ミクロ経済学I演習　第10回　解答

作成日｜ 2017 年 6 月 28 日

問題 1

(a) プレイヤー 1 が D を選んでいるとき，プレイヤー 2 が L を選べば利得 4，M を選べば利得 5 なので L は M を強支配しない．プレイヤー 1 が U を選んでいるとき，プレイヤー 2 が R を選べば利得 -4，M を選べば利得 -3 なので R は M を強支配しない．

(b) 便宜上 L と R を等確率で選ぶという混合戦略を $\hat{m}_2$ と書く．$p \in [0,1]$ を任意に選び，確率 p で U を選ぶという 1 の戦略 m_1 を考える．プレイヤー 1 が m_1 を選んでいるとき，プレイヤー 2 が $\hat{m}_2$ と M を選んだ場合の期待利得はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
u_2(\hat{m}_2, m_1) &= -2p + 6(1-p) = 6 - 8p \\
u_2(M, m_1) &= -3p + 5(1-p) = 5 - 8p
\end{aligned}
$$

なので p によらず $u_2(\hat{m}_2, m_1) > u_2(M, m_1)$ である．したがって $\hat{m}_2$ は M を強支配する．

◀ p によらない点が重要．p に依存して大小関係が変わるのであれば強支配するとは言えない．

問題 2

プレイヤー 1 の期待利得は，

$$2qp + (1-q)(1-p) = (3q-1)p + 1 - q$$

である．よって最適な p は，

$$
p \begin{cases} = 0 & \text{if } q < 1/3 \\ \in [0,1] & \text{if } q = 1/3 \\ = 1 & \text{if } q > 1/3 \end{cases}
$$

である．プレイヤー 2 の期待利得は，

$$pq + 2(1-p)(1-q) = (3p-2)q + 2(1-p)$$

である．これよりプレイヤー 2 の最適反応は

$$
q \begin{cases} = 0 & \text{if } p < 2/3 \\ \in [0,1] & \text{if } p = 2/3 \\ = 1 & \text{if } p > 2/3 \end{cases}
$$

となる．これらを図示すると図 1 のようになる．ナッシュ均衡はお互いに最適反応を取り合っている戦略組なので，$(p,q) = (0,0), (2/3, 1/3), (1,1)$ の三つである．

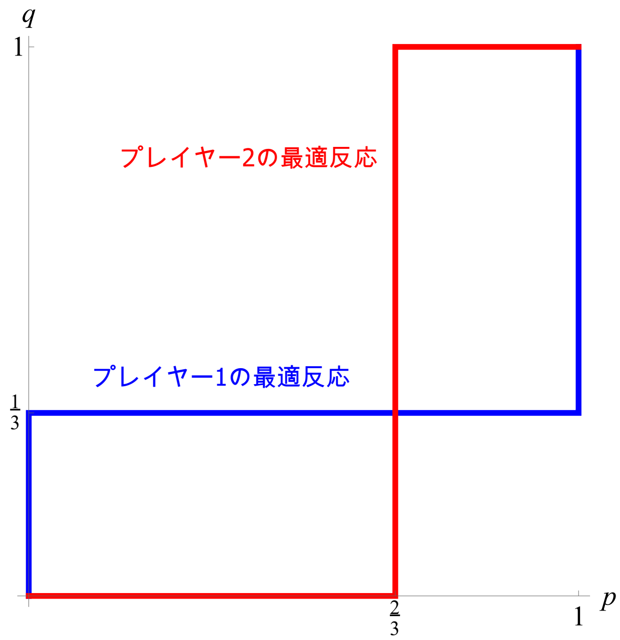

図 1　問題 2 の最適反応

問題 3

(a) p を所与として，プレイヤー 2 が L, M, R の各純戦略を取った時の期待利得はそれぞれ $4-2p, 6-5p, 1+2p$ である．これらを図示すると図 2 のようになる．

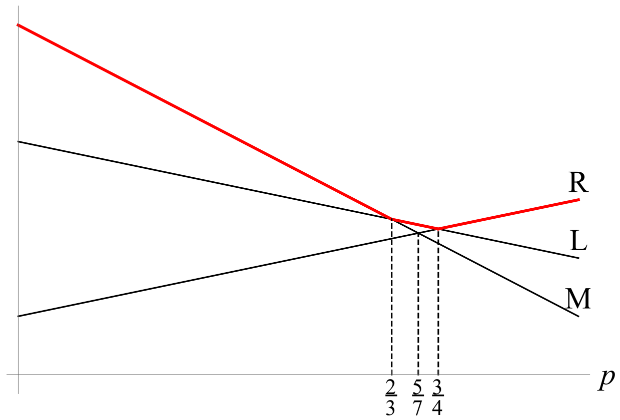

図 2　期待利得の図示

(b) プレイヤー 2 がナッシュ均衡で複数の純戦略を混ぜるためには，正の確率が振られた純戦略の期待利得は等しくなければならない．(a) の図より，M と R は $p=5/7$ のとき無差別になるが，得られる期待利得は L を確率 1 で選ぶ場合の

利得を厳密に下回るので $p=5/7$ に対し M と R を混ぜることは最適にはならない．複数の純戦略を混ぜることが最適になり得るのは $p=2/3$ のときの L と M，$p=3/4$ のときの L と R である．

(c) (b) の結果より，プレイヤー 2 は $p=2/3$ のとき L と M を混ぜ，$p=3/4$ のとき L と R を混ぜる誘因を持つことが確認できたので，プレイヤー 1 の誘因を考える．

(i) プレイヤー 2 が L と M だけを混ぜるとき
これが満たされるのは $p=2/3$ のときであり，プレイヤー 1 にとって U と D が無差別でなければならない．それぞれを選んだときの期待利得は $2q_L+3q_M$ と q_L+2q_M である．これらが等しくなるためには $q_L=-q_M$ とならなければならないが，これを満たすような確率は存在しない．よって $p=2/3$ に対して L と M を混ぜる戦略組はナッシュ均衡にならない．

◀ プレイヤー 2 は R を混ぜないので $q_R=0$ である．

(ii) プレイヤー 2 が L と R だけを混ぜるとき
これが満たされるのは $p=3/4$ のときであり，プレイヤー 1 にとって U と D が無差別でなければならない．それぞれを選んだときの期待利得は $2q_L+2q_R$ と q_L+6q_R である．これらが等しくなるためには $q_L=4/5$, $q_R=1/5$ であればよい．

したがって，このゲームのナッシュ均衡は

$$\begin{aligned} p &= \frac{3}{4}, \\ q_L &= \frac{4}{5}, q_M = 0, q_R = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

である．

問題 4

(a)⇒(b) の証明. $\hat{m}$ がナッシュ均衡だとすると，任意の $m_i \in M_i$ について $u_i(\hat{m}) \geqslant u_i(m_i, \hat{m}_{-i})$ が成り立つ．各純戦略 s_i も M_i に含まれるので，任意の $s_i \in S_i$ について $u_i(\hat{m}) \geqslant u_i(s_i, \hat{m}_{-i})$ が従う．ここで，$\hat{m}_i$ で正の確率が降られる s_i の集合を $\hat{S}_i$ と書き，$\hat{S}_i$ の要素で $u_i(\hat{m}) > u_i(\tilde{s}_i, \hat{m}_{-i})$ となる $\tilde{s}_i$ があるとする．全ての $s_i \in \hat{S}_i$ について $u_i(\hat{m}) \geqslant u_i(s_i, \hat{m}_{-i})$ が成り立つことから，

◀ ただし $\tilde{s}_i$ については不等号が厳密に成立．

$$\begin{aligned} &\sum_{s_i \in \hat{S}_i} \hat{m}_i(s_i) u_i(\hat{m}) > \sum_{s_i \in \hat{S}_i} \hat{m}_i(s_i) u_i(s_i, \hat{m}_{-i}) \\ \Longleftrightarrow\ & u_i(\hat{m}_i) > \sum_{s_i \in \hat{S}_i} \hat{m}_i(s_i) u_i(s_i, \hat{m}_{-i}) = u_i(\hat{m}_i) \end{aligned}$$

となり，矛盾． □

(b)⇒(c). (b) が成り立つと仮定すると，$\hat{m}_i$ で正の確率が振られるかによらず，少な

くとも $u_i(\hat{m}) \geqslant u_i(s_i, \hat{m}_{-i})$ が全ての i，全ての $s_i \in S_i$ について成り立つ．これは (c) の成立を意味する． □

(c)⇒(a). 任意の i，任意の $s_i \in S_i$ について $u_i(\hat{m}) \geqslant u_i(s_i, \hat{m}_{-i})$ が成り立つと仮定する．任意にプレイヤー i と混合戦略 $m_i \in M_i$ を選ぶ．$u_i(m_i, \hat{m}_{-i})$ は $\{u_i(s_i, \hat{m}_{-i})\}_{s_i \in S_i}$ の凸結合なので，$u_i(\hat{m}) \geqslant u_i(m_i, \hat{m}_{-i})$ が成り立つ．任意の i と任意の m_i についてこの関係が成り立つことは $\hat{m}$ がナッシュ均衡であることの定義そのものである． □

◀ m_i で正の確率を振らない s_i については当然凸結合のウエイトは 0.

問題 5

このゲームのナッシュ均衡は $x^* = (\hat{x}_A, \hat{x}_B, \hat{x}_C)$ である．$\hat{x}_A < \hat{x}_B < \hat{x}_C$ なのでこの戦略組では $y = \hat{x}_B$ が採用される．各プレイヤーが x^* から逸脱する誘因を持たないことを確認する．

プレイヤー A

x^* で A が得る利得は $u_A = -|\hat{x}_A - \hat{x}_B| = \hat{x}_A - \hat{x}_B$ である．

(i) $x_A < \hat{x}_A$ または $\hat{x}_A < x_A \leqslant \hat{x}_B$ を満たす x_A に逸脱したとき
$y = \hat{x}_B$ のまま変わらないので，利得は $u'_A = \hat{x}_A - \hat{x}_B = u_A$ である．よってこのような逸脱をする誘因を持たない．

(ii) $\hat{x}_B < x_A \leqslant \hat{x}_C$ を満たす x_A に逸脱したとき
$y = x_A$ となる．利得は $u'_A = -|\hat{x}_A - x_A| = -(x_A - \hat{x}_A)$ である．u_A と比較すると，

$$u'_A - u_A = -(x_A - \hat{x}_A) - (\hat{x}_A - \hat{x}_B) = \hat{x}_B - x_A < 0$$

が成り立つ．よってこのような逸脱をする誘因を持たない．

(iii) $x_A > \hat{x}_C$ を満たす x_A に逸脱したとき
$y = \hat{x}_C$ となる．利得は $u'_A = -|\hat{x}_A - \hat{x}_C| = -(\hat{x}_C - \hat{x}_A)$ である．u_A と比較すると，

$$u'_A - u_A = -(\hat{x}_C - \hat{x}_A) - (\hat{x}_A - \hat{x}_B) = \hat{x}_B - \hat{x}_C < 0$$

が成り立つ．よってこのような逸脱をする誘因を持たない．

従って，プレイヤー A はどのような逸脱をする誘因も持たない．

プレイヤー B

x^* でプレイヤー B が得る利得は $u_B = -|\hat{x}_B - \hat{x}_B| = 0$ である．プレイヤー B は x^* で最も望ましい結果を実現しているのでいかなる逸脱をしても，より高い利得を得ることはない．

プレイヤー C

プレイヤー A と対照的に逸脱の誘因を持たないことが確認できる[*1].

以上より，x^* はナッシュ均衡になっている．

[*1] 実際に確認せよ