銀河形成シミュレーションに向けた SPH 法の実装

大滝恒輝

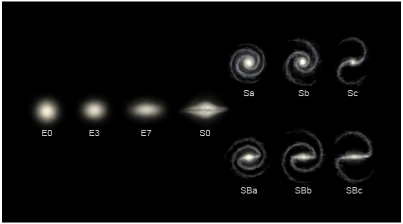
筑波大学理工学群物理学類 宇宙理論研究室 4 年

2018/11/02

導入

銀河形成のキーワード

- ダークマター
- 超新星爆発
- 重元素の合成
- 銀河の合体
- 星形成



→断熱的に進んでも星ができない

→冷却の効果を入れたい！

目次

流体力学の基礎方程式

連続の式 $$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

運動方程式 $$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

エネルギー方程式 $$\frac{du}{dt} = -\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{v} \boxed{-\frac{n_{\rm H}^2\Lambda}{\rho}}$$

状態方程式 $$p = (\gamma-1)\rho u$$

ρ : 密度
$\boldsymbol{v}$: 速度
p : 圧力
u : 単位質量あたりの内部エネルギー
Λ: 冷却率
γ : 比熱比

→冷却の方程式を正しく解ける

Exact Integration scheme に注目

(Townsend 2009)

原始元素組成の冷却過程

水素とヘリウムの主な冷却過程

冷却過程	元素	冷却率 $(\mathrm{ergs\,s^{-1}cm^{-3}})$
衝突励起	H^0	$7.50 \times 10^{-19} \mathrm{e}^{-118348.0/T} (1+T_5^{1/2})^{-1} n_\mathrm{e} n_{\mathrm{H}^0}$
	He^+	$5.54 \times 10^{-17} T^{-0.397} \mathrm{e}^{-473638.0/T} (1+T_5^{1/2})^{-1} n_\mathrm{e} n_{\mathrm{He}^+}$
衝突電離	H^0	$1.27 \times 10^{-21} T^{1/2} \mathrm{e}^{-157809.1/T} (1+T_5^{1/2})^{-1} n_\mathrm{e} n_{\mathrm{H}^0}$
	He^0	$9.38 \times 10^{-22} T^{1/2} \mathrm{e}^{-285335.4/T} (1+T_5^{1/2})^{-1} n_\mathrm{e} n_{\mathrm{He}^0}$
	He^+	$4.95 \times 10^{-22} T^{1/2} \mathrm{e}^{-631515.0/T} (1+T_5^{1/2})^{-1} n_\mathrm{e} n_{\mathrm{He}^+}$
再結合	H^+	$8.70 \times 10^{-27} T^{1/2} T_3^{-0.2} (1+T_6^{0.7})^{-1} n_\mathrm{e} n_{\mathrm{H}^+}$
	He^+	$1.55 \times 10^{-26} T^{0.3647} n_\mathrm{e} n_{\mathrm{He}^+}$
	He^{++}	$3.48 \times 10^{-26} T^{1/2} T_3^{-0.2} (1+T_6^{0.7})^{-1} n_\mathrm{e} n_{\mathrm{He}^{++}}$
二電子性再結合	He^+	$1.24 \times 10^{-13} T^{-1.5} \mathrm{e}^{470000.0/T} (1+0.3\mathrm{e}^{-94000.0/T}) n_\mathrm{e} n_{\mathrm{He}^+}$
制動放射	All ions	$1.42 \times 10^{-27} g_{ff} T^{1/2} (n_{\mathrm{H}^+} + n_{\mathrm{He}^+} + 4n_{\mathrm{He}^{++}}) n_\mathrm{e}$

(Katz, Weinberg, & Hernquist 1996)

原始元素組成の冷却率

冷却率は、それぞれの元素の数密度と電子の数密度に比例する。
今回は輻射場がなく、イオン化平衡の場合を仮定する。

- イオン化平衡

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathrm{H}_0} n_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{H}_0} &= \alpha_{\mathrm{H}_+} n_{\mathrm{H}_+} n_{\mathrm{e}} \\ \Gamma_{\mathrm{He}_0} n_{\mathrm{He}_0} n_{\mathrm{e}} &= (\alpha_{\mathrm{He}_+} + \alpha_d) n_{\mathrm{He}_+} n_{\mathrm{e}} \\ \alpha_{\mathrm{He}_{++}} n_{\mathrm{He}_{++}} n_{\mathrm{e}} &= \Gamma_{\mathrm{He}_+} n_{\mathrm{He}_+} n_{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

- 数保存式

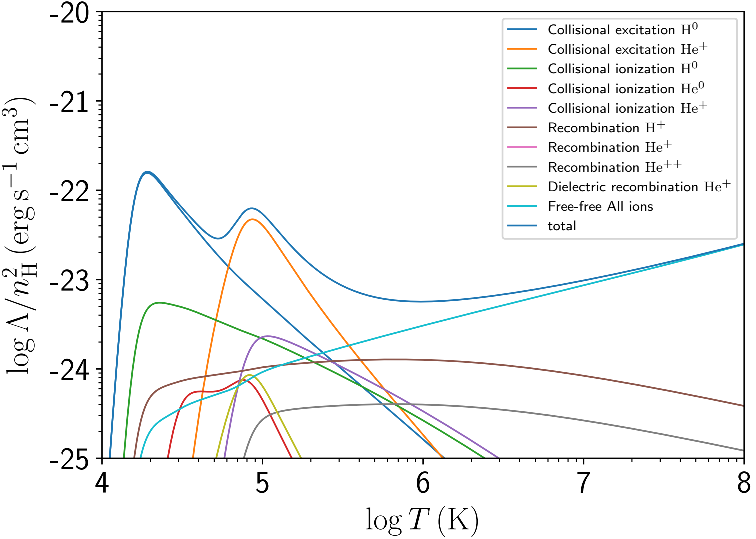
$$\begin{aligned}n_{\mathrm{H}_+} &= n_{\mathrm{H}} - n_{\mathrm{H}_0} \\ n_{\mathrm{e}} &= n_{\mathrm{H}_+} + n_{\mathrm{He}_+} + 2n_{\mathrm{He}_{++}} \\ \frac{n_{\mathrm{He}_0} + n_{\mathrm{He}_+} + n_{\mathrm{He}_{++}}}{n_{\mathrm{H}}} &= \frac{Y}{4-4Y}\end{aligned}$$

Γ : 衝突電離率, α : 再結合率, Y : ヘリウムの存在比 $= 0.24$

これらの関係式より冷却率は n_{H}^2 に比例する。

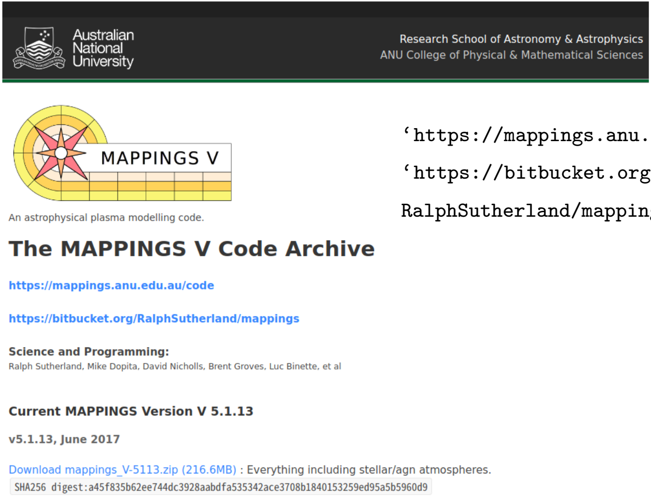
原始元素組成の冷却関数

(Katz, Weinberg, & Hernquist 1996)



MAPPINGS V

Sutherland et al. が開発した冷却関数計算のオープンソースコード
元素の存在比を決定し、計算された冷却率をダウンロードできる。
ソフトウェアのインストールも可

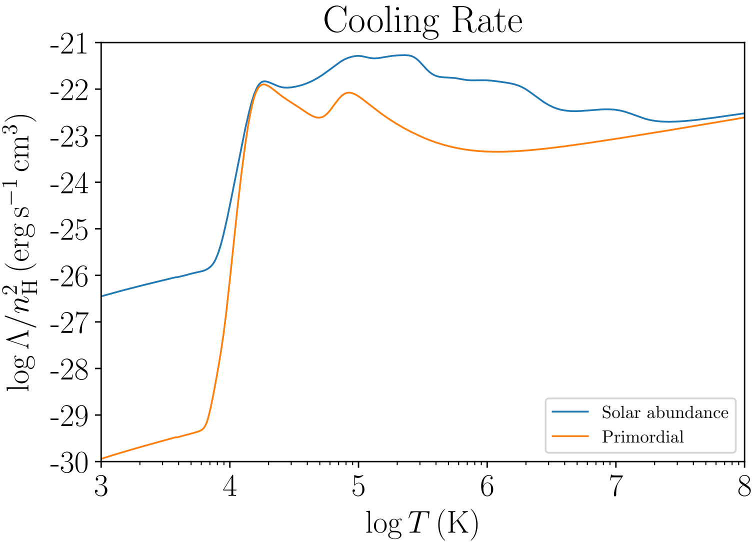


‘https://mappings.anu.edu.au/code‘

‘https://bitbucket.org/RalphSutherland/mappings‘

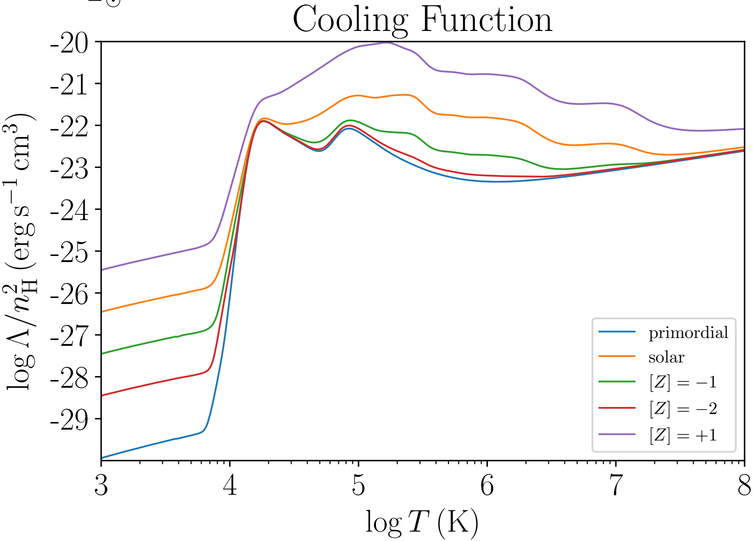
冷却関数 (MAPPINGS V)

MAPPINGS V で計算された Solar abundances と Primordial の冷却率



冷却関数の metallicity$[Z]$ 依存性

$$[Z] = \log \frac{Z}{Z_\odot}$$



Exact Integration scheme(EI scheme)

EI scheme を導入

$$\frac{dP}{dt} - \frac{\gamma P}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -(\gamma - 1)n_{\mathrm{H}}^2 \Lambda(T)$$

理想気体の状態方程式 $P = nkT$ を代入し、冷却項のみを書くと、

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{\mathrm{cool}} = -\frac{(\gamma - 1)\rho\mu}{k\mu_{\mathrm{H}}^2}\Lambda(T)$$

n：全粒子数密度 , k：ボルツマン定数
変数分離し、両辺積分すると

$$\int_{T^n}^{T^{n+1}} \frac{dT}{\Lambda(T)} = -\frac{(\gamma - 1)\rho\mu}{k\mu_{\mathrm{H}}^2}\Delta t$$

Exact Integration scheme(EI scheme)

無次元の時間発展関数 $Y(T)$ を定義

$$Y(T) = \frac{\Lambda(T_{\rm ref})}{T_{\rm ref}} \int_{T}^{T_{\rm ref}} \frac{dT'}{\Lambda(T')}$$

代入し積分区間を $[T^n, T_{\rm ref}], [T_{\rm ref}, T^{n+1}]$ と分けると

$$\frac{T_{\rm ref}}{T^n} \frac{\Lambda(T^n)}{\Lambda_{\rm ref}} [Y(T^n) - Y(T^{n+1})] = -\frac{\Delta t}{t_{\rm cool}}, \quad t_{\rm cool} \equiv \frac{k \mu_{\rm H}^2 T^n}{(\gamma - 1)\rho \mu \Lambda(T^n)}$$

時間発展後の温度は

$$T^{n+1} = Y^{-1} \left[Y(T^n) + \frac{T^n}{T_{\rm ref}} \frac{\Lambda_{\rm ref}}{\Lambda(T^n)} \frac{\Delta t}{t_{\rm cool}} \right]$$

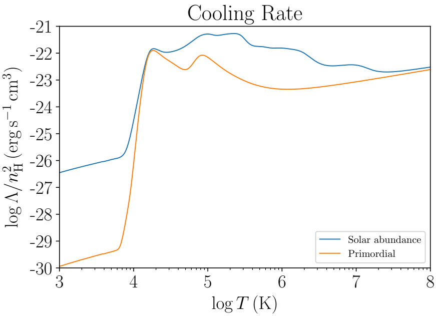
冷却関数は温度領域に N 等分し、Piecewise Power Law で fitting

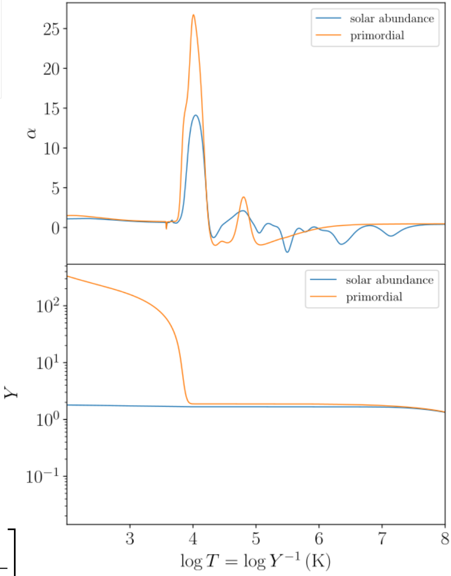
$$\Lambda(T) = \Lambda_k \left(\frac{T}{T_k} \right)^{\alpha_k}, \quad T_k \leq T \leq T_{k+1}$$

それぞれの温度領域 $T_k \leq T \leq T_{k+1}$ における Λ_k, α_k, Y_k を計算し、テーブルとして準備。時間発展後、線形補間することにより、T^{n+1} がすぐに求まる。

Exact Integration scheme(EI scheme)

$$\Lambda(T) = \Lambda_k \left(\frac{T}{T_k}\right)^{\alpha_k}$$



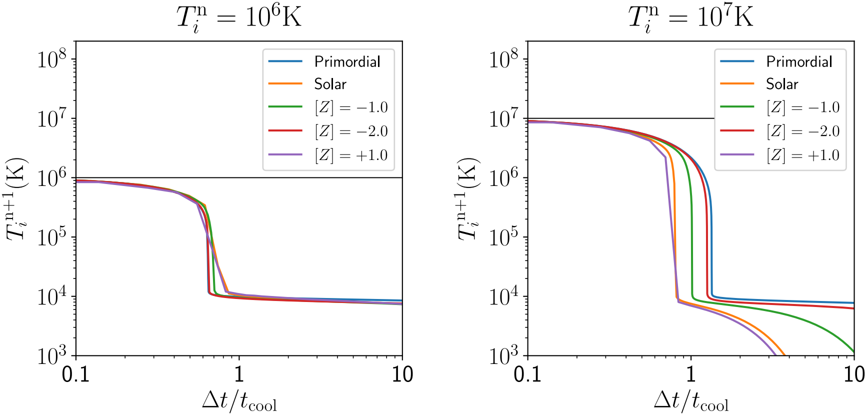


$$Y(T) = \frac{\Lambda(T_{\mathrm{ref}})}{T_{\mathrm{ref}}} \int_T^{T_{\mathrm{ref}}} \frac{dT'}{\Lambda(T')}$$

$$T^{n+1} = Y^{-1}\left[Y(T^n) + \frac{T^n}{T_{\mathrm{ref}}} \frac{\Lambda_{\mathrm{ref}}}{\Lambda(T^n)} \frac{\Delta t}{t_{\mathrm{cool}}}\right]$$

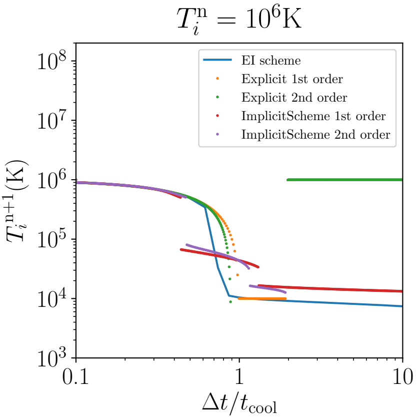
EI scheme の評価

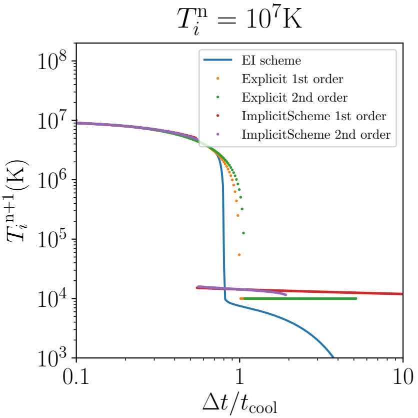
- 初期温度 T^{n} から 1 ステップ時間発展させる。
- t_{cool} に対して、タイムステップ Δt を変化させる。



EI scheme の評価

陽解法 (1 次・2 次)、陰解法 (1 次・2 次) との比較 (Solar abundances)





ここまでのまとめ

EI scheme は、

- 領域を分割することで正しく解ける
- どんな冷却関数でも解ける
- t_{cool} よりも大きなタイムステップでも解ける

この EI scheme を宇宙流体シミュレーションに組み込みたい

$\longrightarrow$Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法に注目！

Smoothed Particle Hydrodynamics(SPH) 法

Lucy(1977) と Gingold&Monaghan(1977) により開発された圧縮性流体の数値計算法

- 流体を粒子によって離散化
- 重力相互作用との組み合わせが簡単

SPH 粒子それぞれが持つ質量、密度を m, ρ とすると、$d^3r \sim m/\rho$ と離散化できる。i 番目の粒子の持つ物理量は

$$F(\boldsymbol{r}_i) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} F_j W(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|, h)$$

$$\nabla_i F(\boldsymbol{r}_i) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} F_j \nabla_i W(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|, h)$$

カーネル関数は Gauss 関数を用いた ($q = r/h$, ν 次元)

$$W(r, h) = \frac{1}{(h\sqrt{\pi})^\nu} \exp(-q^2)$$

SPH 法の基本方程式

流体力学の方程式は以下のように表せる (Springel & Hernquist 2002)

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left[f_i \frac{p_i}{\rho_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + f_j \frac{p_j}{\rho_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right]$$

$$\frac{du_i}{dt} = f_i \frac{p_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j \boldsymbol{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}(h), \quad \boldsymbol{v}_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$$

$$f_i = \left(1 + \frac{h_i}{\nu \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)^{-1} \quad \text{(grad-}h\text{ term)}$$

衝撃波を解くための人工粘性 (Monaghan 1997)

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} -\alpha \dfrac{v_{ij}^{\mathrm{sig}} \omega_{ij}}{\rho_i + \rho_j} & \boldsymbol{v}_{ij} \cdot \boldsymbol{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \boldsymbol{v}_{ij} \cdot \boldsymbol{r}_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

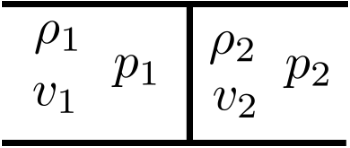
$$v_{ij}^{\mathrm{sig}} \equiv c_i + c_j - 3\omega_{ij}, \quad \omega_{ij} \equiv \boldsymbol{v}_{ij} \cdot \boldsymbol{r}_{ij} / |\boldsymbol{r}_{ij}|$$

一次元 shock tube 問題

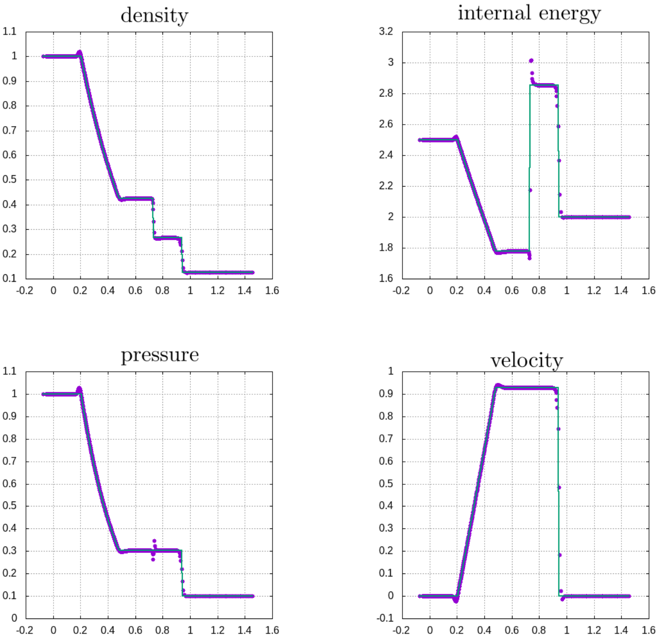
- 異なる密度、圧力、速度を持つ流体 1 と流体 2 が薄膜で仕切られている。
- $t = 0$ で仕切りを外した後の流体の時間発展を求める。
- 解析解は Riemann 問題を解くことで求められる。

Test	ρ_1	v_1	p_1	ρ_2	v_2	p_2
1	1.0	0.0	1.0	0.125	0.0	0.1
2	1.0	-2.0	0.4	1.0	2.0	0.4

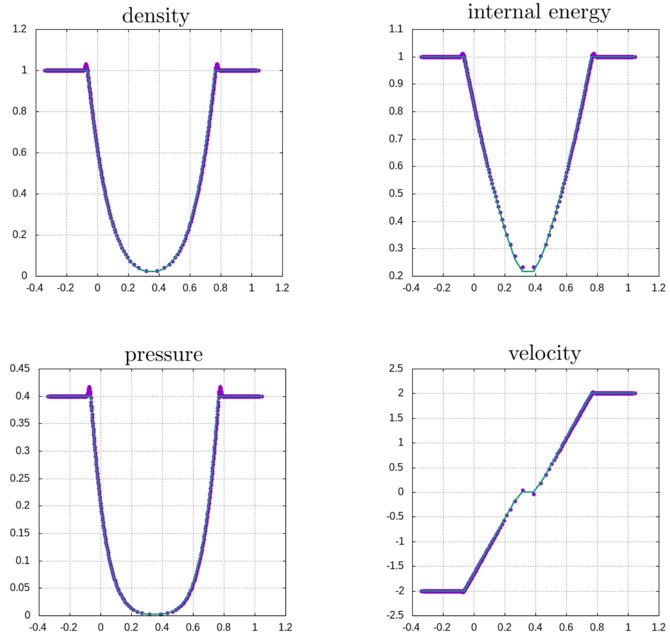
shock tube



Test 1 (Sod test)



Test 2 (123 test)



まとめ

- EI scheme の実装
  - どんな冷却関数でも正しく解ける
  - 大きなタイムステップでも解ける
- SPH の実装
  - 衝撃波と膨張波が解けた
  - 接触不連続面での非物理的な圧力ジャンプが発生

今後の方針

- SPH 法に EI scheme を導入
- 冷却効果の入った SPH 法を評価 (冷却入りの 3 次元流体力学の test 問題を計算)
- 圧力ジャンプの修正のために Godonov SPH 法へ