2. Intro: Trotter 誤差と計算コスト

■ Trotter 誤差

“全ての可能な初期状態に対する worst-case の誤差”

$$\|e^{-iH\tau} - T_p(\tau)\| = \max_{|\psi\rangle \in \mathcal{H}} \left(\| (e^{-iH\tau} - T_p(\tau)) |\psi\rangle \| \right)$$

誤差の上界:

$$H = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} H_\gamma$$

1-norm スケーリング (Taylor展開)

$$\leq \mathcal{O}\left(\left(\sum_\gamma \|H_\gamma\| \tau \right)^{p+1} \right) \subset \mathcal{O}\left((Ng\tau)^{p+1} \right)$$

交換子スケーリング (局所性を反映)

$$\leq \mathcal{O}\left(\sum_{\gamma_0, \cdots, \gamma_p} \| [H_{\gamma_p}, [\cdots, [H_{\gamma_1}, H_{\gamma_0}]]] \| \tau^{p+1} \right)$$

Many vanishing terms

$$\subset \mathcal{O}\left((g\tau)^{p+1} N \right)$$

A. M. Childs, et al., PRX **11**, 011020 (2021)

■ 計算複雑性

← Worst-case error, 許容誤差で決まる

$$r \times \left(g \frac{t}{r} \right)^{p+1} N \leq \mathcal{O}(\varepsilon)$$

1 step の誤差　　許容誤差

Trotter 数 (複雑性)

$$\Rightarrow \quad r \in \Theta\left(gt \left(\frac{Ngt}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

- ✅ 任意の初期状態に対する精度保証
- ✅ 交換子スケーリングによる良い系サイズ N 依存性

LCU, QSVT などよりも良い

D. W. Berry, et al., PRL 114, 090502 (2015).

A. Gilyen, et al., STOC (2019)