ミクロ経済学I演習　第13回　解答

作成日｜2017年7月22日

問題 1

まずナッシュ均衡を考える．このゲームを利得表で表すと以下のようになる．最

	ℓ	r
IN,L	1,$\underline{3}$	0,0
IN,R	0,0	$\underline{3}$,$\underline{1}$
OUT,L	$\underline{2}$,$\underline{2}$	$\underline{2}$,$\underline{2}$
OUT,R	$\underline{2}$,$\underline{2}$	$\underline{2}$,$\underline{2}$

適反応は表中の下線で表している．よって純粋戦略ナッシュ均衡は ((OUT,L),ℓ), ((OUT,R),ℓ), ((IN,R),r) の三つである．

次に部分ゲーム完全均衡を考える．プレイヤー 1 が IN を選んだ後の部分ゲーム（仮に Γ' とする）を利得表で表すと，以下のようになる．．よってこの部分ゲームで

	ℓ	r
L	$\underline{1}$,$\underline{3}$	0,0
R	0,0	$\underline{3}$,$\underline{1}$

のナッシュ均衡は (L,ℓ), (R,r) である．

プレイヤー 1 による IN と OUT の選択から始まる部分ゲーム（元のゲーム全体）を考える．Γ' で (L,ℓ) が選ばれるとき，プレイヤー 1 の利得は IN を選べば 1，OUT を選べば 2 なのでここではプレイヤー 1 は OUT を選ぶ．よって一つの部分ゲーム完全均衡は ((OUT,L), ℓ) である．次に Γ' で (R,r) が選ばれるとき，プレイヤー 1 の利得は IN を選べば 3，OUT を選べば 2 なのでここではプレイヤー 1 は IN を選ぶ．よってもう一つの部分ゲーム完全均衡は ((IN,R),r) である．

問題 2

プレイヤー 1 が「続ける」を選んだ後の部分ゲームを考える．プレイヤー $i = 1, 2$ の申告する数を a_i と表す．この部分ゲームでのナッシュ均衡では a_1，a_2 とも正の数では有り得ない．一般性を失わず $a_1 > 0$ だとすると，任意の整数 $a_2 \geqslant 0$ について，$a_1(a_2+1) > a_1 a_2$ が成り立つことから最適な a_2 は存在しない．よってナッシュ均衡では $a_i = 0$ である．一方 $a_1 = a_2 = 0$ であれば，一人でどのような逸脱を行って

も利得が厳密に大きくなることは無い．したがってこの部分ゲームでの一意のナッシュ均衡は $a_1 = a_2 = 0$ である．

これを考慮してプレイヤー 1 の「辞める」か「続ける」かの選択を考える．辞める場合は利得 1，続ける場合は利得 0 になるので辞めるを選択する．したがってこのゲームの部分ゲーム完全均衡は ((辞める,0),0) である．

申告可能な整数に M という上限がある場合も ((辞める,0),0) は部分ゲーム完全均衡である．加えて，((続ける,M),M) も部分ゲーム完全均衡になる．プレイヤー 1 が続けるを選んだ後の部分ゲームを考える．ここで両者が M を選んでいるとき，両者の利得は M^2 である．申告可能などのような整数 $N \leqslant M$ に逸脱しても，得られる利得は $NM \leqslant M^2$ なので (M, M) はこの部分ゲームのナッシュ均衡である．更に，$M^2 > 1$ なのでプレイヤー 1 の「辞める」か「続ける」かの選択では「続ける」を選択する．

問題 3

(a) 経営者が x を提示し，労働者がそれを受諾した後の部分ゲームを考える．労働者の利得は努力すれば $10(1-x)-3$，努力しなければ $1-x$ である．よって労働者が努力するための条件は

$$10(1-x)-3 \geqslant 1-x \iff 9(1-x) \geqslant 3 \iff 1-x \geqslant \frac{1}{3}$$
$$\iff x \leqslant \frac{2}{3}$$

である．

次に経営者が x を提示し，労働者がそれを拒否した後の部分ゲームを考える．労働者の利得は努力すれば $1-3=-2$，努力しなければ $1/10$ である．よって拒否した場合 x によらず労働者は努力しない．

労働者の受諾と拒否の選択を考える．拒否した後は努力しないので利得は x によらず $1/10$ である．$x \leqslant 2/3$ を受諾した場合努力するので利得は $10(1-x)-3$ となる．よって $x \leqslant 2/3$ を受諾する条件は，

$$10(1-x)-3 \geqslant \frac{1}{10} \iff 10x \leqslant \frac{69}{10} \iff x \leqslant \frac{69}{100}$$

である．今 $x \leqslant 2/3$ なのでこれは常に満たされる．よって $x \leqslant 2/3$ なら受諾する．一方 $x > 2/3$ について考える．これを受諾した後は努力しないので利得は $1-x$ である．拒否すると利得は $1/10$ なので，$1-x \geqslant 1/10 \iff x \leqslant 9/10$ のとき受諾する．

まとめると，均衡での労働者の x に対する戦略は，

$$\begin{cases} x \leqslant 2/3 \text{ のとき受諾．受諾したなら努力，受諾しなかったなら努力しない} \\ 2/3 < x \leqslant 9/10 \text{ のとき受諾．受諾してもしなくても努力しない} \\ x > 9/10 \text{ のとき拒否．受諾してもしなくても努力しない} \end{cases} \tag{1}$$

である．これを所与として経営者の最適な x を求める．$x \leqslant 2/3$ を提示すると労働者は受諾して努力するので利得は $10x \leqslant 20/3$，$2/3 < x \leqslant 9/10$ を提示すると労働者は受諾して努力しないので利得は $x \in (2/3, 9/10]$，$x > 9/10$ を提示すると労働者は拒否して努力しないので利得は $9/10$．よって経営者にとって $x = 2/3$ を提示することが最適であり，これと (1) の組が部分ゲーム完全均衡である．

(b) 労働者が努力するかどうかを選択し，π だけの利益が発生したのを観察して経営者が x を提示した後の部分ゲームを考える．労働者が努力した場合 $\pi = 10$，努力しなかった場合 $\pi = 1$ である．労働者が要求を受諾すると利得 $\pi(1-x)$ を，拒否すると利得 $\pi/10$ を得る．よって，

$$\pi(1-x) \geqslant \frac{\pi}{10} \iff x \leqslant \frac{9}{10}$$

であれば（努力したかどうかによらず）労働者は要求を受諾する．これを考慮して経営者の要求 x を考える．$x > 9/10$ を要求すると労働者に拒否され，経営者の利得は $9\pi/10$ になる．一方 $x \leqslant 9/10$ であれば労働者は受諾し，経営者の利得は πx となる．$\pi x \leqslant 9\pi/10$ なので経営者は $x > 9/10$ を提示して労働者に拒否させるのが最適である．

労働者の努力の選択を考える．努力の有無によらず経営者は $x > 9/10$ を提示して労働者はそれを拒否することになるので，努力した場合の労働者の利得は 1，努力しない場合の労働者の利得は $1/10$ である．よって労働者は努力することが最適である．

したがって，このゲームの純粋戦略による部分ゲーム完全均衡は，((努力する，「努力したかどうかによらず $x \leqslant \frac{9}{10}$ なら受諾，$x > \frac{9}{10}$ なら拒否」)，常に $x > 9/10$）である．

(a) の場合の均衡経路上で得られる経営者と労働者の利得はそれぞれ $20/3$，$10/3 - 3 = 1/3$ である．(b) の場合の均衡経路上で得られる経営者と労働者の利得はそれぞれ 9，$1 - 3 = -2$ となる．

問題 4

相手がトリガー戦略に従うとして，任意の t 期目以降の部分ゲームを考える．

(i) **過去に (C,C) が実現し続けているとき**

自分もトリガー戦略を取った場合の割引利得の総和は,

$$5 + 5\delta + 5\delta^2 + \cdots = \frac{5}{1-\delta} \tag{2}$$

である．期には相手は C を選んでいるので，ここで逸脱して D を選ぶと t 期の利得は 7 である．以降相手はトリガー戦略に従い D を選び続ける．これに対しては自分も D を選び続けることで最大の利得を得られる ので，t 期に逸脱して得られる最大の割引利得の総和は,

◀ 相手が D であるときに C を選ぶとその期の利得は 0，D を選ぶと 1 である．しかも仮に C を選んでも相手が C に戻ってくることは無い.

$$7 + 1 \cdot \delta + 1 \cdot \delta^2 + \cdots = 7 + \frac{\delta}{1-\delta} \tag{3}$$

(2)⩾(3) となる条件を求めると,

$$\frac{5}{1-\delta} \geqslant 7 + \frac{\delta}{1-\delta} \iff 5 \geqslant 7(1-\delta) + \delta \iff \delta \geqslant \frac{1}{3}.$$

したがって $\delta \geqslant 1/3$ であればトリガー戦略はこの部分ゲームでのナッシュ均衡になる.

(ii) **過去に少なくとも一方が D を選んだことがあるとき**

相手がトリガー戦略に従うなら相手は D を選び続ける．自分もトリガー戦略に従うと割引利得の総和は,

$$1 + 1 \cdot \delta + 1 \cdot \delta^2 + \cdots = \frac{1}{1-\delta}$$

である．一方その期に逸脱して C を選んでも相手は D を選び続けるので，自分も D を選び続けることで最大利得が達成できる．よって最大で得られる割引利得の総和は,

$$0 + 1 \cdot \delta + 1 \cdot \delta^2 + \cdots = \frac{\delta}{1-\delta}$$

したがって δ の値によらずトリガー戦略に従うことが最適である.

(iii) **ゲーム全体での最適性**

1 期目に逸脱するかどうかは，(i) のケースと同様の条件によって判定できる．よって $\delta \geqslant 1/3$ のとき 1 期目にはトリガー戦略に従う.

まとめると，$\delta \geqslant 1/3$ のときトリガー戦略は部分ゲーム完全均衡になる.