# ミクロ経済学I演習　第6回　解答

作成日｜ 2017 年 5 月 23 日

## 問題 1

$f$ が 1 次同次関数なので任意の $t>0$ について，

$$f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x}) \tag{1}$$

が成り立つ．

(a) **証明.** 両辺を $x_i$ で微分すると，

$$t\frac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial x_i} = t\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \iff \frac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

となる．よって，関数 $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ は任意の $i$ についてゼロ次同次．□

◀ (1) が $\mathbf{x}$ によらず恒等的に成り立つことが重要．特定の $\mathbf{x}$ で成り立つ方程式は両辺を $x_i$ で微分してはならない．

(b) **証明.** 両辺を $t$ で微分すると，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\frac{\partial (tx_i)}{\partial t} = f(\mathbf{x}) \iff \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}x_i = f(\mathbf{x})$$

となる．□

◀ (1) が $t$ によらず恒等的に成り立つことが重要．

## 問題 2

(i) CES 関数 $f$ を $x_i$ で微分すると，

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho}(\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2)^{\frac{1}{\rho}-1} \times \alpha_i \rho x_i^{\rho-1} = \frac{\alpha_i}{x_i^{1-\rho}}\frac{f(\mathbf{x})}{\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}}$$

となるので，MRTS は

$$\mathrm{MRTS}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})/\partial x_1}{\partial f(\mathbf{x})/\partial x_2} = \frac{\frac{\alpha_1}{x_1^{1-\rho}}\frac{f(\mathbf{x})}{\alpha_1 x_1^{\rho}+\alpha_2 x_2^{\rho}}}{\frac{\alpha_2}{x_2^{1-\rho}}\frac{f(\mathbf{x})}{\alpha_1 x_1^{\rho}+\alpha_2 x_2^{\rho}}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}r^{1-\rho}.$$

対数を取ると，

$$\ln \mathrm{MRTS}(\mathbf{x}) = \ln \alpha_1 - \ln \alpha_2 + (1-\rho)\ln r$$

である．$\ln r$ を一つの変数と見て $\ln \mathrm{MRTS}(\mathbf{x})$ を $\ln r$ で微分すると，

$$\frac{d\ln \mathrm{MRTS}(\mathbf{x})}{d\ln r} = 1-\rho$$

を得る．代替の弾力性 $\sigma$ はこの逆数なので，

$$\sigma = \left(\frac{d\ln \mathrm{MRTS}(\mathbf{x})}{d\ln r}\right)^{-1} = \frac{1}{1-\rho}$$

となる．

(ii) (a) **証明.** $f(\mathbf{x})$ について，$\rho \to 1$ の極限を取ると，

$$\lim_{\rho\to 1} f(\mathbf{x}) = \lim_{\rho\to 1}\left(\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

となる． □

(b) **証明.** $f(x)$ の定義の両辺の対数を取ると，

$$\log f(\mathbf{x}) = \log\left(\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} = \frac{\log\left(\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}\right)}{\rho} \tag{2}$$

となる．この右辺は分子，分母ともに $\rho \to 0$ の極限は 0 であり，右辺全体では $\frac{0}{0}$ の不定形となるので，ロピタルの定理を用いて考える．

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\log\left(\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}\right) = \frac{\alpha_1 x_1^{\rho}\log x_1 + \alpha_2 x_2^{\rho}\log x_2}{\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}}$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial\rho} = 1$$

より，

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\log f(\mathbf{x}) &= \lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{\alpha_1 x_1^{\rho}\log x_1 + \alpha_2 x_2^{\rho}\log x_2}{\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}}}{1} \\ &= \frac{\frac{\alpha_1\log x_1 + \alpha_2\log x_2}{\alpha_1+\alpha_2}}{1} \\ &= \alpha_1\log x_1 + \alpha_2\log x_2 = \log(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2})\end{aligned}$$

両辺の log を外すと，$\lim_{\rho\to 0} f(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ を得る． □

(c) **証明.** $f(x)$ の両辺の対数を取り，(2) を得る．(2) の右辺の分子と分母はともに $\rho \to -\infty$ の極限は $-\infty$ なので $\frac{-\infty}{-\infty}$ の不定形となる．よってロピタルの定理を用いて考える．

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to -\infty}\log f(\mathbf{x}) &= \lim_{\rho\to -\infty}\frac{\frac{\alpha_1 x_1^{\rho}\log x_1 + \alpha_2 x_2^{\rho}\log x_2}{\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}}}{1} \\ &= \lim_{\rho\to -\infty}\frac{\alpha_1 x_1^{\rho}\log x_1 + \alpha_2 x_2^{\rho}\log x_2}{\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}}\end{aligned} \tag{3}$$

以下，$x_1$ と $x_2$ の大小関係で場合分けをする．

(i) $x_1 < x_2$ のとき

(3) の右辺の分子と分母に $\left(\frac{1}{x_1}\right)^\rho$ をかけると，

◀ $x_1 < x_2$ の仮定から，$\lim_{\rho\to-\infty}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\rho = 0$ となることに注意．

$$\lim_{\rho\to-\infty}\log f(\mathbf{x}) = \lim_{\rho\to-\infty}\frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)^\rho\left(\alpha_1 x_1^\rho\log x_1+\alpha_2 x_2^\rho\log x_2\right)}{\left(\frac{1}{x_1}\right)^\rho\left(\alpha_1 x_1^\rho+\alpha_2 x_2^\rho\right)}$$
$$= \lim_{\rho\to-\infty}\frac{\alpha_1\log x_1+\alpha_2\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\rho\log x_2}{\alpha_1+\alpha_2\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\rho}$$
$$= \frac{\alpha_1\log x_1}{\alpha_1} = \log x_1$$

両辺の log を外すと，$\lim_{\rho\to-\infty} f(\mathbf{x}) = x_1$ を得る．

(ii) $x_2 < x_1$ のとき

(1) と対称的な方法により，$\lim_{\rho\to-\infty} f(\mathbf{x}) = x_2$ が示せる．

◀ 確認せよ．

(iii) $x_1 = x_2 = x \in \mathbb{R}_+$ のとき

(3) は，

$$\lim_{\rho\to-\infty}\log f(\mathbf{x}) = \lim_{\rho\to-\infty}\frac{(\alpha_1+\alpha_2)x^\rho\log x}{(\alpha_1+\alpha_2)x^\rho} = \lim_{\rho\to-\infty}\log x = \log x$$

両辺の log を外すと，$\lim_{\rho\to-\infty} f(\mathbf{x}) = x$ を得る．

各ケースをまとめると，

$$\lim_{\rho\to-\infty} f(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_1 & \text{if } x_1 \leqslant x_2 \\ x_2 & \text{if } x_1 > x_2 \end{cases} = \min\{x_1, x_2\}$$

となる． □

# 問題 3

解が内点になることを示す． $\mathbf{x}^*$ が解であるとする．

◀ 要領は消費者の支出最小化と同じ．

**$x^* \neq 0$ の証明．** $x^* = 0$ だと仮定する．このとき生産量は $f(\mathbf{x}^*) = 0 < y$ となり，制約を満たさない．よって $\mathbf{x}^*$ が解であることに矛盾． □

**$x_2^* \neq 0$ の証明．** $x_i^* = 0$ だと仮定する．$x^* \neq 0$ なので $x_j^* > 0$ でなければならない．このとき，$f(\mathbf{x}^*) = x_j^*$，$\mathbf{wx} = w_j x_j^*$ である．これに対し，$\mathbf{x}'$ を以下のように定義する．

$$x_i' = \varepsilon$$
$$x_j' = x_j^* - \frac{2w_i\varepsilon}{w_j}$$

$x_j' > 0$ なので $\varepsilon > 0$ が十分小さければ $x_j' > 0$ とすることは可能である．関数 $g$ を $\varepsilon$ に対する $\mathbf{x}'$ と $\mathbf{x}^*$ の生産量の差として定義すると，

$$g(\varepsilon) \equiv f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}^*) = \left(\varepsilon^\rho + \left(x_j^* - \frac{2w_i\varepsilon}{w_j}\right)^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} - x_j^*$$

と書け，$g(0) = 0$ である．$g$ を $\varepsilon$ で微分すると，

$$\begin{aligned} g'(\varepsilon) &= \frac{1}{\rho}\left(\varepsilon^\rho + \left(x_j^* - \frac{2w_i\varepsilon}{w_j}\right)^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}\left(\rho\varepsilon^{\rho-1} + \rho\left(x_j^* - \frac{2w_i\varepsilon}{w_j}\right)^{\rho-1}\left(-\frac{2w_i}{w_j}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\rho}\left(\varepsilon^\rho + \left(x_j^* - \frac{2w_i\varepsilon}{w_j}\right)^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}\left(\frac{\rho}{\varepsilon^{1-\rho}} - \frac{2\rho w_j}{w_i}\left(x_j^* - \frac{2w_i\varepsilon}{w_j}\right)^{\rho-1}\right) \end{aligned}$$

となる．$\varepsilon \to 0$ の極限をとると

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to 0} g'(\varepsilon) &= \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\underbrace{\left(\varepsilon^\rho + \left(x_j^* - \frac{2w_i\varepsilon}{w_j}\right)^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}}_{\to (x_j^*)^{1-\rho}}\left(\underbrace{\frac{\rho}{\varepsilon^{1-\rho}}}_{\to+\infty} - \frac{2\rho w_j}{w_i}\underbrace{\left(x_j^* - \frac{2w_i\varepsilon}{w_j}\right)^{\rho-1}}_{(x_j^*)^{\rho-1}}\right) \\ &= +\infty > 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．よってある $\varepsilon' > 0$ が存在して任意の $\varepsilon < \varepsilon'$ について $g'(\varepsilon) > 0$ となる．すると平均値の定理よりある $\varepsilon'' \in (0, \varepsilon)$ が存在して

$$g'(\varepsilon'') = \frac{g(\varepsilon) - g(0)}{\varepsilon - 0} = \frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon} \iff g(\varepsilon) = g'(\varepsilon'')\varepsilon > 0$$

が成り立つ．すなわちこのような $\varepsilon$ について $g(\varepsilon) > 0 \iff f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}) \geqslant y$ が成り立ち，$\mathbf{x}'$ は制約を満たす．さらに，

$$\mathbf{w}\mathbf{x}' = w_i\varepsilon + w_j\left(x_j^* - \frac{2w_i\varepsilon}{w_j}\right) = w_i\varepsilon + w_jx_j^* - 2w_i\varepsilon = w_jx_j^* - w_i\varepsilon < w_jx_j^* = \mathbf{w}\mathbf{x}^*$$

となるので，$\mathbf{x}^*$ よりも $\mathbf{x}'$ の方が費用が厳密に小さい．したがって $\mathbf{x}^*$ が解であることに矛盾する． □

目的関数 $-\mathbf{w}\mathbf{x}$ が連続かつ内点で微分可能な準凹関数であり，$0 < \rho < 1$ より制約関数 $-f(\mathbf{x})$ は連続な狭義準凸関数で内点で微分可能なので，クーンタッカー条件を満たす $x^*$ が費用最小化問題の解である．クーンタッカー条件は

◀ 連続性や準凹性，準凸性を証明せよ．

$$-w_ix_i^* + \lambda^*\frac{f(\mathbf{x}^*)}{x_1^{*\rho} + x_2^{*\rho}}x_i^{*\rho-1} = 0 \tag{4}$$

$$\lambda^* \geqslant 0 \tag{5}$$

$$\lambda^*(y - f(\mathbf{x}^*)) = 0 \tag{6}$$

である．(4) より，

$$\lambda^* = \frac{x_1^{*\rho} + x_2^{*\rho}}{f(\mathbf{x}^*) x_i^{*\rho-1}} w_i x_i^* > 0 \tag{7}$$

となるので (6) より $y = f(\mathbf{x}^*)$ が従う．(7) より，

$$\frac{x_1^{*\rho} + x_2^{*\rho}}{f(\mathbf{x}^*) x_1^{*\rho-1}} w_1 x_1^* = \frac{x_1^{*\rho} + x_2^{*\rho}}{f(\mathbf{x}^*) x_2^{*\rho-1}} w_2 x_2^* \iff w_1 x_1^{*2-\rho} = w_x x_2^{*2-\rho}$$

$$x_2^* = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2-\rho}} x_1^*$$

を得る．これと $y = f(\mathbf{x}^*)$ を組み合わせることで，

$$x_1^* = \frac{w_2^{\frac{1}{2-\rho}}}{\left(w_1^{\frac{\rho}{2-\rho}} + w_2^{\frac{\rho}{2-\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} y,\ x_2^* = \frac{w_1^{\frac{1}{2-\rho}}}{\left(w_1^{\frac{\rho}{2-\rho}} + w_2^{\frac{\rho}{2-\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} y$$

が得られる．

したがって費用関数は，

$$c(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w}\mathbf{x}^* = \frac{w_1 w_2^{\frac{1}{2-\rho}} + w_1^{\frac{1}{2-\rho}} w_2}{\left(w_1^{\frac{\rho}{2-\rho}} + w_2^{\frac{\rho}{2-\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} y = \frac{(w_1 w_2)^{\frac{1}{2-\rho}} \left(w_1^{\frac{1-\rho}{2-\rho}} + w_2^{\frac{1-\rho}{2-\rho}}\right)}{\left(w_1^{\frac{\rho}{2-\rho}} + w_2^{\frac{\rho}{2-\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} y$$