

# SRT 创新计划专项结题报告

## 倒立摆控制

刘锦坤

2024 年 5 月 9 日

### 目录

<b>1 摘要</b>	<b>2</b>
<b>2 PD 控制参数的理论计算</b>	<b>2</b>
2.1 动力学方程 . . . . .	2
2.2 简化动力学方程 . . . . .	2
2.3 本征模块的计算 . . . . .	3
<b>3 实验原理</b>	<b>3</b>
3.1 xxx 方程 . . . . .	3
3.2 xxx 情况下的边界条件和 xx 现象 . . . . .	3
3.3 xx 在 xxx 条件下的 xxx 现象 . . . . .	3
<b>4 实验过程与数据分析</b>	<b>3</b>
4.1 A. 在 xx 条件下测量 xxx . . . . .	3
4.1.1 a1. 计算出 xx 的电阻和电感 . . . . .	3
4.1.2 a2.Complete by yourself! . . . . .	3
4.1.3 a3.Complete by yourself! . . . . .	4
4.2 展示一下行间公式 . . . . .	4
4.2.1 行间公式 . . . . .	4
4.2.2 相对于行内公式 . . . . .	4
<b>5 分析与讨论</b>	<b>4</b>
5.1 误差分析 . . . . .	4
5.1.1 实验中的系统误差 . . . . .	4
5.1.2 实验中的偶然误差 . . . . .	4
5.2 实验后的思考 . . . . .	4
<b>6 原始数据</b>	<b>5</b>

## 1 摘要

本文主要总结了本次倒立摆项目中所做的工作。

## 2 PD 控制参数的理论计算

在本次 SRT 项目中，选用 PD 方法来完成对倒立摆的控制，可以建立动力学模型，对 PD 控制器的参数进行理论计算。

### 2.1 动力学方程

记水平杆的质量  $m_1$ ，长度  $l_1$ ，树枝干的质量  $m_2$ ，长度  $l_2$ ，水平杆的转动角度为  $\phi$ ，竖直杆的转动角度  $\theta$ ，假设两杆的质量都是均匀分布。电机的驱动力矩为  $\tau$ ，重力加速度为  $g$ ，下面从第二类 Lagrange 方程出发推倒倒立摆的动力学方程。

水平杆的动能为

$$T_1 = \frac{1}{6}m_1l_1^2\dot{\phi}^2 \quad (1)$$

竖直杆的动能为为质心动能和相对之心动能之和，其质心速度为：

$$\vec{v} = -\frac{1}{2}l_2\dot{\phi}\sin\theta\hat{x} + (\dot{\phi}l_1 + \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}\cos\theta)\hat{y} - \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}\sin\theta\hat{z} \quad (2)$$

故其质心动能为

$$T_{2c} = \frac{1}{2}m_2\vec{v}^2 = \quad (3)$$

### 2.2 简化动力学方程

在倒立摆控制在倒立的稳定状态时，由于水平杆转动角度较小，因此可以认为稳定态附近进行稳定控制时，水平旋转杆的外端点可以视为一个平动参照系，原模型可以简化为竖直摆铰接在一个平动的底座上，并且有一个力  $F$  可以驱动平动的底座：

Change the picture by yourself!

其中  $x$  为水平底座的位移， $\theta$  为竖直杆的倾角，并记  $m_b$  为水平底座的质量， $m_c$  为竖直杆的质量， $l_b$  为水平杆的长度， $l_c$  为竖直杆的长度， $F$  为驱动水平杆外端点的作用力， $g$  为重力加速度，根据第二类 Lagrange 方程，可以得到：

$$\begin{cases} (m_b + m_c)\ddot{x} - \frac{1}{2}m_b l \ddot{\theta} \cos\theta + \frac{1}{2}m_b l \dot{\theta}^2 \sin\theta = F \\ \frac{1}{3}m_b l^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_b l \ddot{x} \cos\theta - \frac{1}{2}m_b g l \sin\theta = 0 \end{cases} \quad (4)$$

对于倒立摆的控制，应该是在  $\theta = 0$  的附近进行控制，因此可以对上述方程在  $\theta = 0$  进行线性化处理，得到：

$$\begin{cases} (m_b + m_c)\ddot{x} - \frac{1}{2}m_b l \ddot{\theta} = F \\ \frac{1}{3}m_b l^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_b l \ddot{x} - \frac{1}{2}m_b g l \theta = 0 \end{cases} \quad (5)$$

对于上述方程，记广义坐标  $\mathbf{q} = [x, \theta]^T$ ，可以写为矩阵形式：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_b + m_c & -\frac{1}{2}m_b l \\ -\frac{1}{2}m_b l & \frac{1}{3}m_b l^2 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m_b g l \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

这即倒立摆的动力学方程。

### 2.3 本征模块的计算

对于 (3) 式，可以求解本征模块，得到：实验仪器 2 使用方法可参考说明书。

## 3 实验原理

### 3.1 xxx 方程

在 xx, xxx, xxxx 条件下，考察条件为 xx 的 xx 的情况，利用 xxxx 定律在无位移的水平方向和有位移的竖直方向分别列出以下方程：

$$\begin{cases} T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0 \\ T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 = \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{cases} \quad (8)$$

$$(9)$$

### 3.2 xxx 情况下的边界条件和 xx 现象

xxxx 时发生 xxxx 现象。由 xxx 方程可知，xxx 波形为  $y^+ = f(vt + x)$ ，xxx 波形为  $y^- = f(vt - x)$ 。

### 3.3 xx 在 xxx 条件下的 xxx 现象

Complete by yourself!

## 4 实验过程与数据分析

### 4.1 A. 在 xx 条件下测量 xxx

#### 4.1.1 a1. 计算出 xx 的电阻和电感

在 xx 上将 xx 的两端串联 xx 和 xx 相连，将 xx 的两端串联进 xx，分别将 xx 接在  $L_1$ ,  $L_2$ , xx 的两端测量 xx 并记录。

#### 4.1.2 a2. Complete by yourself!

Complete by yourself!

### 4.1.3 a3.Complete by yourself!

实验得到的数据如下：

线圈名称	$R'(\Omega)$	$V_a(V)$	$V(V)$	$V_r'(V)$	$V_o(V)$
线圈 1(空气芯)	123	456	789	012	345
线圈 2(空气芯)	123	456	789	012	345
线圈 3(铝芯)	123	456	789	012	345
线圈 4(铝芯)	123	456	789	012	345

## 4.2 展示一下行间公式

### 4.2.1 行间公式

这是一个不确定度计算。

$$U_k = \text{tinu}(x, y) \times s_k = xxx$$

### 4.2.2 相对于行内公式

这是一个不确定度计算：  $U_k = \text{tinu}(x, y) \times s_k = xxx$

## 5 分析与讨论

### 5.1 误差分析

#### 5.1.1 实验中的系统误差

来自 xxx 的精度影响。

受空间内 xx 与 xx 的干扰。

#### 5.1.2 实验中的偶然误差

接线时可能有 xxx 情况，导致 xxx。xx 上的 xx 在某情况下有 xx 的问题存在，经反复调整后得以正常测量。

### 5.2 实验后的思考

可说明自己做本实验的总结、收获和体会，对实验中发现的问题提出自己的建议。

## 6 原始数据

Change the picture by yourself!