演習ミクロ経済学 I　第 6 回 *

2017 年 5 月 24 日

CES 関数

- 2 変数の CES 関数 $f\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ は以下のように定義される．

$$f(\mathbf{x}) = (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

  ただし $0 \neq \rho < 1$ である．
- CES 関数には以下のような性質がある．
  (a) $\lim_{\rho\to 1} f(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$
  (b) $\lim_{\rho\to 0} f(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$
  (c) $\lim_{\rho\to -\infty} f(\mathbf{x}) = \min\{x_1, x_2\}$
  つまり，CES 関数は線形，コブダグラス型，レオンチェフ型の生産関数を特殊ケースとして含んでいる．
- 生産要素 1 に対す生産要素 2 の代替の弾力性 σ_{12} は以下のように定義される．

$$\sigma_{12}(\mathbf{x}) \equiv \left(\frac{d \ln \mathrm{MRTS}_{12}(\mathbf{x})}{d \ln r}\right)^{-1}$$

  ただし $r = \frac{x_2}{x_1}$．CES 関数では代替の弾力性は $\frac{1}{1-\rho}$ で一定になる．

問題

問題 1. 1 次同次の生産関数 $f\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ について以下の問に答えなさい．

(a) 任意の i について $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ がゼロ次同次であることを示しなさい．
(b) $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = f$ となることを示しなさい．

問題 2. CES 関数について，

* 講義ホームページ：http://k-kumashiro.github.io/website/KobeU_microex2017.html

(i) 代替の弾力性が $\frac{1}{1-\rho}$ になることを示しなさい．

(ii) 以下の性質が成り立つことを示しなさい．ただし $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ とする．（ヒント：(b) と (c) は対数による変換とロピタルの定理を使うとよい．）

(a) $\lim_{\rho\to 1} f(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$

(b) $\lim_{\rho\to 0} f(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$

(c) $\lim_{\rho\to -\infty} f(\mathbf{x}) = \min\{x_1, x_2\}$

問題 3. 生産関数 $f(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ を持つ企業の費用関数を求めなさい．ただし $0 \neq \rho < 1$, $y > 0$ とする．

補足

定理 1 (ロピタルの定理 I)**.** $f(x)$, $g(x)$ が区間 (a,b), $a < b$ において微分可能で，$[a,b]$ で連続，かつ $c \in [a,b]$, $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ さらに $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する．

定理 2 (ロピタルの定理 II)**.** f, g は区間 (a,b), $a < b$ で微分可能，$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$ であるとする．このとき，$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば,

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する．

つまり，極限が $\frac{0}{0}$ や $\frac{\pm\infty}{+\infty}$，$\frac{-\infty}{-\infty}$ といった不定形になる場合，極限をとる変数で分子と分母をそれぞれ微分[*1]してから分数全体の極限をとることで極限が求められる場合があるという事である．例えば,

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

の $x \to 0$ の極限は，このままでは $\frac{0}{0}$ の不定形になるが，分子と分母をそれぞれ x で微分したものの比

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1}$$

の $x \to 0$ の極限は 1 となり，これが元の $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ の極限と一致している．

[*1] 分数全体を商の微分として微分するのではなく，分子と分母を別箇に微分すればよい．