

# 4. Result: 誤差上限と導出

## ■ 低エネルギー初期状態に対する誤差

$$\|(e^{-iH\tau} - T_p(\tau))\Pi_{\leq\Delta}\| = \max_{|\psi_{\leq\Delta}\rangle} (\|(e^{-iH\tau} - T_p(\tau))|\psi_{\leq\Delta}\rangle\|)$$

### [結果]

#### 誤差上限

#### Trotter 数 $r$

任意初期状態

A. M. Childs, et al., PRX **11**, 011020 (2021)

$$\mathcal{O}((g\tau)^p N g\tau)$$

$$gt \left( \frac{Ngt}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}}$$

低エネルギー状態

B. Şahinoğlu, et al., Npj Quantum Info. (2021)

$$\mathcal{O}(\{(\Delta + (g\tau)Ng)\tau\}^{p+1})$$

$$\Delta t \left( \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}} + gt \left( \frac{gt}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2p+1}} N^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4p+2}}$$

$\Delta \lesssim N^{\frac{1}{p+1}} g$   
でのみ高速化

低エネルギー状態

K. Hejazi, et al., arXiv:2402.10362 (2024)

$$\mathcal{O}(\{(\Delta + (g\tau)^{p+1}Ng)\tau\}^{p+1})$$

$$\Delta t \left( \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}} + gt \left( \frac{N^{p+1}gt}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{(p+1)^2+p}}$$

$N$  依存性の  
改善殆どなし

低エネルギー状態

(Our result)

$$\mathcal{O}((g\tau)^p \{\Delta + g \log(N/\varepsilon)\} \tau)$$

$$gt \left( \frac{(\Delta + g \log(N/\varepsilon))t}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\Delta \in o(Ng)$  で高速化  
 $N$  依存性の指数的改善

Trotter 誤差による低エネルギー部分空間からの leakage

## ■ 導出

低エネルギー性 & 交換子スケーリングの両立

### (1) 低エネルギー空間における多重交換子の上限

$$\sum_{\gamma_0, \dots, \gamma_q} \|\Pi_{\leq\Delta} [H_{\gamma_q}, [\dots, [H_{\gamma_1}, H_{\gamma_0}]]] \Pi_{\leq\Delta}\| \leq q! (2kg)^q \Delta$$

先行研究:

$$\lesssim \mathcal{O}(\Delta^{p+1})$$

→ 相互作用の局所性を正確に反映

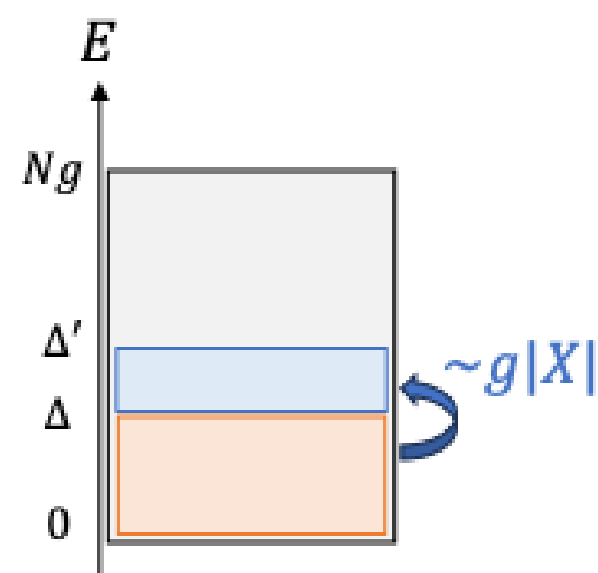
### (2) Trotter 誤差による低エネルギー空間からの leakage

Hastings' theorem  
on leakage

I. Arad, et al., J. Stat. Mech. 2016, 033301 (2016).

$$\|\Pi_{>\Delta'} O_X \Pi_{\leq\Delta}\| \leq \|O_X\| e^{-\mathcal{O}\left(\frac{\Delta' - \Delta - g|X|}{g}\right)}$$

Local op.



Trotter 誤差  
による leakage

$$\|\Pi_{>\Delta'} (e^{-iH\tau} - T_p(\tau)) \Pi_{\leq\Delta}\|$$

$$\lesssim \sum_{\gamma_0, \dots, \gamma_q} \|\Pi_{>\Delta'} [H_{\gamma_q}, [\dots, [H_{\gamma_1}, H_{\gamma_0}]]] \Pi_{\leq\Delta}\| \tau^{p+1}$$

Local op.

先行研究:

$$\|\Pi_{>\Delta'} T_p(\tau) \Pi_{\leq\Delta}\|$$

Non-local op.