连续介质力学作业五

刘锦坤

2022013352

2023 年 12 月 3 日

1 第一题

为了便于表述，在本题之后的推导中，所有不加额外说明的求偏导默认对于 Euler 坐标系中的坐标进行，对于 Language 坐标系中的坐标求偏导时，会进行额外说明，例如 $(\frac{\partial A}{\partial t})_{\xi^\alpha}$ 表示物理量 A 在 Language 坐标系中对时间 t 求偏导。

对于速度和加速度，我们已经知道有

$$\vec{v} = v^i \vec{e_i}$$

于是根据加速度的定义有

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = (\frac{\partial \vec{v}}{\partial t})_{\xi^\alpha} = (\frac{\partial (v^i \vec{e_i})}{\partial t})_{\xi^\alpha} \\
&= (\frac{\partial v^i}{\partial t})_{\xi^\alpha} \vec{e_i} + v^i (\frac{\partial \vec{e_i}}{\partial t})_{\xi^\alpha} \\
&= \frac{dv^i}{dt} \vec{e_i} + v^i (\frac{\partial \vec{e_i}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{e_i}}{\partial x^j} (\frac{\partial x^j}{\partial t})_{\xi^\alpha})
\end{aligned}$$

由于 Euler 坐标系是静止的，故 $\frac{\partial \vec{e_i}}{\partial t} = 0$，且注意到

$$\frac{\partial \vec{e_i}}{\partial x_j} = \Gamma^k_{ij} \vec{e_k}, (\frac{\partial x^j}{\partial t})_{\xi^\alpha} = v^j$$

于是有

$$\vec{a} = \frac{dv^i}{dt} \vec{e_i} + v^i v^j \Gamma^k_{ij} \vec{e_k}$$

故得到

$$a^k = \frac{dv^k}{dt} + v^i v^j \Gamma^k_{ij} \tag{1}$$

对于应变张量和应变率张量，根据应变率张量的定义即有

$$e^{ij} = (\frac{\partial \epsilon^{ij}}{\partial t})_{\xi^\alpha} = \frac{d\epsilon^{ij}}{dt} \tag{2}$$

2 第二题

接下来的讨论都在 Euler 观点下进行，记 A,B,C 三种物质的密度场为 ρ_A, ρ_B, ρ_C，速度场记为 $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$，单位时间单位体积内 A 反应的质量记为 X，则 B 反应的质量则可记为 $2X$，生成的 C 的质量则可记为 X，则有对于 Euler 坐标下的固定体积 V，有

$$\frac{d}{dt}\int_V (\rho_A + \rho_B + \rho_C) dV + \int_{\partial V} (\rho_A \vec{v}_A + \rho_B \vec{v}_B + \rho_C \vec{v}_C) \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

应用 Gauss 积分公式，并且考虑到体积 V 的任意性即得

$$\frac{\partial(\rho_A+\rho_B+\rho_C)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_A\vec{v}_A+\rho_B\vec{v}_B+\rho_C\vec{v}_C)=0 \tag{1}$$

那么对于物质 A 可以列出

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_A dV+\int_{\partial V}\rho_A\vec{v}_A\cdot d\vec{\sigma}+\int_V XdV=0$$

应用 Gauss 公式，并且考虑到体积 V 的任意性即得

$$\frac{\partial\rho_A}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_A\vec{v}_A)=-X$$

同理对 B 可得

$$\frac{\partial\rho_B}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_B\vec{v}_B)=-2X$$

对于 C 则有

$$\frac{\partial\rho_C}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_C\vec{v}_C)=3X$$

可以看到与总的质量守恒方程式 (1) 自洽的。另外值得说明的是，这里引入了一个新的场函数 X，用以描述空间中化学反应进行的情况。从化学反应的角度考虑，X 可以是由 $\rho_A,\rho_B,\rho_C,\vec{v}_A,\vec{v}_B,\vec{v}_C$ 以及温度等场函数共同决定的函数。

3 第三题

记模型中的一维坐标为 x, 引入沿 x 坐标方向的应力 $p(x)$，由于一维模型，可以认为质量力也只有沿着 x 坐标方向的分量，记为 $F(x)$，截面面积大小记为 $A(x)$，则在 x 和 $x+\Delta x$ 取各取一个截面，和管道围成一个体积 V，利用方程

$$\int_V \frac{d\vec{v}}{dt}\rho dV=\int_V \vec{F}\rho dV+\int_{\partial V}\vec{p}\cdot d\vec{\sigma}$$

$$\Rightarrow \int_V \frac{d\vec{v}}{dt}\rho A dx=\int_V \vec{F}\rho A dx+\int_{\partial V}\vec{p}\cdot d\vec{\sigma}$$

并且用到积分的中值定理，可以得到

$$\dot{v}(\xi)\rho(\xi)A(\xi)\Delta x=F(\eta)\rho(\eta)A(\eta)\Delta x+(-p(x+\Delta x)A(x+\Delta x)+p(x)A(x))$$

其中 ξ,η 是 x 和 $x+\Delta x$ 之间的某两个点，上式两边除以 Δx 并令 $\Delta x\to 0$ 即得

$$\rho A\dot{v}=\rho AF-\frac{d(pA)}{dx} \tag{1}$$