

连续介质力学作业七

刘锦坤

2022013352

2023 年 12 月 17 日

1 第一题

2 第二题

抱歉，我坚持认为存在关系

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = e_{ij}$$

我可以证明如下，

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \left(\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \right)_{\xi^\alpha, t} \\ &= \left(\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \right)_{x^\alpha, t} + \left(\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x^i} \right)_{x^\alpha, t} \left(\frac{\partial x^i}{\partial t} \right)_{\xi^\alpha, t} \end{aligned}$$

其中括号后的下标表示求偏导时哪些是构成函数关系的变量，这完全就是数学上的复合映射的求导法则。且注意到 $\left(\frac{\partial x^i}{\partial t} \right)_{\xi^\alpha, t}$ 就是 v_i ，因此上式完全就是物质导数的定义。

因此我认为

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = e_{ij}$$

一定成立。

3 第三题

先证明平均方向应力公式，即

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S_a} p_{nn} d\sigma = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S_a} \vec{n} \cdot \tilde{P} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{1}{3} p_{\cdot i}^{\cdot i}$$

在考虑的空间点为原点，引入一个直角坐标系 $oxyz$ ，且应力张量的三个主方向为 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ，即在考虑的空间点处有

$$\tilde{P} = p_x \vec{e}_x \vec{e}_x + p_y \vec{e}_y \vec{e}_y + p_z \vec{e}_z \vec{e}_z$$

引入球坐标 θ, ϕ 进行积分计算, 有 $\vec{n} = \sin\theta\cos\phi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z$, 带入得

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S_a} \vec{n} \cdot \vec{P} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{S_a} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\vec{n} \cdot \vec{P} \cdot \vec{n}}{4\pi a^2} d\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} p_x \sin^3\theta \cos^2\phi + p_y \sin^3\theta \sin^2\phi + p_z \sin\theta \cos^2\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi p_x \sin^3\theta \cos^2\phi + p_y \sin^3\theta \sin^2\phi + p_z \sin\theta \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{p_x + p_y + p_z}{3} \\ &= \frac{1}{3} p_{\cdot i}^{i \cdot}\end{aligned}$$

然后带入

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij} = -pg^{ij} + \lambda e_{\alpha}^{\alpha} g^{ij} + 2\mu e^{ij}$$

并且利用

$$tr(\tilde{g}) = 3, \quad tr(\tilde{e}) = \nabla \cdot \vec{v}$$

即得

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S_a} p_{nn} d\sigma = \frac{1}{3} p_{\cdot i}^{i \cdot} = -p + \left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right) \nabla \cdot \vec{v}$$

4 第四题

接下来都在 Euler 观点下考虑。以下标表示各组分, 组分 α 的密度场记为 ρ_α , 速度场记为 \vec{v}_α , 应力张量设为 \tilde{P}_α , 受的质量力为 \vec{F}_α 。同时引入一个新的参量 $\vec{f}_{\alpha\beta}$, 表示单位体积内 α 组分对 β 组分的作用力。那么取空间中固定的体积 V , 对于组分 α 有

$$\int_V \frac{\partial(\rho_\alpha \vec{v}_\alpha)}{\partial t} dV = \int_V \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{\beta\alpha} dV + \int_V \rho_\alpha \vec{F}_\alpha dV + \int_{\partial V} \vec{n} \cdot \sum_{\beta} \tilde{P}_\beta d\sigma + \int_{\partial V} (\vec{n} \cdot \vec{v}_\alpha) \rho_\alpha \vec{v}_\alpha d\sigma \quad (1)$$

由于不考虑化学反应, 所以可以带入质量守恒方程

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = 0 \quad (1)$$

并且注意到 V 的任意性即得

$$\rho_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} - \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{\beta\alpha} - \rho_\alpha \vec{F}_\alpha - \nabla \cdot \sum_{\beta} \tilde{P}_\beta = 0 \quad (2)$$

这即为组分 α 的动量守恒方程。