演習ミクロ経済学 I　第 2 回　解答 *

2017 年 4 月 18 日

問題 1

(a) この効用関数は連続ではない．

証明. 距離概念として絶対値を用いる．$x = 1, \varepsilon = 1$ とする．任意に $\delta > 0$ を選ぶ．$x' = x + \frac{\delta}{2}$ とすると，

$$|x' - x| = \left| x + \frac{\delta}{2} - x \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

となるので，$x' \in B_\delta(x)$ である．一方，

$$|u(x') - u(x)| = \left| \left(x + \frac{\delta}{2} + 1 \right) - x \right| = \frac{\delta}{2} + 1 > 1 = \varepsilon$$

となるので，$u(x') \notin B_\varepsilon(u(x))$ である．したがって u は連続ではない．　□

(b) この効用が表す選好は連続である．

証明. まず u が厳密な増加関数であることを示す．任意に $x^1 < x^2$ を満たす x^1，$x^2 \in \mathbb{R}_+$ を選ぶ．$x^1 < x^2 \leqslant 1$，$x^1 \leqslant 1 < x^2$，$1 < x^1 \leqslant x^2$ の 3 ケースを考える．

(i) $x^1 < x^2 \leqslant 1$ のとき

u の定義から，$u(x^1) = x^1 < x^2 = u(x^2)$ となる．

(ii) $x^1 \leqslant 1 < x^2$ のとき

u の定義から，$u(x^1) = x^1 < x^2 + 1 = u(x^2)$ となる．

(iii) $1 < x^1 \leqslant x^2$ のとき

u の定義から，$u(x^1) = x^1 + 1 < x^2 + 1 = u(x^2)$ となる．

したがって u は厳密な増加関数である．

このことを使って選好が連続であることを示す．任意に $x^1 \in \mathbb{R}_+$ を選ぶ．u が選好を表すので，$x^1 \succsim x^2 \iff u(x^1) \geqslant u(x^2)$ である．u は厳密な増加関数なので，$u(x^1) \geqslant u(x^2)$ を満たす x^2 は $[x^1, +\infty)$ に含まれ，$u(x^1) \leqslant u(x^2)$ を満たす x^2 は $[0, x^1]$ に含まれる．すなわち，

* 間違いを見つけたら orihsamuk@gmail.com まで連絡してください．

$$\{x^2 \in \mathbb{R}_+ \mid x^1 \succsim x^2\} = [x^1, +\infty)$$
$$\{x^2 \in \mathbb{R}_+ \mid x^1 \precsim x^2\} = [0, x^1]$$

である．これらがいずれも $\mathbb{R}_+$ において閉集合であることを示せばよい．以下では距離概念として絶対値を用いる．

$[x^1, +\infty)$ が $\mathbb{R}_+$ において閉集合であることを示す．各 $k = 1, 2, \ldots$ について $x^k \in [x^1, +\infty)$ であり，$\bar{x} \in \mathbb{R}_+$ に収束する数列 $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ を任意に選ぶ．背理法の仮定として $\bar{x} \notin [x^1, +\infty)$ とする．これは $\bar{x} < x^1$ を意味する．$\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\bar{x}$ に収束することから，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 $\bar{k}$ が存在し，任意の $k \geqslant \bar{k}$ について $x^k \in B_\varepsilon(\bar{x})$ を満たす．$\varepsilon > 0$ は任意なので，$\varepsilon \equiv \frac{x^1 - \bar{x}}{2}$ とすると $x^k \in B_\varepsilon(\bar{x})$ より，

$$|x^k - \bar{x}| < \varepsilon \iff \bar{x} - \varepsilon < x^k < \bar{x} + \varepsilon \Rightarrow x^k < \bar{x} + \varepsilon = \frac{x^1 + \bar{x}}{2} < x^1$$

となり，$x^k \notin [x^1, +\infty)$ が成り立つが，これは $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ の作り方に矛盾する．

$[0, x^1]$ が $\mathbb{R}_+$ において閉集合であることを示す．各 $k = 1, 2, \ldots$ について $x^k \in [0, x^1]$ であり，$\bar{x} \in \mathbb{R}_+$ に収束する数列 $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ を任意に選ぶ．背理法の仮定として $\bar{x} \notin [0, x^1]$ とする．全体集合を $\mathbb{R}_+$ に限定していることから，これは $\bar{x} > x^1$ を意味する．$\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\bar{x}$ に収束することから，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 $\bar{k}$ が存在し，任意の $k \geqslant \bar{k}$ について $x^k \in B_\varepsilon(\bar{x})$ を満たす．$\varepsilon > 0$ は任意なので，$\varepsilon \equiv \frac{\bar{x} - x^1}{2}$ とすると $x^k \in B_\varepsilon(\bar{x})$ より，

$$|x^k - \bar{x}| < \varepsilon \iff \bar{x} - \varepsilon < x^k < \bar{x} + \varepsilon \Rightarrow x^k > \bar{x} - \varepsilon = \frac{x^1 + \bar{x}}{2} > x^1$$

となり，$x^k \notin [0, x^k]$ が成り立つが，これは $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ の作り方に矛盾する． □

問題 2

(1) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0 \iff x_1^1 x_2^1 \geqslant x_1^0 x_2^0$

強単調性：満たす

証明. $\mathbf{x}^1 > \mathbf{x}^0$，すなわち $x_1^1 \geqslant x_1^0$ かつ $x_2^1 \geqslant x_2^0$，$\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ を満たす $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}_+^2$ を任意に選ぶ．$x_1^1 = 0$ または $x_2^1 = 0$ のとき，$x_1^1 x_2^1 = x_1^0 x_2^0$ となり，$\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ が成り立つ．$x_1^1 > 0$ かつ $x_2^1 > 0$ のとき，$x_1^1 x_2^1 > x_1^0 x_2^0$ となり，$\mathbf{x}^1 \mathbf{x}^0$ が成り立つ．

次に $\mathbf{x}^1 \gg \mathbf{x}^0$，すなわち $x_1^1 > x_1^0$ かつ $x_2^1 > x_2^0$ を満たす $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^0$ を任意に選ぶ．このとき $x_1^1 x_2^1 > x_1^0 x_2^0$ が成り立つので $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ かつ $\mathbf{x}^0 \not\succsim \mathbf{x}^1$ となり，$\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$ が従う． □

強凸性：満たす

証明. $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ と $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ を満たす $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}_+^2$ と $t \in (0, 1)$ を任意に選ぶ．$\mathbf{x}^0$ と $\mathbf{x}^1$ を t により凸結合した消費プランを $\mathbf{x}^t$ と書くと，

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^t &= t\mathbf{x}^0 + (1-t)\mathbf{x}^1 = (tx_1^0, tx_2^0) + ((1-t)x_1^1, (1-t)x_2^1)\\ &= (tx_1^0 + (1-t)x_1^1, tx_2^0 + (1-t)x_2^1)\end{aligned}$$

となる．$t \in (0,1)$ より，$x_1^t > x_1^0$ かつ $x_2^t > x_2^0$ である．よって，$x_1^t x_2^t > x_1^0 x_2^0$ が成り立つので $\mathbf{x}^t \succsim \mathbf{x}^0$ かつ $\mathbf{x}^0 \not\succsim \mathbf{x}^t$，すなわち $\mathbf{x}^t \succ \mathbf{x}^0$ が従う． □

(2) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0 \iff x_1^1 - x_2^1 \geqslant x_1^0 - x_2^0$

強単調性：満たさない

証明. $\mathbf{x}^1 = (3,3)$, $\mathbf{x}^0 = (2,1)$ とすると，$\mathbf{x}^1 \gg \mathbf{x}^0$ である．しかし，

$$x_1^1 - x_2^1 = 0 < 1 = x_1^0 - x_2^0$$

より $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$ となるので，$\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^0$ を満たさない． □

強凸性：満たさない

証明. $\mathbf{x}^1 = (3,3)$, $\mathbf{x}^0 = (1,1)$，$t = 0.5$ とすると，$x_1^1 - x_2^1 > x_1^0 - x_2^0$ を満たすので $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ であり，当然 $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ である．ところが，$tx_1^1 + (1-t)x_1^0 = 2$，$tx_2^1 + (1-t)x_2^0 = 2$ なので

$$x_1^t - x_2^t = 2 - 2 = 0 = x_1^0 - x_2^0$$

となり，$\mathbf{x}^t \not\succsim \mathbf{x}^0$ が従う．よって $\mathbf{x}^t \succ \mathbf{x}^0$ は成り立たない． □

(3) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0 \iff \min\{x_1^1, x_2^1\} \geqslant \min\{x_1^0, x_2^0\}$

問題 3

この選好は局所非飽和を満たさない．

証明. $x^0 = 5$，$\varepsilon = 1$ とする．距離概念を絶対値とし，任意に $x^1 \in B_\varepsilon(x^0)$ を選ぶと，

$$|x^1 - x^0| < \varepsilon \iff x^0 - \varepsilon < x^1 < x^0 + \varepsilon \iff 4 < x^1 < 6$$

が成り立つ．すると，$u(x^1) \leqslant 0 = u(x^0)$ となる．u が選好を表現しているので，$u(x^1) \leqslant u(x^0) \iff x^1 \precsim x^0$ となり，局所非飽和を満たさない． □

問題 4

証明. 任意に $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}_+^2$ と $t \in [0,1]$ を選び，$\mathbf{x}^t \equiv tx_1 + (1-t)x_2$ と書くと，

$$f(\mathbf{x}^t) = \min\{x_1^t, x_2^t\} = \min\{tx_1^1 + (1-t)x_1^2, tx_2^1 + (1-t)x_2^2\}$$

である．一方，任意の $i = 1,2$ について $f(\mathbf{x}^i) = \min\{x_1^i, x_2^i\}$ が成り立つことから，

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}^i) \leqslant x_1^i \\ f(\mathbf{x}^i) \leqslant x_2^i \end{cases} \Rightarrow tf(\mathbf{x}^i) + (1-t)f(\mathbf{x}^i) = f(\mathbf{x}^i) \leqslant tx_1^i + (1-t)x_2^i$$

となる．よって

$$\min\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\} \leqslant \min\{tx_1^1 + (1-t)x_2^1, tx_1^2 + (1-t)x_2^2\}$$

が成り立つ[*1]．したがって，

$$f(\mathbf{x}^t) = \min\{tx_1^1 + (1-t)x_2^1, tx_1^2 + (1-t)x_2^2\} \geqslant \min\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\}$$

を得る． □

問題 5

⇒ の証明． f が準凹関数であると仮定し，集合 $S(y)$ を

$$S(y) \equiv \{x' \in \mathbb{R}_+^2 \mid f(\mathbf{x}') \geqslant y\}$$

と定義する．任意に $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2$ を選び，$\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2 \in S(f(\mathbf{x}))$ と $t \in [0,1]$ を任意にとる．$\mathbf{x}^t \equiv t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2$ とする．$\mathbf{x}^t \in S(f(\mathbf{x}))$，つまり $f(\mathbf{x}^t) \geqslant f(\mathbf{x})$ が示せればよい．

f が準凹関数であることから，

$$f(\mathbf{x}^t) \geqslant \min\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\}$$

が成り立つが，$\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2 \in S(f(\mathbf{x}))$ なので $f(\mathbf{x}^1) \geqslant f(\mathbf{x})$ かつ $f(\mathbf{x}^2) \geqslant f(\mathbf{x})$ である．すなわち $\min\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\} \geqslant f(\mathbf{x})$ となるので $f(\mathbf{x}^t) \geqslant f(\mathbf{x})$ が従う． □

⇐ の証明． 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し，$S(y) = \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}_+^n \mid f(\mathbf{x}') \geqslant y\}$ が凸集合だと仮定する．任意に $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}_+^n$ を選ぶ．一般性を失わず，

$$f(\mathbf{x}^1) \geqslant f(\mathbf{x}^2) \tag{1}$$

だとする．$\mathbf{x}^2 \in S(f(\mathbf{x}^2))$ が成り立つことに注意すると，(1) より $\mathbf{x}^1 \in S(f(\mathbf{x}^2))$ も成り立つ．$S(y)$ は任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し凸集合なので，$S(f(\mathbf{x}^2))$ も凸集合である．よって任意の $t \in [0,1]$ について，$\mathbf{x}^t = t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2$ とすると $\mathbf{x}^t \in S(f(\mathbf{x}^2))$ となる．これは $f(\mathbf{x}^t) \geqslant f(\mathbf{x}^2)$ を意味するので $f(\mathbf{x}^t) \geqslant \min\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\}$ を得る． □

[*1] 一般に，$a \leqslant A$ かつ $b \leqslant B$ が成り立つとき，$\min\{a,b\} \leqslant \min\{A,B\}$ となります．チェックしてみてください．