连续介质力学作业七

刘锦坤

2022013352

2023 年 12 月 18 日

1 第一题

根据纳维-斯托克斯方程，对于不可压缩流体，体积粘度 η_b 将会出现在方程中，影响流体的运动。从分子动理论的角度来看，剪切粘度 η 反应的是分子平动的影响，而体积粘度 η_b 反应的则是分子振动、转动的影响。过去已经有一些分子理论给出了对于体积粘度和剪切粘度的预测。而当下已有体积粘度的实验数据较少，实验测量体积粘度的方法的提出就显得尤为重要。

注意到超声波在均匀介质中传播时，黏性和热传导是造成其衰减的主要原因，而超声波在液体中传导时，又可以忽略热传导的影响，即超声波在液体中的衰减主要是由黏性造成的。可以通过测量超声波在液体中的衰减来间接测量液体的体积粘度。因此在这篇文章中采用了声谱学的方法对流体的体积黏度进行测量，并且利用这种方法，我们还可以检验流体是否为牛顿流体。

作为实验结果，文章对一般认为是牛顿流体的十二种物质进行了测量。最终发现环己烷和乙酸丁酯并非牛顿流体，而水的测量结果与之前的实验结果相符。并且发现体积粘度本身和流体其他的强度性质并没有显著的强关联，这表明体积粘度是反应流体本身性质的一个独立物理量，可以用于构建描述流体分子相互作用的方程组。

2 第二题

如果我们认为 e_{ij} 就像在定义时一样，指的是应变率张量 $\tilde{e}$ 在瞬时构形的拉格朗日坐标系下的分量。那么我坚持认为存在关系

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = e_{ij}$$

我可以证明如下，

$$\begin{aligned} e_{ij} &= (\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t})_{\xi^\alpha, t} \\ &= (\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t})_{x^\alpha, t} + (\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x^i})_{x^\alpha, t}(\frac{\partial x^i}{\partial t})_{\xi^\alpha, t} \end{aligned}$$

其中括号后的下标表示求偏导时哪些是构成函数关系的变量，这完全就是数学上的复合映射的求导法则。且注意到 $(\frac{\partial x^i}{\partial t})_{\xi^\alpha, t}$ 就是 v_i，因此上式完全就是物质导数的定义。因此我认为

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = e_{ij}$$

一定成立。

但是如果这里的 e_{ij} 指的是应变率张量 $\tilde{e}$ 在欧拉坐标系下的分量，即按照欧拉坐标系基矢量并积展开的形式，那么应该成立的是

$$e_{ij} = \frac{\partial \xi^p}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^q}{\partial x^j}\frac{d\epsilon_{pq}}{dt}$$

二者的差异是做了一个坐标变换。

3 第三题

先证明平均方向应力公式，即

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S_a}p_{nn}d\sigma=\lim_{a\to 0}\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S_a}\vec{n}\cdot\tilde{P}\cdot\vec{n}d\sigma=\frac{1}{3}p^{i\cdot}_{\cdot i}$$

在考虑的空间点为原点，引入一个直角坐标系 $oxyz$，且应力张量的三个主方向为 $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$，即在考虑的空间点处有

$$\tilde{P}=p_x\vec{e}_x\vec{e}_x+p_y\vec{e}_y\vec{e}_y+p_z\vec{e}_z\vec{e}_z$$

引入球坐标 θ,ϕ 进行积分计算，有 $\vec{n}=sin\theta cos\phi\vec{e}_x+sin\theta sin\phi\vec{e}_y+cos\theta\vec{e}_z$，带入得

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0}\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S_a}\vec{n}\cdot\tilde{P}\cdot\vec{n}d\sigma&=\int_{S_a}\lim_{a\to 0}\frac{\vec{n}\cdot\tilde{P}\cdot\vec{n}}{4\pi a^2}d\sigma\\&=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_a}p_xsin^3\theta cos^2\phi+p_ysin^3\theta sin^2\phi+p_zsin\theta cos^2\theta d\theta d\phi\\&=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}p_xsin^3\theta cos^2\phi+p_ysin^3\theta sin^2\phi+p_zsin\theta cos^2\theta d\theta\\&=\frac{p_x+p_y+p_z}{3}\\&=\frac{1}{3}p^{i\cdot}_{\cdot i}\end{aligned}$$

然后带入

$$p^{ij}=-pg^{ij}+\tau^{ij}=-pg^{ij}+\lambda e^{\alpha\cdot}_{\cdot\alpha}g^{ij}+2\mu e^{ij}$$

并且利用

$$tr(\tilde{g})=3,\quad tr(\tilde{e})=\nabla\cdot\vec{v}$$

即得

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S_a}p_{nn}d\sigma=\frac{1}{3}p^{i\cdot}_{\cdot i}=-p+(\lambda+\frac{2\mu}{3})\nabla\cdot\vec{v}$$

4 第四题

接下来都在 Euler 观点下考虑。以下标表示各组分，组分 α 的密度场记为 ρ_α，速度场记为 $\vec{v}_\alpha$，应力张量设为 $\tilde{P}_\alpha$，受的质量力为 $\vec{F}_\alpha$。同时引入一个新的参量 $\vec{f}_{\alpha\beta}$，表示单位体积内 α 组分对 β 组分的作用力。那么取空间中固定的体积 V，对于组分 α 有

$$\int_V\frac{\partial(\rho_\alpha\vec{v}_\alpha)}{\partial t}dV=\int_V\sum_{\beta\neq\alpha}\vec{f}_{\beta\alpha}dV+\int_V\rho_\alpha\vec{F}_\alpha dV+\int_{\partial V}\vec{n}\cdot\sum_\beta\tilde{P}_\beta d\sigma+\int_{\partial V}(\vec{n}\cdot\vec{v}_\alpha)\rho_\alpha\vec{v}_\alpha d\sigma \tag{1}$$

由于不考虑化学反应，所以可以带入质量守恒方程

$$\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_\alpha\vec{v}_\alpha)=0 \tag{1}$$

并且注意到 V 的任意性即得

$$\rho_\alpha\frac{d\vec{v}_\alpha}{dt}-\sum_{\beta\neq\alpha}\vec{f}_{\beta\alpha}-\rho_\alpha\vec{F}_\alpha-\nabla\cdot\sum_\beta\tilde{P}_\beta=0 \tag{2}$$

这即为组分 α 的动量守恒方程。