حل سوال اول : الف

Player 2

	F	Y
F	$-1,1$	$1,0$
Y	$0,1$	$0,0$

Player 1 — P

	F	Y
F	$1,-1$	$1,0$
Y	$0,1$	$0,0$

$1-P$

$S_1=\{F,Y\}$

$S_2=\{FF,FY,YF,YY\}$

هر دو بازیکن نسبت به فضا ناآگاهی دارند : عدم قطعیت محیط

پس با در نظر گرفتن احتمال های تخصیص یافته دو جدول را به نوعی merge می کنیم :

$-P+1-P\ ,\ P-1+P$	$P+1-P\ ,\ 0+0$
$0+0\ ,\ P+1-P$	$0+0\ ,\ 0+0$

$\rightarrow$

	F	Y
F	$1-2P,2P-1$	$1,0$
Y	$0,1$	$0,0$

$$\left.\begin{array}{l}1-2P>0\\ 1>0\end{array}\right\}\rightarrow \text{player 1 : F dominant}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}FF:\ 2P-1<0\quad \times\\ FY:\ 0>2P-1\quad \checkmark\end{array}\right.$$

$$P<\tfrac{1}{2}$$

به ازای تمام مقادیر $P\in(0,\frac{1}{2})$ ، (F,Y) استراتژی تعادلی نش خواهد بود

بازیکن اول نسبت به type بازیکن دوم ناآگاهی دارد

$F,FF\rightarrow\ E_1=P(-1)+(1-P)(1)=1-2P$
$\qquad E_2=P(1)+(1-P)(-1)=-1+2P$

$F,FY\rightarrow\ E_1=P(-1)+(1-P)(1)=1-2P$
$\qquad E_2=P(1)+(1-P)(0)=P$

$F,YF\rightarrow\ E_1=P(1)+(1-P)(1)=1-2P$
$\qquad E_2=P(1)+(1-P)(-1)=-1+P$

$F,YY\rightarrow\ E_1=P(1)+(1-P)(1)=1$
$\qquad E_2=P(0)+(1-P)(0)=0$

$Y,FF\rightarrow\ E_1=P(0)+(1-P)(0)=0$
$\qquad E_2=P(1)+(1-P)(1)=1$

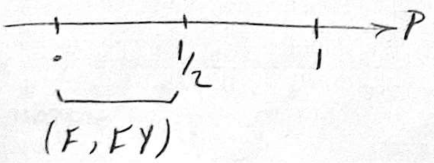
$Y,FY\rightarrow\ E_1=P(0)+(1-P)(0)=0$
$\qquad E_2=P(1)+(1-P)(0)=P$

$Y,YY\rightarrow\ E_1=P(0)+(1-P)(0)=0$
$\qquad E_2=P(0)+(1-P)(0)=0$

$Y,YF\rightarrow\ E_1=P(0)+(1-P)(0)=0$
$\qquad E_2=P(0)+(1-P)(1)=1-P$

$$\left.\begin{array}{l}\text{player 1}\rightarrow 1-2P\geq 0\rightarrow P\leq \tfrac{1}{2}\\ \text{player 2}\rightarrow -1+2P<P\rightarrow P<1\ \checkmark\ ,\ P>P-1\rightarrow -1<0\ \checkmark\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}P>\tfrac{1}{2}\rightarrow(Y,FY)\\ P<\tfrac{1}{2}\rightarrow(F,FY)\end{array}\right.$$

تعادل نش بیزی به ازای مقادیر مختلف P به صورت مقابل خواهد بود:



حل سوال اول: ب

در این مساله علاوه بر عدم قطعیت در type، هر یک از بازیکنان یک توزیع احتمال را به هر یک از اکشن های بازیکن مقابل نسبت می دهند. [ربط به تایپ به اکشن]

Player2

			I_{21}: q_1 F	$1-q_1$ Y	I_{22}: q_2 F	$1-q_2$ Y
Player1 I_{11}	P_1	F	2,0	0,2	2,2	0,3
	$1-P_1$	Y	0,2	2,0	3,0	1,1
			$P=0.3$		$P=0.1$	
Player1 I_{12}	P_2	F	2,2	0,0	3,1	0,0
	$1-P_2$	Y	0,0	1,1	0,0	1,2
			$P=0.2$		$P=0.4$	

mixed bayesian nash equilibrium:

$$\Big\{\underbrace{\Big[\Big(\tfrac{17}{24},\tfrac{7}{24}\Big),\Big(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{4}\Big)\Big]}_{\text{player 1}},\underbrace{\Big[\Big(\tfrac{7}{12},\tfrac{5}{12}\Big),\Big(\tfrac{5}{24},\tfrac{19}{24}\Big)\Big]}_{\text{player 2}}\Big\}$$

player 1:

I_{11}:
$$F: \tfrac{3}{4}(2q_1)+\tfrac{1}{4}(2q_2)=\tfrac{3}{2}q_1+\tfrac{1}{2}q_2$$
$$Y: \tfrac{3}{4}(2(1-q_1))+\tfrac{1}{4}(3q_2+1-q_2)=\tfrac{7}{4}-\tfrac{3}{2}q_1+\tfrac{1}{2}q_2$$
$$\tfrac{3}{2}q_1+\tfrac{1}{2}q_2=\tfrac{7}{4}-\tfrac{3}{2}q_1+\tfrac{1}{2}q_2 \longrightarrow q_1=\tfrac{7}{12}$$

I_{12}:
$$F: \tfrac{1}{3}(2q_1)+\tfrac{2}{3}(2q_2)=\tfrac{2}{3}q_1+\tfrac{3}{4}q_2$$
$$Y: \tfrac{1}{3}(1-q_1)+\tfrac{2}{3}(1-q_2)=1-\tfrac{1}{3}q_1-\tfrac{2}{3}q_2$$
$$\tfrac{2}{3}q_1+\tfrac{3}{4}q_2=1-\tfrac{1}{3}q_1-\tfrac{2}{3}q_2 \longrightarrow q_2=\tfrac{5}{24}$$

player 2:

I_{21}:
$$F: \tfrac{3}{5}(2(1-P_1))+\tfrac{2}{5}(2P_2)=\tfrac{6}{5}-\tfrac{6}{5}P_1+\tfrac{4}{5}P_2$$
$$Y: \tfrac{3}{5}(2P_1)+\tfrac{2}{5}(1-P_2)=\tfrac{2}{5}+\tfrac{6}{5}P_1-\tfrac{2}{5}P_2$$
$$\tfrac{6}{5}-\tfrac{6}{5}P_1+\tfrac{4}{5}P_2=\tfrac{2}{5}+\tfrac{6}{5}P_1-\tfrac{2}{5}P_2 \rightarrow \tfrac{4}{5}=\tfrac{12}{5}P_1-\tfrac{6}{5}P_2$$

I_{22}:
$$F: \tfrac{1}{5}(2P_1)+\tfrac{4}{5}(P_2)=\tfrac{2}{5}P_1+\tfrac{4}{5}P_2$$
$$Y: \tfrac{1}{5}(3P_1+1-P_1)+\tfrac{4}{5}(2(1-P_2))=\tfrac{9}{5}+\tfrac{2}{5}P_1-\tfrac{8}{5}P_2$$
$$\tfrac{2}{5}P_1+\tfrac{4}{5}P_2=\tfrac{2}{5}P_1-\tfrac{8}{5}P_2+\tfrac{9}{5} \longrightarrow P_2=\tfrac{9}{12}=\tfrac{3}{4},\ P_1=\tfrac{17}{24}$$

سوال ۲ :

الف) دو بازیکن داریم پس $N=\{1,2\}$ و تایپ آن ها به صورت زیر است :

$$T_1=\{c_{1h}, c_{1L}\} \quad , \quad T_2=\{c_{2h}, c_{2L}\}$$

که c_{1L} حالت $c=18$ و c_{1h} حالت $c=24$ است و c_{2L} حالت $c=12$ و c_{2h} حالت $c=24$ است.

مجموعه استراتژی ها به صورت $S_1=[0,\infty)\times[0,\infty)$, $S_2=[0,\infty)\times[0,\infty)$ است.

ب)

$$u_1(q_{L_1}, q_2 \mid c_{L_1}) = \frac{1}{4}(42 - q_{L_2} - q_{L_1})q_{L_1} + \frac{3}{4}(42 - q_{h_2} - q_{L_1})q_{L_1}$$

$$u_1(q_{h_1}, q_1 \mid c_{h_2}) = \frac{1}{4}(36 - q_{L_2} - q_{h_1})q_{h_1} + \frac{3}{4}(36 - q_{h_2} - q_{h_1})q_{h_1}$$

$$u_2(q_{L_2}, q_1 \mid c_{L_2}) = \frac{1}{3}(48 - q_{L_1} - q_{L_2})q_{L_2} + \frac{2}{3}(48 - q_{h_1} - q_{L_2})q_{L_2}$$

$$u_2(q_{h_2}, q_1 \mid c_{h_2}) = \frac{1}{3}(36 - q_{L_1} - q_{h_2})q_{h_2} + \frac{2}{3}(36 - q_{h_1} - q_{h_2})q_{h_2}$$

BR type c_{L_1}

$$\max_{q_{L_1}} \frac{1}{4}(42 - q_{L_2} - q_{L_1})q_{L_1} + \frac{3}{4}(42 - q_{h_2} - q_{L_1})q_{L_1}$$

$$\rightarrow \quad q_{L_1} = \frac{168 - q_{L_2} - 3q_{h_2}}{8}$$

BR type c_{h_1}

$$\max_{q_{h_1}} \frac{1}{4}(36 - q_{L_2} - q_{h_1})q_{h_1} + \frac{3}{4}(36 - q_{h_2} - q_{h_1})q_{h_1}$$

$$q_{h_1} = \frac{144 - q_{L_2} - 3q_{h_2}}{8}$$

BR type c_{L_2}

$$\max_{q_{L_2}} \frac{1}{3}(48 - q_{L_1} - q_{L_2})q_{L_2} + \frac{2}{3}(48 - q_{h_1} - q_{L_2})q_{L_2}$$

$$q_{L_2} = \frac{144 - q_{L_1} - 2q_{h_1}}{6}$$

BR type c_{h_2}

$$\max_{q_{h_2}} \frac{1}{3}(36-q_{L_1}-q_{h_2})\,q_{h_2}+\frac{2}{3}(36-q_{h_1}-q_{h_2})\,q_{h_2}$$

$$q_{h_2}=\frac{108-q_{L_1}-2q_{h_1}}{6}$$

تعادل نش به صورت زیر است که با توجه به این اعداد سود را به دست می‌آوریم:

$q_{L_1}^{*}=14,3$ $\quad q_{h_1}^{*}=11,3$ $\quad q_{L_2}^{*}=17,83$ $\quad q_{h_2}^{*}=11,83$

ب) $N=\{1,2\}$ $\quad T_1=\{r\}$ که فقط یک تایپ دارد $\quad T_2=\{c_L,c_h\}$

که c_L در حالتی است که $c=12$ و c_h در حالتی که $c=24$ و مجموعه استراتژی‌ها به صورت $S_1=[0,\infty)$, $S_2=[0,\infty)\times[0,\infty)$ است.

$$u_1(q_1,q_2|r)=\frac{1}{4}(42-q_1-q_L)q_1+\frac{3}{4}(42-q_1-q_h)q_1$$

$$u_2(q_L,q_1|c_L)=(48-q_1-q_L)q_L$$

$$u_2(q_h,q_1|c_h)=(36-q_1-q_h)q_h$$

BR type c_L

$$\max_{q_L}(48-q_1-q_L)q_L$$

$$q_L=\frac{48-q_1}{2}$$

BR type c_h

$$\max_{q_h}(36-q_1-q_h)q_h$$

$$q_h=\frac{36-q_1}{2}$$

BR type q_1

$$\max_{q_1}\frac{3}{4}(42-q_1-q_h)q_1+\frac{1}{4}(42-q_1-q_L)q_1$$

$$\rightarrow q_1=\frac{168-q_L-3q_h}{8}$$

تعادل نش به صورت $q_h^{*}=\frac{21}{2}$, $q_L^{*}=\frac{33}{2}$, $q_1^{*}=15$ است. تابع سود آن‌ها در نقطه تعادل به صورت زیر است

$$\pi_1^{*}=225,\quad \pi_L^{*}=\frac{1089}{4},\quad \pi_h^{*}=\frac{441}{4}$$

ج)

best response c_1 :

$$\max_{q_2} q_2(48 - q_1 - q_2)$$

$$q_2 = \frac{48 - q_1}{2}$$

best response q_1 :

$$\max_{q_1} q_1(42 - q_1 - q_2)$$

$$q_1 = \frac{42 - q_2}{2}$$

تعادل نش به صورت زیر است :

$q_1^* = 12$ ، $q_L^* = q_2^* = 18$

و تابع سود آن ها در نقاط تعادل به صورت زیر است :

$\pi_1^* = 144$ ، $\pi_2^* = \pi_L^* = 324$

د)

best response c_2 :

$$\max_{q_2} q_2(36 - q_1 - q_2)$$

$$q_2 = \frac{36 - q_1}{2}$$

و بهترین پاسخ q_1 مشابه به بخش قبل است.

تعادل نش به صورت زیر است :

$q_1^* = 16$ ، $q_2^* = 10$

تابع سود آن ها در نقاط تعادل به صورت زیر است :

$\pi_1^* = 256$ ، $\pi_2^* = 100$

ه)

در حالت اطلاعات ناقص، تایپ c_L، نقطه $q_L = \frac{33}{2}$ و سود $\pi_L = \frac{1089}{4}$ را حاصل می کند، و در حالت اطلاعات کامل نقطه $q_L = 18$ و سود $\pi_L = 324$ را حاصل می کند بنابراین در حالت اطلاعات کامل سود بیشتری بدست می آورد

و در حالت اطلاعات ناقص، تایپ c_h، نقطه $q_h = \frac{21}{2}$ و سود $\pi_h = \frac{441}{4}$ را حاصل می کند و در حالت اطلاعات کامل نقطه $q_h = 10$ و سود $\pi_h = 100$ را حاصل می کند بنابراین در حالت اطلاعات ناقص سود بیشتری بدست می آورد

پس بازیکن ۲ ترجیح می دهد وقتی با هزینه c_1 روبه رو است با اطلاعات کامل بازی کند و وقتی با هزینه c_2 روبه رو است با اطلاعات ناقص بازی کند.

(*) ب- زیروند b : برای خریدار می باشد.
زیروند s : برای فروشنده می باشد.

توابع سود :

$$U_b = \begin{cases} v_b - \frac{P_b + P_s}{2} & \text{مبادله شود} \\ 0 & \text{مبادله نشود} \end{cases} \quad , \quad U_s = \begin{cases} \frac{P_s + P_b}{2} - v_s & \text{مبادله شود} \\ 0 & \text{مبادله نشود} \end{cases}$$

چون عدم قطعیت داریم باید Expected payoff را حساب کنیم.

$$E(U_b) = P(\text{مبادله} \mid P_b)(\text{سود متناظر}) + P(\text{عدم مبادله} \mid P_b)(0)$$

$$\rightarrow E(U_b) = \left(v_b - \frac{P_b + E(P_s(v_s) \mid P_b \geq P_s(v_s))}{2} \right) P(P_b > P_s(v_s))$$

متناظر رابطه بالا برای فروشنده هم داریم :

$$E(U_s) = \left(\frac{P_s + E(P_b(v_b) \mid P_b(v_b) \geq P_s)}{2} - v_s \right) \mathrm{Prob}(P_b(v_b) \geq P_s)$$

اگر استراتژی فروشنده خطی و مانند سوال باشد، برای $E(U_b)$:

$$\mathrm{Prob}(P_b > P_s(v_s)) = \mathrm{Prob}(P_b > a_s + c_s v_s) = \mathrm{Prob}\left(\frac{P_b - a_s}{c_s} > v_s\right) = \frac{P_b - a_s}{c_s}$$

$$E(P_s(v_s) \mid P_b \geq P_s(v_s)) = E(a_s + c_s v_s \mid P_b \geq a_s + c_s v_s) =$$

با توجه به خاصیت خطی بودن امید ریاضی و اینکه a_s عدم قطعیت ندارد :

$$= a_s + c_s E\left(v_s \leq \frac{P_b - a_s}{c_s}\right) = a_s + c_s \cdot \left(\frac{P_b - a_s}{2 c_s}\right) = \frac{P_b + a_s}{2}$$

پس در نهایت $E(U_b)$ به صورت زیر بدست می آید :

$$E(U_b) = \left[v_b - \frac{1}{2}\left(P_b + \frac{a_s + P_b}{2}\right) \right] \left(\frac{P_b - a_s}{c_s} \right)$$

که برای بیشینه کردن آن از شرط اول استفاده می کنیم :

$$\frac{\partial E(U_b)}{\partial P_b} = 0$$

$$\longrightarrow \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) \frac{P_b - a_s}{c_s} + \left(v_b - \tfrac{1}{2}\left(P_b + \frac{a_s + P_b}{2}\right)\right) \frac{1}{c_s} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کردن}} \boxed{P_b = \frac{2}{3} v_b + \frac{1}{3} a_s} \quad \text{I}$$

پس در نتیجه : یعنی اگر استراتژی فروشنده خطی باشد، آنگاه استراتژی خریدار نیز خطی است.

مانند روند قبلی اگر استراتژی خریدار خطی باشد، آنگاه برای $E(u_s)$ داریم:

$$Prob(\beta_b(v_b) \geq P_s) = Prob(a_b + c_b v_b \geq P_s) = Prob\left(v_b \geq \frac{P_s - a_b}{c_b}\right) = 1 - Prob\left(v_b < \frac{P_s - a_b}{c_b}\right)$$

$$= \frac{c_b - P_s + a_b}{c_b}$$

$$E(\beta_b(v_b) \mid \beta_b(v_b) \geq P_s) = E(a_b + c_b v_b \mid c_b v_b + a_b > P_s) =$$

با توجه به خطی بودن امید ریاضی و اینکه a_b عدم قطعیت ندارد:

$$= a_b + c_b \cdot E\left(v_b \mid v_b > \frac{P_s - a_b}{c_b}\right)$$

برای بدست آوردن امید ریاضی شرطی بالا با استفاده از یادآوری:

$$E(X \mid a < X < b) = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

داریم:

$$E\left(v_b \mid v_b > \frac{P_s - a_b}{c_b}\right) = \frac{\int_{\frac{P_s - a_b}{c_s}}^{1} x\, dx}{\int_{\frac{P_s - a_b}{c_b}}^{1} dx} = \frac{\frac{1}{2}(h^2 - 1)}{h - 1} = \frac{\frac{1}{2}(h+1)(h-1)}{h-1} = \frac{h+1}{2}$$

$$\frac{P_s - a_b}{c_b} = h$$

$$\longrightarrow E\left(v_b \mid v_b > \frac{P_s - a_b}{c_b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_b + P_s - a_b}{c_b}\right)$$

پس در نهایت:

$$E(\beta_b(v_b) \mid \beta_b(v_b) \geq P_s) = a_b + c_b \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{c_b + P_s - a_b}{c_b}\right) = \frac{c_b + P_s + a_b}{2}$$

و در نتیجه $E(u_s)$ بدست می‌آید:

$$E(u_s) = \left[\frac{1}{2}\left(P_s + \frac{P_s + c_b + a_b}{2}\right) - v_s\right]\left(\frac{c_b - P_s + a_b}{c_b}\right)$$

که برای بیشینه کردن آن از شرط اول استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial E(u_s)}{\partial P_s} = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{a_b + c_b - P_s}{c_b}\right) + \left(\frac{3}{4}P_s + \frac{1}{4}a_b + \frac{1}{4}c_b - v_s\right)\left(\frac{-1}{c_b}\right) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کردن}} \boxed{P_s = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{3}(a_b + c_b)} \quad \text{II}$$

در اینجا هم مانند نتیجه‌گیری قسمت قبل اگر استراتژی خریدار خطی در نظر گرفته شود، آنگاه استراتژی فروشنده نیز خطی است.

با استفاده از دو رابطه بدست آمده (I) و (II) و فرم استراتژی های خطی صورت سوال و مقایسه آنها بدست می‌آید:

$$\begin{cases} c_b = c_s = \frac{2}{3} \\ a_b = \frac{1}{12} \ , \ a_s = \frac{1}{4} \end{cases}$$

و استراتژی های تعادل نش بیزی به صورت زیر می‌شوند:

$$\begin{cases} P_b(v_b) = \frac{2}{3} v_b + \frac{1}{12} , \\ P_s(v_s) = \frac{2}{3} v_s + \frac{1}{4} , \end{cases}$$

GT_HW3_Q4

June 1, 2024

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
from scipy.stats import norm
from scipy import integrate
import math as m
```

1 Second Price Auction

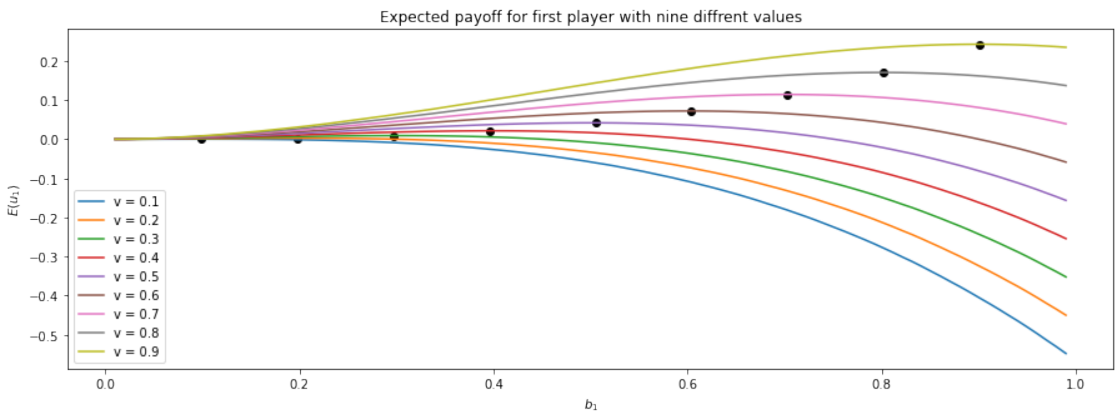
[2]:
```
# Expected Payoff function for first player in the presence of two other players
def ex_payoff_SPA(b1, b2, b3, v1):
    u = (b1 > np.max((b2, b3), 0)) * (v1 - np.max((b2, b3), 0))
    return np.mean(u)
```

[3]:
```
# Assumption of linearity and symmetry of the strategy
def beta_star_SPA(v):
    return v
```

1.1 SPA with Uniform types ~ U(0,1)

[4]:
```
num_sample = 100000
N = 3

v2 = np.random.uniform(0,1,(num_sample,))
v3 = np.random.uniform(0,1,(num_sample,))

b2 = beta_star_SPA(v2)
b3 = beta_star_SPA(v3)

b1 = np.linspace(0.01, 0.99, 100)
ex_u1 = np.empty((100, 9))
v1 = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9]

for i, v1_val in enumerate(v1):
    for j, b1_val in enumerate(b1):
        ex_u1[j, i] = ex_payoff_SPA(b1_val, b2, b3, v1_val)
```

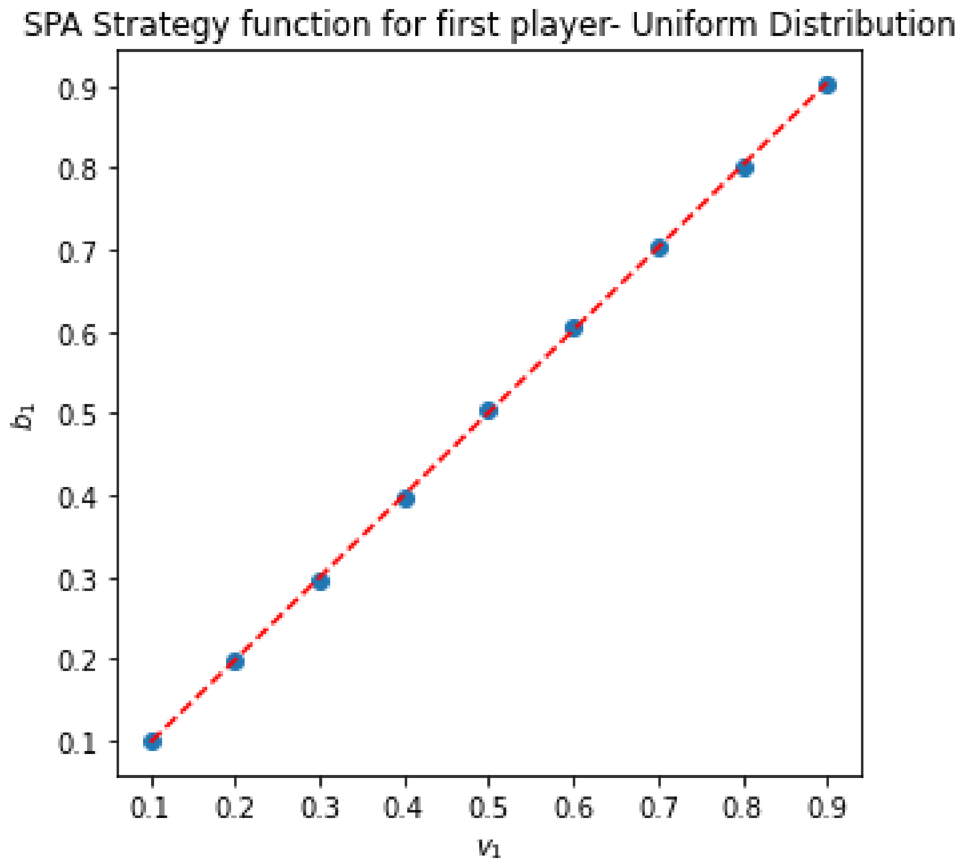
[5]:
```
plt.figure(figsize=(15, 5))
for i in range(9):
    plt.plot(b1, ex_u1[:, i], label = f'v = {v1[i]}')



plt.scatter(b1[np.argmax(ex_u1, 0)], np.max(ex_u1, 0), color = 'black')
plt.title('Expected payoff for first player with nine diffrent values')
plt.xlabel('$b_1$')
plt.ylabel('$E(u_1)$')
plt.legend()
plt.show()
```



[6]:
```
np.argmax(ex_u1, 0)
b1_star = b1[np.argmax(ex_u1, 0)]
b1_star
```

[6]:
```
array([0.09909091, 0.19808081, 0.29707071, 0.39606061, 0.50494949,
       0.60393939, 0.70292929, 0.80191919, 0.90090909])
```

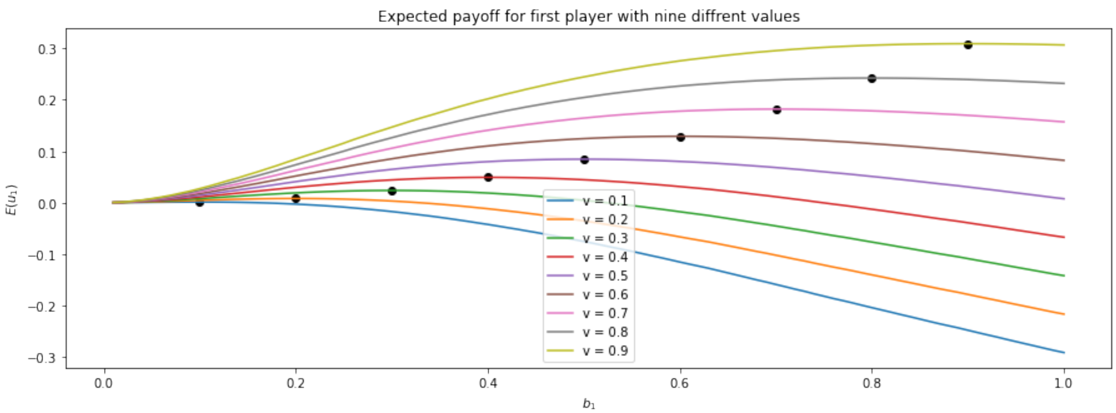
[7]:
```
z = np.polyfit(v1, b1_star, 1)
p = np.poly1d(z)

plt.figure(figsize=(5, 5))
plt.scatter(v1, b1_star)
plt.plot(v1,p(v1),"r--")
plt.title('SPA Strategy function for first player- Uniform Distribution')
plt.xlabel('$v_1$')
plt.ylabel('$b_1$')
plt.show()
plt.show()
```



1.2 SPA with Exponential types ~ exp(2)

[8]:
```
num_sample = 100000
N = 3
lamda = 2

v2 = np.random.exponential(scale = 1/lamda, size = (num_sample,1))
v3 = np.random.exponential(scale = 1/lamda, size = (num_sample,1))

b2 = beta_star_SPA(v2)
b3 = beta_star_SPA(v3)

b1 = np.linspace(0.01, 1, 100)
ex_u1 = np.empty((100, 9))
v1 = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9]

for i, v1_val in enumerate(v1):
    for j, b1_val in enumerate(b1):
        ex_u1[j, i] = ex_payoff_SPA(b1_val, b2, b3, v1_val)
```

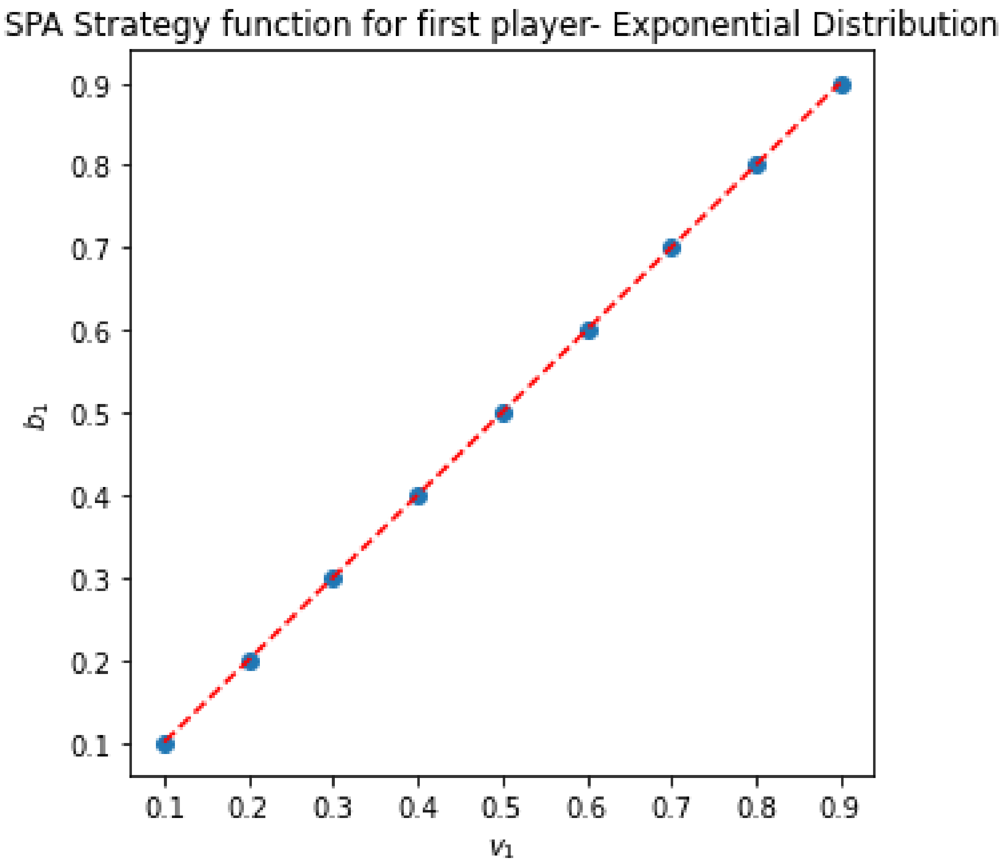
[9]:
```
plt.figure(figsize=(15, 5))
for i in range(9):
    plt.plot(b1, ex_u1[:, i], label = f'v = {v1[i]}')

plt.scatter(b1[np.argmax(ex_u1, 0)], np.max(ex_u1, 0), color = 'black')
plt.title('Expected payoff for first player with nine diffrent values')
plt.xlabel('$b_1$')
plt.ylabel('$E(u_1)$')
plt.legend()
plt.show()
```



[10]:
```
np.argmax(ex_u1, 0)
b1_star = b1[np.argmax(ex_u1, 0)]
b1_star
```

[10]:
```
array([0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9])
```

[11]:
```
z = np.polyfit(v1, b1_star, 1)
p = np.poly1d(z)

plt.figure(figsize=(5, 5))
plt.scatter(v1, b1_star)
plt.plot(v1,p(v1),"r--")
plt.title('SPA Strategy function for first player- Exponential Distribution')
plt.xlabel('$v_1$')
plt.ylabel('$b_1$')
plt.show()
plt.show()
```



2 First Price Auction

[12]:
```
# Expected Payoff function for first player in the presence of two other players
def ex_payoff_FPA(b1, b2, b3, v1):
    u = (b1 > np.max((b2, b3), 0)) * (v1 - b1)
    return np.mean(u)
```

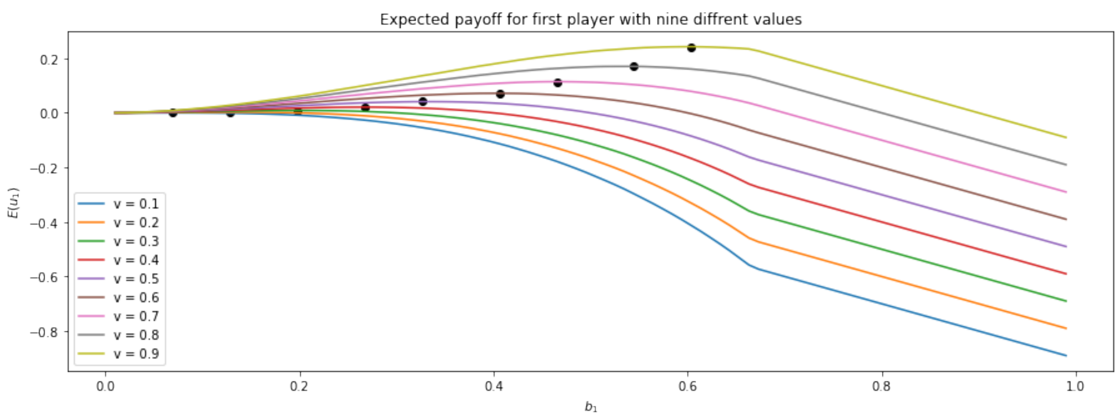
2.1 FPA with Uniform types ~ U(0,1)

[13]:
```
# Assumption of linearity and symmetry of the strategy
def beta_star_FPA(v, N):
    return v * (N-1) / N
```

[14]:
```
num_sample = 100000
N = 3

v2 = np.random.uniform(0,1,(num_sample,))
v3 = np.random.uniform(0,1,(num_sample,))
```

```
b2 = beta_star_FPA(v2, N)
b3 = beta_star_FPA(v3, N)

b1 = np.linspace(0.01, 0.99, 100)
ex_u1 = np.empty((100, 9))
v1 = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9]

for i, v1_val in enumerate(v1):
    for j, b1_val in enumerate(b1):
        ex_u1[j, i] = ex_payoff_FPA(b1_val, b2, b3, v1_val)
```

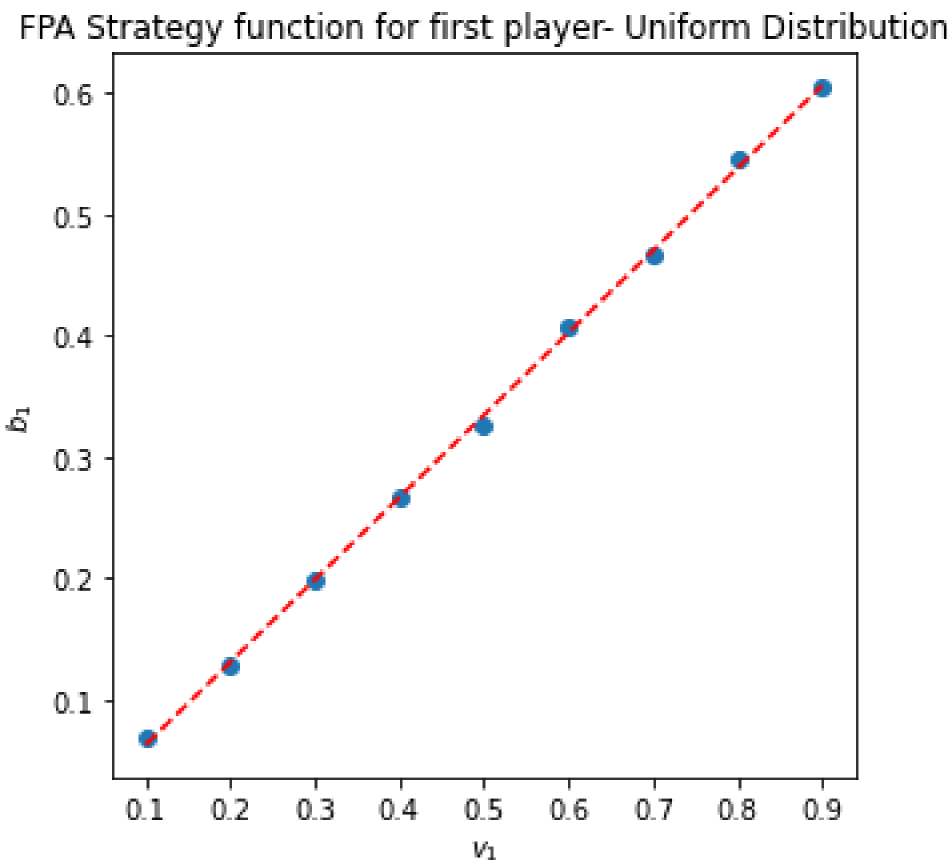
[15]:
```
plt.figure(figsize=(15, 5))
for i in range(9):
    plt.plot(b1, ex_u1[:, i], label = f'v = {v1[i]}')



plt.scatter(b1[np.argmax(ex_u1, 0)], np.max(ex_u1, 0), color = 'black')
plt.title('Expected payoff for first player with nine diffrent values')
plt.xlabel('$b_1$')
plt.ylabel('$E(u_1)$')
plt.legend()
plt.show()
```



[16]:
```
np.argmax(ex_u1, 0)
b1_star = b1[np.argmax(ex_u1, 0)]
b1_star
```

[16]:
```
array([0.06939394, 0.12878788, 0.19808081, 0.26737374, 0.32676768,
       0.4059596 , 0.46535354, 0.54454545, 0.60393939])
```

[17]:
```
z = np.polyfit(v1, b1_star, 1)
p = np.poly1d(z)

plt.figure(figsize=(5, 5))
plt.scatter(v1, b1_star)
plt.plot(v1,p(v1),"r--")
plt.title('FPA Strategy function for first player- Uniform Distribution')
plt.xlabel('$v_1$')
plt.ylabel('$b_1$')
plt.show()
plt.show()
```



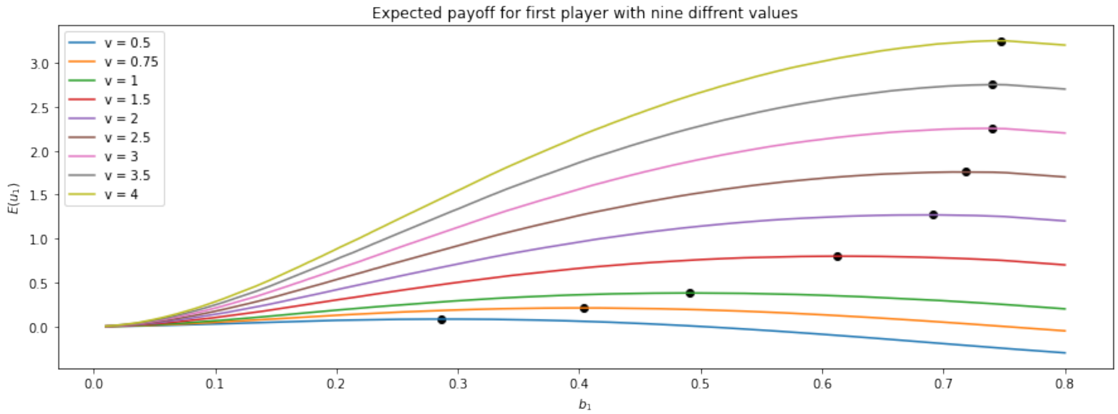
2.2 FPA with Exponential types ~ exp(2)

[18]:
```
def integrand(x, N, lamda):
    return x * (N-1) * (lamda*np.exp(-lamda*x)) * ((1 - np.
 ↪exp(-lamda*x))**(N-2))

def beta_star_FPA(v, N, lamda):
```

```
    b = np.empty((v.shape[0], 1))
    for i, val_v in enumerate(v):
        b[i,0] = integrate.quad(integrand, 0, val_v, args=(N, lamda))[0] / ((1␣
↪- np.exp(-lamda*val_v))**(N-1))
    return b
```

[19]:
```
num_sample = 100000
N = 3
lamda = 2

v2 = np.random.exponential(scale = 1/lamda, size = (num_sample,1))
v3 = np.random.exponential(scale = 1/lamda, size = (num_sample,1))

b2 = beta_star_FPA(v2, N, lamda)
b3 = beta_star_FPA(v3, N, lamda)

b1 = np.linspace(0.01, 0.8, 1000)
ex_u1 = np.empty((1000, 9))
v1 = [0.5, 0.75, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4]

for i, v1_val in enumerate(v1):
    for j, b1_val in enumerate(b1):
        ex_u1[j, i] = ex_payoff_FPA(b1_val, b2, b3, v1_val)
```

[20]:
```
plt.figure(figsize=(15, 5))
for i in range(9):
    plt.plot(b1, ex_u1[:, i], label = f'v = {v1[i]}')



plt.scatter(b1[np.argmax(ex_u1, 0)], np.max(ex_u1, 0), color = 'black')
plt.title('Expected payoff for first player with nine diffrent values')
plt.xlabel('$b_1$')
plt.ylabel('$E(u_1)$')
plt.legend()
plt.show()
```



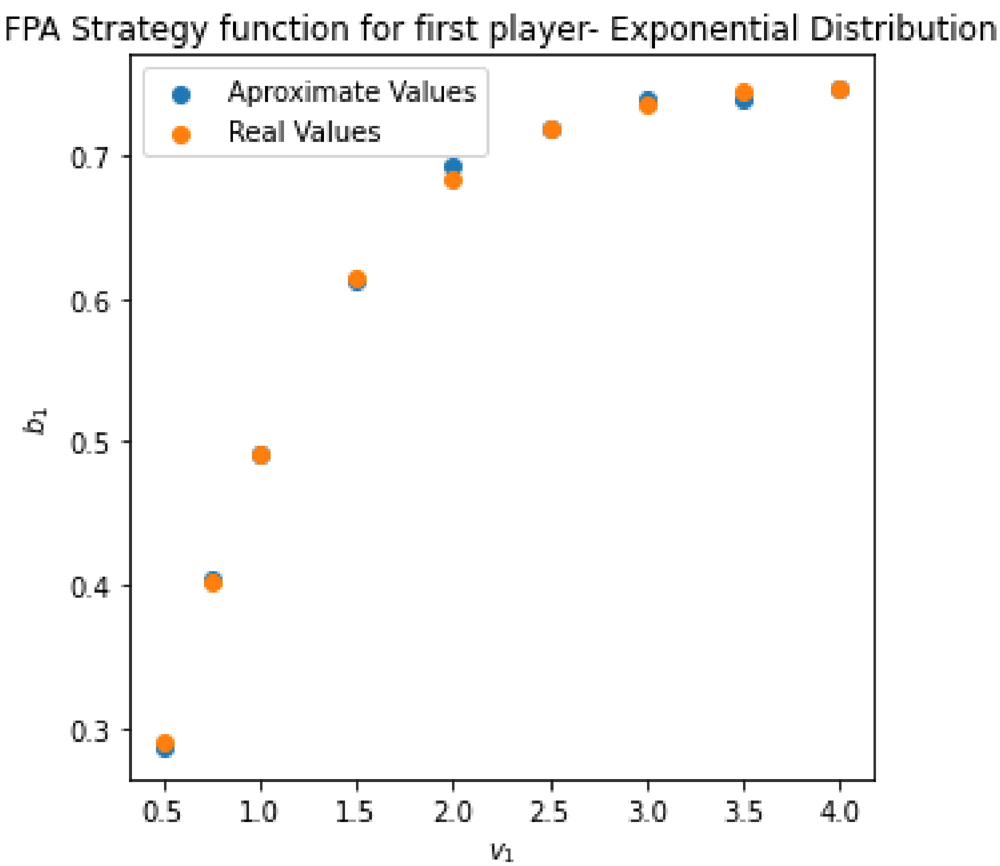
[21]:
```
np.argmax(ex_u1, 0)
b1_star = b1[np.argmax(ex_u1, 0)]
b1_star
```

[21]:
```
array([0.28677678, 0.40381381, 0.4908008 , 0.61258258, 0.69166166,
       0.71854855, 0.7398999 , 0.7398999 , 0.74701702])
```

[22]:
```
beta_star_FPA(np.array(v1), N, lamda)
```

[22]:
```
array([[0.2896632 ],
       [0.40091292],
       [0.49072576],
       [0.6148928 ],
       [0.68400304],
       [0.71935851],
       [0.73631446],
       [0.74406444],
       [0.74748274]])
```

[23]:
```
plt.figure(figsize=(5, 5))
plt.scatter(v1, b1_star, label = 'Aproximate Values')
plt.scatter(v1, beta_star_FPA(np.array(v1), N, lamda), label = 'Real Values')
plt.title('FPA Strategy function for first player- Exponential Distribution')
plt.xlabel('$v_1$')
plt.ylabel('$b_1$')
plt.legend()
plt.show()
plt.show()
```



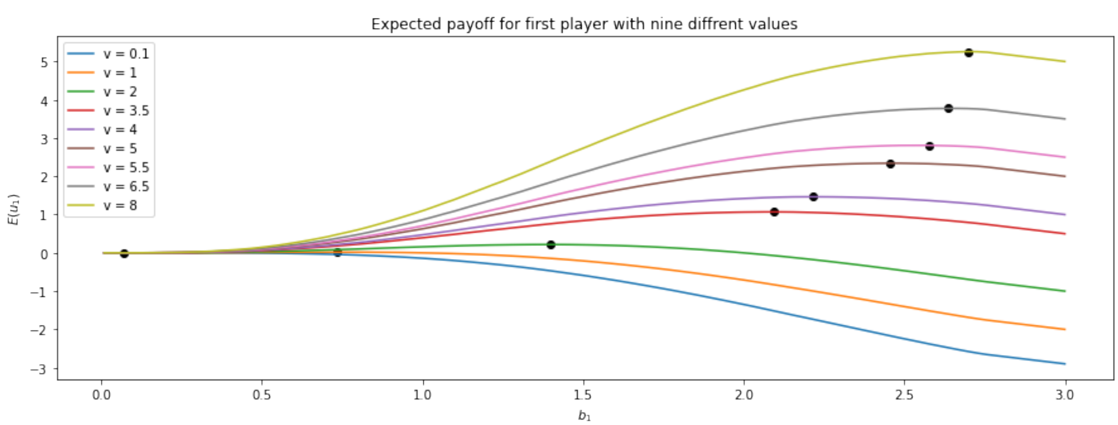
2.3 FPA with Gamma types ~ G(2, 1)

[24]:
```
import scipy.special as sc

def gamma_cdf(x, alfa, beta):
    return sc.gammainc(alfa, beta*x)

def gamma_pdf(x, alfa, beta):
    return (beta**alfa * x**(alfa-1) * np.exp(-beta*x)) / m.factorial(alfa-1)

def integrand(x, N, alfa, beta):
    return x * (N-1) * gamma_pdf(x, alfa, beta) * (gamma_cdf(x, alfa,␣
↪beta)**(N-2))

def beta_star_FPA(v, N, alfa, beta):
    b = np.empty((v.shape[0], 1))
    for i, val_v in enumerate(v):
        b[i,0] = integrate.quad(integrand, 0, val_v, args=(N, alfa, beta))[0] /␣
↪(gamma_cdf(val_v, alfa, beta)**(N-1))
```

```python
    return b
```

[25]:
```python
num_sample = 100000
N = 3
alfa = 2.
beta = 1.



v2 = np.random.gamma(alfa, scale=beta, size=(num_sample, 1))
v3 = np.random.gamma(alfa, scale=beta, size=(num_sample, 1))

b2 = beta_star_FPA(v2, N, alfa, beta)
b3 = beta_star_FPA(v3, N, alfa, beta)

b1 = np.linspace(0.01, 3, 100)
ex_u1 = np.empty((100, 9))
v1 = [0.1, 1, 2, 3.5, 4, 5, 5.5, 6.5, 8]

for i, v1_val in enumerate(v1):
    for j, b1_val in enumerate(b1):
        ex_u1[j, i] = ex_payoff_FPA(b1_val, b2, b3, v1_val)
```

[26]:
```python
plt.figure(figsize=(15, 5))
for i in range(9):
    plt.plot(b1, ex_u1[:, i], label = f'v = {v1[i]}')



plt.scatter(b1[np.argmax(ex_u1, 0)], np.max(ex_u1, 0), color = 'black')
plt.title('Expected payoff for first player with nine diffrent values')
plt.xlabel('$b_1$')
plt.ylabel('$E(u_1)$')
plt.legend()
plt.show()
```



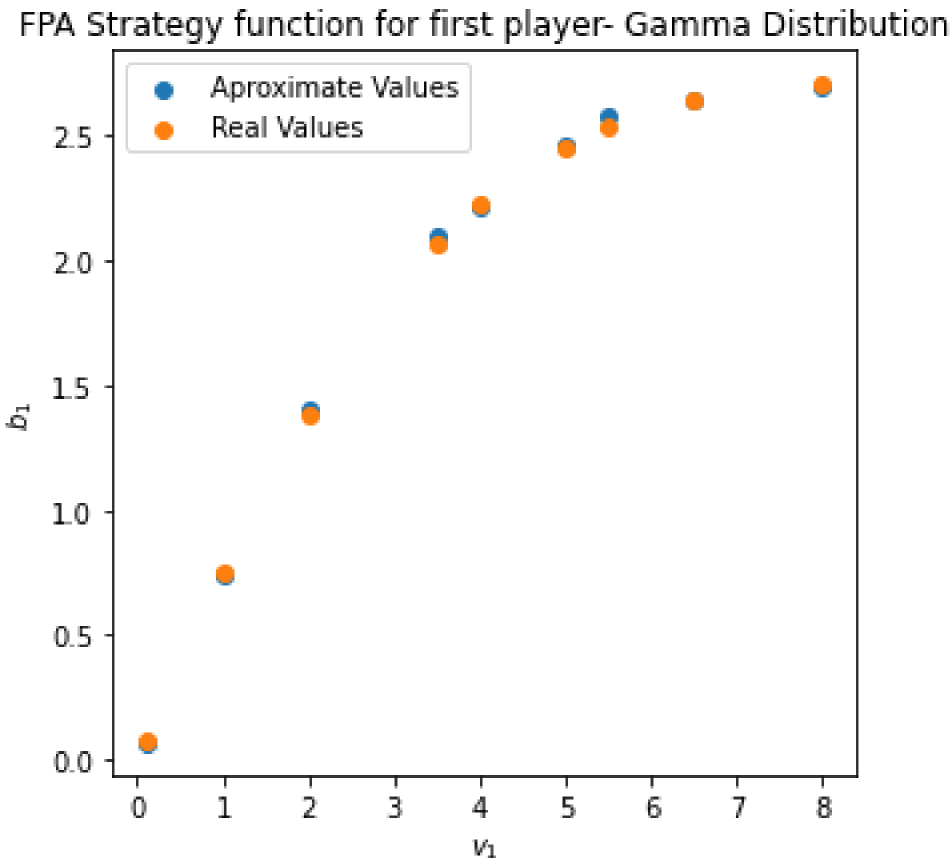
[27]:
```
np.argmax(ex_u1, 0)
b1_star = b1[np.argmax(ex_u1, 0)]
b1_star
```

[27]:
```
array([0.07040404, 0.73484848, 1.39929293, 2.09393939, 2.21474747,
       2.45636364, 2.57717172, 2.63757576, 2.6979798 ])
```

[28]:
```
beta_star_FPA(np.array(v1), N, alfa, beta)
```

[28]:
```
array([[0.07955026],
       [0.75027019],
       [1.38154321],
       [2.06612528],
       [2.22513536],
       [2.45501752],
       [2.53360417],
       [2.6379089 ],
       [2.71140981]])
```

[29]:
```
plt.figure(figsize=(5, 5))
plt.scatter(v1, b1_star, label = 'Aproximate Values')
plt.scatter(v1, beta_star_FPA(np.array(v1), N, alfa, beta), label = 'Real␣
 ↪Values')
plt.title('FPA Strategy function for first player- Gamma Distribution')
plt.xlabel('$v_1$')
plt.ylabel('$b_1$')
plt.legend()
plt.show()
```


FPA Strategy function for first player- Gamma Distribution
Aproximate Values
Real Values
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
b_1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
v_1