3 次元の描画について

1　バーテックスシェーダ

変換行列は左から掛けるものとし、3 次元空間には左手系座標系を用いる。

1.1　ワールド座標変換

拡大縮小・平行移動・回転行列は以下のように求まる。

$$S(s) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

$$D(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

$$R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$$R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

$$R_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

ワールド座標変換は以下の式で表される。

$$[a]_{world} = D(-position) \cdot S(s) \cdot R_z(-\theta_z) \cdot R_y(-\theta_y) \cdot R_x(-\theta_x) \cdot [a]_{local} \tag{1.6}$$

1.2 ビュー座標変換

$target$ を注視点、$camera$ をカメラ座標、$upper$ をカメラの上方ベクトルとする。ビュー座標の基底を以下のように求める。

$$V_z = normarize(target - camera) \tag{1.7}$$

$$V_x = normarize(V_z \times upper) \tag{1.8}$$

$$V_y = normarize(V_x \times V_z) \tag{1.9}$$

ワールド座標空間からビュー座標空間への基底変換行列を用いて次のように書ける。

$$(V_x, V_y, V_z) = (W_x, W_y, W_z)P_{W\to V} \tag{1.10}$$

ここで、ワールド座標空間の基底は基本ベクトルの組なので、

$$P_{W\to V} = [V_x\, V_y\, V_z] \tag{1.11}$$

また、ビュー座標空間からワールド座標空間への基底変換行列を用いると、

$$[a]_{view} = P_{W\to V}[a]_{world} \tag{1.12}$$

（ただし、カメラの位置は原点とする）

$P_{W\to V}$ は直交行列であるから、

$$P_{V\to W} = P_{W\to V}^{-1} = P_{W\to V}^{\mathrm{T}} \tag{1.13}$$

カメラの位置に移動してから基底変換をすれば良いので、

$$[a]_{view} = P_{W\to V}^{\mathrm{T}} \cdot D(-camera) \cdot [a]_{world} \tag{1.14}$$

1.3 プロジェクション座標変換

やること

- x, y それぞれを $-1{<}x{<}1, -1{<}y{<}1$ の範囲に収める
- x, y を z の値によって拡大縮小する
- z を $0{<}z{<}1$ の範囲に収める
- w で割ったら上記の条件を満たすようにする

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{aspect\cdot\tan(\theta/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far}{far-near} & -\frac{far\cdot near}{far-near} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [a]_{view} \tag{1.15}$$

$$[a]_{clip} = \frac{1}{w} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

$$z_1 = \frac{z_0}{far - near} - \frac{near}{far - near} \tag{1.17}$$

でも、0-1 の間に収まる。しかし、x_1, y_1, z_1, w の値を一様に w で割ろうとすると都合が悪い。

$$z_1 = \left(\frac{z_0}{far - near} - \frac{near}{far - near} \right) z_0 \tag{1.18}$$

としておけば、w で割ったときに 0~1 の範囲に行くが、z_0 を掛けるのは行列演算ではできないので far を掛けて次の式のようにする。

$$z_1 = \left(\frac{z_0}{far - near} - \frac{near}{far - near} \right) far \tag{1.19}$$

この式の妥当性を証明する。z_0 で割った後にどうなるかを考えたいので z_0 で割り、整理して

$$F(z) = \frac{z - n}{f - n} \frac{f}{z} \tag{1.20}$$

ただし、$z_0 \in R$, $z_0 > 0$

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{f}{f - n} \left(\frac{1}{z} + z + n \right) > 0 \tag{1.21}$$

より、単調増加。$F(z) = 1$ のとき、$z = f$、$F(z) = 0$ のとき、$z = n$ であるから、この $F(z)$ は z_1 を求めるのに適している。

1.4 スクリーン座標変換

やること

- 原点を $(x, y) = (-1, 1)$ の位置に変更する
- y を反転する
- x, y を画面サイズに引き伸ばす

$$[a]_{screen} = \begin{bmatrix} w/2 & 0 & 0 & w/2 \\ 0 & -h/2 & 0 & h/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [a]_{clip} \tag{1.22}$$

2 ラスタライザ

プロジェクション座標系において正面から見た 2 次元のマップを作成する。あるピクセルがポリゴンの範囲内ならば、そのピクセルをそのポリゴンに関連付ける。Z 座標の大きい方から描画する。

3 フラグメントシェーダ