演習ミクロ経済学 I　第 3 回 *

2017 年 4 月 26 日

例題

次の効用最大化問題を考える．ただし $\mathbf{p} \gg 0$ である．

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2_+} u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$
$$\text{s.t.}\ \ \mathbf{px} \leqslant y$$

(1) $u(x_1, x_2)$ が狭義準凹関数であることを確認しなさい．
- u が 2 回連続微分可能なら，縁付きヘシアンの符号を調べる．

(2) $y > 0$ のとき，この問題の解が内点解になることを確認しなさい．
- 内点解でないと仮定して，矛盾を導くのが基本．

(3) この問題の解を求めなさい．
- クーンタッカー条件を満たすものが解であるとは常には保証されないことに注意．

(4) 間接効用関数を求めなさい．

問題

次の効用最大化問題を考える．ただし $\mathbf{p} \gg 0$ であり，各 $i = 1, 2$ について $y > p_i$ とする．

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2_+} u(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_1 x_2$$
$$\text{s.t.}\ \ \mathbf{px} \leqslant y$$

(1) $u(\mathbf{x})$ が（狭義）準凹関数であることを確認しなさい．

(2) この問題の解が内点解になることを確認しなさい．

(3) この問題の解を求めなさい．

(4) 間接効用関数を求めなさい．

---

* 講義ホームページ：http://k-kumashiro.github.io/website/KobeU_microex2017.html

補足

定理 1 (ロルの定理)**.** $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を閉区間 $[a,b]$, $a < b$ で定義された連続関数で，開区間 (a,b) で微分可能とする．もし，$f(a) = f(b) = K$ であれば，ある $c \in (a,b)$ が存在して，$f'(c) = 0$ が成立する．

証明. f は $[a,b]$ で連続なので，ワイエルシュトラスの定理より f は最大値 M と最小値 L を持つ．したがって $M \geqslant K \geqslant L$ である．

(i) $K < M = f(c_1)$ のとき
$K = f(a) = f(b)$ なので $c_1 \in (a,b)$ である．さらに $c_1 \pm h$ を満たす $h > 0$ に対して，

$$\frac{f(c_1 + h) - f(c_1)}{h} \leqslant 0 \text{ かつ } \frac{f(c_1 - h) - f(c_1)}{-h} \geqslant 0$$

である．これらの左辺の $h \to 0$ の極限は一致し，$f'(c_1) = 0$ である．この c_1 が求める実数 c である．

(ii) $K > L = f(c_2)$ のとき
同様にして $f'(c_2) = 0$ が得られるので c_2 が求める実数 c である．

(iii) $K = M = L$ のとき
どの $x \in (a,b)$ に対しても $f'(x) = 0$ である．

□

定理 2 (平均値の定理)**.** $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を閉区間 $[a,b]$, $a < b$ で定義された連続関数で，開区間 (a,b) で微分可能とすれば，ある点 $c \in (a,b)$ が存在して，

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成立する．

証明. $F(x) = f(b) - f(x) - k(b - x)$ と定義する．ここで $k \equiv [f(b) - f(a)]/(b - a)$ とする．このとき，$F(a) = F(b) = 0$ かつ $F(x)$ は開区間 (a,b) で微分可能である．$F'(x) = -f'(x) + k$ であることに注意せよ．ロルの定理より，ある実数 $c \in (a,b)$ が存在して，$F'(c) = -f'(c) + k = 0$, すなわち $f'(c) = k$ が成り立つ． □

参考文献

- 入谷純 (2006),『基礎からの経済数学』，有斐閣