

4. Result: 誤差上限と導出

■ 低エネルギー初期状態に対する誤差

$$\|(e^{-iH\tau} - T_p(\tau))\Pi_{\leq \Delta}\| = \max_{|\psi_{\leq \Delta}\rangle} (\|(e^{-iH\tau} - T_p(\tau))|\psi_{\leq \Delta}\rangle\|)$$

[結果]

	<u>誤差上限</u>	<u>Trotter 数 r</u>	
任意初期状態 A. M. Childs, et al., PRX 11, 011020 (2021)	$\mathcal{O}((g\tau)^p N g\tau)$	$gt \left(\frac{Ng\tau}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}}$	
低エネルギー状態 B. Şahinoğlu, et al., Npj Quantum Info. (2021)	$\mathcal{O}((\Delta + (g\tau)Ng)\tau)^{p+1}$	$\Delta t \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}} + gt \left(\frac{gt}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2p+1}} N^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4p+2}}$	$\Delta \lesssim N^{\frac{1}{p+1}} g$ でのみ高速化
低エネルギー状態 K. Hejazi, et al., arXiv:2402.10362 (2024)	$\mathcal{O}((\Delta + (g\tau)^{p+1} Ng)\tau)^{p+1}$	$\Delta t \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}} + gt \left(\frac{N^{p+1}gt}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{(p+1)^2+p}}$	N 依存性の改善殆どなし
低エネルギー状態 (Our result)	$\mathcal{O}((g\tau)^p \{\Delta + g \log(N/\varepsilon)\}\tau)$	$gt \left(\frac{(\Delta + g \log(N/\varepsilon))t}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}}$	$\Delta \in o(Ng)$ で高速化 N 依存性の指数的改善

└ Trotter 誤差による低エネルギー部分空間からの leakage

■ 導出 低エネルギー性 & 交換子スケーリングの両立

(1) 低エネルギー空間における多重交換子の上限

$$\sum_{\gamma_0, \dots, \gamma_q} \|\Pi_{\leq \Delta} [H_{\gamma_q}, [\dots, [H_{\gamma_1}, H_{\gamma_0}]]] \Pi_{\leq \Delta}\| \leq q! (2kg)^q \Delta \quad \left. \begin{array}{l} \text{先行研究:} \\ \lesssim \mathcal{O}(\Delta^{p+1}) \end{array} \right]$$

→ 相互作用の局所性を正確に反映

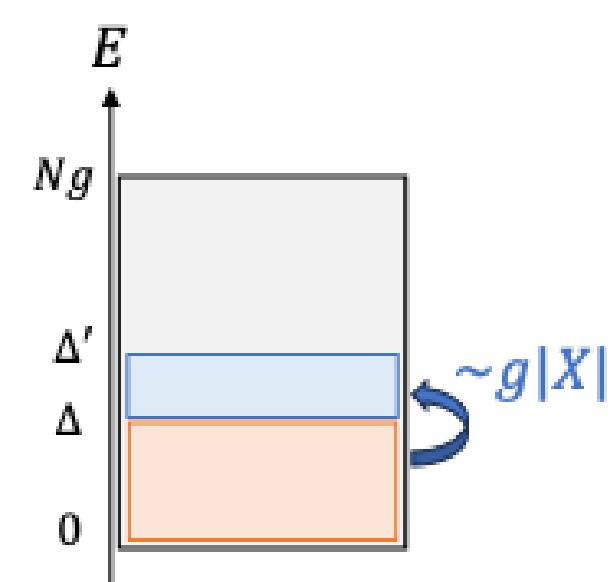
(2) Trotter 誤差による低エネルギー空間からの leakage

Hastings' theorem
on leakage

I. Arad, et al., J. Stat. Mech. 2016, 033301 (2016).

$$\|\Pi_{>\Delta'} O_X \Pi_{\leq \Delta}\| \leq \|O_X\| e^{-\mathcal{O}\left(\frac{\Delta' - \Delta - g|X|}{g}\right)}$$

Local op.



Trotter 誤差による leakage

$$\|\Pi_{>\Delta'} (e^{-iH\tau} - T_p(\tau)) \Pi_{\leq \Delta}\|$$

$$\lesssim \sum_{\gamma_0, \dots, \gamma_q} \|\Pi_{>\Delta'} [H_{\gamma_q}, [\dots, [H_{\gamma_1}, H_{\gamma_0}]]] \Pi_{\leq \Delta}\| \tau^{p+1}$$

Local op.

先行研究:

$$\left. \begin{array}{l} \|\Pi_{>\Delta'} T_p(\tau) \Pi_{\leq \Delta}\| \\ \text{Non-local op.} \end{array} \right]$$