

SRT 创新计划专项结题报告

倒立摆控制

刘锦坤

2024 年 5 月 10 日

目录

| | | |
|----------|-----------------------------|----------|
| 1 | 摘要 | 2 |
| 2 | PD 控制参数的理论计算 | 2 |
| 2.1 | 动力学方程 | 2 |
| 2.2 | 本征模块 | 4 |
| 2.3 | PD 控制器 | 4 |
| 3 | 基于 Simulink 的控制及理论验证 | 6 |
| 3.1 | Simulink 程序说明 | 6 |
| 3.2 | PD 参数的理论解释 | 6 |
| 4 | 结论 | 6 |

1 摘要

在本次 SRT 项目中主要完成了利用 PD 控制器对倒立摆进行控制。但是在传统的 PD 控制中，PD 控制的各个参数往往难以确定，需要大量的时间和精力调节。而本次 SRT 中完成了利用模块叠加法从理论上计算 PD 控制器的参数。为此，首先通过第二类 Lagrange 方程建立了倒立摆的动力学模型，然后分析了倒立摆在 $\theta = 0$ 下的本征模块。随后设计 PD 控制器，并且利用模块叠加方法确定了 PD 控制器参数的稳定域，解释了 PD 控制中各个参数的来源。

2 PD 控制参数的理论计算

在本次 SRT 项目中，选用 PD 方法来完成对倒立摆的控制，可以建立动力学模型，对 PD 控制器的参数进行理论计算。

2.1 动力学方程

系统动力学模型示意图如图所示：

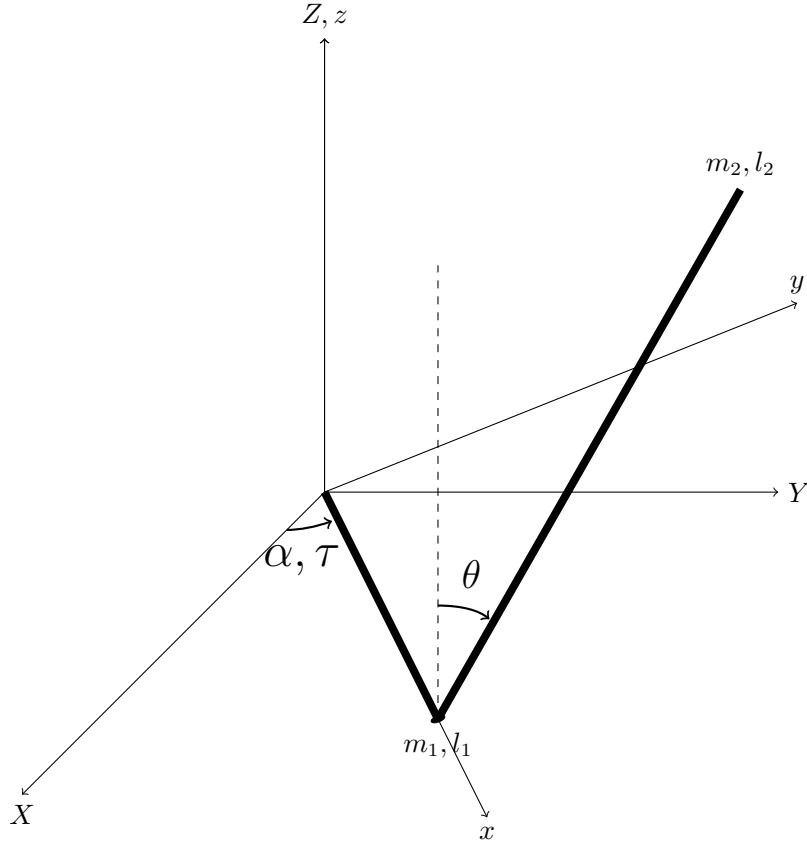


图 1: 倒立摆示意图

XYZ 坐标系为固定坐标系，而 xyz 为随着水平杆转动的坐标系。记水平杆的质量 m_1 ，长度 l_1 ，树枝干的质量 m_2 ，长度 l_2 ，水平杆的转动角度为 α ，竖直杆的转动角度 θ ，假设两杆的质量都是均匀分布。电机的驱动力矩为 τ ，重力加速度为 g ，下面从第二类 Lagrange 方程出发推倒倒立摆的动力学方程。

水平杆的动能为

$$T_1 = \frac{1}{6}m_1l_1^2\dot{\alpha}^2 \quad (1)$$

竖直杆的动能为为质心动能和相对之心动能之和，其质心速度为：

$$\vec{v} = -\frac{1}{2}l_2\dot{\alpha}\sin\theta\hat{x} + (\dot{\alpha}l_1 + \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}\cos\theta)\hat{y} - \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}\sin\theta\hat{z} \quad (2)$$

其中 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 为 xyz 坐标系各个方向的单位矢量，故其质心动能为

$$\begin{aligned} T_{2c} &= \frac{1}{2}m_2\vec{v}^2 \\ &= \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\alpha}\dot{\theta}l_1l_2\cos\theta + \frac{1}{8}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}m_2l_2^2\dot{\alpha}^2\sin^2\theta \end{aligned} \quad (3)$$

而竖直杆的相对质心动能为转动贡献，即为

$$T_{2r} = \frac{1}{24}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}m_2l_2^2\dot{\alpha}^2\sin^2\theta \quad (4)$$

系统势能为

$$V = \frac{1}{2}m_2gl_2\cos\theta \quad (5)$$

系统的 Lagrange 量为

$$\begin{aligned} L &= T - V = T_1 + T_{2c} + T_{2r} - V \\ &= \frac{1}{6}m_1l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\alpha}\dot{\theta}l_1l_2\cos\theta + \frac{1}{8}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 \\ &\quad + \frac{1}{8}m_2l_2^2\dot{\alpha}^2\sin^2\theta + \frac{1}{24}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}m_2l_2^2\dot{\alpha}^2\sin^2\theta - \frac{1}{2}m_2gl_2\cos\theta \end{aligned} \quad (6)$$

保留到二阶小量，可以得到：

$$L = \frac{1}{6}m_1l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\alpha}\dot{\theta}l_1l_2 + \frac{1}{8}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m_2gl_2\theta^2 \quad (7)$$

带入第二类 Lagrange 方程，得到

$$\begin{cases} \frac{1}{3}m_1l_1^2\ddot{\alpha} + m_2l_1^2\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\ddot{\theta} = \tau \\ \frac{1}{2}m_2l_1l_2\ddot{\alpha} + \frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_2gl_2\theta = 0 \end{cases} \quad (8)$$

记 $\mathbf{q} = [\alpha, \theta]^T$ ，有

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \boldsymbol{\tau} \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l_1^2 + m_2l_1^2 & \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \\ \frac{1}{2}m_2l_1l_2 & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}m_2gl_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

这就是倒立摆的动力学方程。

2.2 本征模块

我们先分析系统的本征模块，设其一个本征模块为 $\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\eta}_i e^{\lambda_i t}$ ，代入方程 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0$ 得到：

$$\det(\lambda_i^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\boldsymbol{\eta}_i = 0 \quad (11)$$

解特征方程得到其特征值

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \pm \sqrt{\frac{6(m_1 + 3m_2)g}{(4m_1 + 3m_2)l_2}} \quad (12)$$

对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2] \quad (13)$$

其中

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(m_1 + 3m_2)l_1^2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \sqrt{\frac{12(m_1 + 3m_2)}{m_2(4m_1 + 3m_2)l_2^2}} \begin{bmatrix} -\frac{3m_2 l_2}{2(m_1 + 3m_2)l_1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

由于存在一个 λ_2 的实部大于 0，这表明倒立摆的本征模块不是稳定的，因此需要进行控制。

2.3 PD 控制器

接下来，我们用模块叠加方法来设计 PD 控制器¹，我们实际可调节输入为 τ ，控制变量为 θ, α ，因此实际上这是一个欠驱动问题，先用模块分解法将方程 (9) 进行处理，设 $\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\eta}\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t)]^T$ 带入方程 (9)，再左乘 $\boldsymbol{\eta}^T$ ，得到

$$\begin{cases} \ddot{s}_1 - \eta_{11}\tau = 0 \\ \ddot{s}_2 - \lambda_2^2 s_2 - \eta_{21}\tau = 0 \end{cases} \quad (15)$$

且有

$$\begin{cases} \alpha(t) = \eta_{11}s_1(t) + \eta_{21}s_2(t) \\ \theta(t) = \eta_{21}s_2(t) \end{cases} \quad (16)$$

设置控制器为

$$\eta_{21}\tau = -k_1 s_1 - k_2 s_2 - c_1 \dot{s}_1 - c_2 \dot{s}_2 - \lambda_2^2 \dot{s}_2 \quad (17)$$

并记 $\mu = \eta_{11}/\eta_{21}$ ，代入方程 (15) 得到

$$\begin{cases} \ddot{s}_1 - \mu \ddot{s}_2 + \mu \lambda_2^2 s_2 = 0 \\ \ddot{s}_2 + k_2 s_2 + c_2 \dot{s}_2 + k_1 s_1 + c_1 \dot{s}_1 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

写为矩阵形式

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{K}_s \mathbf{s} = 0 \quad (19)$$

¹ 参考了赵治华老师《动力学于控制》课程讲义

其中

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 0 & \mu\lambda_2^2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

我们期望这样的控制器能够使得系统稳定, 因此我们需要对于新的模块 $\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{\xi}e^{\beta_i t}$ 所有的 β_i 的实部均小于 0. 因此我们需要满足

$$\det(\beta^2 \mathbf{M}_s + \beta \mathbf{C}_s + \mathbf{K}_s) = 0 \quad (21)$$

的 β_i 的实部全部小于 0, 这样我们就可以得到合适的 k_1, k_2, c_1, c_2 。由于我们知道在临界阻尼时, 系统的衰减速度最快, 因此我们可以设定上述特征方程的解是两个负的重实根 β_1, β_2 , 即

$$(\beta - \beta_1)^2(\beta - \beta_2)^2 = 0 \quad (22)$$

对比方程 (21), (22) 可以得到

$$\begin{cases} k_1 = -\frac{\beta_1^2 \beta_2^2}{\mu \lambda_2^2} \\ c_1 = \frac{2\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\mu \lambda_2^2} \\ k_2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + 4\beta_1 \beta_2 + \frac{\beta_1^2 \beta_2^2}{\lambda_2^2} \\ c_2 = -2(\beta_1 + \beta_2) - 2\frac{2\beta_1 \beta_2}{\lambda_2^2} \end{cases} \quad (23)$$

利用方程

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{1}{\eta_{21}}([k_1, k_2 + \lambda_2^2]\mathbf{s} + [c_1, c_2]\dot{\mathbf{s}}) \\ &= -\frac{1}{\eta_{21}}([k_1, k_2 + \lambda_2^2]\boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{q} + [c_1, c_2]\boldsymbol{\eta}^{-1}\dot{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (24)$$

就能得到 PD 控制器的参数 $K_{p\alpha}, K_{p\theta}, K_{d\alpha}, K_{d\theta}$

$$\begin{cases} \mathbf{K}_p = [K_{p\alpha}, K_{p\theta}] = -\frac{1}{\eta_{21}}[k_1, k_2 + \lambda_2^2]\boldsymbol{\eta}^{-1} \\ \mathbf{K}_d = [K_{d\alpha}, K_{d\theta}] = -\frac{1}{\eta_{21}}[c_1, c_2]\boldsymbol{\eta}^{-1} \end{cases} \quad (25)$$

其中 $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ 可以算出为

$$\boldsymbol{\eta}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{l_1^2(m_1+3m_2)}{\sqrt{3}\sqrt{l_1^2(m_1+3m_2)}} & \frac{\sqrt{3}l_1l_2m_2}{2\sqrt{l_1^2(m_1+3m_2)}} \\ 0 & \frac{l_2^2m_2(4m_1+3m_2)}{2\sqrt{3}(m_1+3m_2)\sqrt{\frac{l_2^2m_2(4m_1+3m_2)}{m_1+3m_2}}}} \end{bmatrix} \quad (26)$$

至此, 我们就完成了倒立摆的 PD 控制参数的理论计算, 只要我们选定两个负实数根 β_1, β_2 , 就能计算得到合适的 PD 控制参数使得倒立摆在 $\theta = 0$ 稳定。

3 基于 Simulink 的控制及理论验证

3.1 Simulink 程序说明

如图所示的 Simulink 程序成功的完成了对倒立摆的控制：

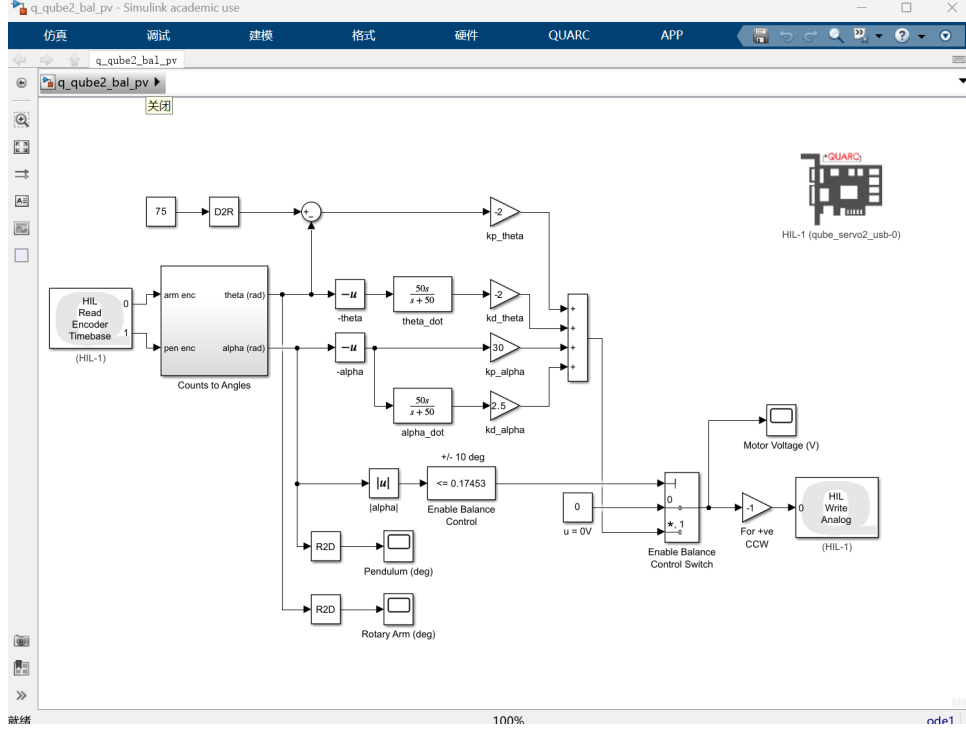


图 2: Simulink 模型

程序在 $|\theta| < 10^\circ$ 时启动 PD 控制，中从倒立摆的 Encoder 中读取得到 α, θ ，并由传递函数 $\frac{50s}{s+50}$ 滤波后得到 $\dot{\alpha}, \dot{\theta}$ ，然后经过 PD 控制器得到 τ ，作为倒立摆的输入，实现对倒立摆的倒立控制。

3.2 PD 参数的理论解释

注意到在 Simulink 程序中，PD 控制参数中的 $K_{p\theta}, K_{d\theta}$ 两项为负，而 $K_{p\alpha}, K_{d\alpha}$ 两项为正，这个符号特性并不是偶然的，事实上这时方程 (23) 的结果，在方程 (23) 中可以看出， $k_1, c_1 < 0$ 而 $k_2, c_2 > 0$ ，因此经过方程 (25) 的计算， $K_{p\theta}, K_{d\theta}$ 两项为负，而 $K_{p\alpha}, K_{d\alpha}$ 两项为正。

4 结论

本次 SRT 项目中，成功的利用模块叠加法计算了 PD 控制器的参数。也在 Simulink 程序中成功的验证了计算得到的 PD 控制器的参数的正确性，实现了对倒立摆的控制。

值得注意的是，模块叠加法的思想是将一个复杂的系统分解为多个简单的模块，这其实是振动理论中简正模块的思想。这种方法也可以用于分析其他的控制问题，其基本思路如下：

1. 建立系统的动力学模型，并且计算得到系统的动力学方程，在控制稳定点附近进行线性化
2. 计算线性化后的动力学方程的特征方程，得到系统的本征模块 $\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\eta}(t)e^{\lambda t}$

3. 添加控制器后将系统进行本征模块的分解，选择新的特征方程的解（这里选择了两个负实数重根），反解得控制器的参数。

这样通过理论计算可以得到控制器的参数，再结合实验的微调，可以大大减少调节的时间和精力。