ミクロ経済学I演習　第4回　解答

作成日｜ 2017 年 5 月 10 日

問題 1

(1) 支出最小化問題：

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2_+} \mathbf{px}$$
$$\text{s.t. } \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} \geqslant u$$

$u=0$ なら $\mathbf{x}=0$ が解である．以下では $u>0$ のときを考える．

解が内点になることの証明. 解が $\mathbf{x}^*=0$ であるとする．このとき $u(\mathbf{x}^*)=0<u$ となり，制約を満たさないので矛盾．

ある $i=1,2$ について $x_i^*=0$ であるとする．$\mathbf{x}=0$ は解ではないので $x_j^*>0$ でなければならない．また，$\mathbf{x}^*$ は解なので $u(\mathbf{x}^*)\geqslant \overline{u}$ を満たしている．ここで，$\mathbf{x}'$ を以下のように定義する．

$$x_i' = \varepsilon$$
$$x_j' = x_j^* - \frac{2p_i}{p_j}\varepsilon$$

$f(\varepsilon)\equiv u(x')-u(x^*)$ とすると，

$$f(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{x_2^*-\frac{2p_i}{p_j}\varepsilon}$$

と書ける．f を ε で微分すると，

$$f'(\varepsilon)=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}-\frac{2p_i}{p_j\sqrt{x_2^*-\frac{2p_i}{p_j}\varepsilon}}$$

$\varepsilon\to 0$ とすると，$f'(\varepsilon)\to+\infty>0$ となるので平均値の定理よりある $\varepsilon'\in(0,\varepsilon)$ が存在して，$f(\varepsilon)=f(0)+f'(\varepsilon)\varepsilon>0$ を満たす．よってこのような ε' に対して $u(x')>u(x^*)$ が成り立つ．さらに，

$$\mathbf{px}'=p_i\varepsilon+p_j\left(x_j^*-\frac{2p_i}{p_j}\varepsilon\right)=p_jx_j^*-p_i\varepsilon<p_jx^*=\mathbf{px}^*$$

となるので $\mathbf{x}^*$ が支出最小化の解であることに矛盾する．□

クーンタッカーの十分条件より，クーンタッカー条件を満たす x^* が解である．

ラグランジュ関数は,

$$L=-\mathbf{px}-\lambda(u-u(\mathbf{x}))$$

である．クーンタッカー条件は，

$$-p_i + \lambda^* \frac{1}{2\sqrt{x_i^*}} = 0, \text{for all } i = 1,2 \tag{1}$$

$$\lambda(u - u(\mathbf{x}^*)) = 0 \tag{2}$$

となる．(1) より，

◀ $x_i^* > 0$ に注意.

$$\lambda^* = 2p_i\sqrt{x_i^*} > 0$$

である．すると (2) より $u - u(\mathbf{x}^*) = 0$ が従う．さらに，

$$2p_1\sqrt{x_1^*} = \lambda^* = 2p_2\sqrt{x_2^*} \Rightarrow \sqrt{x_2^*} = \frac{p_1}{p_2}\sqrt{x_1^*}$$

$$\Rightarrow x_2^* = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1^* \tag{3}$$

となるのでこれを $u(\mathbf{x}^*) = u$ に代入して，

$$\sqrt{x_1^*} + \sqrt{x_2^*} = \sqrt{x_1^*} + \frac{p_1}{p_2}\sqrt{x_1^*} = u$$

$$\Longleftrightarrow \frac{p_2 + p_1}{p_2}\sqrt{x_1^*} = u$$

$$\Longleftrightarrow x_1^* = \left(\frac{p_2 u}{p_2 + p_1}\right)^2$$

(3) より，

$$x_2^* = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \left(\frac{p_2 u}{p_2 + p_1}\right)^2 = \left(\frac{p_1 u}{p_2 + p_1}\right)^2$$

となる．

(2) (3) の結果を $\mathbf{px}^*$ に代入して，支出関数 $e(\mathbf{p}, u)$ は

$$e(\mathbf{p}, u) = p_1\left(\frac{p_2 u}{p_2 + p_1}\right)^2 + p_2\left(\frac{p_1 u}{p_2 + p_1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{p_2} + \sqrt{p_1})\sqrt{p_1 p_2}u}{p_2 + p_1}\right)^2$$

問題 2

(a) (5) **証明.** $(\mathbf{p}, u)$ の下での支出最小化問題の解を $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u)$ とする．支出最小化問題の制約は $u(\mathbf{x}) \geqslant u$ なので $\mathbf{p}$ について不変である．よって価格が $t\mathbf{p}$ になっても制約は変わらない．するとこの下で $t(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$ を最小にする $\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u)$ に等しくなる．したがって支出関数は

$$e(t\mathbf{p}, u) = t\mathbf{p}\mathbf{x}^h(t\mathbf{p}, u) = t\mathbf{p}x^h(\mathbf{p}, u) = te(\mathbf{p}, u)$$

を満たすので $\mathbf{p}$ について 1 次同次である． □

(6) 証明. 任意に $\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1 \in \mathbb{R}^n_{++}$ を選び，$(\mathbf{p}^0, u)$，$(\mathbf{p}^1, u)$ の下での支出最小化の解をそれぞれ $\mathbf{x}^0$，$\mathbf{x}^1$ と表記すると，任意の $t \in [0,1]$ と $u(\mathbf{x}) \geqslant u$ を満たす任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{+}$ に対し，

◀ $\mathbf{x}^0$ と $\mathbf{x}^1$ がそれぞれ支出最小化の解であることの定義から．

$$e(\mathbf{p}^0, u) = \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0 \leqslant \mathbf{p}^0\mathbf{x}$$
$$e(\mathbf{p}^1, u) = \mathbf{p}^1\mathbf{x}^1 \leqslant \mathbf{p}^1\mathbf{x}$$

が成り立つ．$\mathbf{x}^*$ を $(t\mathbf{p}^0 + (1-t)\mathbf{p}^1, u)$ に対する支出最小化の解とすると，$u(\mathbf{x}^*) \geqslant u$ を満たす． よって上の 2 式から，

◀ $u(\mathbf{x}^*) \geqslant u$ のチェックは重要．$u(\mathbf{x}) \geqslant u$ を満たさない $\mathbf{x}$ については上記の関係は成り立つとは限らないので．

$$e(\mathbf{p}^0, u) = \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0 \leqslant \mathbf{p}^0\mathbf{x}^* \tag{4}$$
$$e(\mathbf{p}^1, u) = \mathbf{p}^1\mathbf{x}^1 \leqslant \mathbf{p}^1\mathbf{x}^* \tag{5}$$

が成り立つ．(4) の両辺を t 倍，(5) の両辺を $(1-t)$ 倍したものを足し合わせると，

$$\begin{aligned} te(\mathbf{p}^0, u) + (1-t)e(\mathbf{p}^1, u) \leqslant t\mathbf{p}^0\mathbf{x}^* + (1-t)\mathbf{p}^1\mathbf{x}^* &= \left(t\mathbf{p}^0 + (1-t)\mathbf{p}^1\right) x^* \\ &= e\left(t\mathbf{p}^0 + (1-t)\mathbf{p}^1, u\right) \end{aligned}$$

となる．したがって支出関数は凹関数である． □

(b) 支出関数

$$e(\mathbf{p}, u) = \left(\frac{(\sqrt{p_2} + \sqrt{p_1})\sqrt{p_1 p_2} u}{p_2 + p_1}\right)^2$$

について考える．任意の $t > 0$ について，支出関数に含まれる各財の価格を t 倍すると，全ての財の価格を $t > 0$ 倍すると，

$$\begin{aligned} e(t\mathbf{p}, u) &= \left(\frac{(\sqrt{tp_2} + \sqrt{tp_1})\sqrt{tp_1 tp_2} u}{tp_2 + tp_1}\right)^2 = \left(\frac{t^{3/2}(\sqrt{p_2} + \sqrt{p_1})\sqrt{p_1 p_2} u}{t(p_2 + p_1)}\right)^2 \\ &= t\left(\frac{(\sqrt{p_2} + \sqrt{p_1})\sqrt{p_1 p_2} u}{p_2 + p_1}\right)^2 = te(\mathbf{p}, u) \end{aligned}$$

となるので $e(\mathbf{p}, u)$ は $\mathbf{p}$ について 1 次同次．