تمرین سری ۵

به نام خدا

بازی برتراند تکرار شونده با محصولات متمایز

سؤال ۱ :

$$\Pi_a = (24 - 2P_a + P_b)(P_a - c) \quad , \quad c = 3$$

$$\Pi_b = (24 - 2P_b + P_a)(P_b - c)$$

الف)

$$\frac{\partial \Pi_a}{\partial P_a} = -2(P_a - c) + 24 - 2P_a + P_b = 0 \implies P_a = \frac{P_b}{4} + \frac{c}{2} + 6$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_a}{\partial P_a^2} = -4 \checkmark$$

$$\begin{cases} P_a = \frac{P_b}{4} + \frac{c}{2} + 6 \\ P_b = \frac{P_a}{4} + \frac{c}{2} + 6 \end{cases} \implies (P_a^*, P_b^*) = (10, 10)$$

با توجه به تقارن بازی

ب-۱)

$$\text{(1)}\ P_a(t+1) = P_a(t) + \alpha P_a(t)\left[-4P_a(t) + P_b(t) + 30\right] \Leftarrow \text{Modified G + Naive}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{(2)}\ \underline{P_b(t+1)} = \frac{1}{4}\underline{P_{ab}(t+1)} + 7.5 \\ &\text{(3)}\ P_{ab}(t+1) = P_{ab}(t) + \beta\left(P_a(t) - P_{ab}(t)\right) \end{aligned}\right\} \implies \text{BR + Adaptive Es.}$$

دقت کنید که تخمین بازیکن b از a یعنی Pab باید براساس تکرار t+1 ام (معادله ۲) و با توجه به معادله ۳ محاسبه شود.

با عنایت به معادلات ۱ تا ۳ و در نظر گرفتن ساده سازی در نوشتار:

معادلات فضای حالت

$$\begin{cases} P_a' = P_a + \alpha P_a(-4P_a + P_b + 30) & \text{I} \\ P_b' = \frac{1}{4}\left(P_{ab} + \beta(P_a - P_{ab})\right) + 7.5 & \text{II} \\ P_{ab}' = P_{ab} + \beta(P_a - P_{ab}) & \text{III} \end{cases}$$

برای بررسی نقاط تعادل:

$$P_a' = P_a, \quad P_b' = P_b, \quad P_{ab}' = P_{ab} \qquad \text{IV}$$

نقاط تعادل:

$$\begin{cases} \beta(P_a - P_{ab}) = 0 \xRightarrow{\text{IV, III}} P_a = P_{ab} \\ \frac{1}{4}P_{ab} + 7.5 = P_b \quad \text{از II و IV} \\ P_a = 0 \ \text{or} \ \frac{1}{4}P_b + 7.5 = P_a \quad \text{از I و IV} \end{cases} \implies \begin{cases} (P_a^*, P_b^*, P_{ab}^*) = (0, 7.5, 0) \\ (10, 10, 10) \end{cases}$$

93

ب-۲)

$$J=\begin{bmatrix} 1-8\alpha P_a+\alpha P_b+30\alpha & \alpha P_a & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 0 & \frac{1}{4}-\frac{\beta}{4} \\ \beta & 0 & 1-\beta \end{bmatrix}$$

به ازای $\alpha = 0.04$ و $\beta = 0.2$ داریم:

$$J\Big|_{(0,\,7.15,\,0)}=\begin{bmatrix} 2.15 & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \mathrm{abs}\Big(\mathrm{eig}\big(J\big|_{(0,\,7.15,\,0)}\big)\Big)=[0,\ 0.8,\ 2.15]^T$$

نقطه‌ی تعادل (۰، ۷/۱۵، ۰) ناپایدار است.

$$J\Big|_{(10,\,10,\,10)}=\begin{bmatrix} -0.6 & 0.4 & 0 \\ \frac{1}{20} & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \mathrm{abs}\Big(\mathrm{eig}\big(J\big|_{(10,\,10,\,10)}\big)\Big)=[0.6141,\ 0.8141,\ 0]^T$$

نقطه‌ی تعادل (۱۰، ۱۰، ۱۰) پایدار مجانبی محلی است.

- با توجه به اینکه مطابق بخش الف نقطه‌ی تعادل (۱۰، ۱۰، ۱۰) در بخش ب-۱ از تقاطع بهترین پاسخ‌ها به دست آمد، می‌باشد تعادل نش بازی است و با توجه به مقادیر α و β این تعادل نش پایدار مجانبی محلی است.
- نقطه‌ی تعادل (۰، ۷/۱۵، ۰) تعادل نش بازی نیست.

به نام خدا

محمدرضا جعفری

تمرین سری پنجم

بررسی ارتباط نش، ESS و نقاط تعادل RD

سؤال ۲ :

$$U = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \\ 11 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad V = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الف) $V = U - 2$

ب) بازی U تعادل نش خالص ندارد و به همین ترتیب بازی V نیز با توجه به الف تعادل نش خالص ندارد.

محاسبه‌ی تعادل نش مخلوط بازی U :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 1-P_1-P_2 \end{bmatrix}$$

$$6P_1 + 8P_2 + 5(1-P_1-P_2) = 5P_1 + 6P_2 + 8(1-P_1-P_2) = 11P_1 + 2P_2 + 6(1-P_1-P_2)$$

$$\Rightarrow P_1^* = P_2^* = P_3^* = \frac{1}{3} \qquad P^* = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}]^T$$

با توجه به بخش الف برای ماتریس V نیز نش مخلوط برابر P^* می‌شود.

ج) چون نش مخلوط داریم $P^{*T}UP^* = P^TUP^*$ بنابراین برای بررسی ESS باید :

$$P^{*T}UP > P^TUP$$

اگر بدون از دست دادن کلیت $P = [\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}]^T$ باشد :

$$P^{*T}UP = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}]\, U \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} \\ 0 \\ \tfrac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{41}{6} \quad , \quad P^TUP = 7 \Rightarrow 7 > \frac{41}{6} \Rightarrow$$ ESS نیست

و به همین ترتیب برای ماتریس V :

$$P^{*T}VP = P^{*T}UP - 2 = \frac{41}{6} - 2 = \frac{29}{6} \;,\; P^TVP = 7 - 2 = 5 \Rightarrow 5 > \frac{29}{6} \Rightarrow$$ ESS نیست

د) p^* یکی از نقاط تعادل RD است

$$p_i' = p_i \frac{e_i^T U p}{p^T U p} \quad , \quad p_i' = p_i \frac{e_i^T V p}{p^T V p}$$

$$J_u \Big|_{p^*} = \frac{1}{57} \begin{bmatrix} 34 & -11 & -23 \\ -26 & 40 & -14 \\ -8 & -29 & 37 \end{bmatrix} \qquad abs\left(eig\left(J_u \big|_{p^*}\right)\right) = [0.996 , 0.996 , 0]^T$$

همه مقادیر ویژه داخل دایره واحد قرار دارند. بنابراین p^* از نقطه نظر دینامیکی پایدار مجانبی محلی است.

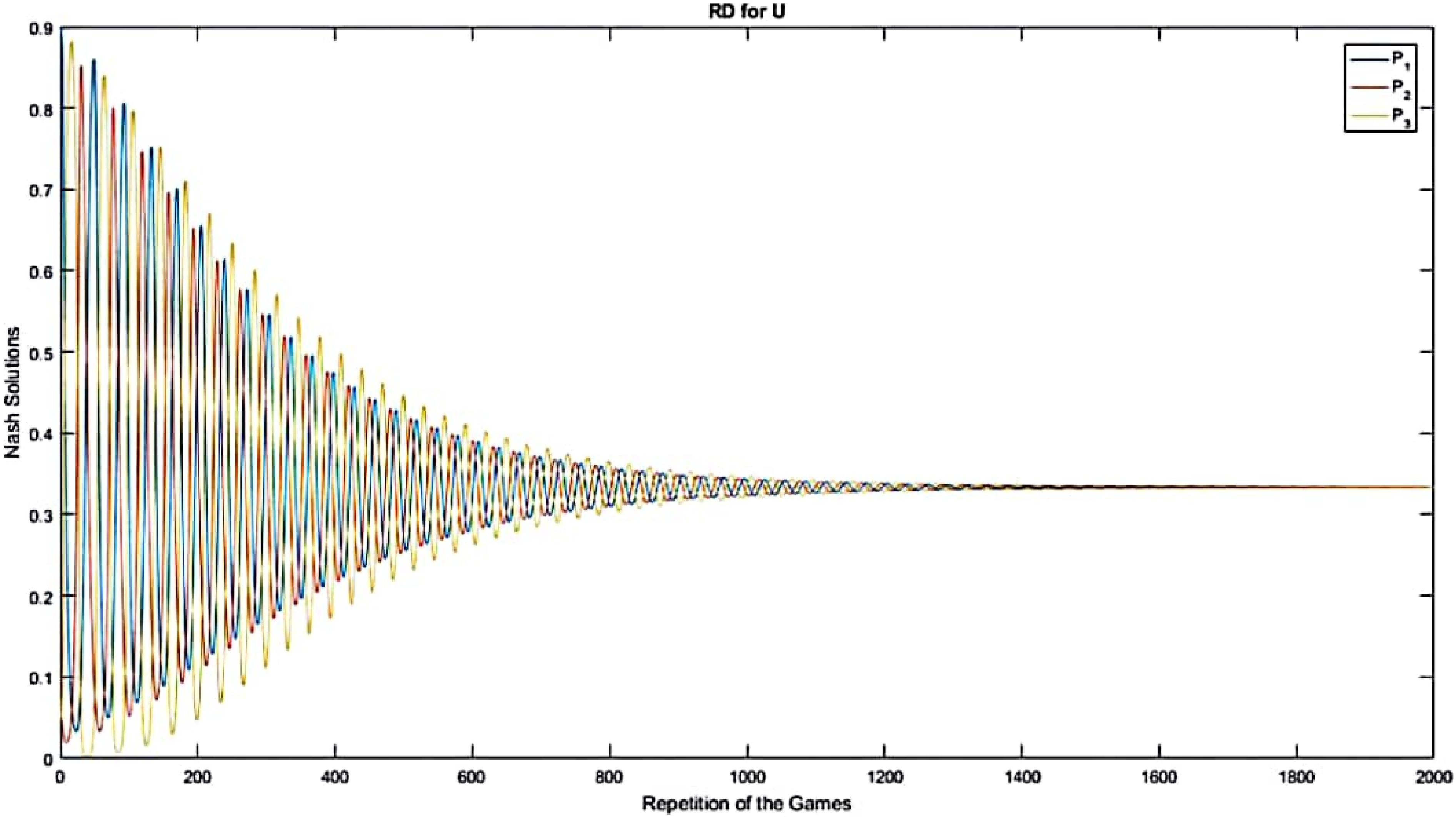
$$J_v \Big|_{p^*} = \frac{1}{39} \begin{bmatrix} 22 & -5 & -17 \\ -20 & 28 & -8 \\ -2 & -23 & 25 \end{bmatrix} \qquad abs\left(eig\left(J_v \big|_{p^*}\right)\right) = [1.0088 , 1.0088 , 0]^T$$

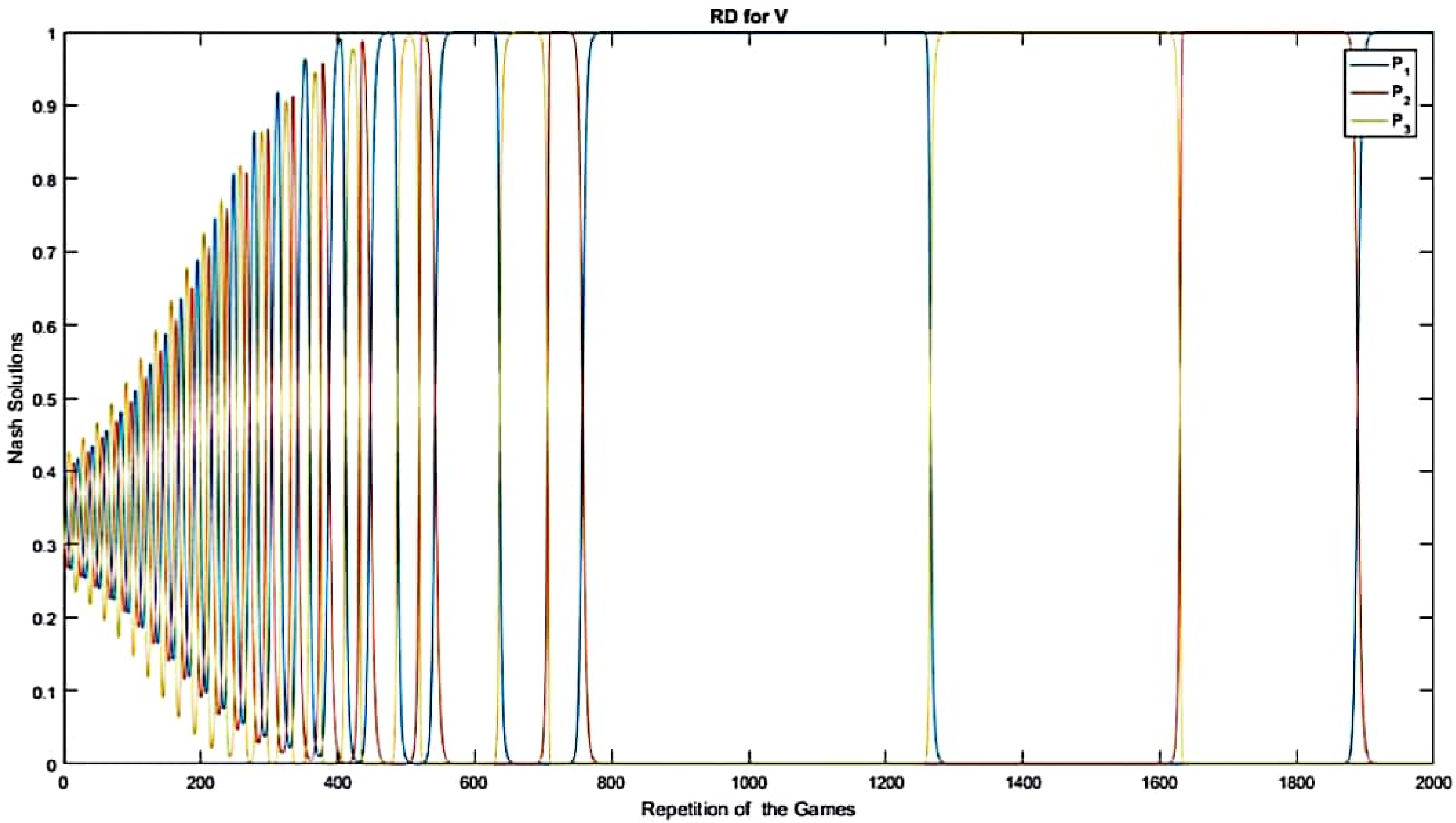
دو مقدار ویژه خارج دایره واحد هستند بنابراین p^* از نقطه نظر دینامیکی ناپایدار است.

ه) در این بخش با توجه به شرایط اولیه داده شده مسیرهای حالت معادلات RD را رسم می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم تکامل U برای استراتژی مخلوط p^* در آن شرایط اولیه پایدار مجانبی و برای V با وجود نزدیکی شرایط اولیه به تعادل نشی مخلوط ناپایدار است.

در حل این سؤال پایداری تعادل p^* برای U به صورت سراسری اثبات نکردیم اما با سعی و خطا می‌توان پایدار مجانبی سراسری آن را حدس زد. اگر هر جایگشتی از ϵ_1، ϵ_2 و $1-\epsilon_1-\epsilon_2$ را به عنوان شرایط اولیه معادلات در نظر بگیرید، خواهید دید که حالت‌ها به $[1/3 , 1/3 , 1/3]^T$ می‌رسند.

دقت کنید در بررسی پایداری p^* برای U باید نگاه تکاملی به معادلات داشته باشید. از این روی نمی‌توانیم شرایط اولیه یکی از گونه‌ها را صفر در نظر گرفته و ناپایداری در آن شرایط اولیه را نتیجه کنیم. برای مثال فرض کنید در بازی مجری، شاهین و موش در ابتدای فرایند تکامل شرایط اولیه موش یا به تعبیر بهتر درصد گونه موش در جمعیت را صفر در نظر بگیریم. بدیهی است که در ادامه روند تکاملی و تقابل مجری و شاهین موش به صورت خلق الساعه ایجاد نمی‌شود. (معادلات ساده RD جهش ژنتیکی را مدل نمی‌کنند :)). فارغ از این مورد اگر در ابتدای وضعیت جمعیت موشی نداشته باشیم به این ترتیب معادله RD بیان شده از مرتبه ۲ خواهد بود و وضعیت پایداری را باید با توجه به این شرایط بررسی کنیم.


RD for U
Nash Solutions
Repetition of the Games
P1
P2
P3
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000


RD for V
Nash Solutions
Repetition of the Games
P1
P2
P3
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000

و) می‌توانستید موارد زیر را عنوان کنید:

- تعادل نش، تعادل معادله RD نیز است اما عکس آن برقرار نیست و معادلات RD تعادل های دیگری نیز دارند که نش نیست.

- اگر p^* برای RD پایدار مجانبی باشد حتماً تعادل نش است اما عکس آن برقرار نیست. p^* برای ۸ پایدار مجانبی (با المانی، چون اثبات نکردیم) شد که تعادل نش نیز بود. اما برای ۷ به رغم ناپایداری RD همچنان تعادل نش است.

- بازی هایی وجود دارند که ESS نیستند اما تعادل نش در معادلات RD پایدار می‌شود.

- پایداری تعادل نش در RD وابسته به payoff های بازی است.