

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Навчально-науковий інститут атомної та теплової енергетики

Кафедра інженерії програмного забезпечення в енергетиці

ДОМАШНЯ РОБОТА №6

**з дисципліни «Математичне моделювання та
оптимізація процесів і систем»**

**тема ««Дослідження характеристик ефективності систем
масового обслуговування»»**

Варіант № 17

Виконала:

Студентка 3 курсу, групи ТІ-01

Круть Катерини

(прізвище ім'я)

Дата здачі 08.05.2023

Київ – 2023

Задача 1

Розглядається робота майстерні по ремонту взуття, в якій працює одна людина. В середньому майстер виконує замовлення протягом 30 хв. Поруч з ним розташоване одне крісло, в якому замовник очікує замовлення. Майстер не має постійних замовників, і клієнти приходять до нього незалежно один від одного в середньому кожні 40 хв. Клієнти – народ нетерплячий, тому в разі зайнятості майстра йдуть до іншого. Визначити граничну імовірність станів і характеристики обслуговування СМО:

- відносної пропускної здатності;
- абсолютної пропускної здатності;
- ймовірності відмов;

Проаналізувати характеристики та зробити висновки про роботу майстерні.

Розв'язання.

Математичною моделлю роботи майстерні по ремонту взуття є **одноканальна СМО з відмовами**. Її основні параметри:

- потік клієнтів з інтенсивністю

$$\lambda = \frac{1}{t_{\lambda}} = \frac{1}{40} = 0,025 \text{ клієнтів/хв};$$

- потік обслуговування клієнтів з інтенсивністю

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}} = \frac{1}{30} = 0,033 \text{ клієнтів/хв};$$

- ймовірність того, що канал вільний

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0,033}{0,033 + 0,025} = 0,569;$$

- ймовірність того, що канал зайнятий

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{0,025}{0,033 + 0,025} = 0,431;$$

- ймовірність відмови

$$P_{\text{ВІДМ}} = 1 - p_0 = p_1 = 0,431;$$

- відносна пропускна здатність системи

$$Q = p_0 = 0,569;$$

- абсолютна пропускна здатність системи

$$A = \lambda \cdot Q = 0,025 * 0,569 = 0,014;$$

- середній час обслуговування одного виклику

$$t_{обс} = \frac{1}{\mu} = 30хв;$$

- середній час простою каналу

$$t_{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = 40хв.$$

Результат виконання програми:

```
Задача 1
Розв'язання задачі з одноканальною СМО з відмовами
Вхідні дані:  $\lambda = 0.025$ 
Вхідні дані:  $\mu = 0.033$ 
Граничні ймовірності:  $p_0 = 0.569$ 
Граничні ймовірності:  $p_1 = 0.431$ 
Ймовірність відмови:  $P(\text{відм}) = 0.431$ 
Відносна пропускна ймовірність:  $Q = 0.569$ 
Абсолютна пропускна здатність:  $A = 0.014$ 
Середній час обслуговування:  $t(\text{обс}) = 30.303$ 
Середній час простою каналу:  $t(\lambda) = 40.0$ 
```

Висновки:

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок, що майстер меншу частину часу був зайнятий з ймовірністю 43%. У середньому майстер обслуговує 57% замовлень. За хвилину буде прийнято 0,014 замовлень, хоча номінальна пропускна спроможність майстра була 0,033 замовлення $\mu=0,033$, що може бути пов'язано із випадковим часом і випадковим потоком замовлень.

Задача 2

Розглянемо телефонну лінію, на вхід якої надходить простий потік дзвінків з інтенсивністю $\lambda=0,4$ дзвінків/хв. Середня тривалість розмови становить 3 хв. Час розмови має показниковий закон розподілу.

Знайти граничні ймовірності станів системи та характеристики обслуговування:

- відносної пропускної здатності;
- абсолютної пропускної здатності;
- ймовірності відмов;
- середній час обслуговування одного дзвінка;
- середній час простою лінії.

Проаналізувати характеристики СМО та зробити висновки про роботу телефонної лінії.

Розв'язання.

Математичною моделлю телефонної лінії є одноканальна СМО з відмовами. Її основні параметри:

- потік викликів клієнтів з інтенсивністю

$$\lambda = \frac{1}{t_{\lambda}} = 0,4 \text{ дзвінків/хв};$$

- потік обслуговування викликів з інтенсивністю

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}} = \frac{1}{3} = 0,333 \text{ дзвінків/хв.}$$

Використовуючи формули для показників ефективності, отримаємо:

1) ймовірність того, що канал вільний

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0,333}{0,333 + 0,4} = 0,454;$$

2) ймовірність того, що канал зайнятий

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{0,4}{0,333 + 0,4} = 0,546;$$

3) ймовірність відмови

$$P_{\text{ВІДМ}} = 1 - p_0 = p_1 = 0,546;$$

4) відносна пропускна здатність системи

$$Q = p_0 = 0,454;$$

5) абсолютна пропускна здатність системи

$$A = \lambda \cdot Q = 0,4 \cdot 0,454 = 0,182;$$

6) середній час обслуговування одного виклику

$$t_{обс} = \frac{1}{\mu} = 3хв;$$

7) середній час простою каналу

$$t_{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,4} = 2,5хв.$$

Скриншот виконання програми:

Задача 2

Розв'язання задачі з одноканальною СМО з відмовами

Вхідні дані: $\lambda = 0.4$

Вхідні дані: $\mu = 0.333$

Граничні ймовірності: $p_0 = 0.454$

Граничні ймовірності: $p_1 = 0.546$

Ймовірність відмови: $P(\text{відм}) = 0.546$

Відносна пропускна ймовірність: $Q = 0.454$

Абсолютна пропускна здатність: $A = 0.182$

Середній час обслуговування: $t(\text{обс}) = 3.003$

Середній час простою каналу: $t(\lambda) = 2.5$

Висновки:

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок, що телефонна лінія більшу частину часу була зайнята з ймовірністю 55%. У середньому лінія обслуговує 45% дзвінків. За хвилину буде прийнято 0,18 дзвінка, хоча номінальна пропускна спроможність лінії була 0,333 дзвінка $\mu=0,333$, що може бути пов'язано із випадковим часом і випадковим потоком дзвінків.

Задача 3

У магазині «Смаколики» є одна каса для обслуговування. Покупці прибувають згідно пуассонівського розподілу з інтенсивністю λ людей/год. Середній час обслуговування однієї людини становить $(1+n)$ хвилин.

Визначити граничні значення ймовірностей та показники ефективності роботи магазину:

- відносну пропускну здатність;
- абсолютну пропускну здатність;
- ймовірність відмов;
- середній час обслуговування одного автомобіля;
- середній час простою блоку.

Порівняти фактичну пропускну здатність магазину з номінальною, котра була б, якби кожен покупець обслуговувався точно $(1+n)$ хвилин і автомобілі надходили один за одним без перерви. Проаналізувати, як будуть змінюватись характеристики системи $P_{відм}$, Q , A від t – середнього часу обслуговування одного покупця, якщо значення t змінювати кожні 2 хвилини на проміжку від $(1+n)$ хв до $(11+n)$ хв. Дані представити у вигляді таблиць. Зробити висновки.

Примітка. Варіант 2 ($n = 2$)

Розв'язання.

Математичною моделлю магазину лінії є одноканальна СМО з відмовами.

Її основні параметри:

- потік викликів клієнтів з інтенсивністю

$$\lambda = \frac{1}{t_{\lambda}} = 2 \text{ людей/год};$$

- потік обслуговування викликів з інтенсивністю

$$\mu = \frac{1}{t_{обс}} = \frac{1}{\frac{3}{60}} = \frac{60}{3} = 20 \text{ людей/год}$$

- Використовуючи формули для показників ефективності, отримаємо:

1) ймовірність того, що канал вільний

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{20}{2 + 20} = 0,90;$$

2) ймовірність того, що канал зайнятий

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{2}{2 + 20} = 0,09;$$

3) ймовірність відмови

$$P_{відм} = 1 - p_0 = p_1 = 0,10;$$

4) відносна пропускна здатність системи –

$$Q = p_0 = 0,90;$$

5) абсолютна пропускна здатність системи –

$$A = \lambda \cdot Q = 2 \cdot 0,90 = 1,8;$$

6) середній час обслуговування одного виклику –

$$t_{обс} = \frac{1}{\mu} = 3хв = 0,05 год;$$

7) середній час простою каналу –

$$t_{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0,5 год.$$

Результат виконання програми:

Задача 3

Розв'язання задачі з одноканальною СМО з відмовами

Вхідні дані: $\lambda = 2$

Вхідні дані: $\mu = 20$

Граничні ймовірності: $p_0 = 0.909$

Граничні ймовірності: $p_1 = 0.091$

Ймовірність відмови: $P(\text{відм}) = 0.091$

Відносна пропускна ймовірність: $Q = 0.909$

Абсолютна пропускна здатність: $A = 1.818$

Середній час обслуговування: $t(\text{обс}) = 0.05$

Середній час простою каналу: $t(\lambda) = 0.5$

Висновки:

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок, що магазин меншу частину часу був зайнятий (з ймовірністю 48%). У середньому магазин обслуговує 52% покупців. За годину буде прийнято 3,621 покупців, хоча номінальна пропускна спроможність лінії була 7,5 покупців ($\mu=7,5$), що може бути пов'язано із випадковим часом і випадковим потоком покупців.

Аналіз змін характеристик системи від зміни середнього часу обслуговування:

$P_{\text{відм}}$	0.091	0.143	0.189	0.233	0.268	0.302
t , хв.	3	5	7	9	11	13

Q	0.909	0.857	0.811	0.767	0.732	0.698
t , хв.	3	5	7	9	11	13

A	1.818	1.714	1.622	1.535	1.463	1.395
t , хв.	3	5	7	9	11	13

$t = 5$ хв

```
Задача 3
Розв'язання задачі з одноканальною СМО з відмовами
Вхідні дані:  $\lambda = 2$ 
Вхідні дані:  $\mu = 12.0$ 
Граничні ймовірності:  $p_0 = 0.857$ 
Граничні ймовірності:  $p_1 = 0.143$ 
Ймовірність відмови:  $P(\text{відм}) = 0.143$ 
Відносна пропускна ймовірність:  $Q = 0.857$ 
Абсолютна пропускна здатність:  $A = 1.714$ 
Середній час обслуговування:  $t(\text{обс}) = 0.083$ 
Середній час простою каналу:  $t(\lambda) = 0.5$ 
```

$t = 7$ хв

```
Задача 3
Розв'язання задачі з одноканальною СМО з відмовами
Вхідні дані:  $\lambda = 2$ 
Вхідні дані:  $\mu = 8.571$ 
Граничні ймовірності:  $p_0 = 0.811$ 
Граничні ймовірності:  $p_1 = 0.189$ 
Ймовірність відмови:  $P(\text{відм}) = 0.189$ 
Відносна пропускна ймовірність:  $Q = 0.811$ 
Абсолютна пропускна здатність:  $A = 1.622$ 
Середній час обслуговування:  $t(\text{обс}) = 0.117$ 
Середній час простою каналу:  $t(\lambda) = 0.5$ 
```


t = 9 хв

```
Задача 3
Розв'язання задачі з одноканальною СМО з відмовами
Вхідні дані:  $\lambda = 2$ 
Вхідні дані:  $\mu = 6.667$ 
Граничні ймовірності:  $p_0 = 0.769$ 
Граничні ймовірності:  $p_1 = 0.231$ 
Ймовірність відмови:  $P(\text{відм}) = 0.231$ 
Відносна пропускна ймовірність:  $Q = 0.769$ 
Абсолютна пропускна здатність:  $A = 1.538$ 
Середній час обслуговування:  $t(\text{обс}) = 0.15$ 
Середній час простою каналу:  $t(\lambda) = 0.5$ 
```

t = 11 хв

```
Задача 3
Розв'язання задачі з одноканальною СМО з відмовами
Вхідні дані:  $\lambda = 2$ 
Вхідні дані:  $\mu = 5.455$ 
Граничні ймовірності:  $p_0 = 0.732$ 
Граничні ймовірності:  $p_1 = 0.268$ 
Ймовірність відмови:  $P(\text{відм}) = 0.268$ 
Відносна пропускна ймовірність:  $Q = 0.732$ 
Абсолютна пропускна здатність:  $A = 1.463$ 
Середній час обслуговування:  $t(\text{обс}) = 0.183$ 
Середній час простою каналу:  $t(\lambda) = 0.5$ 
```

t = 13 хв:

```
Задача 3
Розв'язання задачі з одноканальною СМО з відмовами
Вхідні дані:  $\lambda = 2$ 
Вхідні дані:  $\mu = 4.615$ 
Граничні ймовірності:  $p_0 = 0.698$ 
Граничні ймовірності:  $p_1 = 0.302$ 
Ймовірність відмови:  $P(\text{відм}) = 0.302$ 
Відносна пропускна ймовірність:  $Q = 0.698$ 
Абсолютна пропускна здатність:  $A = 1.395$ 
Середній час обслуговування:  $t(\text{обс}) = 0.217$ 
Середній час простою каналу:  $t(\lambda) = 0.5$ 
```

Як можна побачити із результатів, зі збільшенням середнього часу обслуговування збільшується ймовірність відмови, а абсолютна та відносна пропускні здатності будуть зменшуватися.

Задача 4

Нехай 5-канальна СМО являє собою централізований склад ЦС по обробці вантажів в контейнерах із п'ятьма взаємозамінними навантажувачами для обробки вантажів. Потік вантажів в контейнерах, що надходять на ЦС, має інтенсивність $\lambda=0,3+0, n$ (контейнер на годину).

Середня тривалість обслуговування $\overline{t_{обс}} = 1,2 + 0, n$ год. Потік заявок на обробку вантажів і потік обслуговування цих вантажів найпростіший.

Визначити характеристики обслуговування в усталеному режимі СМО:

- граничні ймовірності станів;
- ймовірність відмови в обслуговуванні заявки;
- відносну пропускну здатність ЦС;
- абсолютну пропускну здатність ЦС;
- середнє число зайнятих навантажувачів ЦС.

Визначити, скільки потрібно придбати навантажувачів, щоб збільшити пропускну здатність ЦС у 5 разів. Результати розрахунків оформити у вигляді таблиці.

Примітка. Варіант 2 (n = 2)

Розв'язання.

Математичною моделлю магазину лінії є багатоканальна СМО з відмовами. Її основні параметри:

- потік викликів клієнтів з інтенсивністю

$$\lambda = \frac{1}{t_{\lambda}} = 0,5 \text{ контейнер/год};$$

- потік обслуговування викликів з інтенсивністю

$$\mu = \frac{1}{t_{обс}} = \frac{1}{1,4} = 0.714 \text{ контейнер/год}$$

- кількість каналів $n = 2$.

Визначимо характеристики обслуговування в усталеному режимі СМО. Для цього ще додатково знайдемо приведену інтенсивність потоку вантажу:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,5}{0.714} = 0,70028$$

1) Граничні ймовірності станів знайдемо за формулами Ерланга:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!}} = 0.496$$

$$p_1 = \frac{\rho^1}{1!} p_0 = 0.348$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = 0.122$$

$$p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0 = 0.028$$

$$p_4 = \frac{\rho^4}{4!} p_0 = 0.005$$

$$p_5 = \frac{\rho^5}{5!} p_0 = 0.001$$

2) Ймовірність відмови в обслуговуванні вантажу в контейнер

$$P_{\text{відм}} = p_5 = 0.001$$

3) Відносна пропускна здатність ЦС

$$Q = 1 - p_5 = 0.999;$$

4) Абсолютна пропускна здатність ЦС

$$A = \lambda \cdot Q = 0.5 \cdot 0.999 = 0.4995;$$

5) Середнє число зайнятих навантажувачів на ЦС

$$\bar{k} = \rho(1 - p_5) = 1.842$$

Результат виконання програми:

```
Задача 4
Розв'язання задачі з багатоканальною СМО з відмовами
Вхідні дані: λ = 0.5
Вхідні дані: μ = 0.714
Вхідні дані: n = 5
Приведена інтенсивність потоку: ρ0 = 0.7
Граничні ймовірності: p0 = 0.496
Граничні ймовірності =
p1 = 0.348
p2 = 0.122
p3 = 0.028
p4 = 0.005
p5 = 0.001
Ймовірність відмови: P(відм) = 0.001
Відносна пропускна ймовірність: Q = 0.999
Абсолютна пропускна здатність: A = 0.499
Середнє число зайнятих навантажувачів на ЦС: k = 0.7
```

Висновки:

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити такі висновки:

- при сталому режимі роботи ЦС в середньому буде зайнято 2 навантажувача з п'яти, а інші будуть простоювати;
- у середньому навантажувачами обслуговується 99,9% вантажу, що надходить до складу, і це є дуже високим показником ефективності роботи складу;
- навантажувачі здатні здійснити обслуговування в середньому 0,4995 контейнерів за 1 години роботи.

Очевидно, що пропускну здатність ЦС при даних λ та μ можна ще збільшити тільки за рахунок збільшення числа навантажувачів. Визначимо, скільки потрібно використовувати навантажувачів для скорочення числа необслужених контейнерів, що надходять до ЦС, у 5 разів, тобто щоб ймовірність відмови в обробці вантажів не перевищувала $0.001/5=0.0002$. Для цього виконаємо перерахунок ймовірності відмови для різної кількості навантажувачів.

Результати представлені в таблиці

n	1	2	3	4	5	6	7
P_0	0.588	0.514	0.499	0.497	0.496	0.496	0.496
$P_{\text{відм}}$	0.412	0.126	0.029	0.005	0.001	0.0	0.0

n = 1

Задача 4

Розв'язання задачі з багатоканальною СМО з відмовами

Вхідні дані: $\lambda = 0.5$

Вхідні дані: $\mu = 0.714$

Вхідні дані: $n = 1$

Приведена інтенсивність потоку: $\rho_0 = 0.7$

Граничні ймовірності: $p_0 = 0.588$

Граничні ймовірності =

$p_1 = 0.412$

Ймовірність відмови: $P(\text{відм}) = 0.412$

Відносна пропускну ймовірність: $Q = 0.588$

Абсолютна пропускну здатність: $A = 0.294$

Середнє число зайнятих навантажувачів на ЦС: $k = 0.412$

n = 2

```
Задача 4
Розв'язання задачі з багатоканальною СМО з відмовами
Вхідні дані:  $\lambda = 0.5$ 
Вхідні дані:  $\mu = 0.714$ 
Вхідні дані:  $n = 2$ 
Приведена інтенсивність потоку:  $\rho_0 = 0.7$ 
Граничні ймовірності:  $p_0 = 0.514$ 
Граничні ймовірності =
 $p_1 = 0.36$ 
 $p_2 = 0.126$ 
Ймовірність відмови:  $P(\text{відм}) = 0.126$ 
Відносна пропускна ймовірність:  $Q = 0.874$ 
Абсолютна пропускна здатність:  $A = 0.437$ 
Середнє число зайнятих навантажувачів на ЦС:  $k = 0.612$ 
```

n = 3

```
Задача 4
Розв'язання задачі з багатоканальною СМО з відмовами
Вхідні дані:  $\lambda = 0.5$ 
Вхідні дані:  $\mu = 0.714$ 
Вхідні дані:  $n = 3$ 
Приведена інтенсивність потоку:  $\rho_0 = 0.7$ 
Граничні ймовірності:  $p_0 = 0.499$ 
Граничні ймовірності =
 $p_1 = 0.35$ 
 $p_2 = 0.122$ 
 $p_3 = 0.029$ 
Ймовірність відмови:  $P(\text{відм}) = 0.029$ 
Відносна пропускна ймовірність:  $Q = 0.971$ 
Абсолютна пропускна здатність:  $A = 0.485$ 
Середнє число зайнятих навантажувачів на ЦС:  $k = 0.68$ 
```

n = 4

```
Задача 4
Розв'язання задачі з багатоканальною СМО з відмовами
Вхідні дані:  $\lambda = 0.5$ 
Вхідні дані:  $\mu = 0.714$ 
Вхідні дані:  $n = 4$ 
Приведена інтенсивність потоку:  $\rho_0 = 0.7$ 
Граничні ймовірності:  $p_0 = 0.497$ 
Граничні ймовірності =
 $p_1 = 0.348$ 
 $p_2 = 0.122$ 
 $p_3 = 0.028$ 
 $p_4 = 0.005$ 
Ймовірність відмови:  $P(\text{відм}) = 0.005$ 
Відносна пропускна ймовірність:  $Q = 0.995$ 
Абсолютна пропускна здатність:  $A = 0.497$ 
Середнє число зайнятих навантажувачів на ЦС:  $k = 0.697$ 
```

n = 6

```
Задача 4
Розв'язання задачі з багатоканальною СМО з відмовами
Вхідні дані:  $\lambda = 0.5$ 
Вхідні дані:  $\mu = 0.714$ 
Вхідні дані:  $n = 6$ 
Приведена інтенсивність потоку:  $\rho_0 = 0.7$ 
Граничні ймовірності:  $p_0 = 0.496$ 
Граничні ймовірності =
 $p_1 = 0.348$ 
 $p_2 = 0.122$ 
 $p_3 = 0.028$ 
 $p_4 = 0.005$ 
 $p_5 = 0.001$ 
 $p_6 = 0.0$ 
Ймовірність відмови:  $P(\text{відм}) = 0.0$ 
Відносна пропускна ймовірність:  $Q = 1.0$ 
Абсолютна пропускна здатність:  $A = 0.5$ 
Середнє число зайнятих навантажувачів на ЦС:  $k = 0.7$ 
```

n = 7

```
Задача 4
Розв'язання задачі з багатоканальною СМО з відмовами
Вхідні дані:  $\lambda = 0.5$ 
Вхідні дані:  $\mu = 0.714$ 
Вхідні дані:  $n = 7$ 
Приведена інтенсивність потоку:  $\rho_0 = 0.7$ 
Граничні ймовірності:  $p_0 = 0.496$ 
Граничні ймовірності =
 $p_1 = 0.348$ 
 $p_2 = 0.122$ 
 $p_3 = 0.028$ 
 $p_4 = 0.005$ 
 $p_5 = 0.001$ 
 $p_6 = 0.0$ 
 $p_7 = 0.0$ 
Ймовірність відмови:  $P(\text{відм}) = 0.0$ 
Відносна пропускна ймовірність:  $Q = 1.0$ 
Абсолютна пропускна здатність:  $A = 0.5$ 
Середнє число зайнятих навантажувачів на ЦС:  $k = 0.7$ 
```

Отже, потрібно придбати 7 навантажувачів, щоб збільшити пропускну здатність ЦС у 5 разів.

Задача 5

На автозаправній стації АЗС є одна колонка. Майданчик при стації, на якій машини очікують заправку, може вмістити не більше 3 машин одночасно, і якщо вона зайнята, то чергова машина, що прибула, в чергу не стає, а проїжджає на сусідню стацію. У середньому машини прибувають на стацію кожні $(1,5+0,n)$ хвилини. Процес заправки однієї машини триває в середньому n хвилин.

Визначити характеристики обслуговування в усталеному режимі СМО:

- граничні ймовірності станів;
- ймовірність відмови в обслуговуванні авто;
- відносну пропускну здатність АЗС;
- абсолютну пропускну здатність АЗС;
- середню кількість автомобілів, які очікують в черзі;
- середню кількість автомобілів, які знаходяться в обслуговуванні;
- середню кількість автомобілів, які знаходяться на АЗС (включно з тими, що обслуговуються);
- середній час очікування автомобіля в черзі;
- середній час, витрачений на обслуговування одного автомобіля на АЗС;
- середній час перебування автомобіля на АЗС, включаючи обслуговування.

Примітка. Варіант 2 ($n = 2$)

Розв'язання.

Математичною моделлю магазину лінії є **одноканальна СМО з очікуванням і обмеженою чергою**. Її основні параметри:

• потік автомобілів з інтенсивністю $\lambda = \frac{1}{t_\lambda} = \frac{1}{1,7} = 0,588 \text{ автомобіль/хв};$

- потік обслуговування викликів з інтенсивністю

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ автомобіль/хв};$$

- довжина черги $n = 3$.

Визначимо характеристики обслуговування в усталеному режимі СМО. Для цього ще додатково знайдемо приведену інтенсивність потоку автомобілів:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,588}{0,5} = 1,176$$

1) Граничні ймовірності станів:

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^5} = 0,141$$

$$p_1 = \rho^1 p_0 = 0,166$$

$$p_2 = \rho^2 p_0 = 0,195$$

$$p_3 = \rho^3 p_0 = 0,229$$

$$p_4 = \rho^4 p_0 = 0,269$$

2) Ймовірність відмови в обслуговуванні автомобілів

$$P_{\text{відм}} = p_4 = 0.269$$

3) Відносна пропускна здатність ЦС

$$Q = 1 - p_4 = 0.731;$$

4) Абсолютна пропускна здатність ЦС

$$A = \lambda \cdot Q = 0,312 \cdot 0,455 = 0.43;$$

5) Середнє число автомобілів, що очікують в черзі:

$$\bar{r} = \frac{\left[1 - \rho^n(n + 1 - n\rho)\right]\rho^2}{(1 - \rho^{n+2})(1 - \rho)} = -0.28$$

6) Середня кількість автомобілів, які знаходяться під обслуговуванням:

$$\bar{\omega} = \frac{\rho - \rho^5}{1 - \rho^5} = 0.859$$

7) Середня кількість автомобілів, що перебувають в АЗС:

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{\omega} = 0,993 + 2,551 = 0.579$$

8) Середній час очікування автомобіля в черзі:

$$t_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{2,551}{0,455} = -0.477 \text{ хв}$$

9) Середній час, витрачений на обслуговування одного автомобіля на АЗС:

$$t_{\text{обс}} = \frac{Q}{\mu} = \frac{0,312}{0,143} = 1.461 \text{ хв}$$

10) Середній час, який автомобіль проводить на АЗС:

$$t_{\text{сум}} = t_{\text{оч}} + t_{\text{обс}} = 0.984 \text{ хв}$$

Результат виконання програми:

Висновки:

Отже, з аналізу роботи АЗС випливає, що з кожних 100 автомобілів, що під'їжджали, 26,9 отримує відмову, тобто обслуговується приблизно 1/3 заявок. Тому необхідно скоротити час обслуговування 1 автомобіля (збільшити інтенсивність потоку обслуговування), або збільшити число колонок, або збільшити майданчик для очікування. Оптимальне рішення приймається з урахуванням витрат, пов'язаних відповідно із збільшенням штату обслуговуючого персоналу (збільшення продуктивності каналу), з розширенням майданчика для очікування або придбання додаткової колонки, і витрат, пов'язаних з втратою заявок на обслуговування.

Код програми:

```
import math

definition = {
    'lamda': 'Вхідні дані:  $\lambda$ ',
    'myu': 'Вхідні дані:  $\mu$ ',
    'n': 'Вхідні дані: n',
    'p0': 'Граничні ймовірності: p0',
    'p1': 'Граничні ймовірності: p1',
    't_obs': 'Середній час обслуговування: t(обс)',
    't_lamda': 'Середній час простою каналу: t( $\lambda$ )',
    'go': 'Приведена інтенсивність потоку: go',
    'p_agay': 'Граничні ймовірності',
    'Pv': 'Ймовірність відмови: P(відм)',
    'Q': 'Відносна пропускна ймовірність: Q',
    'A': 'Абсолютна пропускна здатність: A',
    'r': 'Середня кількість заявок, що очікують в черзі: r',
    'w': 'Середня кількість заявок, що знаходиться під обслуговуванням: w',
    'k': 'Середнє число зайнятих навантажувачів на ЦС: k',
    't_och': 'Середній час очікування: t(очік)',
    't_sys': 'Середній час перебування в СМО: t(сист)"
}

def output(res):
    return f"{res['name']}\n" + '\n'.join(
        [f"{definition[i[0]]} = {round(i[1], 3) if isinstance(i[1], float) else i[1]}" for i in
         res['values'].items()]) + '\n\n'

def single_channel_rejection(lamda, myu):
    # граничні ймовірності
    p0 = myu / (lamda + myu) # ймовірність обслуговування вимоги, оскільки канал є вільним,
    p1 = lamda / (lamda + myu) # ймовірність відмови, оскільки канал зайнятий обслуговуванням попередньої
    вимоги
    Absolute = lamda * p0 # абсолютна пропускна здатність
    t_lamda = 1.0 / lamda # середній інтервал часу між надходженнями двох замовлень
    t_obslogov = 1.0 / myu # середній час обслуговування каналом одного замовлення
    return {'name': dict_cmo['scr']['name'],
            'values': {"lamda": lamda, "myu": myu, "p0": p0, "p1": p1, "Pv": p1, "Q": p0, "A": Absolute,
                       "t_obs": t_obslogov,
                       "t_lamda": t_lamda}}
```

```

def multi_channel_rejection(lamda, mya, n):
    ro = lamda / mya # інтенсивність потоку
    ro_array = [ro ** (i + 1) / math.factorial(i + 1) for i in range(n)] # factorials
    p0 = 1.0 / (1 + sum(ro_array)) # p0
    p_array = [round(el * p0, 3) for el in ro_array] # Граничні ймовірності станів за формулами Ерланга p1, p2...
    Pv = p_array[-1] # Ймовірність відмови в обслуговуванні вантажу в контейнерах
    Q = 1 - Pv # Відносна пропускна здатність ЦС
    Absolute = Q * lamda # Абсолютна пропускна здатність ЦС
    k = ro * (1 - p_array[-1]) # Середнє число зайнятих навантажувачів на ЦС
    # return output([lamda, mya, n, ro, p0, p_array, P_vidm, Q, Absolute, k])
    return {'name': dict_cmo['mcr']['name'],
            'values': {"lamda": lamda, "mya": mya, "n": n, "ro": ro, "p0": p0,
                       "p_array": '\n' + '\n'.join([f'p{i + 1} = {round(p_array[i], 3)}' for i in range(len(p_array))]),
                       "Pv": Pv, "Q": Q, "A": Absolute, "k": k}}

```

```

def single_channel_limited_waiting_list(lamda, mya, n):
    ro = lamda / mya
    p0 = (1 - ro) / (1 - ro ** (n + 2))
    p_array = [ro ** (i + 1) * p0 for i in range(n + 1)]
    Pv = p_array[-1]
    Q = 1 - Pv
    Absolute = Q * lamda
    r = (1 - (ro ** n) * (n + 1 - n * ro) * (ro ** 2)) / (1 - ro ** (n + 2)) / (1 - ro)
    w = (ro - ro ** (n + 2)) / (1 - ro ** (n + 2))
    k = r + w
    t_och = r / lamda
    t_obs = Q / mya
    t_sys = t_och + t_obs
    return {'name': dict_cmo['sclwl']['name'],
            'values': {"lamda": lamda, "mya": mya, "n": n, "ro": ro, "p0": p0,
                       "p_array": '\n' + '\n'.join([f'p{i + 1} = {round(p_array[i], 3)}' for i in range(len(p_array))]),
                       "Pv": Pv, "Q": Q, "A": Absolute, "r": r, "w": w, "k": k, "t_och": t_och, "t_obs": t_obs,
                       "t_sys": t_sys}}

```

```

dict_cmo = {
    'scr': {
        "func": single_channel_rejection,
        "name": "Розв'язання задачі з одноканальною СМО з відмовами"
    },
    'mcr': {
        'func': multi_channel_rejection,
        'name': "Розв'язання задачі з багатоканальною СМО з відмовами"
    },
}

```

```

'sclwl': {
    'func': single_channel_limited_waiting_list,
    'name': "Розв'язання задачі з одноканальною СМО з очікуванням з обмеженою чергою"
}
}

```

```

lamda_1 = 0.025
mya_1 = 0.033
print("Задача 1")
print(output(dict_cmo['scr']['func'](lamda_1, mya_1)))

```

```

lamda_2 = 0.4
mya_2 = 0.333
print("Задача 2")
print(output(dict_cmo['scr']['func'](lamda_2, mya_2)))

```

```

lamda_3 = 2
mya_3 = 20
print("Задача 3")
print(output(dict_cmo['scr']['func'](lamda_3, mya_3)))

```

```

lamda_4 = 0.5
mya_4 = 0.714
n_4 = 7
print("Задача 4")
print(output(dict_cmo['mcr']['func'](lamda_4, mya_4, n_4)))

```

```

lamda_5 = 0.588
mya_5 = 0.5
n_5 = 3
print("Задача 5")
print(output(dict_cmo['sclwl']['func'](lamda_5, mya_5, n_5)))

```

Висновок:

Під час виконання роботи було розв'язано задачі різних типів СМО, а саме 3 задачі із одноканальною СМО з відмовами, 1 задачу із багатоканальною СМО з відмовами та 1 задача із одноканальною СМО з очікуванням і обмеженою чергою. Було реалізовано програму, що може розв'язувати перераховані раніше типи задач.