

Шотспекей ТЗ № 2 "Аппроксимация"

Пример 1

Зн. наблюд. знач. ф. $y = f(x)$ при

$$x = 0,32$$

x_i	0,15	0,30	0,40	0,55
y_i	2,17	3,63	5,07	7,78

Метод Лангранжева

$$y = a_i x + b_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

(1.8)

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad b = y_{i-1} - a_i x_{i-1}$$

$$x = 0,32$$

$$x_{i-1} = 0,30 \leq x \leq x_i = 0,40 \Rightarrow$$

$$y_{i-1} = 3,63, \quad y_i = 5,07$$

\Rightarrow

$$a_i' = \frac{y_i' - y_{i-1}'}{x_i' - x_{i-1}'} = \frac{5,07 - 3,63}{0,40 - 0,30} = 14,4$$

$$b_i' = y_{i-1}' - a_i' x_{i-1}' = 3,63 - 14,4 \cdot 0,3 = -0,69$$

$$y \approx a_i' x + b_i' = 14,4 \cdot 0,32 + (-0,69) = 3,92$$

Квадратная Интерполяция

$$y = a_i' x^2 + b_i' x + c_i', \quad x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$$

$$x_i = 0,32$$

$$x_{i-1} = 0,15, \quad y_{i-1} = 2,17$$

$$x_{i+1} = 0,40, \quad y_{i+1} = 5,07$$

$$x_i = 0,30, \quad y_i = 3,63$$

$$\begin{cases} 0,15^2 a + 0,15 b_i' + c_i' = 2,17 \\ 0,30^2 a + 0,30 b_i' + c_i' = 3,63 \\ 0,40^2 a + 0,40 b_i' + c_i' = 5,07 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_i' = 18,67$$

$$b_i' = 1,33$$

$$c_i' = 1,55$$

$$y \approx 18,67 \cdot x^2 + 1,33 \cdot x + 1,55 =$$

$$= 18,67 \cdot 0,32^2 + 1,33 \cdot 0,32 + 1,55 =$$

$$\approx 3,89$$

Пример 2

Зн. знам. ф. $y = f(x)$ в м. $x = 0,1$
Знам. функції:

x	y		Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1,272	$\Delta^k y_0$	3,193	-2,014	1,000	-1,999	4,999
0,2	4,465	$\Delta^k y_1$	1,179	-1,014	-0,999	3,000	
0,4	5,644	$\Delta^k y_2$	0,165	-2,013	2,001		
0,6	5,809	$\Delta^k y_3$	-1,848	-0,012			
0,8	3,961	$\Delta^k y_4$	-1,850				
1	2,101						

$$x = 0,1$$

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,1 - 0}{0,2} = 0,5$$

3 5 разрядов

$$\begin{aligned} f(0,1) &\approx N(0,1) = 1,272 + 0,5 \cdot 3,193 + \\ &+ \frac{0,5(0,5-1)}{2!} (-2,014) + \frac{0,5(0,5-1)(0,5-2)}{3!} 1 + \\ &+ \frac{0,5(0,5-1)(0,5-2)(0,5-3)}{4!} (-1,999) + \\ &+ \frac{0,5(0,5-1)(0,5-2)(0,5-3)(0,5-4)}{5!} \cdot 4,999 = \\ &= 1,272 + 1,597 + 0,2518 + 0,06249 + \\ &+ 0,07806 + 0,1367 = 3,398, \quad \left| t = \frac{x - x_n}{h} = \frac{0,1 - 1}{0,2} = -4,5 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0,1) &\approx N(0,1) = 2,101 - 4,5(-1,865) + \\ &+ \frac{-4,5(-4,5+1)}{2!} (-0,012) + \frac{-4,5(-4,5+1)(-4,5+2)}{3!} \cdot \\ &\cdot 2,001 + \frac{-4,5(-4,5+1)(-4,5+2)(-4,5+3)}{4!} \cdot 3 + \\ &+ \frac{-4,5(-4,5+1)(-4,5+2)(-4,5+3)(-4,5+4)}{5!} \cdot 4,999 = \\ &= 2,101 + 8,370 - 0,09450 + 13,13 + 7,383 - 1,231 = \\ &= 3,402, \quad f(0,1) \approx 3,3975 \end{aligned}$$

$$f(0,1) \approx 3,3975$$

Приклад 3

Зад. МНК, вывести эмпирическую формулу для ф. $y = f(x)$, яка задана табл.

x	0,75	1,50	2,25	3,00	3,75
y	2,50	1,20	4,12	2,25	4,28

Після зобр. табл. даних \Rightarrow эмпирическую ф. для аппроксимации ф. $y = f(x)$ можна взяти параболу

$$y \approx \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

\Rightarrow квадратичний трином

$$y \approx \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$m = 2, \underline{n = 4}, \varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2$$

$$y = \begin{pmatrix} 2,50 \\ 1,20 \\ 1,12 \\ 2,25 \\ 4,28 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0,75 & 0,75^2 \\ 1 & 1,50 & 1,50^2 \\ 1 & 2,25 & 2,25^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 3,75 & 3,75^2 \end{bmatrix}$$

$$(\Phi^T \Phi) A = \Phi^T y$$

$$\Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} 5 & 11,25 & 30,94 \\ 11,25 & 30,94 & 94,92 \\ 30,94 & 94,92 & 309,76 \end{bmatrix} \quad \Phi^T y = \begin{bmatrix} 11,35 \\ 29,00 \\ 90,21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5a_0 + 11,25a_1 + 30,94a_2 = 11,35 \\ 11,25a_0 + 30,94a_1 + 94,92a_2 = 29 \\ 30,94a_0 + 94,92a_1 + 309,76a_2 = 90,21 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_0 = 4,82 \\ a_1 = -3,88 \\ a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\varphi(x) \approx 4,82 - 3,88x + x^2$$

Оцінюємо відносні похибки
оцір. апроксимації

$$(1.43) \quad \delta = \frac{\varepsilon_i}{y_i} = \frac{\varphi_i - y_i}{y_i}$$

x	$\varphi(x)$	y	ε	δ
0,75	2,47	2,5	-0,03	-0,012
1,50	1,25	1,2	0,05	0,042
2,25	1,15	1,12	0,03	0,027
3	2,17	2,25	-0,08	-0,036
3,75	4,32	4,28	0,04	0,009