Rotation Curve of M33 Explained by Dark Matter Disc

もしくは

ピザの
回転曲線

福島登志夫（国立天文台）

(2016) MNRAS, 456, 3702

ResearchGate Fukushima 検索

Xvrot: Fortran 90 ソフトウェア

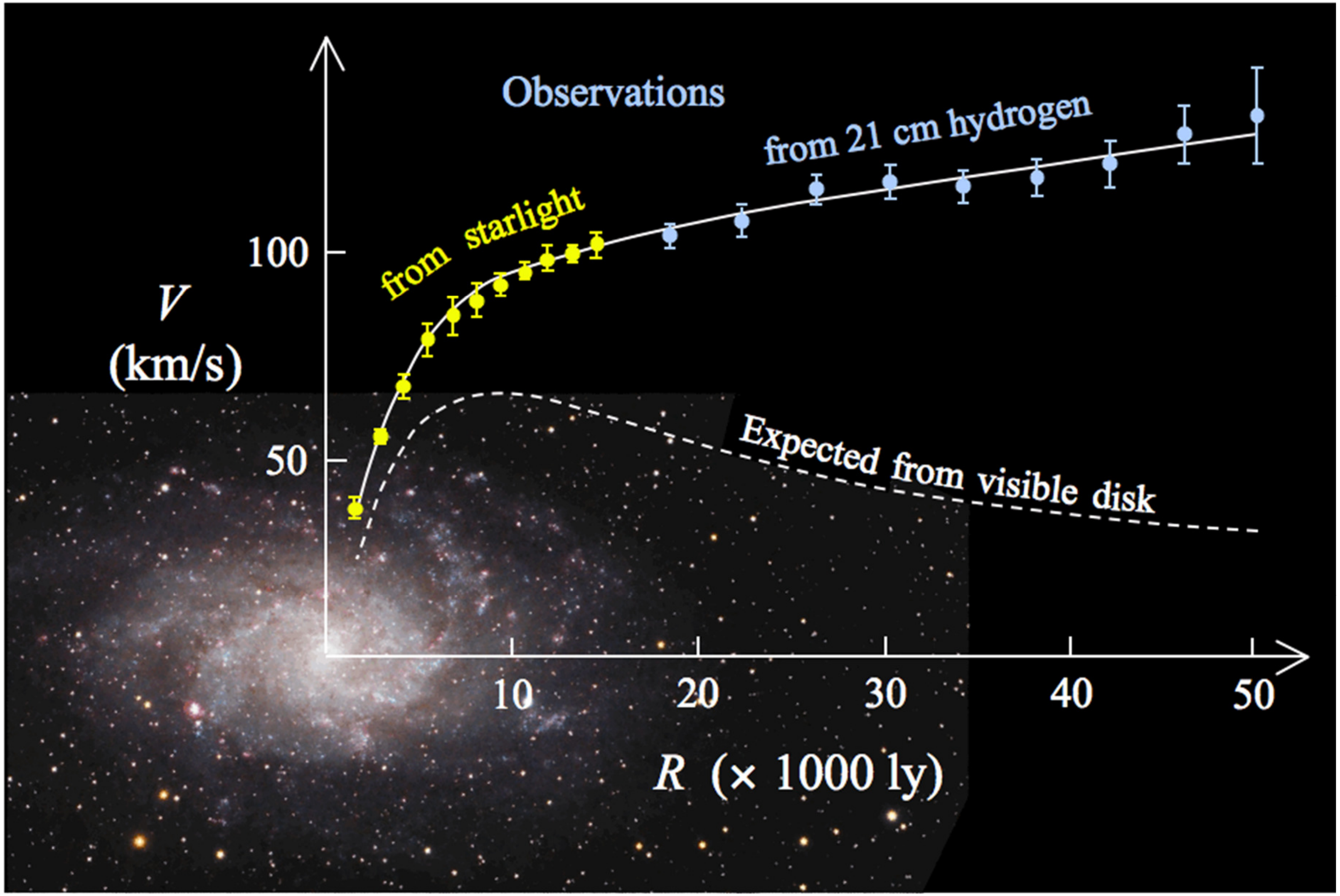
天空のピザ

渦巻銀河 M33

- 別名：さんかく座銀河 = NGC598
  - 局部銀河群で3番目に大きい銀河
  - アンドロメダ銀河M31の伴銀河？
  - 半径：10 kpc
  - 質量： [6（星）+3（ガス）] x 10^9 太陽質量
  - 中心核・バルジが見えない
  - 右肩上がり?の回転曲線

M33の回転曲線

- ウィキペディア



デカルトの
方法的懐疑

デカルトの方法的懐疑

- 方法序説 (Descarte 1637)
- 懐疑の4段階方法論
- 1. 真実と自ら思う事柄のみ認めよ
- 2. 分割して検討せよ
- 3. 単純な疑問より始めよ
- 4. 最後は列挙と再検討

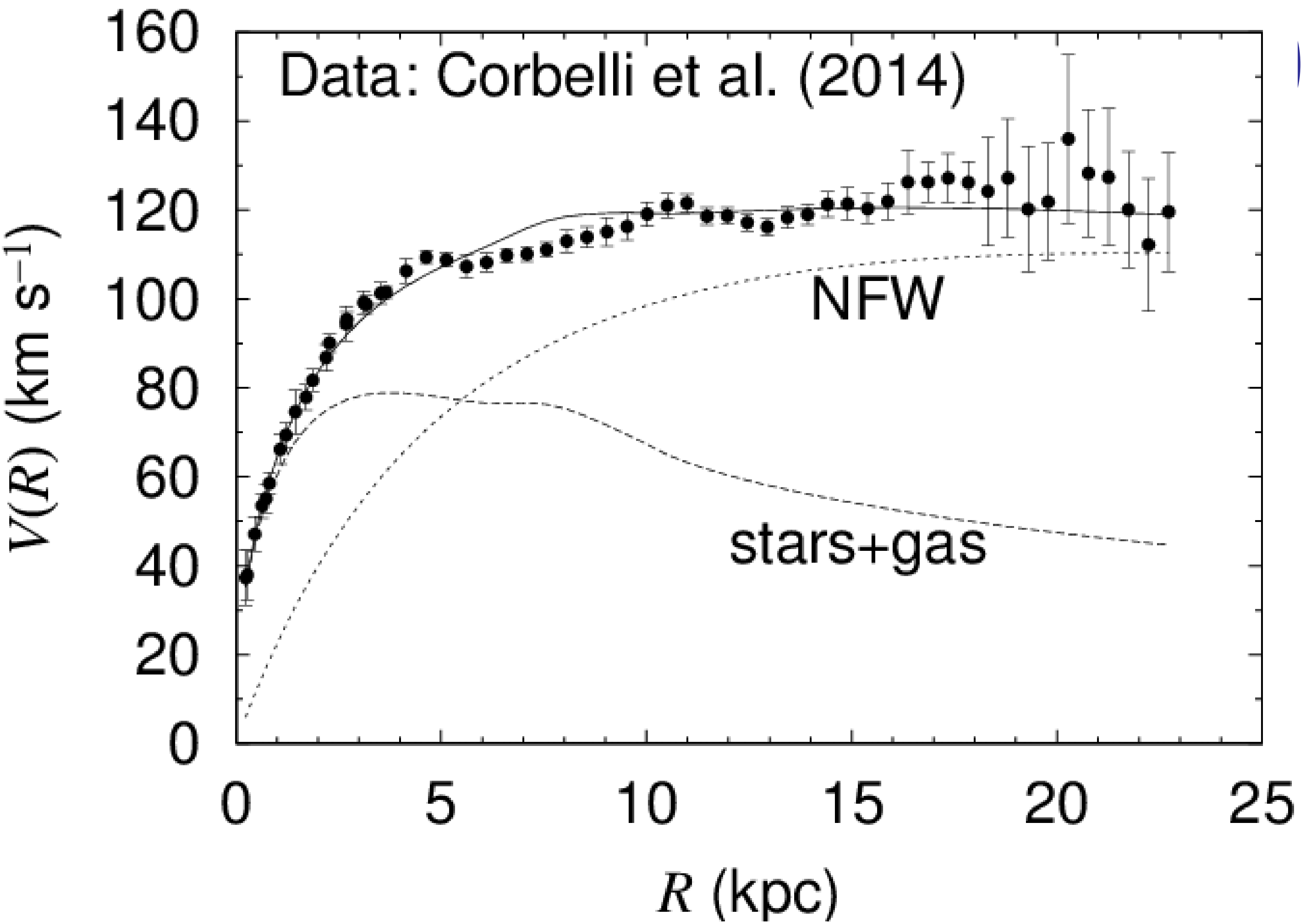
応用：銀河の回転曲線

- 1. 真実と自ら思う事柄のみ認めよ
- 回転曲線そのもの、光度分布
  - 2.分割して検討せよ
- 内側および外側の回転曲線の様子
  - 3.単純な疑問より始めよ
- 軸対称円盤モデル
  - 4.最後は列挙と再検討
- 非軸対称性、円盤の厚み、…

標準的手法

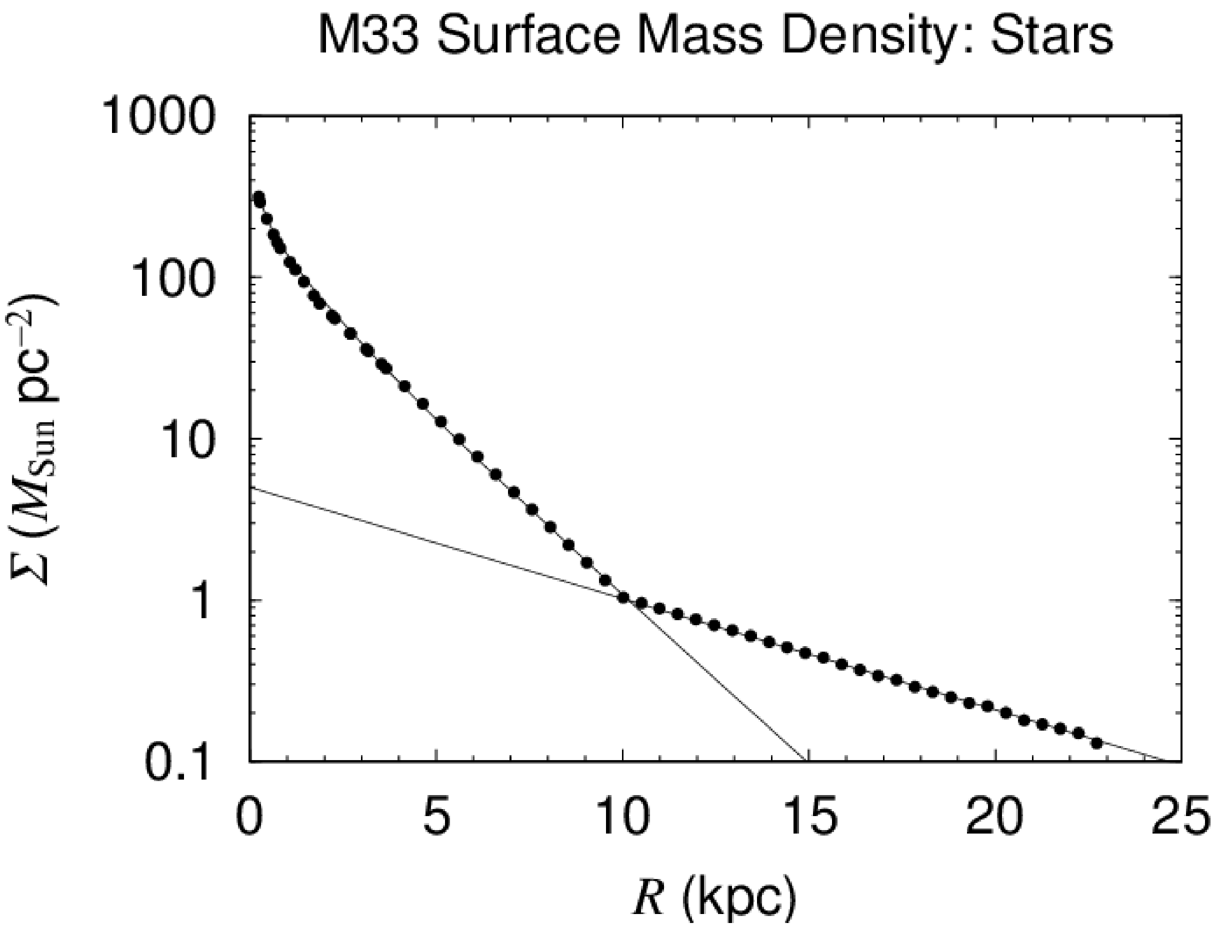
- 分解(deconvolution)法
  - M33: Corbelli et al. (2014)
  - 天の川銀河: Sofue (2015)
- 1. 星とガスの回転曲線への寄与を計算
- 2. 観測された回転曲線から差し引く
- 3. 残差に球対称ダークマターをあてはめ
  - 分布モデル　Navarro, Frenk, & White (NFW) (1996)

Rotation Curve of M33



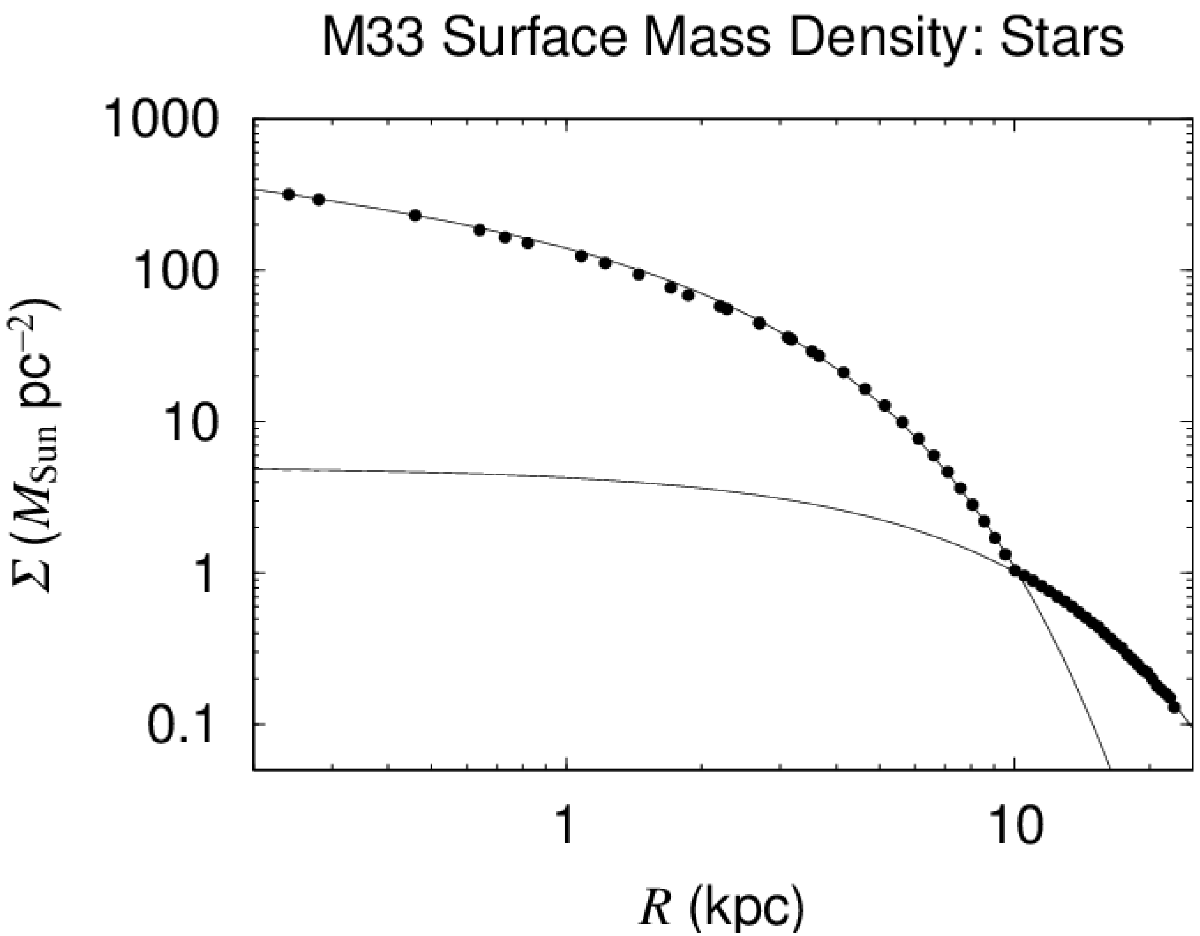
M33の恒星円盤

- 2部分
- べき×指数関数
- 指数関数



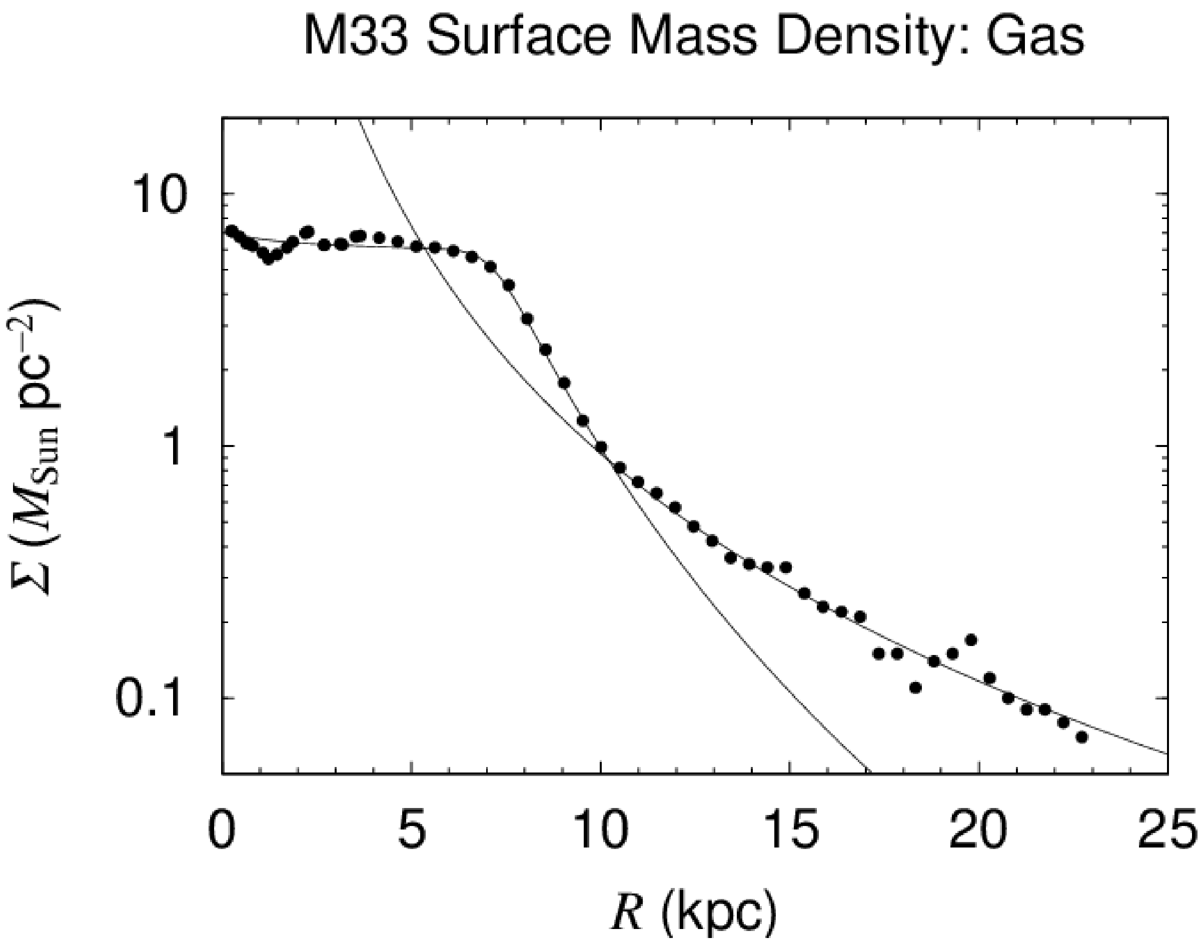
M33の恒星円盤（続）

- 両対数グラフ



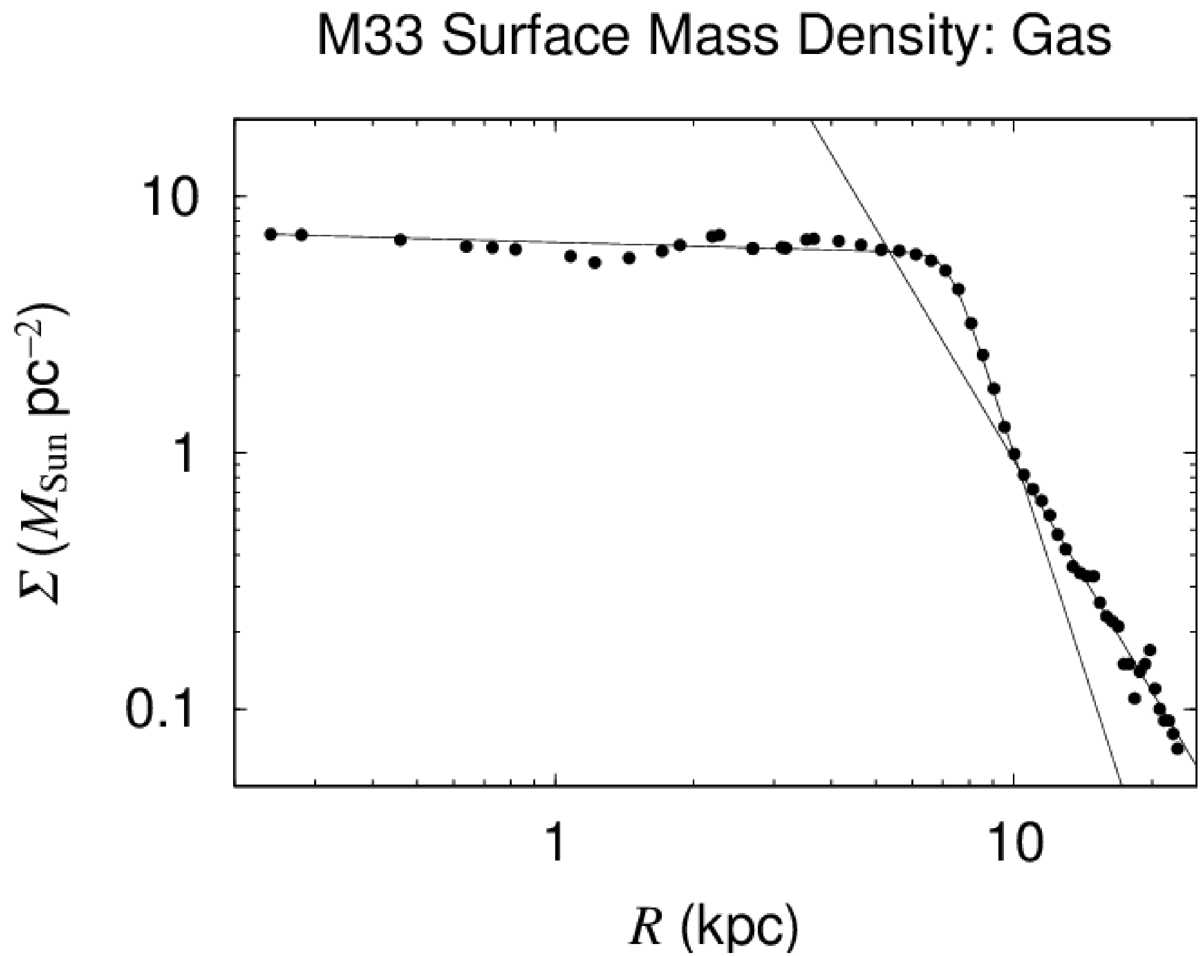
M33のガス円盤

- 2部分
- 双べき乗則
- 単べき乗則



M33のガス円盤(続)

- 両対数グラフ



区分的密度分布

- 既存の手法は適用不可
  - （無限に広がった）指数関数円盤
  - （無限に広がった）べき乗則円盤
- 任意密度分布の重力場計算の必要性
  - 任意の大きさや形状 (有限、中心穴の有無)
  - 任意の密度分布関数形 (双べき乗則など)
  - 任意地点での評価

フォースは常に
君と共にある、
ポテンシャルよ

重力場の新しい計算法

- 仮定
  - 軸対称、無限に薄い、区分的密度分布関数
- 手法
  - ポテンシャル： 環ポテンシャルの数値積分
  - 加速度ベクトル： ポテンシャルの数値微分
- ポテンシャルの線積分表現

$$\Phi\left(R,z\right)=\sum_{j=1}^{J}\Phi_j\left(R,z\right)$$

$$\Phi_j\left(R,z\right)=\int_{R_{j-1}}^{R_j}\Psi\left(R';R,z\right)dR'$$

被積分関数の表現

- 環ポテンシャル (Kellogg 1929)

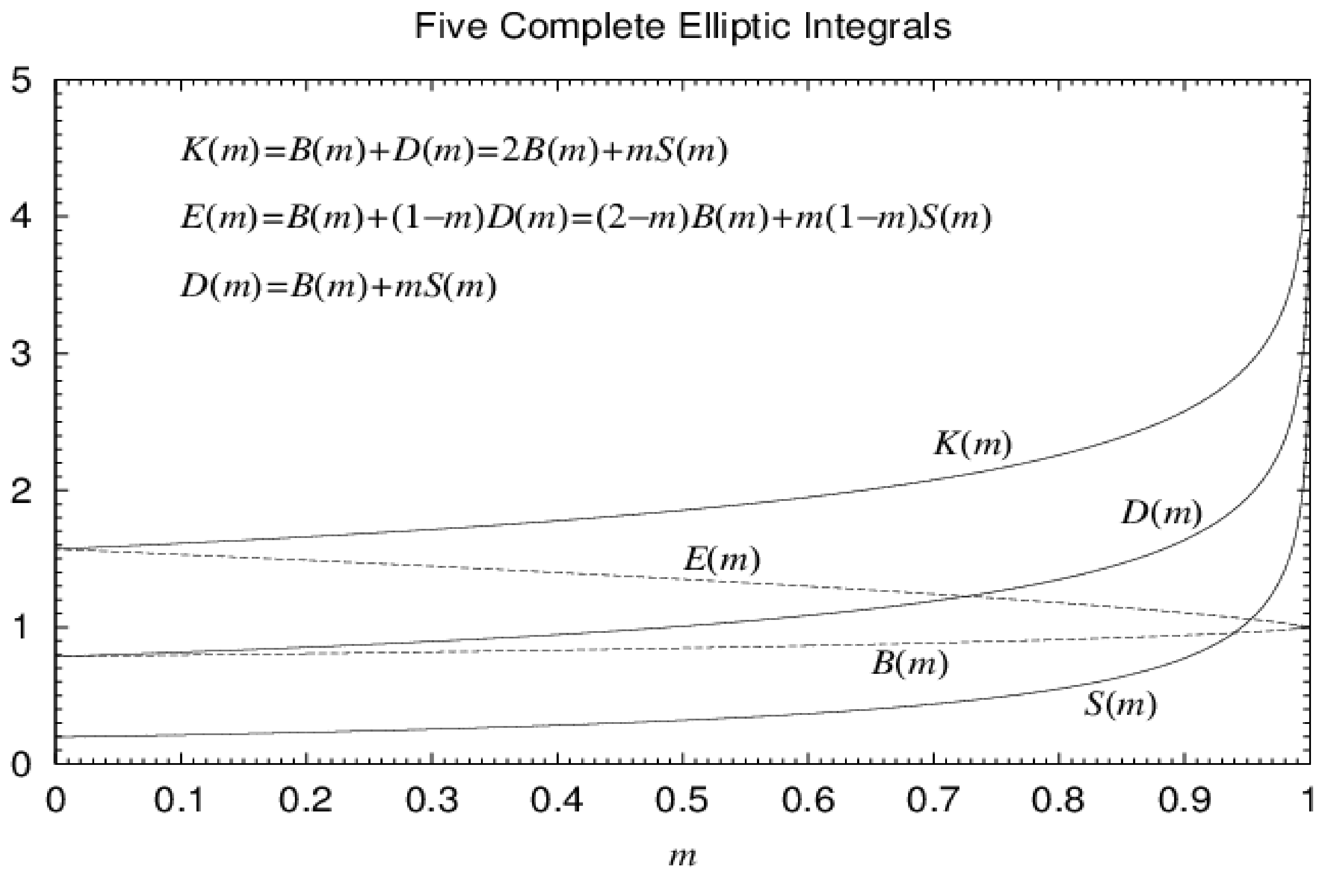
$$\Psi(R';R,z) = \frac{-4G\Sigma(R')K(m(R';R,z))R'}{P(R';R,z)}$$

$$m(R';R,z) \equiv \frac{4RR'}{\left[P(R';R,z)\right]^2}$$

$$P(R';R,z) \equiv \sqrt{(R'+R)^2 + z^2}$$

- K(m): 第一種完全楕円積分
  - Fukushima (2015): 高速高精度計算法

完全楕円積分


Five Complete Elliptic Integrals
$K(m)=B(m)+D(m)=2B(m)+mS(m)$
$E(m)=B(m)+(1-m)D(m)=(2-m)B(m)+m(1-m)S(m)$
$D(m)=B(m)+mS(m)$
$K(m)$
$D(m)$
$E(m)$
$B(m)$
$S(m)$
0
1
2
3
4
5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
m

特異点問題

- 爆発型対数的特異点 K(m): m=1
- 原理的(＝解析的)には積分可能
- 数値的には非常に困難
- 特異点のありか(m=1)
  - R=R′ および z=0 （＝円盤内のどこか）
- 近傍(m~1)でも問題
  - 被積分関数に鋭いピーク

分割して
統治せよ

分割積分法

- 積分区間を特異点・ピークで分けるだけ

$$\Phi_j(R,z) = \int_{R_{j-1}}^{R} \Psi(R';R,z)\,dR' + \int_{R}^{R_j} \Psi(R';R,z)\,dR'$$

- 二重指数関数積分公式
  - Takahashi & Mori (1973)
  - 計算プログラム: intde、intdei (大浦 2006)
- 簡単だが、よく効く
  - Fukushima (2014)

加速度ベクトル

- 定義

$$\mathbf{A} = A_R \mathbf{e}_R + A_z \mathbf{e}_z$$

$$A_R \equiv -\left(\frac{\partial \Phi(R,z)}{\partial R}\right), A_z \equiv -\left(\frac{\partial \Phi(R,z)}{\partial z}\right)$$

- 数値微分
  - 原始的だが効果的
  - 計算コストが少し増加、計算精度が少し減少
- Ridderの方法 (Ridder 1982)
  - 計算プログラム: dfridr (Numerical Recipe in F77)

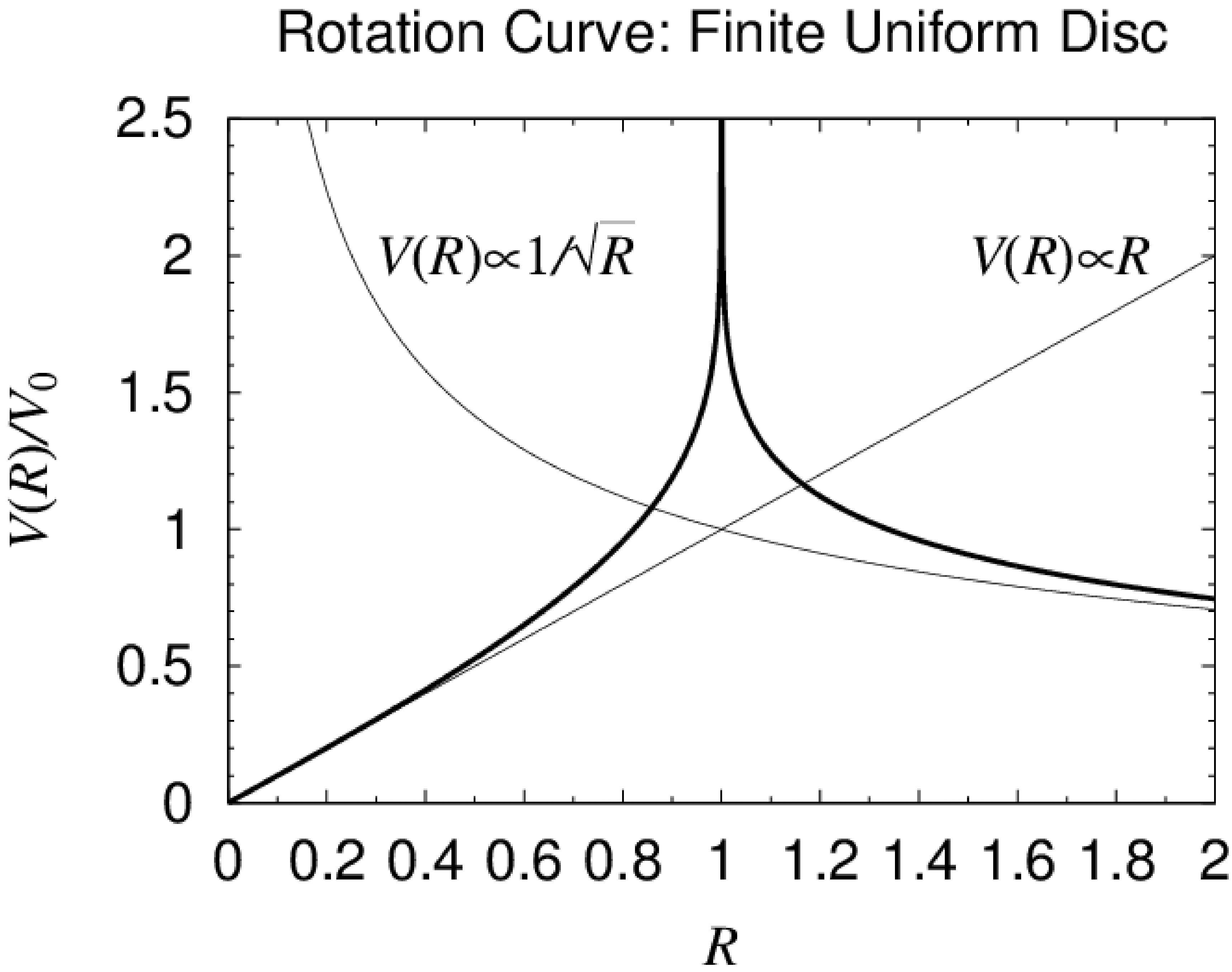
数値計算ツール

- 第一種完全楕円積分 K(m): ceik
  - Fukushima (2015)
  - https://www.researchgate.net/profile/Toshio_Fukushima/
- 二重指数関数型数値積分 intde
  - 大浦 (2006)
  - http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ooura/intde.html
- 数値微分: dfridr
  - Press et al. (1992, Sect. 5.7)
  - http://apps.nrbook.com/fortran/index.html

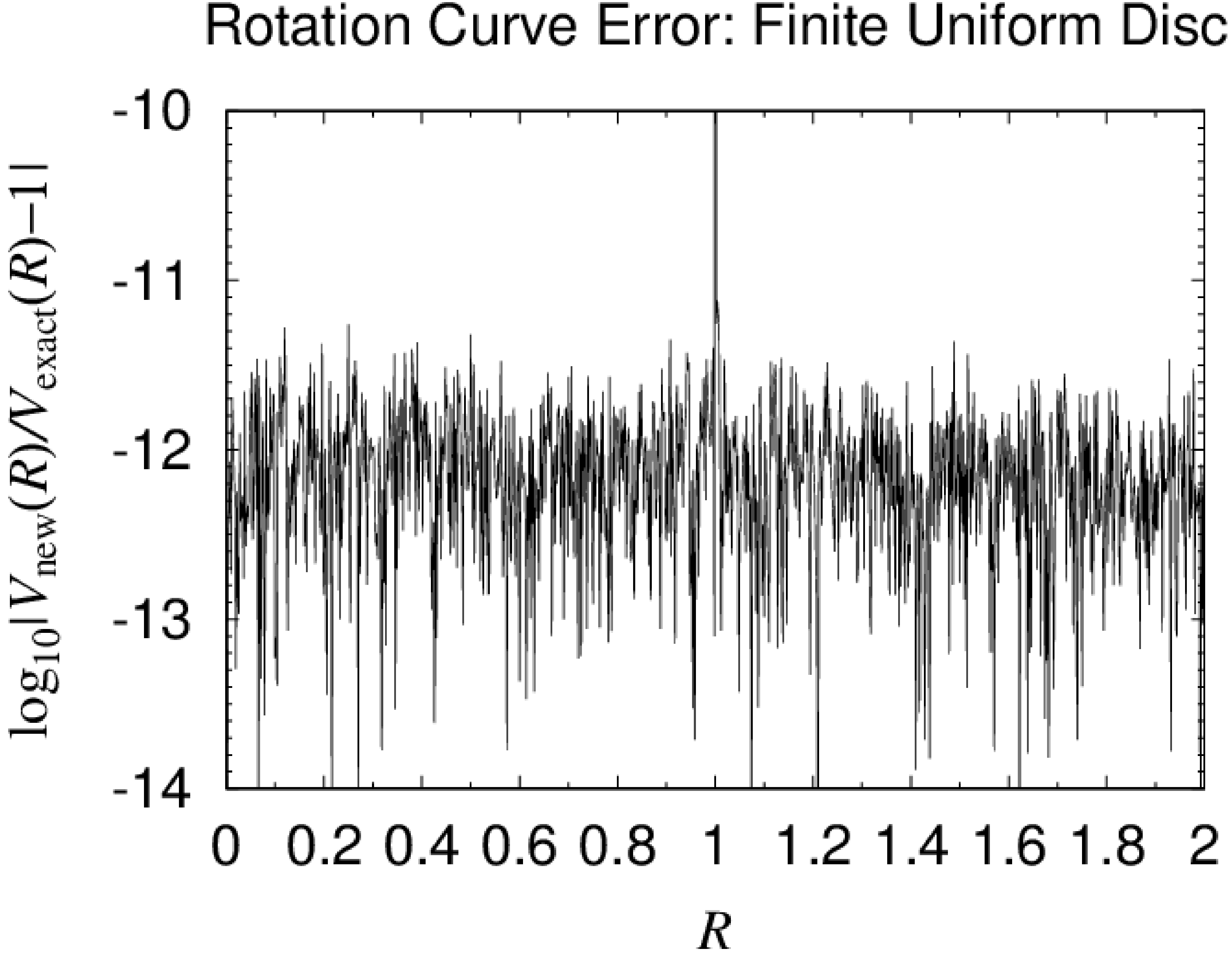
念には
念を入れよ

検証

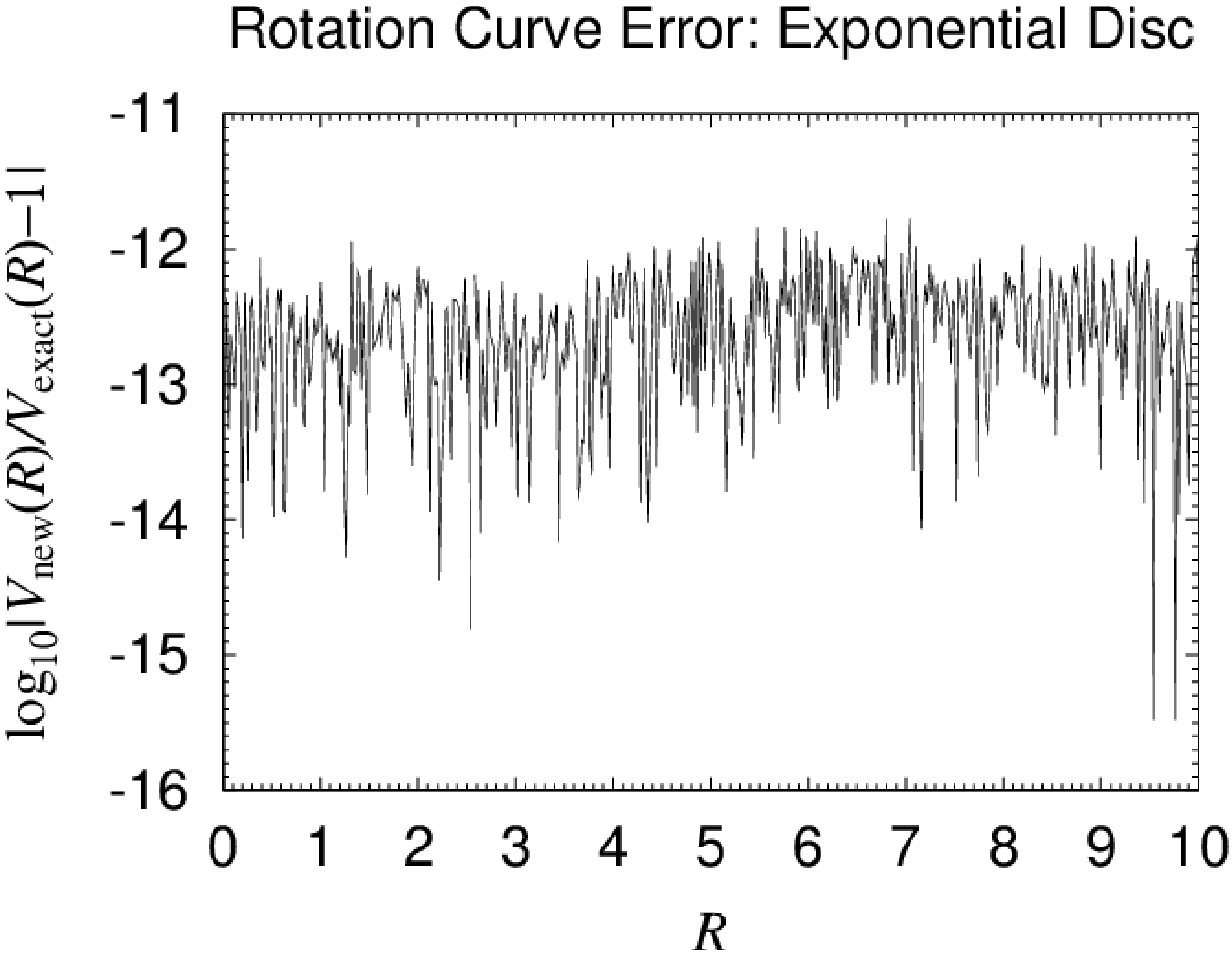
- その1: 有限均質円盤
  - Durand (1953), Fukushima (2010)
  - 解析解：全三種の完全楕円積分を駆使
- その2: （無限に広がった）指数関数円盤
  - Freeman (1970)
  - 解析解：変形ベッセル関数の交差積
- 検証法: 回転曲線の比較
- 11-12桁の計算精度を確認



Rotation Curve: Finite Uniform Disc
$V(R)\propto 1/\sqrt{R}$
$V(R)\propto R$
$V(R)/V_0$
R
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.2
1.4
1.6
1.8



Rotation Curve Error: Finite Uniform Disc
-10
-11
-12
-13
-14
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
$\log_{10}|V_{\mathrm{new}}(R)/V_{\mathrm{exact}}(R)-1|$
R

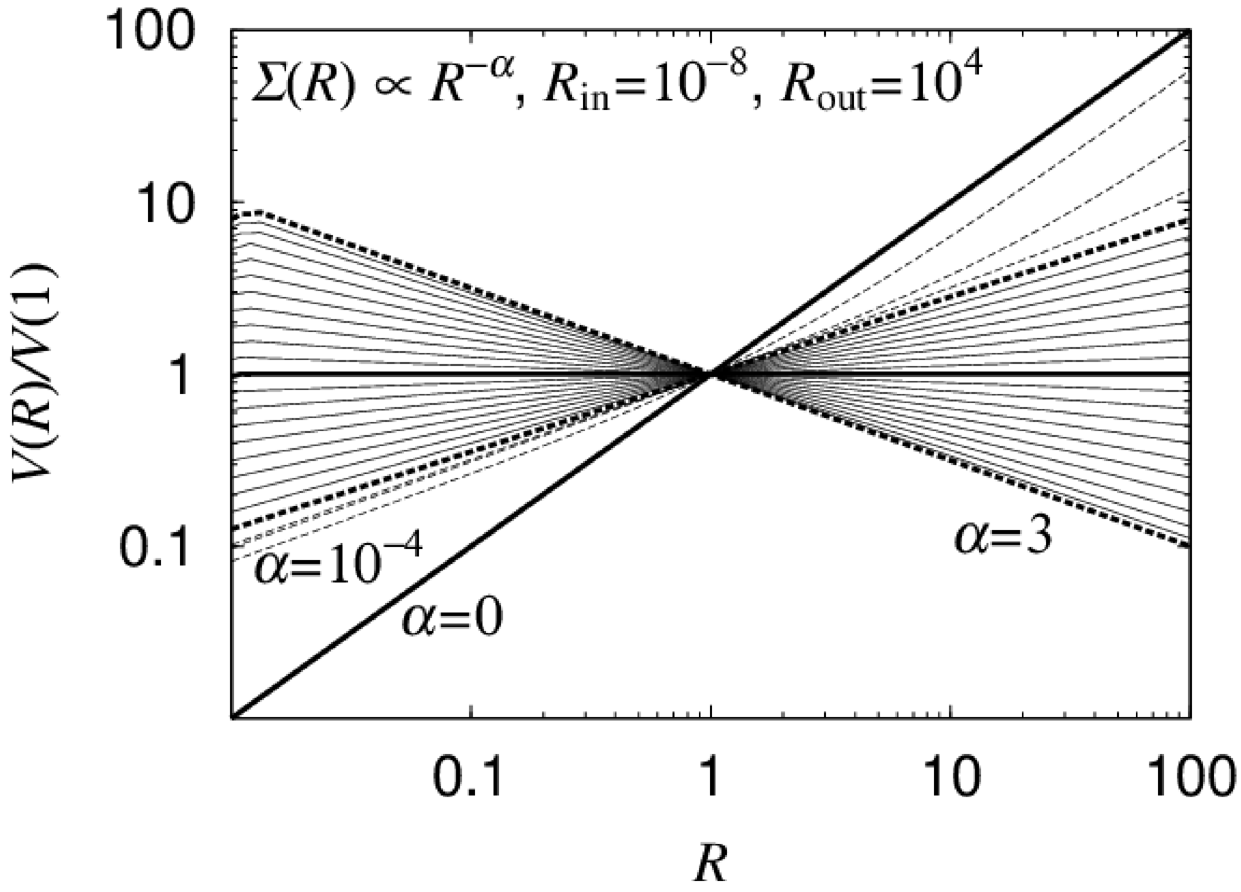


Rotation Curve Error: Exponential Disc
-11
-12
-13
-14
-15
-16
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$\log_{10}|V_{\rm new}(R)/V_{\rm exact}(R)-1|$
R

お楽しみは
これからだ

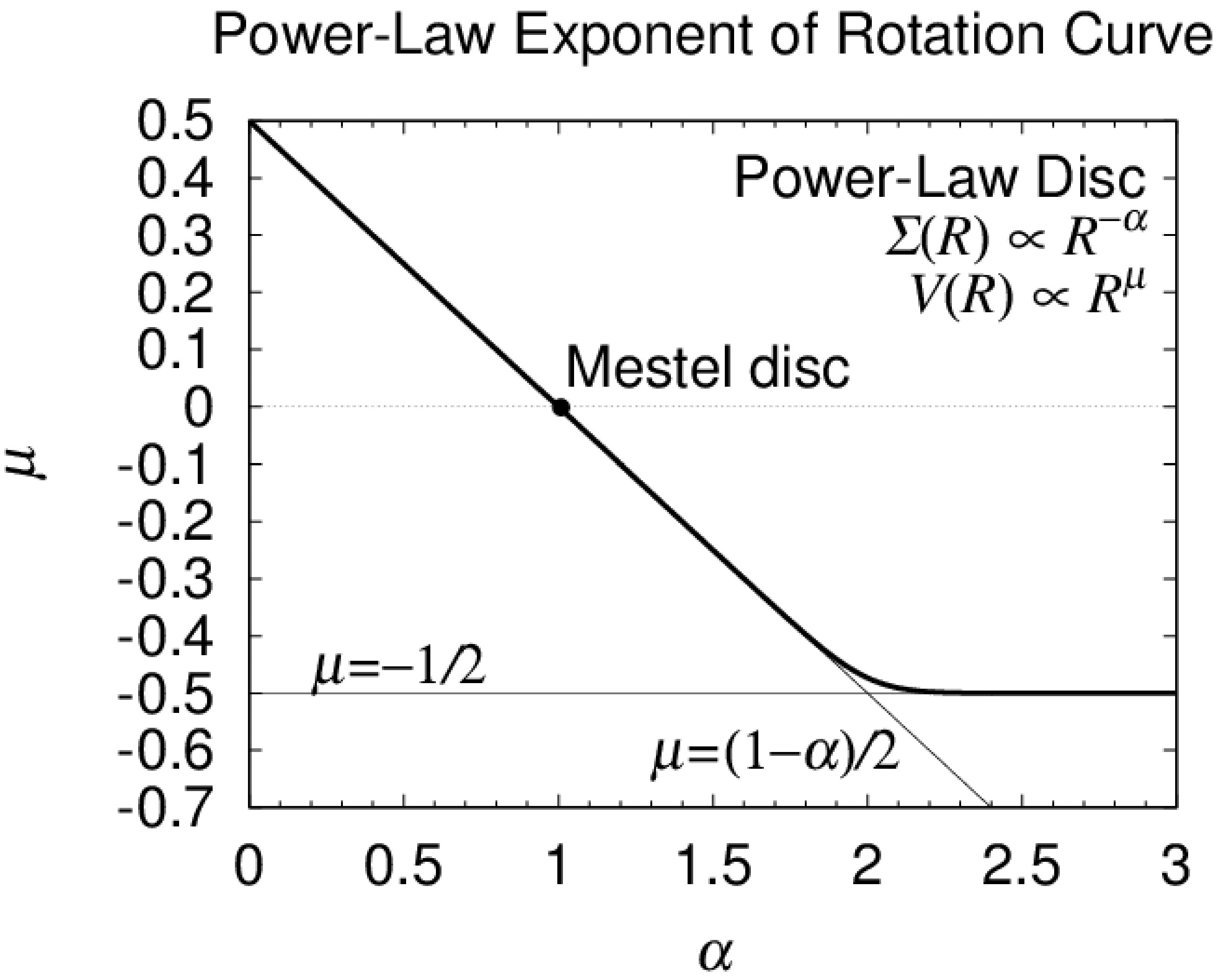
その1:有限べき乗円盤

Rotation Curve: Power-Law Disc



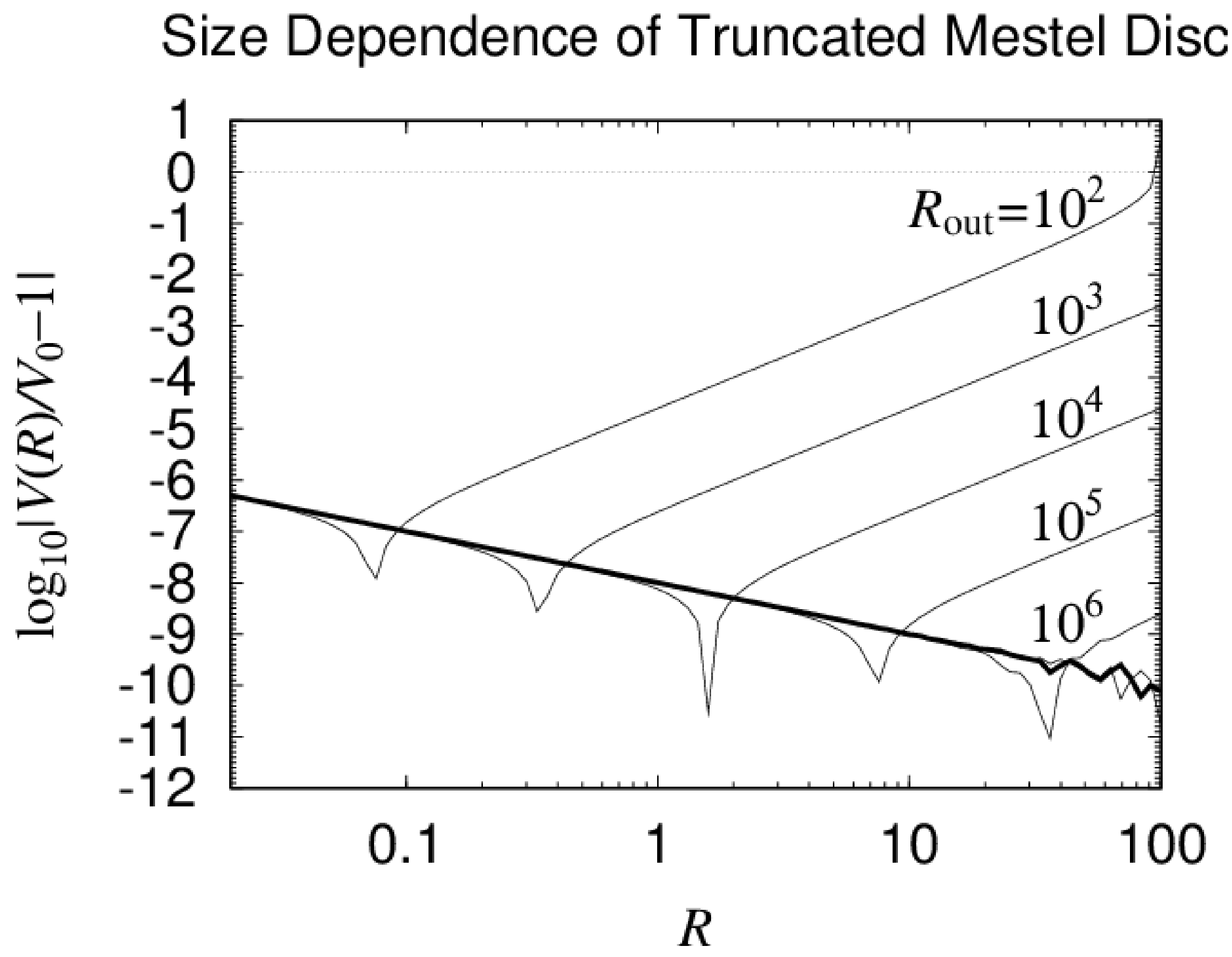
- べき乗則密度分布なら回転曲線はほぼべき乗

べき指数関係



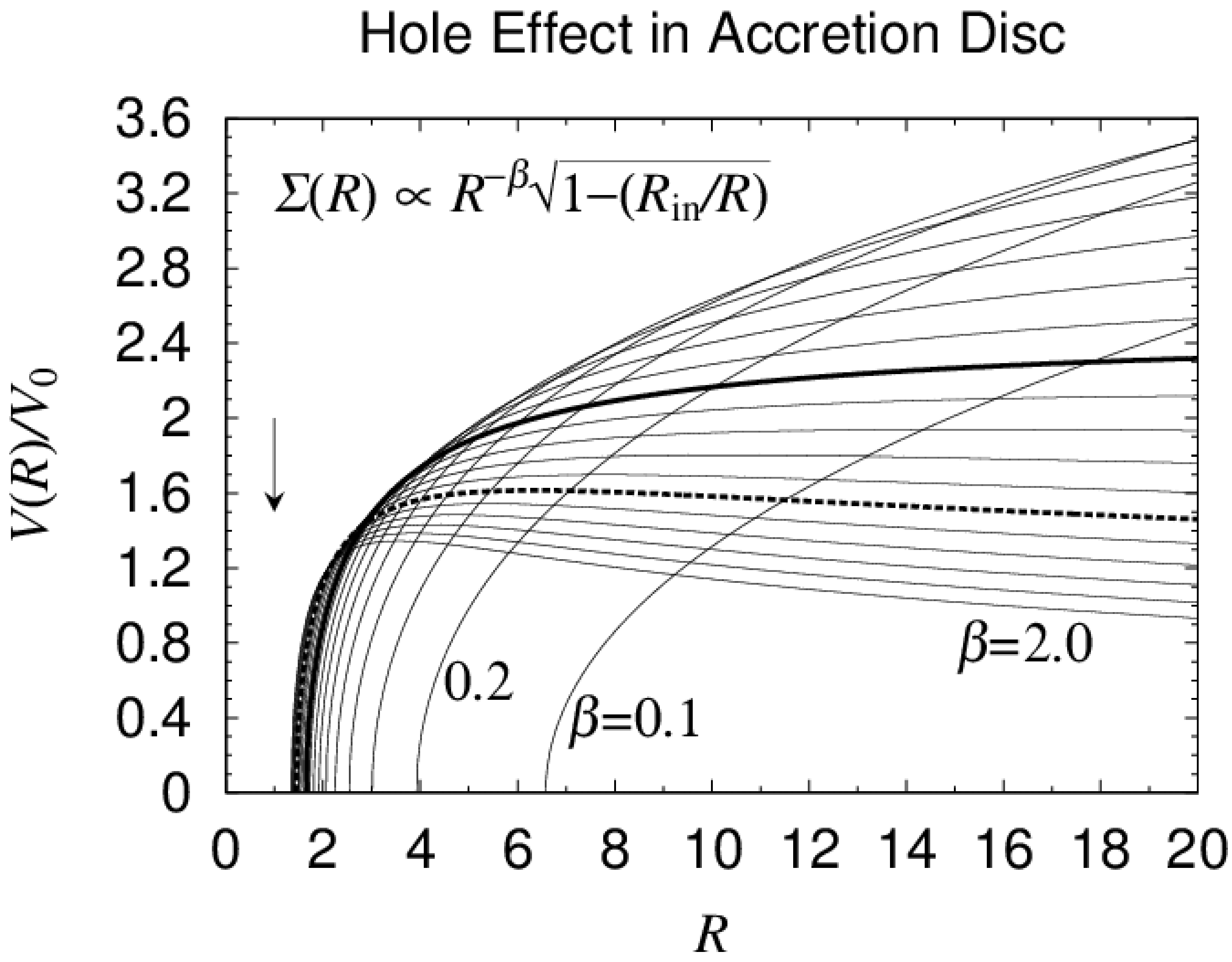
Power-Law Exponent of Rotation Curve
Power-Law Disc
$\Sigma(R) \propto R^{-\alpha}$
$V(R) \propto R^{\mu}$
Mestel disc
$\mu=-1/2$
$\mu=(1-\alpha)/2$
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
μ
α

近似的一致

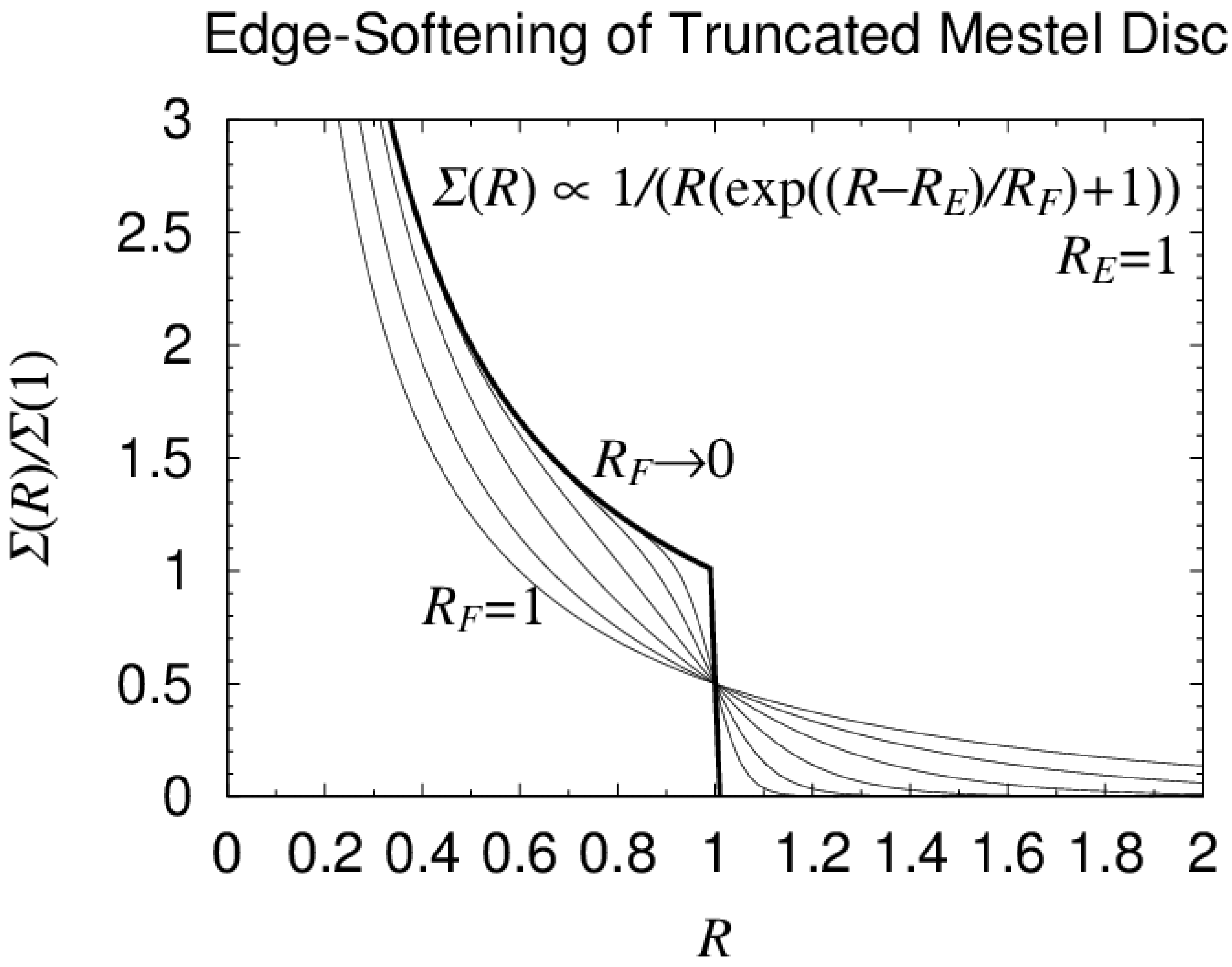


Size Dependence of Truncated Mestel Disc
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
$R_{\rm out}=10^2$
10^3
10^4
10^5
10^6
0.1
1
10
100
R
$\log_{10}|V(R)/V_0-1|$

中心穴の効果

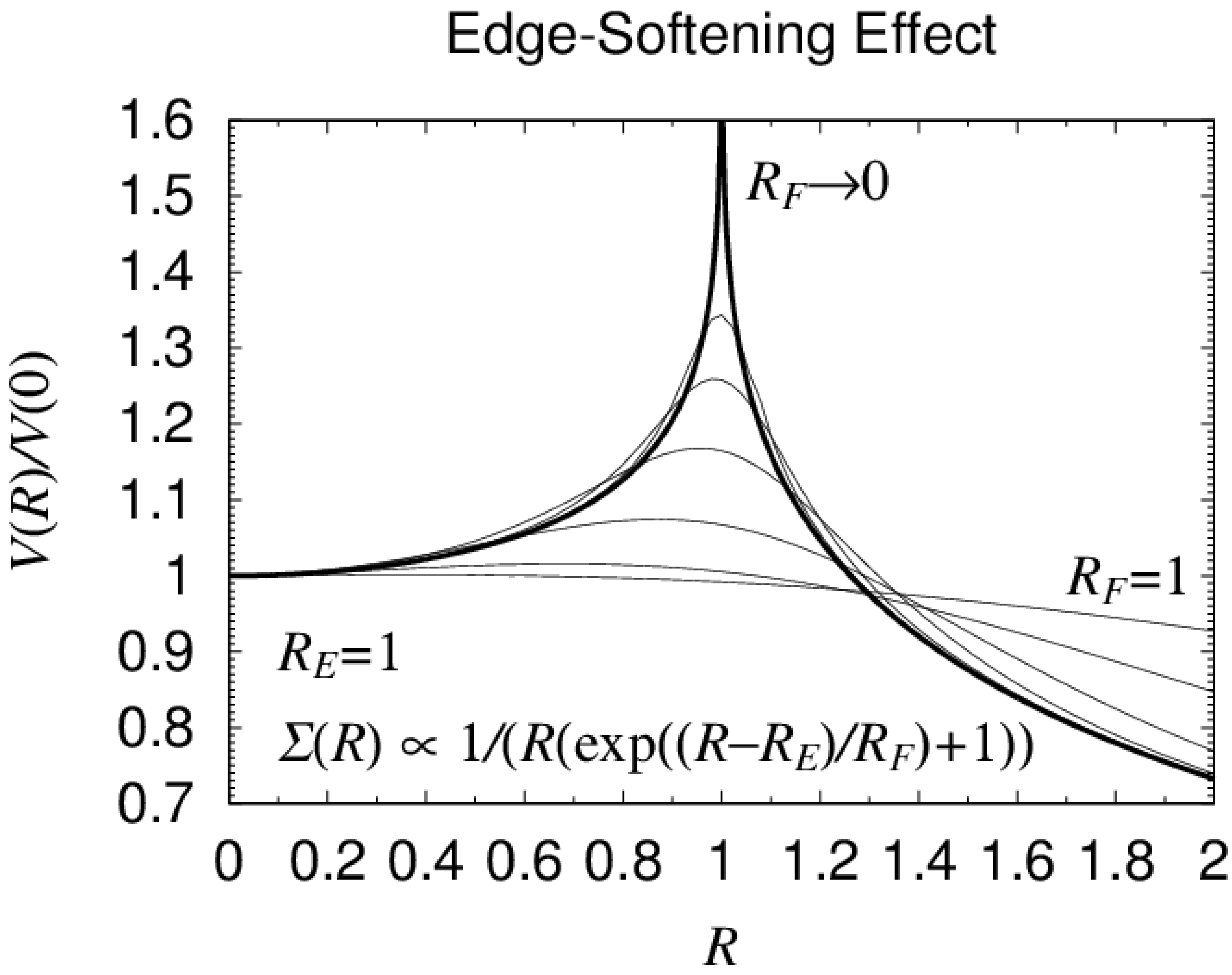

Hole Effect in Accretion Disc
$\Sigma(R) \propto R^{-\beta}\sqrt{1-(R_{in}/R)}$
$V(R)/V_0$
R
0.2
β=0.1
β=2.0
3.6
3.2
2.8
2.4
2
1.6
1.2
0.8
0.4
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

円盤縁のソフトニング



Edge-Softening of Truncated Mestel Disc
$\Sigma(R) \propto 1/(R(\exp((R-R_E)/R_F)+1))$
$R_E=1$
$R_F \to 0$
$R_F=1$
$\Sigma(R)/\Sigma(1)$
R
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

縁ソフトニングの効果


Edge-Softening Effect
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
$V(R)/V(0)$
R
$R_F \to 0$
$R_F=1$
$R_E=1$
$\Sigma(R) \propto 1/(R(\exp((R-R_E)/R_F)+1))$

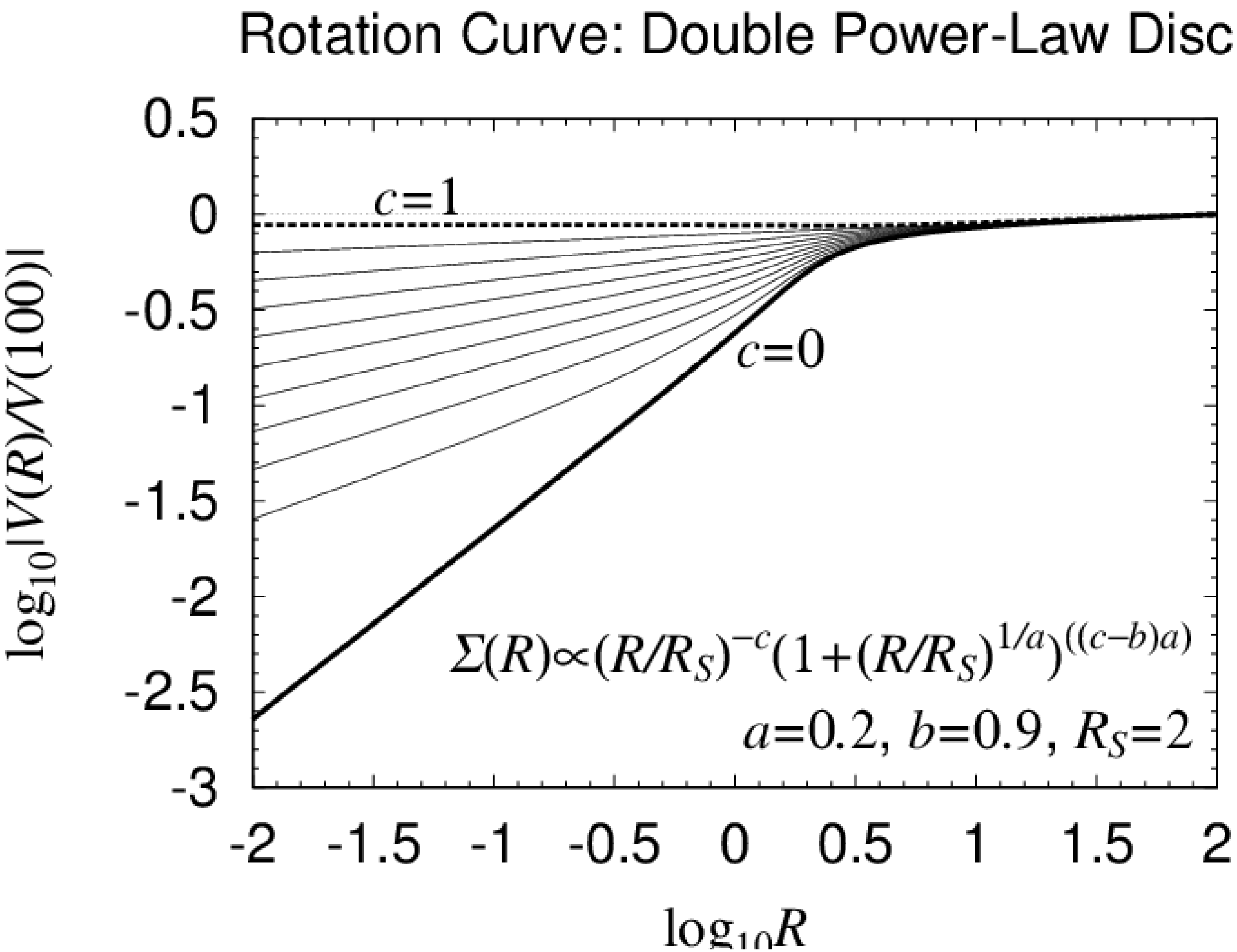
その2：双べき乗則

- ヒント：一般化三次元質量密度分布モデル (Zhao, 1996, MNRAS)
- 関数形

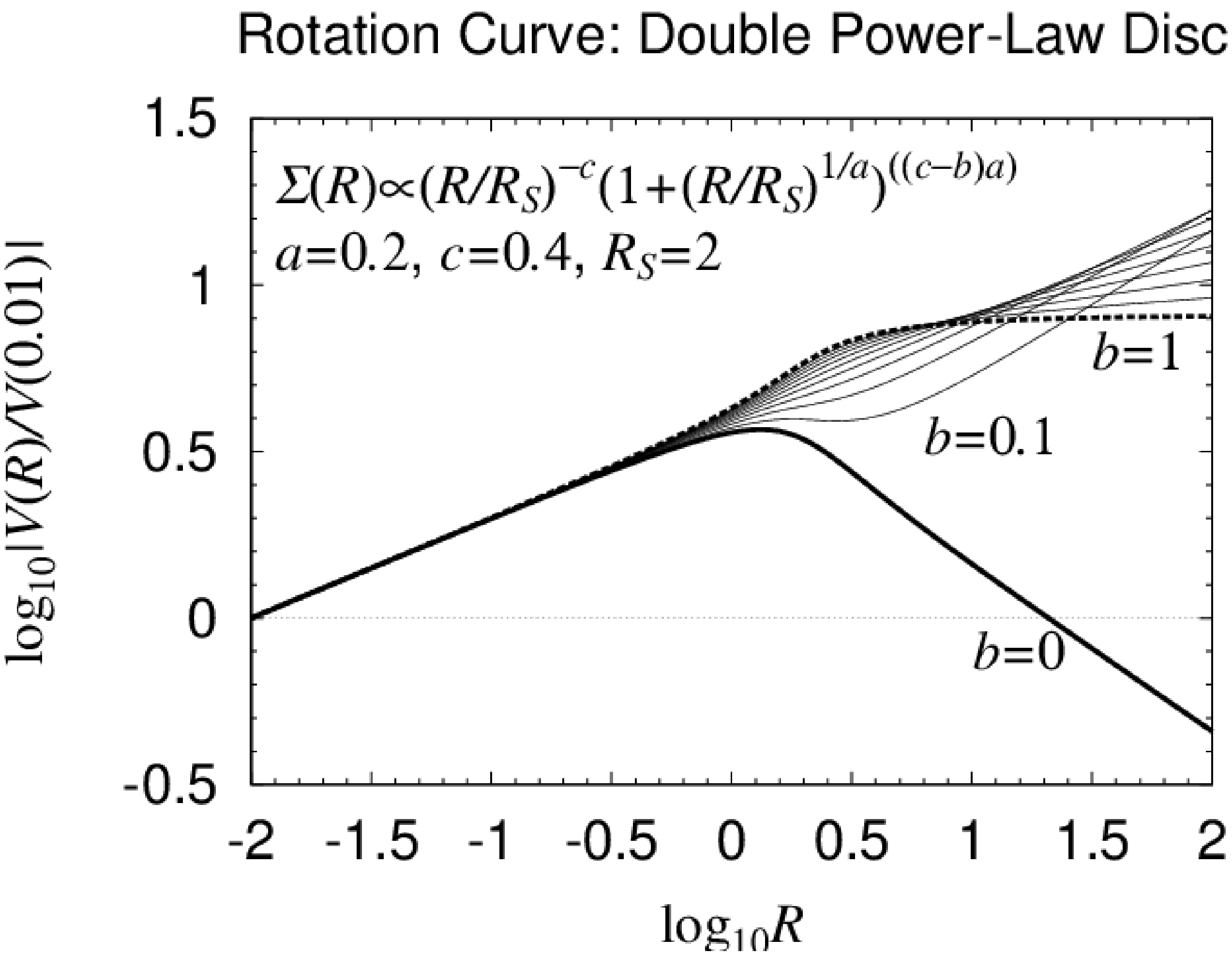
$$\Sigma(R) \equiv \Sigma_0 \left(R/R_S\right)^{-c} \left[1+\left(R/R_S\right)^{1/a}\right]^{(c-b)a}$$

- 内側べき指数: c
- 外側べき指数: b
- 中間領域曲率: 1/a

内側べき指数依存性

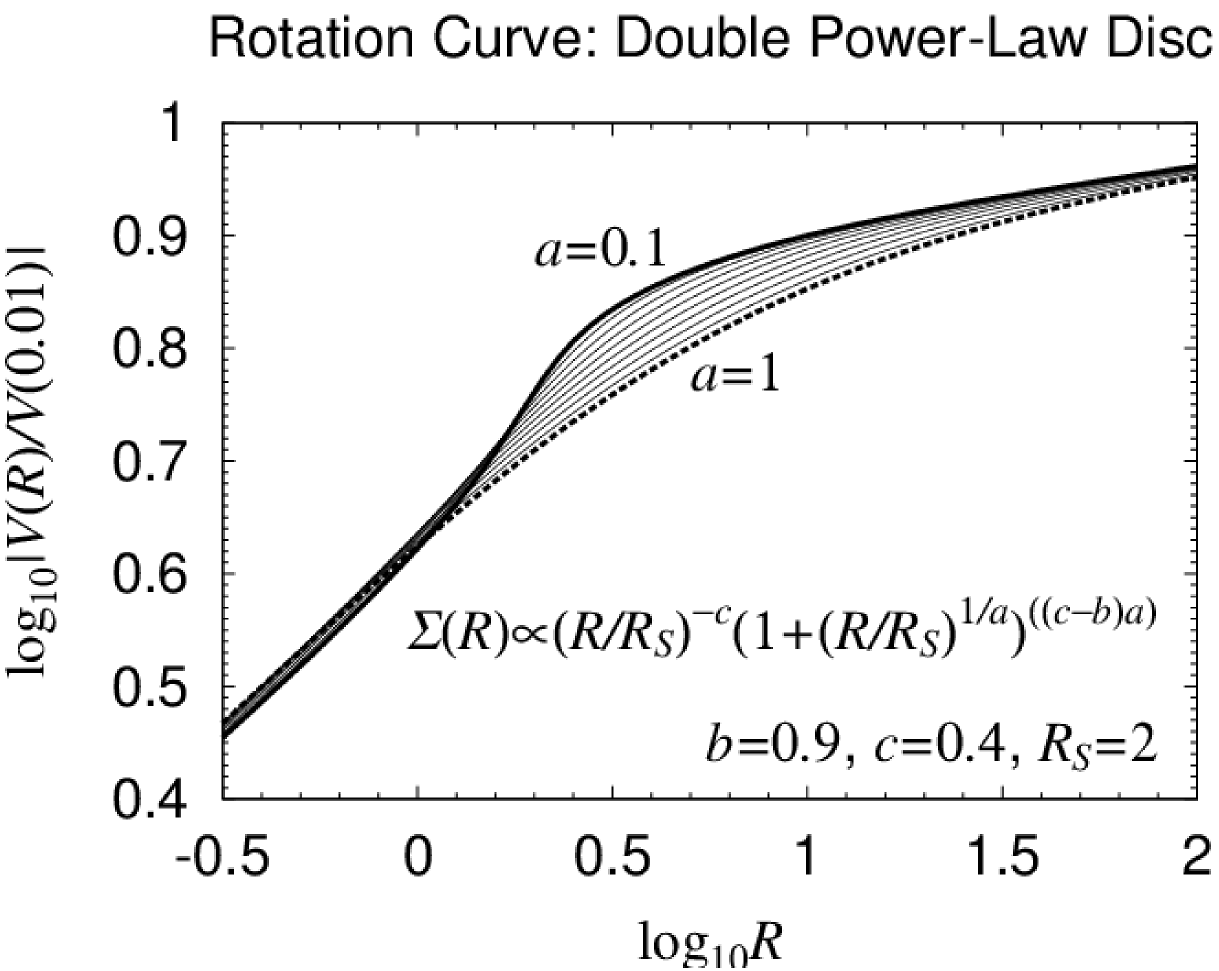

Rotation Curve: Double Power-Law Disc
c=1
c=0
$\Sigma(R) \propto (R/R_S)^{-c}(1+(R/R_S)^{1/a})^{((c-b)a)}$
a=0.2, b=0.9, R_S=2
$\log_{10}|V(R)/V(100)|$
$\log_{10}R$
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

外側べき指数依存性



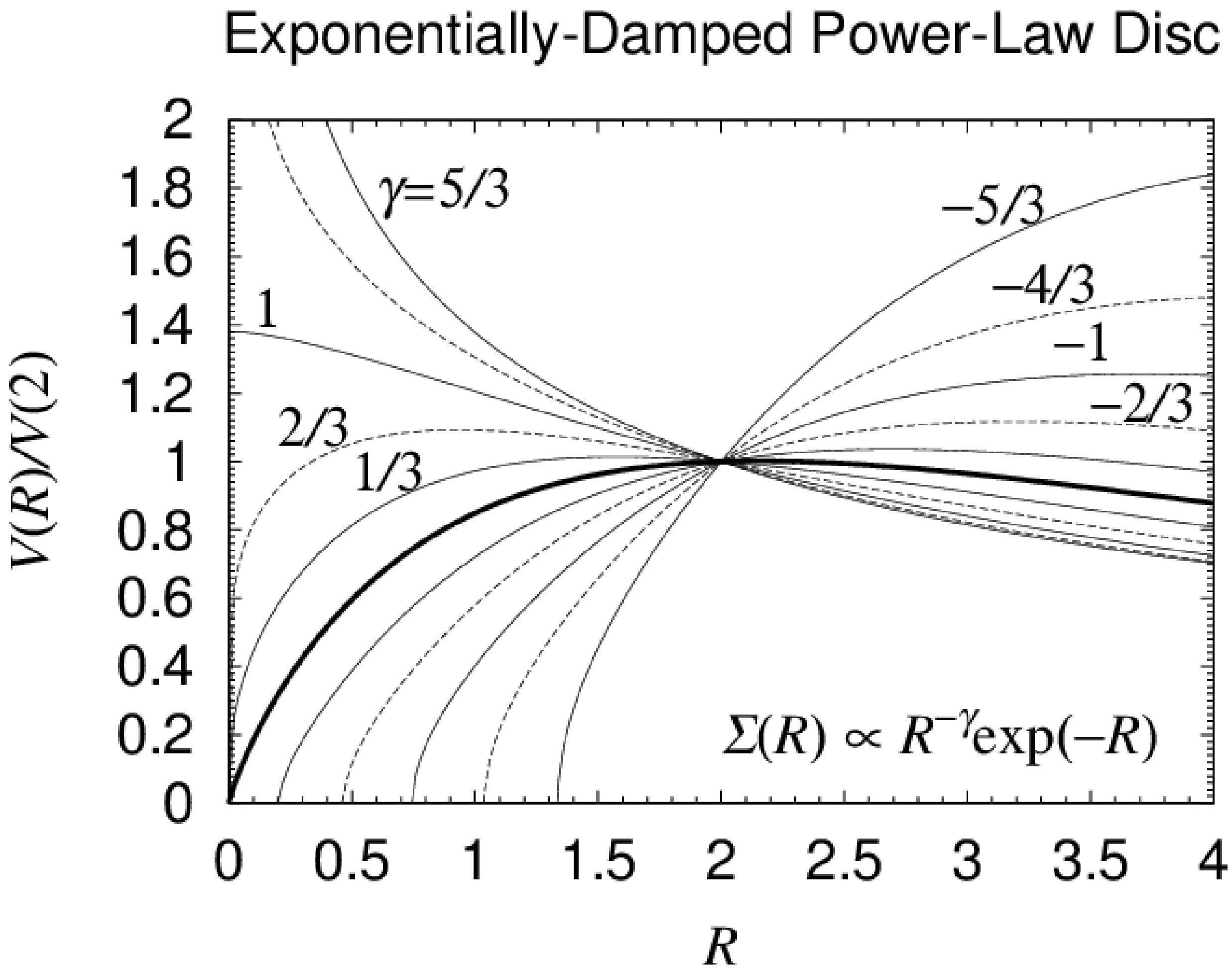
Rotation Curve: Double Power-Law Disc
$\Sigma(R) \propto (R/R_S)^{-c}(1+(R/R_S)^{1/a})^{((c-b)a)}$
a=0.2, c=0.4, R_S=2
b=1
b=0.1
b=0
1.5
1
0.5
0
-0.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
$\log_{10}|V(R)/V(0.01)|$
$\log_{10}R$

中間領域曲率依存性

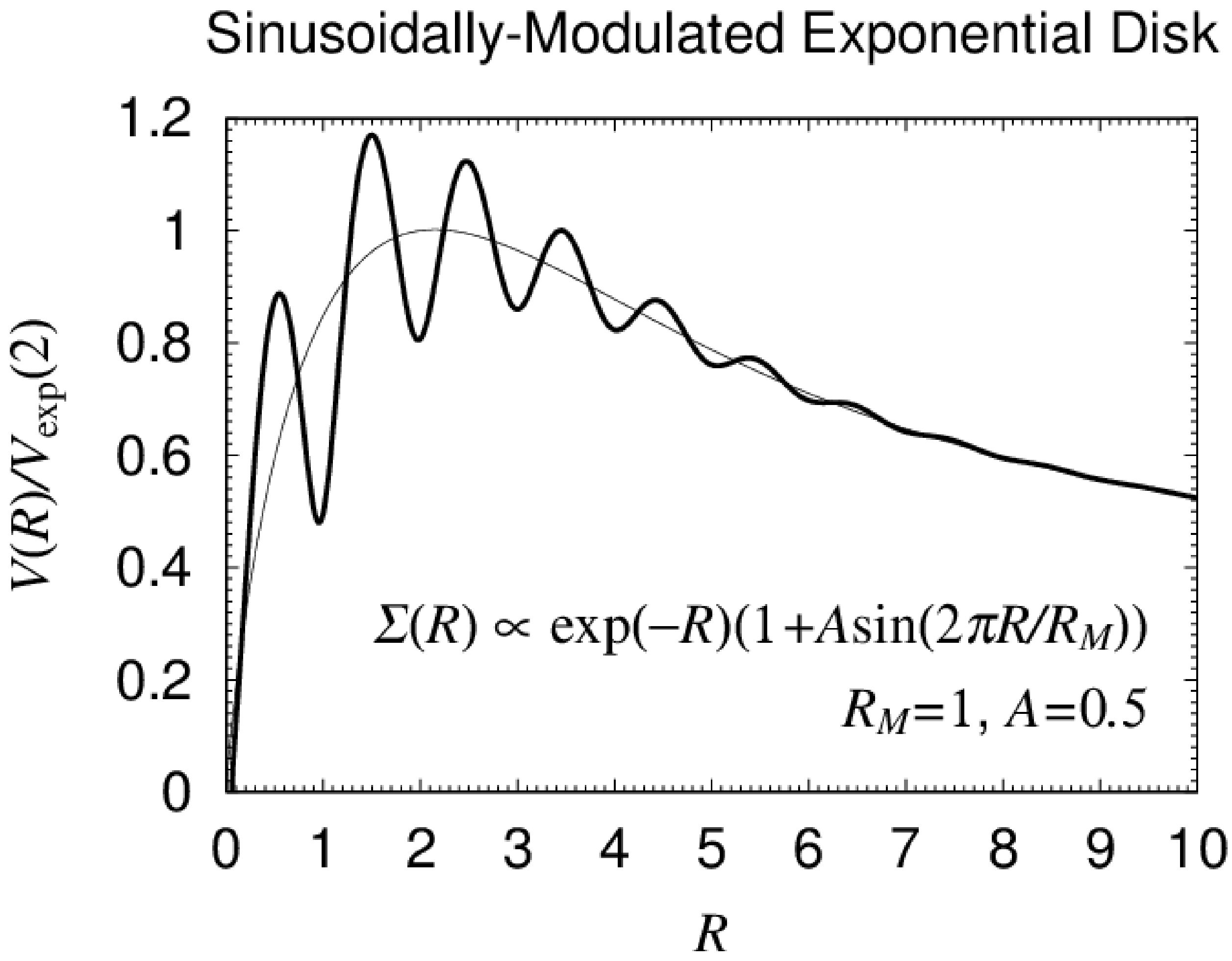


Rotation Curve: Double Power-Law Disc
a=0.1
a=1
$\Sigma(R) \propto (R/R_S)^{-c}(1+(R/R_S)^{1/a})^{((c-b)a)}$
b=0.9, c=0.4, R_S=2
$\log_{10}|V(R)/V(0.01)|$
$\log_{10}R$
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

その3：指数関数的に減少するべき乗則



その4：減衰振動円盤


Sinusoidally-Modulated Exponential Disk
$V(R)/V_{\exp}(2)$
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
R
$\Sigma(R) \propto \exp(-R)(1+A\sin(2\pi R/R_M))$
$R_M=1,\ A=0.5$

帝国の逆襲

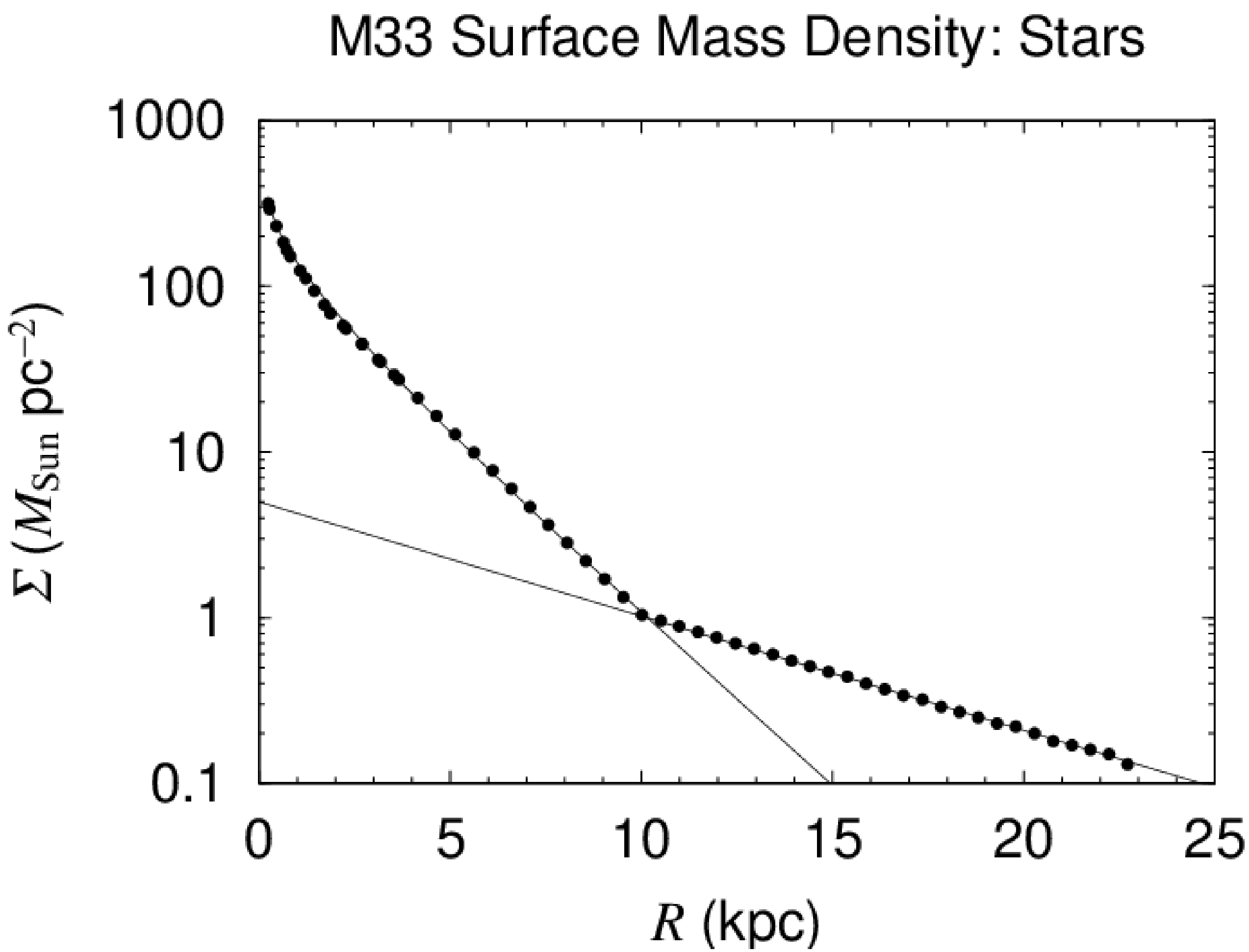
恒星·ガスの密度分布モデル: M33

- 二区分モデル
- 恒星
  - 内側 $\Sigma(R) = \Sigma_A (R/R_A)^{-1/3} \exp(-R/R_A)$
  - 外側 $\Sigma(R) = \Sigma_B \exp(-R/R_B)$
- ガス
  - 内側 $\Sigma(R) = \Sigma_C (R/R_C)^{-c} \left[1 + (R/R_C)^{1/a}\right]^{(c-b)a}$
  - 外側 $\Sigma(R) = \Sigma_D (R/R_C)^{-3}$
- 分離半径: R_D

パラメータの決定: M33

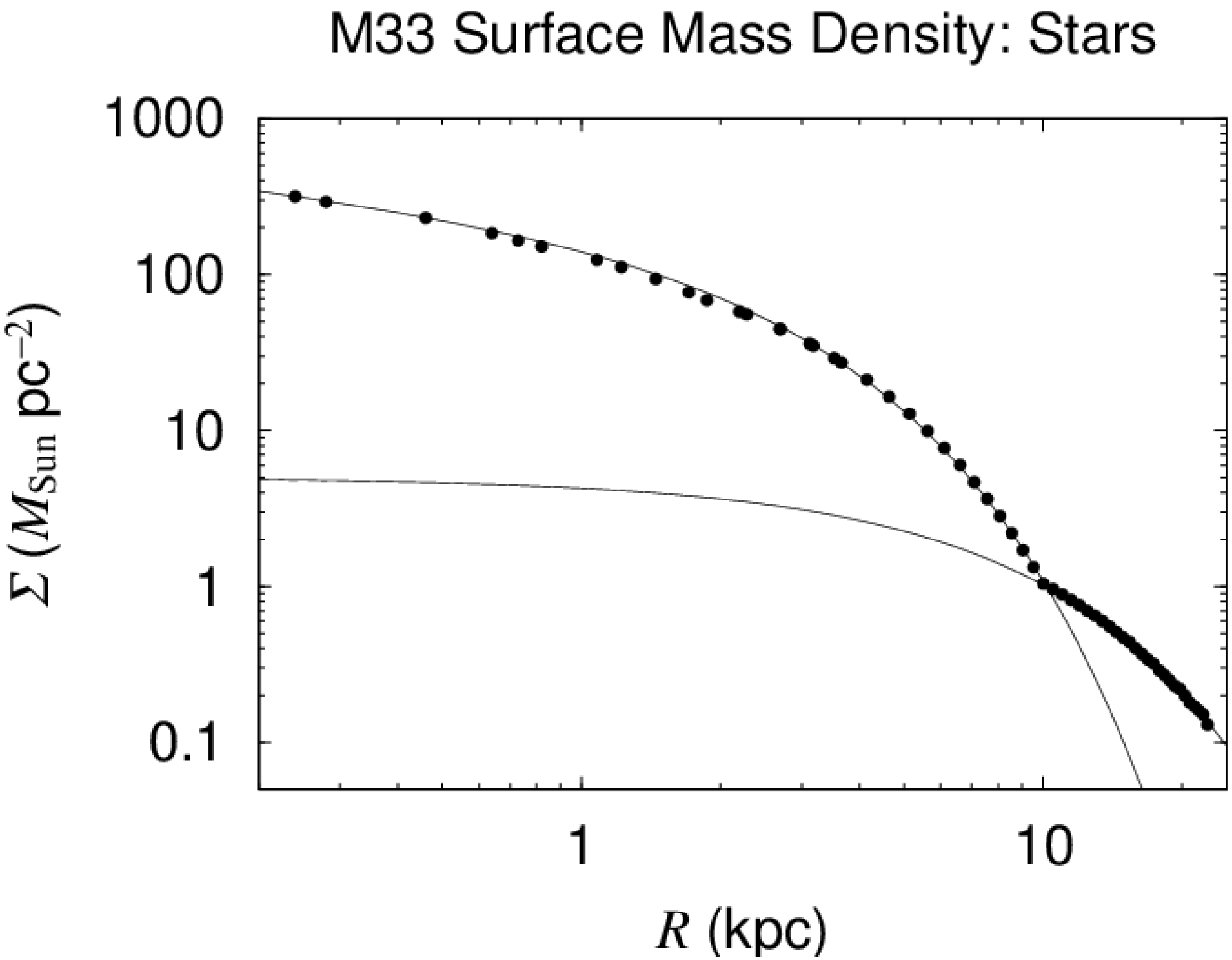
- 恒星円盤
  - $\Sigma_A = 169\ M_{sun}pc^{-2}$, $\Sigma_B = 5\ M_{sun}pc^{-2}$
  - $R_A = 2.2$ kpc, $R_B = 6.3$ kpc
- ガス円盤
  - $\Sigma_C = 6\ M_{sun}pc^{-2}$, $\Sigma_D = 2.5\ M_{sun}pc^{-2}$
  - $R_C = 7.2$ kpc
  - a = 0.05, b = 5.5, c = 0.05
- （共通）分離半径
  - $R_D = 10.18$ kpc

恒星円盤モデル



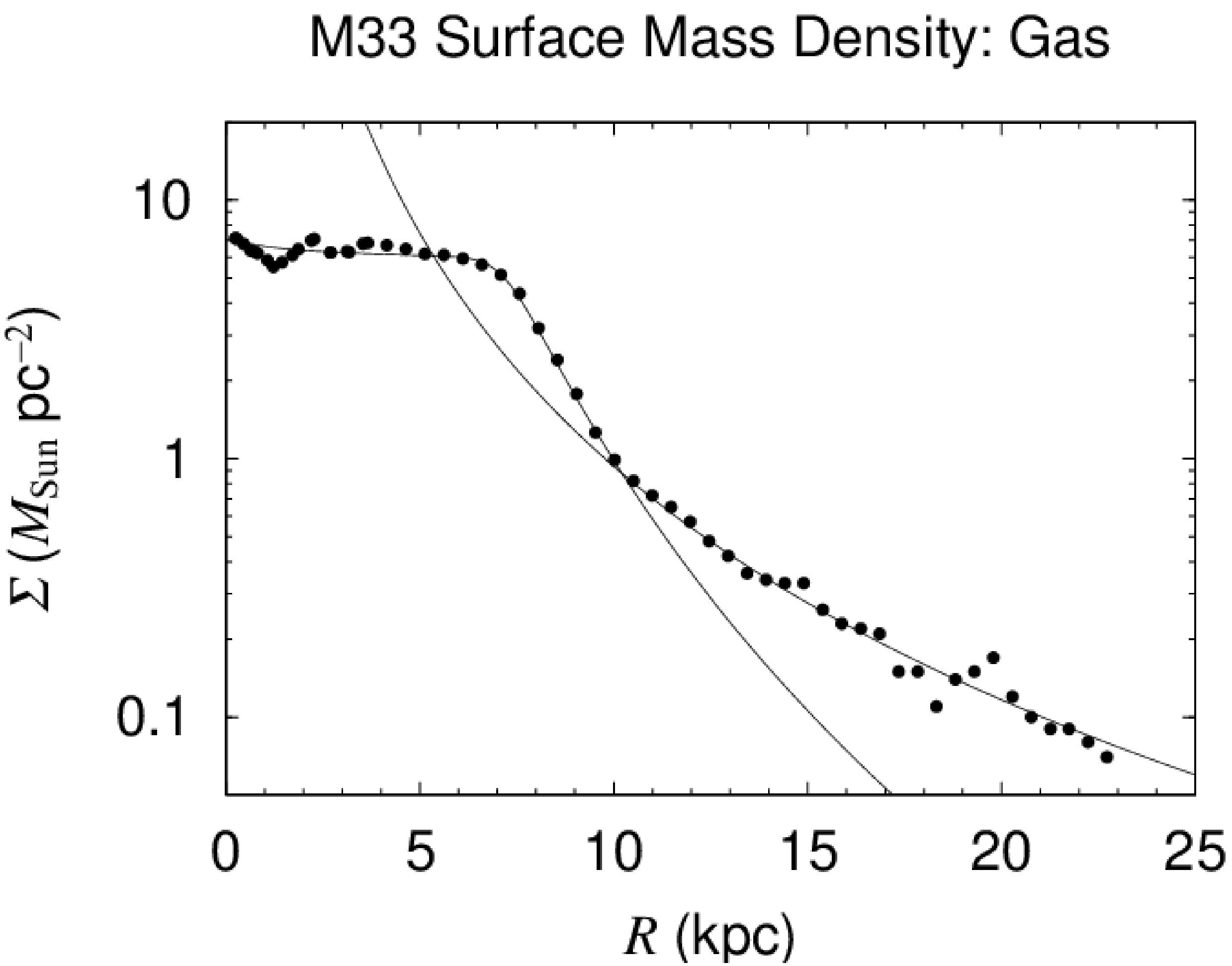
M33 Surface Mass Density: Stars
1000
100
10
1
0.1
0
5
10
15
20
25
Σ (M_{Sun} pc^{-2})
R (kpc)

恒星円盤モデル（続）



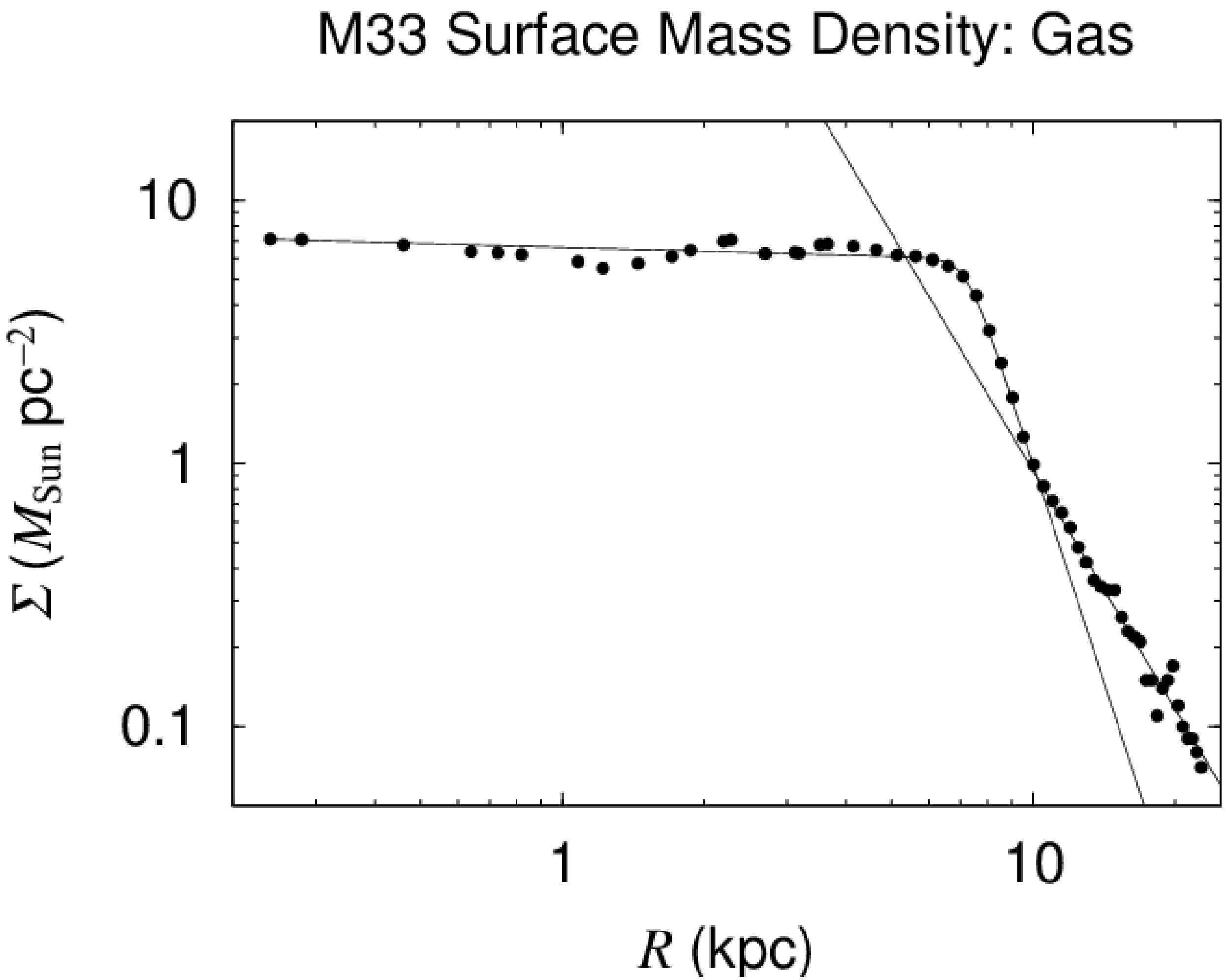
M33 Surface Mass Density: Stars
1000
100
10
1
0.1
1
10
R (kpc)
Σ (M_{Sun} pc^{-2})

ガス円盤モデル

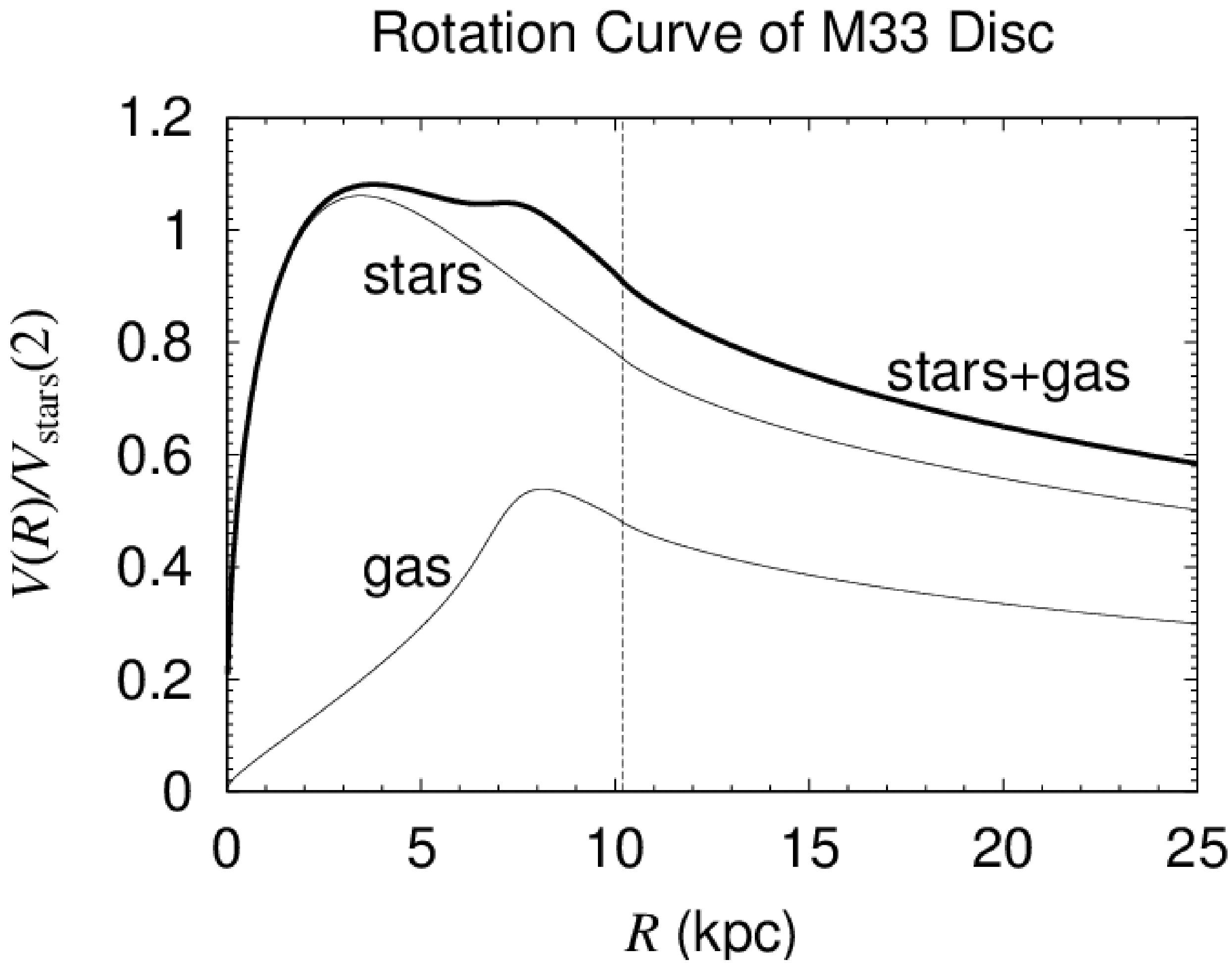


M33 Surface Mass Density: Gas
10
1
0.1
0
5
10
15
20
25
R (kpc)
Σ (M_Sun pc^−2)

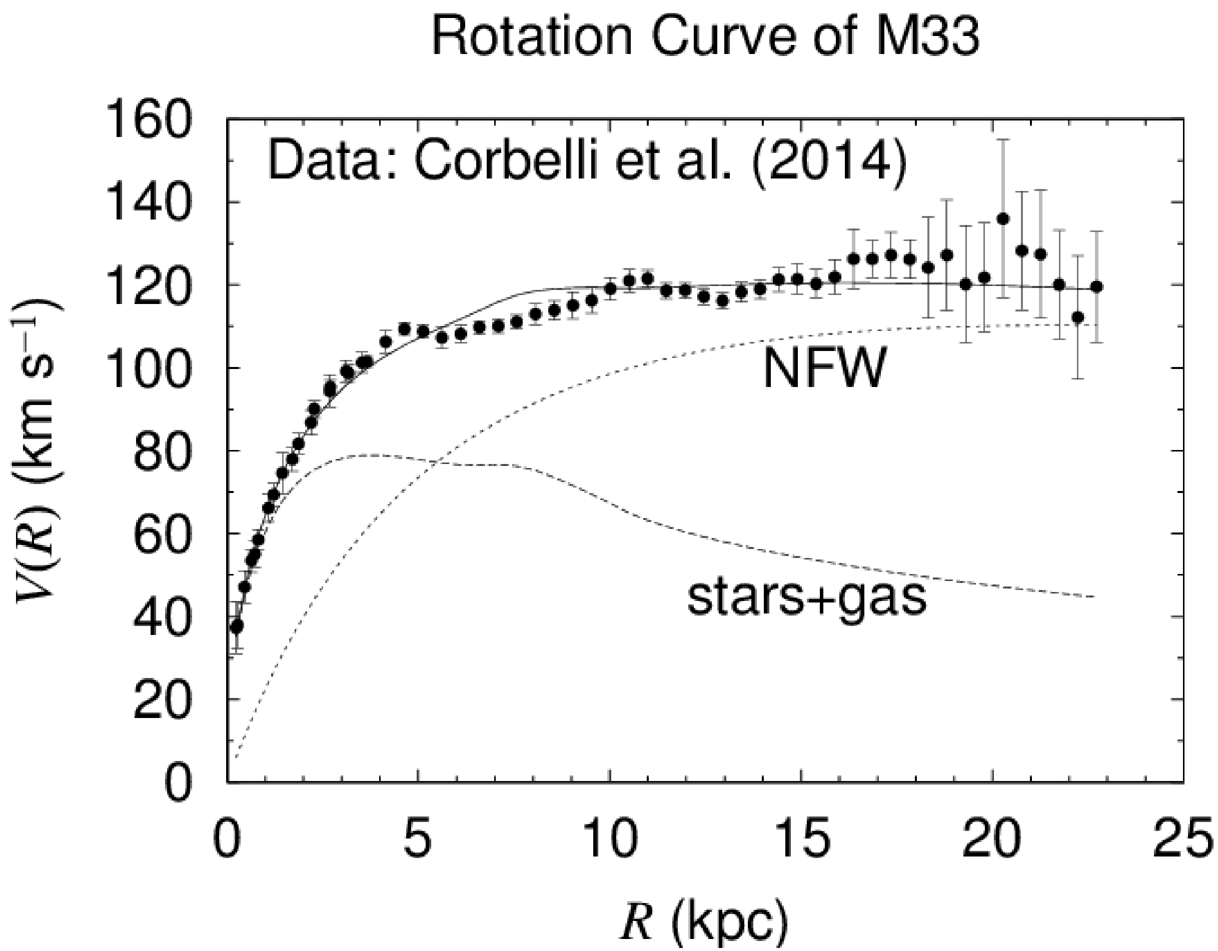
ガス円盤モデル(続)



恒星･ガス円盤による回転曲線への寄与

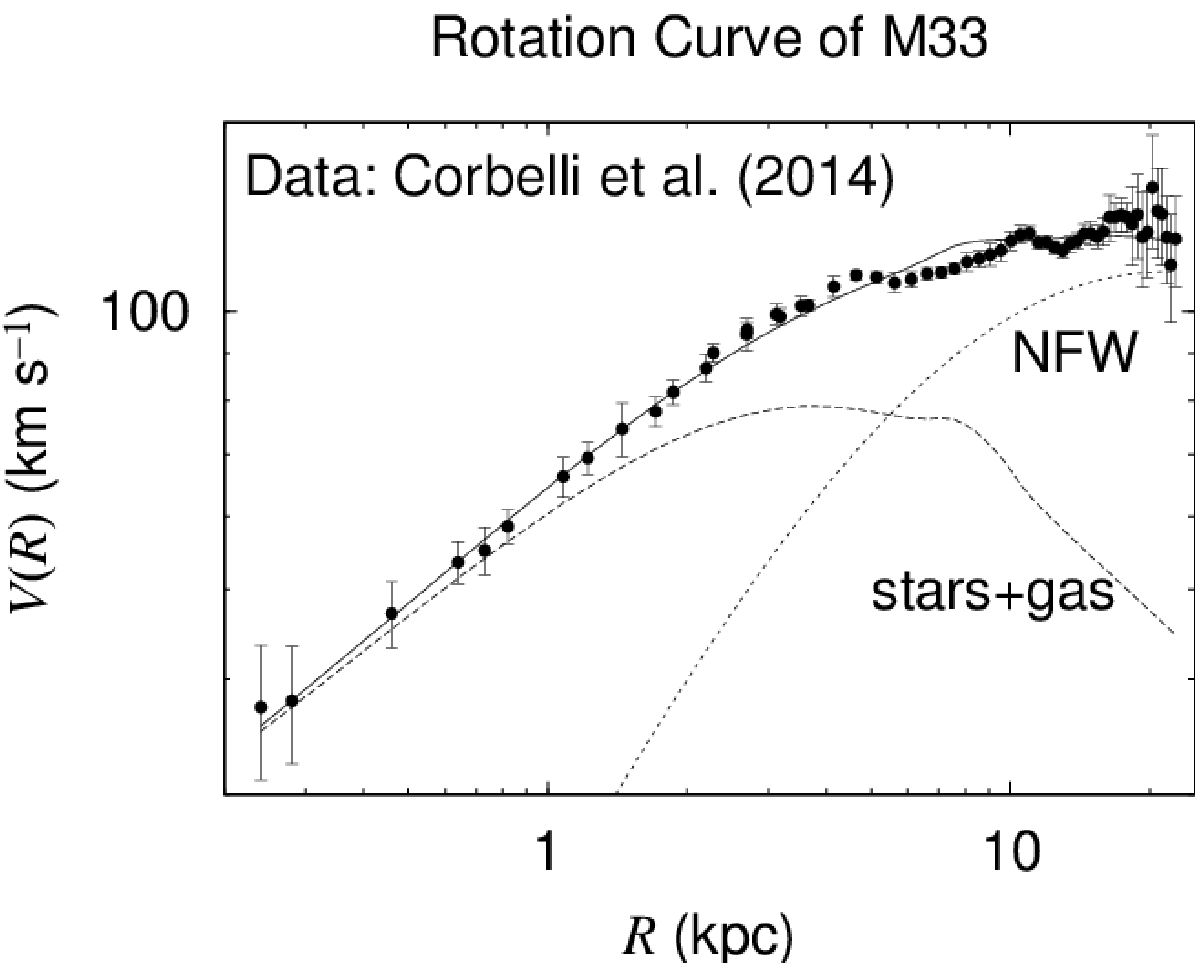


回転曲線の分解



Rotation Curve of M33
Data: Corbelli et al. (2014)
NFW
stars+gas
V(R) (km s−1)
R (kpc)
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
5
10
15
20
25

回転曲線の分解(続)



Rotation Curve of M33
Data: Corbelli et al. (2014)
NFW
stars+gas
100
1
10
$V(R)$ (km s^{-1})
R (kpc)

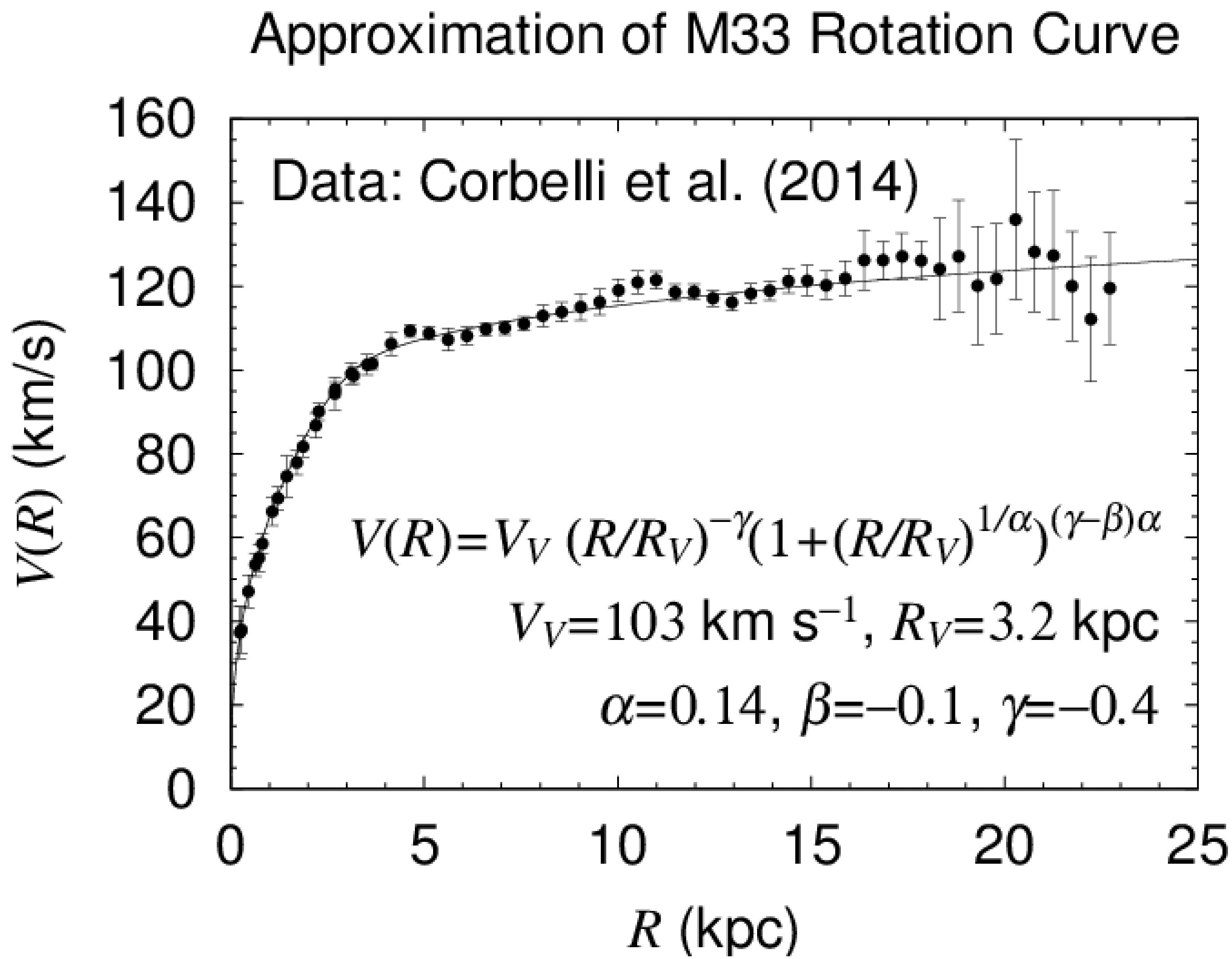
フォースの
覚醒

円盤状質量分布によるモデルフィット

- 不満：分解法における不一致
  - こぶ状の差：R = 3-8 kpc
- 円盤状質量分布のみ仮定
  - 未知の分布関数
- 回転曲線自体からのヒント
  - 双べき乗則

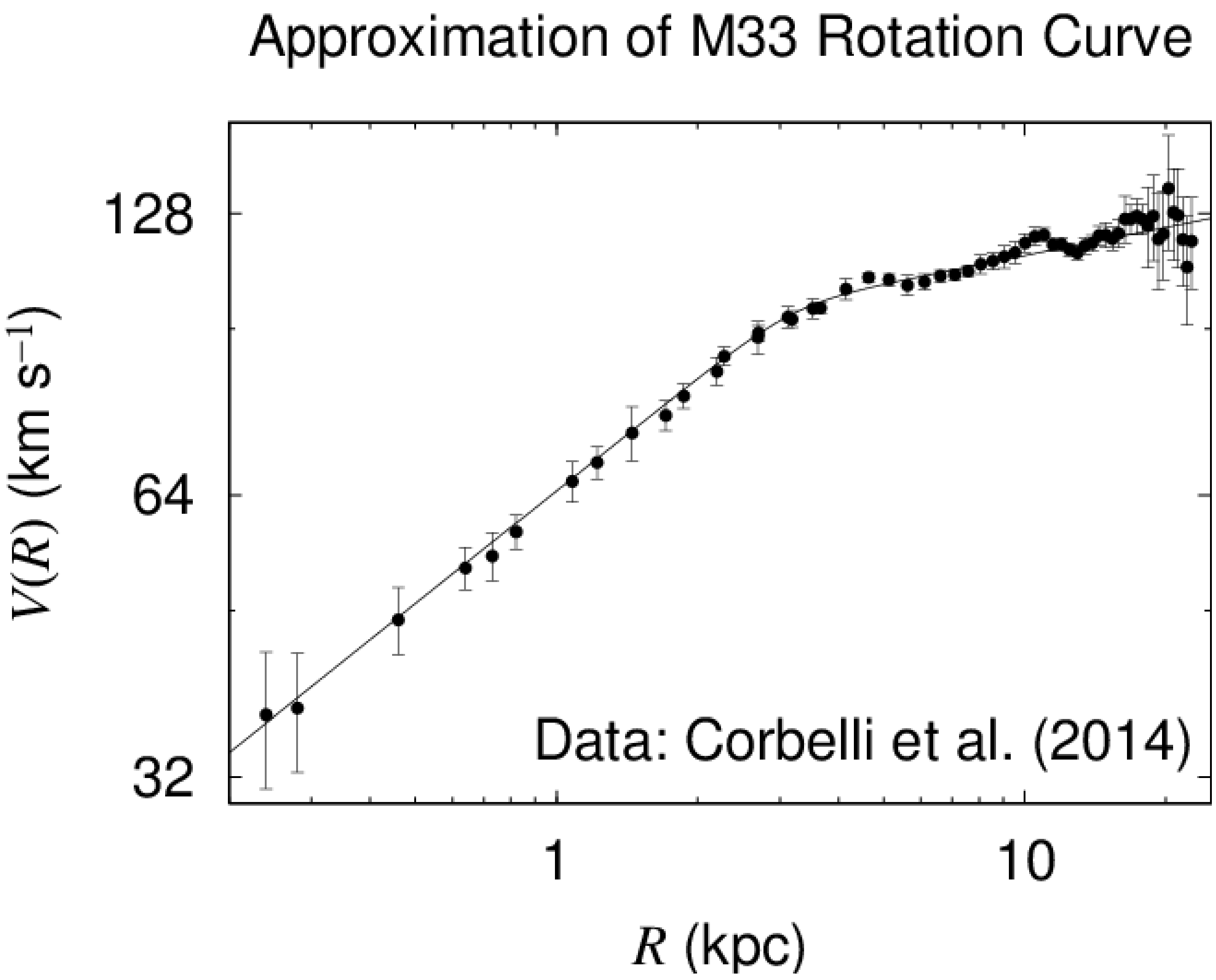
$$V(R) = V_0 (R/R_V)^{-\gamma} \left[1 + (R/R_V)^{1/\alpha} \right]^{(\gamma-\beta)\alpha}$$

回転曲線モデル



Approximation of M33 Rotation Curve
Data: Corbelli et al. (2014)
$V(R)=V_V\,(R/R_V)^{-\gamma}(1+(R/R_V)^{1/\alpha})^{(\gamma-\beta)\alpha}$
V_V=103 km s^{-1}, R_V=3.2 kpc
α=0.14, β=–0.1, γ=–0.4
V(R) (km/s)
R (kpc)
0
20
40
60
80
100
120
140
160
0
5
10
15
20
25

回転曲線モデル（続）



Approximation of M33 Rotation Curve
128
64
32
V(R) (km s−1)
1
10
R (kpc)
Data: Corbelli et al. (2014)

双べき乗則質量分布

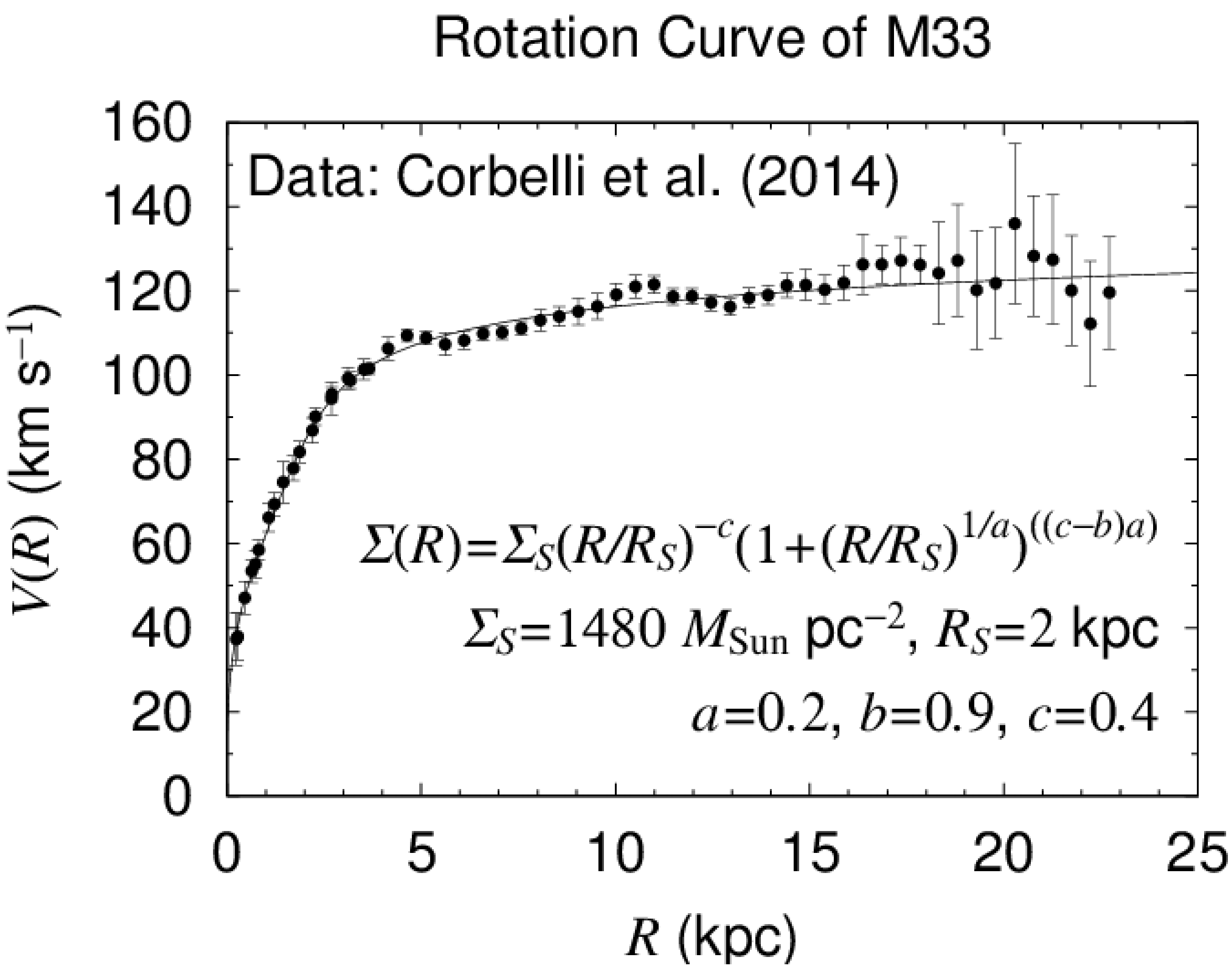
- 当然の期待
- 双べき乗則質量分布なら

  双べき乗則回転曲線？

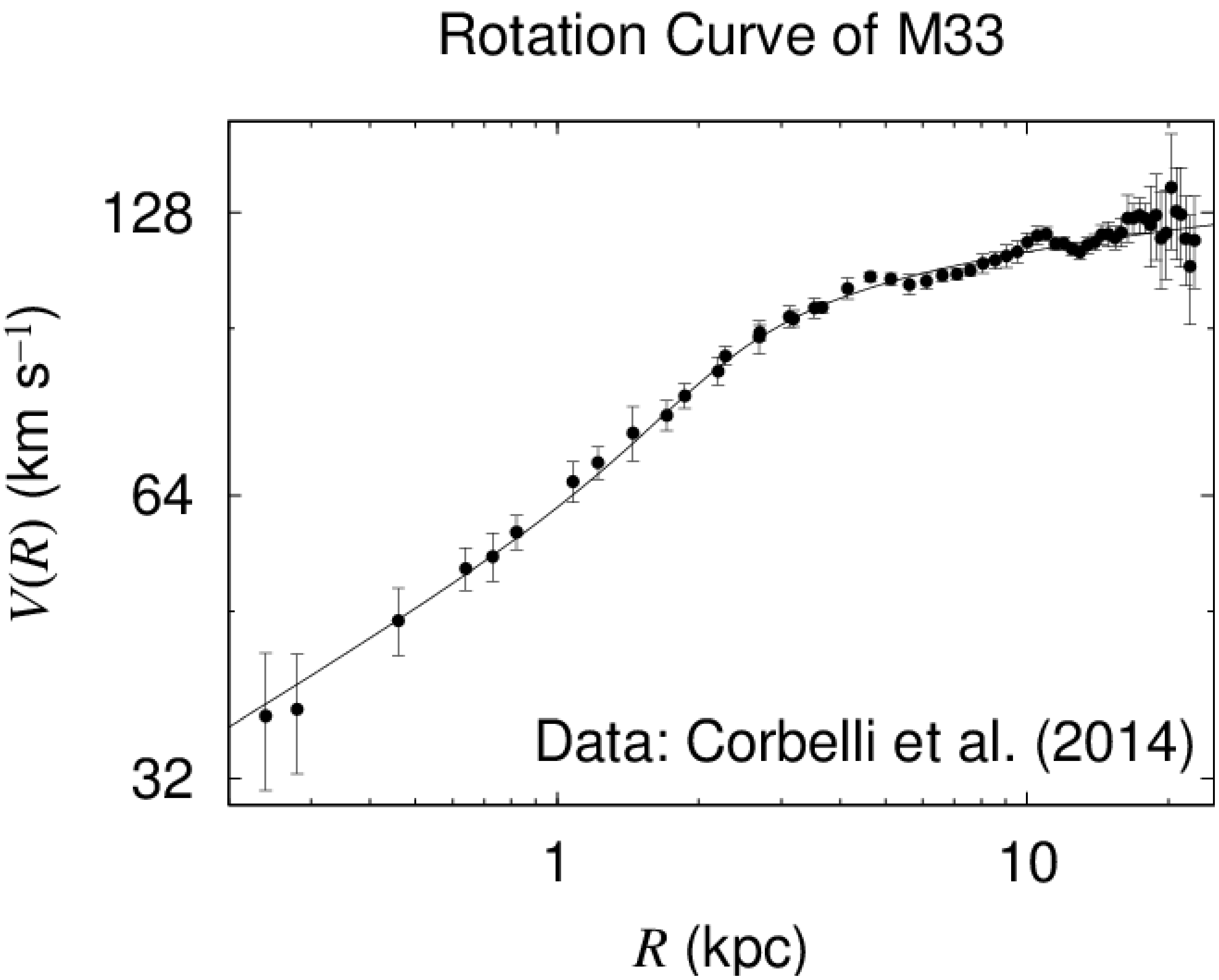
$$\Sigma(R) = \Sigma_S \left(R/R_S\right)^{-c} \left[1 + \left(R/R_S\right)^{1/a}\right]^{(c-b)a}$$

- 求められたパラメータ
  - Σ_S = 1480 $M_{sun}pc^{-2}$, R_S = 2 kpc
  - a=0.2, b=0.9, c=0.4

回転曲線あてはめ

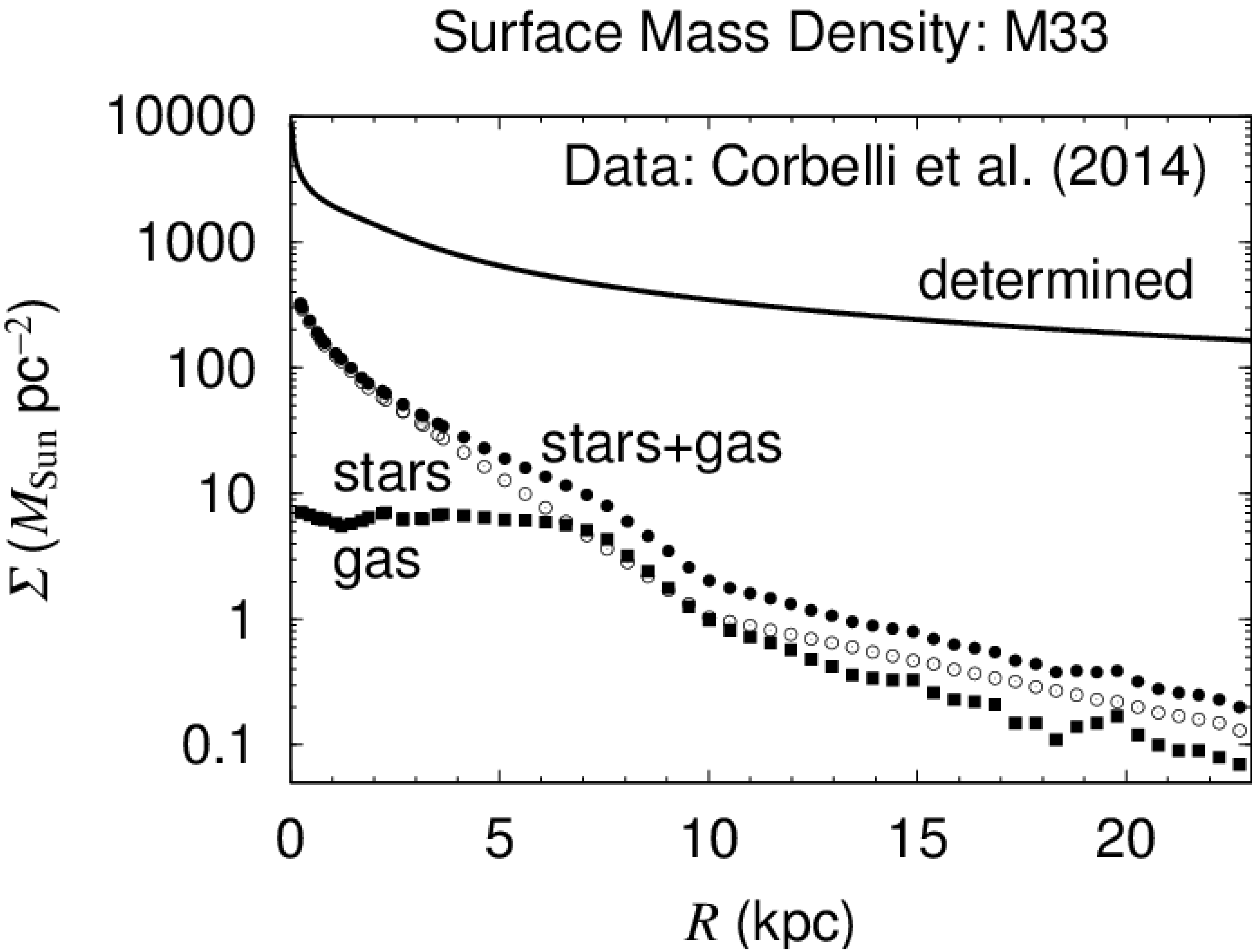

Rotation Curve of M33
Data: Corbelli et al. (2014)
$\Sigma(R)=\Sigma_S(R/R_S)^{-c}(1+(R/R_S)^{1/a})^{((c-b)a)}$
$\Sigma_S=1480\ M_{\rm Sun}\ {\rm pc}^{-2}$, $R_S=2$ kpc
$a=0.2$, $b=0.9$, $c=0.4$
$V(R)$ (km s^{-1})
R (kpc)
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
5
10
15
20
25

回転曲線あてはめ(続)

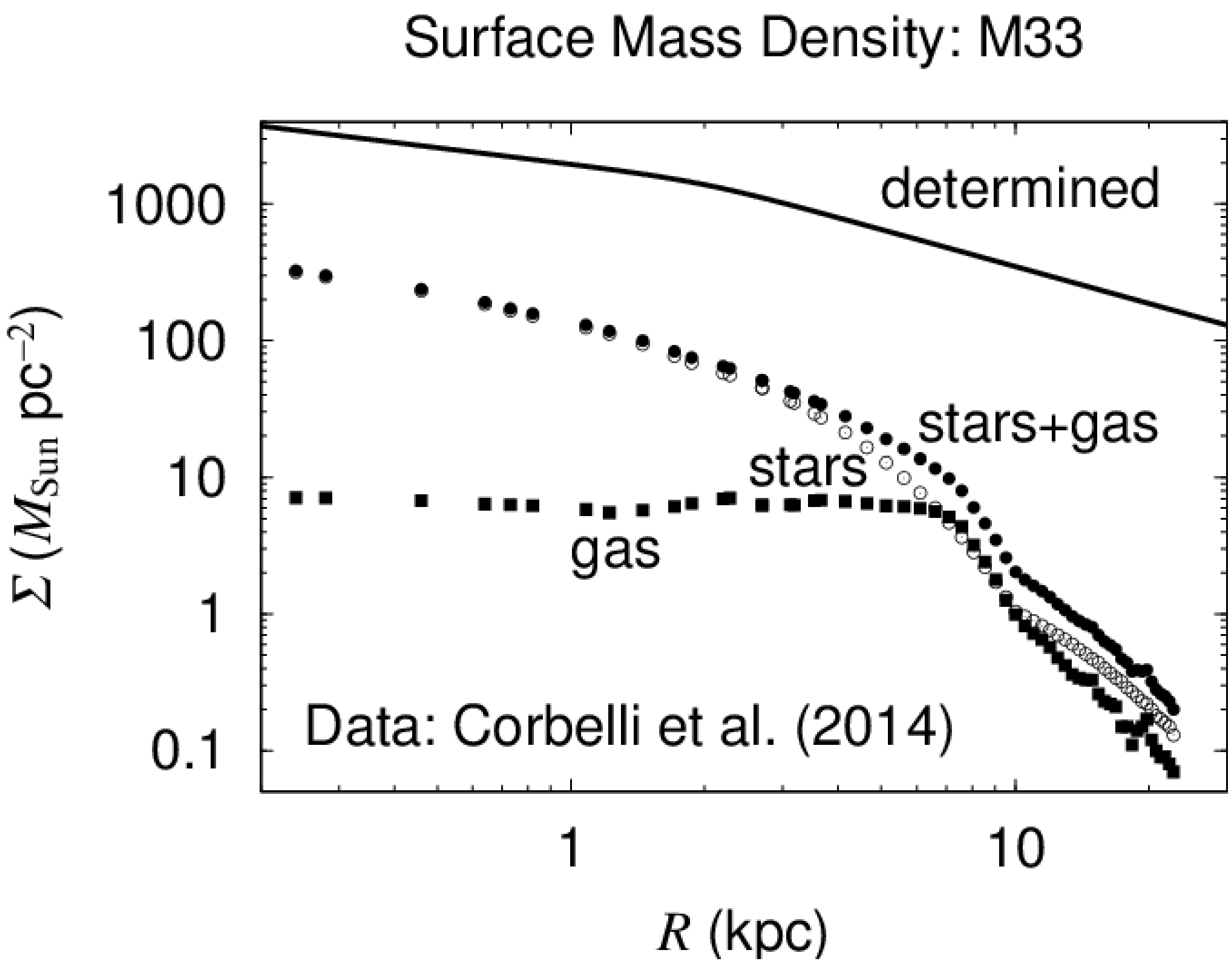


Rotation Curve of M33
128
64
32
$V(R)$ (km s^{-1})
1
10
R (kpc)
Data: Corbelli et al. (2014)

推定質量分布


Surface Mass Density: M33
Data: Corbelli et al. (2014)
determined
stars+gas
stars
gas
10000
1000
100
10
1
0.1
0
5
10
15
20
$\Sigma\ (M_{\mathrm{Sun}}\ \mathrm{pc}^{-2})$
R (kpc)

推定質量分布(続)


Surface Mass Density: M33
determined
stars+gas
stars
gas
Data: Corbelli et al. (2014)
1000
100
10
1
0.1
Σ ($M_{\rm Sun}$ pc^{-2})
1
10
R (kpc)

結論

- 無限に薄い軸対称円盤の重力場計算法
- 分割積分法＋数値微分
- 高精度、高速
- さまざまな円盤の重力場の計算結果
- M33回転曲線への応用
  - 円盤状ダークマターは、球対称より良い適合

参考文献

- Corbelli et al., 2014, A&A, 572, A23
- Descarte, 1641, Meditationes de Prima Philosophia
- Durand, 1953, Electrostatique et Magnetostatique, Masson et Cie
- Freeman, 1970, ApJ, 160, 811
- Fukushima, 2010, Cele. Mech. Dyn. Astron., 108, 339
- Fukushima, 2014, Appl. Math. Comp., 238, 485
- Fukushima, 2015, J. Comp. Appl. Math., 63, 17
- Kellogg, 1929, Foundations of Potential Theory, Springer
- Navvaro, Frenk, and White, 1996, ApJ, 462, 563
- Press et al., 1992, Numerical Recipes in F77, Cambridge Univ. Press
- Sofue, 2015, PASJ, 67, 75
- Takahashi and Mori, 1973, Numer. Math., 21, 206
- Zhao, 1996, MNRAS, 278, 488

乞う、

ご期待