演習ミクロ経済学 I　第 5 回 *

2017 年 5 月 17 日

双対性

効用最大化と支出最小化の解がともに一意に存在し，

$\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$	マーシャルの需要関数
$v(\mathbf{p}, y)$	間接効用関数
$\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u)$	補償需要関数
$e(\mathbf{p}, u)$	支出関数

とするとき，（いくらかの仮定の下）以下が成立する．

(1) $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \boxed{}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$

(2) $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = \boxed{}$

(3) $e(\mathbf{p}, \boxed{}) = y$

(4) $\mathbf{x}(\mathbf{p}, \boxed{}) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u)$

(5) $\dfrac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial \boxed{}} = x_i^h(\mathbf{p}, u)$ （シェパードの補題）

(6) $x_i(\mathbf{p}, y) = -\dfrac{\partial v(\mathbf{p}, y)/\partial \boxed{}}{\partial v(\mathbf{p}, y)/\partial \boxed{}}$ （ロワの恒等式）

例題　間接効用関数が以下のように与えられるとき，支出関数および財 i の補償需要関数とマーシャルの需要関数を求めなさい．

$$v(\mathbf{p}, y) = \frac{y}{2\sqrt{p_1 p_2}}$$

支出関数

$v(\mathbf{p}, \boxed{}) = u$ より，

* 講義ホームページ：http://k-kumashiro.github.io/website/KobeU_microex2017.html

$$v(\mathbf{p}, \boxed{}) = \frac{e(\mathbf{p},u)}{2\sqrt{p_1p_2}} = u \Rightarrow e(\mathbf{p},u) = 2u\sqrt{p_1p_2}$$

補償需要関数

シェパードの補題より，

$$x_i^h(\mathbf{p},u) = \frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i} = u\sqrt{\frac{p_j}{p_i}}$$

マーシャルの需要関数

$x_i^h(\mathbf{p}, \boxed{}) = x_i(\mathbf{p},y)$ より，[*1]

$$x_i(\mathbf{p},y) = v(\mathbf{p},y)\sqrt{\frac{p_j}{p_i}} = \frac{y}{2\sqrt{p_ip_j}}\sqrt{\frac{p_j}{p_i}} = \frac{y}{2p_i}$$

スルツキー方程式

財 1 の価格変化による財 i の需要量の変化は以下のように分解できる．

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{p},y)}{\partial p_1} = \underbrace{\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p},v(\mathbf{p},y))}{\partial p_1}}_{\text{代替効果}} \underbrace{-\frac{\partial x_i(\mathbf{p},y)}{\partial y}x_1(\mathbf{p},y)}_{\text{所得効果}}$$

問題

問題 1. 間接効用関数が以下のように与えられるとき，支出関数，補償需要関数，マーシャルの需要関数を求めなさい．

(a) $v(\mathbf{p},y) = \sqrt{y\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)}$

(b) $v(\mathbf{p},y) = \frac{y}{\alpha_1p_1+\alpha_2p_2}$

問題 2. 支出関数が以下のように与えられるとき，間接効用関数，補償需要関数，マーシャルの需要関数を求めなさい．

(a) $e(\mathbf{p},u) = u\sqrt{p_1p_2}$

(b) $e(\mathbf{p},u) = \frac{u^2}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}$

問題 3. 支出関数が以下のように与えられるとき，財 1 の価格の変化による各財の需要量の変化の代替効果と所得効果を求めなさい．

$$e(\mathbf{p},u) = \frac{3u}{2^{2/3}}p_1^{1/3}p_2^{2/3}$$

[*1] ロワの恒等式を用いても可．