清华大学行健书院 《大学物理实验 B》期中复习讲义

1 国际单位与单位换算

1.1 单位换算问题

国际单位制(SI)的 7 个基本单位

物理量	单位名称	单位符号
长度	米	m
质量	千克(公斤)	kg
时间	秒	s
电流	安［培］	A
热力学温度	开［尔文］	K
物质的量	摩［尔］	mol
发光强度	坎［德拉］	cd

图 1 SI 国际单位表

如图 1 所示，整个物理学大厦的基本物理量共计 7 个，与之对应的有 7 个国际单位（SI 国际单位）：长度 m，时间 s，质量 kg，热力学温度 K，电流 A，光强度 cd，物质的量 mol。除此之外的单位均为导出单位（或间接单位），诸如我们课本中常见的力单位牛顿（N）、能量单位焦耳（J）等。

单位之间的乘除运算与数值计算类似，例如：m*m=m2，m/s=ms-1 等等。

实际中，所有的物理量单位都可以用 7 个基本国际单位进行表示。其中，以力的单位牛顿为例，根据公式 $F=ma$，可以将间接单位 N 转化为 SI 国际单位：N=$kg\ m/s^2$。

【例题 1】将电压单位伏特（V）转化为 SI 国际单位（　　）

A. $\frac{kg\cdot m}{A\cdot s^3}$

B. $\frac{kg\cdot m^2}{A\cdot s^2}$

C. $\frac{kg\cdot m^2}{A\cdot s^3}$

D. $\frac{kg\cdot m}{A\cdot s}$

解答：根据等式两边物理量相同，故通过构建电压 U 的 SI 物理的表达形式，进而得到国际基本单位的表达形式。

$$U=\frac{W}{Q}=\frac{Fs}{It}=\frac{ma\cdot s}{It}$$

将其转化为单位：

$$V=\frac{kg\cdot m\,/\,s^2\cdot m}{A\cdot s}=\frac{kg\cdot m^2}{A\cdot s^3}$$

故答案选【C】。

1.2 国际单位的应用

除此之外，单位的变换也能够用新物理量单位的判断。由于物理量由数值和单位构成，因此等式两边的物理量单位一致。通过构建出待求未知量的物理公式，利用两端的物理量单位一致，得到未知物理量的单位。

【例题 2】在天体物理中，有一个理想黑体辐射公式，即黑体辐射的热功率 P，与物体表面积 A 和表面温度 T 存在下述公式：

$$P = \sigma A T^4$$

其中，σ 为 Stefan-Boltzmann 常数。请问常数 σ 的 SI 国际单位是

A. $kgm^{-1}s^{-3}K^{-4}$

B. kgms$^{-3}K^{-4}$

C. $kgs^{-3}K^{-4}$

D. $kgs^{-2}K^{-4}$

答案：C

2、有效数字或计算数字保留问题

有效数字就是一个数从左边第一个不为 0 的数字数起到精确的数位止，所有的数字（包括 0，科学计数法不计 10 的 N 次方）。

当数字中没有小数点时，末尾的零不一定是有效数字。需要使用科学计数法。

2.1 加减法规则（看小数点后位数，就低原则）

首先确定数据中最小的小数位数，然后对数据进行加减计算，计算结果使小数点后保留相同的最低小数位数。采用四舍五入的数据保留放水。

基本原理在于较低精度的数据直接拉低的整体的测量精度，可以类似于“一颗老鼠屎坏了一锅粥”。

【例题 3】计算 50.1+1.45+0.5812=_______

上例子中，50.1 小数位数为 1 位，1.45 小数位数为 2 位，0.5812 小数位为 4 位，因此最低位数为小数点后 1 位。求和后，数据为 52.1312，保留一位小数，故答案为 52.1。

2.2 乘除法规则（看有效数字个数，就低原则）

确定各乘数因子中的有效数字个数，最少的有效数字个数即为乘除后的有效数字个数。

所以，找到乘数中最少的有效数字个数，先对数据进行乘除运算，将计算结果保留相同有效数字。

【例题 4】计算 0.0121×25.64×1.05782=_______

上例子中，0.0121有3位有效数字，25.64有4位有效数字，1.05782有6位有效数字，根据就低原则，最终结果应保留3位有效数字。$0.0121\times25.64\times1.05782=0.328$

2.3 对数、指数、三角函数运算规则

在很多的测量中，会涉及到中间的数据处理，常见的一些函数的数据处理的保留规则：

（1）对数函数运算

结果中的**小数点保留位数**和**真数有效数字位数**相同。

举例，测量某长度L=20.0mm，取 $\log(20.0)=1.301029996\approx1.30$。真数为20.0，有效数字有3位，所以最后修约为了3位小数1.301。

但是，如果数据改下单位，运算结果如何？L=2.00cm，取 $\log(2.00)=0.301029996\approx0.301$。可以看到，改变单位仅仅使小数点前的数据变化，但小数点后的数据不变，这就是为什么要求小数点的保留位数与真数有效数字位数相同的原因。

（2）指数函数运算

结果中的有效数字位数和**指数小数点后位数**相同。

例如：$10^{1.23}=16.98243652\approx17$。

上例中，10的指数1.23，小数点后位数是2位，得出来的结果也就保留两位有效数字。

（3）三角函数运算

结果中的有效数字位数和**角度的有效数字位数**相同。

例如：$\sin(30°00')=0.5=0.5000$

上例中，30°00'这个角度是4位有效数字，结果也就保留4位有效数字0.5000。

【例题5】下列关于运算后保留数据位数的正确的是（　　）

A. $\lg(2.30)=0.3617$

B. $\ln(1.1)=0.10$

C. $e^{3.125}=22.760$

D. $\cos(40°00')=0.766$

答案：B

2.4 修约规则

通常，无特殊说明情况下，采用的数字修约规则是“四舍五入”，但是在一些统计规则中，采用的是“四舍六入五成双”的规则。从修约后的平均值看，“四舍五入”的数据会使期望值偏大，而“四舍六入五成双”则更接近真值。

例如：1.15+1.25+1.35+1.45=5.2。若按四舍五入取一位小数计算：1.2+1.3+1.4+1.5=5.4。按“四舍六入五成双”计算，1.2+1.2+1.4+1.4=5.2，舍入后的结果更能反映实际结果。

需要注意，上述例子采用的是先修约再加和的形式。当然，在数据处理的中间过程会存在先原始数据加和，再进行修约。具体修约规则，根据实际需求或考试规则进行确定。

“四舍六入五成双”具体规则如下：“四” 是指≤4 时舍去。"六"是指≥6 时进上。"五"指的是根据 5 后面的数字来定，当 5 后有数时，舍 5 入 1；当 5 后无有效数字时，需要分两种情况来讲：

（1）5 前为奇数，舍 5 入 1；

（2）5 前为偶数，舍 5 不进（0 是偶数）。

举例如下：

（1）4 舍 6 入

9.8249=9.82

9.82671=9.83

（2）5 成双

①5 后有数，直接进一

9.83501=9.84

9.82501=9.83

②5 后无数，逢奇进一（凑偶）

9.8350=9.84

9.8250=9.82

【例题 6】采用“先修约再求和”，根据四舍六入五成双的修约规则，保留小数点一位的状态下，下列修约正确的是（　　　　）

A. 1.150+1.251+1.352+1.453=5.2

B. 1.150+1.251+1.352+1.453=5.3

C. 1.150+1.251+1.352+1.453=5.4

D. 1.150+1.251+1.352+1.453=5.5

答案：根据“四舍六入五成双”的规则，修约后，1.2+1.3+1.4+1.5=5.4，选 C。

3. 系统误差与随机误差

系统误差（systematic error）指由测量系统造成的测量值与真实值之间的偏差，具有重复性、单向性等特点。诸如测量前未对仪表归零（zero error）、未对测量工具正确校准（wrongly calibrated scale）、测量方法等而导致的非实验人员主观原因产生的误差都属于系统误差。

随机误差（random error）对同一量的多次重复测量中绝对值和符号以不可预知方式变化的测量误差分量。测量数值分布在真实值的两侧，具有离散性，可通过多次测量将之减小并趋向于零。

【例题 7】测量误差可分为系统误差和随机误差，属于系统误差的有 (　　　)

A：由于多次测量结果的随机性而产生的误差；
B：由于测量对象的自身涨落所引起的误差；
C：由于实验者在判断和估计读数上的变动性而产生的误差。
D：由于实验所依据的理论和公式的近似性引起的测量误差；
答案：D

4. 不确定度（uncertainty）

4.1 不确定度的概念及分类

当我们测量物体的时候，总是会有一个误差范围，这个范围就是不确定度。某种意义上来说，不确定度是一定概率下的误差限值。

总不确定度按照统计和非统计进行区分，大致分为两类，即 A 类和 B 类。

A 类不确定度$\boldsymbol{\Delta_A}$，经常就是指用统计方法估算出来的那个分量，也就是随机误差分量。例如多次测量取平均的标准差、线性拟合的斜率或者截距的标准差等等。这些都跟统计有关。

B 类不确定度$\boldsymbol{\Delta_B}$，通常指的是用非统计方法估算的那个分量，就是未确定的系统误差。一般在大学物理里面，主要是指仪器的系统误差，例如电流表的测量精度、刻度尺的最小分度值等。

【例题 8】请问下列哪些误差属于 A 类不确定度（）
A. 线性拟合斜率的标准差
B. 螺旋测微计的最小精度为 0.01mm
C. 数字电压表的精度 0.01V
D. 温度计的最小分度值为 0.1℃
答案：A

总的不确定度由用 A 类和 B 类平方和取根号进行合成，公式如下：

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2}$$

【例题 9】已知螺旋测微计测量钢丝直径的 A 类不确定度为Δ_A=0.003mm，螺旋测微计的 B 类不确定度为Δ_B=0.004mm。求总的不确定度。

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} = \sqrt{0.003^2 + 0.004^2} = 0.005\ mm$$

4.2 不确定度的表征

不确定度的表征形式有两种，即绝对不确定度和相对不确定度两种形式。

4.2.1 绝对不确定度表达形式：

完整的测量结果应表示为：$Y = y \pm \Delta$y。其中，测量真值为 y，绝对不确定

度为Δy。

以电阻测量为例：$R = 913.0 \pm 1.4\ \Omega$。

需要注意，总不确定度 Δ 的有效位数一般取 2 位（首位 3 以上可取 1 位）。书写 $Y=y\pm\Delta y$ 中，被测量值 y 的末位要与不确定度 Δy 的末位对齐，即不确定的位数决定了测量真值的精度。

举例如下，测得体积 V 的数值和不确定度：$V = \frac{\pi}{4}(D_2^2 - D_1^2)h = 9.43675\text{cm}^3$ 和$\Delta_V = 0.08362\text{cm}^3$，最终书写结果为：$V= 9.44\pm0.08\ \text{cm}^3$ 或者 $V= 9.437\pm0.084\ \text{cm}^3$

4.2.2 相对不确定度表达形式：

此外，还可以写成相对不确定的形式。相对不确定度的定义：

$$\Delta_y\% = \frac{\Delta_y}{y} \times 100\%$$

最终书写结果：$Y=y\pm\Delta_Y\%$。

以上面的体积题为例：$V = 9.44\pm0.08\ \text{cm}^3$，计算相对不确定度为$\Delta_V\%=0.85\%$。最终书写：$V=9.44\ \text{cm}^3\pm0.85\%$。

4.3 不确定度的计算

4.3.1 直接测量的不确定度

直接给出或者可以测出来的误差，称之为直接测量值误差。

一般仪器标出的精度或者最小刻度成为单次测量误差。在科研实验中，多次测量的误差是指多次测量值的误差估算（类似标准差等）。上述均属于直接测量误差。

4.3.2 间接测量的不确定度

有时候测量得到数据，不能直接表征我们所需的物理量，此时需要进行运算。比如直接测量长度 L 和宽度 W，通过间接计算得到面积 A，此时面积 A 的不确定度就需要通过 L 和 W 的不确定度进行合成。

因此，类似于面积 A 这种无法直接测量得到的数据其对应的误差为间接测量误差。

假设间接测量的物理量 Y 是直接测量数据 x_1、x_2、x_3 等的函数：

$$Y = f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots)$$

直接测量物理量 x_i（i=1,2,3,…）的不确定度为 Δx_i，它们所引起数值 Y 的绝对不确定度为 ΔY。

针对于 Y 的函数形式，对于此间接不确定计算有两种形式，分别是加减形式和乘除形式。

加减形式：（使用绝对不确定度）

$$\Delta_Y = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta_{x_i}\right)^2}$$

乘除形式：（使用相对不确定度）

$$\frac{\Delta_Y}{Y} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial lnf}{\partial x_i}\Delta_{x_i}\right)^2}$$

当然在实际应用中，下面间接不确定的计算实用公式更为方便。其使用基本原则：**加减用绝对不确定度，乘除用相对不确定度**。

（1）$\phi = x \pm y$，$\Delta_\phi = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$

（2）$\phi = x \cdot y$ 或 x/y，$\frac{\Delta_\phi}{\phi} = \sqrt{\left(\frac{\Delta_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_y}{y}\right)^2}$

（3）$\phi = x^k y^m$，$\frac{\Delta_\phi}{\phi} = \sqrt{\left(k\frac{\Delta_x}{x}\right)^2 + \left(m\frac{\Delta_y}{y}\right)^2}$

【例题 10】已知立方体糖块的边长 L=10mm，其边长 L 对应不确定度为 Δ_L=±2mm。下列选项中关于该糖块体积的不确定度 Δ_V 正确的是（ ）

A. Δ_V=±6 mm^3

B. Δ_V=±8 mm^3

C. Δ_V=±400 mm^3

D. Δ_V=±600 mm^3

答案：D

求解过程如下，$V=L^3$，选用上面的实用公式（3），$\frac{\Delta_V}{V} = \sqrt{\left(3\frac{\Delta_L}{L}\right)^2} = 3\frac{\Delta_L}{L}$，故 $\Delta_V = 3\frac{\Delta_L}{L}V$，带入数据计算得 Δ_V=600 mm^3，选 D。

4.3.3 多次测量取平均的不确定度

在中学中，我们就学习到，多次测量取平均可以减小误差。那么，不确定度与将多次测量次数之间存在何种定量关系？

单次测量取平均。假设某物理量 X 的单次测量不确定度 Δx，测量 n 次取平均后，其平均值的不确定度为$\Delta_{\bar{x}}= \frac{S_x}{\sqrt{n}}$，其中$S_x$为所有测量结果的标准差。

累计测量取平均。如果是积累式测量再取平均，例如计算单摆的周期，单次测量误差较大，采用连续测量 n 次的方式降低周期测量误差，其不确定度为$\Delta_{\bar{x}}= \frac{\Delta_x}{\sqrt{n}}$。

【例题 11】某个计时器的精度是 0.1s，当用其测量单摆的周期时，认为其每个周期的测量的不确定度都是 0.1s。如果要让单次周期的相对不确定度减小为原来的

10%，应该至少连续测量多少次才符合要求（　　）

A. 10 次　B. 100 次　C. 1000 次　D. 10000 次

答：积累式测量再取平均，其不确定度为$\Delta_{\bar{x}}=\frac{\Delta_x}{\sqrt{n}}$。所以，$\sqrt{n}$=10，故 n=100，选 B。

4.3.4　t 因子及统计修正

由于咱们的测量次数并不是无限的数据，因此，数据的误差估计实际上是有个统计概率的。也就是说，误差在有限次测量范围内也是有误差的。

在我校的实验教学中，数据的置信概率为 95%。因此，在这种状态下，A 类误差估计（不确定度）需要做一个修正，这个修正因子(系数)称之为 t 因子。例如，多次测量 Y 取平均后得到数据的标准差 S_y，则测量数据 Y 的 A 类不确定度为：

$$\Delta_A= t_{\xi}(\nu)S_{\bar{y}} = \frac{t_{\xi}(n-1)}{\sqrt{n}}S_y$$

式中，n 为测量数据的个数，υ 为测试数据的自由度。因为只有两个数据才有平均的概念，因此多次测量取平均后，自由度要比数据个数少一个，即 υ=n-1。置信概率 95%的 t 因子可以查表，表格如下：

自由度 ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_P(\nu)$	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23
自由度 ν	12	15	20	30	40	50	60	70	100	∞
$t_P(\nu)$	2.18	2.13	2.09	2.04	2.02	2.01	2.00	1.99	1.98	1.96

最终不确定度合成如下：

$$\varDelta=\sqrt{\varDelta_A^2+\varDelta_B^2}=\sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}S_y\right)^2+\varDelta_{仪}^2}$$

【例题 12】对用螺旋测微计测量钢丝直径(单位 mm)，仪器不确定度 $\Delta_{仪}$=0.004mm。6 次测量结果分别为： y_i=0.245mm, 0.251mm, 0.247mm, 0.252mm, 0.254mm, 0.251mm。其直径平均值$\bar{y}$为 0.2500mm，标准差为 Sy=0.0033mm。已知自由度 υ=5 的 t=2.57。求 y 总的不确定度和最终测量数据。

答：

$$\Delta=\sqrt{{\Delta_A}^2+{\Delta_B}^2}=\sqrt{\left[\frac{t(5)}{\sqrt{n}}S_y\right]^2+\Delta_{仪}^2}=0.005\text{mm}$$

测量结果为：y = 0.250±0.005 mm

除了常见的多次测量取平均值以外，常见的数据处理还有线性拟合。常见的线性拟合函数为 $y = a+bx$，其中 a 为截距，b 为斜率。如果通过软件拟合得到斜率的标准偏差 S_b 和截距的标准偏差 S_a，则线性拟合对应的斜率和截距的不确定度计算如下：

$$\Delta_b = t(n-2)\cdot s_b$$
$$\Delta_a = t(n-2)\cdot s_a$$

其中，n 为拟合的数据个数。由于 2 个点才能唯一确定一个直线，因此，数据自由度 υ 要比数据个数 n 少 2，这就是为什么上式中 t 因子的自由度 $\upsilon=n-2$。

【例题 13】在弗兰克赫兹实验中，测得 6 组扫描电压，对 6 组数据进行线性拟合，计算 Ar 原子的第一激发态电压。其中，拟合直线的斜率即为第一激发态电压。利用 MATLAB 进行拟合后，得到斜率 $b=U_g$=12.13314V，斜率标准差 S_b=0.162086V。已知，电压表的仪器分度值为 0.01V，求 Ar 原子的第一激发电压的不确定度及最终书写形式。

答：

线性拟合，数据自由度要减 2，即 $\upsilon=n-2=4$。查表 t 因子 $t(4)=2.78$。

$$\Delta_A = t_p(\upsilon)S_b = t_p(4)\times S_b = 0.4506V$$

$$\Delta_B = \Delta_{仪} = 0.01V$$

$$\Delta U_g = \sqrt{\Delta_A^2+\Delta_B^2} = \sqrt{0.4506^2+0.01^2} = 0.45\mathrm{V}$$

最终得到氩原子的第一激发电位：

$$U_g = 12.13 \pm 0.45\ V$$

注意，不确定度计算的中间过程，可以保留较多的位数。但是在最终书写时，保留 2 位（首位 3 以上可取 1 位）。

5. 作图规则与线性拟合

5.1 作图规则

考虑诸多同学在报告以及后续的科研论文撰写作图的规则不熟悉，有必要在这里再描述一下作图的规则。

（1）需要选择合适的标度（Scale），使得数据点占据图表的 50%以上的空间范围。

（2）正确标注横纵坐标及单位。

（3）数据点予以清晰标注，可以用•或×。

（4）图的下方一定标注图注。

（5）如有曲线拟合，请给出拟合曲线函数及相关性系数 r（可在图中或下方正文中予以标注）。

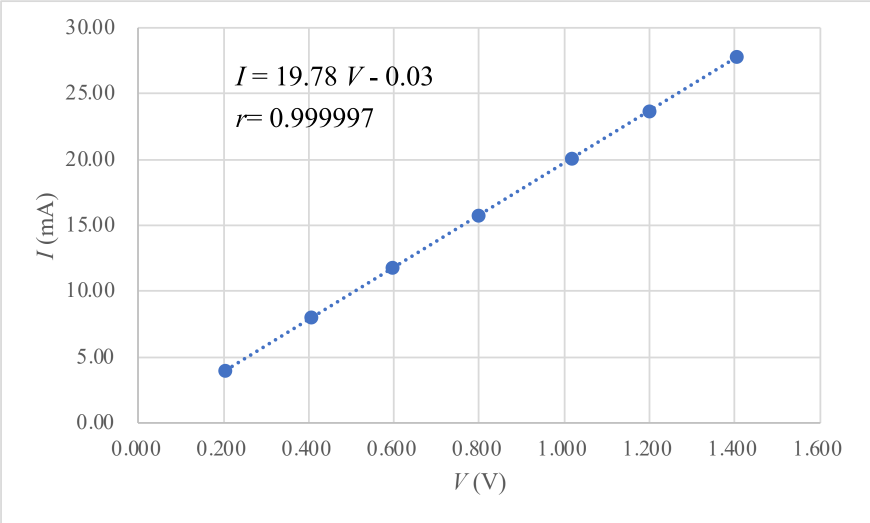

图 2 作图及线性拟合示例

5.2 线性拟合

在科研数据处理中，有时会采用线性拟合，许多非直线函数的拟合也可以转化为直线做最小二乘法求解。

线性拟合的常用软件的操作手册（诸如 Excel、Origin、MATLAB）在网络学堂中给出，也可以参加 B 站很多 up 主提供的教学视频。

5.3 线性拟合的数据保留规则

$$\boldsymbol{y=a+bx}$$

未估计不确定度时，截距 a、斜率 b、相关系数 r 有效位数简化按以下规则处理：

（1）截距 a 末位至少与因变量 y **小数末位取齐**

（2）斜率 b 有效数字位数与自变量 x 的**有效数字位数一致**

（3）相关系数 r 至少保留一个**非 9** 的数字，相关系数**只舍不入**。

即：**截距看纵，斜率看横，r 值非 9 不入。**

【例题 14】

测量的电压 V 的数据和电流 I 数据如下：

V/V	1.018	1.201	1.404	1.613	1.804	2.000	2.202
I/mA	20.10	23.70	27.77	31.92	35.72	39.63	43.65

进行 I-V 图线性拟合，其中横轴为 V，纵轴为 I，关于线性拟合曲线参数书写正确的是：

A. I = 19.780 V - 0.033, r=0.99999

B. I = 19.780 V - 0.03, r=0.999997

C. I = 19.78 V - 0.033, r=0.999997

D. I = 19.78 V - 0.03, r=0.999997

答案：D。**截距看纵：**纵轴为 I，小数点为 2 位，故截距保留 2 位小数点（百分位）。**斜率看横：**横轴为 V，有效数字位数 4 位，故斜率保留 4 位有效数字。