演習ミクロ経済学 I　第 2 回

2017 年 4 月 19 日

問題の解答について

問題の解答は，http://k-kumashiro.github.io/website の，「講義」→「ミクロ経済学 I 演習」へ辿ったページにアップします．

定義の確認

定義 1 (連続な選好)**.** $\mathbb{R}^n_+$ 上の選好 $\succsim$ が連続である．
$\iff$ $\boxed{\quad\quad}$ $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n_+$ に対し，集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid \mathbf{x} \succsim \mathbf{x}^0\}$ と $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid \mathbf{x} \precsim \mathbf{x}^0\}$ がどちらも $\boxed{\quad\quad}$ である．

定義 2 (局所非飽和)**.** $\mathbb{R}^n_+$ 上の選好 $\succsim$ が局所非飽和を満たす．
$\iff$ $\boxed{\quad\quad}$ $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n_+$ と $\boxed{\quad\quad}$ $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ が存在し，$\mathbf{x} \succ \mathbf{x}^0$ を満たす．

定義 3 (強単調性)**.** $\mathbb{R}^n_+$ 上の選好 $\succsim$ が強単調性を満たす．
$\iff$ $\boxed{\quad\quad}$ $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$ について，$\mathbf{x}^1 > \mathbf{x}^0$ のとき $\boxed{\quad\quad}$ が成り立ち，$\mathbf{x}^1 \gg \mathbf{x}^0$ のとき $\boxed{\quad\quad}$ が成り立つ．

定義 4 (凸性)**.** $\mathbb{R}^n_+$ 上の選好 $\succsim$ が凸性を満たす．
$\iff$ $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ を満たす $\boxed{\quad\quad}$ $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$ と $\boxed{\quad\quad}$ $t \in [0,1]$ について，$t\mathbf{x}^0 + (1-t)\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ が成り立つ．

定義 5 (強凸性)**.** $\mathbb{R}^n_+$ 上の選好 $\succsim$ が強凸性を満たす．
$\iff$ $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ と $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ を満たす $\boxed{\quad\quad}$ $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$ と $\boxed{\quad\quad}$ $t \in (0,1)$ について，$t\mathbf{x}^0 + (1-t)\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^0$ が成り立つ．

定義 6 (凹関数)**.** $f \colon D \to \mathbb{R}$ が凹関数である．
$\iff$ 任意の $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$ と任意の $t \in [0,1]$ について，

$$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

定義 7 (狭義凹関数)**.** $f \colon D \to \mathbb{R}$ が狭義凹関数である．

$\iff$ $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ を満たす任意の $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ と任意の $t \in (0,1)$ について，

定義 8 (準凹関数)**.** $f\colon D \to \mathbb{R}$ が準凹関数である．
$\iff$ 任意の $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ と任意の $t \in [0,1]$ について，

定義 9 (狭義準凹関数)**.** $f\colon D \to \mathbb{R}$ が狭義準凹関数である．
$\iff$ $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ を満たす任意の $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ と任意の $t \in (0,1)$ について，

命題 1 (準凹関数の性質)**.** 関数 $f\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ が準凹関数である $\iff$ 任意の $y \in \mathbb{R}$ について，$S(y) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid f(\mathbf{x}) \geqslant y\}$ は凸集合である．

問題

問題 1. 消費集合を $\mathbb{R}_+$ とする．次の効用関数を考える．

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \leqslant 1 \\ x+1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

(a) この効用関数が連続関数かどうか答え，それを示しなさい．

(b) この効用関数が表す選好関係が連続性を満たすかどうか答え，それを示しなさい．

問題 2. 消費集合を $\mathbb{R}^2_+$ とする．次のそれぞれの選好 $\succsim$ が強単調性，強凸性を満たすかどうか答え，それを示しなさい．

(1) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff x^1_1 x^1_2 \geqslant x^2_1 x^2_2$

(2) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff x^1_1 - x^1_2 \geqslant x^2_1 - x^2_2$

(3) $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff \min\{x^1_1, x^1_2\} \geqslant \min\{x^2_1, x^2_2\}$

問題 3. 消費集合を $\mathbb{R}_+$ とする．以下の効用関数が表す選好が局所非飽和を満たすかどうか答え，それを示しなさい．

$$u(x) = -(x-5)^2$$

問題 4. 以下の関数 $f\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ が準凹関数であることを確かめなさい．

$$f(\mathbf{x}) = \min\{x_1, x_2\}$$

問題 5. 命題 1 を証明しなさい．