

برهان قضا

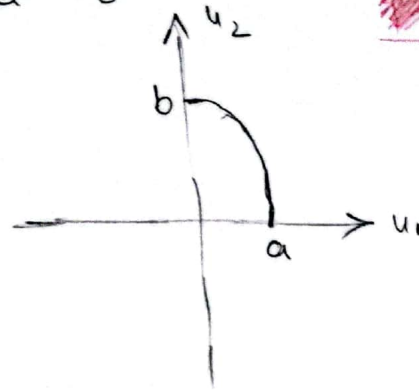
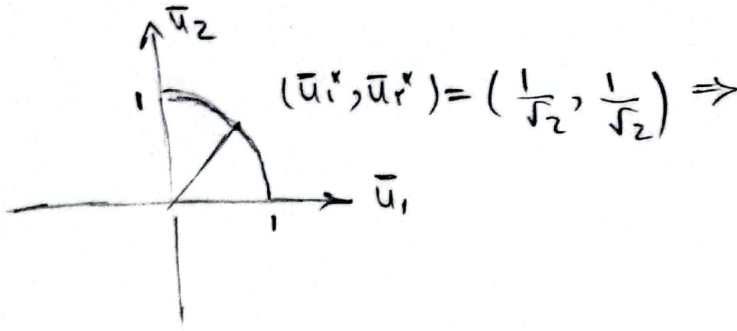
تمرین سری مجید

کتاب جبر

$$\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} \leq 1 :$$

حل سوال ۳
(۱-۲)

$$\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 \leq 1 :$$



$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 \rightarrow a \bar{u}_1 \\ u_2 \rightarrow b \bar{u}_2 \end{cases}$$

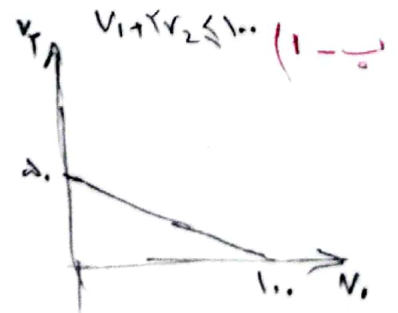
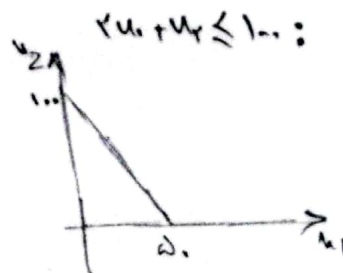
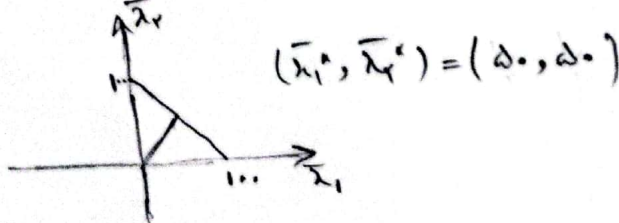
$$\Rightarrow (u_1^*, u_2^*) = (a, b) \quad (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

(۲-۲)

$$U = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \frac{u_1^2}{14^2} + \frac{u_2^2}{4^2} \leq 1 \right\}$$

$$\begin{aligned} f(u, (1, 0)) &= \arg \max_{u \in U} (u_1 - 1)(u_2 - 0) \\ &= \arg \max_{\left\{ u_i \in \mathbb{R}^2 : u_i \in [0, 14] \right\}} (u_1 - 1) \cdot \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{14^2}} = (14, 4, 4, 14) \end{aligned}$$

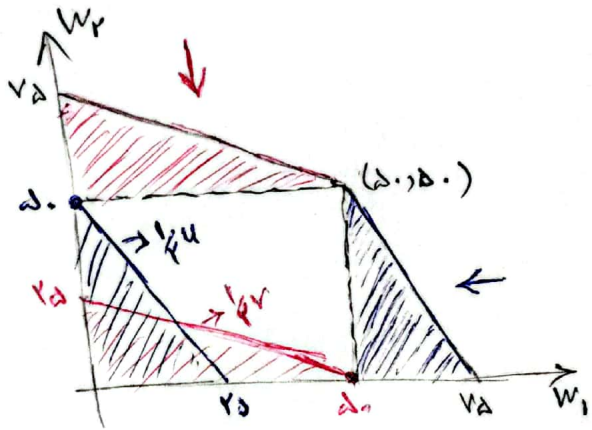
$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \leq 1 :$$



$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 \rightarrow \frac{1}{4} \bar{x}_1 \\ u_2 \rightarrow \bar{x}_2 \end{cases} &\Rightarrow (u_1^*, u_2^*) = \left(\frac{1}{4}, 1\right) \quad (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*) = (0.5, 0.5) = f(u, (1, 0)) \\ \begin{cases} v_1 \rightarrow \bar{x}_1 \\ v_2 \rightarrow \frac{1}{4} \bar{x}_2 \end{cases} &\Rightarrow (v_1^*, v_2^*) = (1, \frac{1}{4}) \quad (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*) = (0.5, 0.5) = f(v, (1, 0)) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} f(u, (1, 0)) + \frac{1}{4} f(v, (1, 0)) = (0.5, 0.5)$$

ب- ۲) ناصیه w به صورت زیر حاصل می شود:



نوعی رسم ناصیه w :

اگر نقطه $(0, 50)$ روی ناصیه u را با نقطه $(50, 50)$ روی ناصیه v یعنی نقطه $(50, 50)$ تا $(0, 50)$ را با هم جمع کنیم نقطه میانی ناصیه w حاصل می شود.

بنابراین یک میز ناصیه w نقطه $(0, 50)$ تا $(50, 50)$ می شود که خطی به سبب $\frac{1}{2}$ است.

۲. همین ترتیب اگر نقطه $(50, 0)$ روی ناصیه v را با نقطه $(50, 50)$ روی ناصیه u یعنی نقطه $(50, 50)$ تا $(50, 0)$ را با هم جمع کنیم نقطه میانی ناصیه w حاصل می شود.

بنابراین میز ناصیه w نقطه $(50, 50)$ تا $(50, 0)$ می شود که خطی به سبب $\frac{1}{2}$ است.

به طور کلی می توان گفت برای تشکیل ناصیه w ناصیه v را با نقطه $(0, 50)$ جمع می شود و به این معناست که 50 واحد در راستای محور شیب پیدا می کند و به همین ترتیب ناصیه u با نقطه $(50, 0)$ جمع می شود که به این معناست که 50 واحد در راستای افق شیب پیدا می کند.

$$(w_1^*, w_2^*) = f(w, (0, 0)) = (50, 50) \Rightarrow$$

$$f(w, (0, 0)) = f\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, (0, 0)\right) = \frac{1}{2}f(u, (0, 0)) + \frac{1}{2}f(v, (0, 0))$$

محققان: همانطور که ملاحظه می کنیم جواب نسبی ناشی از ترکیب خطی دو منفی payoff مشترک برای u و v برابر همان ترکیب خطی از جواب نسبی به صورت مجزا نمی شود. بنابراین می توان دریافت که:

اگر دو بازیگر اطلاعات ۲ بازی u و v را با هم به اشتراک بگذارند و بیا به بیان مختصر منفی payoff مشترک دو بازی را با هم ترکیب کنند و در این فضای جواب نسبی باشند به صورت بیسیر (۵۰، ۵۰) خواهند رسید. در صورتی که سود ناشی از بازی u برای بازیگر اول (دوم) برابر ۱۲۵ (۲۵) و در بازی v برای بازیگر اول (دوم) برابر ۲۵ (۱۲۵) می شود و در مجموع مطابق جدول بازیگران به سود (۳۷۵، ۳۷۵) می رسند.

بنابراین به اشتراک گذاری بیسیر منجر به دریافت سود بیسیر می شود. خاصیت scale invariance صرفاً روی یک منفی payoff مشترک اعتبار ندارد و نه برای ترکیب دو منفی payoff مشترک!!!

حل سؤال 2

بجس 2

$$V(1) = 4, V(2) = 12, V(3) = 0, V(4) = 18$$

$$V(1,2) = 24, V(1,3) = 48, V(1,4) = 4, V(2,3) = 12, V(2,4) = 32, V(3,4) = 38$$

$$V(1,2,3) = 120, V(1,2,4) = 89, V(1,3,4) = 150, V(2,3,4) = 179$$

$$V(1,2,3,4) = 240$$

$$\lambda_1 = \frac{0!1!1!1!}{4!} (4-0) + \frac{1!1!1!1!}{4!} (24-12) + \frac{1!1!1!1!}{4!} (48-0) + \frac{1!1!1!1!}{4!} (4-18) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (12-12) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (89-32) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (150-38) + \frac{3!1!1!1!}{4!} (240-179) = \frac{510}{12} = 41.67$$

$$\lambda_2 = \frac{0!1!1!1!}{4!} (12-0) + \frac{1!1!1!1!}{4!} (24-4) + \frac{1!1!1!1!}{4!} (12-0) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (32-18) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (12-48) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (89-4) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (179-38) + \frac{3!1!1!1!}{4!} (240-150) = \frac{592}{12} = 49.33$$

$$\lambda_3 = \frac{0!1!1!1!}{4!} (0-0) + \frac{1!1!1!1!}{4!} (48-4) + \frac{1!1!1!1!}{4!} (12-12) + \frac{1!1!1!1!}{4!} (38-18) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (12-24) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (150-4) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (179-32) + \frac{3!1!1!1!}{4!} (240-89) = \frac{148}{12} \approx 12.33$$

$$\lambda_4 = \frac{0!1!1!1!}{4!} (18-0) + \frac{1!1!1!1!}{4!} (4-4) + \frac{1!1!1!1!}{4!} (32-12) + \frac{1!1!1!1!}{4!} (38-0) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (89-24) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (150-48) + \frac{2!1!1!1!}{4!} (179-12) + \frac{3!1!1!1!}{4!} (240-120) = \frac{140}{12} \approx 11.67$$