12.18笔记

黏性流体和线性弹性体（小变形）

黏性流体

本构关系：

$$\begin{aligned} p^{ij} &= -pg^{ij} + A^{ij\alpha\beta}e_{\alpha\beta} \\ &= -pg^{ij} + \lambda g^{ij}\nabla\cdot\vec{v} + 2\mu e^{ij} \end{aligned}$$

1. μ称为剪切黏度，λ称为体积黏度。

平均法向应力：

$$p_{nnav} = \frac{1}{3}p^{i\cdot}_{\cdot i} = -p + (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\nabla\cdot\vec{v}$$

N-S方程

单位体积内应力功率

$$-p^{ij}e_{ij} = p\nabla\cdot\vec{v} - \phi$$

---分割线---

线性弹性体

本构关系

$$\begin{aligned} p^{ij} &= C^{ij\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} \\ &= \lambda g^{ij}\nabla\cdot\vec{w} + 2\mu\epsilon^{ij} \end{aligned}$$

1. 这里考虑的是小变形的情况即$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha w_\beta + \nabla_\beta w_\alpha)$
2. $C^{ij\alpha\beta}$称为弹性模量张量，也是一个四阶对称各向同性张量。
3. λ, μ称为拉梅（法国人喔）系数。

平均法向应力

$$p_{nnav} = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\nabla\cdot\vec{w} = K\theta$$

1. 这里的μ是剪切模量，$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$是体积模量，$\theta = \nabla \cdot \vec{w}$是体胀系数。

拉梅方程

$$\rho \frac{d}{dt}\frac{d\vec{w}}{dt} = \rho\vec{F} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\vec{w} + \mu\nabla^2\vec{w}$$

单位体积内应力功率

$$-p^{ij}e_{ij} = -p^{ij}\frac{d\epsilon_{ij}}{dt}$$

1. 这里利用了近似$e_{ij}dt = d\epsilon_{ij}$?
2. 若定义$X = \frac{1}{2}C^{ij\alpha\beta}\epsilon ij\epsilon_{\alpha\beta}$，有$\frac{\partial X}{\partial\epsilon_{ij}} = C^{ij\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} = p^{ij}$，且$\frac{\partial X(\epsilon_{ij})}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial \epsilon_{ij}}\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} = p^{ij}e_{ij}$,于是我们看出$X$就是弹性势能。

对于单轴拉伸，有$p^{11} = E\epsilon^{11}$和$\epsilon^{22} = \epsilon^{33} = -\nu\epsilon^{11}$，其中$E$为杨氏模量，$\nu$为泊松比。

热力学