演習ミクロ経済学 I　第 1 回　解答 *

2017 年 4 月 13 日

問題 1

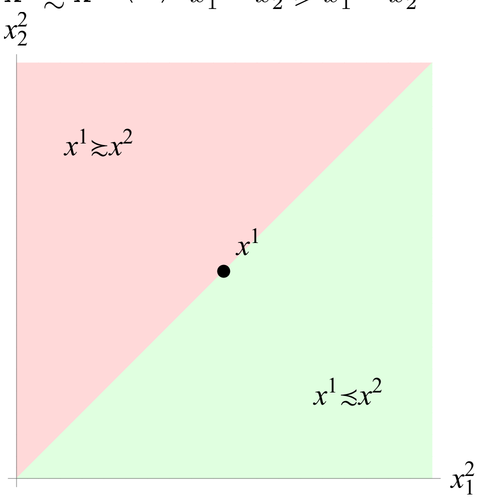
証明. $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$ より，

$$\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \tag{1}$$
$$\mathbf{x}^2 \not\succsim \mathbf{x}^1 \tag{2}$$

である．$\succsim$ は推移性を満たすので，(1) と $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ より $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^3$ が成り立つ．あとは $\mathbf{x}^3 \not\succsim \mathbf{x}^1$ が言えれば良い．背理法の仮定として，$\mathbf{x}^3 \succsim \mathbf{x}^1$ とすると，$\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ から推移性によって $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$ が従う．しかしこれは (2) に矛盾する．よって $\mathbf{x}^3 \not\succsim \mathbf{x}^1$ となるので $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^3$ が成立する．□

問題 2

(a) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff x_1^1 - x_2^1 \geqslant x_1^2 - x_2^2$



完備性：満たす

証明. 任意に $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$ を選ぶ．この二つについて $x_1^1 - x_2^1 \geqslant x_1^2 - x_2^2$ が成り立っているな

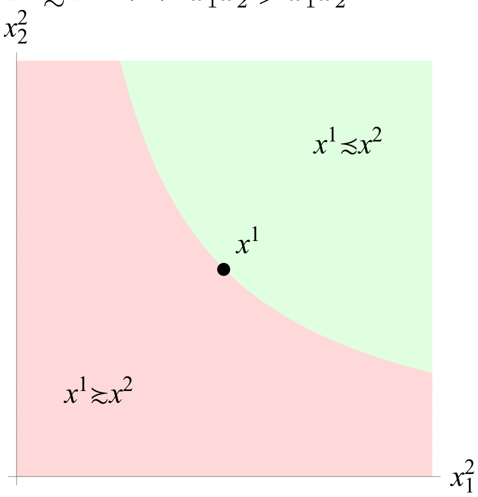
* 間違いを見つけたら orihsamuk@gmail.com まで連絡してください．

らば $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ である．一方 $x_1^1 - x_2^1 < x_1^2 - x_2^2$ が成り立っているならば $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$ なので，常に $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ または $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$ が成り立つ． $\square$

推移性：満たす

証明. $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ と $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ を満たす $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3 \in X$ を任意に選ぶ． $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ より $x_1^1 - x_2^1 \geqslant x_1^2 - x_2^2$ であり，$\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ より $x_1^2 - x_2^2 \geqslant x_1^3 - x_2^3$ である．よって $x_1^1 - x_2^1 \geqslant x_1^3 - x_2^3$ となり，選好の定義よりこれは $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^3$ を意味する． $\square$

(b) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff x_1^1 x_2^1 \geqslant x_1^2 x_2^2$



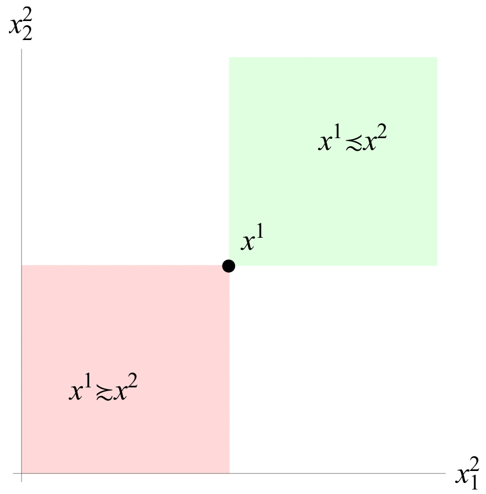
完備性：満たす

証明. 任意に $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$ を選ぶ．この二つについて $x_1^1 x_2^1 \geqslant x_1^2 x_2^2$ が成り立っているならば $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ である．一方 $x_1^1 x_2^1 < x_1^2 x_2^2$ が成り立っているならば $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$ なので，常に $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ または $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$ が成り立つ． $\square$

推移性：満たす

証明. $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ と $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ を満たす $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3 \in X$ を任意に選ぶ． $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ より $x_1^1 x_2^1 \geqslant x_1^2 x_2^2$ であり，$\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ より $x_1^2 x_2^2 \geqslant x_1^3 x_2^3$ である．よって $x_1^1 x_2^1 \geqslant x_1^3 x_2^3$ となり，選好の定義よりこれは $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^3$ を意味する． $\square$

(c) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff x_1^1 \geqslant x_1^2$ and $x_2^1 \geqslant x_2^2$



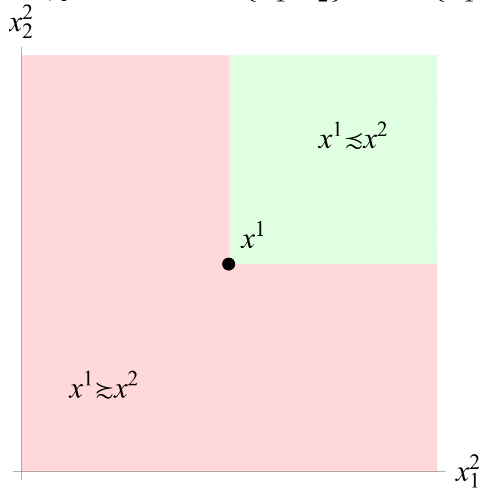
完備性：満たさない

証明. $\mathbf{x}^1 = (2,1)$, $\mathbf{x}^2 = (1,2)$ とすると，$x_1^1 = 2 \geqslant 1 = x_1^2$ であるが $x_2^1 = 1 \leqslant 2 = x_2^2$ なので $\mathbf{x}^1 \not\succsim \mathbf{x}^2$ かつ $\mathbf{x}^2 \not\succsim \mathbf{x}^1$ となり，完備性を満たさない． □

推移性：満たす

証明. $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ と $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ を満たす $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^3 \in X$ を任意に選ぶ．$\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ より $x_1^1 \geqslant x_1^2$ かつ $x_2^1 \geqslant x_1^2$ であり，$\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ より $x_1^2 \geqslant x_1^3$ かつ $x_2^2 \geqslant x_1^3$ である．よって $x_1^1 \geqslant x^{x^3}_1$ かつ $x_2^2 \geqslant x_2^3$ となり，選好の定義よりこれは $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^3$ を意味する． □

(d) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff \min\{x_1^1, x_2^1\} \geqslant \min\{x_1^2, x_2^2\}$



完備性：満たす

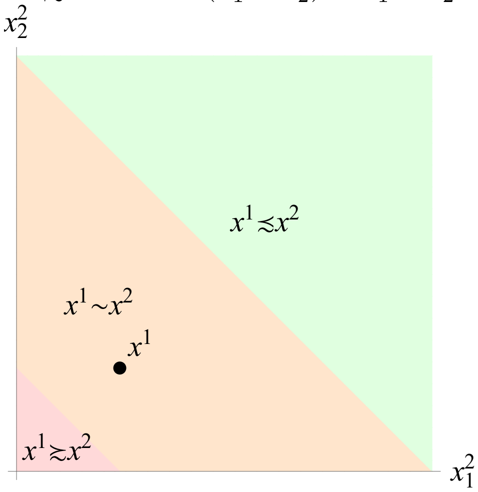
証明. 任意に $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2 \in X$ を選ぶ．この二つについて $\min\{x_1^1, x_2^1\} \geqslant \min\{x_1^2, x_2^2\}$ が成り立っているならば $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ である．一方 $\min\{x_1^2, x_2^2\} \geqslant \min\{x_1^1, x_2^1\}$ が成り立っているならば $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$ なので，常に $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ または $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$ が成り立つ． □

推移性：満たす

証明. $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ と $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ を満たす $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^3 \in X$ を任意に選ぶ．$\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ より $\min\{x_1^1, x_2^1\} \geqslant \min\{x_1^2, x_2^2\}$ であり，$\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ より $\min\{x_1^2, x_2^2\} \geqslant \min\{x_1^3, x_2^3\}$ である．

よって $\min\{x_1^1, x_2^1\} \geqslant \min\{x_1^3, x_2^3\}$ となり，選好の定義よりこれは $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^3$ を意味する． □

(e) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff 2(x_1^1 + x_2^1) \geqslant x_1^2 + x_2^2$



完備性：満たす

証明. 任意に $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$ を選ぶ．この二つについて $2(x_1^1 + x_2^1) \geqslant x_1^2 + x_2^2$ が成り立っているならば $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ である．一方 $2(x_1^1 + x_2^1) < x_1^2 + x_2^2$ が成り立っているとする．$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}_+^2$ より $x_1^1 + x_2^1 \leqslant 2(x_1^1 + x_2^1)$ かつ $2(x_1^2 + x_2^2) \geqslant x_1^2 + x_2^2$ となることに注意すると，

$$2(x_1^2 + x_2^2) \geqslant x_1^2 + x_2^2 > 2(x_1^1 + x_2^1) \geqslant x_1^1 + x_2^1$$

が成り立ち，$\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$ となる． □

推移性：満たさない

証明. $\mathbf{x}^1 = (2, 2)$, $\mathbf{x}^2 = (4, 4)$, $\mathbf{x}^3 = (8, 8)$ とすると，

$$2(x_1^1 + x_2^1) = 8 = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow \mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$$
$$2(x_1^2 + x_2^2) = 16 = x_1^3 + x_2^3 \Rightarrow \mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$$

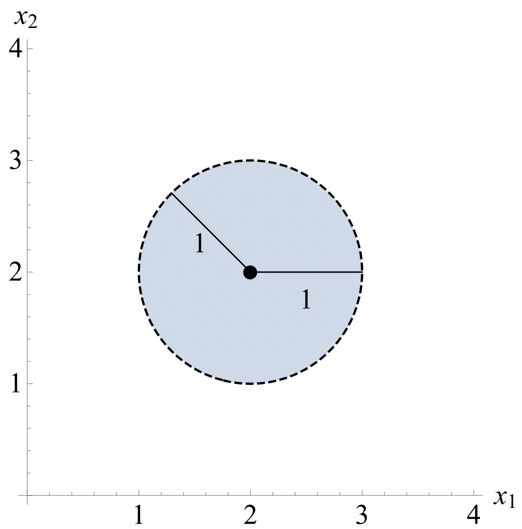
を満たす．ところが，

$$2(x_1^1 + x_2^1) = 8 < 16 = x_1^3 + x_2^3 \Rightarrow \mathbf{x}^1 \not\succsim \mathbf{x}^3$$
$$2(x_1^3 + x_2^3) = 32 > 4 = x_1^1 + x_2^1 \Rightarrow \mathbf{x}^3 \succsim \mathbf{x}^1$$

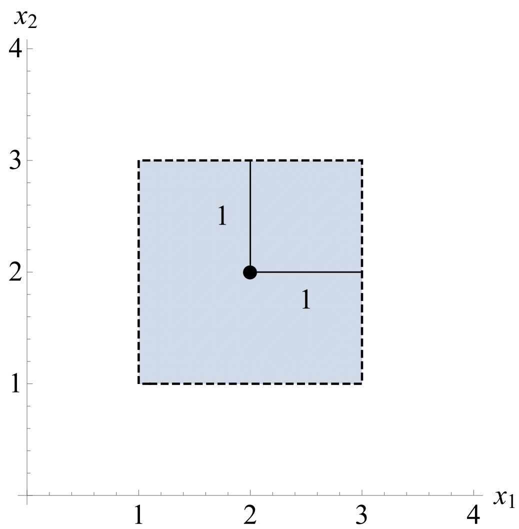
なので $\mathbf{x}^3 \succ \mathbf{x}^1$ である．したがって推移性を満たさない． □

問題 3

ユークリッド距離：



最大値距離：



問題 4

(a) $\mathbb{R}$ における集合 $S = [0,1] \cup \{2\}$

S は開集合ではなく，閉集合である．

開集合でないことの証明． $x = 2$ とすると，$x \in S$ である．任意に $\varepsilon > 0$ を取り，$x' = x + \frac{\varepsilon}{2}$ とすると，

$$|x' - x| = \left| x + \frac{\varepsilon}{2} - x \right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

となるので $x' \in B_\varepsilon(x)$ である．しかし，$x' = 2 + \frac{\varepsilon}{2} > 2$ となるので $x' \notin S$ である．したがって S は開集合ではない．□

閉集合であることの証明． S の補集合を S^c と書くと，$S^c = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$ である．S^c が開集合であることを示す．任意に $x \in S^c$ を選ぶと，$x \in (-\infty, 1)$，$x \in (1, 2)$，$x \in (2, +\infty)$ のいずれかが成立する．以下では距離概念として絶対値を用いる．

(i) $x \in (-\infty, 1)$ のとき

$\varepsilon = \frac{1-x}{2}$ とすると，$x < 1$ より $\varepsilon > 0$ である．任意に $x' \in B_\varepsilon(x)$ を選ぶと，

$$|x' - x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x' - x < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x' < x + \varepsilon = \frac{1+x}{2} < 1 \\ x' > x - \varepsilon > -\infty \end{cases}$$

が成り立つ．よって $x' \in (-\infty, 1)$ である．

(ii) $x \in (1,2)$ のとき
$\varepsilon = \frac{\min\{2-x, x-1\}}{2}$ とすると，$x \in (1,2)$ より $\varepsilon > 0$ である．任意に $x' \in B_\varepsilon(x)$ を選ぶと，

$$
\begin{aligned}
&|x'-x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x'-x < \varepsilon \\
&\Rightarrow \begin{cases} x' < x+\varepsilon \leqslant x + \frac{2-x}{2} = \frac{2+x}{2} < 2 \\ x' > x-\varepsilon \geqslant x - \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2} > 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって $x' \in (1,2)$ である．

(iii) $x \in (2,+\infty)$ のとき $\varepsilon = \frac{x-2}{2}$ とすると，$x \in (2,+\infty)$ より $\varepsilon > 0$ である．任意に $x' \in B_\varepsilon(x)$ を選ぶと，

$$
\begin{aligned}
&|x'-x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < |x'-x| < \varepsilon \\
&\Rightarrow \begin{cases} \quad x' < x+\varepsilon < +\infty \\ \quad x' > x-\varepsilon > x - \frac{x-2}{2} = \frac{x+2}{2} > 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって $x' \in (2,+\infty)$ である．

したがっていずれの場合もある ε に対して $B_\varepsilon(x) \subset S^c$ となるので，S^c は開集合である． □

(b) $\mathbb{R}$ における集合 $S=[0,2)$ S は開集合でも閉集合でもない．以下では距離概念として絶対値を用いる．

開集合でないことの証明． $x=0$ とすると $x \in S$ である．任意に $\varepsilon > 0$ を取り，$x' = x - \frac{\varepsilon}{2}$ とすると，

$$
|x'-x| = \left| x - \frac{\varepsilon}{2} - x \right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
$$

となるので $x' \in B_\varepsilon(x)$ である．しかし，$x' = 0 - \frac{\varepsilon}{2} = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$ となるので $x' \notin S$ である．したがって S は開集合ではない． □

閉集合でないことの証明．[*1] 数列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ を，$x_k \equiv 2 - \frac{1}{k}$ と定義すると，任意の $k=1,2,\ldots$ について $1 \leqslant x_k < 2$ となるので $x_k \in S$ である．さらに，x_k は 2 に収束する[*2]．しかし $2 \notin S$ なので S は閉集合ではない． □

(c) $\mathbb{R}^n$ における集合 $S = \mathbb{R}^n_+$ 開集合ではなく，閉集合である．以下では距離概念として最大値距離を用いる．

[*1] 補集合を使って証明しても OK

[*2] 任意に $\varepsilon > 0$ を取り，$\bar{k}$ を $\bar{k} > 1/\varepsilon$ を満たす自然数とする．任意の $k \geqslant \bar{k}$ について，

$$
\begin{aligned}
&k \geqslant \bar{k} > \frac{1}{\varepsilon} \iff \varepsilon > \frac{1}{k} \iff 2-\varepsilon < 2 - \frac{1}{k} = x_k \iff x_k - 2 > -\varepsilon \\
&2 - \frac{1}{k} < 2+\varepsilon \iff x_k < 2+\varepsilon \iff x_k - 2 < \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ．すなわち任意の $k \geqslant \bar{k}$ に対し $|x_k - 2| < \varepsilon$ となるので x_k は 2 に収束する．

開集合でないことの証明． $\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0)$ とし，任意に $\varepsilon > 0$ を選ぶ．各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について $\mathbf{x}'_i = x_i - \frac{\varepsilon}{2}$ と定義すると，

$$|x'_i - x_i| = \left|x_i - \frac{\varepsilon}{2} - x_i\right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

なので，$d(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \max_i |x' - x| < \varepsilon$，つまり $\mathbf{x}' \in B_\varepsilon(\mathbf{x})$ である．ところが，全ての i について $x'_i < 0$ なので $\mathbf{x}' \notin S$ である．したがって S は開集合ではない． $\square$

閉集合であることの証明． 全ての $k = 1, 2, \ldots$ について $\mathbf{x}^k \in S$ であり，$\bar{\mathbf{x}}$ に収束する点列 $\{\mathbf{x}^k\}_{k=1}^{\infty}$ を任意に選ぶ．$\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ は $\bar{\mathbf{x}}$ に収束するので，任意の ε に対し十分大きな $\bar{k}$ を取ると，任意の $k \geqslant \bar{k}$ について $d(\mathbf{x}^k, \bar{\mathbf{x}}) < \varepsilon$ となる．すなわち，各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について

$$\begin{aligned} &|x_i^k - \bar{x}_i| \leqslant d(\mathbf{x}^k, \bar{\mathbf{x}}) < \varepsilon \iff -\varepsilon x_i^k - \bar{x}_i < \varepsilon \\ \Rightarrow &x_i^k < \bar{x}_i + \varepsilon \end{aligned}$$

を満たす．一方，背理法の仮定として，$\bar{\mathbf{x}} \notin S$ とする．S の定義から，これは少なくとも一つの $i = 1, 2, \ldots, n$ について $\bar{x}_i < 0$ であることを意味する．このような i に注目する．上記の ε は任意なので $\varepsilon = -\frac{x_i}{2}$ と定義する．$x_i < 0$ なので $\varepsilon > 0$ である．ここで，

$$x_i^k < \bar{x}_i + \varepsilon = \bar{x}_i - \frac{x_i}{2} = \frac{x_i}{2} < 0$$

となるが，これは $\mathbf{x}^k \notin S$ を意味し，点列の取り方に矛盾する．よって $\bar{x} \in S$ でなくてはならず，S が閉集合であることが従う． $\square$