

# SRT 创新计划专项结题报告

## 倒立摆控制

刘锦坤

2024 年 5 月 10 日

### 目录

<b>1</b>	<b>摘要</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>PD 控制参数的理论计算</b>	<b>2</b>
2.1	动力学方程 . . . . .	2
2.2	本征模块 . . . . .	3
<b>3</b>	<b>实验原理</b>	<b>4</b>
3.1	xxx 方程 . . . . .	4
3.2	xxx 情况下的边界条件和 xx 现象 . . . . .	4
3.3	xx 在 xxx 条件下的 xxx 现象 . . . . .	4
<b>4</b>	<b>实验过程与数据分析</b>	<b>4</b>
4.1	A. 在 xx 条件下测量 xxx . . . . .	4
4.1.1	a1. 计算出 xx 的电阻和电感 . . . . .	4
4.1.2	a2.Complete by yourself! . . . . .	4
4.1.3	a3.Complete by yourself! . . . . .	4
4.2	展示一下行间公式 . . . . .	4
4.2.1	行间公式 . . . . .	4
4.2.2	相对于行内公式 . . . . .	5
<b>5</b>	<b>分析与讨论</b>	<b>5</b>
5.1	误差分析 . . . . .	5
5.1.1	实验中的系统误差 . . . . .	5
5.1.2	实验中的偶然误差 . . . . .	5
5.2	实验后的思考 . . . . .	5
<b>6</b>	<b>原始数据</b>	<b>6</b>

## 1 摘要

本文主要总结了本次倒立摆项目中所做的工作。

## 2 PD 控制参数的理论计算

在本次 SRT 项目中，选用 PD 方法来完成对倒立摆的控制，可以建立动力学模型，对 PD 控制器的参数进行理论计算。

### 2.1 动力学方程

系统动力学模型示意图如图所示：

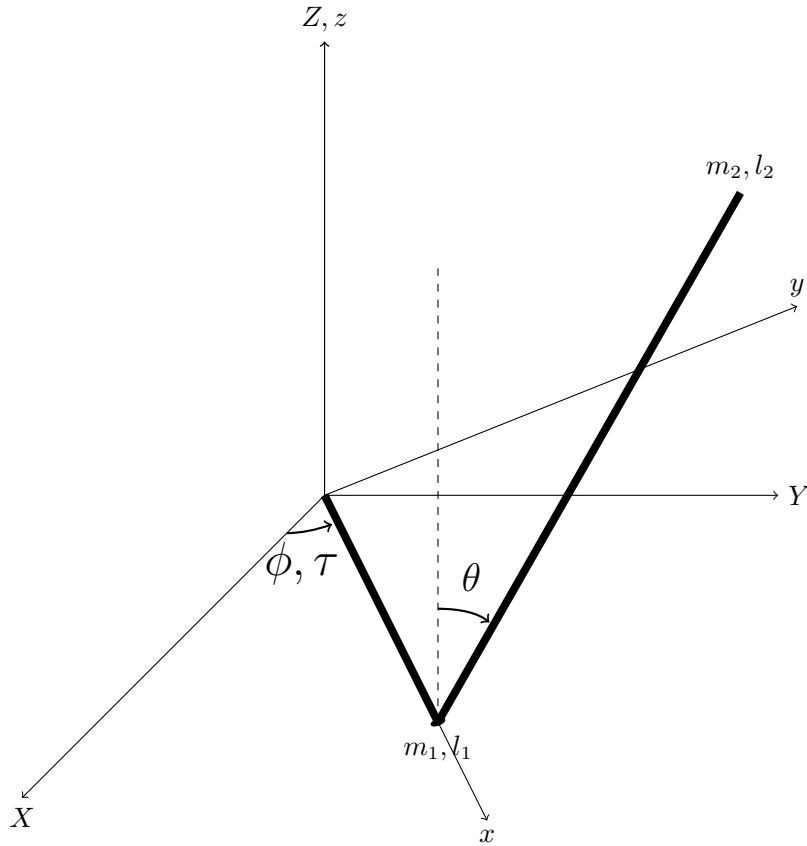


图 1: 倒立摆示意图

$XYZ$  坐标系为固定坐标系，而  $xyz$  为随着水平杆转动的坐标系。记水平杆的质量  $m_1$ ，长度  $l_1$ ，树枝干的质量  $m_2$ ，长度  $l_2$ ，水平杆的转动角度为  $\phi$ ，竖直杆的转动角度  $\theta$ ，假设两杆的质量都是均匀分布。电机的驱动力矩为  $\tau$ ，重力加速度为  $g$ ，下面从第二类 Lagrange 方程出发推倒倒立摆的动力学方程。

水平杆的动能为

$$T_1 = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\phi}^2 \quad (1)$$

竖直杆的动能为为质心动能和相对之心动能之和，其质心速度为：

$$\vec{v} = -\frac{1}{2}l_2\dot{\phi}\sin\theta\hat{x} + (\dot{\phi}l_1 + \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}\cos\theta)\hat{y} - \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}\sin\theta\hat{z} \quad (2)$$

其中  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  为  $xyz$  坐标系各个方向的单位矢量, 故其质心动能为

$$\begin{aligned} T_{2c} &= \frac{1}{2}m_2\vec{v}^2 \\ &= \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\phi}\dot{\theta}l_1l_2\cos\theta + \frac{1}{8}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}m_2l_2^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta \end{aligned} \quad (3)$$

而竖直杆的相对质心动能为转动贡献, 即为

$$T_{2r} = \frac{1}{24}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}m_2l_2^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta \quad (4)$$

系统势能为

$$V = \frac{1}{2}m_2gl_2\cos\theta \quad (5)$$

系统的 Lagrange 量为

$$\begin{aligned} L &= T - V = T_1 + T_{2c} + T_{2r} - V \\ &= \frac{1}{6}m_1l_1^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\phi}\dot{\theta}l_1l_2\cos\theta + \frac{1}{8}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 \\ &\quad + \frac{1}{8}m_2l_2^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \frac{1}{24}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}m_2l_2^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta - \frac{1}{2}m_2gl_2\cos\theta \end{aligned} \quad (6)$$

保留到二阶小量, 可以得到:

$$L = \frac{1}{6}m_1l_1^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\phi}\dot{\theta}l_1l_2 + \frac{1}{8}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m_2gl_2\theta^2 \quad (7)$$

带入第二类 Lagrange 方程, 得到

$$\begin{cases} \frac{1}{3}m_1l_1\ddot{\phi} + m_2l_1\ddot{\phi} + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\ddot{\theta} = \tau \\ \frac{1}{2}m_2l_1\ddot{\phi} + \frac{1}{3}m_2l_2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_2g\theta = 0 \end{cases} \quad (8)$$

记  $\mathbf{q} = [\phi, \theta]^T$ , 有

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \boldsymbol{\tau} \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l_1 + m_2l_1 & \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \\ \frac{1}{2}m_2l_1 & \frac{1}{3}m_2l_2 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m_2g \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

这就是倒立摆的动力学方程。

## 2.2 本征模块

我们先分析系统的本征模块, 设其一个本征模块为  $\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\eta}e^{\lambda t}$ , 代入方程  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0$  得到特征方程:

$$\det(\lambda^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0 \quad (11)$$

且对应的

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \quad (12)$$

### 3 实验原理

#### 3.1 xxx 方程

在 xx, xxx, xxxx 条件下, 考察条件为 xx 的 xx 的情况, 利用 xxxx 定律在无位移的水平方向和有位移的竖直方向分别列出以下方程:

$$\begin{cases} T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0 \\ T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 = \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{cases} \quad (13)$$

$$(14)$$

#### 3.2 xxx 情况下的边界条件和 xx 现象

xxxx 时发生 xxxx 现象。由 xxx 方程可知, xxx 波形为  $y^+ = f(vt+x)$ , xxx 波形为  $y^- = f(vt-x)$ 。

#### 3.3 xx 在 xxx 条件下的 xxx 现象

Complete by yourself!

### 4 实验过程与数据分析

#### 4.1 A. 在 xx 条件下测量 xxx

##### 4.1.1 a1. 计算出 xx 的电阻和电感

在 xx 上将 xx 的两端串联 xx 和 xx 相连, 将 xx 的两端串联进 xx, 分别将 xx 接在  $L_1$ ,  $L_2$ , xx 的两端测量 xx 并记录。

##### 4.1.2 a2. Complete by yourself!

Complete by yourself!

##### 4.1.3 a3. Complete by yourself!

实验得到的数据如下:

线圈名称	R'( $\Omega$ )	Va(V)	V(V)	Vr'(V)	Vo(V)
线圈 1(空气芯)	123	456	789	012	345
线圈 2(空气芯)	123	456	789	012	345
线圈 3(铝芯)	123	456	789	012	345
线圈 4(铝芯)	123	456	789	012	345

## 4.2 展示一下行间公式

### 4.2.1 行间公式

这是一个不确定度计算。

$$U_k = \text{tin}v(x, y) \times s_k = xxx$$

### 4.2.2 相对于行内公式

这是一个不确定度计算：  $U_k = \text{tin}v(x, y) \times s_k = xxx$

## 5 分析与讨论

### 5.1 误差分析

#### 5.1.1 实验中的系统误差

来自 xxx 的精度影响。

受空间内 xx 与 xx 的干扰。

#### 5.1.2 实验中的偶然误差

接线时可能有 xxx 情况，导致 xxx。xx 上的 xx 在某情况下有 xx 的问题存在，经反复调整后得以正常测量。

### 5.2 实验后的思考

可说明自己做本实验的总结、收获和体会，对实验中发现的问题提出自己的建议。

## 6 原始数据

Change the picture by yourself!