连续介质力学作业七

刘锦坤

2022013352

2023 年 12 月 17 日

1 第一题

2 第二题

3 第三题

先证明平均方向应力公式，即

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S_a}p_{nn}d\sigma=\lim_{a\to 0}\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S_a}\vec{n}\cdot\tilde{P}\cdot\vec{n}d\sigma=\frac{1}{3}p^{i\cdot}_{\cdot i}$$

在考虑的空间点为原点，引入一个直角坐标系 $oxyz$，且应力张量的三个主方向为 $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$，即在考虑的空间点处有

$$\tilde{P}=p_x\vec{e}_x\vec{e}_x+p_y\vec{e}_y\vec{e}_y+p_z\vec{e}_z\vec{e}_z$$

引入球坐标 θ,ϕ 进行积分计算，有 $\vec{n}=sin\theta cos\phi\vec{e}_x+sin\theta sin\phi\vec{e}_y+cos\theta\vec{e}_z$，带入得

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0}\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S_a}\vec{n}\cdot\tilde{P}\cdot\vec{n}d\sigma&=\int_{S_a}\lim_{a\to 0}\frac{\vec{n}\cdot\tilde{P}\cdot\vec{n}}{4\pi a^2}d\sigma\\&=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_a}p_xsin^3\theta cos^2\phi+p_ysin^3\theta sin^2\phi+p_zsin\theta cos^2\theta d\theta d\phi\\&=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}p_xsin^3\theta cos^2\phi+p_ysin^3\theta sin^2\phi+p_zsin\theta cos^2\theta d\theta\\&=\frac{p_x+p_y+p_z}{3}\\&=\frac{1}{3}p^{i\cdot}_{\cdot i}\end{aligned}$$

然后带入

$$p^{ij}=-pg^{ij}+\tau^{ij}=-pg^{ij}+\lambda e^{\alpha\cdot}_{\cdot\alpha}g^{ij}+2\mu e^{ij}$$

并且利用

$$tr(\tilde{g})=3,\quad tr(\tilde{e})=\nabla\cdot\vec{v}$$

即得

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S_a}p_{nn}d\sigma=\frac{1}{3}p^{i\cdot}_{\cdot i}=-p+(\lambda+\frac{2\mu}{3})\nabla\cdot\vec{v}$$

4 第四题

接下来都在 Euler 观点下考虑。以下标表示各组分，组分 α 的密度场记为 ρ_α，速度场记为 $\vec{v}_\alpha$，应力张量设为 $\tilde{P}_\alpha$，受的质量力为 $\vec{F}_\alpha$。同时引入一个新的参量 $\vec{f}_{\alpha\beta}$，表示单位体积内 α 组分对 β 组分的作用力。那么取空间中固定的体积 V，对于组分 α 有

$$\int_V \frac{\partial(\rho_\alpha \vec{v}_\alpha)}{\partial t} dV = \int_V \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{\beta\alpha} dV + \int_V \rho_\alpha \vec{F}_\alpha dV + \int_{\partial V} \vec{n} \cdot \sum_\beta \tilde{P}_\beta d\sigma + \int_{\partial V} (\vec{n} \cdot \vec{v}_\alpha) \rho_\alpha \vec{v}_\alpha d\sigma \tag{1}$$

由于不考虑化学反应，所以可以带入质量守恒方程

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = 0 \tag{1}$$

并且注意到 V 的任意性即得

$$\rho_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} - \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{\beta\alpha} - \rho_\alpha \vec{F}_\alpha - \nabla \cdot \sum_\beta \tilde{P}_\beta = 0 \tag{2}$$

这即为组分 α 的动量守恒方程。