

5. 関連研究2: 複数積公式のコスト証明

■ 複数積公式 (Multi-product formula, MPF) G. H. Low, et al., arXiv:1907.11679 (2019)

- ・ Trotter分解(積公式)とユニタリ線型結合を組み合わせた量子アルゴリズム

$$M(\tau) = \sum_{j=1}^J c_j [T_p(\tau/k_j)]^{k_j} = e^{-iH\tau} + \mathcal{O}(\tau^{m+1}).$$

線型結合

p次 Trotter 分解

- ・ Trotter分解の 良いN-依存性 と ユニタリ線型結合の 指数的に良いε依存性
を両立すると期待されるが、完全な計算コストの証明は未解決

■ Our work: 複数積公式の計算コスト証明 K. Mizuta, Quantum 10, 1974 (2026)

	O(1)-qubit の量子ゲート数		補助 qubit 数
	有限距離相互作用 H	長距離 k 体相互作用 H	
p次 Trotter 分解 A. Childs, et al. (2021)	$N g \left(\frac{N g t}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}}$	$N^k g \left(\frac{N g t}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}}$	0
LCU/QSVT A. Gilyén, et al. (2019)	$N(N g t + \log(1/\varepsilon))$	$N^k(N g t + \log(1/\varepsilon))$	log N
HHKL J. Haah, et al. (2021)	$N g t \times \text{polylog}(N g t / \varepsilon)$	← Lieb-Robinson限界を利用	log log(N g t / ε)
p次複数積公式 (our work)	$N^{1+\frac{1}{p+1}} g t \times \text{polylog}(N g t / \varepsilon)$	$N^{k+\frac{1}{p+1}} g t \times \text{polylog}(N g t / \varepsilon)$	log log(N g t / ε)

複数積公式は良いN,t,ε依存性を有する量子アルゴリズム / 理論下限 Ω(Nt) にも近い