Домашня робота № 2.1

Тема. Чисельні методи наближення функцій. Інтерполяційний многочлен Лагранжа.

Завдання 1. Опрацювати з лекції 3 питання 2.1.6 та 2.1.7.

Завдання 2. Законспектувати у зошити приклади 1,2,3 з лекції 3, сфотографувати та надіслати на перевірку у файлі **Конспект_ПЗ_2_Прізвище_Група.pdf** (завдання зараховується як робота на парі і ставиться в таблицю моніторингу +).

Завдання 3. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа $L_n(x)$ для функції $f(x)$, що задана таблицею, та обчислити значення функції у заданих точках. Побудувати графік інтерполяційної функції $y = L_n(x)$ за наявним набором точок. Для виконання завдання розробити програму на одній з мов програмування.

Вимоги до оформлення Звіту

Номер варіанта слід обрати за номером списку групи. Перший за списком групи студент виконує варіант 1, другий – варіант 2, і так далі (дивитися файл в клас-румі МОНІТОРИНГ ВІДВІДУВАННЯ ЗАНЯТЬ).

Звіт має бути оформлений в MS Word та включати в себе такі складові:

1. Титульний лист (додаток 1 в кінці даного файлу).
2. Постановку задачі та варіант своїх завдань.
3. Короткий опис рішення завдання – алгоритм у вигляді блок-схеми для розв'язку наведеної задачі.
4. Математичне підґрунтя для виконання даного завдання (перелік формул, що були використані при розробленні програми на мові програмування).
5. Програма проекту (копія коду на білому фоні) та результати обчислень (обрізаний скриншот екрану). У результатах обчислень мають бути виведені:
   - *формула многочлена Лагранжа,*
   - *обчислені значення многочлена в заданих точках,*
   - *графік.*
6. Висновки (*обов'язково*).

Звіт третього завдання має бути надісланий в клас-рум двома файлами: **ДЗ-2.1_Група_Прізвище.docx** та *програмний проект* (щоб я змогла відкрити і перевірити).

Варіант	Задана таблиця значень					Задані точки				
1	x_i	-2	-1	0	1	x_i	-3	-1,5	0,5	1,5
	$f(x_i)$	-7	4	1	2	$L(x_i)$	?	?	?	?
2	x_i	-1	0	2	3	x_i	-0,5	0,5	1,5	2,5
	$f(x_i)$	-16	-7	-1	20	$L(x_i)$	?	?	?	?
3	x_i	-2	-1	1	2	x_i	-0,5	0,5	1,5	2,5
	$f(x_i)$	-26	-5	1	10	$L(x_i)$	?	?	?	?
4	x_i	-1	0	1	2	x_i	-0,5	0,5	1,5	2,5
	$f(x_i)$	-20	-5	6	25	$L(x_i)$	?	?	?	?
5	x_i	-2	-1	2	3	x_i	-1,5	-0,5	1,5	2,5
	$f(x_i)$	-22	-10	-10	-2	$L(x_i)$	?	?	?	?
6	x_i	-2	0	1	2	x_i	-1,5	-0,5	0,5	2,5
	$f(x_i)$	-11	-3	-11	5	$L(x_i)$	?	?	?	?
7	x_i	-3	-2	1	3	x_i	-1,5	0,5	1,5	2
	$f(x_i)$	-4	19	-8	14	$L(x_i)$	?	?	?	?
8	x_i	-3	-2	0	2	x_i	-4	-1,5	-1	1,5
	$f(x_i)$	-22	-13	-7	23	$L(x_i)$	?	?	?	?
9	x_i	-2	0	1	2	x_i	-1,5	-1	-0,5	1,5
	$f(x_i)$	30	-4	3	18	$L(x_i)$	?	?	?	?
10	x_i	-1	0	1	5	x_i	-0,5	2	3	4,5
	$f(x_i)$	11	4	7	-1	$L(x_i)$	?	?	?	?

11	x_i	-1	0	1	3	x_i	-0,5	1,5	2	2,5
	$f(x_i)$	1	-8	-3	25	$L(x_i)$	?	?	?	?
12	x_i	-1	0	1	2	x_i	-2	-0,5	0,5	1,5
	$f(x_i)$	5	-11	-3	23	$L(x_i)$	?	?	?	?
13	x_i	-4	-3	0	1	x_i	-2	-0,5	0,5	2
	$f(x_i)$	-7	10	-11	-22	$L(x_i)$	?	?	?	?
14	x_i	-4	0	3	4	x_i	-3	-2	2	3,5
	$f(x_i)$	-15	-11	-8	25	$L(x_i)$	?	?	?	?
15	x_i	-4	-3	-1	3	x_i	-3,5	-2	1,5	2
	$f(x_i)$	-15	5	3	-1	$L(x_i)$	?	?	?	?
16	x_i	-3	-1	0	2	x_i	-2,5	-2	-0,5	1
	$f(x_i)$	5	3	-7	-15	$L(x_i)$	?	?	?	?
17	x_i	-4	-2	0	3	x_i	-3,5	-3	-0,5	2
	$f(x_i)$	-18	8	-6	3	$L(x_i)$	?	?	?	?
18	x_i	-3	-1	1	2	x_i	-4	-2	-1,5	0,5
	$f(x_i)$	3	3	-13	-12	$L(x_i)$	?	?	?	?
19	x_i	-4	-1	1	2	x_i	-3	-2	-0,5	2,5
	$f(x_i)$	-6	3	-11	-6	$L(x_i)$	?	?	?	?
20	x_i	-3	-2	0	3	x_i	-4	-1,5	2	2,5
	$f(x_i)$	9	10	-6	15	$L(x_i)$	?	?	?	?
21	x_i	-4	-2	1	3	x_i	-3	-1	0,5	2,5
	$f(x_i)$	-8	10	-8	20	$L(x_i)$	?	?	?	?

22	x_i	-3	-1	0	2	x_i	-2	-1,5	-0,5	1
	$f(x_i)$	8	4	-4	-2	$L(x_i)$	?	?	?	?
23	x_i	-2	0	2	4	x_i	-1,5	-1	3	3,5
	$f(x_i)$	-5	1	-9	13	$L(x_i)$	?	?	?	?
24	x_i	-2	-1	0	3	x_i	-1,5	-0,5	1	2
	$f(x_i)$	-4	3	2	11	$L(x_i)$	?	?	?	?
25	x_i	-3	-2	0	2	x_i	-2,5	-1	1,5	3
	$f(x_i)$	-13	3	5	7	$L(x_i)$	?	?	?	?
26	x_i	-2	0	2	3	x_i	-1,5	-1	0,5	1,5
	$f(x_i)$	-5	7	11	25	$L(x_i)$	?	?	?	?
27	x_i	-2	1	2	3	x_i	-3	-1	0,5	1,5
	$f(x_i)$	11	-4	-1	26	$L(x_i)$	?	?	?	?
28	x_i	-3	-1	0	2	x_i	-2	-1,5	-0,5	1
	$f(x_i)$	-16	14	5	-1	$L(x_i)$	?	?	?	?

Зразок виконання завдання

Завдання: Побудувати інтерполяційний багаточлен Лагранжа $L_n(x)$ для функції $f(x)$, що задана таблицею:

x_i	0	2	3	5
$f(x_i)$	1	3	2	5

Знайти значення функції у заданій точці *x*=4. Побудувати графік інтерполяційної функції $y = L_n(x)$ за наявним набором точок.

__Розв'язання__.

Якщо задано 4 точки для інтерполювання, то n=3 і розрахункова формула матиме вигляд:

$$L_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3.$$

Отже:

$$L_3(x)=1\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)}+3\cdot\frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)}+$$

$$+2\cdot\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)}+5\cdot\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)}=$$

$$=\frac{x^3-10x^2+31x-30}{-30}+\frac{x^3-8x^2+15x}{2}+\frac{x^3-7x^2+10x}{-3}+\frac{x^3-5x^2+6x}{6}=$$

$$=\frac{3}{10}x^3-\frac{13}{6}x^2+\frac{62}{15}x+1.$$

Отже, отримали *форуму многочлена Лагранжа*:

$$L_3(x)=\frac{3}{10}x^3-\frac{13}{6}x^2+\frac{62}{15}x+1.$$

Знайдемо значення функції у заданій точці x=4:

$$f(4)\approx\frac{3}{10}\cdot4^3-\frac{13}{6}4^2+\frac{62}{15}\cdot4+1\approx2.067.$$

Побудуємо графік інтерполяційної функції $y=L_3(x)$ (рис. 1):

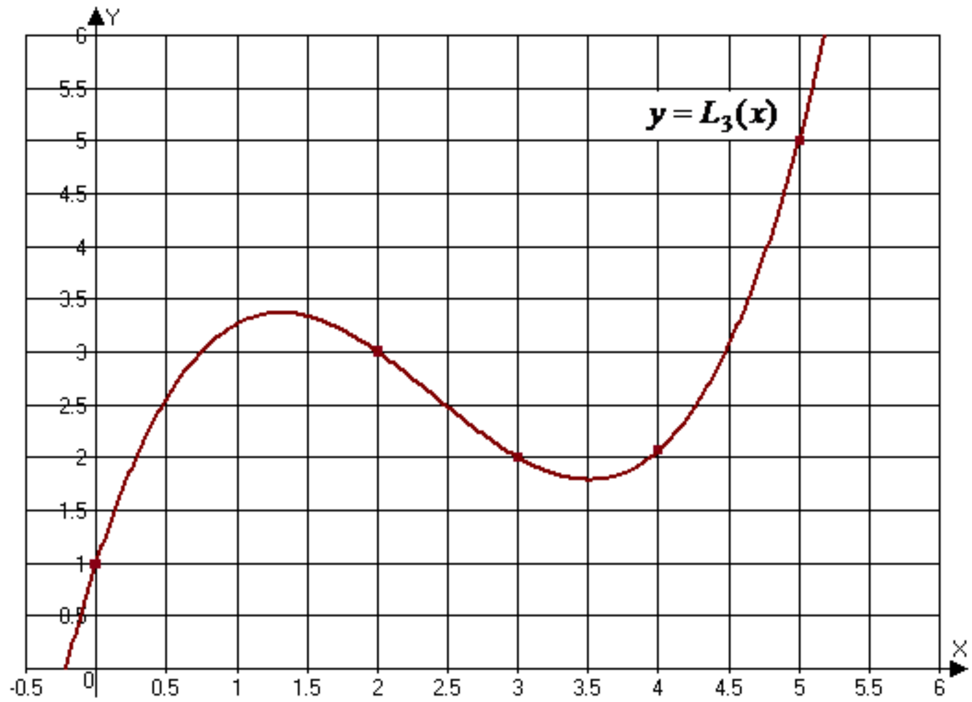


Рис. 1. Графік інтерполяційної функції $y = L_3(x)$

Відповідь: $L_3(x) = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1$, $f(4) \approx$ 2.067.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Навчально-науковий інститут атомної та теплової енергетики

Кафедра інженерії програмного забезпечення в енергетиці

ДОМАШНЯ РОБОТА №2.1

з дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація процесів і систем»

тема «Чисельні методи наближення функцій. Інтерполяційний многочлен Лагранжа»

Варіант № _13_

Виконав:

Студент 3 курсу, групи _*ТІ-01*__

____*Круть Катерини*_____

(прізвище ім'я)

Дата здачі ____2023-03-09________

Київ – 2023

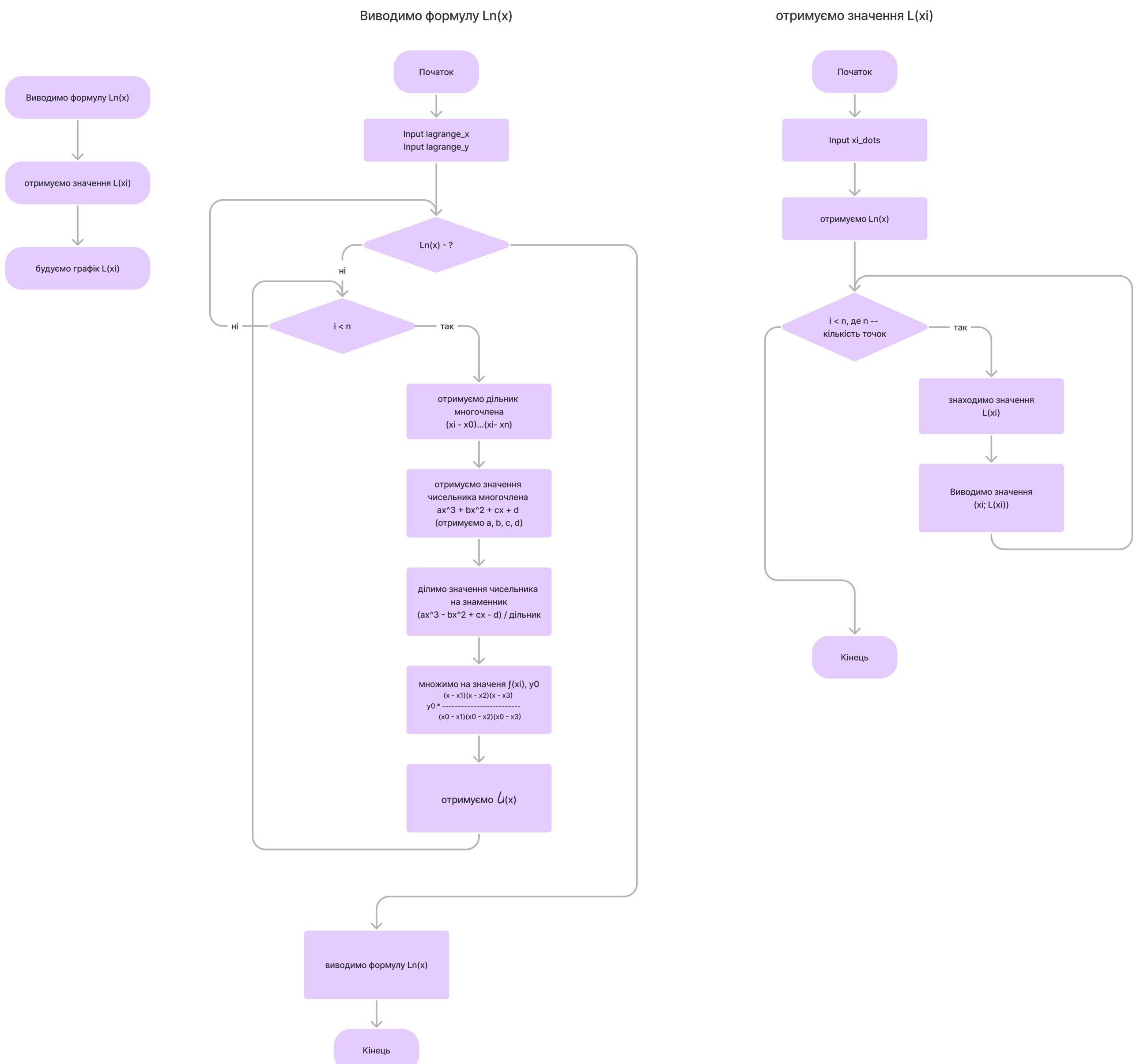
Завдання:

Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа $L_n(x)$ для функції $f(x)$, що задана таблицею, та обчислити значення функції у заданих точках. Побудувати графік інтерполяційної функції $y = L_n(x)$ за наявним набором точок. Для виконання завдання розробити програму на одній з мов програмування.

Дані:

Варіант	**Задана таблиця значень функції**					**Задані точки**				
13	x_i	-4	-3	0	1	x_i	-2	-0,5	0,5	2
	$f(x_i)$	-7	10	-11	-22	$L(x_i)$	?	?	?	?

Блок-схема:


Виводимо формулу Ln(x)
отримуємо значення L(xi)
Виводимо формулу Ln(x)
отримуємо значення L(xi)
будуємо графік L(xi)
Початок
Input lagrange_x
Input lagrange_y
Ln(x) - ?
ні
i < n
ні
так
отримуємо дільник многочлена (xi - x0)...(xi- xn)
отримуємо значення чисельника многочлена ax^3 + bx^2 + cx + d (отримуємо a, b, c, d)
ділимо значення чисельника на знаменник (ax^3 - bx^2 + cx - d) / дільник
множимо на значеня ƒ(xi), y0
(x - x1)(x - x2)(x - x3)
y0 * --------------------------
(x0 - x1)(x0 - x2)(x0 - x3)
отримуємо li(x)
виводимо формулу Ln(x)
Кінець
Початок
Input xi_dots
отримуємо Ln(x)
i < n, де n -- кількість точок
так
знаходимо значення L(xi)
Виводимо значення (xi; L(xi))
Кінець

Використані формули:

$$L_n\left(x\right) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \ldots + y_n l_n(x), \tag{1.11}$$

де

$$\begin{gathered}
l_0(x) = \frac{\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\ldots\left(x - x_n\right)}{\left(x_0 - x_1\right)\left(x_0 - x_2\right)\ldots\left(x_0 - x_n\right)}, \\
l_1(x) = \frac{\left(x - x_0\right)\left(x - x_2\right)\ldots\left(x - x_n\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_1 - x_2\right)\ldots\left(x_1 - x_n\right)}, \\
l_2(x) = \frac{\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\left(x - x_3\right)\ldots\left(x - x_n\right)}{\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 - x_3\right)\ldots\left(x_2 - x_n\right)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
l_i(x) = \frac{\left(x - x_0\right)\ldots\left(x - x_{i-1}\right)\left(x - x_{i+1}\right)\ldots\left(x - x_n\right)}{\left(x_i - x_0\right)\ldots\left(x_i - x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i+1}\right)\ldots\left(x_i - x_n\right)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
l_n(x) = \frac{\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\ldots\left(x - x_{n-1}\right)}{\left(x_n - x_0\right)\left(x_n - x_1\right)\ldots\left(x_n - x_{n-1}\right)}.
\end{gathered} \tag{1.12}$$

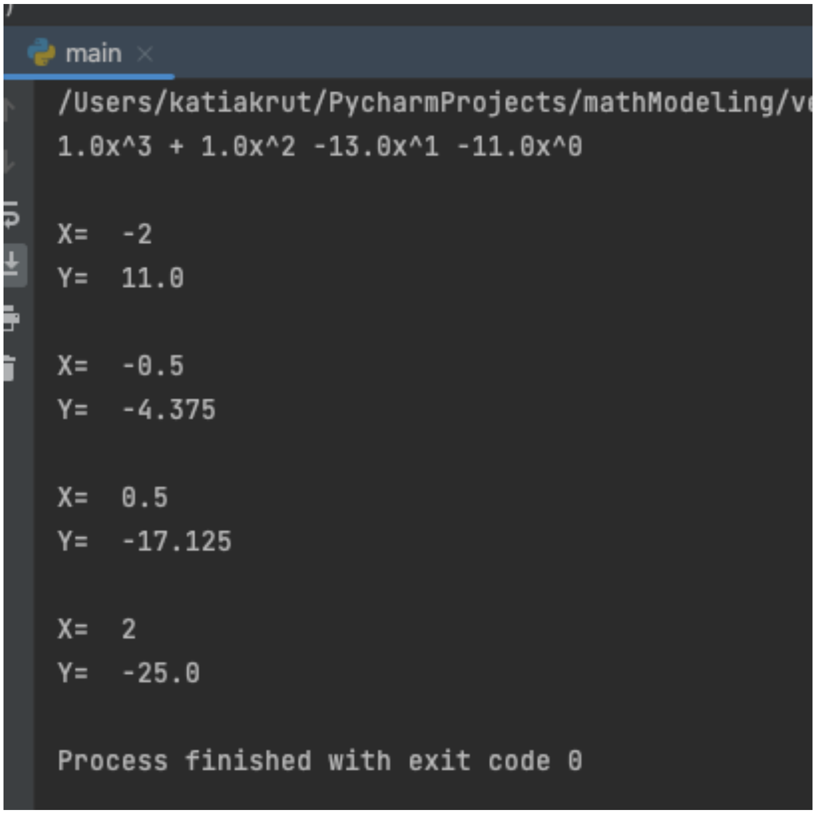
Код:

```
import copy
import itertools
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np


def get_coeff_denominator(copy_list, removed_element):
    """ Отримуємо дільник для інтерполяційного многочлена"""
    denominator = 1
    for j in range(len(copy_list)):
        denominator *= removed_element - copy_list[j]
    return denominator


def get_numerator_elements(combinations):
    """
    :param combinations: всі комбінації для перемноження
    :return: елементи чисельника
    """
    summ = 0
    for combination in combinations:
        mult = 1
        for elem in combination:
            mult *= -1 * elem
        summ += mult
    return summ


def coefficient(list_x, list_y):
    """
    :param list_x: значеєня ряду xi
    :param list_y: значення ряду f(xi)
    :return: коефіцієнти многочлена Лагранжа
    L3(x) = a*x^3 - b*x^2 + c*x + d => [a, b, c, d]
    L3(x) = 3/10*x^3 - 13/6*x^2 + 62/15*x + 1 => [0.3, -2.16667, 4.13333, 1]
    """
    if not (isinstance(list_x, list) or isinstance(list_y, list)):
        raise ValueError
    if len(list_x) != len(list_y) or len(list_x) < 2:
        raise ValueError

    list_coefficient = [0] * (len(list_x))

    # for i in range(1):
    for i in range(len(list_x)):
        removed_element = list_x[i]
```

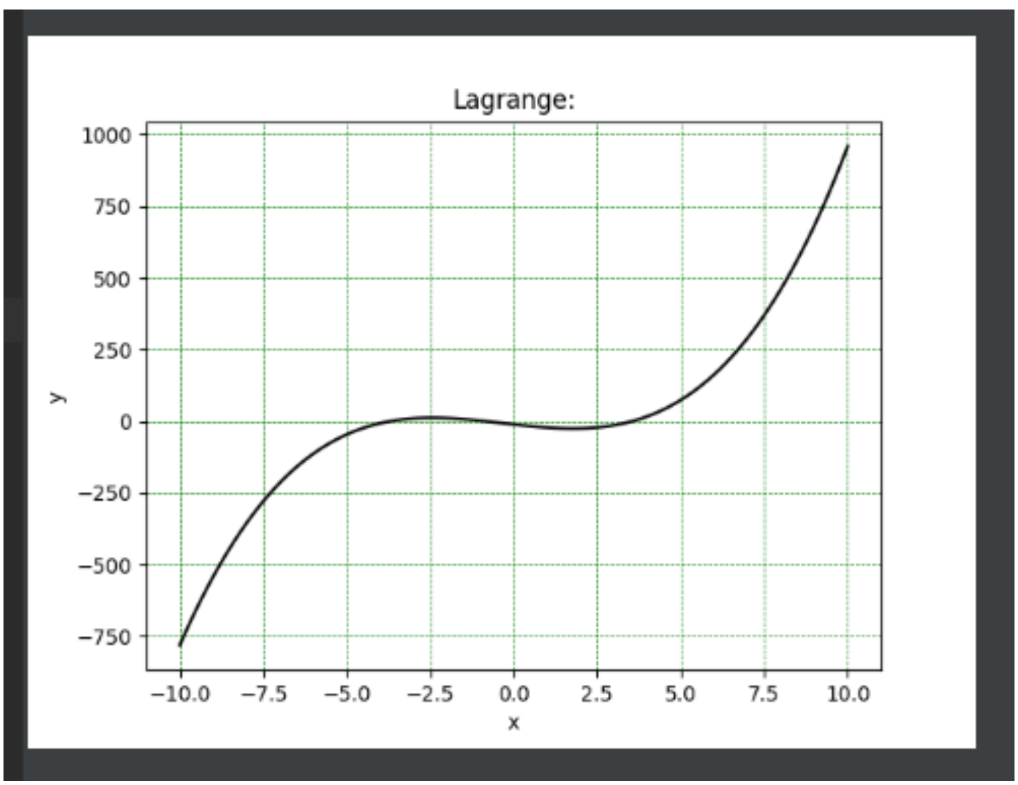
```
        copy_list = copy.deepcopy(list_x)
        copy_list.pop(i)

        # дільник (x0 - x1)(x0 - x2)(x0 - x3)
        # (0 -2)(0 - 3)(0 - 5) = -30
        denominator = get_coeff_denominator(copy_list, removed_element)

        for j in range(0, len(copy_list) + 1):
            # комбінації для перемноження (x - x1)(x - x2)(x - x3)
            # (x - 2)(x - 3)(x - 5)
            combinations = list(itertools.combinations(copy_list, len(copy_list)
- j))

            # ax^3 + bx^2 + cx + d (тут отримуємо a, b, c, d)
            # x^3 - 10x^2 + 31x - 30 (1, -10, 31, -30)
            summ = get_numerator_elements(combinations)

            # ділимо на знаменник всі значення чисельника многочлена
            # (x^3 - 10x^2 + 31x - 30) / -30
            summ /= denominator

            # множимо на значеня f(xi), y0
            # (x - x1)(x - x2)(x - x3) / (x0 - x1)(x0 - x2)(x0 - x3) * y0
            summ *= list_y[i]
            list_coefficient[j] += summ
    return list_coefficient


def lagrange(x):
    """
    Розраховуємо значеня многочлена Лагранжа для якогось значення x
    :param x: аргумент x, для кого потрібно знайти значення
    """
    coefficients = coefficient(lagrange_x, lagrange_y)
    return sum([coefficients[i] * pow(x, i) for i in range(len(coefficients))])


def get_formula():
    """ Отримуємо формулу інтерполяційної функції y = Ln(x)"""
    coeffs = coefficient(lagrange_x, lagrange_y)
    formula = ""
    for i in range(len(coeffs)):
        formula = str(round(coeffs[i], 5)) + "x^" + str(i) + " " + formula
        if coeffs[i] > 0 and i != len(coeffs) - 1:
            formula = "+ " + formula
    return formula
```

```python
def get_all_dots(*args):
    """
    Знаходиом значення L(xi) для ряду заданих точок
    :param args: xi
    :return: L(xi)
    """
    # знаходиом значення L(xi)
    for x in args:
        print("\nX= ", x, "\nY= ", round(lagrange(x), 5))


def draw():
    """Function for drawing graphic"""
    x = np.linspace(-10, 10, 100)
    y = lagrange(x)
    plt.plot(x, y, 'black')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.title('Lagrange:')
    plt.grid(color='green', linestyle='--', linewidth=0.5)
    plt.show()

"""Коменарі для l0(x) з прикладу"""
lagrange_x = [-4, -3, 0, 1]
lagrange_y = [-7, 10, -11, -22]
print(get_formula())
get_all_dots(-2, -0.5, 0.5, 2)
draw()

"""Дані з прикладу в ДЗ"""
# lagrange_x = [0, 2, 3, 5]
# lagrange_y = [1, 3, 2, 5]
# print(get_formula())
# get_all_dots(4)
# draw()
```

Приклад роботи:



```
/Users/katiakrut/PycharmProjects/mathModeling/v
1.0x^3 + 1.0x^2 -13.0x^1 -11.0x^0

X=  -2
Y=  11.0

X=  -0.5
Y=  -4.375

X=  0.5
Y=  -17.125

X=  2
Y=  -25.0

Process finished with exit code 0
```



Висновки:

Під часи виконання домашнього завдання було розроблено алгоритм для програмної реалізації побудови многочлена Лагранжа Ln(x) для функції f(x), що задана таблицею. Алгоритм редставлений у вигляді блок схеми, а для пограмної реалізації було вибрано мову програмування Python. Крім того, розроблено алгорит для пошуку значення yi = L(xi) за наявним набором точок xi. Також доступний функціонал для побудови графіку інтерполяційної функції y = Ln(x) за знадений набором данних {xi; L(xi)}.