演習ミクロ経済学 I　第 1 回

2017 年 4 月 12 日

定義の確認

定義 1 (厳密な選好・無差別関係)**.** X 上の選好 $\succsim$ に対し，厳密な選好 $\succ$ と無差別関係 $\sim$ は以下のように定義される．

$$\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2 \iff \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2 \iff \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

定義 2 (選好の完備性)**.** X 上の選好 $\succsim$ が完備性を満たす．
$\iff$ $\boxed{\qquad\quad}$ $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$ に対し，$\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ $\boxed{\qquad\quad}$ $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$ が成り立つ．

定義 3 (選好の推移性)**.** X 上の選好 $\succsim$ が推移性を満たす．
$\iff$ $\boxed{\qquad\quad}$ $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3 \in X$ に対し，$\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ かつ $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ ならば $\boxed{\qquad\quad}$ が成り立つ．

定義 4 (ユークリッド距離)**.** $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^n$ の間のユークリッド距離は以下のように定義される．

$$d(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

定義 5 (最大値距離)**.** $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^n$ の間の最大値距離は以下のように定義される．

$$d(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

- 1 次元の場合は絶対値も一つの距離概念である．
- 距離概念は基本的に何を使っても構わない．状況に応じて扱いやすいものを使うと良い．ただし，どの距離概念を使うかを証明の中で明記すること．

定義 6 (ε-開球体)**.** 集合 $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \boxed{\qquad\qquad\quad}\}$ を $\mathbf{x} \in S$ の ε 開球体という．

定義 7 (開集合)**.** 集合 S が開集合である．
$\iff$ $\boxed{\qquad\quad}$ $\mathbf{x} \in S$ に対し $\boxed{\quad\;}$ $\varepsilon > 0$ が存在して，$\boxed{\qquad\qquad}$ が成り立つ．

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\quad\quad}$ $\mathbf{x} \in S$ に対し $\boxed{\quad}$ $\varepsilon > 0$ が存在して， $\boxed{\quad\quad}$ $\mathbf{x}' \in B_\varepsilon(\mathbf{x})$ について $\mathbf{x}' \in S$ が成り立つ．

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\quad\quad}$ $\mathbf{x} \in S$ に対し $\boxed{\quad}$ $\varepsilon > 0$ が存在して，$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') < \varepsilon$ であるような $\boxed{\quad\quad}$ $\mathbf{x}' \in S$ について，$\mathbf{x}' \in S$ が成り立つ．

定義 8 (閉集合)**.** 集合 S が閉集合である．

$\Longleftrightarrow$ S の $\boxed{\quad\quad}$ が $\boxed{\quad\quad}$ である．

定義 9 (点列の収束)**.** 点列 $\{\mathbf{x}^k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\bar{x}$ に収束する．

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\quad\quad}$ $\varepsilon > 0$ に対し $\boxed{\quad}$ （十分大きな）番号 $\bar{k}$ が存在し， $\boxed{\quad\quad}$ $k \geqslant \bar{k}$ について $\boxed{\quad\quad\quad\quad}$ が成り立つ

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\quad\quad}$ $\varepsilon > 0$ に対し $\boxed{\quad}$ （十分大きな）番号 $\bar{k}$ が存在し， $\boxed{\quad\quad}$ $k \geqslant \bar{k}$ について $\boxed{\quad\quad\quad\quad}$ が成り立つ

定義 10 (閉集合その 2)**.** 集合 S が閉集合である．

$\Longleftrightarrow$ 任意の $k = 1, 2, \ldots$ について $\mathbf{x}^k \in S$ となり，$\bar{\mathbf{x}}$ に収束する $\boxed{\quad\quad}$ 点列 $\{\mathbf{x}^k\}_{k=1}^{\infty}$ について， $\boxed{\quad\quad}$ となる．

問題

問題 1. X 上の選好 $\succsim$ が推移性を満たすとき，任意の 3 つの消費計画 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3 \in X$ について，$\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$ かつ $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ ならば，$\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^3$ が成立することを示しなさい．

問題 2. $X \equiv \mathbb{R}^2_+$ とする．以下の X 上の選好が完備性と推移性を満たすかどうか答え，それを示しなさい．

(a) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff x^1_1 - x^1_2 \geqslant x^2_1 - x^2_2$

(b) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff x^1_1 x^1_2 \geqslant x^2_1 x^2_2$

(c) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff x^1_1 \geqslant x^2_1 \text{ and } x^1_2 \geqslant x^2_2$

(d) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff x^1_1 \geqslant x^2_1 \text{ or } x^1_2 \geqslant x^2_2$

(e) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff \min\{x^1_1, x^1_2\} \geqslant \min\{x^2_1, x^2_2\}$

(f) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff 2(x^1_1 + x^1_2) \geqslant x^2_1 + x^2_2$

問題 3. ユークリッド距離，最大値距離それぞれについて，$\mathbb{R}^2$ における $\mathbf{x} = (2, 2)$ の，$\varepsilon = 1$ に対する ε-開球体の形状を図示しなさい．

問題 4. 以下の集合が開集合か，閉集合か答え，根拠を示しなさい．

(a) $\mathbb{R}$ における集合 $S = [0, 1] \cup \{2\}$

(b) $\mathbb{R}$ における集合 $S = [0, 2)$

(c) $\mathbb{R}^n$ における集合 $\mathbb{R}^n_+$