ミクロ経済学I演習　第14回　解答

作成日｜2017年7月25日

問題 1

証明. $y_i > 0$ を入札して負けた場合は $y_i = 0$ を入札した場合と同じく利得は 0 である．一方で $y_i > 0$ を入札して勝った場合，利得は $v_i - y_i < 0$ となり，$y_i = 0$ を入札した場合よりも利得は低くなる．よって $v_i = 0$ の入札者にとって $y_i = 0$ は弱支配戦略である． □

問題 2

証明. β は均衡戦略なので他の入札者は β に従って入札する．よって $y_i > \beta(\overline{v})$ を入札すれば確実に i は勝つことができる．しかしこのときの利得は $v_i - y_i < 0$ である．入札額を $y_i' \in [\beta(\overline{v}), y_i)$ に変えることで利得を $v_i - y_i' > v_i - y_i$ に上げることができる．したがって $y_i > \beta(\overline{v})$ を入札することは最適ではない． □

問題 3

証明. $y_i < v_i$ としたときの利得を考える．$y_j < y_i$ のとき，利得は $v_i - y_j$ である．また $y_j > v_i$ のとき，利得は 0 である．これら二つのケースは $y_i = v_i$ という入札をしたときも変わらない．$y_i < y_j < v_i$ のとき，利得は 0 である．一方 $y_i = v_i$ という入札をすれば利得は $v_i - y_j > 0$ となる．したがって y_j が何であっても v_i を入札することで利得は同じかより大きくなる．

$y_i > v_i$ としたときの利得を考える．$y_j < v_i$ のとき，利得は $v_i - y_j$ である．また $y_j > y_i$ のとき，利得は 0 である．これら二つのケースは $y_i = v_i$ という入札をしたときも変わらない．$v_i < y_j < y_i$ のとき，利得は $v_i - y_j < 0$ である．一方 $y_i = v_i$ という入札をすれば利得は 0 となる．したがって y_j が何であっても v_i を入札することで利得は同じかより大きくなる．

以上より，v_i を入札することがどの入札者にとっても弱支配戦略となるため，$b(v_i) = v_i$ が弱支配戦略均衡である． □

問題 4

(a) 均衡での戦略を $b\colon [0,\bar{v}] \to \mathbb{R}_+$ と書く．入札者 j がこれに従うことを所与として，入札者 i が $y \in \mathbb{R}_+$ を入札したときの期待効用 π_i は，

$$\pi_i = \Pr[y \geqslant b(v_j)](v_i - y) = \Pr[b^{-1}(y) \geqslant v_j](v_i - y) = F(b^{-1}(y))(v_i - y)$$

と書ける．y に関する一階条件より，

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_i}{dy} &= f(b^{-1}(y))\frac{1}{b'(b^{-1}(y))}(v_i - y) - F(b^{-1}(y)) = 0 \\ \iff b'(b^{-1}(y))F(b^{-1}(y)) &+ yf(b^{-1}(y)) = f(b^{-1}(y))v_i \end{aligned}$$

を得る．対称均衡では $y = b(v_i)$ であり，すなわち $b^{-1}(y) = v_i$ なので，

$$b'(v_i)F(v_i) + b(v_i)f(v_i) = f(v_i)v_i$$

と書き換えられる． この左辺は $b(v_i)F(v_i)$ の v_i での微分なので，

◀ この部分の議論はあくまでもこのような推測をしているに過ぎない．より厳密には相手が b に従うことを所与として $y = b(v_i)$ とするのが最適であることを示す必要がある．

$$\frac{d}{dv_i}(b(v_i)F(v_i)) = f(v_i)v_i$$

と書ける．両辺を積分すると，

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{d}{dv_i}(b(v_i)F(v_i))dv_i &= \int_0^x v_i f(v_i)dv_i \\ \Rightarrow b(x)F(x) - b(0)F(0) &= \int_0^x v_i f(v_i)dv_i \end{aligned}$$

となる．$b(0) = 0$ なので，結局

$$b(x) = \frac{1}{F(x)}\int_0^x v_i f(v_i)dv_i$$

を得る．

(b) 均衡での戦略を $b\colon [0,\bar{v}] \to \mathbb{R}_+$ と書く．入札者 j がこれに従うことを所与として，入札者 i が $y \in \mathbb{R}_+$ を入札したときの期待効用 π_i は，

$$\pi_i = \Pr[y \geqslant b(v_j)]v_i - y = \Pr[b^{-1}(y) \geqslant v_j]v_i - y = F(b^{-1}(y))v_i - y$$

と書ける．y に関する一階条件より，

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_i}{dy} &= f(b^{-1}(y))\frac{1}{b'(b^{-1}(y))}v_i - 1 = 0 \\ \iff b'(b^{-1}(y)) &= f(b^{-1}(y))v_i \end{aligned}$$

を得る．対称均衡の仮定より $b^{-1}(y) = v_i$ と書き換えると，

$$b'(v_i) = f(v_i)v_i$$

となるので両辺を v_i で積分すると，

$$\begin{aligned}\int_0^x b'(v_i)dv_i &= \int_0^x f(v_i)v_i dv_i \\ \Rightarrow b(x) - b(0) &= \int_0^x f(v_i)v_i dv_i \\ \Rightarrow b(x) &= \int_0^x f(v_i)v_i dv_i\end{aligned}$$

を得る．

(c) 均衡での戦略を $b\colon [0, \overline{v}] \to \mathbb{R}_+$ と書く．入札者 j がこれに従うことを所与として，入札者 i が $y \in \mathbb{R}_+$ を入札したときの期待効用 π_i は，

$$\begin{aligned}\pi_i &= \Pr[y \geqslant b(v_j)]v_i + \Pr[y < b(v_j)]y = F(b^{-1}(y))v_i - \left[1 - F(b^{-1}(y))\right]y \\ &= F(b^{-1}(y))(v_i + y) - y\end{aligned}$$

と書ける．y に関する一階条件より，

$$\begin{aligned}&\frac{d\pi_i}{dy} = f(b^{-1}(y))\frac{1}{b'(b^{-1}(y))}(v_i + y) + F(b^{-1}(y)) - 1 = 0 \\ \iff & b'(b^{-1}(y))\left[1 - F(b^{-1}(y))\right] - f(b^{-1}(y))y = v_i f(b^{-1}(y)) \\ \iff & b'(b^{-1}(y)) - b'(b^{-1}(y))F(b^{-1}(y)) - yf(b^{-1}(y)) = v_i f(b^{-1}(y))\end{aligned}$$

対称均衡の仮定より $y = b(v_i)$，$b^{-1}(y) = v_i$ と書き換えると，

$$\begin{aligned}& b'(v_i) - b'(v_i)F(v_i) - b(v_i)f(v_i) = v_i f(v_i) \\ \iff & b'(v_i) - \frac{d}{dv_i}\left[b(v_i)F(v_i)\right] = v_i f(v_i)\end{aligned}$$

両辺を v_i で積分して $b(0) = 0$ を用いると，

$$\begin{aligned}&\int_0^x b'(v_i)dv_i - \int_0^x \frac{d}{dv_i}\left[b(v_i)F(v_i)\right]dv_i = \int_0^x v_i f(v_i)dv_i \\ \Rightarrow & b(x) - b(0) - b(x)F(x) - b(0)F(0) = \int_0^x v_i f(v_i)dv_i \\ \Rightarrow & b(x) = \frac{\int_0^x v_i f(v_i)dv_i}{1 - F(x)}\end{aligned}$$

を得る．

問題 5

均衡での戦略を $b\colon [0,\overline{v}] \to \mathbb{R}_+$ と書く．入札者 j がこれに従うことを所与として，入札者 i が $y \in \mathbb{R}_+$ を入札したときの期待効用 π_i は，

$$\pi_i = \Pr[y \geqslant b(v_j)]u(v_i - y) = F(b^{-1}(y))u(v_i - y)$$

と書ける．y に関する一階条件より，

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi_i}{dy} &= f(b^{-1}(y))\frac{1}{b'(b^{-1}(y))}u(v_i - y) - F(b^{-1}(y))u'(v_i - y) = 0 \\
\iff b'(b^{-1}(y)) &= \frac{u(v_i - y)f(b^{-1}(y))}{u'(v_i - y)F(b^{-1}(y))}
\end{aligned}$$

対称均衡の仮定より，$y = b(v_i)$，$b^{-1}(y) = v_i$ を代入すると，

$$b'(v_i) = \frac{u(v_i - b(v_i))f(v_i)}{u'(v_i - b(v_i))F(v_i)}$$

今，$u(z) = z^\alpha$ なので，

$$\begin{aligned}
b'(v_i) &= \frac{(v_i - b(v_i))^\alpha f(v_i)}{\alpha(v_i - b(v_i))^{\alpha-1}F(v_i)} = \frac{(v_i - b(v_i))f(v_i)}{\alpha F(v_i)} \\
\iff b'(v_i)F(v_i) + \frac{1}{\alpha}b(v_i)f(v_i) &= \frac{1}{\alpha}v_i f(v_i)
\end{aligned}$$

となる．ここで，両辺に $F(v)^{\frac{1}{\alpha}-1}$ をかけて $F_\alpha(v_i) \equiv F(v_i)^{\frac{1}{\alpha}}$，$f_\alpha(v_i) \equiv \frac{1}{\alpha}F(v_i)^{\frac{1}{\alpha}-1}f(v_i)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
b'(v_i)F(v_i)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha}b(v_i)f(v_i)F(v_i)^{\frac{1}{\alpha}-1} &= \frac{1}{\alpha}v_i f(v_i)F(v_i)^{\frac{1}{\alpha}-1} \\
\iff \frac{d}{dv_i}b(v_i)F(v_i)^{\frac{1}{\alpha}} &= \frac{1}{\alpha}v_i f(v_i)F(v_i)^{\frac{1}{\alpha}-1} \\
\iff \frac{d}{dv_i}\left(b(v_i)F_\alpha(v_i)\right) &= v_i f_\alpha(v_i)
\end{aligned}$$

となる．両辺を v_i で積分して，

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{d}{dv_i}\left(b(v_i)F_\alpha(v_i)\right)dv_i &= \int_0^x v_i f_\alpha(v_i)dv_i \\
\Rightarrow b(x)F_\alpha(x) - b(0)F_\alpha(0) &= \int_0^x v_i f_\alpha(v_i)dv_i
\end{aligned}$$

$b(0) = 0$ であることに注意すると，

$$b(x) = \frac{1}{F_\alpha}\int_0^x v_i f_\alpha(v_i)dv_i$$

を得る．