

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Навчально-науковий інститут атомної та теплової енергетики

Кафедра інженерії програмного забезпечення в енергетиці

ДОМАШНЯ РОБОТА №6
з дисципліни «Математичні моделі процесів і систем»
тема «Дослідження характеристик ефективності систем
масового обслуговування»

Варіант № 13 (3)

Виконав:

Студент 3 курсу, групи ТІ-01

Круть Катерина
(прізвище ім'я)

Дата здачі 28.05.2023

Київ – 2023

Дані

Таблиця вихідних даних

№ варіанту	n	L	t , хв.	m
1	3	240	4	5
2	4	280	5	6
3	3	320	6	4
4	4	360	4	5
5	3	240	5	6
6	4	280	6	4
7	3	320	4	5
8	4	360	5	6
9	3	240	6	4
10	4	280	4	5

Завдання

Завдання 2

Дайте відповіді на запитання

- 1) Які показники необхідно знати для аналізу будь якої СМО?
- 2) Які показники ефективності можна досліджувати для багатоканальної СМО з обмеженою чергою?
- 3) Назвіть приклади СМО з необмеженою чергою.
- 4) Що означає відносна пропускна здатність СМО?
- 5) Що таке приведена інтенсивність потоку заявок? За якою формулою вона обчислюється?

Завдання 3

Довідкова служба «Знаємо все» з 3 операторами обслуговує потік заявок з інтенсивністю 0,3 клієнтів за хвилину. Середній час обслуговування одного клієнта рівний 6 хв. Служба працює цілодобово. Клієнт чекає з'єднання з оператором до тих пір, поки його не обслужать. Визначити характеристики обслуговування клієнтів. (Дані: $n = 3$; $t = 6$ хв).

Завдання 4

Відділ ТЗІ (інформаційна безпека та захист інформації) має у своєму штаті 3 консультантів, які здійснюють консультації фахівців свого підприємства та віддалених філіалів за допомогою багатоканального телефона. За статистичними даними за добу поступає в середньому 320 запитів на консультації. Середня тривалість однієї консультації дорівнює 6 хв. Довжина черги не має перевищувати 4 вхідних дзвінків, які очікують своєї черги в порядку надходження. Вважається, що потоки заявок та обслуговування найпростіші.

Визначити характеристики обслуговування групи консультантів. Проаналізувати, як будуть змінюватись характеристики системи $P_{\text{відм}}$, A , $t_{\text{оч}}$ від t – середнього часу обслуговування, якщо значення t змінювати від 1 хв до 10 хв. Побудувати три графіки $P_{\text{відм}} = f(t)$, $A = g(t)$, $t_{\text{оч}} = h(t)$. Зробити висновки. (Дані: $n = 3$; $L = 320$ запитів; $t = 6$ хв.; $m = 4$).

Розв'язання

Завдання 2

- 1) Кількість каналів, довжину черги (якщо вона є), інтенсивність потоку заявок, інтенсивність обробки заявки.
- 2) Середній час очікування, середній час обслуговування, середнє число клієнтів в черзі, інтенсивність навантаження, коефіцієнт обслуговування.
- 3) Магазин, громадський туалет, комп'ютерна система, яка обробляє запити користувачів, банківський відділ, лікарня.
- 4) Відносна пропускна здатність означає відношення кількості оброблених заявок, до кількості заявок які надійшли за одиницю часу.
- 5) Приведена інтенсивність, це відношення інтенсивності потоку заявок до інтенсивності обслуговування заявок рахується за формулою: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Завдання 3

Роботу довідкової служби можна описати за допомогою багатоканальної СМО з необмеженою чергою з параметрами кількістю каналів $n = 3$. Інтенсивність вхідного потоку, заявок в хвилину: $\lambda = 0,3$
Інтенсивність потоку обслуговування: $\mu = 0.167$.

Характеристики роботи даної СМО:

- 1) Приведена інтенсивність: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1.8$;
- 2) Граничні ймовірності:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}},$$

$$p_0 = 0.146;$$

- 3) Імовірність відмови в обслуговуванні:
 $P_{\text{ВІДМ}} = p_{n+m} = 0$;
- 4) Відносна пропускна здатність:
 $Q = 1 - P_{\text{ВІДМ}} = 1$;
- 5) Абсолютна пропускна здатність:

$$A = \lambda Q = 0,3;$$

6) Середня кількість зайнятих каналів:

$$z = \frac{A}{\mu} = 1.796;$$

7) Середня кількість заявок в черзі:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \cdot (1 - \gamma)^2}.$$

$$r = 0,572;$$

8) Середня кількість заявок, пов'язаних із системою:

$$k = z + r = 2.324;$$

9) Середній час очікування заявки в черзі (хвилин):

$$t_{\text{оч}} = \frac{r}{\lambda} = 1.757;$$

10) Середній час перебування заявки в системі (хвилин):

$$t_{\text{сист}} = t_{\text{оч}} + \frac{Q}{\mu} = 7.745$$

Завдання 4

Роботу групи консультантів можна описати за допомогою багатоканальної СМО з обмеженою чергою з параметрами $n = 3$ (число каналів), $m = 4$ (число місць в черзі). Інтенсивність вхідного потоку, (заявок в хвилину): $\lambda = 0.222$. Інтенсивність потоку обслуговування: $\mu = 0.167$.

Характеристики роботи даної СМО:

1) Приведена інтенсивність: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1.333;$

2) Граничні ймовірності:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!}}, \\ p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \dots \dots \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \quad p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0, \quad \dots \dots \quad p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0, \end{array} \right.$$

$$p_0 = 0.255;$$

$$p_1 = 0.340;$$

$$p_2 = 0.227;$$

$$p_3 = 0.101;$$

$$p_4 = 0.045;$$

$$p_5 = 0.020;$$

$$p_6 = 0.009;$$

$$p_7 = 0.004;$$

3) Імовірність відмови в обслуговуванні:

$$P_{\text{ВІДМ}} = p_{n+m} = 0.004;$$

4) Відносна пропускна здатність:

$$Q = 1 - P_{\text{ВІДМ}} = 0.996;$$

5) Абсолютна пропускна здатність:

$$A = \lambda Q = 0.221;$$

6) Середня кількість зайнятих каналів:

$$z = \frac{A}{\mu} = 1.328;$$

7) Середня кількість заявок в черзі:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (m+1) \cdot \gamma^m + m\gamma^{m+1}}{(1-\gamma)^2}.$$

$$r = 0.125;$$

8) Середня кількість заявок, пов'язаних із системою:

$$k = z + r = 1.450;$$

9) Середній час очікування заявки в черзі (хвилин):

$$t_{\text{оч}} = \frac{r}{\lambda} = 0.565;$$

10) Середній час перебування заявки в системі (хвилин):

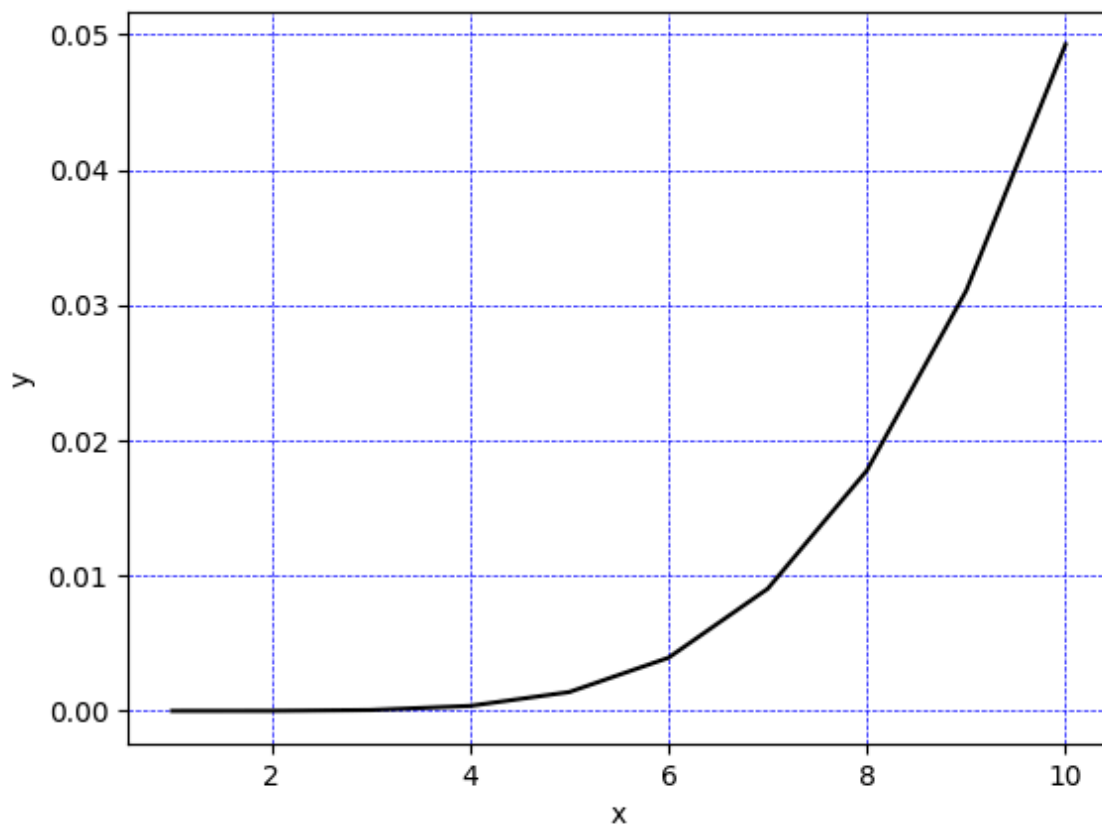
$$t_{\text{сист}} = t_{\text{оч}} + \frac{Q}{\mu} = 6.530$$

Побудова залежності характеристик ефективності СМО: $P_{\text{в\ddot{и}дм}}$, A , точ від t (середньої тривалості обслуговування однієї заявки).

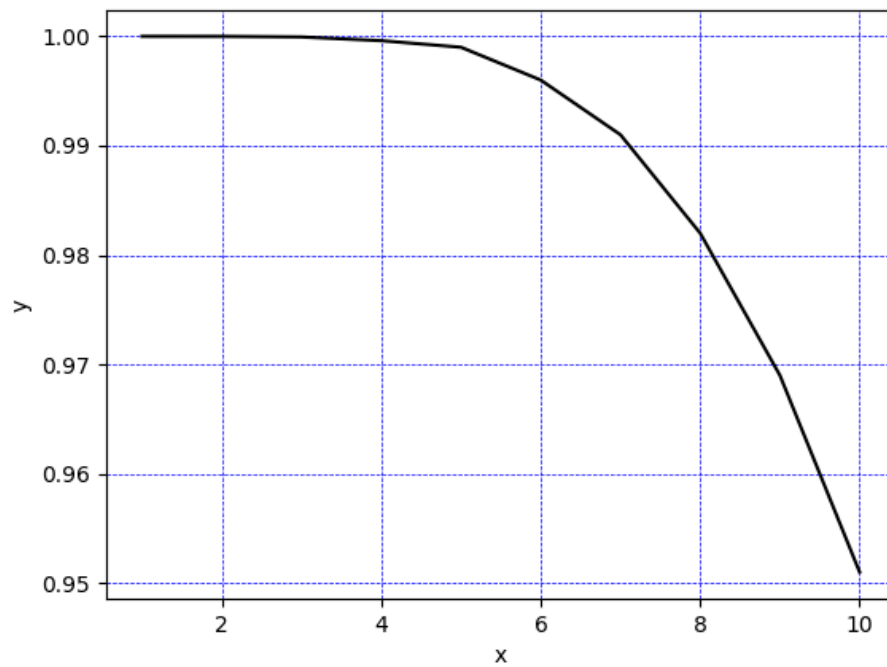
$P_{\text{в\ddot{и}дм}}$	4.409e-8	4.517e-6	6.168e-5	3.682e-4	1.392e-3	3.931e-3	9.034e-3	1.779e-2	3.108e-2	4.928e-2
Q	0.9999996	0.999995	0.99994	0.9996	0.999	0.996	0.991	0.982	0.969	0.951
A	0.222222	0.222221	0.22221	0.22214	0.2219	0.221	0.22	0.218	0.215	0.211
$t, \text{хв.}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Графіки функцій $P_{\text{в\ddot{и}дм}} = f(t)$, $A = g(t)$, $\text{точ} = h(t)$:

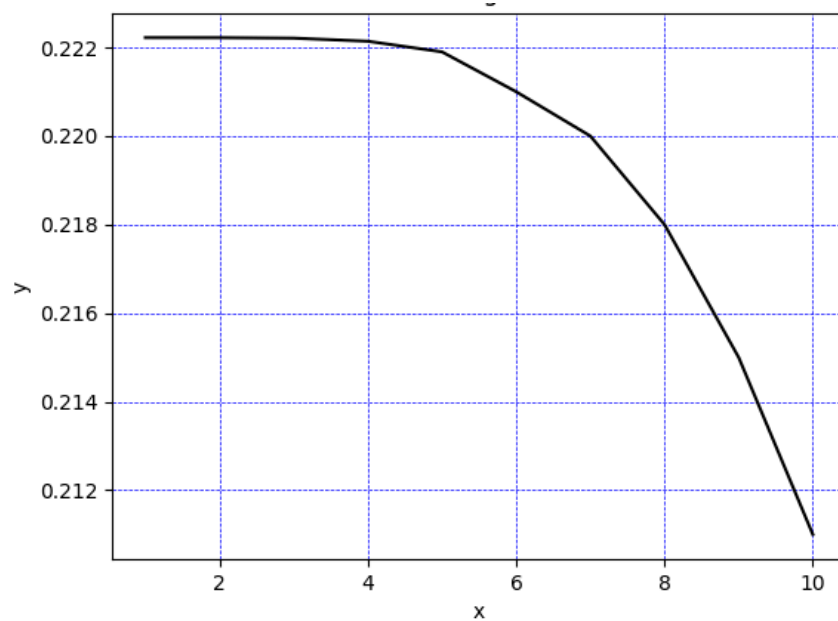
Графік 1



Графік 2



Графік 3



За отриманим результатами графіків можна зробити висновок, що при збільшенні часу обслуговування зростає ймовірність відмови, а відносна і абсолютна пропускні здатності зменшуються.

Програма

```
import numpy as np
from math import factorial

def get_probabilities_m(ro, n, m):
    return np.array([ro ** i / factorial(i) for i in range(n + 1)] + [ro ** (n + i) / n **
i / factorial(n) for i in
                                range(1, m + 1)])

def get_probabilities(ro, n):
    return np.array([1 / (np.sum([ro ** i / factorial(i) for i in range(n + 1)])
+ ro ** (n + 1) / factorial(n) / (n - ro))])

def get_r_m(ro, prob, n, m, gamma):
    return (ro ** (n + 1) * prob[0] / n / factorial(n) * (1 - (m + 1) * gamma ** m + m
* gamma ** (m + 1)) /
            (1 - gamma) ** 2)

def get_r(ro, prob, n, gamma):
    return ro ** (n + 1) * prob[0] / n / factorial(n) / (1 - gamma) ** 2

def queueing_systems(ar, dr, n, m=-1):
    if n < 1:
        raise ValueError('каналів має бути більше 1 ')

    ro = ar / dr
    gamma = ro / n

    if m > -1:
        # prob = probabilities
        prob = get_probabilities_m(ro, n, m)
        prob[0] = 1 / np.sum(prob)
        prob[1:] *= prob[0]
        P_failure = prob[-1]
        r = get_r_m(ro, prob, n, m, gamma)
```

else:

prob = get_probabilities(ro, n)

P_failure = 0

r = get_r(ro, prob, n, gamma)

Q = 1 - P_failure

A = Q * ar

z = A / dr

k = z + r

t_och = r / ar

t_sys = Q / dr + t_och

return {

'Інтенсивність вхідного потоку λ ': ar,

'Інтенсивність потоку обслуговування μ ': dr,

'Канали n': n,

'Число місць в черзі m': m,

'-----': '-----',

'Приведена інтенсивність ρ ': ro,

'-----': '-----',

'Граничні ймовірності': prob,

'Сума граничних ймовірностей': np.sum(prob),

'-----': '-----',

'Імовірність відмови в обслуговуванні Pвідм': P_failure,

'Відносна пропускна здатність Q': Q,

'Абсолютна пропускна здатність A': A,

'-----': '-----',

'Середня кількість зайнятих каналів z': z,

```

'Sередня кількість заявок в черзі r': r,
'Sередня кількість заявок, пов'язаних із системою k': k,

'-----': '-----',

'Sередній час очікування заявки в черзі (хвилин) точ': t_och,
'Sередній час перебування заявки в системі (хвилин) tсист': t_sys
}

```

```

def print_result(result):
    for key, val in result.items():
        if isinstance(val, float):
            print(f'{key} = {val:.3f}')
        elif isinstance(val, np.ndarray):
            val_str = "\n\t".join(list(map(lambda x: f'p{x[0]} - {x[1]:.3f}',
enumerate(val))))
            print(f'{key}:\n\t{val_str}')
        else:
            print(f'{key} = {val}')

def proces():
    while True:
        try:
            channels = int(input('канали: '))
            queue = int(input('число місць в черзі (якщо необмежена: -1): '))
            arrival_rates = float(input('інтенсивність вхідного потоку: '))
            departure_rates = float(input('інтенсивність потоку обслуговування: '))
            print_result(queueing_systems(arrival_rates, departure_rates, channels,
queue))
        except Exception as e:
            print(e)
        if input("Enter 0 to exit, else to continue\n") == '0':
            break

proces()

```

Програма для малювання графіків

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
def draw(x, y, name):
    """Function for drawing graphic"""
    plt.plot(x, y, 'black')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.title(name)
    plt.grid(color='blue', linestyle='--', linewidth=0.5)
    plt.show()
```

```
# graphic 1
x_1 = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10])
y_1 = np.array([4.409e-8, 4.517e-6, 6.168e-5, 3.682e-4, 1.392e-3, 3.931e-3,
9.034e-3, 1.779e-2, 3.108e-2, 4.928e-2])
name_1 = 'Рвідм = f(t)'
draw(x_1, y_1, name_1)
```

```
# graphic 2
x_2 = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10])
y_2 = np.array([0.2222222, 0.222221, 0.22221, 0.22214, 0.2219, 0.221, 0.22,
0.218, 0.215, 0.211])
name_2 = 'A = g(t)'
draw(x_2, y_2, name_2)
```

```
# graphic 3
x_3 = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10])
y_3 = np.array([0.9999996, 0.999995, 0.99994, 0.9996, 0.999, 0.996, 0.991, 0.982,
0.969, 0.951])
name_3 = 'точ = h(t)'
draw(x_3, y_3, name_3)
```