ミクロ経済学 I 演習　第 3 回　解答

作成日｜ 2017 年 4 月 26 日

問題 1

(1) **証明.** 縁付きヘシアンの符号を考えるため，u の 1 次と 2 次の導関数を求める．

$$\begin{aligned} u_i &= 1 + x_j \text{ for each } i = 1,2 \\ u_{ij} &= u_{ji} = 1 \text{ for each } i,j\ (i \neq j) \\ u_{ii} &= 0 \text{ for each } i = 1,2 \end{aligned}$$

縁付きヘシアン：

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+x_2 & 1+x_1 \\ 1+x_2 & 0 & 1 \\ 1+x_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2(1+x_1)(1+x_2) \end{aligned}$$

$\mathbf{x} \geqslant 0$ より，$|\overline{H}| > 0$ である．

縁付きヘシアンの第 2 首座小行列式：

$$|\overline{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1+x_2 \\ 1+x_2 & 0 \end{vmatrix} = -(1+x_2)^2$$

$\mathbf{x} \geqslant 0$ より $|\overline{H}_2| < 0$.

よって u は狭義準凹関数である． □

(2) **$\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$ であることの証明.** ある $i = 1,2$ について $x_i^* = 0$ とする消費プラン $\mathbf{x}^*$ が解であるとする．このとき，$u(\mathbf{x}^*) = 0$ である．一方で各 $i = 1,2$ について $x_i' = y/2p_i$ と $\mathbf{x}'$ を定義すると，

$$\mathbf{p}\mathbf{x}' = p_i \frac{y}{2p_i} + p_j \frac{y}{2p_j} = y$$

となるので $\mathbf{x}'$ は予算制約を満たす．さらに，

$$u(\mathbf{x}') = \frac{y}{2p_1} + \frac{y}{2p_2} + \frac{y^2}{p_1 p_2} > 0 = u(\mathbf{x}^*)$$

なので $\mathbf{x}^*$ が解であることに矛盾． □

解 x^* において $x_i^* = 0$ のとき，$x_j^* = y/p_j$ となることの証明. 解 x^* において $x_i^* = 0$ かつ $x_j^* < y/p_j$ とすると，$u(\mathbf{x}^*) = x_j^*$ である．これに対し消費プラン $\mathbf{x}'$ を $x_i' = 0$，$x_j' = x_j^* + (y/p_j - x_j^*)/2$ とする．このとき，

$$\mathbf{p}\mathbf{x}' = p_j \left(x_j^* + \frac{y/p_j - x_j^*}{2} \right) = p_j \frac{x_j^* + y/p_j}{2} = \frac{p_j x_j^* + y}{2} < y$$

となるので $\mathbf{x}'$ は予算制約を満たす．さらに，

$$u(\mathbf{x}') = x_j^* + \frac{y/p_j - x_j^*}{2} > x_j^* = u(\mathbf{x}^*)$$

となるので $\mathbf{x}^*$ が解であることに矛盾． $\square$

解 $\mathbf{x}^*$ において $x^* \gg 0$ となることの証明． $\mathbf{x}^* \neq 0$ は証明済みなので，ある $i = 1,2$ について $x_i^* = 0$ とする．$x_j^* < y/p_j$ なら解になり得ないので $x_j^* = y/p_j$ のみ考えれば良い．ここで，実数 $\varepsilon > 0$ を

$$x_j^* - \frac{p_i}{p_j}\varepsilon > 0 \text{ and } \varepsilon < \frac{p_j}{2p_i}\left(1 - \frac{p_i}{p_j} + x_j^*\right)$$

を満たすように取る．$x_j^* = y/p_j > p_i/p_j 0$ なのでこのような $\varepsilon > 0$ は存在する．これを用いて，$x_i' = \varepsilon$，$x_j' = x_j^* - \frac{p_i}{p_j}\varepsilon$ と定義する．このとき，

$$\mathbf{p}\mathbf{x}' = p_i\varepsilon + p_j\left(x_j^* - \frac{p_i}{p_j}\varepsilon\right) = p_j x_j^* = y$$

なので $\mathbf{x}'$ は予算制約を満たす．ここで $f(\varepsilon) \equiv u(\mathbf{x}') - u(\mathbf{x}^*)$ と定義すると，

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) = u(\mathbf{x}') - u(\mathbf{x}^*) &= \left\{\varepsilon + x_j^* - \frac{p_i}{p_j}\varepsilon + \varepsilon\left(x_j^* - \frac{p_i}{p_j}\varepsilon\right)\right\} - x_j \\ &= \varepsilon - \frac{p_i}{p_j}\varepsilon + \varepsilon\left(x_j^* - \frac{p_i}{p_j}\varepsilon\right) \end{aligned}$$

である．f の導関数を求めると，

$$f'(\varepsilon) = 1 - \frac{p_i}{p_j} + \left(x_j^* - \frac{p_i}{p_j}\varepsilon\right) - \frac{p_i}{p_j}\varepsilon = 1 - \frac{p_i}{p_j} + x_j^* - \frac{2p_i}{p_j}\varepsilon$$

となるが，ε の作り方から $f'(\varepsilon) > 0$ である．よって平均値の定理よりある $\hat{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ が存在して，

$$f'(\hat{\varepsilon}) = \frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon - 0} = \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} \to f(\varepsilon) = f'(\varepsilon)\varepsilon$$

を満たす．$\hat{\varepsilon} < \varepsilon$ なので $f'(\varepsilon) > 0$ となり，$f(\varepsilon) = f'(\varepsilon)\varepsilon > 0$ を得る．すなわち $u(\mathbf{x}') > u(\mathbf{x}^*)$ であるから $\mathbf{x}^*$ が解であることに矛盾． $\square$

(3) (2) より，内点だけを考えれば良い．ラグランジュ関数は，

$$L = x_1 + x_2 + x_1 x_2 - \lambda(\mathbf{p}\mathbf{x} - y)$$

なので，クーンタッカー条件を満たす消費プラン $\mathbf{x}^*$ について，以下が成り立つ．

$$1 + x_j^* - \lambda^* p_i = 0 \text{ for all } i = 1,2 \tag{1}$$

$$\lambda^*(\mathbf{p}\mathbf{x}^* - y) = 0 \tag{2}$$

u が連続[*1]な狭義準凹関数であり，内点で微分可能[*2]なのでこれらを満たす $\mathbf{x}^*$ が一意の解である．(1) 式より，$\lambda^* > 0$ であるから，(2) 式より $\mathbf{p}\mathbf{x}^* - y = 0$ を得る．これを利用して $\mathbf{x}^*$ を求めると，

$$x_i^* = \frac{y - p_i + p_j}{2p_i} \text{ for all } i = 1, 2$$

となる．

(4) $u(\mathbf{x})$ に得られた $\mathbf{x}^*$ を代入すると間接効用関数は,

$$\begin{aligned} v(\mathbf{p}, y) &= \frac{y - p_1 + p_2}{2p_1} + \frac{y - p_2 + p_1}{2p_2} + \frac{y - p_1 + p_2}{2p_1}\frac{y - p_2 + p_1}{2p_2} \\ &= \frac{1}{4p_1p_2}\left[p_1^2 + 2(y - p_2)p_1 + (y + p_2)^2\right] \end{aligned}$$

となる．

[*1] 証明せよ．

[*2] 証明せよ．