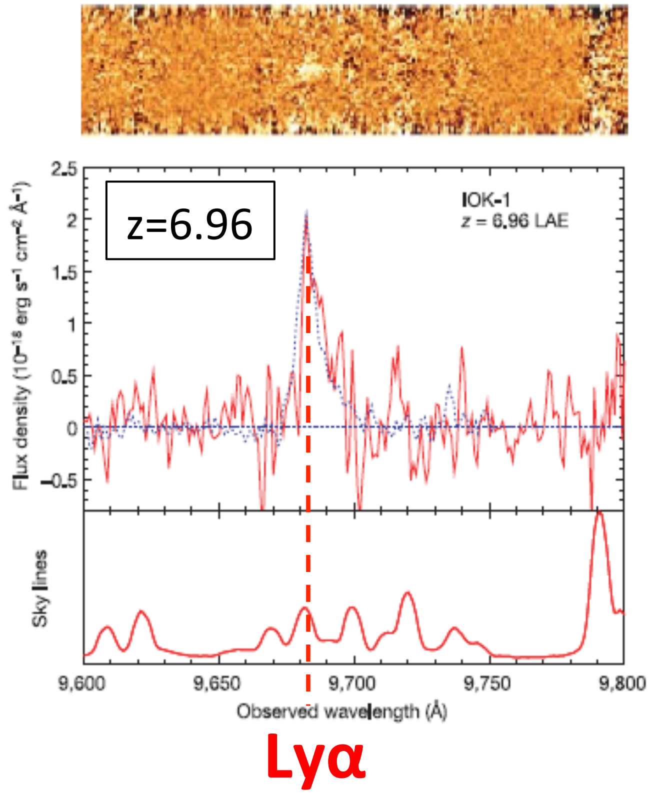
Lyα光子輻射輸送の新たな計算法

筑波大学大学院 宇宙物理理論研究室
修士2年　久喜 奈保子
指導教官　梅村 雅之

LAE（Lyman Alpha Emitter)

- 星形成が盛んな原始銀河はLyα光子を多く放射(Partridge&Peebles 1967)
- Lyα輝線で強く光っている高赤方偏移天体 ＝ LAE

(Iye et al. 2006)



- Lyα光子： 水素原子がn=2→n=1に脱励起する際に放射される光子
- 波長：1216 Å（UV）
- 光学的厚み： $\tau \sim 10^{5-6}$

現在の銀河の進化史を知るためには、
原始銀河であるLAEの性質を知ることが重要！

しかし、Lyα光子は…

中性水素によって多重散乱され、
ガスの速度場や密度場に依存するため輻射輸送が複雑。

⇒ その脱出機構は未だによくわかっていない。

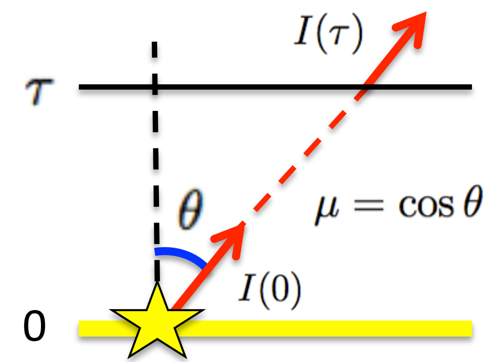
研究動機

Lyα光子の脱出機構を知るためには、輻射輸送方程式 (RTeq.) を解く必要がある。

$\boxed{\text{RT eq.}}$ $$I(\tau) = I(0)\, e^{-\tau/\mu} + \int_0^{\tau} e^{-(\tau-\tau')/\mu}\, S(\tau')\, \frac{d\tau'}{\mu}$$

等方散乱では、 $S(\tau) = \frac{\omega}{4\pi}\int I(\tau)\, d\Omega$ $\quad \omega = \kappa/(\alpha+\kappa)$: albedo

κ : 散乱係数 $\quad \alpha$: 吸収係数



- ✓ 微積分方程式を解く必要があり、輻射輸送計算が非常に複雑。
- ✓ 光学的に厚い系において、現在はモンテカルロ法を用いた計算のみ。

ポストプロセスで解くことはできるが、
時間変化する流体とのカップリングを考えることはできない。

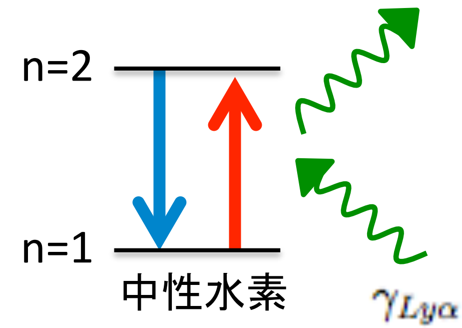
LAEにおいて輻射輸送方程式を直接解く新たな計算法の開発を目指す。

平行平板

1. Radiative Diffusion & Transfer scheme
2. 振動数の再分配関数 $\eta(x_{in}, x_{out})$

Lyα光子の物理過程

Lyα光子の散乱機構



- ✓ 水素原子のEinstein係数が大きいため、Lyα光子は中性水素に吸収されてすぐに再放射 ＝散乱

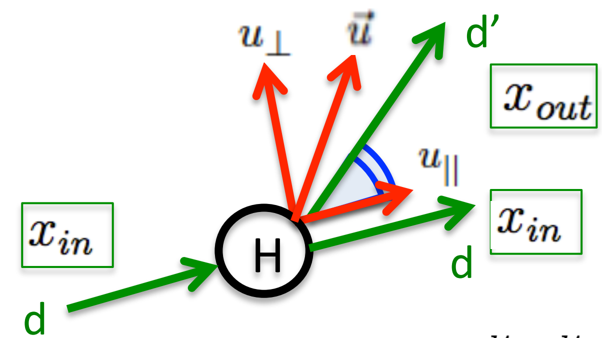
振動数シフト

d →d への散乱 ‥ 振動数は変化しない。$\nu_{out} = \nu_{in}$

d →d' への散乱 ‥ 中性水素の熱運動によるDoppler効果で振動数が変化する。

入射の際の原子静止系： $\nu_{rest} = \nu_{in}\left(1 - u_{\parallel}\frac{v_T}{c}\right)$

散乱後の実験室系： $\nu_{out} = \nu_{rest} / \left(1 - \vec{u}\cdot\vec{d}'\frac{v_T}{c}\right)$



振動数： $x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}$

原子の速度方向

Lyα光子の方向

入射光子d に垂直/平行な中性水素の速度分布関数

(i) 垂直 : Maxwell分布

$$g(u_{\perp}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-u_{\perp}^2}$$

(ii) 平行 : Voigt プロファイル（後述）

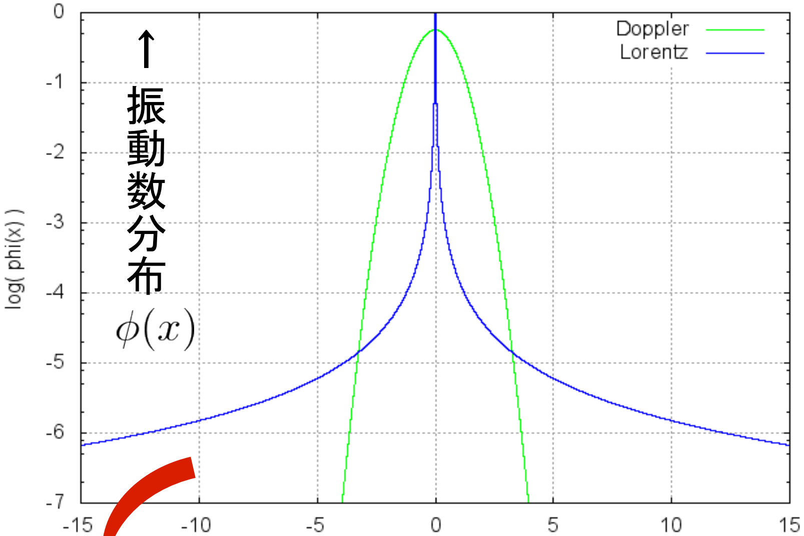
$$f(u_{\parallel}) = \frac{a}{\pi H(a, x_{in})}\, \frac{e^{-u_{\parallel}^2}}{(x - u_{\parallel})^2 + a^2}$$

本研究では、

x_{in}→x_{out} に振動数シフトするときの割合を表す分布関数として、安部さんが解析的に求めた新たな再分配関数 $\eta(x_{in}, x_{out})$ を適用。

ラインプロファイル

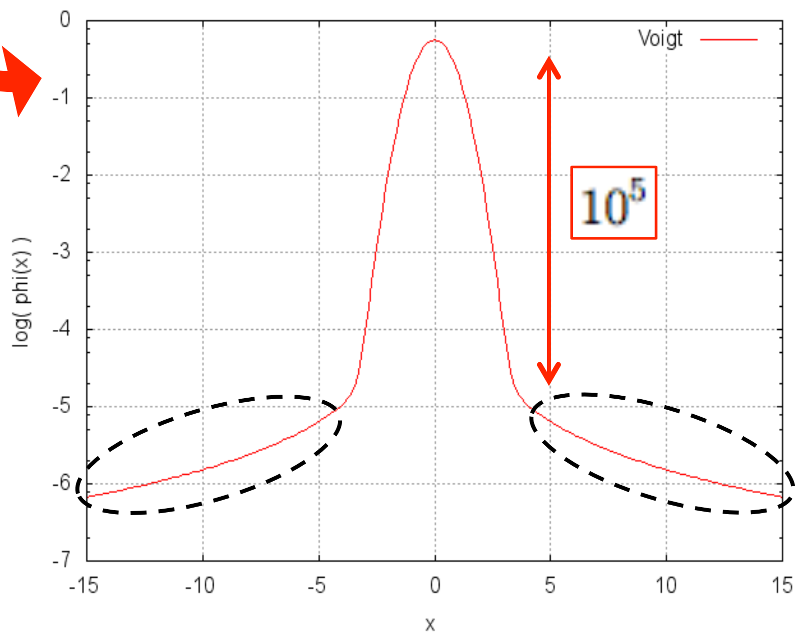
→ 振動数 $x = \dfrac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}$



Dopplerプロファイル： 熱運動

Lorentzプロファイル： 量子力学

畳み込み積分



Voigtプロファイル

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} H(a, x) \quad H(a, x) \equiv \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2)}{a^2 + (x-y)^2} dy$$

$$a \equiv \frac{\gamma}{4\pi\Delta\nu_D} \quad \Delta\nu_D = \frac{v_T}{c}\nu_0 \quad y \equiv \frac{v_z}{v_T} \quad v_T \equiv \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

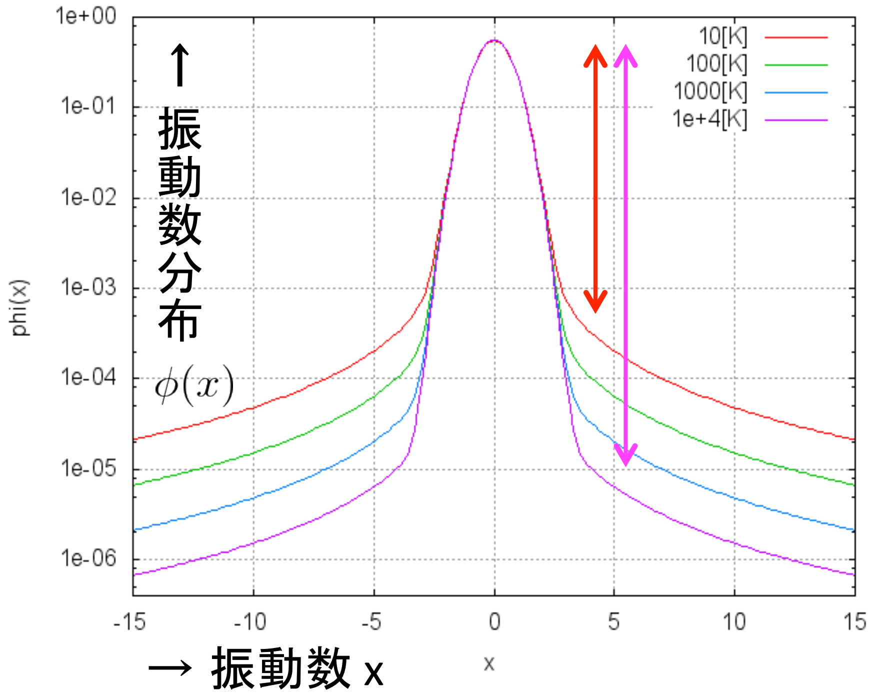
中性水素の散乱断面積：

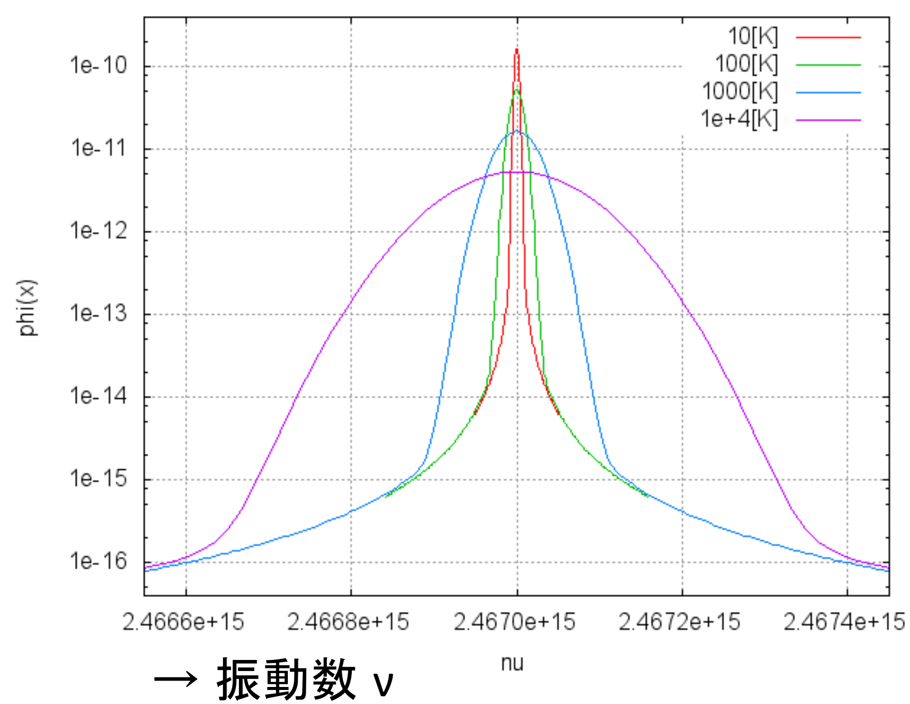
$$\sigma_\nu = f_{12} \frac{\pi e^2}{m_e c} \frac{1}{\Delta\nu_D} \phi(x) \quad [\mathrm{cm}^2]$$

振動子強度： $f_{12} = 0.4162$

⇒ coreで脱出できなくても、wingの光子は脱出できる。

Voigtプロファイル





- ✓ 温度が上がると水素原子の熱運動が激しくなり、Doppler coreが広がる。
- ✓ coreとwingには10[K]で3桁、10^4[K]で5桁ほどの差がある。

Voigtプロファイルの近似

Tasitsiomi (2006)

⇒ 1%以内の誤差で近似できている！

$$\boxed{H(a,x) = q\sqrt{\pi} + e^{-x^2}}$$

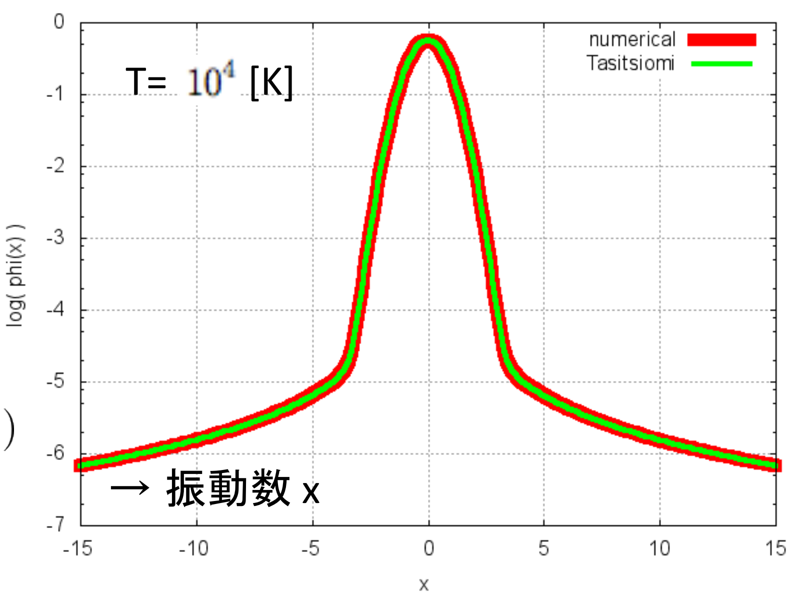
$$q = \begin{cases} 0 & \text{for } z \le 0 \\ \left(1+\frac{21}{x^2}\right)\frac{a}{\pi(x^2+1)}P(z) & \text{for } z > 0 \end{cases}$$

$$P(z) = 5.674z^4 - 9.207z^3 + 4.421z^2 + 0.1117z$$

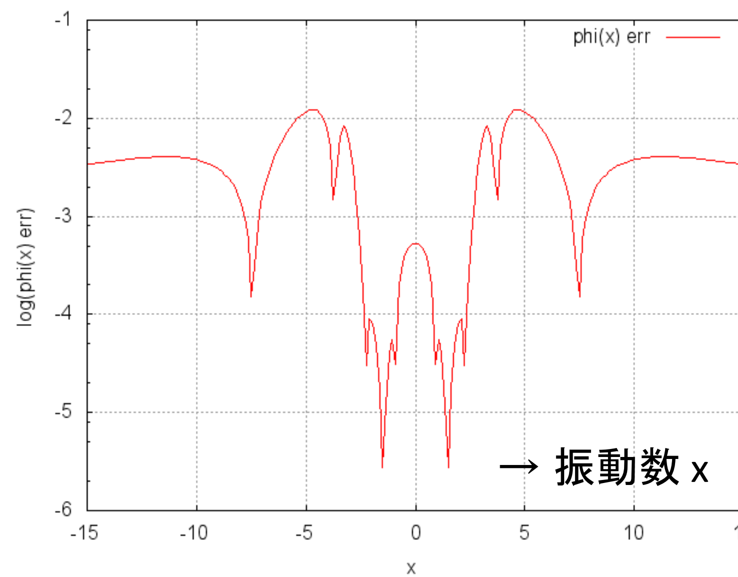
$$z = \frac{x^2 - 0.855}{x^2 + 3.42}$$

▼ 数値積分した$\phi(x)$との相対誤差

↑ 振動数分布 $\phi(x)$



↑ 相対誤差



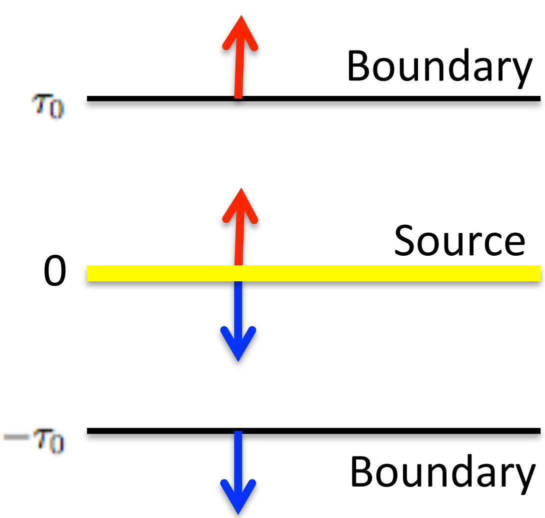
脱出光子スペクトルの解析解

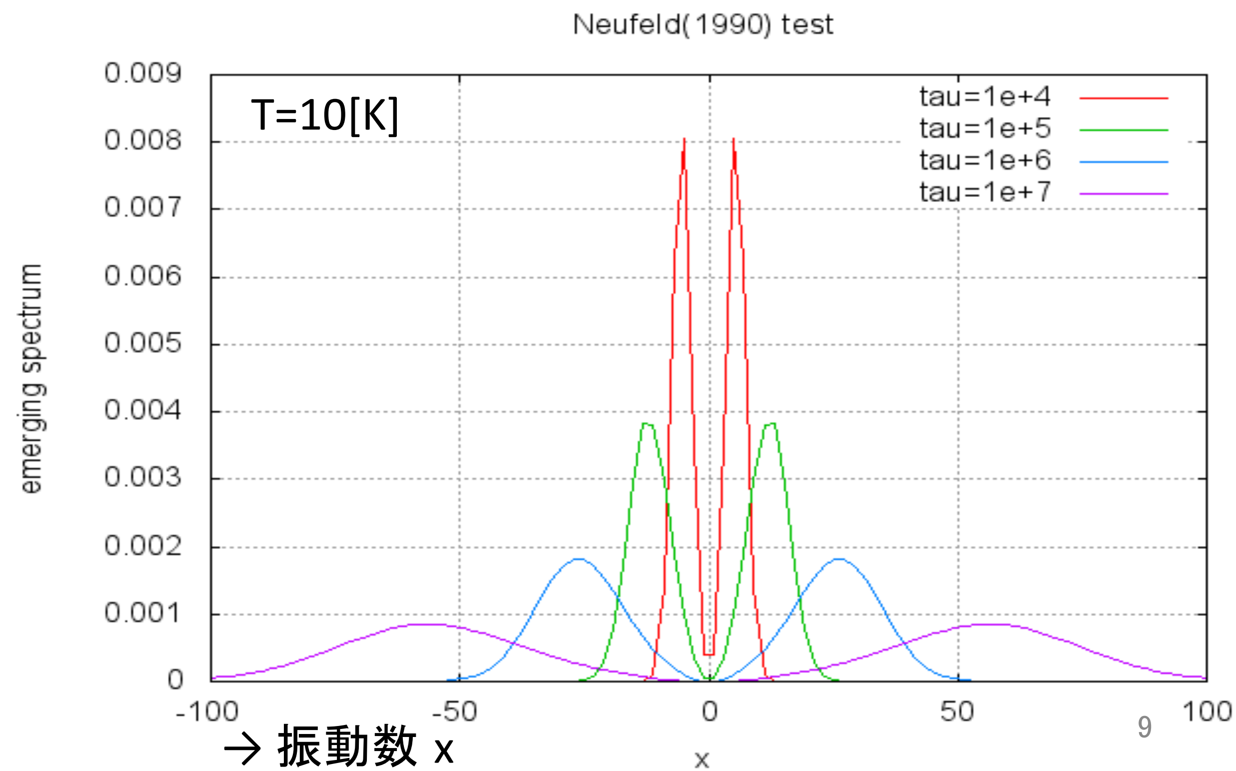
Neufeld (1990)

$a\tau_0 \gg 1$ について、平行平板から脱出するLya光子のスペクトルを拡散方程式を解いて解析的に求めた近似解。（Lorentz wing のみ考慮）

$$J(x) = \frac{\sqrt{6}}{24} \frac{x^2}{\sqrt{\pi} a\tau_0} \frac{1}{\cosh\left[\sqrt{\pi^3/54}\ \left(|x^3|/a\tau_0\right)\right]}$$

⇒ 計算コードと比較する。



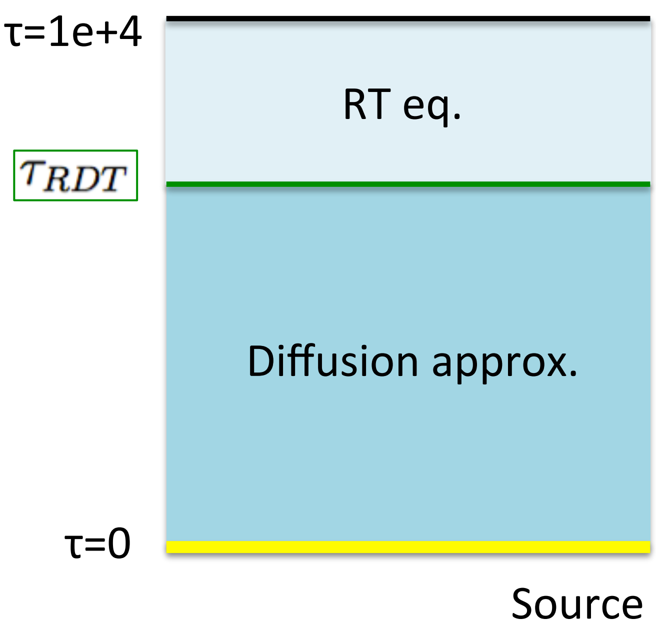


計算手法

Radiative Diffusion & Transfer scheme

RTeq.を解く計算は非常に時間がかかり、光学的に厚い系を計算するのが困難。
→ 新たな計算法「RDT法」を開発。

RDT法
- 内部 : 拡散方程式を解く
- 表面 : 輻射輸送方程式を解く



◎ 光学的に厚い場合、媒質内部では拡散近似を用いて輻射強度を求めることができる。

◎ 計算時間を大幅に短縮できる。

✓ τ_{RDT} を変えながらスペクトルを求めた。

Diffusion Solver by Ken Czuprynski 氏

Voigtプロファイルを用いて拡散方程式を定式化し、数値的に解いた。

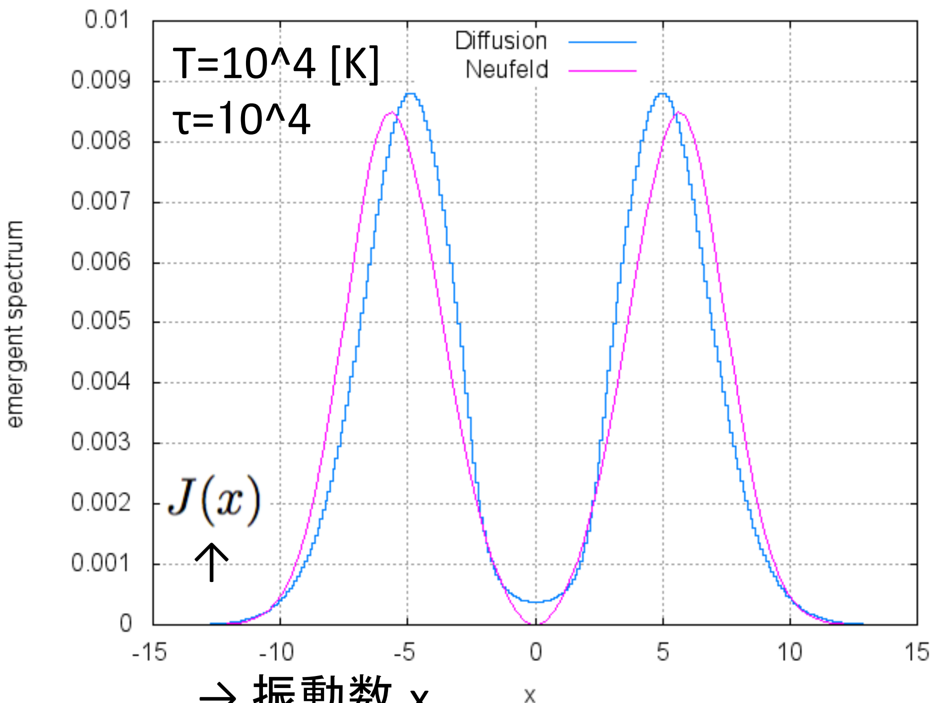
輝線の拡散方程式：

$$\frac{1}{3\phi(x)^2}\frac{\partial^2 J(x)}{\partial \tau^2} = J(x) - \epsilon B(x) - (1-\epsilon)\frac{1}{\phi(x)}\int_{\infty}^{\infty} R(x,x')J(x')dx'$$

$$\approx J(x) + \frac{1}{2\phi(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)\frac{\partial J(x)}{\partial x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 J}{\partial \tau^2} + (1-\epsilon)\frac{3\phi(x)}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)\frac{\partial J}{\partial x}\right) = -3\phi(x)^2\epsilon(J-B)$$

(Harrington 73)



→ 振動数 x

$R(x,x')$ ：再分配関数

$J(x)$ ：角度平均した輻射強度

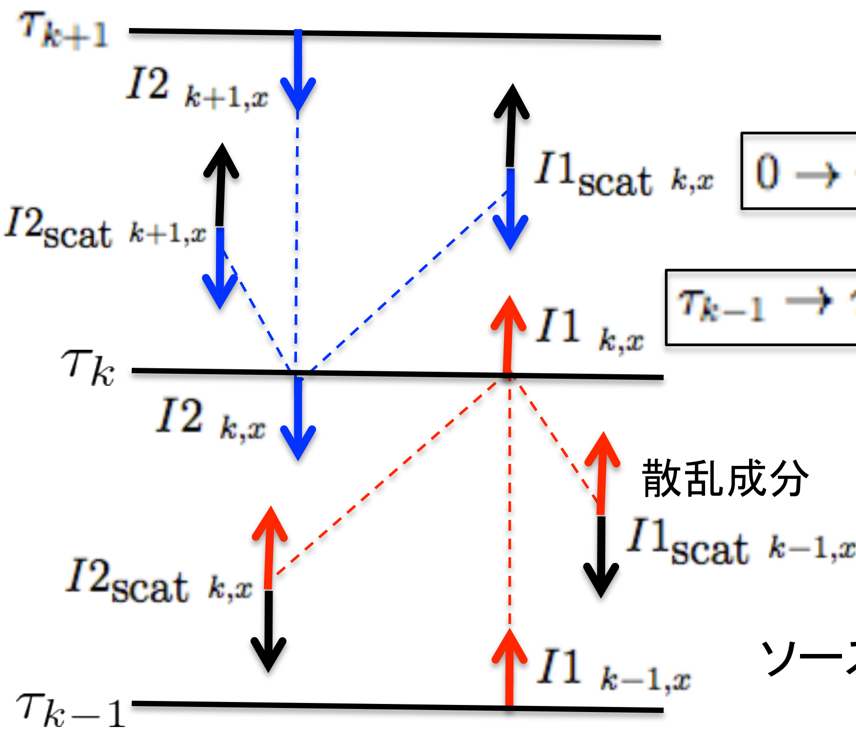
$B(x)$ ：黒体輻射強度

◎ Lorentzプロファイルでの近似をやめたので、スペクトルはNeufeld(1990)と異なり、より正確。

✓ τ_{RDT} でのスペクトルとしてKen氏のDiffusionを解いたものを用いる。

輻射輸送方程式 定式化 ~1次元 振動数シフトなし~

k : 空間　x : 振動数　n : 反復回数



$\boxed{0 \to \tau}$
$$I(\tau) = I(0)\ e^{-\tau/\mu} + \int_0^{\tau} e^{-(\tau-\tau')/\mu}\ S(\tau')\ \frac{d\tau'}{\mu}$$

$\boxed{\tau_{k-1} \to \tau_k}$
$$I1_{\ k,x} = I1_{\ k-1,x}\ e^{-\Delta\tau_x} + \int_{\tau_{k-1,x}}^{\tau_{k,x}} e^{-(\tau_{k,x}-\tau_{k',x})}\ S_{k',x}\ d\tau_{k',x}$$

$$\sim S_{k',x} \int_{\tau_{k-1,x}}^{\tau_{k,x}} e^{-(\tau_{k,x}-\tau_{k',x})}\ d\tau_{k',x} = S_{k',x}(1 - e^{-\Delta\tau_x})$$

$\boxed{\Delta\tau = \tau_k - \tau_{k-1}}$

ソース関数： $S_{k',x} = (1/2) \times [I1_{\ k-1,x} + I2_{\ k,x}]$

RT eq.

$$\uparrow I1^{\ n}_{\ k,x} = \underbrace{I1^{\ n-1}_{\ k-1,x}\ e^{-d\tau_x}}_{\text{透過}} + \underbrace{I1_{\text{scat}}{}^{\ n-1}_{\ k-1,x} + I2_{\text{scat}}{}^{\ n-1}_{\ k,x}}_{\text{散乱項}}$$

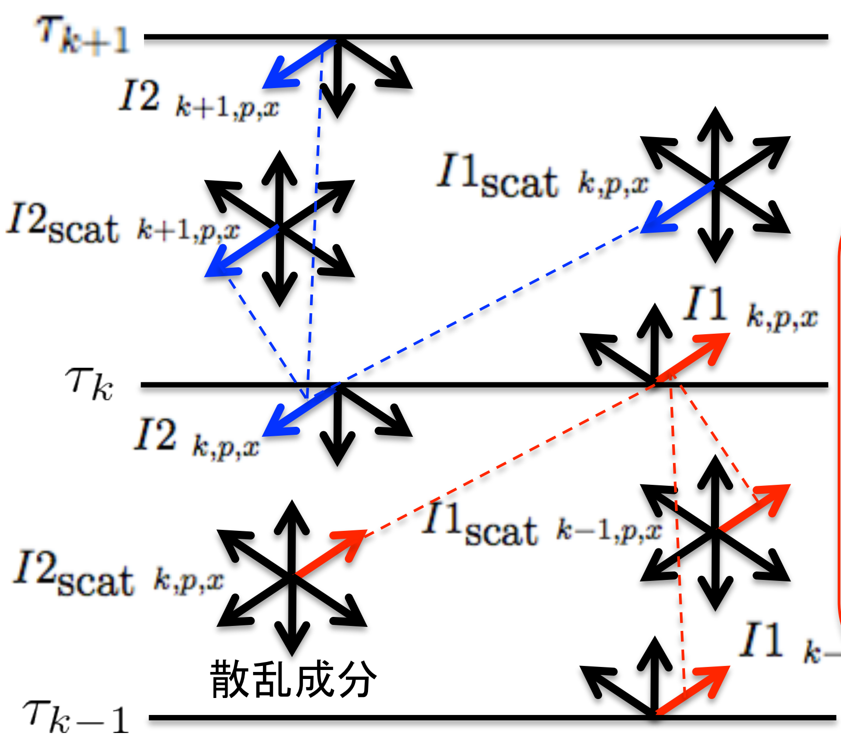
$$\downarrow I2^{\ n}_{\ k,x} = \underbrace{I2^{\ n-1}_{\ k+1,x}\ e^{-d\tau_x}}_{\text{透過}} + \underbrace{I2_{\text{scat}}{}^{\ n-1}_{\ k+1,x} + I1_{\text{scat}}{}^{\ n-1}_{\ k,x}}_{\text{散乱項}}$$

散乱項

$$I1_{\text{scat}}{}^{\ n}_{\ k,x} = (1/2) \times I1^{\ n}_{\ k,x}\ (1 - e^{-d\tau_x})$$

$$I2_{\text{scat}}{}^{\ n}_{\ k,x} = \underbrace{(1/2)}_{\text{等方散乱}} \times I2^{\ n}_{\ k,x}\ (1 - e^{-d\tau_x})$$

輻射輸送方程式 定式化 ~3次元 振動数シフトあり~



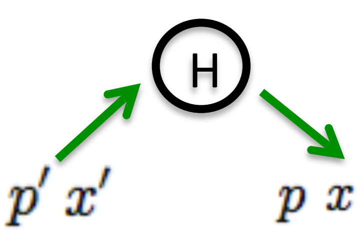
$$I(\tau_k) = I(\tau_{k-1})\ e^{-\Delta\tau/\mu} + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} e^{-(\tau_k-\tau_k')/\mu}\ S(\tau_k')\ \frac{d\tau_k'}{\mu}$$

RT eq.　　p : 角度

$$I1_{\ k,p,x}^{\ n} = \underbrace{I1_{\ k-1,p,x}^{\ n-1}\ e^{-d\tau_{p,x}}}_{透過} + \underbrace{I1\mathrm{scat}_{\ k-1,p,x}^{\ n-1} + I2\mathrm{scat}_{\ k,p,x}^{\ n-1}}_{散乱項}$$

$$I2_{\ k,p,x}^{\ n} = \underbrace{I2_{\ k+1,p,x}^{\ n-1}\ e^{-d\tau_{p,x}}}_{透過} + \underbrace{I2\mathrm{scat}_{\ k+1,p,x}^{\ n-1} + I1\mathrm{scat}_{\ k,p,x}^{\ n-1}}_{散乱項}$$

中性水素



散乱項

$$I1\mathrm{scat}_{\ k,p,x}^{\ n} = \underbrace{(\Delta\Omega/4\pi)}_{等方散乱} \times\ \Sigma_{x'}\Sigma_{p'}\ I1_{\ k,\ p',x'}^{\ n}\ (1-e^{-d\tau_{p',x'}}) \times \boxed{\eta(x',x,p',p)}$$

$$I2\mathrm{scat}_{\ k,p,x}^{\ n} = \underbrace{(\Delta\Omega/4\pi)}_{等方散乱} \times\ \Sigma_{x'}\Sigma_{p'}\ I2_{\ k,\ p',x'}^{\ n}\ (1-e^{-d\tau_{p',x'}}) \times \boxed{\eta(x',x,p',p)}$$

再分配関数

再分配関数 $\eta(\xi)$

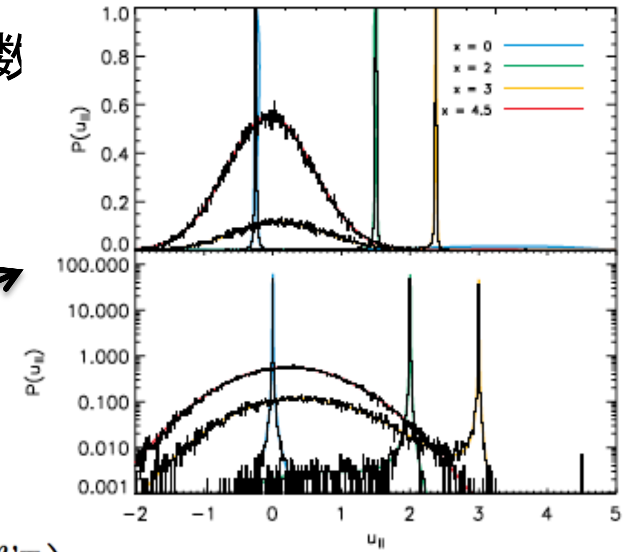
Lausen+ 09

$x_{in} \rightarrow x_{out}$ に振動数シフトするときの割合を表す分布関数

入射光子 $\vec{d}$ に垂直/平行な中性水素の速度分布関数

(i) 垂直 : Maxwell分布　　(ii) 平行 : Voigt プロファイル

$$g(u_\perp) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u_\perp^2} \qquad f(u_\parallel) = \frac{b}{\pi H(b,x)} \frac{e^{-u_\parallel^2}}{(x-u_\parallel)^2 + b^2}$$



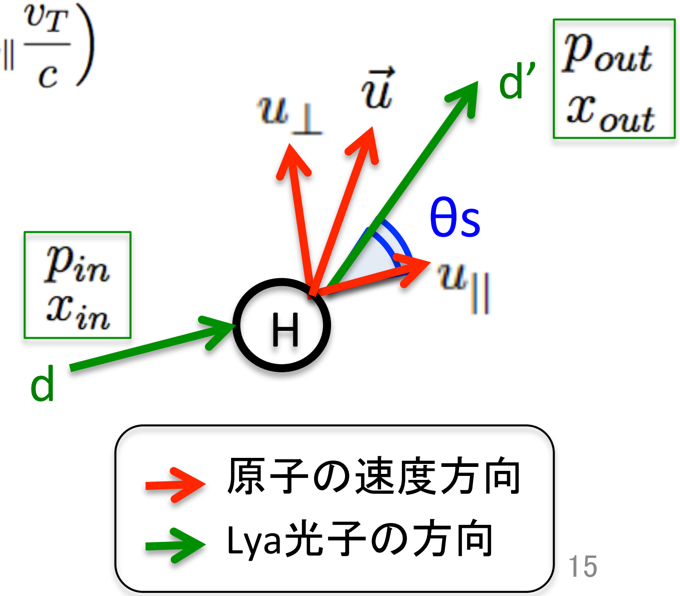
Doppler シフト

$$\nu_{out} = \nu_{in}\left(1 - u_\parallel \frac{v_T}{c}\right) / \left(1 - \vec{u}\cdot\vec{d}'\frac{v_T}{c}\right) \sim \nu_{in}\left(1 - u_\parallel \frac{v_T}{c}\right)\left(1 + \vec{u}\cdot\vec{d}'\frac{v_T}{c}\right)$$

◎ x_{in}が大きいとGaussian的に

$$\sim \nu_{in}\left(1 + \vec{u}\cdot\vec{d}'\frac{v_T}{c} - u_\parallel \frac{v_T}{c}\right)$$

$$\boxed{\frac{\nu_{out} - \nu_{in}}{\nu_{in}} \frac{c}{v_T} = (\cos\theta_s - 1)u_\parallel + \sin\theta_s u_\perp \equiv \xi}$$

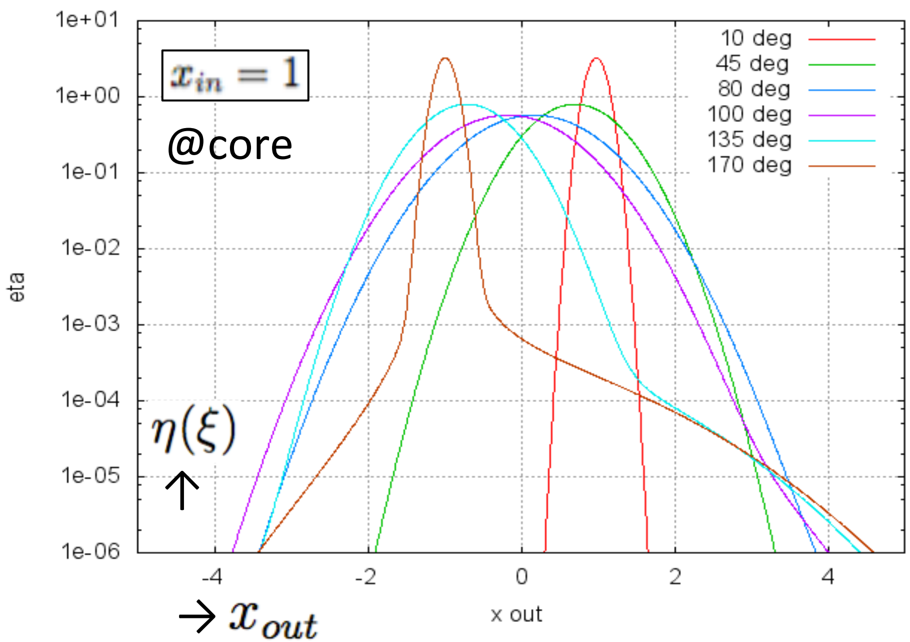


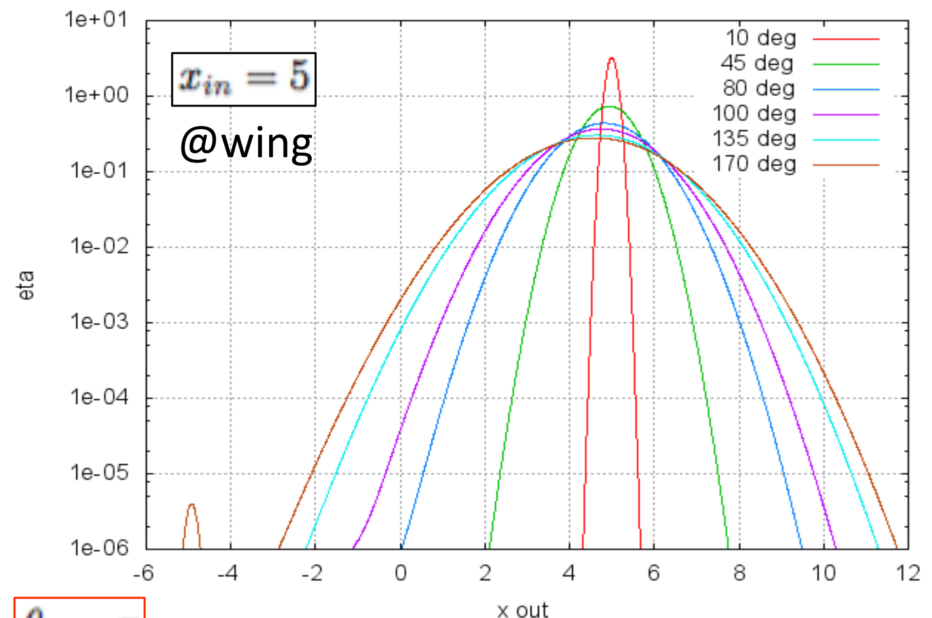
新たな再分配関数 η(ξ)　(Abe+ in prep.)

$$\boxed{\eta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|\sin\theta_s|} \exp\left(-\frac{1}{\sin^2(\theta_s/2)}\xi^2\right) \frac{H(b',x')}{H(b,x_{in})}}$$

$$x' = \frac{x_{in} + \xi/2}{|\cos(\theta_s/2)|} \qquad b' = \frac{b}{|\cos(\theta_s/2)|}$$

再分配関数 $\eta(\xi)$



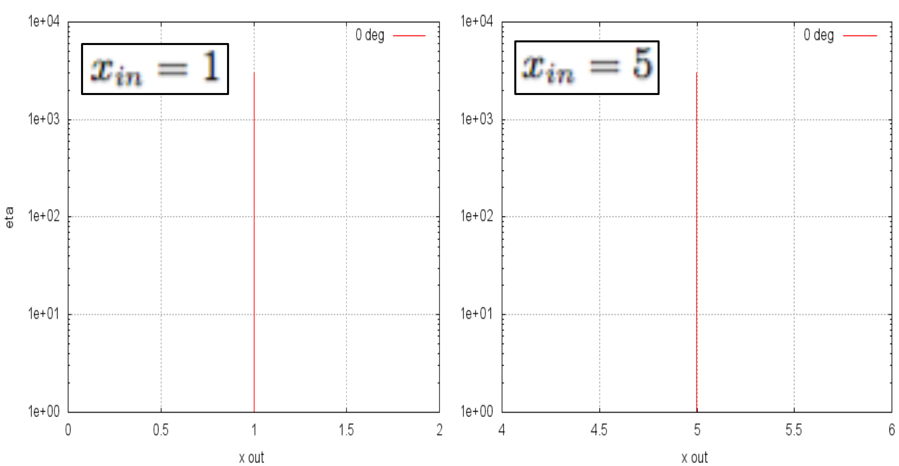


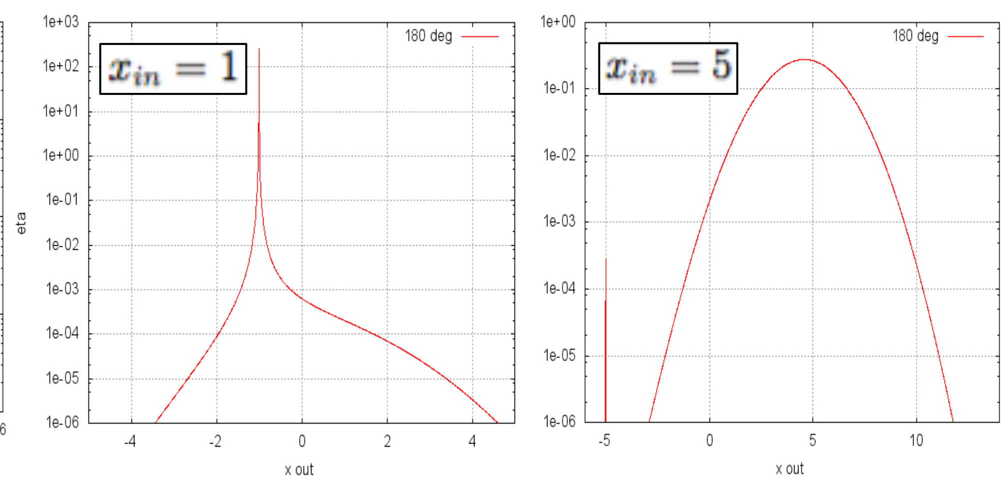
$\boxed{\theta_s = \pi}$

$x_{in} = 1$ ：垂直方向の情報は入らないのでVoigt分布

$x_{in} = 5$ ： x_{in} が大きいためGaussian分布

$\boxed{\theta_s = 0}$　散乱前後で振動数シフトなし





計算手法　~散乱項~

① 光子が散乱する方向を決め $\boxed{p_{in} \rightarrow p_{out}}$ 、入射方向からの角度 θs を計算

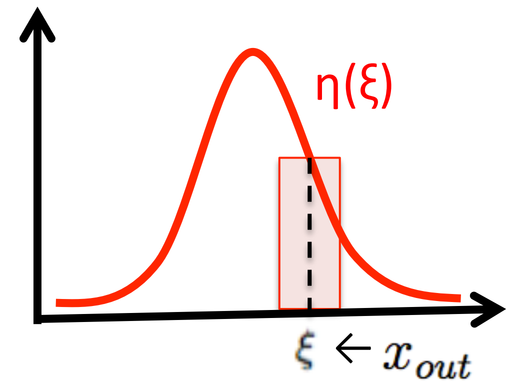
② 散乱後の振動数を決め $\boxed{x_{in} \rightarrow x_{out}}$、ξ を計算 $\boxed{\xi = \frac{\nu_{out} - \nu_{in}}{\nu_{in}} \frac{c}{v_T}}$

③ 振動数シフトの再分配関数 $\boxed{\eta(x_{in}, x_{out}, p_{in}, p_{out})}$ を計算

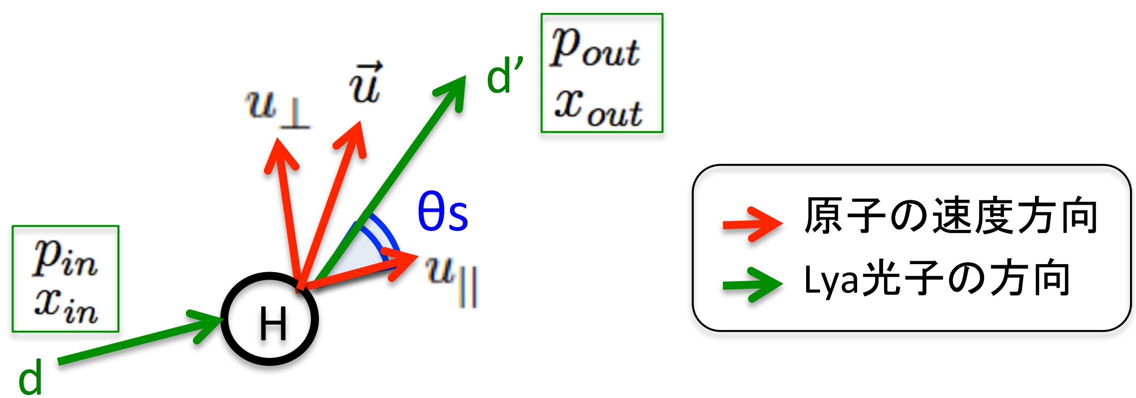
(i) θ=0 $\eta = \delta_{x_{out}, x_{in}}$

(ii) θ=π $\eta = f(u_{\|} = -\xi/2)$

(iii) otherwise $\eta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|\sin\theta_s|} \exp\left(-\frac{1}{\sin^2(\theta_s/2)}\xi^2\right) \frac{H(b', x')}{H(b, x_{in})}$



④ x_{in} , p_{in} で入射したintensityに $\boxed{\eta(\xi)d\xi}$ をかけた量が x_{out} , p_{out} で散乱する。



境界・収束条件

I_B err ≤ 0.01 で収束

境界条件

- k=0（τ_{RDT}）

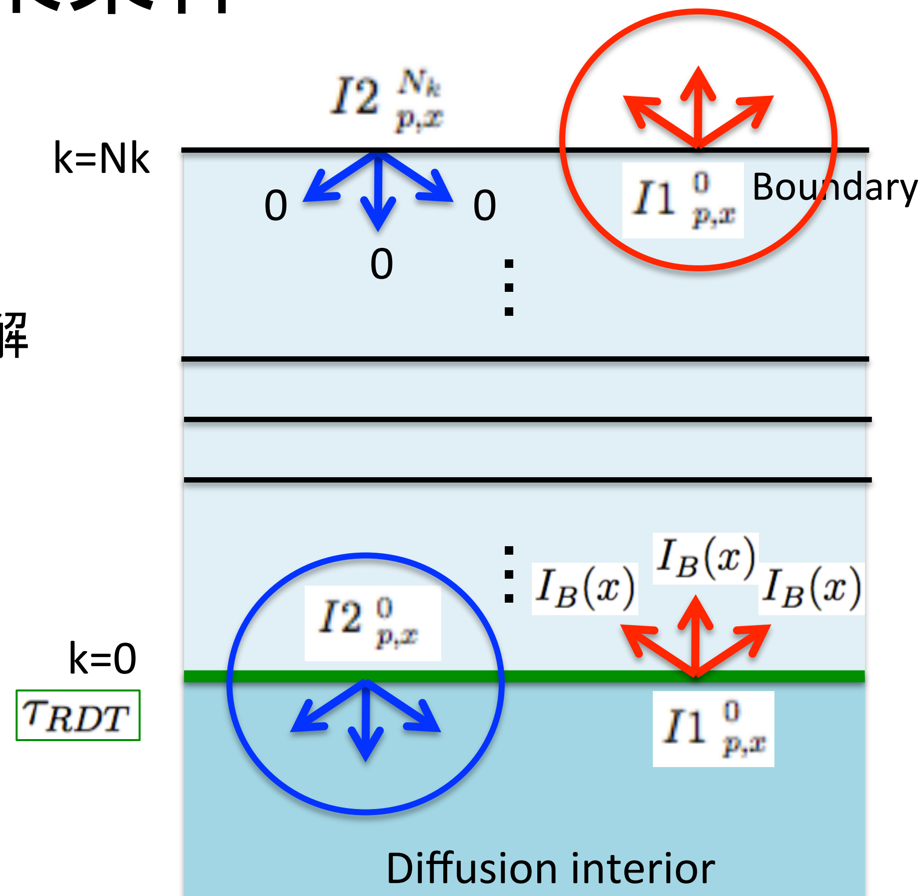
Ken氏の計算コードで拡散方程式を解いた結果のスペクトルを入れる。

$$I1\ {}^{0}_{p,x} = I_B(x)$$

- k=Nk（境界面）

下向きintensityは常に0。

$$I2\ {}^{N_k}_{p,x} = 0$$



収束条件

- k=0, Nkで出てきたintensityと始めに入れたintensityとの相対誤差が1%以下になったら定常状態とみなし、iterationを終了する。

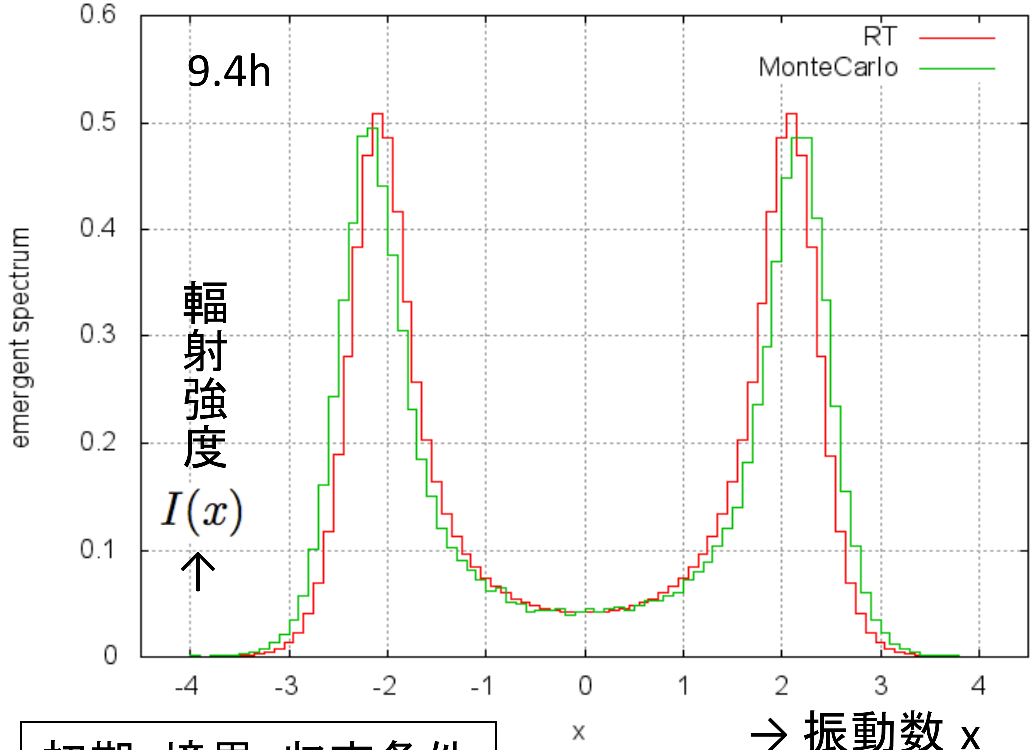
$$I_B \text{ err} \leq 0.01 \qquad I_B \text{ err} = \frac{|I1\ {}^{N_k}_{\Sigma p \Sigma j} + I2\ {}^{0}_{\Sigma p \Sigma j} - I_{B\ \Sigma p \Sigma x}|}{I_{B\ \Sigma p \Sigma x}}$$

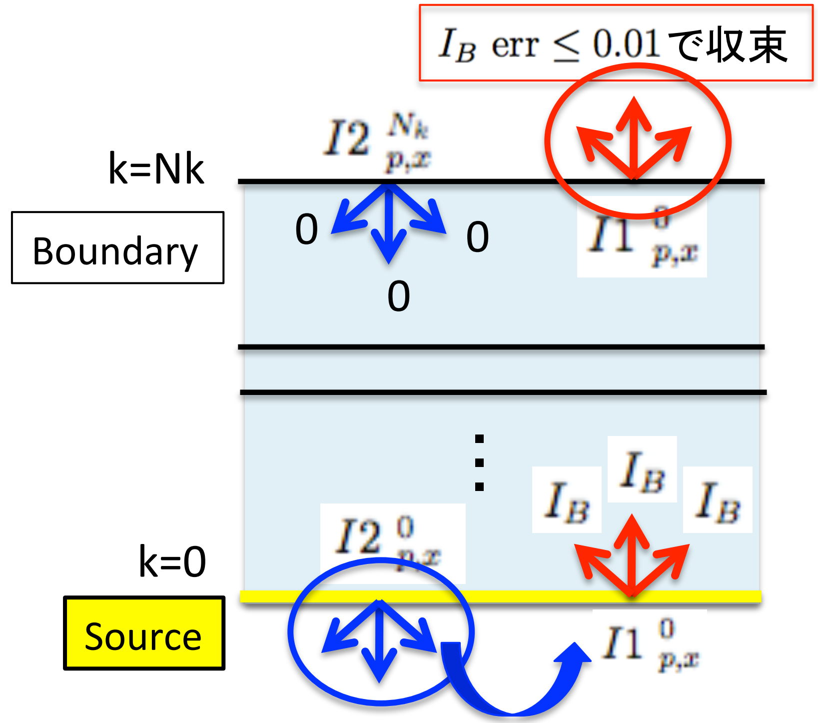
計算結果

T=10^4 [K]
τ=100

計算結果 RT

RTのみで τ=100 での平行平板から脱出するスペクトルを計算した。





初期・境界・収束条件

Iteration 1回目： $I1\,^{0}_{p,x_0} = I_B$ （ラインセンターのみ）

収束条件： $I_B\ \mathrm{err} \leq 0.01 \quad I_B\ \mathrm{err} = \dfrac{|I1\,^{N_k}_{\Sigma p \Sigma j} - I_{B\ \Sigma p \Sigma x}|}{I_{B\ \Sigma p \Sigma x}}$

2回目以降： 反射

$$I1\,^{0}_{p,x} = \begin{cases} I_B + I2\,^{0}_{p,x_0} & (x = x_0) \\ I2\,^{0}_{p,x} & (otherwise) \end{cases}$$

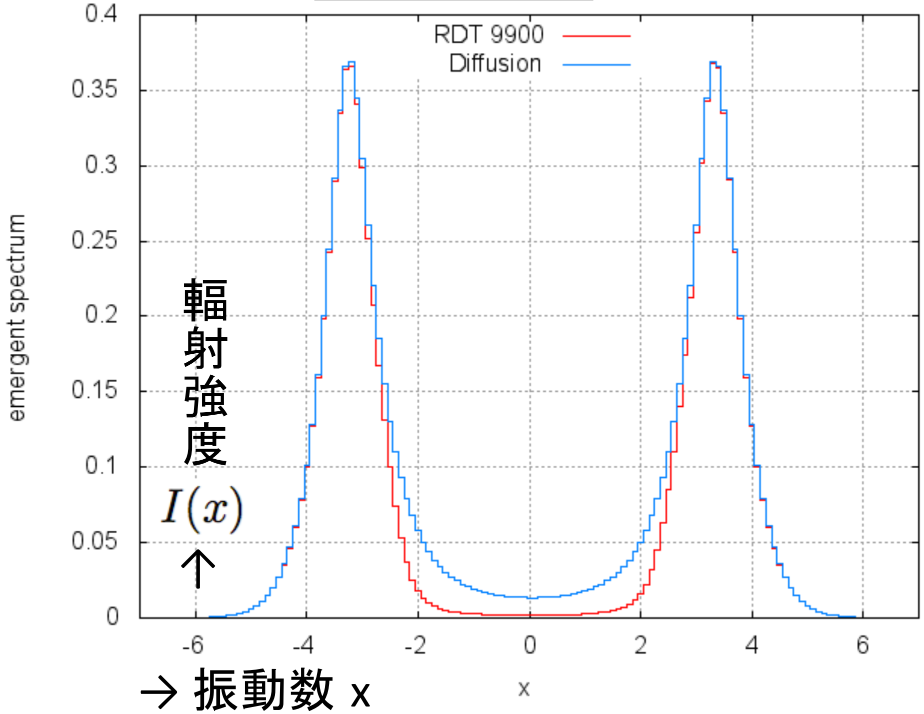
✓ Monte Carloとほぼ一致し、2ピークが再現できた。

→ 新たな再分配関数 $\eta(\xi)$ を用いて振動数シフトを解くことができている。

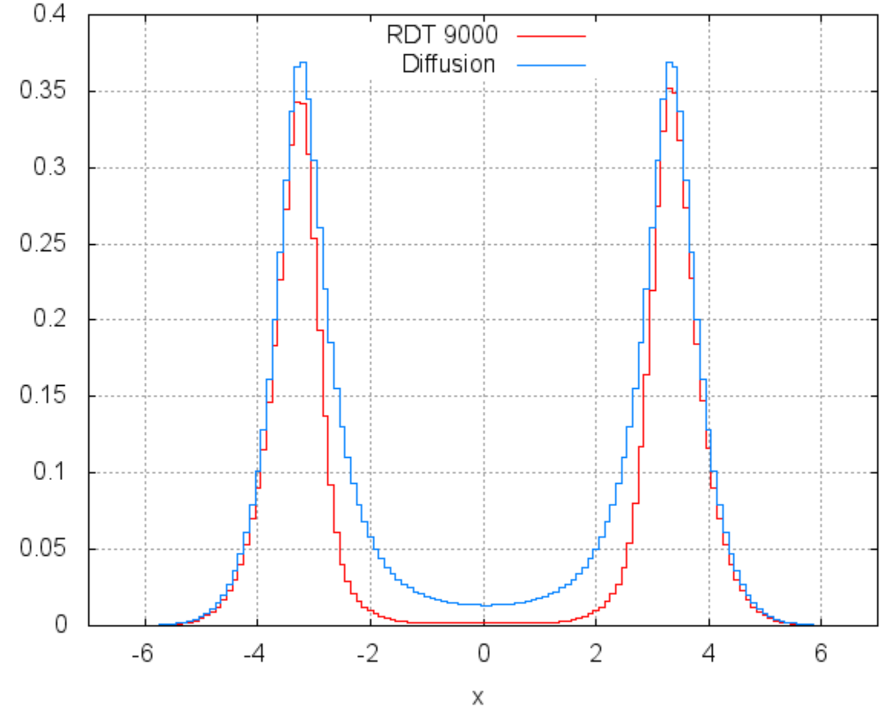
T=10^4 [K]
τ=10^4

計算結果 RDT

9900→1e+4 3min



9000→1e+4 5.3h



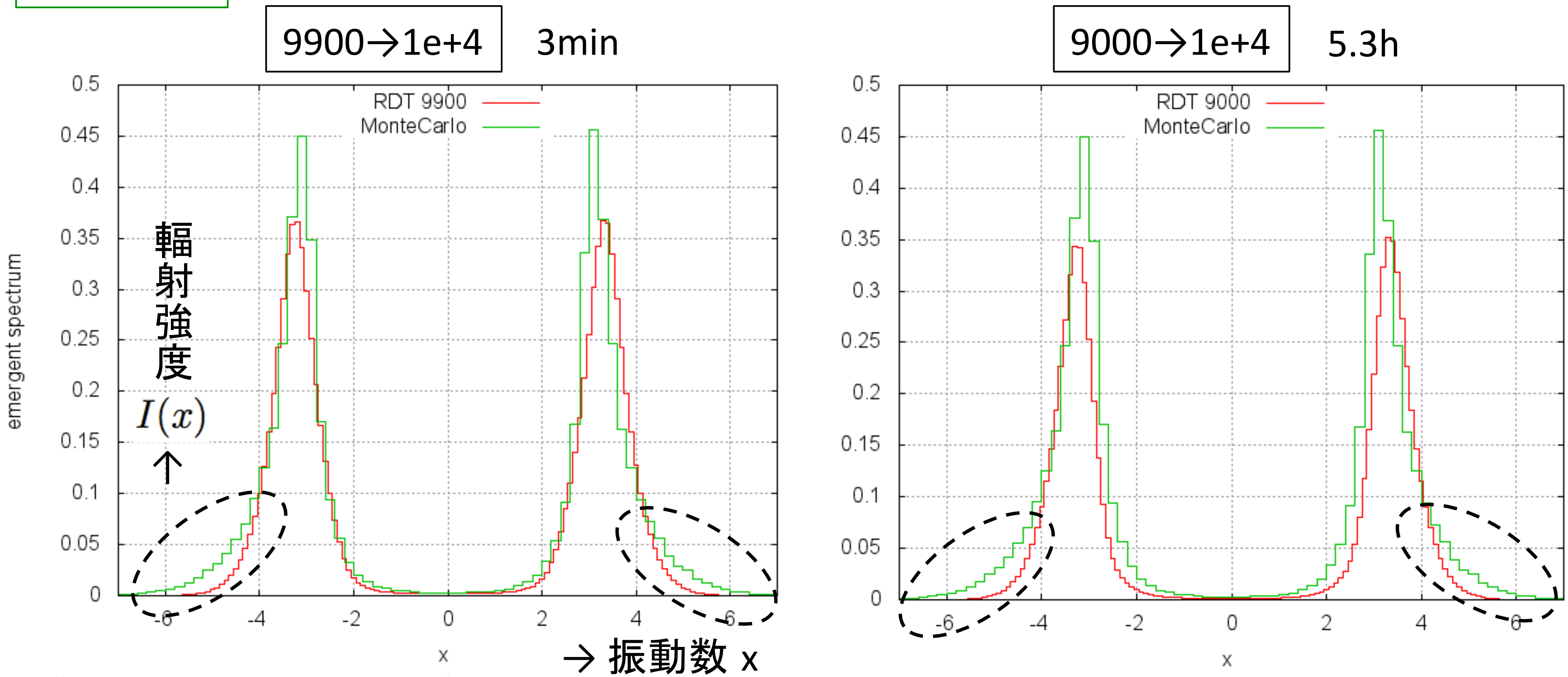
※ Diffusion の τ = 9000～1e+4 のスペクトルはほぼ変わらない。

《 RDT + Diffusion 》

- ✓ 表面をRTで解くと、ラインセンター付近は散乱されてスペクトルが削れる。
- ✓ 散乱してDiffusion領域に戻っている光子がいるので、RTで解く領域が増えるとより散乱が効いて、光子フラックスが減少する。

T=10^4 [K]
τ=10^4

計算結果 RDT



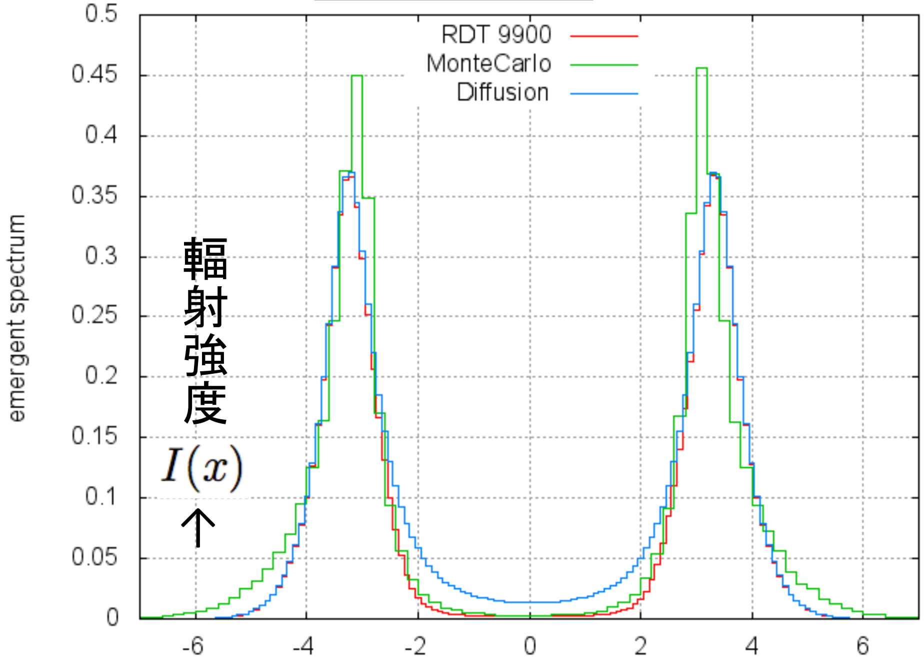
《 RDT + Monte Carlo 》

- ✓ RDT法を用いると、散乱が効いて光子がDiffusion領域に戻ることで、ラインセンター付近はMonteCarloのスペクトルに近づく。
- ✓ wingの振動数に対しては、系全体の τ が十分大きくないのでDiffusion近似の限界が現れており、初期条件としてDiffusionが良くない可能性。
  → より光学的に厚い計算の必要。

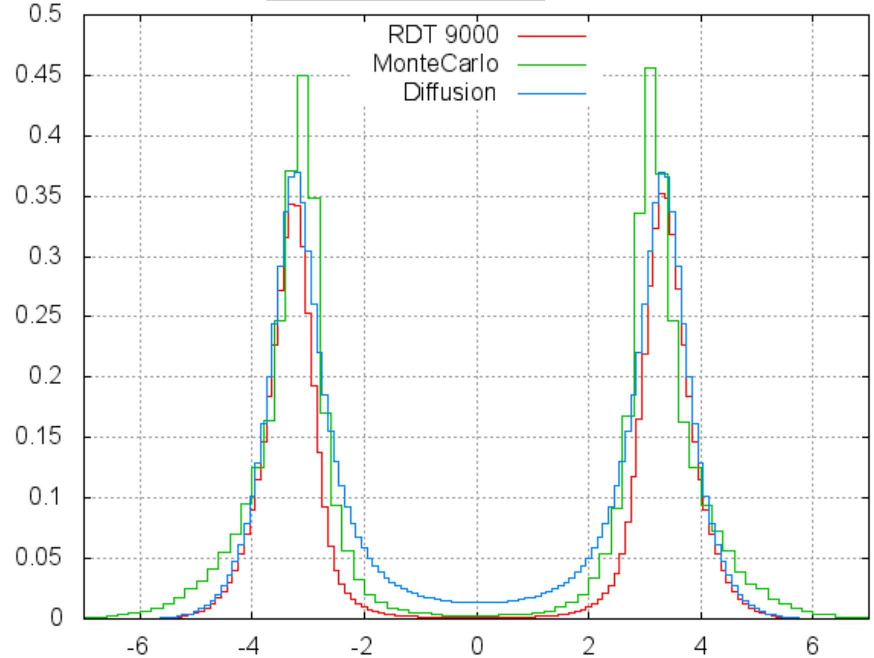
T=10^4 [K]
τ=10^4

計算結果 RDT

9900→1e+4　3min



9000→1e+4　5.3h



→ 振動数 x

※ 温度が高く、$a\tau_0 \gg 1$ を満たさないため、Neufeld解とはずれる。

《 RDT + Diffusion + Monte Carlo 》

- ✓ RDT法を用いることによって、Diffusion近似で再現できていなかったラインセンター付近のスペクトルを再現することができた。
- ✓ スペクトルの形は、Monte Carloとも、τ_{RDT} を変えても若干異なる。
  → 輻射力の評価にどこまで影響するか議論する必要がある。
  （ $\boxed{輻射力 \propto \sigma_\nu \times F_\nu}$　F_ν : Flux　σ_ν : 散乱断面積 ）

まとめ

平行平板において、

「 RDT法 + 新たな再分配関数η(ξ) 」

を用いてスペクトルを求める計算コードを開発した。

- ✓ RDT法を用いることによって、Diffusionのみでは再現できなかったラインセンター付近のスペクトルを再現することができた。
- ✓ wingの振動数に対しては、初期条件としてDiffusionが良くない可能性がある。

  → より光学的に厚い問題を解く。
- ✓ スペクトルの形は、Monte Carloとも、τ_{RDT} を変えても若干異なる。

  → 輻射流体を考えたときに、輻射力の評価にどこまで影響するか確かめる。