2023年度 物理工学基礎演習 (統計力学第一)
第1回 問題

担当; 水田 郁 (mizuta@qi.t.u-tokyo.ac.jp, 工学部 9 号館 325 号室)

提出日; 5/8 13:00 (前半クラス), 5/1 13:00 (後半クラス)

I　確率分布

(1) 確率 p で表、確率 $1-p$ で裏が出るコイン N 枚を一斉に投げる。ちょうど n 枚のコインが表である確率 $P_N(n)$ を求めよ。ただし、各々のコインの運動は互いに独立であるとする。

(2) (1) で求めた確率分布において、 n と n^2 の期待値 $\langle n\rangle = \sum_n P_N(n)n$, $\langle n^2\rangle = \sum_n P_N(n)n^2$ および、分散 $\sigma^2 = \langle (n-\langle n\rangle)^2\rangle$ を求めよ。

(3) $p = 1/2$ とする。$x = (2n-N)/\sqrt{N}$ により新しい変数 x を定義すると、この x が区間 $[x, x+\Delta x]$ 内の値を取る確率 $p(x)\Delta x$ が $N\to\infty$ で標準正規分布

$$p(x)\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Delta x$$

で与えられることを示せ。ただし、Stiring の公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ を用いて良い。

(4) λ を正の定数とする。$pN = \lambda$ を保ちながら $N\to\infty$ を大きくする極限を取るとき、

$$\lim_{N\to\infty} P_N(n) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)$$

となることを示せ。

(5) 任意の確率分布 P に従う (離散的な) 確率変数 X に対し、X が期待値から ϵ 以上ずれた値を取る確率に対する不等式

$$\mathrm{Prob}\Big(|X-\langle X\rangle| \geq \epsilon\Big) \leq \left(\frac{\sigma(X)}{\epsilon}\right)^2$$

を示せ。ただし、$\sigma(X)$ は X の分散である。

II　調和振動子

(1) 古典一次元調和振動子系の Lagrangian

$$\mathcal{L}\left(\dot{q}(t), q(t)\right) = \frac{m}{2}(\dot{q}(t))^2 - \frac{m\omega^2}{2}(q(t))^2$$

について、対応する Euler-Lagrange 方程式を書き下し、初期条件 $(\dot{q}(0), q(0)) = (\dot{q}_0, q_0)$ を満たす解を求めよ。

(2) (1) で考えた系について $q(t)$ に共役な運動量 $p(t)$ と系の Hamiltonian $H(p(t), q(t))$ を求め、Hamilton 方程式を書き下せ。

(3) Hamilton 方程式の解軌道 (例えば $(p(0), q(0)) = (0, q_0)$ を通るもの) を qp 空間上にプロットせよ。また、その解軌道における断熱不変量

$$I = \oint_{\text{軌道の一周期}} p\mathrm{d}q$$

を求め、エネルギー E との関係を示せ。

(4) (2) で求めた Hamiltonian に対して交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ を課すことで正準量子化を行う。($\hat{A}$ は A の演算子であることを指す。) このとき、

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

で定義される消滅 (生成) 演算子 $\hat{a}$ ($\hat{a}^\dagger$) を用いて量子調和振動子系における Hamiltonian $\hat{H}$ を書き下せ。

(5) 数演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有状態を $|n\rangle$ とおく。固有値 n が非負の整数であることを示せ。また、規格化因子 c_n を用いて $|n\rangle = c_n(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$ で与えられることを示せ。

(6) Hamiltonian $\hat{H}$ の固有値 (エネルギー固有値) を書き下し、(3) において $I = nh$ とした時の式と比べよ。また、この差により生じる物理現象を 1 つ以上挙げ、簡単に説明せよ。