

Hilbert-Huang変換を 用いた重力波解析

新潟大学大学院 自然科学研究科
博士前期課程1年

渡邊 幸伸

重力波について

- 2015年9月14日:LIGOが重力波を検出
- コンパクト連星(NS-NS、BH-BH)や超新星爆発の観測
- 重力波の大きさは非常に小さい
 - ・・・雑音によって重力波信号が埋もれてしまう

データ解析が必要不可欠

重力波のデータ解析

- 理論的予測波形を用意できる場合

例：BH-BH連星合体からの重力波

→ 予測波形と観測データとの相関をとる

マッチドフィルター解析

- 理論的予測波形を用意できない場合

例：超新星爆発からの重力波(バースト的重力波)

→ 振幅や周波数の時間変化を捉える

時間-周波数解析

・・・フーリエ変換を用いる解析手法が主流

例：短時間フーリエ変換、ウェーブレット変換

時間と周波数の間の不確定性関係

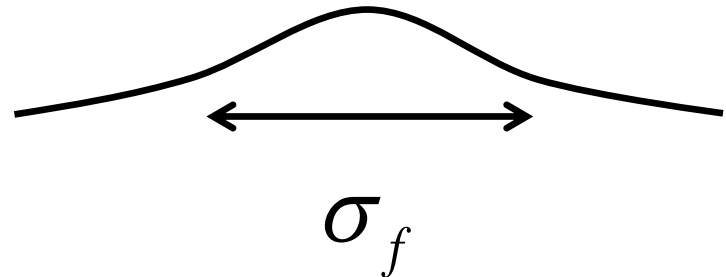
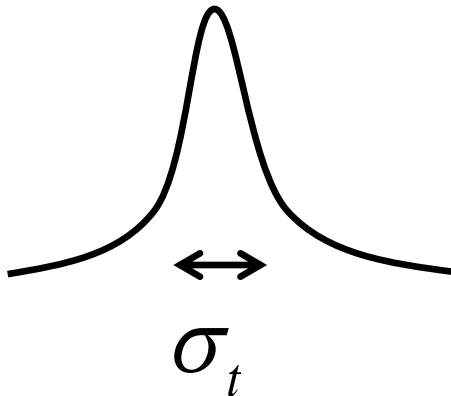
- フーリエ変換を用いる解析手法・・・不確定性関係の影響

$$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi}$$

σ_t : 持続時間

σ_f : 帯域幅

- σ_t と σ_f を同時にどこまでも小さくできない
→ 時間分解能と周波数分解能を両立できない



- バースト的重力波: ミリ秒のタイムスケールで周波数が数10Hz～数kHzまで変動

- $\sigma_t = 1\text{ms}$ とすると $\sigma_f \geq \frac{1}{4\pi} \cdot 10^3 \cong 10^2 \text{Hz}$

周波数の分解能が悪い

→ 短時間で大きく変動する周波数を捉えることができない

不確定性関係に影響されない解析手法が必要

Hilbert-Huang変換(HHT)とは

- Hilbert-Huang変換: フーリエ変換を用いない解析手法
→ 時間と周波数の不確定性関係の影響を受けない
- フーリエ変換を用いる解析手法よりも詳細な時間-周波数解析ができる

Hilbert-Huang 変換

時系列データ $x(t)$

Empirical Mode Decomposition
(EMD)

IMF 1

IMF 2

...

IMF i

...

Hilbert Spectral Analysis (HSA)

IA 1

IF 1

IA 2

IF 2

...

IA i

IF i

...

- IMF: Intrinsic Mode Function
- IA: Instantaneous Amplitude
- IF: Instantaneous Frequency

Hilbert Spectral Analysis

- 時系列データ $h(t) = A(t) \cos \phi(t)$



一般にこの分解は一意的にできない

- $h(t)$ が解析関数 $F(z)$ の実軸上の実部である
- $F(z)$ が $z \rightarrow \infty$ で十分早く0に近づく

→ 解析関数の虚部がHilbert変換で与えられる

$$F(t) = h(t) + iv(t) = A(t)e^{i\phi(t)}$$

Hilbert変換

$$v(t) = \mathcal{H}[h(t)] = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

P:コーシーの主値積分

Instantaneous Amplitude (IA):

$$A(t) = \sqrt{h(t)^2 + v(t)^2}$$

Instantaneous Frequency (IF):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

$$\phi(t) = \tan^{-1} \left(\frac{v(t)}{h(t)} \right)$$

- HSA: 零点周りを対称に振動する信号でないと計算結果が期待した振幅や周波数にならない
- 例・・・ $h(t) = \alpha \cos(2\pi ft) + \beta$ ・・・ β を中心に振動する
振幅 α 、周波数 f の信号

↓ HSA

$$\mathcal{H}[h(t)] = v(t) = \alpha \sin(2\pi ft)$$

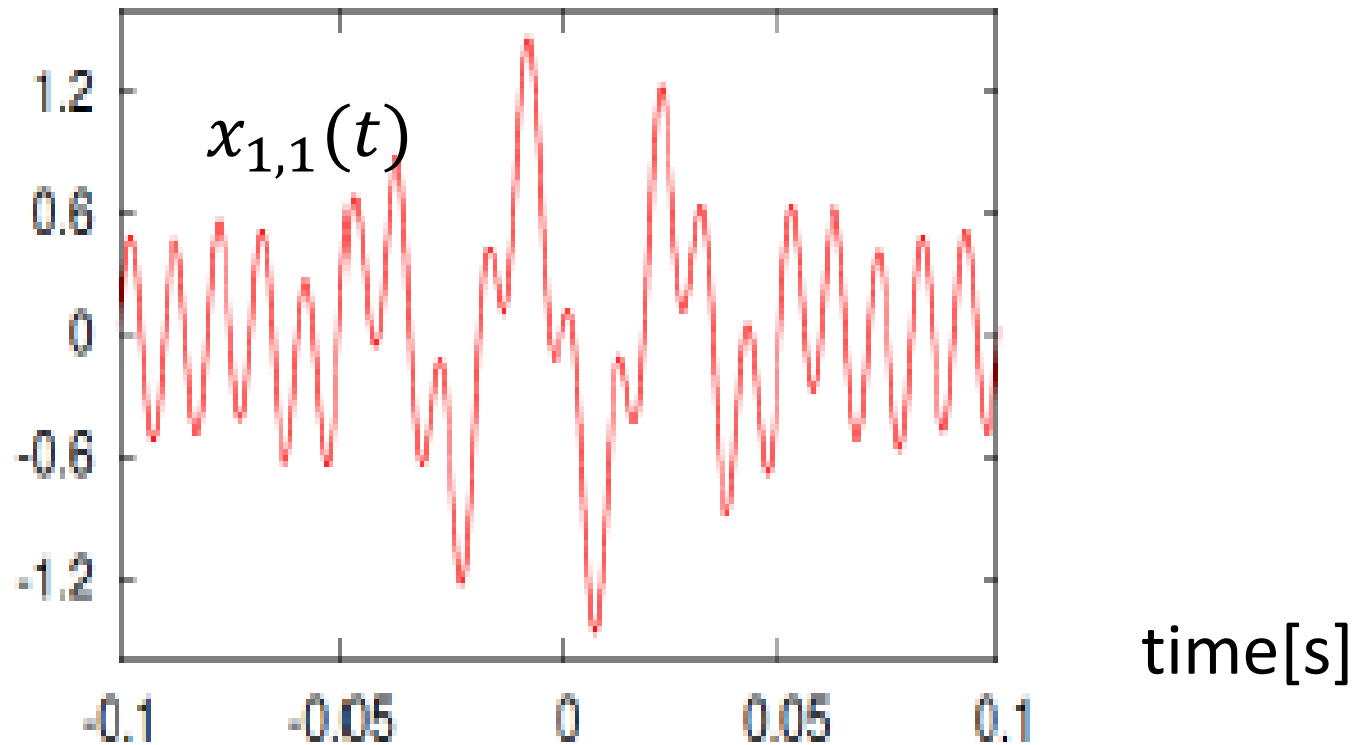
→

$$\begin{cases} A(t) = \alpha \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + 2 \frac{\beta}{\alpha} \cos(2\pi ft)} \neq \alpha \\ f(t) = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta \cos(2\pi ft)}{A(t)^2} f \neq f \end{cases}$$

→ HSAの前にデータをモード分解する

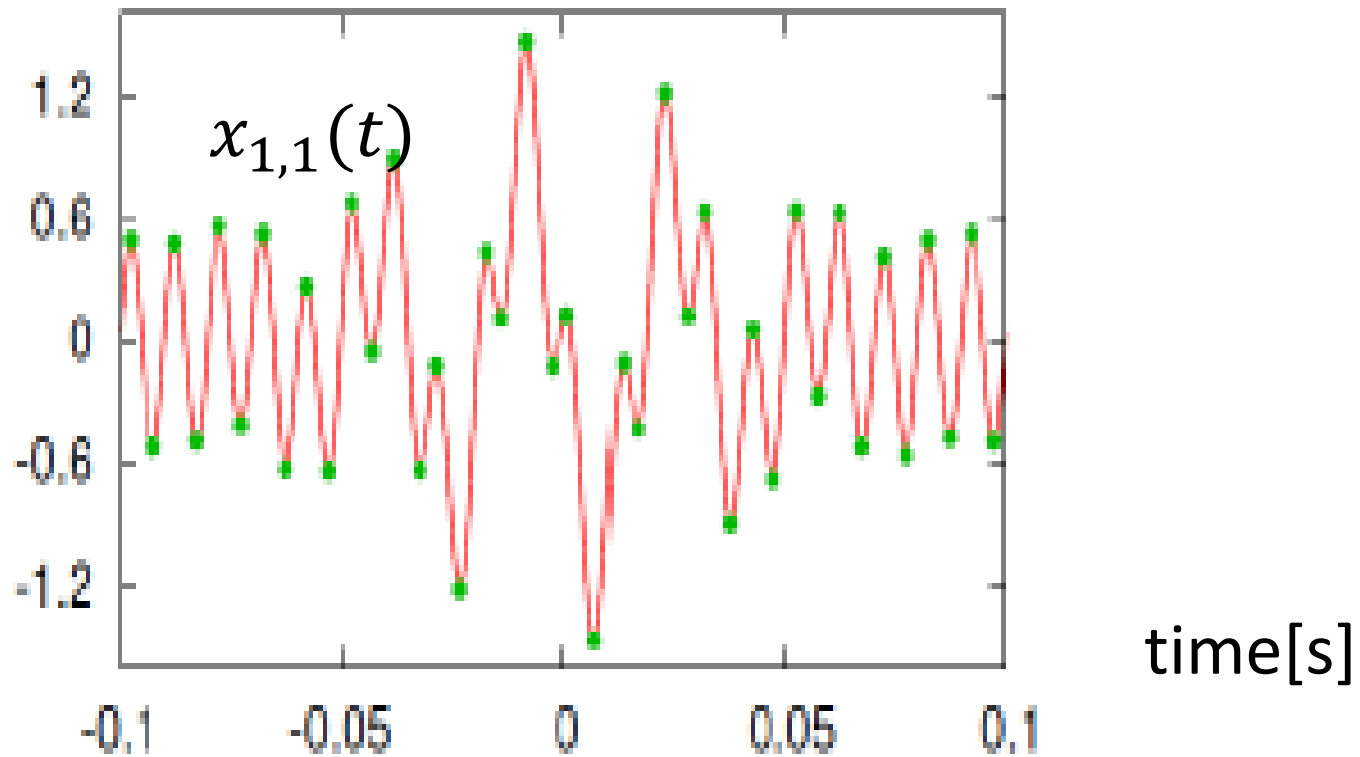
Empirical Mode Decomposition(EMD)

- sifting process: データの極値に着目し高周波成分を残す



Empirical Mode Decomposition(EMD)

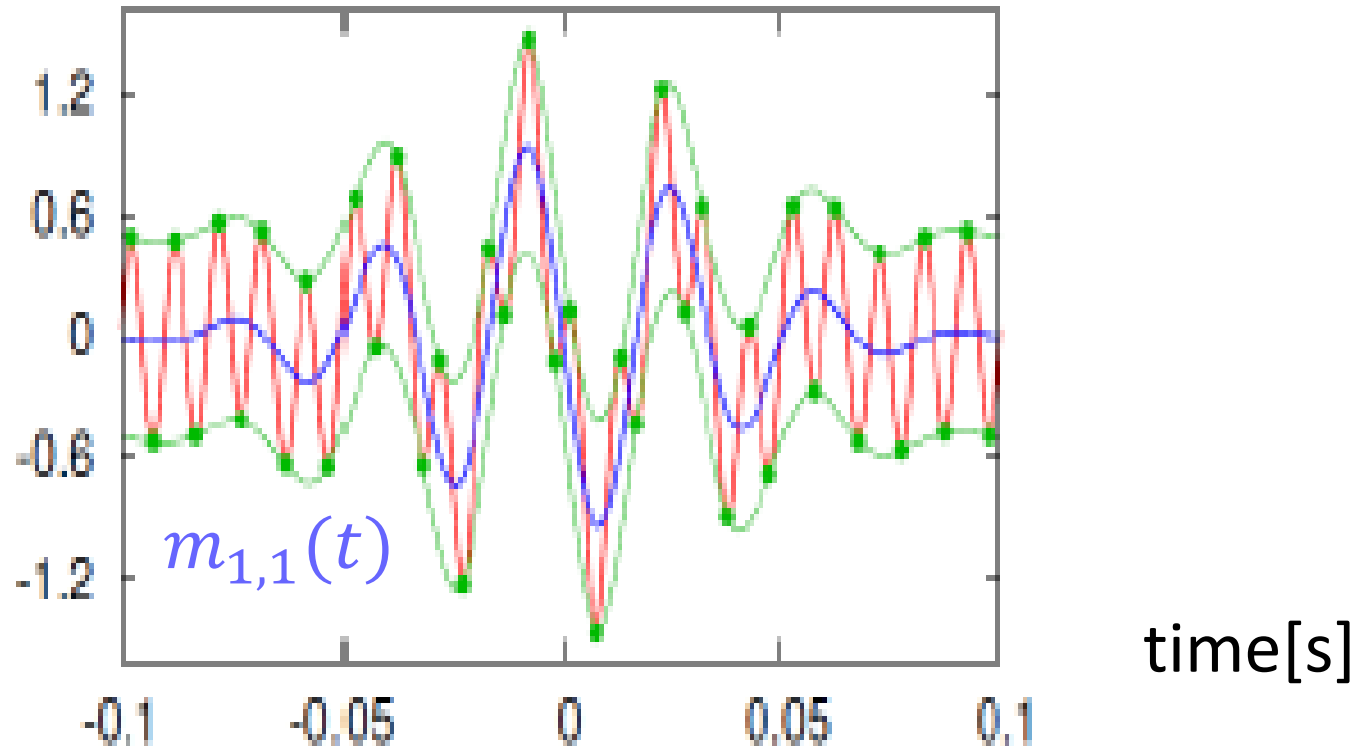
- sifting process: データの極値に着目し高周波成分を残す



1. データ $x_{1,1}(t)$ の極大値と極小値を見つける。

Empirical Mode Decomposition(EMD)

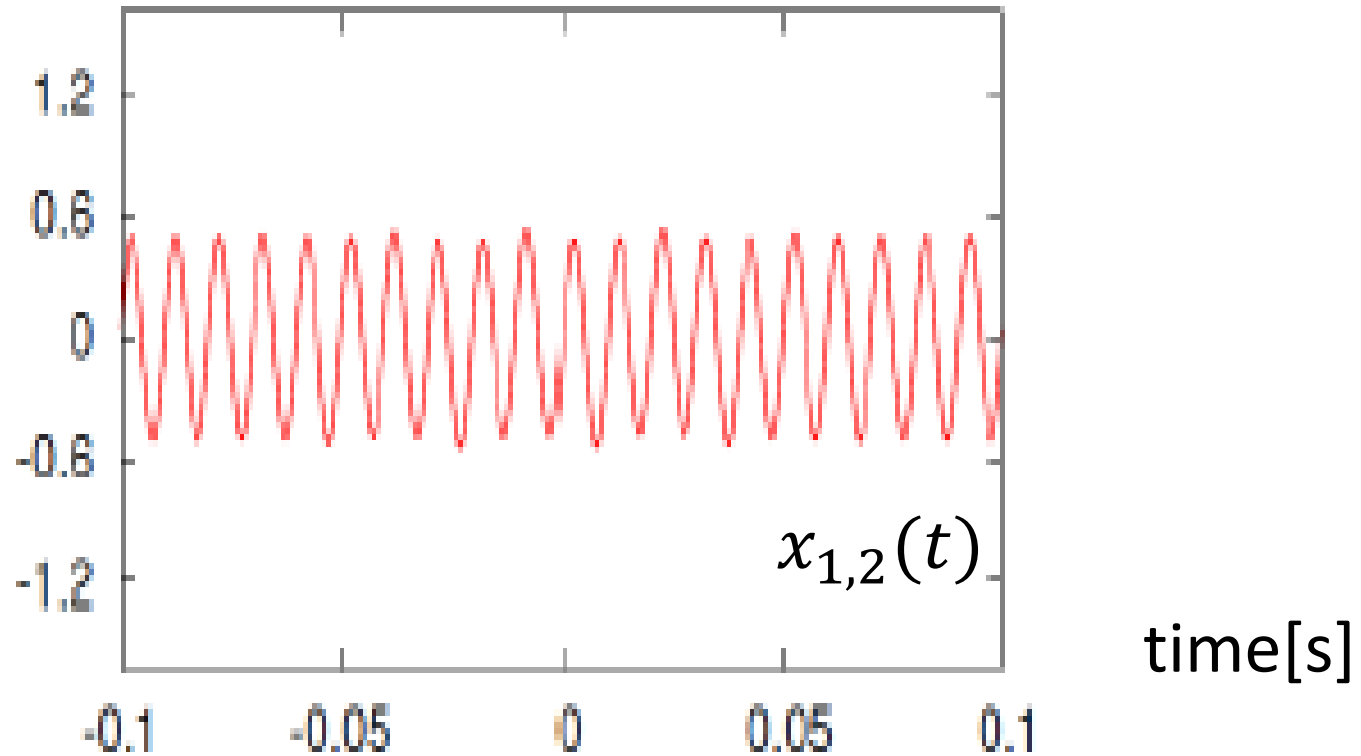
- sifting process: データの極値に着目し高周波成分を残す



2. 各極大値、極小値を通るエンベロープを引き、2つのエンベロープの平均をとり、これを $m_{1,1}(t)$ とする。

Empirical Mode Decomposition(EMD)

- sifting process: データの極値に着目し高周波成分を残す

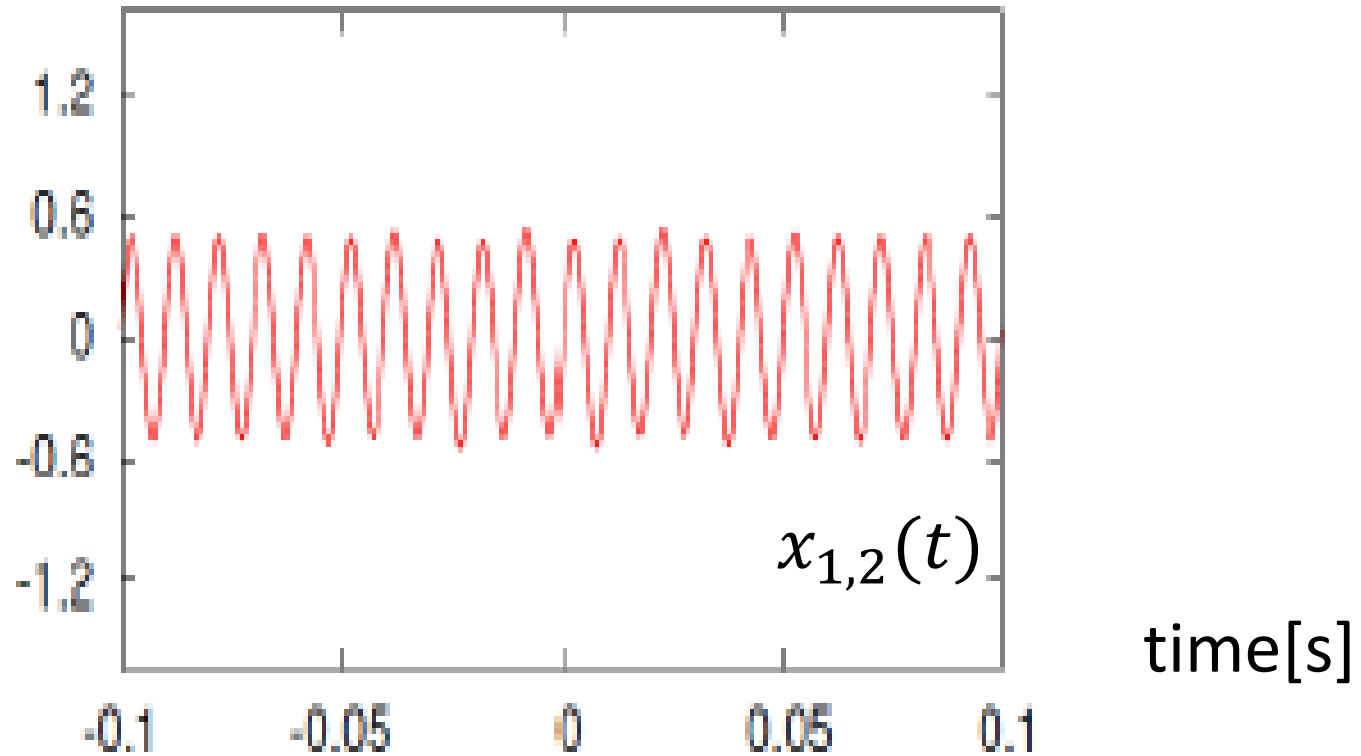


3. 元のデータからエンベロープの平均を引き、これを $x_{1,2}(t)$ とする。

$$x_{1,1}(t) - m_{1,1}(t) = x_{1,2}(t)$$

Empirical Mode Decomposition(EMD)

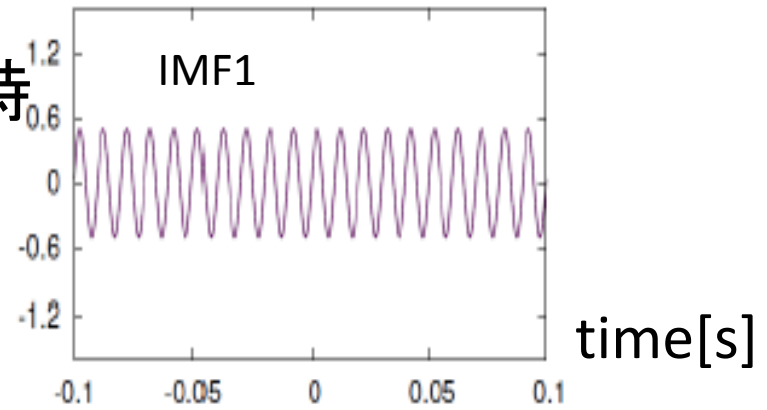
- sifting process: データの極値に着目し高周波成分を残す



4. $x_{1,2}(t)$ に対して1～3の処理を繰り返し $x_{1,k}(t)$ を求める(k は自然数)。

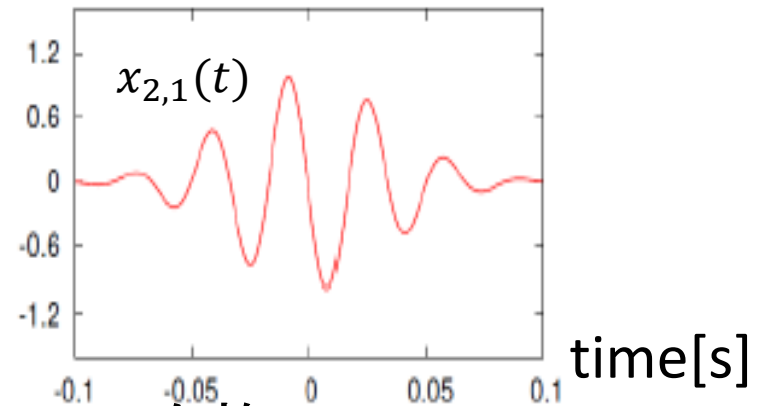
5. コーシーの収束条件
$$\frac{\sum_{j=0}^{N-1} |m_{1,k}(t_j)|^2}{\sum_{j=0}^{N-1} |x_{1,k}(t_j)|^2} < \varepsilon$$

を適用する。この条件を満たした時
1～3の工程を終了し、この時の
 $x_{1,k=k_{max}}$ をIMF1とする。



6. 元のデータからIMF1を引き、
これを $x_{2,1}(t)$ とする。

$$x_{1,1}(t) - \text{IMF1} = x_{2,1}(t)$$



7. $x_{2,1}(t)$ に対して同様にsifting processを施して
IMF2,3,4,...を作っていく、引き去ったデータに極値が
なくなったらループを終える。

EMDの問題点

- mode mixing
 - ・・・一つのIMFに複数の周波数成分が混在したり、複数のIMFに同じ周波数帯域の成分が分散する現象



白色ガウス雑音を使ってIMFの
周波数帯域を制御する

Ensemble EMD

白色ガウス雑音: パワースペクトル密度が一定
かつ雑音の大きさの分布がガウス分布

Ensemble EMD(EEMD)

- (1) 元のデータ $x(t)$ に平均0、標準偏差 σ の白色ガウス雑音 $w^{(1)}(t)$ を加える。
$$x(t) + w^{(1)}(t) = x^{(1)}(t)$$
- (2) データ $x^{(1)}(t)$ にEMDを適用し、IMFs $c_i^{(1)}(t)$ とresidual $r^{(1)}(t)$ に分解する。
- (3) 白色ガウス雑音の乱数を変えて
 $w^{(2)}(t), w^{(3)}(t), \dots, w^{(j)}(t) \dots (j \text{ は自然数})$ を作り、(1)と(2)を N 回行う。そして各IMFsと $r^{(j)}(t)$ のアンサンブルを求める。
- (4) 最後に各IMFでアンサンブル平均

$$c_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N c_i^{(j)}(t)$$

をとり、そのIMF $c_i(t)$ についてHSAを行う。

Summary

- Hilbert-Huang変換(HHT)は時間と周波数の間の不確定性関係に影響されずに解析できるため、バースト的重力波を解析する有力な手法である。
- HHTではデータをEMDでモード分解し、各モードに対してHSAを施してIAとIFを求める。
- EMDの弱点であるmode mixingは、白色ガウス雑音をデータに加えてアンサンブル平均をとるEEMDを用いることで軽減できる。

時間と周波数の間の不確定性関係の証明

- 平均時間と平均周波数0の信号
 $s(t)$ 、そのフーリエ変換 $\tilde{s}(f)$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(f) e^{2\pi i f t} df \quad \tilde{s}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

- 時間、周波数領域での密度 $\cdots |s(t)|^2, |\tilde{s}(f)|^2$

- 持続時間 σ_t $\sigma_t^2 = \langle t^2 \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt$

- 帯域幅 σ_f $\sigma_f^2 = \langle f^2 \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |\tilde{s}(f)|^2 df = \frac{1}{4\pi^2 E} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} s(t) \right|^2 dt$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(f)|^2 df = E$$

• シュワルツの不等式

を用いて、 $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} ts^*(t)\dot{s}(t)dt \right|^2 \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt}_{= E\sigma_t^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{s}(t)|^2 dt}_{= 4\pi^2 E \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |\tilde{s}(f)|^2 df = 4\pi^2 E\sigma_f^2}$$

$$\dot{s}(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$

$$= 4\pi^2 E^2 \sigma_t^2 \sigma_f^2$$

ここで、 $s(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}$ とおいて
左辺の被積分関数を計算すると、

$$\begin{aligned} ts^*(t)\dot{s}(t) &= tA\dot{A} + it\dot{\varphi}A^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (tA^2) - \frac{1}{2} A^2 + it\dot{\varphi}A^2 \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ts^*(t)\dot{s}(t)dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (tA^2) dt}_{= \frac{1}{2} [tA^2]_{-\infty}^{\infty} = 0} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} A^2 dt}_{= \frac{1}{2} E} + i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} t \dot{\phi} A^2 dt}_{= 2\pi \text{Cov}_{tf}}$$

$$= -\frac{1}{2} E + 2\pi i \text{Cov}_{tf}$$

Cov_{tf} : 共分散

$$4\pi^2 E^2 \sigma_t^2 \sigma_f^2 \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} ts^*(t)\dot{s}(t)dt \right|^2 = \left| -\frac{1}{2} E + 2\pi i \text{Cov}_{tf} \right|^2 = \frac{1}{4} E^2 + 4\pi^2 \text{Cov}_{tf}^2$$

$$\therefore \sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{2\pi E} \sqrt{\frac{1}{4} E^2 + \underbrace{4\pi^2 \text{Cov}_{tf}^2}_{\geq 0}} \geq \frac{1}{4\pi}$$

共分散

- 2つの変数の間の関係を表す指標

$$\begin{aligned}\text{Cov}_{tf} &= \langle (t - \langle t \rangle)(f - \langle f \rangle) \rangle \\ &= \langle tf \rangle - \langle t \rangle \langle f \rangle - \langle t \rangle \langle f \rangle + \langle t \rangle \langle f \rangle \\ &= \langle tf \rangle - \langle t \rangle \langle f \rangle\end{aligned}$$

$\langle t \rangle = 0, \langle f \rangle = 0$ の信号を考える

と、

$$= \langle tf \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t \dot{\phi}(t) |s(t)|^2 dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t)$$

短時間フーリエ変換

- 信号を短時間の区間に分解し、区間ごとにフーリエ変換してその区間にいる周波数を確定する。
- 時刻 t における信号

$$s_t(\tau) = s(\tau) \underline{h(\tau - t)} \quad \text{窓関数}$$
$$s_t(\tau) \sim \begin{cases} s(\tau) & t \text{ に近い } \tau \\ 0 & t \text{ から離れた } \tau \end{cases}$$

- フーリエ変換

$$\tilde{s}_t(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f \tau} s_t(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f \tau} s(\tau) h(\tau - t) d\tau$$

ウェーブレット変換

- 窓関数の時間幅の取り方を信号の形から変化させる
- マザーウェーブレット $\psi(t)$ の導入
→ $\psi(t)$ を拡大・縮小させて
信号の時間-周波数解析を行う

- ウェーブレット変換

$$(W_{\psi} f)(t, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \underbrace{\psi\left(\frac{\tau - t}{a}\right)^*}_{\text{基底}} d\tau$$