清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 = 数理方程引论

试卷类型 =A

考生姓名 =　　　　　　学号 (ID)=　　　　　　所属院系 =

本考试时间 2011 年 1 月 9 日， 14:30 pm – 17:00 pm (2.5 小时). 本次考试总分 = 70+6. **所有选择题都是单选题**. 如果写不下你的解答，请另外附纸，写清楚姓名学号，并 **牢固粘贴** 在试卷最后一页。

§1　客观题 —— 考虑下面的圆域上的一系列问题， 2×7=14 分

已知在直角坐标到极坐标的变换 $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ 下，有 Laplace 算子的关系：

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

这里的函数 $u = u(x, y) = u(\rho, \theta)$. 考虑 Laplace 方程定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad \rho > 1, \quad \theta\in\mathbb{R} \\ u(1,\theta) = \cos\theta, \quad \theta\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

1. 考虑到本问题的物理意义，作为合理的自然边界条件，下列选项中正确的是（　）

   A　$|u(+\infty,\theta)| < \infty$

   B　$\lim_{\rho\to 1+}|u(\rho,\theta)| = 0$

   C　$|u(0+,\theta)| = 0$

   D　$|u(0+,\theta)| < \infty$

2. 使用极坐标下的分离变量法，不考虑初始条件，设特解 $u = R(\rho)\,\Phi(\theta)$. 代入方程组中的泛定方程，得到的正确的比例式是下列哪一个？（　　）

   A　$\dfrac{\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho}}{R} = \dfrac{\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}}{\Phi}$

   B　$\dfrac{\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho}}{R} = -\dfrac{\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}}{\Phi}$

   C　$\dfrac{\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho}}{R} = \dfrac{\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}}{\Phi}$

   D　$\dfrac{\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{dR}{d\rho}}{R} = -\dfrac{\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}}{\Phi}$

3. 令上述比例为常数 λ, 由此引出的正确的特征值问题，是下列哪一个？（　　）

A $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\lambda\Phi=0,\quad \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)$

B $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\lambda\Phi=0,\quad \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)=0$

C $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}-\lambda\Phi=0,\quad \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)$

D $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}-\lambda\Phi=0,\quad \Phi'(\theta)=\Phi'(\theta+2\pi)=0$

4. 该特征值问题的正确解，是下列哪一个？(　　)

A $\lambda_n=n^2,\Phi_n=C_n\sin(n\,\theta),\quad n=1,2,\ldots$

B $\lambda_n=n^2,\Phi_n=C_n\cos(n\,\theta),\quad n=0,1,2,\ldots$

C $\lambda_n=n^2,\Phi_n=A_n\cos(n\,\theta)+B_n\sin(n\,\theta),\quad n=1,2,\ldots$

D $\lambda_0=0,\Phi_0=C_0;\ \lambda_n=n^2,\Phi_n=A_n\cos(n\,\theta)+B_n\sin(n\,\theta),\quad n=1,2,\ldots$

5. 针对上述特征值问题的解，写出相应的 $R=R(\rho)$ 的解 (只写结果，不必写出求解过程).

6. 不考虑边界条件，则泛定方程的通解表达式为下列哪一个？(　　)

A $u=\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n\,\rho^{-n}\sin(n\,\theta)$

B $u=C_0\ +\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n\,\rho^{-n}\cos(n\,\theta)$

C $u=C_0\ +\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho^{-n}\left(A_n\cos(n\,\theta)+B_n\sin(n\,\theta)\right)$

D $u=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho^{-n}\left(A_n\cos(n\,\theta)+B_n\sin(n\,\theta)\right)$

7. 结合边界条件，求出本定解问题的最终解是 (只写结果，不必写出求解过程):

$$u(\rho,\theta)=$$

§2　客观题 —— 考虑下面的定解问题，4×4=16 分

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos t, & 0<x<l,t>0\\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0, & t>0\\ u(x,0)=\cos(\dfrac{\pi}{l}x), & 0\le x\le l\end{cases}\tag{2}$$

其中 a,l 都是正常数.

1. 考虑本问题相应的齐次泛定方程和齐次边界条件:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<l,t>0\\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0, & t>0\end{cases}\tag{3}$$

由此使用分离变量法，引出的正确的特征值问题，是下列哪一个？(　　)

A $X^{'}+\lambda X=0,\quad X'(0)=0,\ X'(l)=0$

B $X^{''}+\lambda X=0,\quad X'(0)=0,\ X'(l)=0$

C $X^{''}+\lambda X=0,\quad X(0)=0,\ X(l)=0$

D $X^{'}+\lambda X=0,\quad X(0)=0,\ X(l)=0$

2. 承上，得到的正交函数系是下列哪一个？（ ）

A $\sin(\frac{k\pi}{l}x),\qquad k=1,2,\ldots$

B $\{\sin(\frac{k\pi}{l}x)\}_{k=1}^{\infty}\cup\{\cos(\frac{k\pi}{l}x)\}_{k=0}^{\infty}$

C $\cos(\frac{k\pi}{l}x),\qquad k=1,2,\ldots$

D $\cos(\frac{k\pi}{l}x),\qquad k=0,1,2,\ldots$

3. 以下记:

$$T_k(t)=e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t},$$

则齐次问题 (3) 的通解，是下列哪一个？（ ）

A $u=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_kT_k(t)\cos(\frac{k\pi}{l}x)$

B $u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_kT_k(t)\cos(\frac{k\pi}{l}x)$

C $u=A_0T_0(t)\ +\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k(t)\Big[A_k\cos(\frac{k\pi}{l}x)+B_k\sin(\frac{k\pi}{l}x)\Big]$

D $u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_kT_k(t)\ \sin(\frac{k\pi}{l}x)$

4. 对定解问题 (2) 使用恰当的叠加转化和系数变易法，最终解是 (只写结果，不必写出求解过程)：

$$u(x,t)=$$

§3 客观题 —— 考虑下面的定解问题， 3×4=12 分

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x}{2}, & 0<x<\pi, t>0\\ u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=1, & t>0\\ u(x,0)=\sin x+\sin\dfrac{x}{2},\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{(x,0)}=0, & 0\le x\le\pi\end{cases}\tag{4}$$

1. 设 $u(x,t)=v(x,t)+W(x)$，下列选项中的哪个 $W(x)$ 使得相应的 v 的定解方程既是齐次泛定方程，又是齐次边界条件？（ ）

A $W=\frac{1}{4}\sin(\frac{x}{2})$

B $W=x$

C $W=\sin(\frac{x}{2})$

D $W=-\sin(\frac{x}{2})$

2. 对 v 的定解问题使用分离变量法，得到的正确的特征值问题是下列哪一个？（　　）

A $X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0,\ X(\pi) = 0$

B $X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\pi)$

C $X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0,\ X(\pi) = 1$

D $X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0,\ X'(\pi) = 1$

3. 由此定解 $v = v(x,t)$，正确的是下列哪一个？（　　）

A $\frac{1}{2}\cos(t)\ \sin(x)$

B $\cos(t)\ \sin(x)$

C $\sin(t)\ \cos(x)$

D $\sin(t)\ \sin(x)$

4. 本定解问题的最终解是 (只写结果，不必写出求解过程)：

$$u(x,t) =$$

§4 简答题 —— 考虑下面的区域上的定解问题， 8 分

设 $V = \left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2<1\right\}$ 是三维空间中的单位球体。 S 是其边界：

$$S = \left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\right\}$$

A: 设 M_0 是 V 中任意固定点， $M = (x,y,z)$ 为 V 中任意点，函数 $G = G(M_0, M)$ 是下面 Laplace 方程的 Dirichlet 内问题 (5) 的 Dirichlet-Green 函数。

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0; & \text{inside} \quad V; \\ u|_{(x,y,z)} = f(x,y,z); & \forall\ (x,y,z) \in S. \end{cases} \tag{5}$$

其中 f 是定义在 S 上的 C^1 函数。具体地，

$$G = G(M_0, M) = \frac{1}{4\pi r} - v, \qquad r = |M_0M| \qquad \text{为 } M_0 \text{ 与 } M \text{ 的距离}$$

1. (2 分) 不必证明，请写出函数 $v = v(M_0, M)$（即 Green 函数）所满足的微分方程及相应的边界条件：

2. (2 分) 假设函数 v 已经得到，不必证明，请直接写出方程 (5) 的解在 M_0 处的表达式 $u(M_0) =?$

B: 以下取特定的 $M_0=(0,0,0)$ 为 V 的球心.

1. (2 分) 对上述固定的 $M_0=(0,0,0)\in V$, 求出该区域的 Green 函数 v.（不必论证, 只需写出结果即可）

2. (2 分) 考虑 Dirichlet 内问题 (5), 写出它的解 u 在 $M_0=(0,0,0)$ 的表达式.（不必论证，只需写出结果即可）

§5 简答题 —— 考虑下面的定解问题， 8 分

对无界的细弦上的波动方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), & -\infty<x<+\infty \end{cases} \tag{6}$$

(其中 $a>0$ 是常数， $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 是性质足够好的函数) 其解的达朗贝尔 (D'Alembert) 公式如下：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

1. (2 分) 如果上述方程中 $\varphi(x)=\sin(x)$, $\psi(x)=\frac{2ax}{(1+x^2)^2}$, 求 $u(x,t)=?$ (给出明确结果，但不必写出详细的计算过程)

2. (4 分) 求解，一端固定的半无界的细弦上的波动方程 (写出明确的结论，主要的依据和过程):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<+\infty, t>0 \\ u(x,0)=J_2(x), \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=2aJ_3(x), & 0\le x<\infty, \\ u(0,t)=0, & t>0 \end{cases} \tag{7}$$

(其中 J_2, J_3 是 Bessel 函数．下同)

3. (2 分) 求解，一端自由的半无界的细弦上的波动方程 (写出明确的结论，主要的依据和过程):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,0) = x^2, \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 2ax^3, & 0 \le x < \infty, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{8}$$

§6 按规定步骤综合解答， 6 分

对无界的细杆上的热传导方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{9}$$

(其中 $a > 0$ 是常数， $\varphi(x)$ 是性质足够好的函数) 为求其解的表达式，请严格按照下述过程求解．以下设：在关于自变量 $x \leftrightarrow \omega$ 的 Fourier 变换，和在关于自变量 $t \leftrightarrow p$ 的 Laplace 变换下：

$$u(x,t) \leftrightarrow U(\omega,t) \leftrightarrow \widetilde{U}(\omega,p), \qquad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(\omega).$$

1. (1 分) 写出对方程组 (9) 的 x- 变量进行 Fourier 变换得到的结果是什么样的方程组？（不必求解 $U(\omega,t)$ ）

2. (1 分) 进一步，求出对 t- 变量进行 Laplace 变换得到的结果 $\widetilde{U}(\omega, p)=$?

3. (2 分) 对上述 $\widetilde{U}(\omega, p)$, 进行对 p- 变量的 Laplace 逆变换，得到的结果是 $U(\omega, t)=$?

4. (2 分) 求出最终的 $u(x,t) = $?

§7 综合解答 —— 写出明确结论和主要的计算过程， 6 分

已知 $f(x)=1-x^2$ 在区间 $(0,1)$ 上展开成为 $J_2(\mu_m^{(2)}x)$ 的级数： $1-x^2=\sum_{m=1}^{\infty}\big(C_m J_2(\mu_m^{(2)}x)\big)$. 求 $C_m=$?

§8 附加题 —— 写出主要计算过程， 6 分

令正数 $R = \frac{\mu_1^{(0)}}{2}$. 求解定解问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\nabla^2 u = a^2(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}), & 0 < \rho < R,\ t > 0, \theta \in \mathbb{R} \\
u(\rho,\theta,0) = \rho\cos\theta + \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\frac{\rho^m}{m!})^2, & 0 < \rho \le R, \\
u(R,\theta,t) = R\cos\theta, & t > 0.
\end{cases}
\tag{10}
$$

(其中 $a > 0$ 是常数)