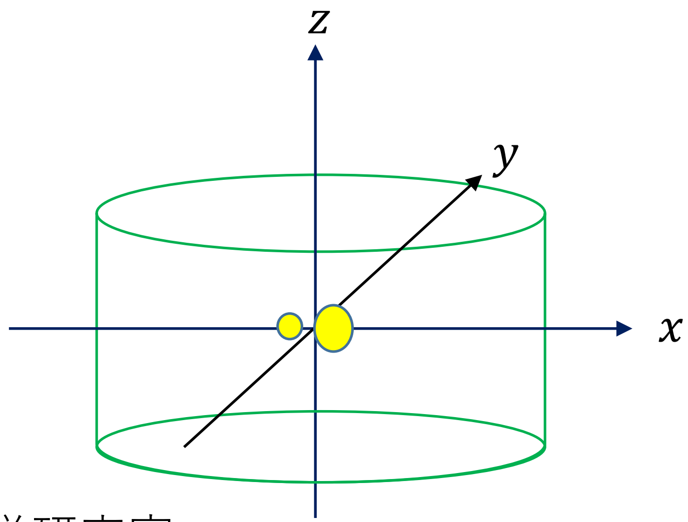
連星へのガス降着の
シミュレーションでの
コリオリの力の評価法の改善

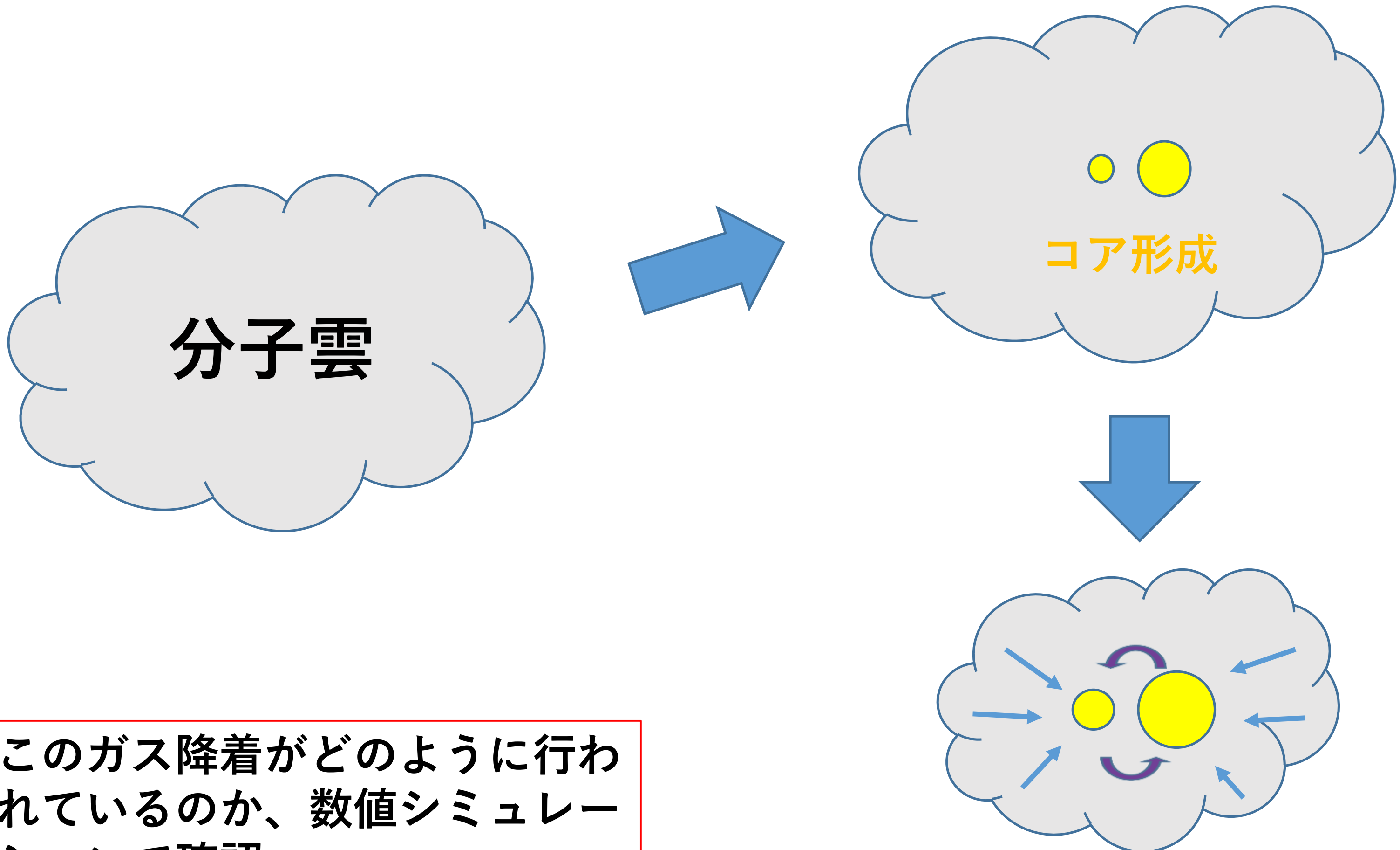
$$-2\boldsymbol{\Omega} \times (\rho \boldsymbol{v})$$



千葉大学宇宙物理学研究室
宮澤　慶次郎

共同研究者：花輪　知幸(千葉大学)、　松本　倫明(法政大学)

原始連星周囲のガス降着



公転しながらガス降着・成長

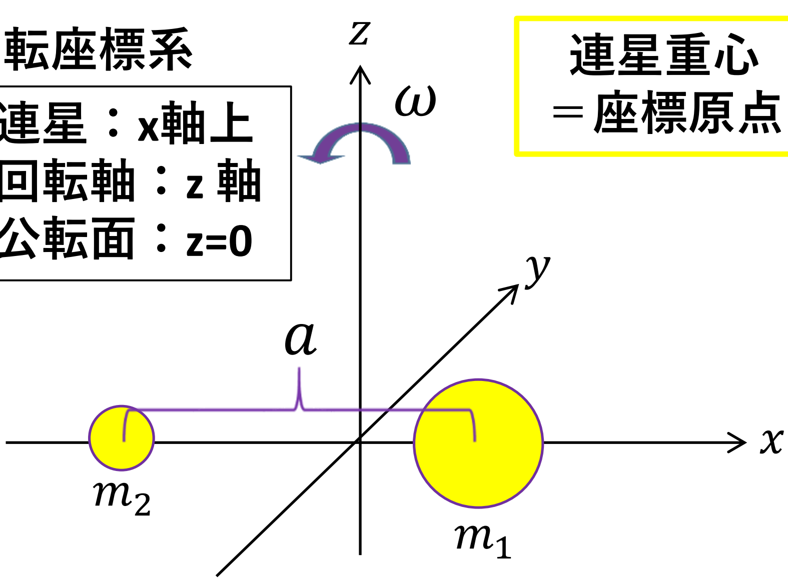
このガス降着がどのように行われているのか、数値シミュレーションで確認

シミュレーションモデル

回転座標系

- **連星：x軸上**
- **回転軸：z 軸**
- **公転面：z=0**

連星重心
＝座標原点



$$M = m_1 + m_2$$

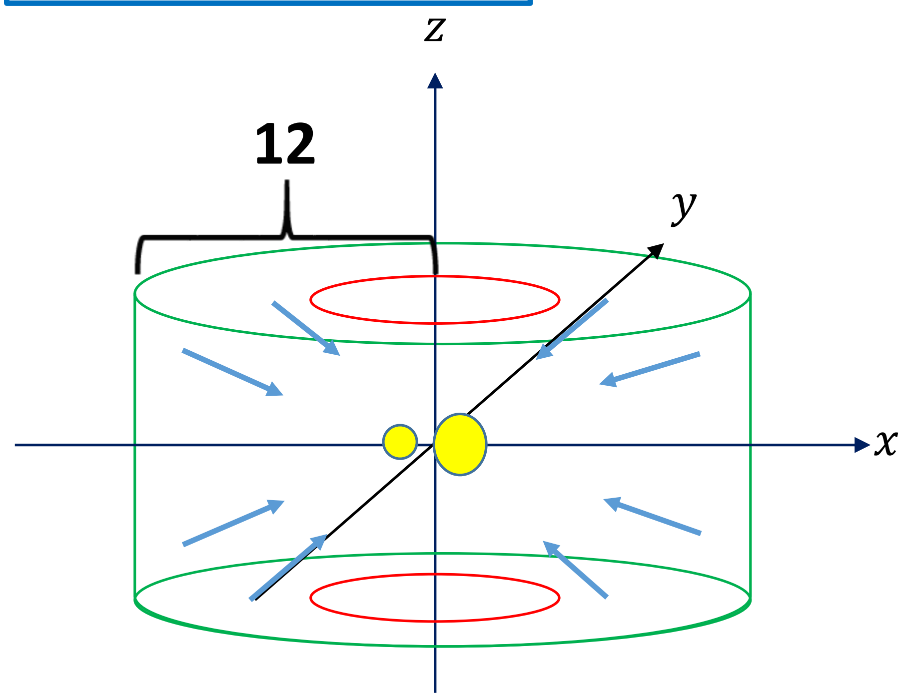
単位系

$MG = 1, \quad \omega = 1, \quad a = 1$

※磁場なし・等温を仮定

境界条件

円柱表面からガス落下



注入するガス密度は　1

運動方程式： $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + P\boldsymbol{I}) = \rho \boldsymbol{g} + \rho \Omega^2 \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{\Omega} \times (\rho \boldsymbol{v})$

問題点

原始連星周囲のガス円盤の降着
(角運動量は正しく計算出来ているか？)

慣性系の値に直して確認

比角運動量分布が**衝撃波面**で異常に増加

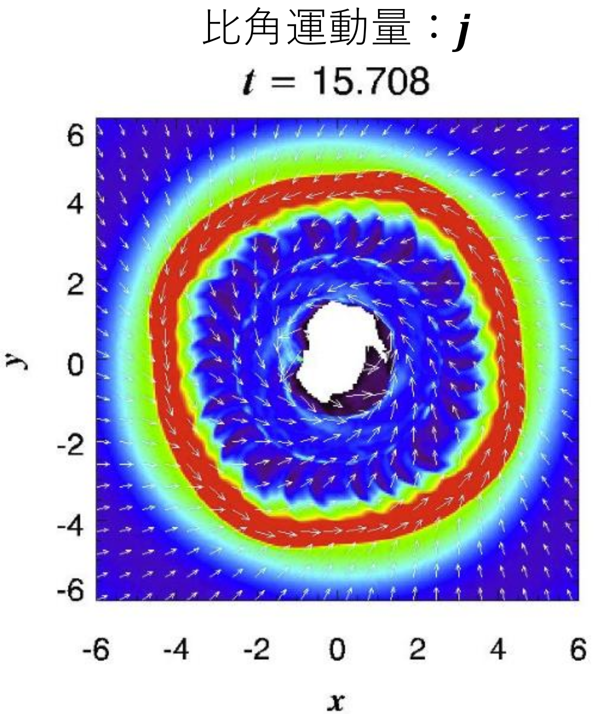
原因調査

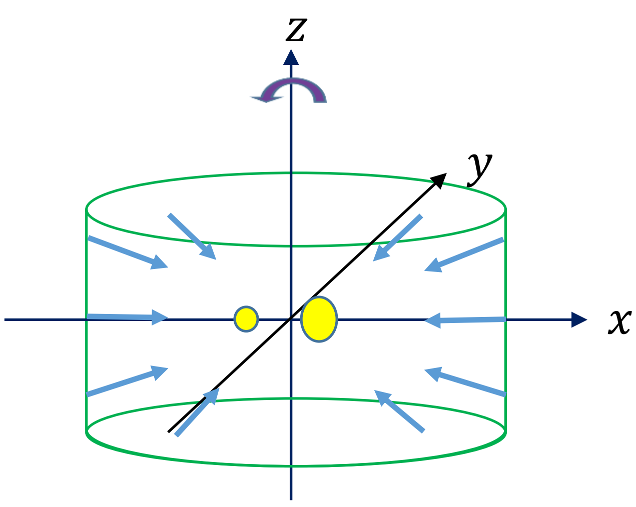
コリオリ力の評価方法が原因であること
を発見

コリオリ力

$$-2\boldsymbol{\Omega}\times(\rho\boldsymbol{v}) = [2\Omega\rho v_y, -2\Omega\rho v_x, 0]$$

どのように評価すべき？

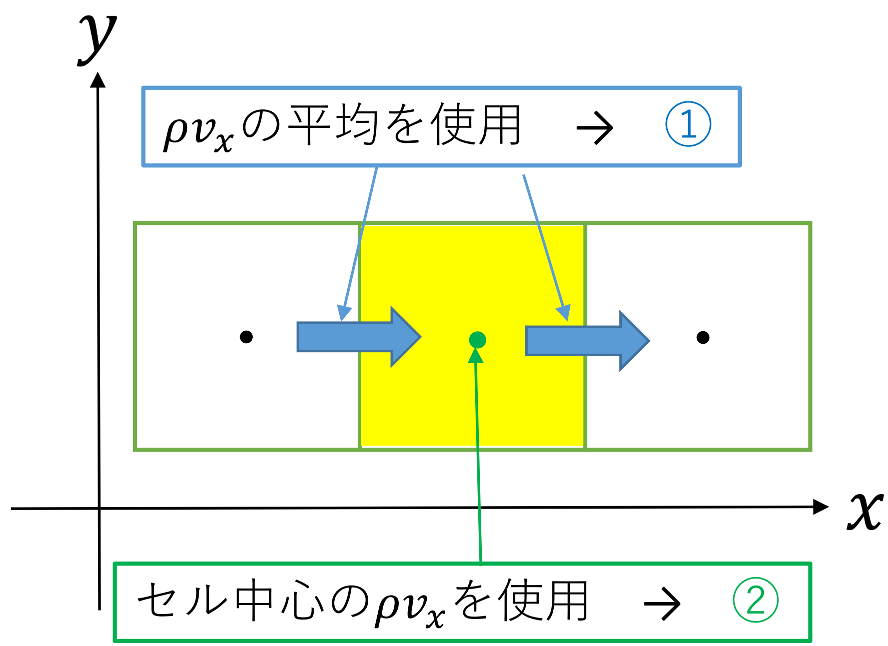




コリオリ力の３種の評価法

3つの計算法

①Numerical Flux 型
②Cell Center 型
③Half & Half 型

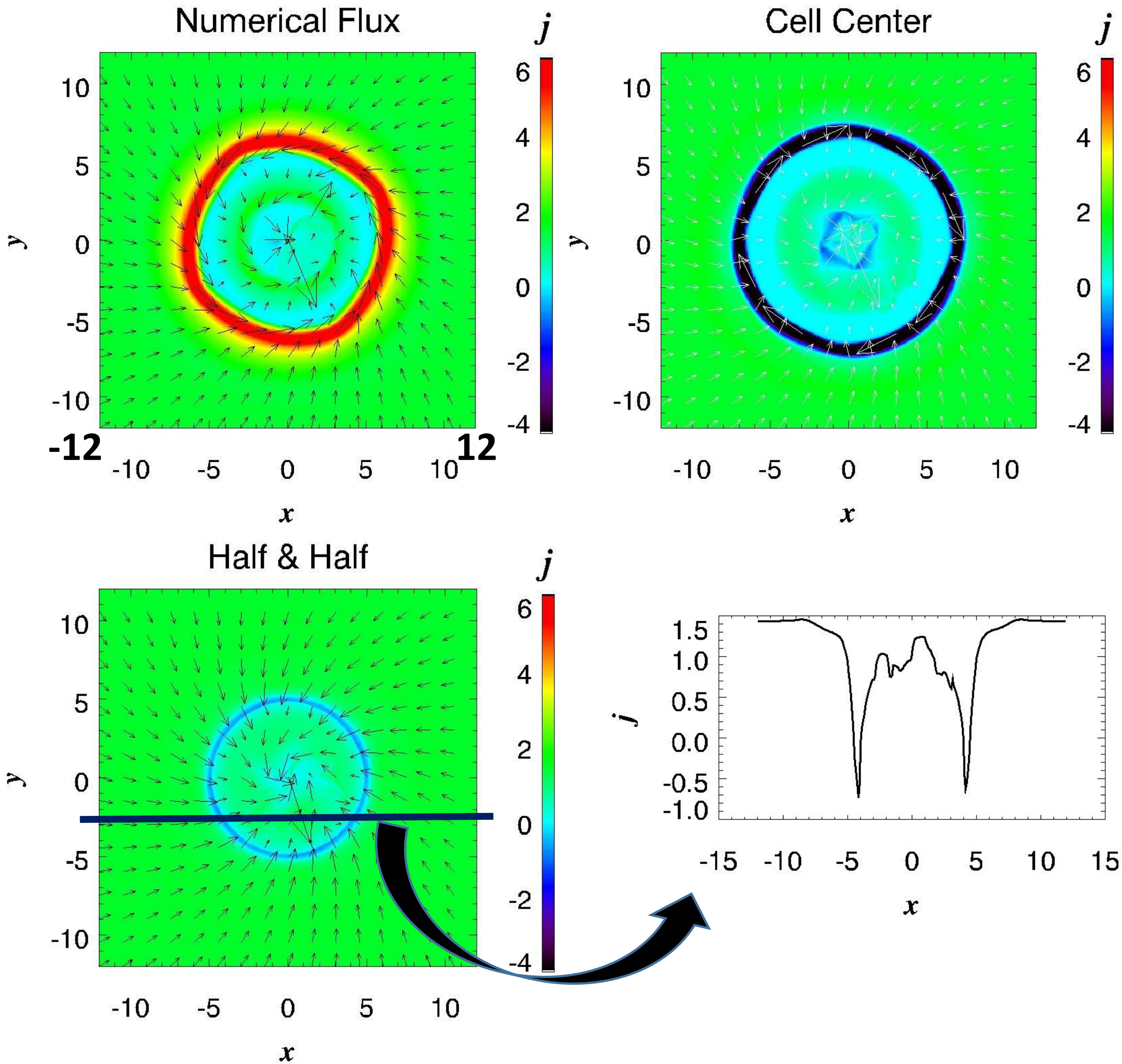


上の３つの計算法で
1. 比角運動量分布
2. 面密度分布
を比較

①と②の平均のρv_xを使用

Half & Half

比角運動量分布 ($t = 9.3$)



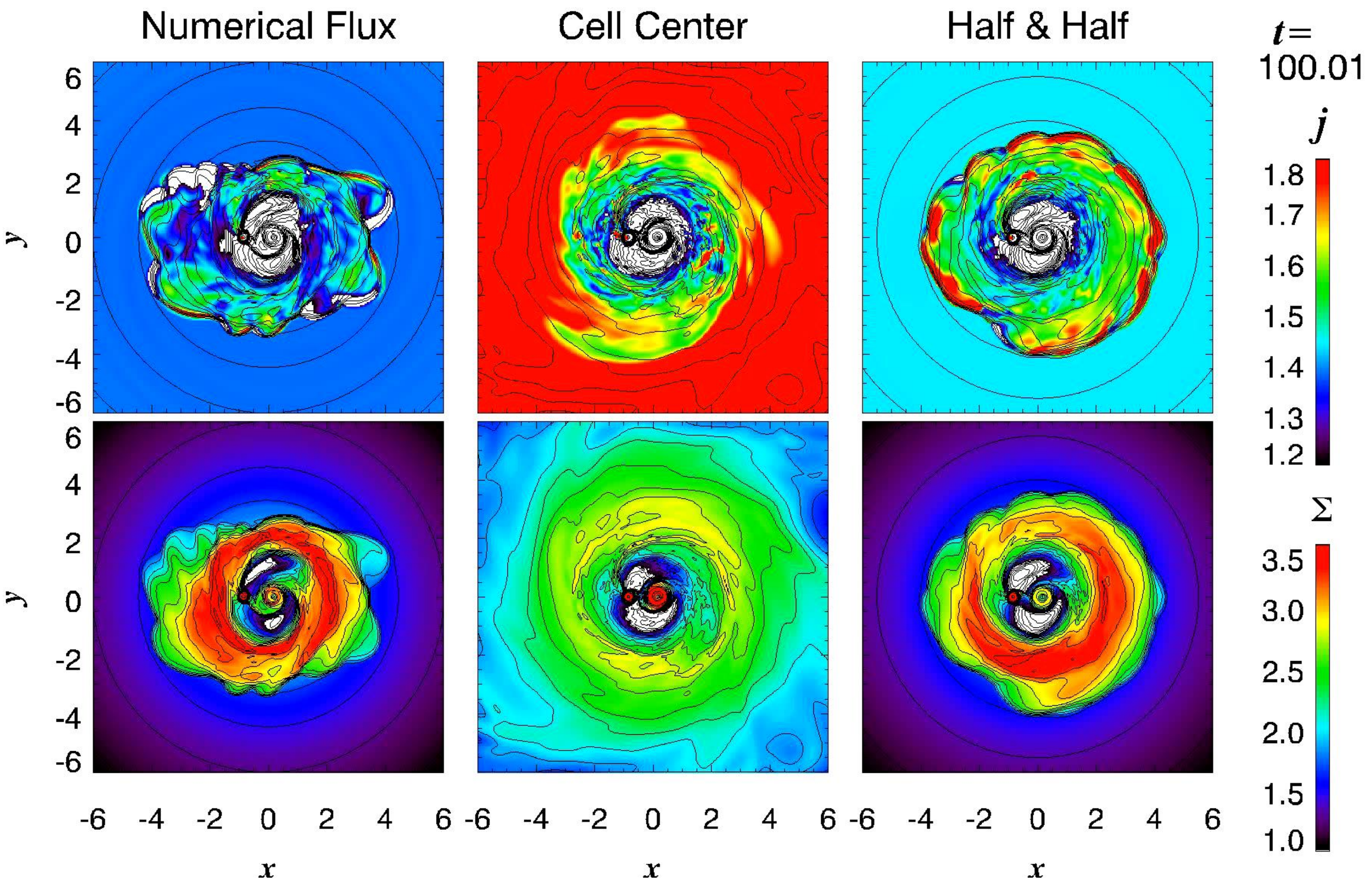
- $j_{\mathrm{inf}} = 1.435$
  $c_s = 0.1$
  $q = 0.19$
  $\rho_0 = 10^{-3}$
  $256 \times 256 \times 128$

- **SFUMATO 使用**
- **nested grid 使用(5段)**

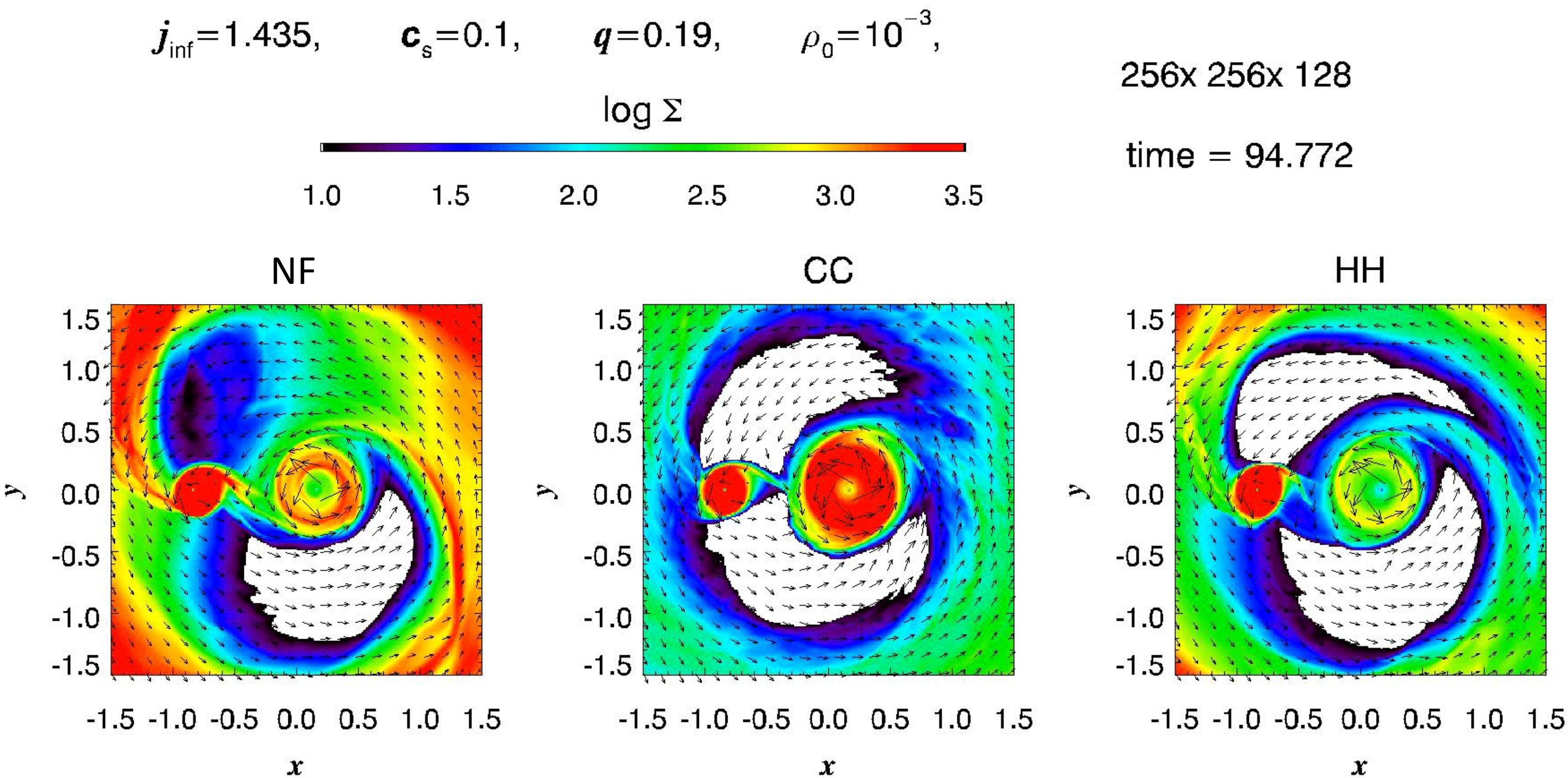
Half & Half型は、他の２つの方法と比較してかなり良くなっている。

比角運動量・面密度分布$(100 < t < 150)$

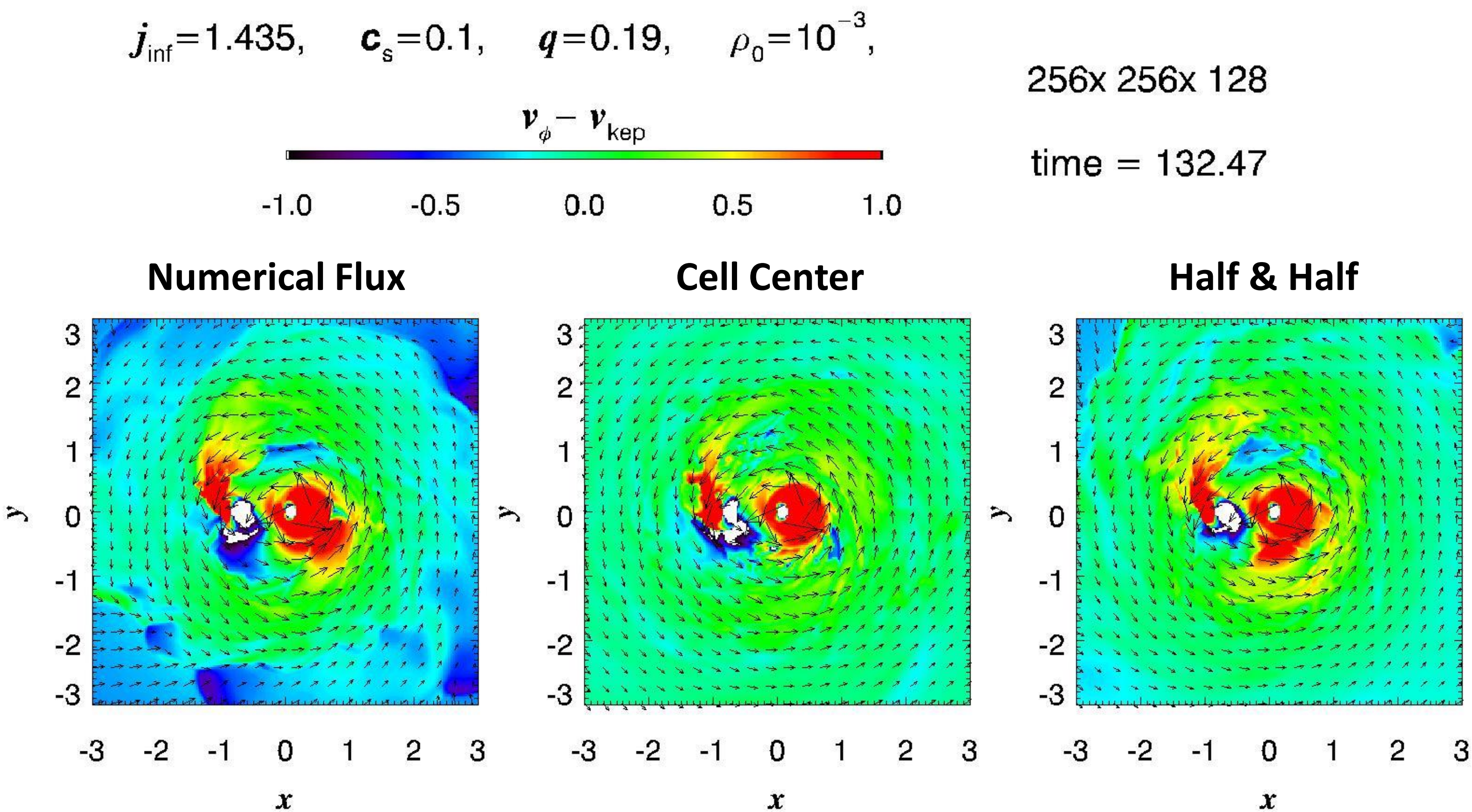
$j_{\mathrm{inf}} = 1.435$, $c_s = 0.1$, $q = 0.19$, $256 \times 256 \times 128$



ガス降着の比較 ($\mathbf{95 < t < 150}$)



$v_\phi - v_{\mathrm{kep}}$分布 ($t = 132.47$)



Cf. Takakuwa+14

考察(なぜHalf & Halfが良さそう？)

コリオリ力の導出　　　回転軸 = z軸、つまり、$\boldsymbol{e_z} = \boldsymbol{e_{z'}}$

1. 慣性系 (x, y, z) と回転系 (x', y', z) の関係

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{e_x} + y\boldsymbol{e_y} + z\boldsymbol{e_z} \\ &= x'\boldsymbol{e_{x'}} + y'\boldsymbol{e_{y'}} + z'\boldsymbol{e_{z'}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e_{x'}} &= \cos\Omega t\boldsymbol{e_x} + \sin\Omega t\boldsymbol{e_y} \\ \boldsymbol{e_{y'}} &= -\sin\Omega t\boldsymbol{e_x} + \cos\Omega t\boldsymbol{e_y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x'}} &= \Omega\boldsymbol{e_{y'}} \\ \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y'}} &= -\Omega\boldsymbol{e_{x'}}\end{aligned}$$

2. 慣性系の速度 (u_x, u_y, u_z) と回転系の速度 (v_x, v_y, v_z) の関係 (ただし、$u_z = v_z$)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= u_x\boldsymbol{e_x} + u_y\boldsymbol{e_y} + u_z\boldsymbol{e_z} \\ &= (v_x - \Omega y')\boldsymbol{e_{x'}} + (v_y + \Omega x')\boldsymbol{e_{y'}} + v_z\boldsymbol{e_{z'}}\end{aligned}$$

3. 連続の式と運動方程式　(変形する基となる式)

連続の式：$\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0$

運動方程式：$\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + P\boldsymbol{I}) = \rho\boldsymbol{g}$

4. 運動方程式に$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}'}$をかけて、内積を求める

$$\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} + u_y\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} + u_z\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}} \\ = (v_x - \Omega y')\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}'} + (v_y + \Omega x')\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}'} + v_z\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}'} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{uu} + P\boldsymbol{I})\right] = \rho g_{x'}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}[\rho(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}'}\cdot\boldsymbol{u})] + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\rho\boldsymbol{u}\big(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}'}\cdot\boldsymbol{u}\big) + P\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}'}\right] = \rho g_{x'} + \rho\Omega(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}'}\cdot\boldsymbol{u})$$

時間微分から出現

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}[\rho(v_x - \Omega y')] + \frac{\partial}{\partial x'}[\rho v_x(v_x - \Omega y') + P] + \frac{\partial}{\partial y'}[\rho v_y(v_x - \Omega y')] \\ + \frac{\partial}{\partial z}[\rho v_z(v_x - \Omega y')] = \rho[g_{x'} + \Omega\big(v_{y'} + \Omega x'\big)] \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

5. 回転系での連続の式の両辺に$\Omega y'$をかけて、部分積分

$$\Omega y'\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y'}\big(\rho v_y\big) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho\Omega y') + \frac{\partial}{\partial x'}(\rho v_x\Omega y') + \frac{\partial}{\partial y'}\big(\rho v_y\Omega y'\big) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z\Omega y') = \rho\Omega v_{y'} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

空間微分から出現

6. ① + ② から、解くべきx方向の流体力学方程式は、

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x'}(\rho v_x v_x + P) + \frac{\partial}{\partial y'}\big(\rho v_y v_x\big) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_x) = \rho g_{x'} + \rho\Omega\big(v_{y'} + \Omega x'\big) + \rho\Omega v_{y'}}$$

まとめ

- 比角運動量分布から、Numerical Flux 型やCell Center 型よりもHalf & Half 型の方が、かなり良い精度でガスを落下させることができる
- Numerical Flux 型とHalf & Half 型の定性的な違いは$v_\phi - v_{\mathrm{kep}}$ 分布からは確認できなかったが、比角運動量分布からは確認ができた
- 長時間後の計算結果は３種３様の定性的な違いが確認できそうである