II 课程基础知识

II-1 测量误差及数据处理的基础知识

本篇主要介绍测量误差估计、实验数据处理和实验结果的表示等问题，所介绍的都是初步知识，这些知识不仅在每一个物理实验中都要用到，而且是今后从事科学实验必须了解和掌握的。由于这部分内容牵涉面较广，不可能在一两次学习中掌握，我们要求同学首先阅读一遍，对提到的问题有一个初步的了解，以后结合每一个具体实验再细读有关的段落，通过运用加以掌握。应当说明的是：这方面问题的深入讨论是计量学以及数理统计学的任务，本书只引用其中的某些结论和计算公式，更详细的探讨和证明留待在数理统计课中学习。

一、测量的误差

1．误差的分类

物理实验是以测量为基础的。研究物理现象、了解物质特性、验证物理原理都要进行测量。测量分直接测量和间接测量等。"直接测量"指无须对被测的量与其它实测的量进行函数关系的辅助计算而直接得到被测量值的测量。例如用米尺测物体的长度，用天平和砝码测物体的质量，用电流计测线路中的电流，都是直接测量。"间接测量"指利用直接测量的量与被测的量之间的已知函数关系从而得到该被测量值的测量。例如测物体密度时，先测出该物体的体积和质量，再用公式算出物体的密度。在物理实验中进行的测量，有许多是间接测量。

实践证明：测量结果都具有误差，误差自始至终存在于一切科学实验和测量的过程之中。因为任何测量仪器、测量方法、测量环境、测量者的观察力等等都不能做到绝对严密，这些就使测量不可避免地伴随有误差产生。因此分析测量中可能产生的各种误差，尽可能消除其影响，并对测量结果中未能消除的误差作出估计，就是物理实验和许多科学实验中必不可少的工作。为此我们必须了解误差的概念、特性、产生的原因和估计方法等有关知识。

测量误差就是测量结果与待测量的真值（或约定真值）之差值。测量误差的大小反映了测量结果的准确程度，测量误差可以用绝对误差表示，也可以用相对误差表示。

$$\text{绝对误差} = \text{测量结果} - \text{被测量的真值}$$

$$\text{相对误差}E = \frac{\text{测量的绝对误差}}{\text{被测量的真值}} \text{（用百分数表示）}$$

被测量的真值是一理想概念，一般说来实验者对真值是不知道的。在实际测量中常用被测量的实际值或已修正过的算术平均值来代替真值，称为约定真值。

测量中的误差主要分为两种类型，即系统误差和随机误差。它们的性质不同，须分别处理。

2．系统误差

系统误差是在同一被测量的多次测量过程中保持恒定或以可预知方式变化的测量误差的分量。例如实验装置和实验方法没有（或不可能）完全满足理论上的要求，有的仪器没有达到应有的准确程度，环境因素（温度、湿度等）没有控制到预计的情况等。只要这些因素与正确的要求有所偏离，那么在测量结果中就会出现其绝对值和符号均为恒定的或以可预知方式变化的误差分量。因素不变，系统误差也就不变。

例如用停表测运动物体通过某段路程所需的时间，若停表走时较快，那么即使测量多次，测得的时间 t 总会偏大，而且总是偏大一个固定的量，这就是仪器不准确造成的。又如用落球法测重力加速度时，由于空气阻力的影响，得到的结果总是偏小，这就是测量方法不完善造成的。

对实验中的系统误差应如何处理呢？可以通过校准仪器，改进实验装置和实验方法，或对测量结果进行理论上的修正加以消除或尽可能减小。发现和减小实验中的系统误差通常是一个困难任务，需要对整个实验依据的原理、方法、测量步骤及所用仪器等可能引起误差的各种因素一一进行分析。一个实验结果是否正确，往往就在于系统误差是否已被发现和尽可能消除，因此对系统误差不能轻易放过。

3．随机误差

随机误差是在对同一被测量的多次测量过程中，绝对值和符号以不可预知的方式变化着的测量误差的

分量。这种误差是实验中各种因素的微小变动性引起的。例如实验装置和测量机构在各次调整操作上的变动性，测量仪器指示数值的变动性，以及观测者本人在判断和估计读数上的变动性……，这些因素的共同影响就使测量值围绕着测量的平均值发生有涨落的变化，这变化量就是各次测量的随机误差。随机误差的出现，就某一测量值来说是没有规律的，其大小和方向都是不能预知的，但对一个量进行足够多次的测量，则会发现它们的随机误差是按一定的统计规律分布的。常见的一种情况是：正方向误差和负方向误差出现的次数大体相等，数值较小的误差出现的次数较多，很大的误差在没有错误的情况下通常不出现；这一规律在测量次数越多时表现得越明显，它就是称之为正态分布律的一种最典型的分布规律。

⑴ 随机误差的正态分布规律

大量的测量误差服从正态分布（或称 Gauss 分布）。常见的正态分布的曲线如图 1 所示。图中 x 代表某一物理量的实验测量值。$p(x)$为测量值的概率密度

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

其中

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum x}{n} \quad 且 \quad \sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\sum(x-\mu)^2}{n}}$$

从曲线可以看出被测量在 $x=\mu$处的概率密度最大，曲线峰值处的横坐标相应于测量次数 $n\to\infty$时被测量的平均值μ。横坐标上任一点到μ值的距离（$x-\mu$）即为与测量值 x 相应的随机误差分量，随机误差小的概率大，随机误差大的概率小。σ为曲线上拐点处的横坐标与μ值之差，它是表征测量值分散性的重要参数，称为正态分布的标准偏差。这条曲线是概率密度分布曲线，当曲线和 x 轴之间的总面积定为 1 时，其中介于横坐标上任何两点间的某一部分面积可以用来表示随机误差在相应范围内的概率。如图中阴影部分$-\sigma$到$+\sigma$之间的面积就是随机误差在$\pm\sigma$范围内的概率(又称置信概率)，即测量值落在（$\mu-\sigma$ ，$\mu+\sigma$）的区间中的概率，由定积分计算得其值为 $P = 68.3\%$。如将区间扩大到-2σ到$+2\sigma$，则 x 落在（$\mu-2\sigma$，$\mu+2\sigma$）区间中的概率就提高到 95.4%；x 落在（$\mu-3\sigma$，$\mu+3\sigma$）区间中的概率为 99.7%。

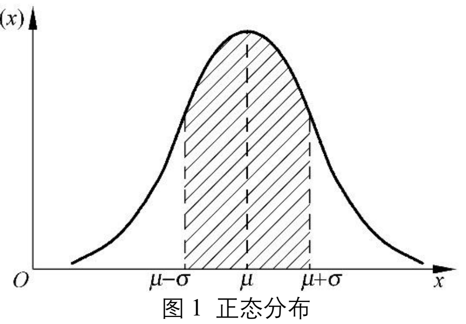

图 1 正态分布

从分布曲线我们可以看出：1）在多次测量时，正负随机误差常可以大致相消，因而用多次测量的算术平均值表示测量结果可以减小随机误差的影响；2）测量值的分散程度直接体现随机误差的大小，测量值越分散，测量的随机误差就越大。因此，必须对测量的随机误差作出估计才能表示出测量的精密度。

⑵ 随机误差的处理

① 最小二乘法原理与测量平均值。

对测量中的随机误差如何处理呢？对随机误差作估计的方法有多种。科学实验中常用标准偏差来估计测量的随机误差。实验中不可能作无限多次测量，只能作有限次测量。因此，我们研究这种情况下的随机误差估计方法。

设对某一物理量在测量条件相同的情况下进行 n 次无明显系统误差的独立测量，测得 n 个测量值 x_1，x_2，…，x_n。当无系统误差分量存在时，应该用有限次测量值的平均值作为真值的最佳估计值，这是由最小二乘法原理推导出来的。

根据最小二乘法原理，一列等精度测量的最佳估计值是能使各次测量值与该值之差的平方和为最小的那个值。设真值的最佳估计值为 x_0，则差值平方和可写为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2$$

若要使它最小，则它对 x_0 的导数应为 0，即

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0) = 0$$

由上式可得

$$x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} x_i = \bar{x}，\ i = 1，2，\ \dots，n \qquad （1）$$

（1）式说明当系统误差已被消除时，测量值的平均值可以作为被测量的真值。测量次数越多，两个值接近

的程度越好（当 $n\to\infty$时，平均值趋近真值）。因此，我们可以用平均值表示测量结果。以后为了简洁，我们常略去总和号上的求和范围，例如上式中的分子可写为Σx_i。

② 标准偏差

每一次测量值 x_i 与平均值$\overline{x}$之差称为残差，即

$$\Delta x_i = x_i - \overline{x}, \qquad i=1，2，\ldots，n$$

显然，这些残差有正有负，有大有小。常用“方均根”法对它们进行统计，得到的结果就是单次测量的标准偏差，以S_x表示为

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\overline{x})^2}{n-1}} \qquad （2）$$

这个公式又称为贝塞尔公式。我们可以用这一标准偏差表示测量的随机误差，它可以表示这一列测量值的精密度。标准偏差小就表示测量值很密集，即测量的精密度高；标准偏差大就表示测量值很分散，即测量的精密度低。现在很多计算器上都有这种统计计算功能，实验者可直接用计算器求得 s_x 等数值。

可以证明平均值的标准偏差$S_{\overline{x}}$是一列测量中单次测量的标准偏差S_x的$\frac{1}{\sqrt{n}}$，即

$$S_{\overline{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\overline{x})^2}{n(n-1)}} \qquad （3）$$

4． 直接测量结果的表示和总不确定度的估计

⑴ 总不确定度

表示完整的测量结果，应给出被测量的量值 x_0，同时标出测量的总不确定度Δ，写成 $x_0\pm\Delta$的形式，这表示被测量的真值在（$x_0-\Delta$，$x_0+\Delta$）的范围之外的可能性（或概率）很小。不确定度是指由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度，是表征被测量的真值所处的量值范围的评定。

直接测量时被测量的量值 x_0 一般取多次测量的平均值$\overline{x}$；若实验中有时只能测一次或只需测一次，就取该次测量值 x。最后表示被测量的直接测量结果 x_0 时，通常还必须将已定系统误差分量（即绝对值和符号都确定的已估算出的误差分量）从平均值 $\overline{x}$ 或一次测量值 x 中减去，以求得 x_0，即就已定系统误差分量对测量值进行修正。如螺旋测微计的零点修正，伏安法测电阻中电表内阻影响的修正等。

参考国际国内标准化组织给出的指导性文件，普通物理实验的测量结果表示中，总不确定度Δ（置信概率 P=0.95）从估计方法上也可分为两类分量；A，多次重复测量用统计方法计算出的分量Δ_A；B，用其它方法估计出的分量Δ_B，它们可用方和根法合成（下文中的不确定度及其分量一般都是指总不确定度及其分量）

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} \qquad （4）$$

(2) 总不确定度的 A 类分量Δ_A

在实际测量中，一般只能进行有限次测量，这时因$\frac{\overline{x}-\mu}{S_{\overline{x}}}$不再完全服从正态分布规律，而是服从称之为 t 分布（又称 Student 分布）的规律。这种情况下，对测量误差的估计，就要在标准偏差的基础上再乘以一个因子，即在相同条件下对同一被测量作 n 次测量，用 n 次测量值的平均值作为实验结果，若只计算总不确定度Δ的 A 类分量Δ_A，则它等于平均值的标准偏差$S_{\overline{x}}$乘以$t_P(\nu)$因子，也等于测量列的标准偏差S_x乘以$t_P(\nu)/\sqrt{n}$因子，即

$$\Delta_A = t_P(\nu)S_{\overline{x}} = \frac{t_P(\nu)}{\sqrt{n}}S_x \qquad （5）$$

$t_P(\nu)$是与自由度 ν（对被测量进行等精度多次直接测量求平均时 $\boldsymbol{\nu=n-1}$）、置信概率 P 有关的量，概率 P 及 ν 确定后，$t_P(\nu)$也就确定了。因子$t_P(\nu)$（以下有时会简写为 t）的值可以从专门的数据表中查得。物理实验课程中用到的 P=0.95 的部分$t_P(\nu)$可以从表 1 中查得。

表 1 P=0.95 时**的**$t_P(\nu)$值

自由度 ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_P(\nu)$	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23
自由度 ν	12	15	20	30	40	50	60	70	100	∞
$t_P(\nu)$	2.18	2.13	2.09	2.04	2.02	2.01	2.00	1.99	1.98	1.96

(3) 总不确定度的 B 类分量Δ_B

在普通物理实验中常遇到仪器的误差或误差限值，它是参照国家标准规定的计量仪表、器具的准确度等级或允许误差范围，由生产厂家给出或由实验室结合具体测量方法和条件简化的约定，由$\Delta_{仪}$表示。仪器的误差$\Delta_{仪}$在普通物理实验教学中是一种简化表示，通常取$\Delta_{仪}$等于仪表、器具的示值误差限或基本误差限。许多计量仪表、器具的误差产生原因及具体误差分量的计算分析，大多超出了本课程的要求范围。用普通物理实验室中的多数仪表、器具对同一被测量在相同条件下作多次直接测量时，测量的随机误差分量一般比其基本误差限或示值误差限小不少；另一些仪表、器具在实际使用中很难保证在相同条件下或规定的正常条件下进行测量，其测量误差除基本误差或示值误差外还包含变差等其它分量。因此我们约定，在普通物理实验中大多数情况下把$\Delta_{仪}$简化地直接当作总不确定度中用非统计方法估计的 B 类分量Δ_B，即

$$\Delta_B=\Delta_{仪} \qquad (6)$$

(4) 总不确定度的合成

由（4）、（5）和(6)式可得

$$\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_{仪}^2}=\sqrt{\left(\frac{t_P(\nu)}{\sqrt{n}}S_x\right)^2+\Delta_{仪}^2} \qquad (7)$$

(7)式是今后实验中估算不确定度经常要用的公式，希望能够记住。

如果因为估计出的Δ_A小于$\Delta_{仪}$的 1/3，对实验最后结果的影响甚小，或因条件受限制而只进行了一次测量时， Δ可简单地用仪器的误差$\Delta_{仪}$来表示。当实验中只要求测量一次时，Δ取$\Delta_{仪}$，这并不说明只测一次比测多次时Δ的值变小（A 类分量无法由（5）式算出），只说明整个实验中对该被测量的Δ的估算要求能够放宽或必须放宽。

5．间接测量的结果和不确定度的合成

在很多实验中，我们进行的测量都是间接测量。间接测量的结果是由直接测量结果根据一定的数学式计算出来的。这样一来，直接测量结果的不确定度就必然影响到间接测量结果，这种影响的大小也可以由相应的数学式计算出来。

设间接测量所用的数学式（或称测量式）可以表为如下的函数形式：

$$\varphi=F(x,y,z,\ldots) \qquad (8)$$

式中的φ是间接测量结果，x，y，z，…是直接测量结果，它们是互相独立的量。设 x，y，z，…的不确定度分别为Δ_x，Δ_y，Δ_z，…，它们必然影响间接测量结果，使φ值也有相应的不确定度Δ_φ 。由于不确定度都是微小的量，相当于数学中的“增量”，因此间接测量的不确定度的计算公式与数学中的全微分公式基本相同。不同之处是：①要用不确定度Δ_x 等替代微分 dx 等；②要考虑到不确定度合成的统计性质，一般是用“方、和、根”的方式进行合成。于是，我们在普通物理实验中用以下两式来简化地计算不确定度Δ_φ。

$$\Delta_\varphi=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2(\Delta_x)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\left(\Delta_y\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2(\Delta_z)^2+\cdots} \qquad (9)$$

$$\frac{\Delta_\varphi}{\varphi}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln F}{\partial x}\right)^2(\Delta_x)^2+\left(\frac{\partial \ln F}{\partial y}\right)^2\left(\Delta_y\right)^2+\left(\frac{\partial \ln F}{\partial z}\right)^2(\Delta_z)^2+\cdots} \qquad (10)$$

（9）式适用于φ是和差形式的函数，（10）式适用于φ是积商形式的函数。

在科学实验中一般都采用方和根合成来估计间接测量结果的不确定度。

例：已知金属环的外径 D_2＝3.600±0.004cm，内径 D_1= 2.880±0.004cm，高度 h=2.575±0.004cm，求环的体积 V 及其不确定度Δ_V 。

解：环体积为

$$V=\frac{\pi}{4}(D_2^2-D_1^2)h=9.436\mathrm{cm}^3$$

环体积的对数及其偏导数为 $\ln V=ln\frac{\pi}{4}+\ln(D_2^2-D_1^2)+lnh$

$$\frac{\partial \ln V}{\partial D_2}=\frac{2D_2}{D_2^2-D_1^2} \qquad \frac{\partial \ln V}{\partial D_1}=-\frac{2D_1}{D_2^2-D_1^2} \qquad \frac{\partial \ln V}{\partial h}=\frac{1}{h}$$

根据方和根合成公式（10），则有

$$\frac{\Delta_V}{V}=\sqrt{\left(\frac{2D_2\Delta_{D_2}}{D_2^2-D_1^2}\right)^2+\left(\frac{2D_1\Delta_{D_1}}{D_2^2-D_1^2}\right)^2+\left(\frac{\Delta_h}{h}\right)^2}$$

代入数据，可得$\frac{\Delta_V}{V}=0.81\%$，则$\Delta_V=9.436\mathrm{cm}^3\times0.81\%\approx0.08\mathrm{cm}^3$

因此环体积为

$$V = 9.44 \pm 0.08\ \mathrm{cm}^3$$

二、数据处理

1．有效数字及其表示

在实验中我们所测的被测量都是含有误差的数值，对这些数值的末尾不能任意取舍，应反映出测量值的准确度。所以在记录数据、计算以及书写测量结果时，究竟应写出几位数字，有严格的要求，要根据测量误差或实验结果的不确定度来定。例如用 300mm 长的毫米分度钢尺（有实验给出仪器误差为 0.3mm）测量某物体的长度，正确的读法是除了确切地读出钢尺上有刻线的位数之外，还应估计一位，即读到$\frac{1}{10}$mm。比如，测出某物的长度是 15.2mm，这表明 15 是确切数字，而最后的 2 是估计数字。值得注意的是在读取整刻度值时初学者往往只读出了整数值，而忘记读估计的那位“0”。比如，用钢尺测得的物体长度正好是 15mm 整，应该记录为 15.0mm，不应写成 15mm。又如根据长度和直径的测量值用计算器算出的圆柱体体积为 V＝6158.3201mm^3，Δ_V= 4mm^3。由不确定度为 4mm^3 可以看出，第四位数字 8 已经是不精确的，它后面的四位数字 3201 没有意义。因而圆柱体体积的间接测量值应写作 V＝6158 ± 4mm^3。6158 这四位数字前面的三位是准确数字，后面一位是存疑数字。准确数字和存疑数字的全体称为有效数字。上例中 15.2mm 为三位有效数字，6158mm^3 为四位有效数字。

有效数字位数的多少，直接反映实验测量的准确度。有效数字位数越多，测量的准确度就越高。例如，用不同精度的量具测量同一物体的厚度 d 时，

用钢尺测量，d = 6.2mm，仪器误差 0.5mm，$E=\frac{0.5}{6.2}=8.1\%$

用 50 分度游标卡尺测量，d＝6.36mm，仪器误差 0.02mm，$E=\frac{0.02}{6.36}=0.31\%$

用螺旋测微计测量，d＝6.347mm，仪器误差 0.004mm，$E=\frac{0.004}{6.347}=0.063\%$

由此可见，有效数字多一位，相对误差 E 差不多要小一个数量级。因此取几位有效数字是件严肃的事，不能任意取舍。

写有效数字时应注意的要点：

⑴ 有效数字的位数与小数点位置无关，单位的 SI 词头改变时，有效数字的位数不应发生变化。例如，重力加速度 980cm/s^2，以“m/s^2”表示时记为 9.80m/s^2，与记为 9.8m/s^2 是不同的。前者有三位有效数字，而后者只有两位。若写为 0.00980km/s^2，则数值前面小数点定位所用的“0”不是有效数字，应从非“0”的第一个数算起，仍为三位有效数字。

⑵ 为表示方便，特别是对较大或较小的数值，常用$\times10^{\pm n}$的形式（n 为一正整数）书写，这样可避免有效数字写错，也便于识别和记忆，这种表示方法叫科学记数法。用这种方法记数值时，通常在小数点前只写一位数字，例如地球的平均半径 6371km 可写作 6.371×10^{6}m，表明有四位有效数字。

⑶ **表示测量值最后结果的有效数字末位与不确定度的末位一般要取齐**。普通物理实验课程规定不确定度一般取两位，首位不小于 3 时也可以简化取一位。相对不确定度一般也取一到两位。在计算过程中，对中间运算结果可以适当多保留几位，以免因过多截取带来附加误差。对π，$\sqrt{2}$ 等值应直接按计算器上的按键取用。

⑷ 如果在实验中没有进行不确定度的估算，最后结果的有效数字位数的取法如下：一般来说，在连乘除的情况下它跟参与运算的各量中有效数字位数最少的大致相同或多取 1 位，在代数和的情况中，则按参与加减的各量的末位数中数量级最大的那一位为结果的末位。

2．用作图法处理实验数据

某些实验的观测对象是互相关联的两个（或两个以上）物理量之间的变化关系，实验的任务就是寻求这些物理量互相依存的变化规律。例如，研究单摆周期和摆长的关系，研究金属电阻随温度变化的关系，研究气体压强随温度变化的关系等等。这一类实验中的观测方法是控制某一个量（例如温度）使之依次取不同的值，然后观测另一个量所取的对应值，从而得出一列 x_1，x_2，…，x_n，和另一列对应的 y_1，y_2，…，y_n 值。如果将这两组数据记录在合适的表格内，便可一目了然，这叫列表法。更形象地处理这类实验数据常用作图法，它能直观地揭示出物理量之间的规律，粗略显示对应的函数关系。

为了使图线能清楚地、定量地反映出物理现象的变化规律，并能准确地从图线上确定物理量值或求出有关常数，所作的图应符合准确度要求，因此必须用坐标纸作图。

作图规则：

⑴ 选择合适的坐标分度值。坐标分度值的选取应符合测量值的准确度，即应能反映测量值的有效数字

位数。一般以 1 或 2 毫米对应于测量仪表的最小分度值或对应于测量值的次末位数，即倒数第二位数。对应比例的选择应便于读数，不宜选成 1:1.5 或 1:3、1:6、1:7、1:9 等，坐标范围应恰好包括全部测量值，并略有富裕。最小坐标值不必都从零开始，以便作出的图线大体上能充满全图，布局美观、合理。

⑵ 标明坐标轴。以自变量（即实验中可以准确控制的量，如温度、时间）为横坐标，以因变量为纵坐标。用粗实线在坐标纸上描出坐标轴，用箭头画出轴向，在轴上注明物理量名称、符号、单位（要加括号），并按顺序标出标尺整分格上的量值。这些量值一般应是一系列正整数（如 1，2，3，4，…或 0，2，4，6，…或 0，5，10，…）及其 10^n（为正负整数）倍，而不要标注实验点的测量值。

⑶ 标实验点。实验点可用“＋”、“⊙”等符号标出。

⑷ 连成图线。因为每一个实验点的误差情况不一定相同，因之不应强求曲线通过每一个实验点而连成折线（仪表的校正曲线不在此例）。应该按实验点的总趋势连成光滑的曲线，要做到图线两侧的所有实验点与图线的距离都最为接近且分布大体均匀。曲线正穿过实验点时，可以在点处断开。

⑸ 写明图线特征。有必要时，可利用图上的空白位置注明实验条件和从图线上得出的某些参数，如截距、斜率、极大极小值、拐点和渐近线等。

⑹ 写图名。在图纸下方或空白位置写出图线的名称以及某些必要的说明，要使图线尽可能全面反映实验的情况。最后写上实验者姓名、实验日期，将图纸与实验报告订在一起。

3．实验数据的直线拟合

作图法虽然在数据处理中是一个很便利的方法，但是在图线的绘制上往往会引入附加误差，尤其在根据图线确定常数时，这种误差有时很明显。为了克服这一缺点，在数理统计中研究了直线拟合问题（或称一元线性回归问题），常用一种以最小二乘法为基础的实验数据处理方法。由于某些曲线的函数可以通过数学变换改写为直线，例如对函数 $y=ae^{-bx}$ 取对数得 $\ln y = \ln a - bx$，$\ln y$ 与 x 的函数关系就变成直线型了。因此这一方法也适用于某些曲线型的规律。

下面就数据处理问题中的最小二乘法原理作一简单介绍。

设某一实验中，可控制的物理量取 x_1，x_2，…，x_n 值时，对应的物理量依次取 y_1，y_2，…，y_n 值。我们假定对 x_i 值的观测误差很小，而主要误差都出现在 y_i 的观测上。如果从（x_i，y_i）中任取两组实验数据就可得出一条直线，只不过这条直线的误差有可能很大。直线拟合的任务就是用数学分析的方法从这些观测到的数据中求出一个残差平方和最小的最佳经验式 $y=a+bx$。按这一最佳经验公式作出的图线虽不一定能通过每一个实验点，但是它以最接近这些实验点的方式平滑地穿过它们。很明显，对应于每一个 x_i 值，观测值 y_i 和最佳经验式的 y 值之间存在一偏差δy_i，我们称它为观测值 y_i 的偏差，即

$$\delta y_i = y_i - y = y_i - (a + bx) \qquad (i = 1，2，…，n)$$

最小二乘法的原理就是：如果各观测值 y_i 的误差互相独立且服从同一正态分布，当 y_i 的偏差的平方和为最小时，得到最佳经验式。根据这一原理可求出常数 a 和 b。

设以 S 表示δy_i 的平方和，它应满足：

$$S = \Sigma(\delta y_i)^2 = \Sigma[\,y_i - (a + bx)]^2 = \min$$

上式中的各 y_i 和 x_i 是测量值，都是已知量，而 a 和 b 是待求的，因此 S 实际上是 a 和 b 的函数。令 S 对 a 和 b 的偏导数为零，即可解出满足上式的 a、b 值。

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum(y_i - a - bx_i) = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum(y_i - a - bx_i)x_i = 0$$

即

$$\Sigma y_i - na - b\Sigma x_i = 0, \qquad \Sigma x_i y_i - a\Sigma x_i - b\Sigma x_i^2 = 0$$

其解为

$$a = \frac{\sum x_i y_i \sum x_i - \sum y_i \sum x_i^2}{(\sum x_i)^2 - n\sum x_i^2}, \qquad b = \frac{\sum x_i \sum y_i - n\sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - n\sum x_i^2}$$

将得出的 a 和 b 代入直线方程，即得到最佳的经验公式 $y＝a＋bx$。

上面介绍了用最小二乘法求经验公式中的常数 a 和 b 的方法，是一种直线拟合法。它在科学实验中的运用很广泛，特别是有了计算器后，计算工作量大大减小，计算精度也能保证，现在用计算机运算速度更快，因此它是很有用又很方便的方法。用这种方法计算的常数值 a 和 b 是“最佳的”，但并不是没有误差，它们的误差估算比较复杂。一般地说，一列测量值的δy_i 大（即实验点对直线的偏离大），那么由这列数据求出 a、b 值的误差也大，由此定出的经验公式可靠程度就低；如果一列测量值的δy_i 小（即实验点对直线的偏离小），

那么由这列数据求出的 a、b 值的误差就小，由此定出的经验公式可靠程度就高。直线拟合中的误差估计问题比较复杂，这里就不介绍了。

下面介绍实验数据的直线拟合问题中的相关系数。相关系数的定义为

$$r = \frac{\sum \Delta x_i \Delta y_i}{\sqrt{\sum(\Delta x_i)^2}\sqrt{\sum(\Delta y_i)^2}} \qquad (11)$$

式中$\Delta x_i = x_i - \overline{x}$，$\Delta y_i = y_i - \overline{y}$；它是从函数$\varphi = x \pm y$ 的形式定义的（推导从略）。

当 x 和 y 为互相独立的变量时，Δx_i 和Δy_i 的取值和符号彼此无关（即无相关性），因此

$\Sigma\Delta x_i\Delta y_i = 0$，即 $r = 0$

在直线拟合中，x 和 y 并不互相独立，它们有线性关系。这时Δx_i 和Δy_i 的取值和符号不再无关而是有关（即有相关性）。例如设函数形式为$x \mp y = 0$，即 $y = \pm x$，Δx 和Δy 之间就会有如$\Delta y = \pm\Delta x$ 的关系，将这一关系代入（11）式，可得

$$r = \frac{\sum \Delta x_i(\pm\Delta x_i)}{\sqrt{\sum(\Delta x_i)^2}\sqrt{\sum(\Delta x_i)^2}} = \pm\frac{\sum(\Delta x_i)^2}{\sum(\Delta x_i)^2} = \pm 1$$

从相关系数的这一特性可以判断实验数据是否符合线性。如果 r 很接近于 1，则各实验点均在一条直线上。普物实验中 r 如达到 0.999，就表示实验数据的线性关系良好，各实验点聚集在一条直线附近。相反，相关系数 r＝0 或趋近于零，说明实验数据很分散，无线性关系。因此用直线拟合法处理数据时除给出 a、b 外还应给出相关系数 r，具体计算公式虽复杂，我们只要求同学们会利用计算器、计算机等直接求结果。

三、练习题与思考题

1．指出下列各数是几位有效数字。

（1）0.000l；（2）0.0100；（3）1.0000；（4）980.12300；

（5）1.35；（6）0.0135；（7）0.173；（8）0.0001730。

2．改正下列错误，写出正确答案。

（1）0.10830 的有效数字为六位。

（2）P＝31690 ± 200kg。

（3）d＝10.430 ± 0.32cm。

（4）t＝18.5476 ± 0.3123cm。

（5）D＝18.652 ± 1.4cm。

（6）h＝27.300×10^4 ± 2000km。

（7）R＝6371km＝6371000m＝637100000cm。

（8）最小分度值为分（′）的测角仪测得角度刚好为 60 度整，不确定度为 2 分，测量结果表示为 θ＝60° ± 2 ′。

3．推导圆柱体体积$V = \frac{\pi d^2 h}{4}$的不确定度合成公式$\frac{\Delta_V}{V}$（方和根合成）。

4．计算$\rho = \frac{4M}{\pi D^2 H}$的结果及不确定度$\Delta_\rho$。并分析直接测量值 M、D、H 的不确定度对间接测量值ρ的影响（即合成公式中哪一项的单项不确定度的影响大？）。其中 M=236.124 ± 0.004g，D＝2.345 ±0.005cm，H＝8.21 ± 0.03cm。

5．利用单摆测重力加速度 g，当摆角很小时有$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$的关系。式中 l 为摆长，T 为周期，它们的测量结果分别为 l = 97.69 ± 0.03cm，T＝1.9842 ± 0.0005s，求重力加速度及其不确定度。

6．选择题或填空题

⑴ 设下列各式等号前的各个数是某些测量中直接测量结果的量值，等号后的数是相应的间接测量结果的量值，从参与运算的各量的有效数字来判断，哪些题的结果有效位数是明显不合理的，写出它们的题号。

A. 35.780 + 2.4= 38.2　　B. 92.5 − 88.330=4.1700

C. 6.40÷8.0000=0.800　　D. $(0.729)^{1/3}$=0.9 (1/3 为精确数)　　【　　　】

⑵ 设下列各式等号前的各个数是某些测量中直接测量结果的量值，等号后的数是相应的间接测量结果的量值，从参与运算的量的有效数字来判断，哪些题的结果有效位数基本是合理的，写出它们的题号。

A. 92.5-88.330=4.170　　B. $(0.9801)^{1/2}$ =0.9900

C. 0.99×2.000=2　　D. 125.0+0.1234=125.1　　【　　　】

⑶ 对某一被测量进行测量时，下列各例中哪些因素可能使测量结果主要产生系统误差【　　　　　】，哪些因素可能使测量结果主要产生随机误差【　　　　　】

A. 螺旋测微计微分套筒圆周上的刻线（50 格）和固定套筒上纵刻线不在同一曲面上，读数时有一定的视差；

B. 磁电式电压表放置在离其它铁磁体很近的地方，使内部磁场变弱且不均匀，对电压测量的影响；

C．天平的左右臂臂长不等，对质量测量的影响；

D．电流表的零点(位)不对，但在测量结果中已扣除了零位影响；

E．望远镜未调消视差，对瞄准和读数的影响；

F．水银温度计的玻璃毛细管各处粗细不匀而产生的示值误差分量；

G. 在海拔高、重力加速度小的地区使用水银气压计测大气压，已作重力加速度修正；

H. 对某种测量，读数时要估读到最小分度(格)的 1/10，而估读不准，可能产生的误差。

7．直线拟合题：用最小二乘法直线拟合 $y=a+bx$ 对以下一组实验数据进行处理，求出$\sum x_i^2$，$(\sum x_i)^2$，$\sum x_i y_i$，a，b，r，并写出拟合公式。

x_i	24.1	31.0	39.1	46.0	53.0	59.8	66.1	72.7
y_i	20.34	20.91	21.58	22.15	22.73	23.27	23.80	24.32

II-1 摘要：不确定度估算（默认置信概率为 95%）所用公式与 *t* 因子表

1. 直接测量量总不确定度估算所用公式：

①单次测量时可以简化取：$\Delta=\Delta_B=\Delta_{仪}$

②多次(n 次)等精度测量时：

测量列的标准偏差为： $S_x=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$ (1)

平均值的标准偏差为： $S_{\bar{x}}=\frac{S_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$ (2)

总不确定度为： $\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_B^2}$ (3)

其中 $\Delta_A=t_P(\nu)S_{\bar{x}}=\frac{t_P(\nu)}{\sqrt{n}}S_x$，$P$=0.95 的部分 $t_P(\nu)$[**其中 $\nu=n-1$**]可以从表 1 中查出；

$\Delta_B=\Delta_{仪}$

即： $\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_{仪}^2}=\sqrt{\left(\frac{t_P(\nu)}{\sqrt{n}}S_x\right)^2+\Delta_{仪}^2}$ (4)

表 1 P=0.95 时的 $t_P(\nu)$值

自由度 ν		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_P(\nu)$	P=0.95	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23
自由度 ν		12	15	20	30	40	50	60	70	100	∞
$t_P(\nu)$	P=0.95	2.18	2.13	2.09	2.04	2.02	2.01	2.00	1.99	1.98	1.96

2. 间接测量量不确定度合成公式：

设： $\varphi=F(x，y，z，\ldots)$，其中 x，y，z 相互独立

则： $$\Delta_\varphi=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2(\Delta_x)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2(\Delta_y)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2(\Delta_z)^2+\cdots} \quad (5)$$

或 $$\frac{\Delta_\varphi}{\varphi}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln F}{\partial x}\right)^2(\Delta_x)^2+\left(\frac{\partial \ln F}{\partial y}\right)^2(\Delta_y)^2+\left(\frac{\partial \ln F}{\partial z}\right)^2(\Delta_z)^2+\cdots} \quad (6)$$

3. 最小二乘法直线拟合用到的公式（*a*、*b*、*r* 可以利用计算工具直接得出，不需要手算）：

当由一列数据(x_i，y_i)（其中 x_i 较准确，i=3，4，⋯,n）通过最小二乘法拟合最佳直线 $y=a+bx$ 时，公式为

$$a=\frac{\sum x_iy_i\sum x_i-\sum y_i\sum x_i^2}{\left(\sum x_i\right)^2-n\sum x_i^2}，\qquad b=\frac{\sum x_i\sum y_i-n\sum x_iy_i}{\left(\sum x_i\right)^2-n\sum x_i^2}$$

拟合还应给出相关系数 r $$r=\frac{\sum\Delta x_i\Delta y_i}{\sqrt{\sum(\Delta x_i)^2}\sqrt{\sum(\Delta y_i)^2}}$$ 其中 $\Delta x_i=x_i-\bar{x}$，$\Delta y_i=y_i-\bar{y}$；

a、b 的标准偏差为 $S_a=S_b\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$ $\frac{S_b}{b}=\sqrt{\frac{r^{-2}-1}{n-2}}$

a、b 的不确定度为 $\Delta_a=t_P(\nu)S_a$ $\Delta_b=t_P(\nu)S_b$，其中 $t_P(\nu)$的 **$\nu=n-2$**

II-2 电磁学实验基本仪器

这里介绍电磁学实验中常用的一些仪器，如直流电源、电表（包括电流表和电压表）、变阻器及电阻箱，还将讲到电磁学实验中一般应遵循的操作规则。同学们在做电磁学实验以前，应认真阅读这些内容，并做好后面的电表误差练习题。

一、直流电源

实验室常用的直流电源有直流稳压电源、干电池和直流稳流电源。直流稳压电源电压稳定，内阻小，使用方便，其输出电压有固定的，也有连续可调的。干电池电压稳定，内阻也小，但其容量（一般以安培小时计算）有限，要经常注意更换。直流稳流电源在一定的负载阻值范围内，能给出一定的恒定电流，电流大小连续可调。

选用电源时除了应注意它的输出电压是否符合需要外，也须注意取用的电流或负载电阻是否在电源的额定值之内。如果电流超额，即电源过载，电源将急剧发热而损坏。使用电压源时特别要防止它短路。

二、直流电表

实验室用的直流电表大多是磁电式仪表，目前数字式仪表的应用也日趋广泛。

直流电表的主要规格指量程、准确度等级和内阻。量程指电表可测的最大电流或电压值。电表内阻，一般在仪表说明书上已给出，或由实验室测出。设计线路和使用电表时必须了解电表的规格。

电表的误差是其主要技术特性，可分为基本误差和附加误差两部分。电表的基本误差是由其内部特性决定的。电表的基本误差 γ 用它的绝对误差 ΔA 和量程 A_m 之比来表示，即

$$\text{基本误差}\gamma=\frac{\text{绝对误差}\Delta A}{\text{量程}A_m}\times 100\%$$

标准规定，如果电表的准确度等级指数为 K，在一定条件下，基本误差极限不大于 $\pm K\%$。电表的附加误差在普通物理实验中考虑起来比较困难。

本实验室约定：在教学实验中，一般只考虑基本误差的影响，可按下式简化误差的计算

$$|\Delta A|\le A_m\cdot K\% = \Delta_A \qquad (1)$$

国家标准规定，电表一般分 7 个准确度等级，即 0.1，0.2，0.5，1.0，l.5，2.5，5.0（共 7 个级别）。电表出厂时一般已将级别标在表盘上。

检定电表是否合格，主要就是判断电表是否已达到它所标明的准确度等级；首要任务是：在电表的全部标有数字的分度线上，按一定程序在一定条件下测量，看电表示值和实际值的最大误差是否满足（1）式。

读取电表示值时，可能产生一定的读数误差。要尽量减小读数产生的附加误差，就要准确读数。眼睛要正对指针。1.0 级以上的电表都配有镜面，读数时要使眼睛、指针及指针的像三者成一直线，以尽量减少由于读数而引起的附加误差。要使估计位的读数误差不大于 $(1/3-1/5)\Delta_A$。一般读到仪表最小分度的 1/4－1/10，就可以使读数的有效位数符合电表准确度等级的要求。

被测量 A 一定时，为了减小 Δ_A/A 的值，使用电表时应让指针偏转尽量接近于满量程。此外，使用直流电表时还要注意电表的极性，正端应接在高电位处，负端应接在低电位处；在线路中电流表应串联，电压表则应并联。若接错，将会损坏仪表。

电表表盘上常用一些符号表明电表的技术性能和规格，例如

∩ 磁电式	— 直流	☆ 绝缘试验电压 500V
⊓ 水平放置	≃ 交直流两用	$\boxed{\text{II}}$ Ⅱ级防外磁场
⊥ 竖立放正	0.5 准确度等级	Ω / V 内阻表示法

数字式仪表的量程、准确度、输入电阻等都在仪器说明书或有关实验的说明中写出，使用前应先阅读这些材料。数字式仪表测量不确定度的普遍表达式为“K%×被测量大小+与分辨率有关的定值”。

三、滑线变阻器

滑线变阻器是将电阻丝均匀绕在绝缘瓷管上制成的。它有两个固定的接线端，并有一滑动端可在电阻线圈上滑动。在线路中常用它作为可变阻值的串联电阻器或组成分压电路，分别起控制电流或调节电压的作

用。

变阻器的主要规格是电阻值和额定电流。电阻值指整个变阻器的总电阻。额定电流即变阻器允许通过的最大电流。使用时通常应根据外接负载来选用规格适当（即阻值和额定电流均合适）的变阻器。

四、电阻箱

电阻箱一般是由电阻温度系数较小的锰铜线绕制的精密电阻串联而成，通过十进位旋钮可使阻值改变。电阻箱的主要规格是总电阻、额定电流（或额定功率）和准确度等级。如实验室常用的 ZX21 型六位十进式电阻箱，它的六个旋钮下的电阻全部使用上则总电阻为 99999.9Ω。如果只需要 0.1—0.9Ω （或 9.9Ω）的阻值变化，则应该接“0”和“0.9Ω”（或“9.9Ω”）两接线柱，这样可避免电阻箱其余部分的接触电阻和导线电阻对低电阻带来的不可忽略的误差。本实验室所用的 ZX21 型电阻箱各档阻值的额定电流如下：

步进电阻（Ω）（旋钮倍率）	0.1	1	10	100	1000	10000
额定电流（A）	1	0.5	0.15	0.05	0.015	0.005

有些电阻箱或变阻器上只标明了额定功率 P，其额定电流可用公式 $I=(P\,/\,R)^{1/2}$ 算出。

本实验室约定：在通常的教学实验条件下，0.1 级电阻箱的阻值不确定度Δ_R用下式简化地表示

$$\Delta_R = 0.1\%R + 0.005\,(N+1) \qquad (2)$$

上式中Δ_R的单位是Ω，N 是实际所用的十进电阻盘的个数。例如，用“0”和“9.9Ω”两接线柱时 N 值取 2。

五、电磁学实验接线规则

1．合理安排仪器。接线时必须有正确的线路图。参照线路图，通常把需要经常操作的仪器放在近处，需要读数的仪表放在眼前，根据走线合理、操作方便、实验安全的原则布置仪器。

2．按回路接线法接线和查线。按线路图，从电源正极开始，经过一个回路，回到电源负极。再从已接好的回路中某段分压的高电位点出发接下一个回路，然后回到该段分压的低电位点。这样一个回路、一个回路地接线。查线时也这样按回路查线。这是电磁学实验接线和查线的基本方法。接线时还要注意走线美观整齐。

3．预置安全位置。在接通电源前，应检查变阻器滑动端（或电位器旋钮）是否已放在安全位置，例如使电路中电流最小或电压最低的位置。有些电磁学实验还需要检查电阻是否已放到预估的阻值等。自己检查线路和预置安全位置后，应请教师复查，才能接通电源。

4．接通电源时要作瞬态试验。先试通电源，及时根据仪表示值等现象判断线路有无异常。若有异常，应立即断电进行检查。若情况正常，就可以正式开始做实验，调节线路至实验的最佳状态。

5．拆线时应先切断电源再拆线，严防电源短路。最后将仪器还原，导线整理整齐。

六、练习题

1．现有一个 1.0 级，500mA 量程的电流表，分别求出测量时读数为 50mA，250mA，或 500mA 处的Δ_I和Δ_I/I ，并以此说明使用电表时应如何选择量程。

2．指出下列几种说法中正确的一种。

A. 用磁电式电表测量，测量读数的基本误差限和被测量的大小有关；
B. 用磁电式电表测量，测量读数的基本误差限和被测量的大小无关；
C. 用数字电压表测量电压，测量读数的基本误差限和被测量的大小无关。 【　　】

3．用量程为 2.5A、准确度等级为 1.5 的电流表， 测量某稳定电流，如电表指针恰好指在 1A 的整格分度线上，下列说法中哪一种是正确的？

A. 用此电表测量时相对误差的绝对值不大于 1.5％；
B. 电表的基本误差限为 2.5×1.5％ = 0.0375≈0.038A；
C. 测量结果的不确定度为 1×1.5％ = 0.015A；
D. 电表的基本误差限为1×1.5％ = 0.015A。 【　　】

4．用量程为 15mA、准确度等级为 1.5 级电流表，测量某恒流源输出电流 I，电表表盘共有 60 分度(格)，当指针恰好指在 30 分度(格)线上时，测量结果为

A. I = 7.50±0.23 mA；　　B. I = 7.500±0.225 mA；
C. I = 7.50±0.11 mA；　　D. I = 7.500±0.113 mA。 【　　】

II-3 光学实验预备知识

光学实验是普通物理实验的一个重要部分。这里先介绍光学实验中经常用到的知识和调节技术。初学者在做光学实验以前，应认真阅读这些内容，并且在实验中遵守有关规则，灵活运用有关知识。

一、光学元件和仪器的维护

透镜、棱镜等光学元件大多数是用光学玻璃制成的，它们的光学表面都经过仔细的研磨和抛光，有些还镀有一层或多层薄膜。对这些元件或其材料的光学性能（例如折射率、反射率、透射率等）都有一定的要求，而它们的机械性能和化学性能可能很差，若使用和维护不当，则会降低光学性能甚至损坏报废。造成损坏的常见原因有：摔坏、磨损、污损、发霉、腐蚀等。为了安全使用光学元件和仪器，必须遵守以下规则：

1．必须在了解仪器的操作和使用方法后方可使用。

2． 轻拿轻放，勿使仪器或光学元件受到冲击或震动，特别要防止摔落。不使用的光学元件应随时装入专用盒内并放在桌面的里侧。

3． 切忌用手触摸元件的光学表面。如必须用手拿光学元件时，只能接触其磨砂面，如透镜的边缘、棱镜的上下底面等（如图 1）。

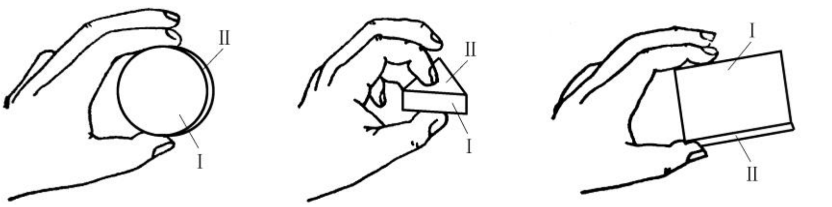

图 1　手持光学元件的方式

Ⅰ－光学面　Ⅱ－磨砂面

4． 光学表面上如有灰尘，可用实验室专备的干燥脱脂棉轻轻拭去或用橡皮球吹掉。

5． 光学表面上若有轻微的污痕或指印，可用清洁的镜头纸轻轻拂去，但不要加压擦拭，更不准用手帕、普通纸片、衣角袖口等擦拭。若表面有严重的污痕或指印，应由实验室人员用丙酮或酒精清洗。所有镀膜均不能触碰或擦拭。

6． 不要对着光学元件说话、打喷嚏等，以防止唾液或其他溶液溅落在光学表面上。

7． 调整光学仪器时，要耐心细致，一边观察一边调整，动作要轻、慢，严禁盲目及粗鲁操作。

8． 仪器用毕应放回箱（盒）内或加罩，防止灰尘沾污。

二、消视差

光学实验中经常要测量像的位置和大小。经验告诉我们，要测准物体的大小，必须将量度标尺与被测物体紧贴在一起。如果标尺远离被测物体，读数将随眼睛的位置不同而有所改变，难以测准，如图 2 所示。可是在光学实验中被测物往往是一个看得见摸不着的像，怎样才能确定标尺和待测像是紧贴在一起的呢？利用“视差”现象可以帮助我们解决这个问题。为了认识“视差”现象，读者可作一简单实验：双手各伸出一只手指，并使一指在前一指在后相隔一定距离，且两指互相平行。用一只眼睛观察，当左右（或上下）晃动眼睛时（眼睛移动方向应与被观察手指垂直），就会发现两指间有相对移动，这种现象称为“视差”。而且还会看到，离眼近者，其移动方向与眼睛移动方向相反；离眼远者则与眼睛移动方向相同。若将两指紧贴在一起，则无上述现象，即无“视差”。由此可以利用视差现象来判断待测像与标尺是否紧贴。若待测像和标尺间有视差，说明它们没有紧贴在一起，则应该稍稍调节像或标尺位置，并同时微微晃动眼睛观察，直到它们之间无视差后方可进行测量。这一调节步骤，我们常称之为“消视差”。在光学实验中，“消视差”常常是测量前必不可少的操作步骤。

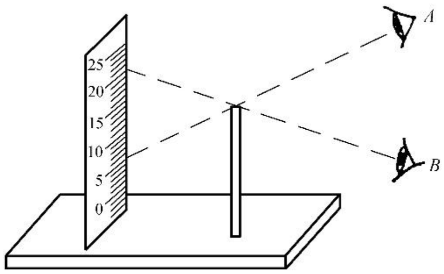

图 2　因视差影响，读数不准

三、共轴调节

光学实验中经常要用到一个或多个透镜成像。为了获得质量好的像，必须使各个透镜的主光轴重合（即共轴）并使物体位于透镜的主光轴附近。此外透镜成像公式中的物距、像距等都是沿主光轴计算长度的，为了测量准确，必须使透镜的主光轴与带有刻度的导轨平行。为达到上述要求的调节我们统称为共轴调节。调

节方法如下：

1．粗调，将光源、物和透镜靠拢，调节它们的取向和高低左右位置，凭眼睛观察，使它们的中心处在一条和导轨平行的直线上，使透镜的主光轴与导轨平行，并且使物（或物屏）和成像平面（或像屏）与导轨垂直。这一步因单凭眼睛判断，调节效果与实验者的经验有关。故称为粗调。通常应再进行细调（要求不高时可只进行粗调）。

2．细调，这一步骤要靠其他仪器或成像规律来判断和调节。不同的装置可能有不同的具体调节方法。下面介绍物与单个凸透镜共轴的调节方法。

使物与单个凸透镜共轴实际上是指将物上的某一点调到透镜的主光轴上。要解决这一问题，首先要知道如何判断物上的点是否在透镜的主光轴上。根据凸透镜成像规律即可判断。如图 3 所示，当物 AB 与像屏之间的距离 b 大于 $4f$（f 为凸透镜的焦距）时，将凸透镜沿光轴移到 O_1 或 O_2 位置都能在屏上成像，一次成大

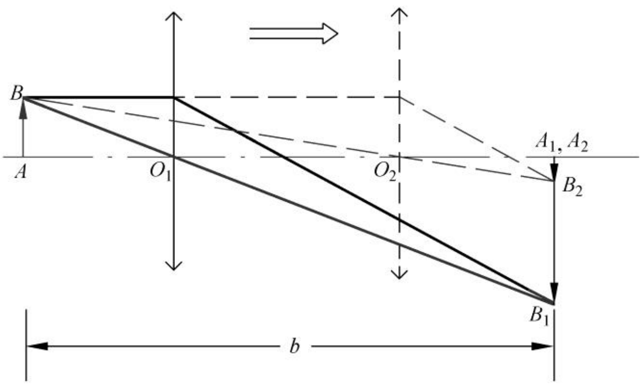

图 3 共轴调节的光路图

像 A_1B_1，一次成小像 A_2B_2。物点 A 位于光轴上，则两次像的 A_1 和 A_2 点都在光轴上而且重合。物点 B 不在光轴上，则两次像的 B_1 和 B_2 点一定都不在光轴上，而且不重合。但是，小像的 B_2 点总是比大像的 B_1 点更接近光轴。据此可知，若要将 B 点调到凸透镜光轴上，只需记住像屏上小像的 B_2 点位置（屏上贴有坐标纸供记录位置时作参照物），调节透镜（或物）的高低左右，使 B_1 向 B_2 靠拢。这样反复调节几次直到 B_1 与 B_2 重合，即说明 B 点已调到透镜的主光轴上了。

若要调多个透镜共轴，则应先将物上 B 点调到一个凸透镜的主光轴上，然后，同样根据轴上物点的像总在轴上的道理，逐个增加待调透镜，调节它们使之逐个与第一个透镜共轴。