# ミクロ経済学I演習　第7回　解答

作成日｜2017 年 6 月 1 日

## 問題 1

(a) **証明.** $\mathbf{x}^0 \geqslant \mathbf{x}^1$ を満たす $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^2_+$ を任意に選ぶ．このとき任意の $i = 1, 2$ について $x_i^0 \geqslant x_i^1$ が成り立っているので，

$$u(\mathbf{x}^0) = x_1^0 x_2^0 \geqslant x_1^1 x_2^1 = u(\mathbf{x}^1)$$

である．$u$ は選好 $\succsim$ を表現するので，$\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$ が従う．次に $\mathbf{x}^0 \gg \mathbf{x}^1$ である $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^2_+$ を任意に選ぶと，$i = 1, 2$ について $x_i^0 > x_i^1$ なので $x^0 \gg 0$ であるから $u(\mathbf{x}^0) > u(\mathbf{x}^1)$，すなわち $u(\mathbf{x}^0) \geqslant u(\mathbf{x}^1)$ かつ $u(\mathbf{x}^1) \ngeqslant u(\mathbf{x}^0)$ となる．よって $\mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}^1$ が従う．□

(b) ここでは予算集合を $\mathcal{B} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2_+ \mid \mathbf{px} \leqslant y\}$ で表す．

**予算集合が非空であることの証明.** $\mathbf{x} = \left(\frac{y}{p_1}, \frac{y}{p_2}\right)$ とすると，$\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ であるから $\mathcal{B}$ は非空である．□

**予算集合が有界であることの証明.** $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$ とする．$\underline{p} \equiv \min_i p_i$ と書き，$\varepsilon \equiv \frac{2I}{\underline{p}}$ と定義する． $\mathbf{x}^1 \in \mathcal{B}$ を任意に選ぶと，

◀ なぜこのような $\varepsilon$ の作り方をすれば上手くいくのか，図を描いて確認してみてください．

$$I \geqslant \mathbf{px}^1 \geqslant p_i x_i^1 \geqslant \underline{p} x_i^1 \iff x_i^1 \leqslant \frac{I}{\underline{p}}$$

が任意の $i = 1, 2$ に対し成り立つ．距離概念として最大値距離を用いると，

$$d(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^0) = \max_i |x_i^1 - x_i^0| = \max_i x_i^1 \leqslant \frac{I}{\underline{p}} < \frac{2I}{\underline{p}} = \varepsilon$$

となる．したがって $\mathcal{B}$ は有界である．□

**予算集合が閉集合であることの証明.** 各 $k = 1, 2, \ldots$ について $\mathbf{x}^k \in \mathcal{B}$ であり，$\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ に収束する点列 $\{\mathbf{x}^k\}_{k=1}^{\infty}$ を任意に選ぶと，任意の $\varepsilon > 0$ に対し十分大きな番号 $\bar{k}$ が存在して，任意の $k \geqslant \bar{k}$ について $d(\mathbf{x}^k, \bar{\mathbf{x}}) < \varepsilon$ が成り立つ．距離概念として最大値距離を用いると，

$$d(\mathbf{x}^k, \bar{\mathbf{x}}) = \max_i \{|x_i^k - x_i|\} < \varepsilon$$

と書ける．すると任意の $i$ について，

$$\begin{aligned} & |x_i^k - \bar{x}_i| < \varepsilon \\ \iff & \bar{x}_i - \varepsilon < x_i^k < \bar{x}_i + \varepsilon \end{aligned} \tag{1}$$

が成り立つ．$\bar{\mathbf{x}} \notin \mathcal{B}$ だと仮定し，場合分けをして考える．

(i) $\bar{\mathbf{x}} > 0$ のとき

$\bar{\mathbf{x}} \notin \mathcal{B}$ かつ $\bar{\mathbf{x}} > 0$ なので $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} > y$ が成り立っている．$\varepsilon \equiv \frac{\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} - y}{2(p_1+p_2)}$ と定義する．$\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} > y$ なので $\varepsilon > 0$ である．(1) より，任意の $i$ について

$$p_i x_i^k > p_i \bar{x}_i - p_i \varepsilon$$

が成り立つので，

$$\mathbf{p}\mathbf{x}^k > \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} - (p_1 + p_2)\varepsilon = \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} - y}{2} = \frac{y + \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}}{2} > \frac{y + y}{2} = y$$

となり，$\mathbf{x}^k \in \mathcal{B}$ に矛盾する．

(ii) $\bar{x} < 0$ のとき

少なくとも一方の $i$ について $\bar{x}_i < 0$ である．この $i$ に対し $\varepsilon = -\frac{\bar{x}_i}{2}$ と定義すると $\varepsilon > 0$ である．(1) より，

$$x_i^k < \bar{x}_i + \varepsilon = \bar{x}_i - \frac{\bar{x}_i}{2} = \frac{\bar{x}_i}{2} < 0$$

となり，$\mathbf{x}^k \in \mathcal{B}$ に矛盾する．

□

$u(x)$ が連続であることの証明． 距離概念として最大値距離を用いる．任意に $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}_+^2$ と $\varepsilon > 0$ を選ぶ．$\mathbf{x} = 0$ のとき，$\delta \equiv \sqrt{\varepsilon}$ と定義する．任意に $\mathbf{x}^1 \in B_\delta(\mathbf{x}^0) \cap \mathbb{R}_+^2$ を選ぶと任意の $i = 1, 2$ について，

$$|x_i^1 - x_i^0| = |x_i^1| < \delta \Rightarrow 0 \leqslant x_i^1 < \delta$$

が成り立つ．よって

$$0 \leqslant x_1^1 x_2^1 < \delta^2 = \varepsilon$$

すなわち $|u(\mathbf{x}^1) - u(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon$ となる．

以下，$\mathbf{x}^0 \neq 0$ のときを考える．

$$\delta_1 \equiv \frac{\varepsilon}{x_1^0 + x_2^0}$$
$$\delta_2 \equiv \min\left\{\frac{\varepsilon}{2(x_1^0 + x_2^0)}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}$$
$$\delta \equiv \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

と定義し，$\mathbf{x}^1 \in B_\delta(\mathbf{x}^0) \cap \mathbb{R}_+^2$ を任意に選ぶと，任意の $i = 1, 2$ に対して

◀ $\delta$ の作り方がややテクニカルですが，これはこの後の過程から逆算して定義しています．知っておくと便利な方法です．

$$x_i^0 - \delta < x_i^1 < x_i^0 + \delta$$

が成立する．よって，

$$x_1^1 x_2^1 > (x_1^0 - \delta)(x_2^0 - \delta) = x_1^0 x_2^0 - \delta(x_1^0 + x_2^0) + \delta^2 > x_1^0 x_2^0 - \delta(x_1^0 + x_2^0)$$
$$\geqslant x_1^0 x_2^0 - \delta_1(x_1^0 + x_2^0) = x_1^0 x_2^0 - \varepsilon$$

が成り立つ．

一方で

$$
\begin{aligned}
x_1^1x_2^1 &< (x_1^0+\delta)(x_2^0+\delta) = x_1^0x_2^0 + \delta(x_1^0+x_2^0) + (\delta)^2 \\
&\leqslant x_1^0x_2^0 + \delta_2(x_1^0+x_2^0) + (\delta_2)^2 = x_1^0x_2^0 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = x_1^0x_2^0 + \varepsilon
\end{aligned}
$$

であるから，$|u(\mathbf{x}^1) - u(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon$ となる． □

したがって，解の候補を含む予算集合がコンパクトで，かつその上で定義される効用関数が連続なのでワイエルシュトラスの定理よりこの問題に解は存在する．

(c) 証明. $\mathbf{x}^*$ が解であり，ある $i=1,2$ が存在して $x_i^*=0$ だとする．このとき $u(\mathbf{x}^*)=0$ である．これに対し $\mathbf{x}' = \left(\frac{y}{p_1}, \frac{y}{p_2}\right)$ と定義すると，

$$
\mathbf{px}' = p_1\frac{y}{p_1} + p_2\frac{y}{p_2} = y
$$

となるので $\mathbf{x}'$ は予算制約を満たす．更に，$\mathbf{p} \gg 0, y > 0$ であるから

$$
u(\mathbf{x}') = \frac{y}{p_1}\frac{y}{p_2} > 0 = u(\mathbf{x}^*)
$$

が従う．よって $\mathbf{x}^*$ が解であることに矛盾． □

(d) 証明. $\mathbf{x}^1$ と $\mathbf{x}^2$ がいずれも解だとする．このとき $u(\mathbf{x}^1)=u(\mathbf{x}^2)$ でなければならない．この値を $\hat{}$ と書く．ここである $t\in(0,1)$ をとり，$\mathbf{x}^* \equiv t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2$ と定義する．すると，$\mathbf{x}^1$ と $\mathbf{x}^2$ が予算制約を満たすことから

$$
\mathbf{px}^* = \mathbf{p}(t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2) = t\mathbf{px}^1 + (1-t)\mathbf{px}^2 \leqslant ty + (1-t)y = y
$$

となり，$\mathbf{x}^*$ は予算制約を満たす．さらに，$\mathbf{x}^1$ と $\mathbf{x}^2$ は内点なので

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}^*) &= (tx_1^1 + (1-t)x_1^2)(tx_2^1 + (1-t)x_2^2) \\
&= tx_1^1x_2^1 + (1-t)x_1^2x_2^2 + t(1-t)(x_1^1x_2^2 + x_1^2x_2^1) \\
&= tu(\mathbf{x}^1) + (1-t)u(\mathbf{x}^2) + t(1-t)(x_1^1x_2^2 + x_1^2x_2^1) \\
&= \tilde{u} + t(1-t)(x_1^1x_2^2 + x_1^2x_2^1) > \tilde{u}
\end{aligned}
$$

が従う．よって $\mathbf{x}^1$ と $\mathbf{x}^2$ が解であることに矛盾． □