ミクロ経済学I演習　第9回　解答

作成日｜2017 年 8 月 9 日

問題 1

(a) **証明.** f が厳密な凹関数であることの定義より，異なる任意の $x, x^0 \in \mathbb{R}$ と任意の $t \in (0,1)$ について，

$$f(tx + (1-t)x^0) > tf(x) + (1-t)f(x^0)$$

が成り立つ．これを変形すると，

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^0) &< \frac{f(tx+(1-t)x^0) - f(x^0)}{t} = \frac{f(x^0 + t(x-x^0)) - f(x^0)}{t} \\ &= (x - x^0)\frac{f(x^0 + t(x-x^0)) - f(x^0)}{t(x-x^0)} \end{aligned}$$

となる．これは任意の $x, x^0 \in \mathbb{R}, t \in (0,1)$ の間で成り立つので，両辺の $t \to 0$ の極限を取っても大小関係は維持される．すなわち，

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0}\{f(x) - f(x^0)\} < (x - x^0)\lim_{t \to 0}\frac{f(x^0 + t(x-x^0) - f(x^0))}{t(x-x^0)} \\ \iff & f(x) - f(x^0) < (x-x^0)f'(x^0) \\ \iff & f(x) < f'(x^0)(x-x^0) + f(x^0) \end{aligned}$$

となる．右辺は x^0 における傾きが $f'(x^0)$ で $(x^0, f(x^0))$ を通る直線，つまり x^0 における f の接線の式である．したがって接線は f の上方に位置する． □

(b) **証明.** $p_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$ は $p_i \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^n p_i = 1$ を満たすとする．(a) より，任意の $x_i, x^0 \in \mathbb{R}$ について $f(x_i) < f'(x^0)(x - x^0) + f(x^0)$ が成り立つ．この両辺を p_i 倍して $i = 1$ から n まで足し合わせると，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) &< \sum_{i=1}^n p_i \left\{ f'(x^0)(x_i - x^0) + f(x^0) \right\} \\ &= f'(x^0)\sum_{i=1}^n p_i x_i - f'(x^0)x^0 + f(x^0) \end{aligned}$$

ここで $x^0 \equiv \sum_{i=1}^n p_i x_i$ とすると，Jensen の不等式

$$\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) < f'(x^0)\sum_{i=1}^n p_i x_i - f'(x^0)\sum_{i=1}^n p_i x_i + f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right)$$

を得る． □

問題 2

⇒ の証明． v が u の正アフィン変換だとする．すなわちある $a > 0, b \in \mathbb{R}$ によって $v(g) = au(g) + b$ と書けるとする．任意に互いに無差別でないギャンブル $g^1,, g^2$, $g^3 \in \mathcal{G}$ を選ぶと，

$$\begin{aligned}\frac{v(g^1) - v(g^2)}{v(g^2) - v(g^3)} &= \frac{\{au(g^1) + b\} - \{au(g^2) + b\}}{\{au(g^2) + b\} - \{au(g^3) + b\}} = \frac{a(u(g^1) - u(g^2))}{a(u(g^2) - u(g^3))} \\ &= \frac{u(g^1) - u(g^2)}{u(g^2) - u(g^3)}\end{aligned}$$

となる． □

⇐ の証明． 互いに無差別でない任意のギャンブル $g^1, g^2, g^3 \in \mathcal{G}$ について，

$$\frac{u(g^1) - u(g^2)}{u(g^2) - u(g^3)} = \frac{v(g^1) - v(g^2)}{v(g^2) - v(g^3)} \tag{1}$$

が成り立つとする．$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，任意の g に対し $v(g) = f(u(g))$ を満たす任意の変換とする．

u と v はいずれも同じ選好 $\succsim$ を表現する効用関数なので，任意の $g, g' \in \mathcal{G}$ について，$u(g) > u(g') \iff v(g) > v(g') \iff f(u(g)) > f(u(g'))$ でなければならない．これは f が厳密な増加関数であることを意味する．

(1) より，

$$\begin{aligned}&\frac{v(g^1) - v(g^2)}{u(g^1) - u(g^2)} = \frac{v(g^2) - v(g^3)}{u(g^2) - u(g^3)} \\ \iff &\frac{f(u(g^1)) - f(u(g^2))}{u(g^1) - u(g^2)} = \frac{f(u(g^2)) - f(u(g^3))}{u(g^2) - u(g^3)}\end{aligned}$$

左辺は点 $(u(g^1), f(u(g^1)))$ と $(u(g^2), f(u(g^2)))$ を結ぶ線分の傾き，右辺は点 $(u(g^2), f(u(g^2)))$ と $(u(g^3), f(u(g^3)))$ を結ぶ線分の傾きを表す．任意の g^1, g^2, g^3 に対しこれらが等しいという事は f が線形であることを意味する．

したがって f は線形かつ厳密な増加関数なので，$f(x) = ax + b$（ただし $a > 0$）を得る． □

問題 3

(a) 任意にギャンブル $g \in \mathcal{G}$ を選ぶと，

$$u(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\alpha + \beta \log(w_i)) = \alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} p_i \log(w_i)$$
$$u(E(g)) = \alpha + \beta \log \left(\sum_{i=1}^{n} p_i w_i \right)$$

である．リスク回避的であることの定義より，$u(E(g)) > u(g)$ であればよい．すなわち，

$$u(E(g)) - u(g) = \beta \left(\log \left(\sum_{i=1}^{n} p_i w_i \right) - \sum_{i=1}^{n} p_i \log(w_i) \right) > 0$$

であればよい．$\log(x)$ は厳密な凹関数なので，カッコ内は Jensen の不等式より正である．したがって $\beta > 0$ でなければならない．

(b) 確実性同値額を $\hat{w}$ と書くと，$u(\hat{w}) = u(g)$ を満たす．

$$\begin{aligned} u(g) &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta \log(w+h)) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta \log(w-h)) \\ &= \alpha + \frac{\beta}{2} \log((w+h)(w-h)) \\ &= \alpha + \frac{\beta}{2} \log(w^2 - h^2) \\ u(\hat{w}) &= \alpha + \beta \log(\hat{w}) \end{aligned}$$

なので，$\hat{w} = \left(w^2 - h^2\right)^{1/2}$ となる．
リスクプレミアム $P \equiv E(g) - \hat{w}$ を求めると，

$$P = \frac{1}{2}(w+h) + \frac{1}{2}(w-h) - \hat{w} = w - \left(w^2 - h^2\right)^{1/2}$$

(c) 証明. 絶対的リスク回避度 $R_a(w) \equiv -u''(w)/u'(w)$ を求めると，

$$R_a(w) = -\frac{-\beta/w^2}{\beta/w} = \frac{1}{w}$$

となる．これは w に関して減少する． □

問題 4

求める VNM 効用関数を u と書く．任意の $w \in \mathbb{R}_+$ で絶対的リスク回避度が α で一定なので，$-\frac{u''(w)}{u'(w)} = \alpha \iff \frac{u''(w)}{u'(w)} = -\alpha$ が成り立つ．両辺を w で積分すると，

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{u''(w)}{u'(w)} dw = \int -\alpha dw \iff \log(u'(w)) + C_1 = -\alpha w + C_2 \\
\iff & \log(u'(w)) = -\alpha w + C \\
\iff & u'(w) = \exp(-\alpha w + C) \equiv \exp(C)\exp(-\alpha w)
\end{aligned}
$$

となる．ただし C_1，C_2 は積分定数，$C = C_2 - C_1$ である．さらにこの両辺を w で積分すると，

$$
\begin{aligned}
& \int u'(w)dw = \int \exp(C)\exp(-\alpha w)dw \\
\iff & u(w) + C_3 = \exp(C) \times \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \exp(-\alpha w) + C_4 \\
\iff & u(w) = \exp(C) \times \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \exp(-\alpha w) + C'
\end{aligned}
$$

となる．ただし，C_3, C_4 は積分定数，$C' \equiv C_4 - C_3$ である．これが絶対的リスク回避度が一定になる VNM 効用関数である．あるいは正アフィン変換により

$$
v(w) \equiv \frac{1}{\exp(C)} u(w) - \frac{C'}{\exp(C)} = -\frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha w)
$$

としても良い．

問題 5

(a) **証明.** h の 1 次と 2 次の導関数を求めると，

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{u_1'(u_2^{-1}(x))}{u_2'(u_2^{-1}(x))} \\
h''(x) &= \frac{\frac{u_1''(u_2^{-1}(x))}{u_2'(u_2^{-1}(x))} u_2'(u_2^{-1}(x)) - \frac{u_2''(u_2^{-1}(x))}{u_2'(u_2^{-1}(x))} u_1'(u_2^{-1}(x))}{\left[u_2'(u_2^{-1}(x))\right]^2} \\
&= \frac{u_1'(u_2^{-1}(x)) \left\{ \frac{u_1''(u_2^{-1}(x))}{u_1'(u_2^{-1}(x))} - \frac{u_2''(u_2^{-1}(x))}{u_2'(u_2^{-1}(x))} \right\}}{[u_2'(u_2^{-1}(x))]^2}
\end{aligned}
$$

となる．u_i には厳密な増加関数であり，厳密な凹関数なので $u_i' > 0$ かつ $u'' < 0$ である．また，$R_a^1 > R_a^2$ より $\frac{u_1''}{u_1'} < \frac{u_2''}{u'2}$ である．よって $h'(x) > 0$，$h''(x) < 0$ が従う． □

(b) **証明.** 確実性同値額の定義より，

$$u(\hat{w}_1) = \sum_{j=1}^{n} p_j u_1(w_j)$$
$$u(\hat{w}_2) = \sum_{j=1}^{n} p_j u_2(w_j)$$

である．また，h の定義より任意の w について

$$h(u_2(w)) = u_1(u_2^{-1}(u_2(w))) = u_1(w)$$

となる．h が厳密な凹関数であることに注意すると，

$$\begin{aligned} u_1(\hat{w}_1) &= \sum_{j=1}^{n} p_j u_1(w_j) = \sum_{j=1}^{n} p_j h(u_2(w_j)) \\ &< h\left(\sum_{j=1}^{n} p_j u_2(w_j)\right) = h(u(\hat{w}_2)) = u_1(\hat{w}_2) \end{aligned}$$

が成り立つ．u_1 は厳密な増加関数なので，これは $\hat{w}_1 < \hat{w}_2$ を意味する． □