22 de Febrero 2025

Inteligencia Artificial
Act 8: Laboratorio de Repaso Algebra Lineal

1 Operacions con matrices y determinantes

1. Encuentre la inversa de la siguiente matriz y verifique su resultado:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede calcular la inversa de una matriz mediante el método de Gauss Jordan, en el cual ponemos la matriz identidad del lado derecho y realizamos operaciones de manera que del lado izquierdo nos quedemos con la identidad y en el lado derecho tendremos la inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hacemos F3 = F3 - 5F1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Después F1 = F1 - 2F2 y F3 = F3 - (-4)F2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Finalmente F1 = F1 - (-5)F3 y F2 = F2 - 4F3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore F^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Para verificar el resultado, podemos multiplicar la matriz por su inversa y de resultado nos tiene que dar la identidad.

$$F \cdot F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24+40-15 & 18-30+12 & 5-8+3 \\ 0+20-20 & 0-15+16 & 0-4+4 \\ -120+120+0 & 90-90+0 & 25-24+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Demuestre que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.
Sean A y B dos matrices cuadradas, entonces det(AB) = det(A) * det(B).
Si la matriz A es invertible, tenemos que la matriz se puede escribir como el producto de matrices elementales $A = E_1E_2...E_k$. Entonces
det(AB) = det($E_1E_2...E_k$B) = (detE_1)det($E_2...E_k$B) = ... = (detE_1)(detE_2) ... (detE_k)(det B)
Pero (detE_1)(detE_2) ... (detE_k) = det A
Entonces se tiene que (detE_1)(detE_2) ... (detE_k)(det B) = det(A)det(B)

2 Sistemas de ecuaciones lineales

3. Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -2x + 4y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

Despejamos las variables:

$$x = \frac{7 + y - z}{4}, y = \frac{1 + 2x + 2z}{4}, z = \frac{5 - x + y}{3}.$$

Tomamos valores iniciales: x = y = z = 0

Iteración 1.

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 + 0 - 0}{4} = 1.7500 \\ y &= \frac{1 + 2(1.7500) + 2(0)}{4} = 1.1250 \\ z &= \frac{5 - 1.7500 + 1.1250}{3} = 1.4583 \end{aligned}$$

Iteración 2.

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 + 1.1250 - 1.4583}{4} = 1.6667 \\ y &= \frac{1 + 2(1.6667) + 2(1.4583)}{4} = 1.8125 \\ z &= \frac{5 - 1.6667 + 1.8125}{3} = 1.7153 \end{aligned}$$

Iteración 3.

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 + 1.8125 - 1.7153}{4} = 1.7743 \\ y &= \frac{1 + 2(1.7743) + 2(1.7153)}{4} = 1.9948 \\ z &= \frac{5 - 1.7743 + 1.9948}{3} = 1.7402 \end{aligned}$$

Iteración 4.

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 + 1.9948 - 1.7402}{4} = 1.8136 \\ y &= \frac{1 + 2(1.8136) + 2(1.7402)}{4} = 2.0269 \\ z &= \frac{5 - 1.8136 + 2.0269}{3} = 1.7378 \end{aligned}$$

Error:

$$\begin{aligned} |x_4 - x_3| &= 0.0393 \\ |y_4 - y_3| &= 0.0321 \\ |z_4 - z_3| &= 0.0024 \end{aligned}$$

Considerando un error menor al 0.05 podemos aproximar las variables.

$$\therefore \mathbf{x = 1.8,\ y = 2,\ z = 1.7}$$

4. Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones 2 y 3 son múltiplos de la ecuación 1, porque si multiplicamos la ecuación 1 por 2 obtenemos la ecuación 2 y así mismo con la ecuación 3, si la multiplicamos por 3, obtenemos la ecuación 3, entonces podemos expresar el sistema como:

$$\begin{cases} x = -2y - 3z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Entonces, (x, y, z) = (-2y-3z, y, z), si separamos quedaría que (x, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)

$\therefore$ *La solución son todas las combinaciones de los vectores (-2, 1, 0) y (-3, 0, 1)*

3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

5. Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores $\{(1,2,3),(2,4,6),(3,6,9)\}$. Al ver los vectores, podemos encontrar que estos son linealmente dependientes, ya que si multiplicamos por 2 y 3 el vector 1, obtenemos los vectores 2 y 3, respectivamente.

$$(2,4,6) = 2 \cdot (1,2,3) \qquad (3,6,9) = 3 \cdot (1,2,3)$$

Entonces, ya que solo hay un vector independiente, la base esta dada por ese vector, y la dimensión, dado que solo hay un vector en la base, tendríamos que sería 1.

$$\therefore Base = \{(1,2,3)\} \qquad \therefore Dimensión = 1$$

6. Determine los autovalores y autovectores de la matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Para obtener los autovalores, restamos λ a los elementos de la diagonal.

$$G - \lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante e igualamos a 0.

$$\begin{aligned} (5-\lambda)(5-\lambda) - (-2)(-2) &= 0 \\ (5-\lambda)^2 - 4 &= 0 \\ (5-\lambda)^2 &= 4 \\ 5-\lambda &= \pm 2 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 5+2 = 7 \qquad \lambda_2 = 5-2 = 3$$

$\therefore$ Los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = 3$.

Para los autovectores, hay que sustituir los autovalores en $(G - \lambda I) \cdot x = 0$
Para λ_1=7:

$$(G - 7I) \cdot x = \begin{bmatrix} 5-7 & -2 \\ -2 & 5-7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Nos quedaría el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Como podemos notar, es la misma ecuación, si se simplifica queda: $x + y = 0 \to y = -x$
Por lo tanto, podemos deducir que cualquier vector de la forma $(x, -x)$, es autovector para $\lambda = 7$, un ejemplo sería $v = (1, -1)$.

Para $\lambda_2 = 3$

$$(G - 3I) \cdot x = \begin{bmatrix} 5-3 & -2 \\ -2 & 5-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Nos quedaría el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Ambas ecuaciones son equivalentes, por lo que si simplificamos nos queda: $x - y = 0 \to y = x$
Por lo tanto, cualquier vector de la forma (x, x) es un autovector para $\lambda = 3$, por ejemplo $v = (1, 1)$.

4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

7. Explique cómo el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el álgebra lineal para reducir dimensiones.
El análisis de componentes principales reduce el número de dimensiones de grandes conjuntos de datos a componentes principales que conservan la mayor parte de la información original. Primero representa la dos en una matriz luego, estandariza los datos y calcula la covarianza después, calcula los autovalres y autovectores, para ya al final tener los principales autovectores

8. Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz.

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Estamos buscando su descomposición en valores singulares, esto es tres matrices $U, \sum, V$ tal que $H = U \sum V^T$, donde:

- U: matriz ortogonal de autovectores de HH^T
- $\sum$: Matriz de valores singulares de A la diagonal principal y lo demas 0.
- V^T: Matriz ortogonal de autovectores de $A^T A$

Definimos H^T :

$$H^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos $H^T H =$, $HH^T =$.

$$H^T H = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \qquad HH^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Obtenemos los autovalores y autovectores de:

$H^T H =$

$$\begin{aligned} \left|H^T H - \lambda I\right| &= \begin{vmatrix} 13-\lambda & 7 \\ 7 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \\ &[(13-\lambda)(5-\lambda) - (7*7)] = \\ &\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0 \\ &\to \lambda_1 = 17.06 \qquad \to \lambda_2 = 0.94 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1.73 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -0.58 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Construimos V y V^T, normalizando los vectores con la ecuación $v_1 = \frac{7}{4.06} v_2$ para λ_1 y la ecuación $v_1 = \frac{-7}{12.06} v_2$ para λ_2 nos queda que:

$$v_1 = 0.86, v_2 = 0.50 \qquad v_1 = -0.50, v_2 = 0.86$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.86 & -0.50 \\ 0.50 & 0.86 \end{bmatrix} \qquad V^T = \begin{bmatrix} 0.86 & 0.50 \\ -0.50 & 0.86 \end{bmatrix}$$

$HH^T =$

$$\begin{aligned} \left|HH^T - \lambda I\right| &= \begin{vmatrix} 10-\lambda & 8 \\ 8 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \\ &[(10-\lambda)(8-\lambda) - (8*8)] = \\ &\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0 \\ &\to \lambda_1 = 17.06 \qquad \to \lambda_2 = 0.94 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1.13 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -0.88 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Construimos U, normalizando los vectores con la ecuación $v_1 = \frac{8}{7.06} v_2$ para λ_1 y la ecuación $v_1 = \frac{-8}{9.06} v_2$ para λ_2 nos queda que:

$$v_1 = 0.75, v_2 = 0.66 \qquad v_1 = -0.66, v_2 = 0.75$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.66 \\ 0.66 & 0.75 \end{bmatrix}$$

Los valores singulares de A son las raices cuadradas de los valores positivos ya sea de HH^T o $H^T H$, hay que notar que ambos tienen los mismos autovalores positivos, entonces

$$\sigma_1 = \sqrt{17.06} = 4.14 \qquad \sigma_2 = \sqrt{0.94} = 0.97$$

Construimos $\sum$ (se acomoda de mayor a menor)

$$\sum = \begin{bmatrix} 4.14 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ *La descomposición de los valores singulares de H es:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.66 \\ 0.66 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.14 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.86 & 0.50 \\ -0.50 & 0.86 \end{bmatrix}$$

9. Analice el uso de álgebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales.
El uso del algebra lineal en las redes neuronales es un paso clave, ya que muchas de las operaciones o herramientas que se utilizan, datan de un aprendizaje del álgebra lineal, como es el caso de las matrices. Las matrices principalmente se utilizan como un medio de optimización, los datos mayormente van a ser mostrados por medio de vectores o matrices, de igual manera se realiza una multiplicación de matrices para las capas, hasta podemos encontrar la descomposición de valores singulares dentro de las operaciones que realizan en las redes neuronales.

10. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en IA.
Los espacios vectoriales facilitan la representación eficiente de grandes cantidades de datos, un espacio vectorial se puede representar como documentos, cada dimensión corresponde a un término único dentro de todos los documentos, mientras que los documentos y las consultas representan con vector dentro del espacio. En general, los espacios vectoriales, permiten tanto almacenar como manipular datos, y a través de operaciones estos datos pueden ser proyectados.