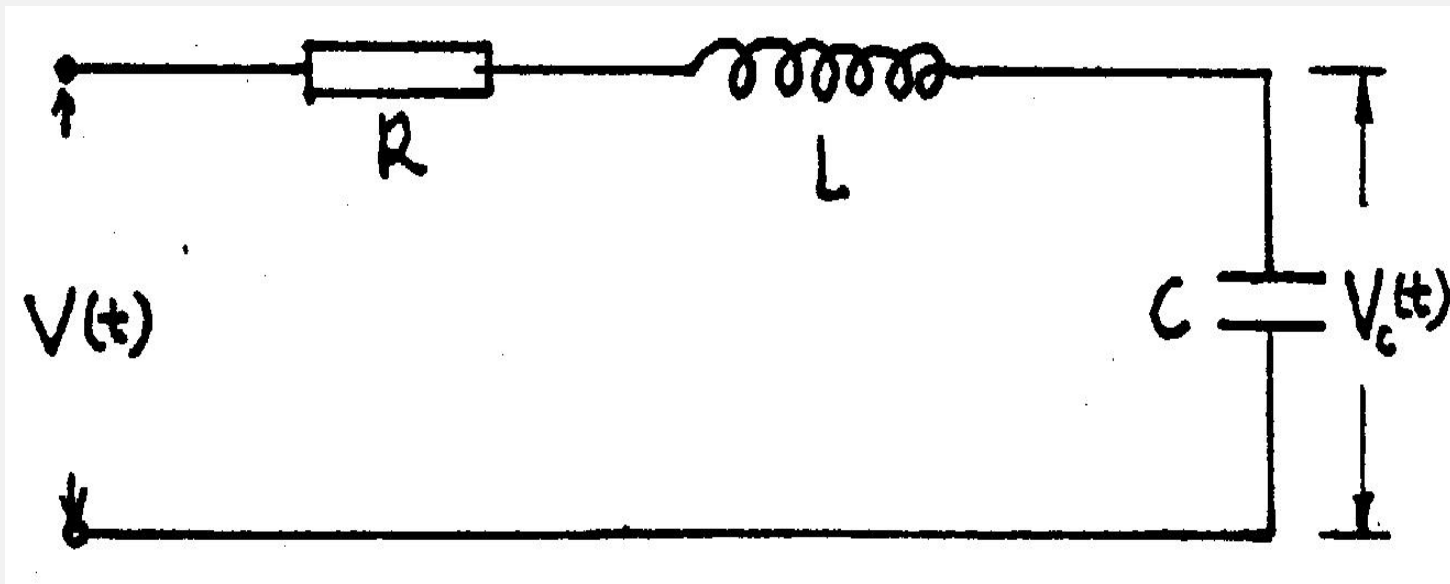
$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 组合成的一个向量

$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 称状态向量的分量

$$\mathbf{X} = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^T$$

状态空间：以上述几个状态变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为轴所组成的n维空间。

系统的任意状态都可以用状态空间中的一点来表示



$i(t), V_c(t)$ 组成了该电路系统的状态向量 X

$i(t), V_c(t)$ 为其分量，也称状态变量，

$i(t), V_c(t)$ 为轴组成该系统的两维状态空间



调节系统在时间为 $t \geq t_0$ 时的状态向量

$$X(t) = F \{ X(t_0), R(t_0, t) \}$$

状态方程

$X(t_0)$ 为初始状态向量

$R(t_0, t)$ t_0 到 t 时段内加到系统上的输入向量

在时刻 t 输出向量

$$C(t) = P \{ X(t_0), R(t_0, t) \}$$

输出方程



在调节系统的研究中，多采用**微分方程**来描述

$$\dot{X}(t) = f \{ X(t), R(t) \}$$

$$C(t) = P \{ X(t), R(t) \}$$

当所描述的系统为**线性时变系统**时，上两式由可写成：

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)R(t)$$

$$C(t) = L(t)X(t) + D(t)R(t)$$

线性定常系统的状态方程可写成如下形式：

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BR(t)$$

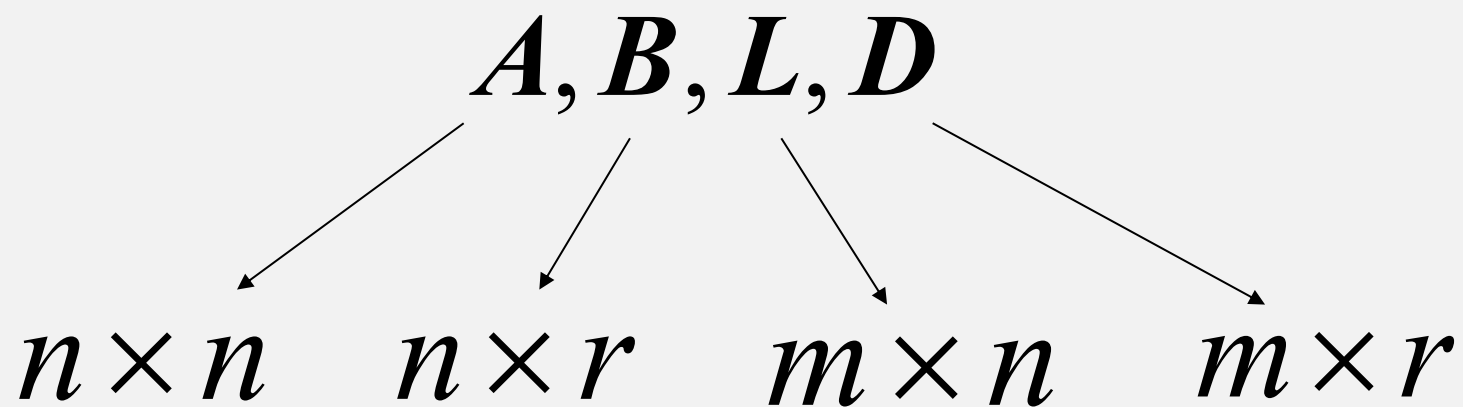
$$C(t) = LX(t) + DR(t)$$



$$\dot{X}(t) = AX(t) + BR(t)$$

$$C(t) = LX(t) + DR(t)$$

$X(t), R(t), C(t)$ n, r, m 维向量



矩阵元素由系统参数决定，D常为零矩阵



D=0时

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + b_{11}r_1 + b_{12}r_2 + \cdots + b_{1r}r_r \\ \dot{X}_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + b_{21}r_1 + b_{22}r_2 + \cdots + b_{2r}r_r \\ \vdots \\ \dot{X}_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n + b_{n1}r_1 + b_{n2}r_2 + \cdots + b_{nr}r_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = L_{11}X_1 + L_{12}X_2 + \cdots + L_{1n}X_n \\ C_2 = L_{21}X_1 + L_{22}X_2 + \cdots + L_{2n}X_n \\ \vdots \\ C_m = L_{m1}X_1 + L_{m2}X_2 + \cdots + L_{mn}X_n \end{cases}$$



$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{R} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{L}\mathbf{X} \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ L_{m1} & L_{m2} & \cdots & L_{mn} \end{bmatrix}$$

➤ 标准形式状态方程的列写

- 用状态方程来描述实际系统时，关键是要**选择好状态变量**，对于一个系统来说，状态变量的选择**不唯一**，而状态变量的**个数确定**，在状态变量中**不得**出现输入函数及其导数
- 状态方程列写方法
 - 由高阶微分方程(输入量没有导数项)转变
 - 从系统传递函数转换
 - 由描述系统各环节的微分方程或代数方程直接整理

- 由高阶微分方程(输入量没有导数项) 转变成状态方程

设系统的高阶微分方程为：

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \cdots + a_{n-2} \frac{d^2}{dt^2} c(t) + a_{n-1} \frac{d}{dt} c(t) + a_n c(t) = R(t)$$

c(t)为输出量， R(t)为输入量

$$X_1 = C \quad X_2 = C^1 \quad \cdots \quad X_n = C^{(n-1)}$$

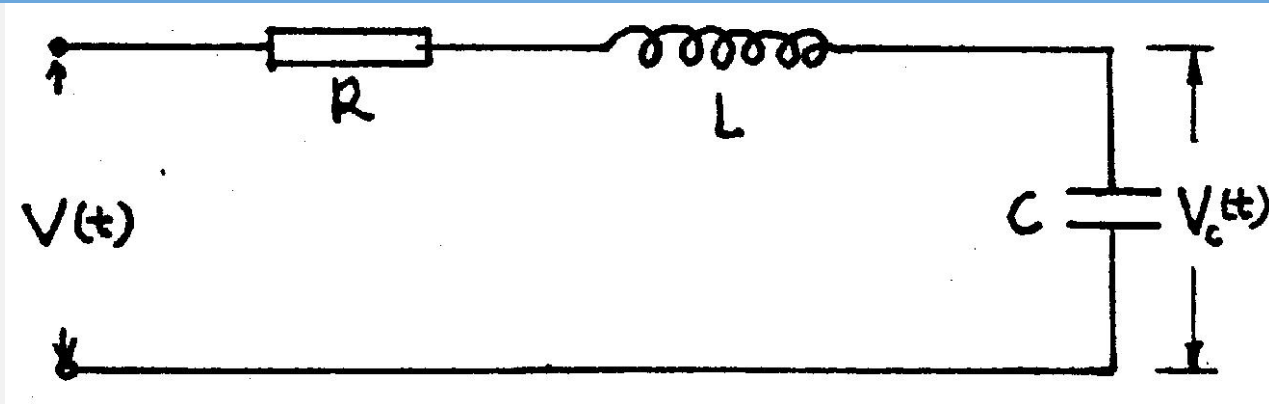
$$\dot{X}_1 = X_2 \quad \dot{X}_2 = X_3 \quad \cdots \quad \dot{X}_{n-1} = X_n$$

$$\dot{X}_n = -\frac{a_n}{a_0} X_1 - \frac{a_{n-1}}{a_0} X_2 - \cdots - \frac{a_2}{a_0} X_{n-1} - \frac{a_1}{a_0} X_n + \frac{R}{a_0}$$



写成矩阵方程形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_0} \end{bmatrix} R$$



$$LC \frac{d^2}{dt^2} V_c(t) + RC \frac{d}{dt} V_c(t) + V_c(t) = V$$

$$X_1 = V_c, X_2 = \dot{X}_1 = \dot{V}_c$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} V$$

同一个系统其状态变量的选择不是唯一的



➤ 从系统传递函数转换成状态方程

调节系统传递函数的一般形式如下：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^{-(n-m)} + b_1 s^{-(n-m+1)} + \cdots + b_{m-1} s^{-(n-1)} + b_m s^{-n}}{1 + a_1 s^{-1} + \cdots + a_{n-1} s^{-(n-1)} + a_n s^{-n}}$$



设上式中分子多项式用 $B(s)$ 表示, 分母多项式用 $A(s)$ 表示, 并设 $E(s)=R(s)/A(s)$,则:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + \cdots + a_{n-1} s^{-(n-1)} + a_n s^{-n}}$$

$$E(s) = R(s) - a_1 s^{-1} E(s) - a_2 s^{-2} E(s) - \cdots - a_{n-1} s^{-(n-1)} E(s) - a_n s^{-n} E(s)$$

$$C(s) = E(s) \cdot B(s) =$$

$$b_0 s^{-(n-m)} E(s) + b_1 s^{-(n-m+1)} E(s) + \cdots + b_{m-1} s^{-(n-1)} E(s) + b_m s^{-n} E(s)$$



$$X_1 = L^{-1}[S^{-n}E(s)] \quad X_2 = \dot{X}_1 = L^{-1}[S^{-(n-1)}E(s)]$$

$$X_{n-1} = \dot{X}_{n-2} = L^{-1}[S^{-(n-(n-2))}E(s)] = L^{-1}[S^{-2}E(s)]$$

$$X_n = \dot{X}_{n-1} = L^{-1}[S^{-1}E(s)] \quad \dot{X}_n = L^{-1}[E(s)]$$



$$\dot{X}_1 = X_2 \quad \dot{X}_2 = X_3 \quad \cdots \quad \dot{X}_{n-1} = X_n$$

$$\dot{X}_n = -a_n X_1 - a_{n-1} X_2 - \cdots - a_2 X_{n-1} - a_1 X_n + R$$

写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_{n-1} \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} R$$

$$C(s) = E(s) \cdot B(s) = b_0 s^{-(n-m)} E(s) + b_1 s^{-(n-m+1)} E(s) + \cdots + b_{m-1} s^{-(n-1)} E(s) + b_m s^{-n} E(s)$$

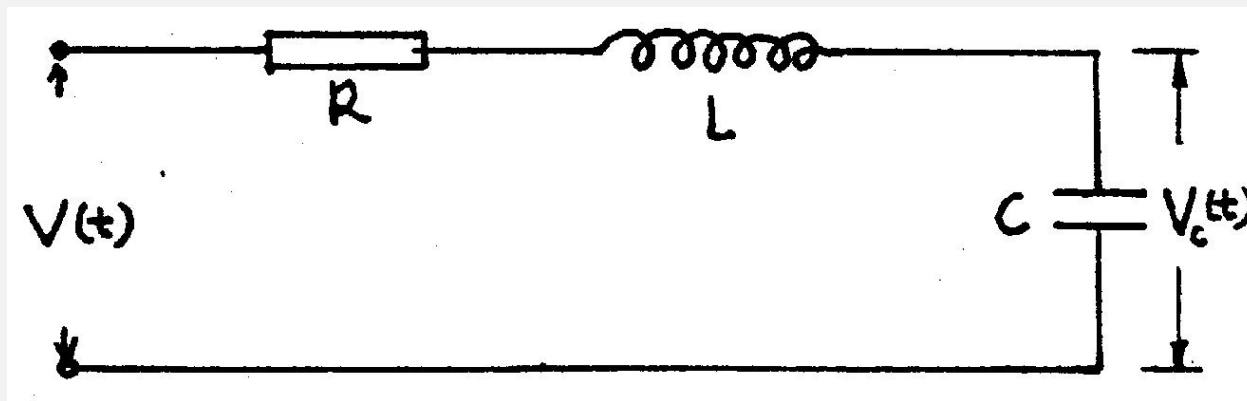
输出方程为

$$\begin{aligned} C(t) &= L^{-1}[E(s) \cdot B(s)] \\ &= [b_m, b_{m-1}, \cdots, b_2, b_1, b_0] [X_1, X_2, \cdots, X_{m+1}]^T \end{aligned}$$

此处叙述的方法对输入函数有导数项或无导数项都是适用的，因为无论输入函数有无导数项都可以将其转化成传递函数的一般形式。



➤ 从系统传递函数转换成状态方程



$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCS^2 + RCS + 1} = \frac{1/LC}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC}}$$

$$n = 2$$

$$m = 0$$

$$a_1 = R/L$$

$$a_2 = 1/LC$$

$$b_0 = 1/LC$$

$$= \frac{s^{-2}/LC}{1 + \frac{R}{L}s^{-1} + \frac{1}{LC}s^{-2}}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$



$$n = 2 \quad m = 0 \quad a_1 = R / L \quad a_2 = 1 / LC$$
$$b_0 = 1 / LC$$

状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} V$$

$$X_1 = L^{-1} \left[\frac{V(s)}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \right] \quad X_2 = L^{-1} \left[\frac{V(s)}{s + \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}s^{-1}} \right]$$

输出方程

$$V_c = \frac{1}{LC} X_1$$



某系统的高阶微分方程式如下：

$$\frac{d^3}{dt^3} C(t) + 18 \frac{d^2}{dt^2} C(t) + 192 \frac{d}{dt} C(t) + 640 C(t) = 160 \frac{d}{dt} R(t) + 4 R(t)$$

其输入部分有导数项

传递函数为 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{160S + 4}{S^3 + 18S^2 + 192S + 640}$

$$n = 3 \quad m = 1 \quad a_1 = 18 \quad a_2 = 192 \quad a_3 = 640$$

$$b_0 = 160 \quad b_1 = 4$$

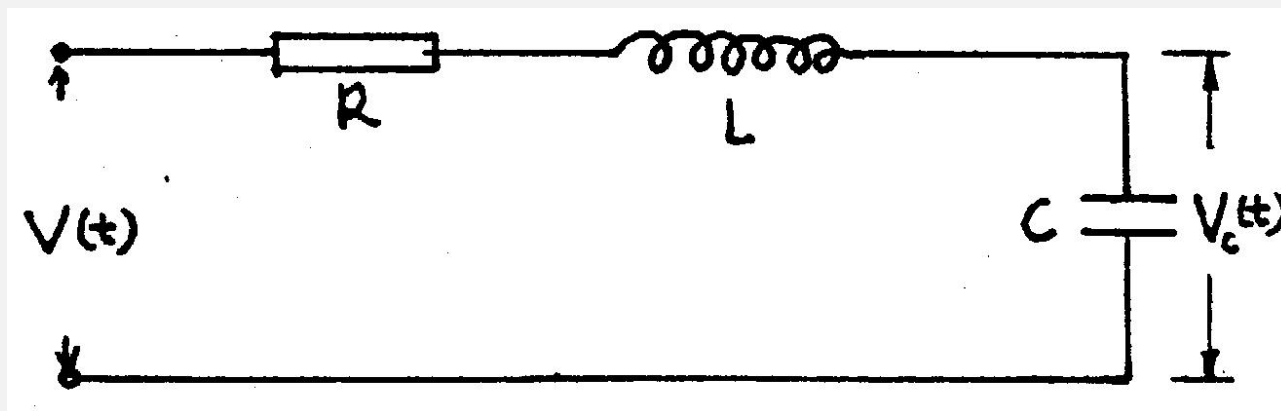
$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} R$$

$$C(t) = 4X_1(t) + 160X_2(t)$$



➤ 由描述系统各环节的微分方程或代数方程直接整理

- 在实际科研工作中，常根据物理系统得出各环节的运动方程式，这些方程式可能是微分方程或代数方程，选择好状态变量后，消除中间变量和代数方程，得出一组一阶微分方程，从而可写成标准形式的状态方程表达式。
- 工程实际中常采用此种方法列写状态方程，其好处是选择直接可测的物理量作为状态量，便于实现全状态反馈或最佳控制，也便于对物理意义明确的量求解出过渡过程。



$$\left. \begin{aligned} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + V_c(t) &= V(t) \\ C \frac{dV_c(t)}{dt} &= i(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{V}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V(t)$$



$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{V}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V(t)$$

$$\mathbf{X} = [i(t), V_c(t)]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad U = V(t) \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U$$

➤ 状态方程的求解及转移矩阵计算

调节系统在**外扰作用**下的过渡过程计算可以通过**求解其状态方程**来实现。

- 齐次状态方程的求解
- 非齐次状态方程的求解
- 状态方程的计算机求解公式
- 状态转移矩阵的计算机计算



➤ 齐次状态方程的求解

当 $R=0$ 时，得齐次状态方程式：

$$\dot{X} = AX$$

由数学分析可知，齐次微分方程

$$\dot{x} = ax \quad \longrightarrow \quad x = e^{at} \cdot x(0)$$

a 为常数， $x(0)$ 为 x 的初值，且：

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}$$



$\dot{X} = AX(t)$ 的解为

$$X(t) = e^{A(t)} X(0)$$

$X(0)$ 为状态矢量初值

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$



$$\Phi = e^A \quad \Phi(t) \text{ 为状态转移矩阵}$$

$$\Phi(0) = I \quad I \text{ 为单位矩阵}$$

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1) \cdot \Phi(t_2)$$

$$\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$$



➤ 非齐次状态方程的求解

调节系统的非齐次状态方程的标准形式为：

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{R}(t)$$

$$\mathcal{L}[\dot{\mathbf{X}}] = \mathcal{L}[\mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{R}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = \frac{\mathbf{X}(0) + \mathbf{B}\mathbf{R}(s)}{s\mathbf{I} - \mathbf{A}}$$

$$\Phi(s) = \frac{\mathbf{I}}{s\mathbf{I} - \mathbf{A}}$$



$$X(t) = L^{-1}[\Phi(s)]X(0) + L^{-1}[\Phi(s)BR(s)]$$

当R=0时，与齐次状态方程的解相对照，可得：

$$X(t) = e^{A(t)} X(0)$$

$$L^{-1}[\Phi(s)] = \Phi(t) = e^{At}$$

$$L^{-1}[\Phi(s)BR(s)] = \int_0^t \Phi(t-\tau)BR(\tau)d\tau$$

则非齐次状态方程的解为：

$$X(t) = \Phi(t)X(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)BR(\tau)d\tau$$



$X(t_0)$ 为已知, $t \geq t_0$ 时

$$X(t) = \Phi(t)X(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)BR(\tau)d\tau$$

$$= \Phi(t_0 + t - t_0)X(0) + \int_0^{t_0} \Phi(t - t_0 + t_0 - \tau)BR(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)BR(\tau)d\tau$$

$$= \Phi(t - t_0)[\Phi(t_0)X(0) + \int_0^{t_0} \Phi(t_0 - \tau)BR(\tau)d\tau] + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)BR(\tau)d\tau$$

$$= \Phi(t - t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)BR(\tau)d\tau$$

$$X(t) = \Phi(t)X(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)BR(\tau)d\tau$$



➤ 状态方程的计算机求解

$$t_0 = KT, t = (K + 1)T$$

$$\mathbf{X}([K + 1]T)$$

$$= \Phi(T)\mathbf{X}(KT) + \int_{KT}^{(K+1)T} \Phi[(K + 1)T - \tau] \mathbf{B} \mathbf{R}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{R}(KT)$$



$$\begin{aligned}& \int_{KT}^{(K+1)T} \Phi[(K+1)T - \tau] \mathbf{B} \mathbf{R}(\tau) d\tau \\&= \Phi[(K+1)T] \int_{KT}^{(K+1)T} \Phi(-\tau) d\tau \mathbf{B} \mathbf{R}(KT) \\&= \Phi[(K+1)T] \cdot \left[-A^{-1} \cdot e^{-A\tau} \right] \Big|_{KT}^{(K+1)T} \mathbf{B} \mathbf{R}(KT) \\&= \Phi[(K+1)T] A^{-1} [e^{-AKT} - e^{-A(K+1)T}] \mathbf{B} \mathbf{R}(KT) \\&= A^{-1} [\Phi(T) - I] \mathbf{B} \mathbf{R}(KT)\end{aligned}$$

$$X[(K+1)T] = \Phi(T)X(KT) + A^{-1}(\Phi(T) - I)\mathbf{B}\mathbf{R}(KT)$$



$X(0)$ $R(t)$ 为已知时:

$$X(T) = \Phi(T)X(0) + A^{-1}(\Phi(T) - I)BR(0)$$

$$X(2T) = \Phi(T)X(T) + A^{-1}(\Phi(T) - I)BR(T)$$

...

$$X(nT) = \Phi(T)X[(n-1)T] + A^{-1}(\Phi(T) - I)BR[(n-1)T]$$



当为阶跃扰动时，系统状态方程可写成如下形式：

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BR \\ \dot{R} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ R \end{bmatrix} \quad X_R = \begin{bmatrix} X \\ R \end{bmatrix}; A_R = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_R = A_R X_R \quad X_R(t) = \Phi_R(T) X_R(0)$$

$$X_R(0) = \begin{bmatrix} X(0) \\ R(0) \end{bmatrix}, \quad \Phi_R(T) = e^{A_R T}$$



离散化状态方程为

$$X_R[(K+1)T] = \Phi_R(T)X_R(KT)$$

$X_R(0)$ 为已知后, 可得:

$$X_R(T) = \Phi_R(T)X_R(0)$$

$$X_R(2T) = \Phi_R(T)X_R(T)$$

...

$$X_R(nT) = \Phi_R(T)X_R[(n-1)T]$$

状态转移矩阵的计算是求解状态方程的关键

状态转移矩阵

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(At)^K}{K!}$$

上式在一定区间内是**一致收敛**的，**给定精度要求之后取有限项即可**，所以有：

$$\Phi(t) = \sum_{i=0}^K \frac{(At)^i}{i!}$$

项数K由精度要求确定

用级数的前三项计算

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

计算步长为1.0

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} = 2.5$$

计算步长为1/2

$$e^{\frac{1}{2}} = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} \right]^2 = 2.640$$

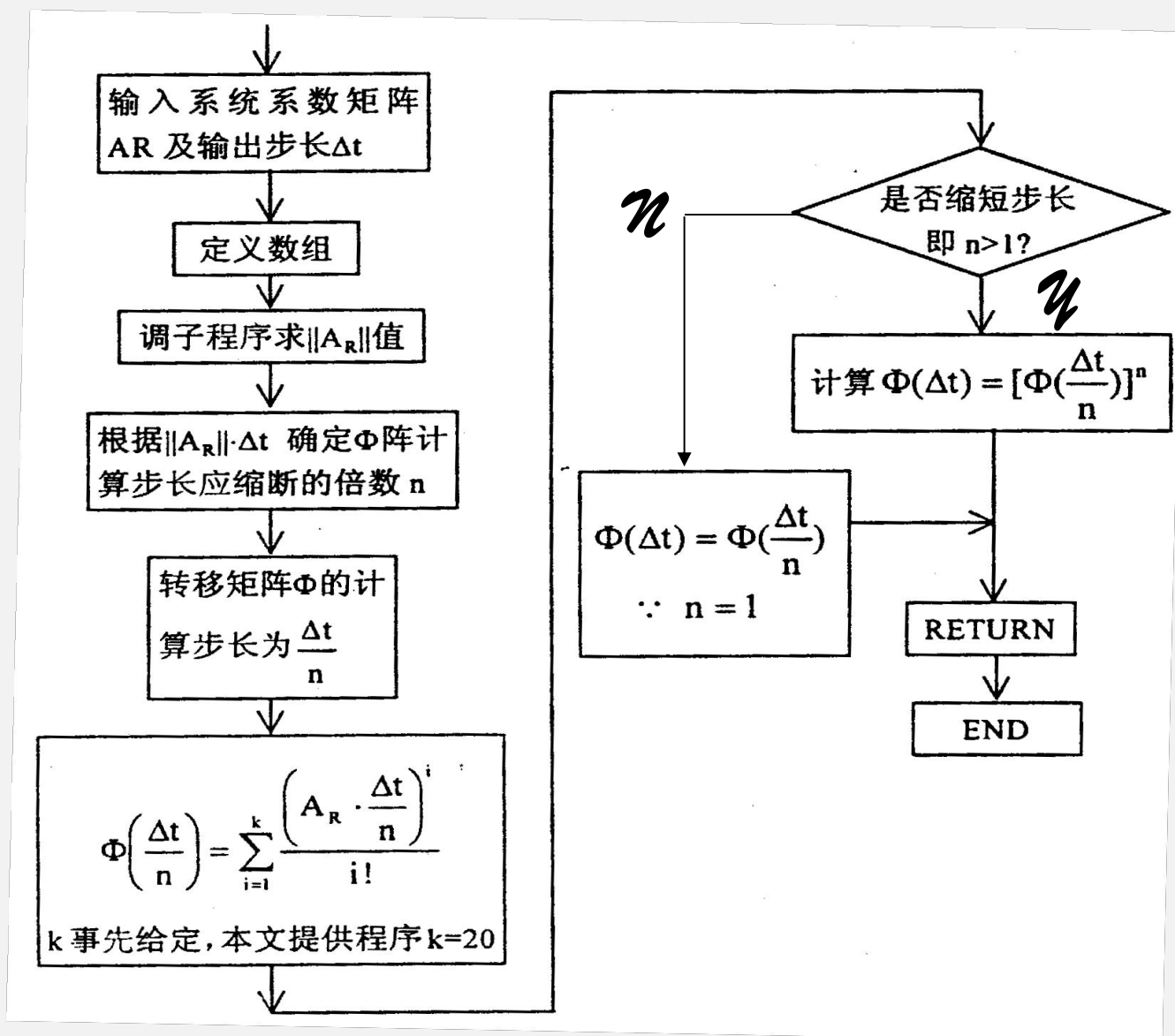
计算步长为1/8

$$e^{\frac{1}{8}} = \left[1 + \frac{1}{8} + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{2!} \right]^8 = 2.7118$$

$$e = 2.7182818284$$

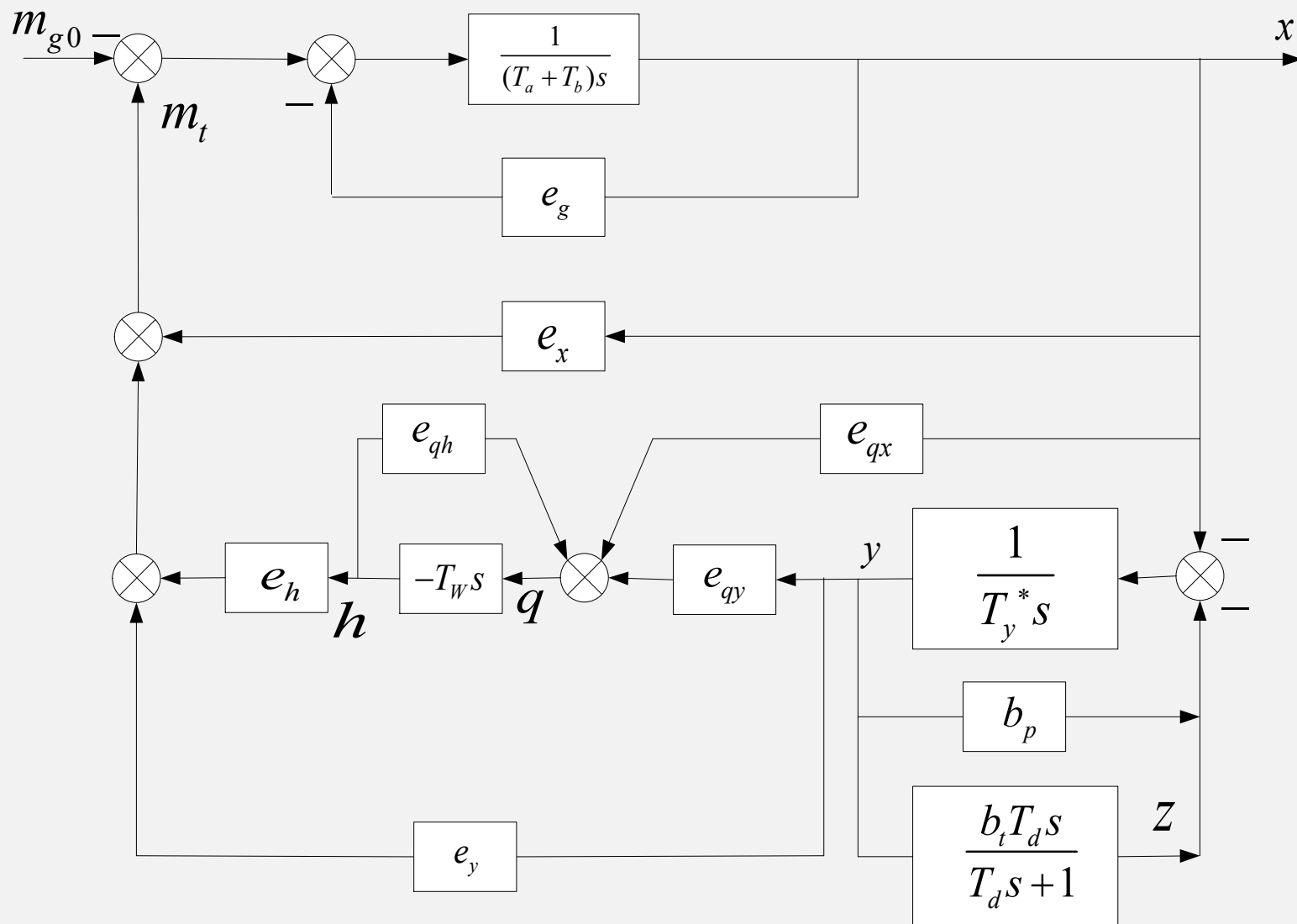
在给定计算项数下，当计算步长减小时，可明显提高计算精度。矩阵范数和输出步长的大小来确定转移矩阵计算步长。

$$n = \|A\| \cdot \Delta t$$





- 💧 **水轮机调节系统状态方程的建立**
- 💧 **水轮机调节系统的状态空间解法**





系统的传递函数为：

$$G_S(s) = \frac{x(s)}{mg_0(s)} = -\frac{(b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3)}{a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4}$$

$$e_n = e_g - e_x$$

$$a_0 = e_{qh} \cdot T_y^* \cdot T_W \cdot T_a \cdot T_d$$

$$a_1 = e_n e_{qh} T_y^* T_W T_d + e_{qh} T_y^* T_W T_a + (b_p + b_t) e_{qh} T_W T_a T_d \\ + T_y^* T_a T_d + e_h e_{qh} e_{qx} T_y^* T_W T_d$$

$$a_2 = e_n T_y^* T_d + e_n e_{qh} T_y^* T_W + T_y^* T_a + (b_p + b_t) T_a T_d + e_{qh} b_p T_W T_a \\ + [(b_p + b_t) e_n e_{qh} + e_{qh} e_y - e_{qy} e_h] T_W T_d + e_h e_{qh} e_{qx} T_W ((b_p + b_t) T_d + T_y^*)$$

$$a_3 = e_n T_y^* + b_p T_a + [e_n (b_p + b_t) + e_y] T_d + (b_p e_n e_{qh} + e_{qh} e_y - e_{qy} e_h) T_w + e_h e_{qx} T_W b_p$$

$$a_4 = b_p e_n + e_y$$



$$b_0 = e_{qh} T_y^* T_w T_d \quad b_1 = T_y^* T_d + e_{qh} T_y^* T_w + e_{qh} (b_p + b_t) T_w T_d$$

$$b_2 = T_y^* + (b_p + b_t) T_d + b_p e_{qh} T_w \quad b_3 = b_p$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_{n-1} \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} R$$

$$C(t) = \mathbf{F}^{-1}[E(s) \cdot B(s)]$$

$$= [b_m, b_{m-1}, \cdots, b_2, b_1, b_0] [X_1, X_2, \cdots, X_{m+1}]^T$$



e_x 、 e_y 、 e_h — 水轮机力矩
对转速、导叶开度、水头的传递系数

e_{qx} 、 e_{qy} 、 e_{qh} — 水轮机流量
对转速、导叶开度、水头的传递系数

T_a — 惯性时间常数

T_d — 缓冲时间常数

T_w — 水流惯性时间常数

T_y^* — 接力器时间常数

b_p — 永态转差率 b_t — 暂态转差率



e_n — 机组综合自调节系数 e_g — 负荷自调节系数

m_{g0} — 负荷增量相对值（不随系统频率变化部分）

m_g — 负荷增量相对值 m_t — 水轮机主动力矩增量相对值

x — 转速偏差相对值 y — 导叶开度偏差相对值

z — 缓冲器从动活塞
位移偏差相对值 h — 水头偏差相对值



水轮机调节系统状态方程及输出方程如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_4}{a_0} & -\frac{a_3}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} mg_0$$

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{b_3}{a_0} & -\frac{b_2}{a_0} & -\frac{b_1}{a_0} & -\frac{b_0}{a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$$



水轮机力矩方程和流量方程：

$$m_t = e_y \cdot y + e_x \cdot x + e_h \cdot h$$

$$q = e_{qy} \cdot y + e_{qx} \cdot x + e_{qh} \cdot h$$

引水系统方程式：

$$h = -T_w \dot{q}$$

水轮机发电机组及其负载运动方程式：

$$m_t - m_g = T_a \dot{x}$$

$$m_g = m_{g0} + e_g x$$

$$b_t T_d \dot{y} = T_d \dot{z} + z - (z + b_t \cdot y + x) = T_y^* \dot{y}$$

选择 x, y, h, z 为系统状态变量，控制（干扰）变量为 m_{g0}

水轮机调节系统状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \\ b_{41} \end{bmatrix} m_{g0}$$



$$a_{11} = (e_x - e_g) / T_a \quad a_{12} = e_y / T_a$$

$$a_{14} = e_h / T_a \quad a_{21} = -1 / T_y^*$$

$$a_{22} = -b_p / T_y^* \quad a_{23} = -1 / T_y^*$$

$$a_{31} = -b_t / T_y^* \quad a_{32} = -b_p b_t / T_y^*$$

$$a_{33} = -(b_t / T_y^* + 1 / T_d)$$



$$a_{41} = [(e_g - e_x) \cdot e_{qx} / T_a + e_{qy} / T_y^*] / e_{qh}$$

$$a_{42} = [b_p \cdot e_{qy} / T_y^* - e_y \cdot e_{qx} / T_a] / e_{qh}$$

$$a_{43} = e_{qy} / (T_y^* \cdot e_{qh})$$

$$a_{44} = [1 / (T_w \cdot e_{qh}) + e_h e_{qx} / (T_a \cdot e_{qh})] \cdot (-1)$$

$$b_{11} = -1 / T_a \quad b_{41} = e_{qx} / (T_a \cdot e_{qh})$$



e_x 、 e_y 、 e_h — 水轮机力矩
对转速、导叶开度、水头的传递系数

e_{qx} 、 e_{qy} 、 e_{qh} — 水轮机流量
对转速、导叶开度、水头的传递系数

T_a — 惯性时间常数

T_d — 缓冲时间常数

T_w — 水流惯性时间常数

T_y^* — 接力器时间常数



b_p —永态转差率 b_t —暂态转差率

e_n —机组综合自调节系数 e_g —负荷自调节系数

m_{g0} —负荷增量相对值（不随系统频率变化部分）

m_g —负荷增量相对值 m_t —水轮机主动力矩增量相对值

x —转速偏差相对值 y —导叶开度偏差相对值

z —缓冲器从动活塞
位移偏差相对值 h —水头偏差相对值

水轮机调节系统的干扰主要为阶跃形式的负荷干扰

$$\dot{R} = 0$$

为避免计算中求矩阵的逆

可将两种方式的状态方程写成如下形式的齐次状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ R \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_R = A_R X_R$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4/a_0 & -a_3/a_0 & -a_2/a_0 & -a_1/a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} mg_0$$

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_4/a_0 & -a_3/a_0 & -a_2/a_0 & -a_1/a_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_R = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad m_{g0}]^T$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \\ b_{41} \end{bmatrix} m_{g0}$$

$$A_R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_R = \begin{bmatrix} x & y & z & h & m_{g0} \end{bmatrix}^T$$