

演習ミクロ経済学 I 第 2 回 解答 *

2017 年 4 月 21 日

問題 1

(a) この効用関数は連続ではない。

証明. 距離概念として絶対値を用いる. $x = 1, \varepsilon = 1$ とする. 任意に $\delta > 0$ を選ぶ. $x' = x + \frac{\delta}{2}$ とすると,

$$|x' - x| = \left| x + \frac{\delta}{2} - x \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

となるので, $|x' - x| < \delta$ である. 一方,

$$|u(x') - u(x)| = \left| \left(x + \frac{\delta}{2} + 1 \right) - x \right| = \frac{\delta}{2} + 1 > 1 = \varepsilon$$

となる. したがって u は連続ではない. □

(b) この効用が表す選好は連続である.

証明. まず u が厳密な増加関数であることを示す. 任意に $x^1 < x^2$ を満たす $x^1, x^2 \in \mathbb{R}_+$ を選ぶ. $x^1 < x^2 \leq 1$, $x^1 \leq 1 < x^2$, $1 < x^1 \leq x^2$ の 3 ケースを考える.

(i) $x^1 < x^2 \leq 1$ のとき

u の定義から, $u(x^1) = x^1 < x^2 = u(x^2)$ となる.

(ii) $x^1 \leq 1 < x^2$ のとき

u の定義から, $u(x^1) = x^1 < x^2 + 1 = u(x^2)$ となる.

(iii) $1 < x^1 \leq x^2$ のとき

u の定義から, $u(x^1) = x^1 + 1 < x^2 + 1 = u(x^2)$ となる.

したがって u は厳密な増加関数である.

このことを使って選好が連続であることを示す. 任意に $x^1 \in \mathbb{R}_+$ を選ぶ. u が選好を表すので, $x^1 \succsim x^2 \iff u(x^1) \geq u(x^2)$ である. u は厳密な増加関数なので, $u(x^1) \geq u(x^2)$ を満たす x^2 は $[x^1, +\infty)$ に含まれ, $u(x^1) \leq u(x^2)$ を満たす x^2 は $[0, x^1]$ に含まれる. すなわち,

* 間違いを見つけたら orihsamuk@gmail.com まで連絡してください.

$$\{x^2 \in \mathbb{R}_+ \mid x^1 \succsim x^2\} = [x^1, +\infty)$$

$$\{x^2 \in \mathbb{R}_+ \mid x^1 \precsim x^2\} = [0, x^1]$$

である。これらがいずれも \mathbb{R}_+ において閉集合であることを示せばよい。以下では距離概念として絶対値を用いる。

$[x^1, +\infty)$ が \mathbb{R}_+ において閉集合であることを示す。各 $k = 1, 2, \dots$ について $x^k \in [x^1, +\infty)$ であり、 $\bar{x} \in \mathbb{R}_+$ に収束する数列 $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ を任意に選ぶ。背理法の仮定として $\bar{x} \notin [x^1, +\infty)$ とする。これは $\bar{x} < x^1$ を意味する。 $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ が \bar{x} に収束することから、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 \bar{k} が存在し、任意の $k \geq \bar{k}$ について $x^k \in B_\varepsilon(\bar{x})$ を満たす。 $\varepsilon > 0$ は任意なので、 $\varepsilon \equiv \frac{x^1 - \bar{x}}{2}$ とすると $x^k \in B_\varepsilon(\bar{x})$ より、

$$|x^k - \bar{x}| < \varepsilon \iff \bar{x} - \varepsilon < x^k < \bar{x} + \varepsilon \Rightarrow x^k < \bar{x} + \varepsilon = \frac{x^1 + \bar{x}}{2} < x^1$$

となり、 $x^k \notin [x^1, +\infty)$ が成り立つが、これは $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ の作り方に矛盾する。

$[0, x^1]$ が \mathbb{R}_+ において閉集合であることを示す。各 $k = 1, 2, \dots$ について $x^k \in [0, x^1]$ であり、 $\bar{x} \in \mathbb{R}_+$ に収束する数列 $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ を任意に選ぶ。背理法の仮定として $\bar{x} \notin [0, x^1]$ とする。全体集合を \mathbb{R}_+ に限定していることから、これは $\bar{x} > x^1$ を意味する。 $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ が \bar{x} に収束することから、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 \bar{k} が存在し、任意の $k \geq \bar{k}$ について $x^k \in B_\varepsilon(\bar{x})$ を満たす。 $\varepsilon > 0$ は任意なので、 $\varepsilon \equiv \frac{\bar{x} - x^1}{2}$ とすると $x^k \in B_\varepsilon(\bar{x})$ より、

$$|x^k - \bar{x}| < \varepsilon \iff \bar{x} - \varepsilon < x^k < \bar{x} + \varepsilon \Rightarrow x^k > \bar{x} - \varepsilon = \frac{x^1 + \bar{x}}{2} > x^1$$

となり、 $x^k \notin [0, x^1]$ が成り立つが、これは $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ の作り方に矛盾する。□

問題 2

$$(1) \mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0 \iff x_1^1 x_2^1 \geq x_1^0 x_2^0$$

強単調性：満たす

証明. $\mathbf{x}^1 > \mathbf{x}^0$, すなわち $x_1^1 \geq x_1^0$ かつ $x_2^1 \geq x_2^0$, $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ を満たす $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}_+^2$ を任意に選ぶ。 $x_1^1 = 0$ または $x_2^1 = 0$ のとき、 $x_1^1 x_2^1 = x_1^0 x_2^0$ となり、 $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ が成り立つ。 $x_1^1 > 0$ かつ $x_2^1 > 0$ のとき、 $x_1^1 x_2^1 > x_1^0 x_2^0$ となり、 $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^0$ が成り立つ。

次に $\mathbf{x}^1 \gg \mathbf{x}^0$, すなわち $x_1^1 > x_1^0$ かつ $x_2^1 > x_2^0$ を満たす $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^0$ を任意に選ぶ。このとき $x_1^1 x_2^1 > x_1^0 x_2^0$ が成り立つので $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^0$ かつ $\mathbf{x}^0 \not\succ \mathbf{x}^1$ となり、 $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$ が従う。□

強凸性：満たす

証明. $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ と $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ を満たす $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}_+^2$ と $t \in (0, 1)$ を任意に選ぶ。 \mathbf{x}^0 と \mathbf{x}^1 を t により凸結合した消費プランを \mathbf{x}^t と書くと、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t &= t\mathbf{x}^0 + (1-t)\mathbf{x}^1 = (tx_1^0, tx_2^0) + ((1-t)x_1^1, (1-t)x_2^1) \\ &= (tx_1^0 + (1-t)x_1^1, tx_2^0 + (1-t)x_2^1) \end{aligned}$$

となる. $t \in (0, 1)$ より, $x_1^t > x_1^0$ かつ $x_2^t > x_2^0$ である. よって, $x_1^t x_2^t > x_1^0 x_2^0$ が成り立つので $\mathbf{x}^t \succ \mathbf{x}^0$ かつ $\mathbf{x}^0 \not\succ \mathbf{x}^t$, すなわち $\mathbf{x}^t \succ \mathbf{x}^0$ が従う. \square

$$(2) \mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^0 \iff x_1^1 - x_2^1 \geq x_1^0 - x_2^0$$

強単調性: 満たさない

証明. $\mathbf{x}^1 = (3, 3)$, $\mathbf{x}^0 = (2, 1)$ とすると, $\mathbf{x}^1 \gg \mathbf{x}^0$ である. しかし,

$$x_1^1 - x_2^1 = 0 < 1 = x_1^0 - x_2^0$$

より $\mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}^1$ となるので, $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^0$ を満たさない. \square

強凸性: 満たさない

証明. $\mathbf{x}^1 = (3, 3)$, $\mathbf{x}^0 = (1, 1)$, $t = 0.5$ とすると, $x_1^1 - x_2^1 > x_1^0 - x_2^0$ を満たすので $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^0$ であり, 当然 $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ である. ところが, $tx_1^1 + (1-t)x_1^0 = 2$, $tx_2^1 + (1-t)x_2^0 = 2$ なので

$$x_1^t - x_2^t = 2 - 2 = 0 = x_1^0 - x_2^0$$

となり, $\mathbf{x}^t \not\succ \mathbf{x}^0$ が従う. よって $\mathbf{x}^t \succ \mathbf{x}^0$ は成り立たない. \square

$$(3) \mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^0 \iff \min\{x_1^1, x_2^1\} \geq \min\{x_1^0, x_2^0\}$$

問題 3

この選好は局所非飽和を満たさない.

証明. $x^0 = 5$, $\varepsilon = 1$ とする. 距離概念を絶対値とし, 任意に $x^1 \in B_\varepsilon(x^0)$ を選ぶと,

$$|x^1 - x^0| < \varepsilon \iff x^0 - \varepsilon < x^1 < x^0 + \varepsilon \iff 4 < x^1 < 6$$

が成り立つ. すると, $u(x^1) \leq 0 = u(x^0)$ となる. u が選好を表現しているので, $u(x^1) \leq u(x^0) \iff x^1 \preceq x^0$ となり, 局所非飽和を満たさない. \square

問題 4

証明. 任意に $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}_+^2$ と $t \in [0, 1]$ を選び, $\mathbf{x}^t \equiv tx_1 + (1-t)x_2$ と書くと,

$$f(\mathbf{x}^t) = \min\{x_1^t, x_2^t\} = \min\{tx_1^1 + (1-t)x_1^2, tx_2^1 + (1-t)x_2^2\}$$

である. 一方, 任意の $i = 1, 2$ について $f(\mathbf{x}^i) = \min\{x_1^i, x_2^i\}$ が成り立つことから,

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}^i) \leq x_1^i \\ f(\mathbf{x}^i) \leq x_2^i \end{cases} \Rightarrow tf(\mathbf{x}^i) + (1-t)f(\mathbf{x}^i) = f(\mathbf{x}^i) \leq tx_1^i + (1-t)x_2^i$$

となる. よって

$$\min\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\} \leq \min\{tx_1^1 + (1-t)x_2^1, tx_1^2 + (1-t)x_2^2\}$$

が成り立つ^{*1}。したがって、

$$f(\mathbf{x}^t) = \min\{tx_1^1 + (1-t)x_2^1, tx_1^2 + (1-t)x_2^2\} \geq \min\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\}$$

を得る。 □

問題 5

⇒ の証明. f が準凹関数であると仮定し、集合 $S(y)$ を

$$S(y) \equiv \{x' \in \mathbb{R}_+^2 \mid f(\mathbf{x}') \geq y\}$$

と定義する。任意に $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2$ を選び、 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in S(f(\mathbf{x}))$ と $t \in [0, 1]$ を任意にとる。 $\mathbf{x}^t \equiv t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2$ とする。 $\mathbf{x}^t \in S(f(\mathbf{x}))$, つまり $f(\mathbf{x}^t) \geq f(\mathbf{x})$ が示せればよい。

f が準凹関数であることから、

$$f(\mathbf{x}^t) \geq \min\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\}$$

が成り立つが、 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in S(f(\mathbf{x}))$ なので $f(\mathbf{x}^1) \geq f(\mathbf{x})$ かつ $f(\mathbf{x}^2) \geq f(\mathbf{x})$ である。すなわち $\min\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\} \geq f(\mathbf{x})$ となるので $f(\mathbf{x}^t) \geq f(\mathbf{x})$ が従う。 □

⇐ の証明. 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し、 $S(y) = \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}_+^n \mid f(\mathbf{x}') \geq y\}$ が凸集合だと仮定する。任意に $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}_+^n$ を選ぶ。一般性を失わず、

$$f(\mathbf{x}^1) \geq f(\mathbf{x}^2) \tag{1}$$

だとする。 $\mathbf{x}^2 \in S(f(\mathbf{x}^2))$ が成り立つことに注意すると、(1) より $\mathbf{x}^1 \in S(f(\mathbf{x}^2))$ も成り立つ。 $S(y)$ は任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し凸集合なので、 $S(f(\mathbf{x}^2))$ も凸集合である。よって任意の $t \in [0, 1]$ について、 $\mathbf{x}^t = t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2$ とすると $\mathbf{x}^t \in S(f(\mathbf{x}^2))$ となる。これは $f(\mathbf{x}^t) \geq f(\mathbf{x}^2)$ を意味するので $f(\mathbf{x}^t) \geq \min\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\}$ を得る。 □

^{*1} 一般に、 $a \leq A$ かつ $b \leq B$ が成り立つとき、 $\min\{a, b\} \leq \min\{A, B\}$ となります。チェックしてみてください。