

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Навчально-науковий інститут атомної та теплової енергетики

Кафедра інженерії програмного забезпечення в енергетиці

ДОМАШНЯ РОБОТА №5

**з дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація
процесів і систем»**

**тема «Моделювання динамічних систем на основі
марківських процесів з дискретними станами та
дискретним часом»**

Варіант № 13

Виконала:

Студентка 3 курсу, групи ТІ-01

Круть Катерина

(прізвище ім'я)

Дата здачі **16.04.2023**

Київ – 2023

Завдання:

В приміщенні для переговорів відділ технічної безпеки здійснює пошук закладних пристроїв. За агентурними даними відомо, що зловмисники заклали 4 електроакустичних прилади. Фахівці відділу планують здійснити п'ять послідовних тестів. Визначити імовірності перебування системи з чотирьох приладів у наступних станах:

S1 – всі прилади цілі;

S2 – виявлено один прилад;

S3 – виявлено два прилади;

S4 – виявлено три прилади;

S5 – виявлено чотири прилади.

Вважається, що відомі перехідні імовірності – імовірності виявлення одного, або двох, або трьох, або чотирьох електроакустичних приладів при переході із стану до стану в процесі здійснення тестів (вибрати із таблиці 1):

$P_{12}=0,25$; $P_{13}=0,20$; $P_{14}=0,10$; $P_{15}=0,05$; $P_{23}=0,30$;

$P_{24}=0,25$; $P_{25}=0,10$; $P_{34}=0,40$; $P_{35}=0,15$; $P_{45}=0,60$.

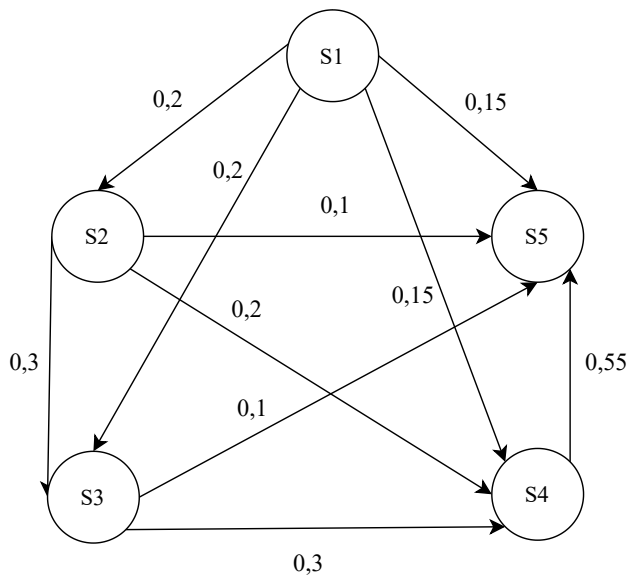
Вважається, що система починає працювати із стану S1.

Побудувати математичну модель системи на основі марковського процесу з дискретними станами та дискретним часом, знайти ймовірності перебування системи в зазначених станах.

№ вар	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{23}	P_{24}	P_{25}	P_{34}	P_{35}	P_{45}
3	0,20	0,20	0,15	0,15	0,30	0,20	0,10	0,30	0,10	0,55

Розв'язання:

1. Граф станів та переходів системи:



Із графа станів:

$P_{11} = 1 - (P_{12} + P_{13} + P_{14} + P_{15}) = 0,30$	$P_{12} = 0,20$	$P_{13} = 0,20$	$P_{14} = 0,15$	$P_{15} = 0,15$
$P_{21} = 0$	$P_{22} = 0,40$	$P_{23} = 0,30$	$P_{24} = 0,20$	$P_{25} = 0,10$
$P_{31} = 0$	$P_{32} = 0$	$P_{33} = 0,60$	$P_{34} = 0,30$	$P_{35} = 0,10$
$P_{41} = 0$	$P_{42} = 0$	$P_{43} = 0$	$P_{44} = 0,45$	$P_{45} = 0,55$
$P_{51} = 0$	$P_{52} = 0$	$P_{53} = 0$	$P_{54} = 0$	$P_{55} = 1$

2. Матриця перехідних імовірностей:

$$\|P_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,30 & 0,20 & 0,20 & 0,15 & 0,15 \\ 0 & 0,40 & 0,30 & 0,20 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0,60 & 0,30 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Розрахунок імовірностей станів

Початкові імовірності станів:

$$p_1(0) = 1; \quad p_2(0) = 0; \quad p_3(0) = 0; \quad p_4(0) = 0; \quad p_5(0) = 0;$$

після 1-го тесту:

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,30 & 0,20 & 0,20 & 0,15 & 0,15 \\ 0 & 0,40 & 0,30 & 0,20 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0,60 & 0,30 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,30 \ 0,20 \ 0,20 \ 0,15 \ 0,15)$$

$$p_1(1)=0,30; \quad p_2(1)=0,20; \quad p_3(1)=0,20; \quad p_4(1)=0,15; \quad p_5(1)=0,15;$$

після 2-го тесту:

$$(0,30 \ 0,20 \ 0,20 \ 0,15 \ 0,15) \cdot \begin{pmatrix} 0,30 & 0,20 & 0,20 & 0,15 & 0,15 \\ 0 & 0,40 & 0,30 & 0,20 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0,60 & 0,30 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,09 \ 0,14 \ 0,24 \ 0,21 \ 0,32)$$

$$p_1(2)=0,09; \quad p_2(2)=0,14; \quad p_3(2)=0,24; \quad p_4(2)=0,21; \quad p_5(2)=0,32;$$

після 3-го тесту:

$$(0,09 \ 0,14 \ 0,24 \ 0,21 \ 0,32) \cdot \begin{pmatrix} 0,30 & 0,20 & 0,20 & 0,15 & 0,15 \\ 0 & 0,40 & 0,30 & 0,20 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0,60 & 0,30 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,03 \ 0,07 \ 0,2 \ 0,21 \ 0,49)$$

$$p_1(3)=0,03; \quad p_2(3)=0,07; \quad p_3(3)=0,2; \quad p_4(3)=0,21; \quad p_5(3)=0,49;$$

після 4-го тесту:

$$(0,03 \ 0,07 \ 0,2 \ 0,21 \ 0,49) \cdot \begin{pmatrix} 0,30 & 0,20 & 0,20 & 0,15 & 0,15 \\ 0 & 0,40 & 0,30 & 0,20 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0,60 & 0,30 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,01 \ 0,04 \ 0,15 \ 0,17 \ 0,63)$$

$$p_1(4)=0,01; \ p_2(4)=0,04; \ p_3(4)=0,15; \ p_4(4)=0,17; \ p_5(4)=0,63;$$

після 5-го тесту:

$$(0,01 \ 0,04 \ 0,15 \ 0,17 \ 0,63) \cdot \begin{pmatrix} 0,30 & 0,20 & 0,20 & 0,15 & 0,15 \\ 0 & 0,40 & 0,30 & 0,20 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0,60 & 0,30 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0,02 \ 0,1 \ 0,13 \ 0,75)$$

$$p_1(5)=0; \ p_2(5)=0,02; \ p_3(5)=0,1; \ p_4(5)=0,13; \ p_5(5)=0,75;$$

Результат роботи програмного продукту:

```
Python Console
>>> runfile('/Users/katiakrut/PycharmProjects/mathModeling/project_5/project_5.py',
matrix =
    0.3    0.2    0.2    0.15   0.15
    0.0    0.4    0.3    0.2    0.1
    0.0    0.0    0.6    0.3    0.1
    0.0    0.0    0.0    0.45   0.55
    0.0    0.0    0.0    0.0    1.0

1 шаг
(1 0 0 0 0) * matrix = (0.3 0.2 0.2 0.15 0.15)
p1(1) = 0.3  p2(1) = 0.2  p3(1) = 0.2  p4(1) = 0.15  p5(1) = 0.15

2 шаг
(0.3 0.2 0.2 0.15 0.15) * matrix = (0.09 0.14 0.24 0.21 0.32)
p1(2) = 0.09  p2(2) = 0.14  p3(2) = 0.24  p4(2) = 0.21  p5(2) = 0.32

3 шаг
(0.09 0.14 0.24 0.21 0.32) * matrix = (0.03 0.07 0.2 0.21 0.49)
p1(3) = 0.03  p2(3) = 0.07  p3(3) = 0.2  p4(3) = 0.21  p5(3) = 0.49

4 шаг
(0.03 0.07 0.2 0.21 0.49) * matrix = (0.01 0.04 0.15 0.17 0.63)
p1(4) = 0.01  p2(4) = 0.04  p3(4) = 0.15  p4(4) = 0.17  p5(4) = 0.63

5 шаг
(0.01 0.04 0.15 0.17 0.63) * matrix = (0.0 0.02 0.1 0.13 0.75)
p1(5) = 0.0  p2(5) = 0.02  p3(5) = 0.1  p4(5) = 0.13  p5(5) = 0.75

>>>
```

Код програми:

```
import numpy as np

def get_matrix(arr):
    return '\n'.join([''.join(['{:6}'.format(item) for item in row]) for row
in arr])

def get_vector(arr):
    return f"({' '.join([f'{round(x, 2)}' for x in arr])})"

p_temp = np.array([])

def get_result(n, p, P):
    for i in range(n):
        global p_temp
        p_temp = p
        p = np.dot(p, P)
        print(f"{i + 1} крок")
        print(get_vector(p_temp) + " * matrix = " + get_vector(p))
        print(" ".join([f"p{j + 1}({i + 1}) = {np.round(p[j], 2)} " for j in
range(len(p))]) + "\n")

iterations = 5
p_arr = np.array([1, 0, 0, 0, 0])
P_arr = np.array([[0.3, 0.2, 0.2, 0.15, 0.15],
                  [0, 0.40, 0.30, 0.20, 0.10],
                  [0, 0, 0.60, 0.30, 0.10],
                  [0, 0, 0, 0.45, 0.55],
                  [0, 0, 0, 0, 1]])

print(f"matrix = \n{get_matrix(P_arr)}\n\n")
get_result(iterations, p_arr, P_arr)
```

Перевірка:

Transition matrix

Transition matrix - P , and the initial state vector.

From\To	State-1	State-2	State-3	State-4	State-5
State-1	0.30	0.20	0.20	0.15	0.15
State-2	0	0.40	0.30	0.20	0.10
State-3	0	0	0.60	0.30	0.10
State-4	0	0	0	0.45	0.55
State-5	0	0	0	0	1
Initial State (S)	1	0	0	0	0

[Calculate](#)[Clear](#)[Insert state](#)[Delete state](#)[Load example](#)

Markov chain calculator results

The probability vector after 5 steps:

State-1	State-2	State-3	State-4	State-5
0.00243	0.01562	0.10212	0.13159	0.74824

The probability to be in **State-1** after 5 steps is: **0.00243**.

The probability to be in **State-2** after 5 steps is: **0.01562**.

The probability to be in **State-3** after 5 steps is: **0.10212**.

The probability to be in **State-4** after 5 steps is: **0.13159**.

The probability to be in **State-5** after 5 steps is: **0.74824**.

The steady-state vector:

State-1	State-2	State-3	State-4	State-5
0	0	0	0	1

The probability vector in each step:

Step	State-1	State-2	State-3	State-4	State-5	Formula
S_0	1	0	0	0	0	Initial State
S_1	0.3	0.2	0.2	0.15	0.15	$S_0 \times P = S_0 \times P^1$
S_2	0.09	0.14	0.24	0.2125	0.3175	$S_1 \times P = S_0 \times P^2$
S_3	0.027	0.074	0.204	0.20913	0.48588	$S_2 \times P = S_0 \times P^3$
S_4	0.0081	0.035	0.15	0.17416	0.63274	$S_3 \times P = S_0 \times P^4$
S_5	0.00243	0.01562	0.10212	0.13159	0.74824	$S_4 \times P = S_0 \times P^5$

Висновки про перебування системи в різних станах:

Таким чином за результатами маємо:

- всі прилади цілі після 5-ти тестів з імовірністю $p_1(5) = 0$;
- виявлено один прилад після 5-ти тестів з імовірністю $p_2(5) = 0.02$;
- виявлено два прилади після 5-ти тестів з імовірністю $p_3(5) = 0.1$;
- виявлено три прилади після 5-ти тестів з імовірністю $p_4(5) = 0.13$;
- виявлено чотири прилади після 5-ти тестів з імовірністю $p_5(5) = 0.75$.

Висновки:

Під час виконання роботи було зроблено такі кроки:

- змодельовано динамічну систему на основі марковських процесів з дискретним часом;
- побудовано граф станів системи;
- складено матрицю перехідних імовірностей;
- розроблено програмний продукт для розрахунку імовірностей станів на кожному кроці;
- проведено тестування програмного продукту методом порівняння результатів програми з онлайн-калькулятором.
- на основі отриманих даних було зроблено висновки про перебування системи в різних станах.