



به نام خدا

دانشگاه تهران



دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

درس تخمین و شناسایی سیستم‌ها

تمرین اول

دستیاران طراح	
علیرضا گلابوند	نام دستیار طراح
<a href="mailto:alirezag213@gmail.com">alirezag213@gmail.com</a>	رایانامه
فائزه فتحی	نام دستیار طراح
<a href="mailto:faezehfat97@gmail.com">faezehfat97@gmail.com</a>	رایانامه
۱۴۰۱/۱۲/۲۹	مهلت ارسال پاسخ

## فهرست

قوانین ..... ۲

سوال (۱) تخمین و خطا ..... ۳

قبل از پاسخ دادن به پرسش‌ها، موارد زیر را با دقت مطالعه نمایید:

- از پاسخ‌های خود یک گزارش در قالبی که در صفحه‌ی درس در سامانه‌ی Elearn با نام **REPORTS\_TEMPLATE.docx** قرار داده شده تهیه نمایید.
- **کیفیت گزارش شما در فرآیند تصحیح از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است؛** بنابراین، لطفاً تمامی نکات و فرض‌هایی را که در پیاده‌سازی‌ها و محاسبات خود در نظر می‌گیرید در گزارش ذکر کنید.
- در گزارش خود، برای شکل‌ها زیرنویس و برای جدول‌ها بالانویس در نظر بگیرید. پاسخ به سوالات مطرح شده، شامل **شکل‌ها، خروجی شبیه‌سازی، تحلیل نتایج و نتیجه‌گیری** می‌باشد.
- الزامی به ارائه توضیح جزئیات کد در گزارش نیست، اما باید نتایج بدست آمده از آن را گزارش و تحلیل کنید.
- **تحلیل نتایج الزامی می‌باشد.**
- **در صورت مشاهده تقلب امتیاز تمامی افراد شرکت‌کننده در آن، ۱۰۰- لحاظ می‌شود.**
- تنها زبان برنامه نویسی مجاز **Matlab** است. کد شبیه‌سازی باید بدون خطا و صرفاً با اعمال Run در Matlab اجرا شود و **مطابق** با متن گزارش باشد.
- برای پاسخ به سوالات مطرح شده، مجاز به استفاده از کتاب، جزوه، فایل ارائه دروس و مراجع آنلاین و آنلاین هستید؛ **اما مطلقاً مجاز نیستید از هیچ فردی به هر نحوی کمک بگیرید (در صورت مشاهده تقلب امتیاز تمامی افراد شرکت‌کننده در آن، ۱۰۰- لحاظ می‌شود).**
- لطفاً گزارش، کدها و سایر ضمیمه را به در یک پوشه با نام زیر قرار داده و آن را فشرده سازید، سپس در سامانه‌ی Elearn بارگذاری نمایید:

HW[Number]\_[Lastname]\_[StudentNumber].zip

(مثال: HW1\_Ahmadi\_810199101.zip)

- در صورت تمایل، استفاده از ابزار **CVX** برای مسائل شامل بهینه‌سازی، مجاز است (برای اطلاعات بیشتر و دانلود پکیج CVX به این [لینک](#) مراجعه کنید).

## سوال (۱) تخمین و خطا

ماتریس‌های تصادفی  $\begin{cases} A \in \mathbb{R}^{100 \times 1000} \\ X \in \mathbb{R}^{1000 \times 1} \\ N \in \mathbb{R}^{100 \times 1} \end{cases}$  مفروض‌اند که  $\begin{cases} A_{ij} \sim N(a, b) \\ X_{ij} \sim N(c, d) \\ N_{ij} \sim N(0, 1) \end{cases}$  برقرار است (منظور از  $N(\mu, \sigma^2)$ ، نویز گوسی با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  است).

$a, b, c, d$  به ترتیب، رقم‌های شماره دانشجویی از راست به چپ به صورت زیر می‌باشند؛ برای مثال:

$$Std. Num.: 123456089 \rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ \frac{b}{2} = \frac{8}{10} = 0.8 \\ c = 0 \rightarrow c = 10 \\ \frac{d}{2} = \frac{6}{10} = 0.6 \end{cases}$$

در صورت صفر شدن واریانس، عدد ۱۰ را قرار دهید. (در گزارش خود حتما ابتدای سوال، مطابق مثال داده شده، مقادیر  $a, b, c, d$  را بر اساس شماره دانشجویی خود، تعیین کنید).

مدل خطی  $Y = AX + N$  را در نظر بگیرید؛

ابتدا با استفاده از ماتریس‌های  $X$  و  $Y$ ، ماتریس  $A$  را با روش‌های LS و WLS تخمین زده و آن‌ها را  $\hat{A}$  و  $\hat{A}_w$  بنامید و برای هر کدام از این سیستم‌ها، در دو بخش مجزا، عملیات زیر را انجام دهید:

(۱) خطای تخمین (منظور تخمین ماتریس سیستم  $A$ ) را به صورت  $Er_{estimate} = \frac{\|A - \hat{A}\|}{\|A\|}$  بدست آورید و بر اساس حد پایین کرامر-رائو (CRLB) تفسیر کنید.

(۲)  $Er_{estimate}$  را reshape کرده و نمودارهای Box Plot، Error Bar، به همراه Confidence Interval رسم کرده و آن‌ها را تحلیل کنید.

(۳) خطای مدل (منظور تخمین خروجی) به صورت  $Er_{model} = \frac{\|Y - \hat{A}X\|}{\|Y\|}$  بدست آورده و مطابق قسمت (۲)، آن را reshape کرده و نمودارهای Box Plot، Error Bar، به همراه Confidence Interval رسم کرده و آن‌ها را تحلیل کنید.

(۴) تخمین کوواریانس نویز را برای هر دو تخمین محاسبه کنید.

(۵) می‌دانیم که هر تخمین، خود می‌توان دارای یک توزیع باشد. برای بررسی حالت‌های مختلف، تخمین مدل را به ازای تعداد تکرار و نویزهای متفاوت، مورد بررسی قرار می‌دهیم. خطای مدل

را به تعداد تکرارهای ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰، و نویزهای  $N \sim (0, 0.01)$  و  $N \sim (0, 1)$  (در مجموع ۹ حالت)

محاسبه کرده و:

a. هیستوگرام خطای مدل به ازای هر تعداد تکرار را رسم کنید؛

b. میانگین و واریانس خطای مدل ذخیره شده را به ازای هر تعداد تکرار ذخیره کنید؛

نتایج خود را تحلیل کنید.

۶) ماتریس  $X$  را با استفاده از دستور  $X = \text{hilb}(1000, 1)$  در Matlab تولید کرده و با تشکیل مدل خطی جدید، قسمت‌های (۱) و (۲) را مجدداً برای این مدل، تکرار کنید (توجه داشته باشید  $X$  در این حالت یک ماتریس ill conditioned است؛ دستور  $\text{hilb}(k)$  یک ماتریس با ابعاد  $k \times k$  تولید می‌کند؛ توضیحات بیشتر در این [لینک](#)).