5. 最近の成果2: 複数積公式のコスト証明

▪ 複数積公式 (Multi-product formula, MPF)

G. H. Low, et al., arXiv:1907.11679 (2019)

・Trotter分解(積公式)とユニタリ線型結合を組み合わせた量子アルゴリズム

$$M(\tau) = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} c_j}_{\text{線型結合}} \underbrace{[T_p(\tau/k_j)]^{k_j}}_{p\text{次 Trotter 分解}} = e^{-iH\tau} + \mathcal{O}(\tau^{m+1}).$$

・Trotter分解の良いN-依存性 と ユニタリ線型結合の指数的に良いε依存性

を両立すると期待されるが、**完全な計算コストの証明は未解決**

▪ Our work: 複数積公式の計算コスト証明

K. Mizuta, Quantum 10, 1974 (2026)

	$\mathcal{O}(1)$-qubit の量子ゲート数: 有限距離相互作用 H	$\mathcal{O}(1)$-qubit の量子ゲート数: 長距離 k 体相互作用 H	補助 qubit 数
p次 Trotter 分解 A. Childs, et al. (2021)	$Ng\left(\frac{Ngt}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}$	$N^k g\left(\frac{Ngt}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}$	0
LCU/QSVT A. Gilyén, et al. (2019)	$N(Ngt + \log(1/\varepsilon))$	$N^k(Ngt + \log(1/\varepsilon))$	$\log N$
HHKL J. Haah, et al. (2021)	$Ngt \times \mathrm{polylog}(Ngt/\varepsilon)$	← Lieb-Robinson限界を利用	$\log\log(Ngt/\varepsilon)$
p次複数積公式 (this work)	$N^{1+\frac{1}{p+1}} gt \times \mathrm{polylog}(Ngt/\varepsilon)$	$N^{k+\frac{1}{p+1}} gt \times \mathrm{polylog}(Ngt/\varepsilon)$	$\log\log(Ngt/\varepsilon)$

複数積公式は良いN, t, ε依存性を有する量子アルゴリズム / 理論下限 $\Omega(Nt)$ にも近い