

分数阶 Poisson 过程性质及应用的探究

吴昆*

February 15, 2018

Abstract

推导了分数阶 Poisson 过程的分裂性和到达时刻的条件分布. 由于到达间隔时间期望为无限大, 使得我们无法很好刻画到达间隔时间的特征, 更导致更新过程或排队论应用中有直接的困难. 我们先利用 Fubini 定理推导分数阶矩, 以冀一窥其特征. 再将到达间隔时间概率密度进行截尾, 使其矩有限, 并用于排队论. 计算并仿真了 M/G/1 排队模型的平稳性质. 理论和仿真结果表明了截尾在现实中的可行性, 而且一阶矩和二阶矩表达式简洁, 可以立即应用于更新过程等其它模型. KeyWords— 分数阶 Poisson 过程, M/G/1 排队模型, 更新过程, 截尾, 矩

1 分数阶 Poisson 过程的基本性质探究

1.1 分数阶 Poisson 过程文献调研评注

1.1.1 复合分数阶 Poisson 过程的矩

分数阶 Poisson 过程及复合分数阶 Poisson 过程在 [1] 中已经研究得很详尽了. [7] 的 2.1 节及 2.2 节补充地给出了复数分数阶 Poisson 过程的概率密度和一阶矩和二阶矩, 且其二阶矩形式相比 [1](27) 更为规整.

将 [7] 复合分数阶 Poisson 过程的一阶矩二阶矩抄录如下,

*无 58 2015010625

记复合分数阶 Poisson 过程 $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, $\{X_i\}$ 为独立同分布随机变量且与 $N(t)$ 独立. 则,

$$E(Y(t)) = \frac{\mu t^\nu d_1}{\Gamma(\nu + 1)} \quad (1)$$

$$E(Y^2(t)) = \frac{\mu t^\nu d_2}{\Gamma(\nu + 1)} + \frac{2(\mu t^\nu)^2 d_1^2}{\Gamma(2\nu + 1)} \quad (2)$$

其中, $d_i = E(X_i^i)$, $i = 1, 2$.

显然标准分数阶 Poisson 过程是复合分数阶的特例. 特别地, (1)(2)中令 $d_1 = d_2 = 1$ 即得标准分数阶 Poisson 过程的一阶矩和二阶矩.

值得一提的是, [1](27) 须要对(2)稍作变换得到. [1](27) 形式为,

$$\bar{n}_\mu^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_\mu(n, t) = \bar{n}_\mu + \bar{n}_\mu^2 \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu + 1)}{2^{2\mu-1} \Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \quad (\text{equation (27) from [1]})$$

变换用到了 $\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$.

1.1.2 最后一次更新距观测点时长 U 的概率密度

[4] 研究了最后一次更新距观测点时长 U 的概率密度, 这是更新过程中的一个重要议题, 并且直接导致了更新过程的检视悖论 (inspection paradox).

记观测时刻为 t_1 . 记 $f_{U_{n_1}}$ 为 U 在观测时刻计数为 n_1 条件下的概率密度,

$$U_{n_1} := [T_{n_1} | N_\beta(t_1) = n_1] \quad (\text{equation (18) from [4]})$$

$$f_{U_{n_1}}(t) = \frac{f_\tau^{*n_1}(t)[1 - F_\tau(t_1 - t)]dt}{\int_0^{t_1} du f_\tau^{*n_1}(u)[1 - F_\tau(t_1 - u)]} \quad (\text{equation (20) from [4]})$$

$f_\tau(t)$ 是到达间隔时间概率密度, $F_\tau(t)$ 为到达间隔时间概率分布.

代入标准 Poisson 过程 $\mu = 1$, 此时 $f_\tau^{*n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}$ 满足 Erlang 分布, 推导 U 的概率密度 $f_U(t)$, 不出意外会推得指数分布.

Theorem 1.1. 强度为 λ 的标准 Poisson 过程中, 观测时刻为 t_1 . U 的概率密度在 $t \in [0^+, t_1]$ 中的表达式 $f_U(t) = \lambda e^{-\lambda(t_1-t)}$.

Proof. 代入(equation (20) from [4])得到,

$$f_{U_{n_1}}(t) = \frac{nt^{n_1-1}}{t_1^{n_1}} \quad (3)$$

进而

$$\begin{aligned} f_U(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t_1) = n) \cdot f_{u_n}(t) \\ &= \lambda e^{-\lambda(t_1-t)} \end{aligned} \quad (4)$$

□

Remark. 课上推导檢視悖论时,“标准 Poisson 过程的 $f_U(t)$ 同样满足指数分布”的性质起初让我们有些难以接受. 但是上面的论述证实了这一点,从而可以放心大胆地计算. 但这样的“证明”“舍近求远”,该结论的本质我猜测是由 CTRW(Continuous Time Random Walk) 模型和标准 Poisson 所对应的 Kolmogorov-Feller 方程的时间可逆性得到.

(equation (20) from [4])给出的条件概率密度 $f_{U_{n_1}}(t)$ 只适用于 $t \in [0^+, t_1]$. 在 $t < 0$ 或 $t > t_1$ 时, 显然 $f_{U_{n_1}}(t) = 0$. 因此, 由于概率密度的积分为 1, 完整的 $f_{U_{n_1}}(t)$ 表达式须增加一项 $C\delta(t)$. 当然对应地,(equation (20) from [4])所示加项要乘以一个时间区间指示函数. 课上讲过, 这个狄拉克函数项导致了檢視悖论.

1.1.3 事件到达间隔时间 $\{\tau_i\}$ 独立同分布

分数阶 Poisson 过程依然满足 $\{\tau_i\}$ 为独立同分布. 这是由 CTRW 模型和分数阶 Poisson 对应的 Kolmogorov-Feller 方程描述的就是这样的计数变化过程, 因此是分数阶 Poisson 过程的基本特性.

对于不满足独立增量和平稳增量的分数阶 Poisson 过程, 这个性质在推导时相当有用.

1.2 分数阶 Poisson 过程的非 Markov 性

对此有两点讨论.

- 1) 到达间隔时间概率密度 $\psi(t)$ 不满足指数分布, 因而有记忆. 但到达间隔时间相互独立.

- 2) $N(t)$ 不满足独立增量. 可以把 t 写成 $t = \sum_{i=1}^{N(t)} \tau_i + U$, 由于到达间隔时间有记忆, 最后一次到达 t 的时长 U 是导致 $N(t)$ 不满足独立增量的原因.

1.3 分数阶 Poisson 过程到达时间的条件分布

利用到达间隔时间 τ_i 相互独立来推导. 到达时刻 T_i 与到达间隔时刻 $\{\tau_i\}$ 满足 $T_k = \sum_{i=1}^k \tau_i$.

下面计算在 $N_\mu(t) = n$ 条件下, t 时刻前的 n 个到达时刻为 T_i 的概率.

$$\begin{aligned}
 & P(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_n = t_n | N_\mu(t) = n) \\
 &= \frac{P(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_n = t_n, T_{n+1} > t)}{P(N_\mu(t) = n)} \\
 &= \frac{P(\tau_1 = t_1, \tau_2 = t_2 - t_1, \dots, \tau_n = t_n - t_{n-1}, \tau_{n+1} > t - t_n)}{P(N_\mu(t) = n)} \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^n \nu \tau_i^{\mu-1} E_{\mu,\mu}(-\nu \tau_i^\mu) \int_{t-t_n}^{+\infty} \nu \tau_{n+1}^{\mu-1} E_{\mu,\mu}(-\nu \tau_{n+1}^\mu) d\tau_{n+1}}{P(N_\mu(t) = n)} \\
 &= \frac{n! \prod_{i=1}^n \tau_i^{\mu-1} E_{\mu,\mu}(-\nu \tau_i^\mu) \cdot E_\mu(-\nu(t-t_n)^\mu)}{(t^\mu)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \frac{(-\nu t^\mu)^k}{\Gamma(\mu(k+n)+1)}}
 \end{aligned} \tag{5}$$

以上分子中的积分运算用到了 [1] 的结论 $\int_{t-t_n}^{+\infty} \psi_\mu(\tau) d\tau = E_\mu(-\nu(t-t_n)^\mu)$. 没有有关 Mittag-Leffler 函数乘积的恒等式, 以上式子无法再被化简.

Remark. 上式中令 $\mu = 1$, 就得到了标准 Poisson 过程的条件分布.

$\mu < 1$ 时, “标准 Poisson 过程到达时间条件分布符合独立均匀分布的顺序统计量” 这样优秀的性质不再适用.

除此之外, 在打草稿的过程中, 我们还推出了以下等式:

$$\int_0^\tau E_{\mu,\mu}(-\nu \tau_i^\mu) \tau_i^{\mu-1} d\tau_i = \frac{1}{\nu} [1 - E_\mu(-\nu \tau^\mu)] \tag{6}$$

1.4 分数阶 Poisson 过程的和与分裂

我们知道, 标准 Poisson 过程的和依然是标准 Poisson 过程. 标准 Poisson 过程的分裂依然是标准 Poisson 过程: 对于标准复合 Poisson 过

程 $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ 中, 如果 X_i 为二项分布, 那么 $Y(t)$ 可以分解成两个独立的标准 Poisson 过程 $Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$, 他们的强度分别为 λp 和 $\lambda(1-p)$.

对于 $\mu < 1$ 的分数阶 Poisson 过程, 我们证明其和不为分数阶 Poisson 过程, 但复合分数阶 Poisson 过程依然满足分裂.

Theorem 1.2 (分数阶 Poisson 过程的分裂). 对于复合分数 $\mu \leq 1$ 阶 Poisson 过程 $Y(t) = \sum_{i=1}^{N_\mu(t)} Y_i$, 其强度为 ν , $\{Y_i\}$ 为独立同分布的 0-1 分布 $Y_i \sim b(1, p)$. 则代表 $Y_i = 1$ 到来的计数过程 $N_1(t)$ 和代表 $Y_i = 0$ 到来的计数过程 $N_2(t)$ 均为分数 μ 阶 Poisson 过程, 强度分别为 νp 和 $\nu(1-p)$.

Proof. 根据 [1](54), 复合分数阶 Poisson 过程的母函数

$$J_\mu(s, t) = E_\mu(\nu t^\mu (g(s) - 1)) \quad (7)$$

0-1 分布的 $g(s)$ 为

$$g(s) = pe^s + (1-p) \quad (8)$$

因此, $Y(t)$ 的母函数为

$$J_\mu(s, t) = E_\mu(\nu t^\mu p(e^s - 1)) \quad (9)$$

即 $N_1(t)$ 为 μ 阶, 强度 νp 的分数阶 Poisson 过程. 同理可证 $N_2(t)$ 为 μ 阶, 强度为 $\nu(1-p)$ 的分数阶 Poisson 过程. \square

Remark. 实际应用中, 满足分裂意味着对分数阶 Poisson 过程按照 0-1 分布进行随机采样, 得到的新过程依然是分数阶 Poisson 过程.

分裂性可以显然地推广至多分类, 即按照固定概率将每个到达事件分为 1 到 n 类, 每类事件的到达计数依然满足 μ 阶 Poisson 过程, 强度对应为 νp_i .

Theorem 1.3 (分数阶 Poisson 过程的和). $\mu < 1$ 的两个分数阶 Poisson 过程 $N_{\mu,1}(t), N_{\mu,2}(t)$ 的和 $N'(t)$ 不为分数阶 Poisson 过程 (或标准 Poisson 过程).

Proof.

$$\begin{aligned}
P(N'(t) = n) &= \sum_{j=0}^n P_{\mu,1}(j, t) \cdot P_{\mu,2}(n-j, t) \\
&= (vt^\mu)^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^\infty \frac{(k+j)!}{j!k!} \frac{(-vt^\mu)^k}{\Gamma(\mu(k+j)+1)} \sum_{k_2=0}^\infty \frac{(k_2+j)!}{j!k_2!} \frac{(-vt^\mu)^{k_2}}{\Gamma(\mu(k_2+j)+1)} \\
&= \sum_{j=0}^\infty \sum_{k=0}^j \frac{(v_1 t^\mu (e^{-s}-1))^k}{\Gamma(k\mu+1)} \frac{(v_2 t^\mu (e^{-s}-1))^{j-k}}{\Gamma((j-k)\mu+1)} \\
&\stackrel{?}{=} \sum_{j=0}^\infty \frac{(v' t^{\mu'} (e^{-s}-1))^j}{\Gamma(j\mu'+1)}
\end{aligned} \tag{10}$$

若 $N'(t)$ 为一分数阶 Poisson 过程, 则最后一个等号成立, 令 $t' = t^\mu$, 则 t^μ 各阶系数相等, 因此

$$\mu' = \mu \tag{11}$$

$$\Gamma(j\mu+1) = \Gamma(k\mu+1)\Gamma((j-k)\mu+1) \cdot \alpha^k, \alpha \text{ 为定值.} \tag{12}$$

但是, 由于当 $k=0$ 和 $k=j$ 时, 有 $\Gamma(j\mu+1) = \Gamma(k\mu+1)\Gamma((j-k)\mu+1) \cdot 1$, 因而 α 只能等于 1, 这显然是不对的, 因为在 $\mu < 1$ 时,

$$\Gamma(j\mu+1) \neq \Gamma(k\mu+1)\Gamma((j-k)\mu+1) \tag{13}$$

而 $\mu = 1$ 时, 上式恒等, 即标准 Poisson 过程的和依然为标准 Poisson 过程.

□

可以证明更强的结论:

Theorem 1.4 (分数阶 Poisson 过程到达间隔时间概率密度卷积 $\psi^{*2}(t)$). 两个分数阶 Poisson 过程求和得到的计数过程, 其到达间隔时间概率密度 $\psi'(t)$ 不再服从分数阶 Poisson 过程的到达间隔时间分布. 也就是说, 卷积 $\psi^{*2}(t)$ 不再服从分数阶 Poisson 过程到达间隔时间 $\psi(t)$ 的分布.

Proof. 我们知道, 对于同时开始的强度为 λ_1, λ_2 的两个标准 Poisson 过程的和, 可以如下计算在 t 时刻来了第一个事件的概率密度,

$$\psi'(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} = (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \tag{14}$$

它仍然满足标准 Poisson 过程, 且该到达的事件属于两个过程的概率分别为 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ 和 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$, 只与强度有关, 而与时刻 t 无关.

而对于分数阶 Poisson 过程, 采取同样的方法计算,

$$\psi'(t) = \nu_1 t^{\mu-1} E_{\mu,\mu}(-\nu_1 t^\mu) E_\mu(-\nu_2 t^\mu) + \nu_2 t^{\mu-1} E_{\mu,\mu}(-\nu_2 t^\mu) E_\mu(-\nu_1 t^\mu) \quad (15)$$

它是否可以写成 $\nu' t^{\mu-1} E_{\mu,\mu}(-\nu' t^\mu)$?

考察最简单的情形, 令 $\nu_1 = \nu_2$, 由于 $E_{\mu,\mu}(\cdot)E_\mu(\cdot)$ 无恒等式变成 $E_{\mu,\mu}(\cdot)$, 故不行.

可见其不符合分数阶 Poisson 过程到达间隔时间的形式. \square

Remark. 更有甚者, 该到达的事件属于两个过程的概率含时刻 t , 这意味着包含 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 的状态, 因此无法利用离散 Markov 链来研究事件到达时刻观测到的两个分数阶 Poisson 过程的和的状态集合 $\{X_i\}$.

1.5 分数阶 Poisson 过程的相关函数

[4] 研究了更新过程和分数阶 Poisson 过程的多元分布, 利用 $\{\tau_i\}$ 的独立性, 和 [4](23) 的剩余寿命概率密度 $f_{Y_{n_1}}(t)$, 可以推导分数阶 Poisson 过程的相关函数. 将 $f_{Y_{n_1}}(t)$ 中的观测时刻 t_1 设为 s .

$$\begin{aligned} E(N(s)N(t)) &= E(E(n \cdot N(t)|N(s) = n)) \\ &= E(n(\int_s^t f_{Y_{n_1},s}(\tau) \cdot (E(N(t-\tau)) + n)d\tau + \int_t^{+\infty} f_{Y_{n_1},s}(\tau) \cdot nd\tau)) \end{aligned} \quad (16)$$

1.6 过滤分数阶 Poisson 过程

由于分数阶 Poisson 过程的条件分布无法拆分成 n 个独立同分布的概率密度, 因此无法继续化简.

$$\begin{aligned} \phi_{Y(t)}(\omega) &= \int_0^t \int_0^{\tau_n} \cdots \int_0^{\tau_2} (E_{A_k}(\exp(j\omega \sum_{k=1}^n h(t, \tau_k, A_k)) | N(t) = n, \tau_1, \dots, \tau_n)) \cdot \\ &\quad \frac{n! \prod_{i=1}^n \tau_i^{\mu-1} E_{\mu,\mu}(-\nu \tau_i^\mu) \cdot E_\mu(-\nu(t - t_n)^\mu)}{(t^\mu)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \frac{(-\nu t^\mu)^k}{\Gamma(\mu(k+n)+1)}} d\tau_1 \cdots \tau_n \end{aligned} \quad (17)$$

2 分数阶 Poisson 过程的到达间隔时间

2.1 到达间隔时间 S 的矩

在研究排队论及更新过程中, 要首先分析出到达间隔时间的特征, 通常只关心其一阶矩和二阶矩. 将它们代入相应公式, 即可算出排队论及更新过程的相应性质.

我们知道, $\psi(t)$ 的 Laplace 变换函数 $F(s) = \frac{\nu}{\nu + s^\mu}$, 利用公式

$$E(S^n) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial s^n} F(s) \Big|_{s=0} \quad (18)$$

可以算得

$$E(S) = \frac{\nu}{(\nu + s^\mu)^2} \mu s^{\mu-1} \Big|_{s=0} = \infty \quad (19)$$

$$E(S^2) = \frac{2\nu}{(\nu + s^\mu)^3} \mu^2 s^{2\mu-2} - \frac{\nu}{(\nu + s^\mu)^2} \mu(\mu-1) s^{\mu-2} \Big|_{s=0} = \infty \quad (20)$$

我们还想求 $\frac{E(S^2)}{E(S)}$,

$$\frac{E(S^2)}{E(S)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{(\nu + s^\mu)} \mu s^{\mu-1} - (\mu-1) s^{-1} \right) \Big|_{s=0}} = 0 \quad (21)$$

2.2 到达间隔时间 S 分数阶矩的计算

矩是一个随机过程的重要性质. 由于 S 的一阶矩和高阶矩为无限大, 计算阶数小于 1 的期望, 或许为理解其性质带来一些帮助.

利用 Laplace 变换进行计算, 要用到来自 [15] 的结论, 先将该结论及其证明抄录如下:

Lemma 2.1 (分数阶矩的 Laplace 变换求解法). 对于 $\alpha > 0$, 记 $F(\theta) = \mathcal{L}\{\psi(t)\}$ 为 $\psi(t)$ 的 Laplace 变换, 则有 S 的 $s = n - \alpha$ 阶矩: $E(S^s) = (-1)^n \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty F^{(n)}(\theta) \theta^{\alpha-1} d\theta$

Proof. 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F^{(n)}(\theta) \theta^{\alpha-1} d\theta &= (-1)^n E \left(\int_0^\infty X^n e^{-\theta X} \theta^{\alpha-1} d\theta \right) \\ &= (-1)^n E(S^{n-\alpha}) \int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{-\theta} d\theta \end{aligned} \quad (22)$$

当 $\alpha > 0$, 等式右边积分收敛. \square

我们先试着求 $n = 1, 0 < s < 1$ 的正分数阶矩.

$$\begin{aligned}
 E(S^s) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty F'(\theta) \theta^{\alpha-1} d\theta \\
 &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{(-1)\mu\theta^{\mu-1}\nu}{(\nu + \theta^\mu)^2} \theta^{\alpha-1} d\theta \\
 &= \frac{\mu}{(\mu + \alpha - 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\nu}{(\nu + \theta^\mu)^2} d\theta^{\mu+\alpha-1}
 \end{aligned} \tag{23}$$

取 $\mu + \alpha - 1 = \frac{\mu}{k}$, 即 $\alpha = 1 - \frac{k-1}{k}\mu$, $s = \frac{k-1}{k}\mu$. 有

$$\begin{aligned}
 E(S^{\frac{k-1}{k}\mu}) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{k-1}{k}\mu)\frac{1}{k}} \int_0^{+\infty} \frac{\nu}{(\nu + u^k)^2} du \\
 &= \frac{\nu^{1/k}}{\nu\Gamma(1 - \frac{k-1}{k}\mu)\frac{1}{k}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + (\frac{u}{\nu^{1/k}})^k)^2} d\frac{u}{\nu^{1/k}} \\
 &= \frac{k}{\nu^{\frac{k-1}{k}}\Gamma(1 - \frac{k-1}{k}\mu)} \frac{k-1}{k^2} \pi \csc(\frac{\pi}{k}) \\
 &= \frac{1}{\nu^{\frac{k-1}{k}}\Gamma(1 - \frac{k-1}{k}\mu)} \frac{k-1}{k} \pi \csc(\frac{\pi}{k})
 \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $k \geq 2$ and $k \in \mathbb{Z}^+$.

此外, 计算负分数 $-\frac{\mu}{k}$ 阶矩, $k \in \mathbb{Z}^+$.

令 $n = 1$, 有

$$\begin{aligned}
 E(S^s) &= (-1) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^{\alpha-1} dF(\theta) \\
 &= (-1) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [\theta^{\alpha-1} F(\theta) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty F(\theta) d\theta^{\alpha-1}] \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty F(\theta) d\theta^{\alpha-1} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\nu}{\nu + \theta^\mu} d\theta^{\alpha-1}
 \end{aligned} \tag{25}$$

以上式子在 $\alpha < 1 + \mu$ 成立. 在 $\alpha = 1 + \mu$ 时, $\theta^\alpha F(\theta) \Big|_{\theta \rightarrow +\infty}$ 为非零有限值, 但这在的求解范围之外.

再令 $\alpha = \frac{\mu}{k}$, 有,

$$\begin{aligned} E(S^{-\frac{\mu}{k}}) &= \frac{\nu^{\frac{1}{k}}}{\Gamma(\frac{\mu}{k})} \int_0^\infty \frac{1}{1 + (\frac{\theta}{\nu^{\frac{1}{\mu}}})^\mu} d(\frac{\theta}{\nu^{\frac{1}{\mu}}})^{\frac{\mu}{k}} \\ &= \frac{\nu^{\frac{1}{k}}}{\Gamma(\frac{\mu}{k})} \frac{\pi}{k} \csc(\frac{\pi}{k}) \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $k \geq 2$ and $k \in \mathbb{Z}^+$.

$k = 1$ 时, $E(S^{-\mu}) = \infty$.

本节中的推导用到了

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^k)^2} du = \frac{k-1}{k^2} \pi \csc(\frac{\pi}{k}) \quad (27)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+u^k} du = \frac{\pi}{k} \csc(\frac{\pi}{k}) \quad (28)$$

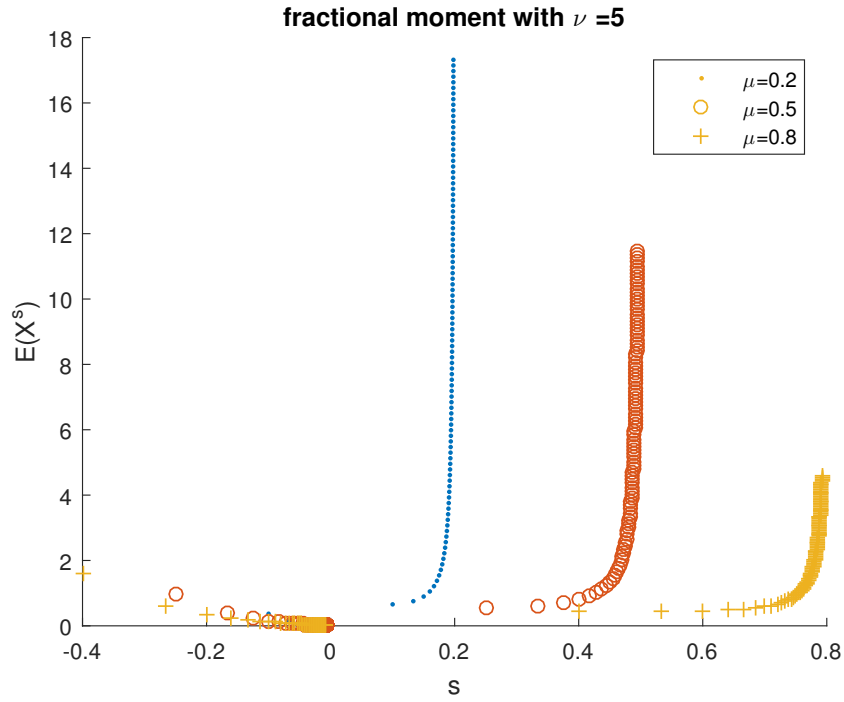
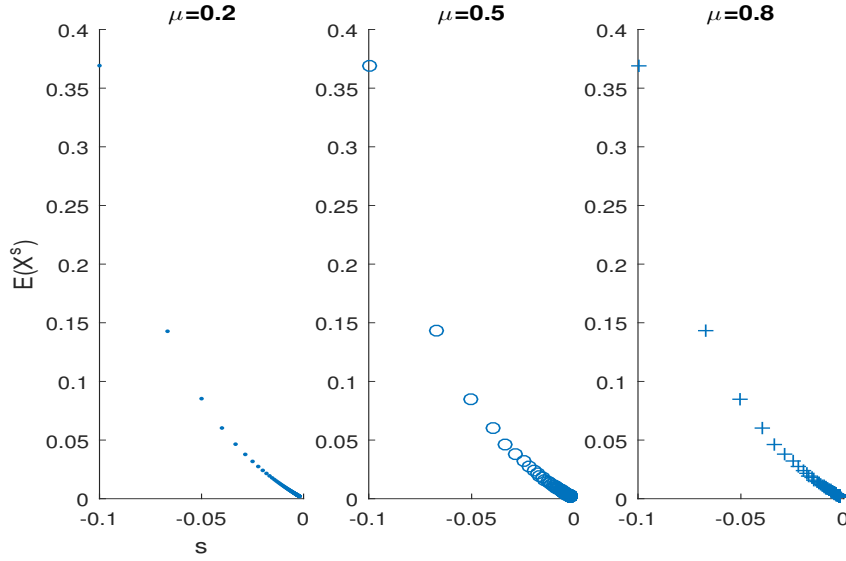


Figure 1: S 的 s 分数阶矩 $E(S^s)$

Figure 2: Figure 1 $s \in [-0.1, 0]$ 部分放大

由下节的渐进性质, 可知 $E(S^s)$ 在 $s \geq \mu$ 和 $s \leq \mu$ 均为 ∞ , Figure 1很好地体现了这一点, 正分数阶部分尤为明显.

2.3 到达间隔时间渐近性质

1. 在 $E(S) = \infty$ 时 Wald 等式依然成立, 可以得到如下渐近性质,

Theorem 2.2. 由 Wald 等式,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E(S)} = 0, \text{ with probability 1.} \quad (29)$$

2. 另一方面由于 $\mu = \infty$, 导致无法运用中心极限定理分析到达间隔时间概率密度 $\psi(t)$.
3. 在 [1] 中, 给出了在 $t \rightarrow 0$ 和 $t \rightarrow \infty$ 的幂率近似,

$$\psi(t) \simeq \begin{cases} 1/\nu t^{\mu+1}, & t \rightarrow +\infty \\ \nu t^{\mu-1}, & t \rightarrow 0 \end{cases}$$

(分数阶 Poisson 到达间隔时间概率密度幂率近似)

2.4 对排队论和更新过程的影响

由于分数阶 Poisson 过程到达间隔时间一阶矩为无限大, 导致 $N_\mu(t)$ 作为更新过程和以 $\Psi(t)$ 作为 G 分布的排队模型意义不大. 比如, 对于 G/M/1 系统, 到来 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_a(t)}{t} = 0$, 而离开 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_d(t)}{t} = \lambda$, 那么研究稳态情形显然没有什么信息量.

事实上, [12][13][14] 等文献研究了到达间隔时间概率密度满足幂率 $t \rightarrow +\infty, 1 - \Psi(t) \sim L(t)1/t^{-a}, 1 < a \leq 2$ 的排队系统, 此时 $\psi(t)$ 一阶矩有限而高阶矩为无限大. 而分数阶 Poisson 过程的一阶矩也为无限大. 这点可由 equation (分数阶 Poisson 到达间隔时间概率密度幂率近似) 在 $t \rightarrow \infty$ 的幂率近似直接看出, 相当漂亮.

在这样不利的条件下, 我们能否构造出或者推出一些有意义的模型和结论呢?

3 M/G/1 排队模型与截尾到达间隔时间

排队模型是电子信息科学中受到广泛应用的模型, 如分析 ALOHA, CDMA 的信道利用率和碰撞率, 就运用了排队论.

3.1 M/G/1 排队模型

以顾客为例. M/G/1 排队模型是指一条服务线, 顾客的到达间隔时间服从指数分布, 而服务时间符合一般分布 G.

如果在顾客离开时刻观测处在排队的人数 N , 则 N 为参数的状态集合 $\{N_i\}$ 满足 Markov. 这种分析方法称作嵌入 Markov 链 [16]. 之所以 $\{N_i\}$ 满足 Markov 性, 是因为顾客到达无记忆. 又由于处在排队的人数 N 足以描述该系统, 因此就研究 $\{N_i\}$.

研究分数阶 Poisson 过程在 M/G/1 排队系统中的应用, 由于分数阶 Poisson 的到达间隔时间的一阶矩 $E(S)$ 为无限大, 不满足 M/G/1 的 $\lambda E(S) < 1$ 的要求. 因此须要对 G 做某种操作.

我们使用一个截尾的服务时间概率密度 $\psi'(t)$ (见下一节), 也就是将服务时间限制在 $[0, T]$ 区间内. 它的现实意义是, 当服务时间超过一定时长, 直

接放弃转而服务下一个, 这在现实中可以理解为系统死机/放弃消耗时间已超过正常阈值的请求等, 具有现实意义.

本章的工作有两点启示, 其一是使用截尾/超时来处理服务时间概率密度, 解决一阶矩 (和二阶矩) 为无限大的问题, 其二是含含有 δ 函数的截尾分布的式子计算.

下一章探讨计算机仿真办法及结果.

3.2 有关 M/G/1 系统抄录的式子

记 S 为服务时间, 下同.

[10] 总结了 M/G/1 系统的平均性质公式,

1. 给定顾客在队列中等待的时间由 Pollaczek-Khintchine 公式给出,

$$W_Q = \frac{\lambda E(S^2)}{2(1 - \lambda E(S))} \quad (\text{Pollaczek-Khintchine formula})$$

2. 队列中平均顾客数为到达强度 λ 与顾客的平均停留时间 W 乘积,

$$L = \lambda W = \lambda(W_Q + E(S)) = \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1 - \lambda E(S))} + \lambda E(S) \quad (30)$$

为了使得这些量有限, 须要满足 $\lambda E(S) < 1$, 即离开率 $1/E(S)$ 小于到达率 λ .

Remark. $L = \lambda W$ 用到了 Little 定理.

上述两个量为到达者观察到的结果.

3. 引入忙期 (系统中至少有一个顾客, 服务线忙) 和闲期 (系统中没有顾客) 概念. 记 I 和 B 分别为闲期和忙期的长度, C 为一个忙期中服务过的顾客数 C . 则

$$E(I) = \frac{1}{\lambda} \quad (31)$$

$$E(B) = \frac{E(S)}{1 - \lambda E(S)} \quad (32)$$

$$E(C) = \frac{1}{1 - \lambda E(S)} \quad (33)$$

[16] 推导出了 M/G/1 系统平稳分布 (equilibrium distribution) 的母函数,

$$G_N(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{S^*((1-z)\lambda) - z} \cdot S^*((1-z)\lambda) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1 - z/S^*((1-z)\lambda)} \quad (\text{eq:ed})$$

$S^*(u)$ 为服务时间的 Laplace 变换.

以及逗留时间 (sojourn time) 和 N 母函数的关系.

$$G_N(z) = T^*((1-z)\lambda) \quad (34)$$

可见, 为了得到 M/G/1 平稳分布, 以及其他队列的平均性质, 关键是求得 G 分布对应的服务时间 S 的一阶矩和二阶矩.

3.3 截尾到达间隔时间概率密度 $\psi_T(t)$ 与超时率 P_{TD}

将分数阶 Poisson 过程的到达间隔时间概率密度 $\psi(t)$ 在 T 时刻进行截尾, 得到 $\psi_T(t)$, 即令

$$\psi_T(t) = \psi(t) \cdot I(t, 0, T) + (1 - \int_0^T \psi(t) dt) \delta(t - T) \quad (35)$$

其中

$$I(t, 0, T) = \begin{cases} 1, 0 \leq t \leq T \\ 0, \text{otherwise} \end{cases} \quad (36)$$

对应地, 引入超时率 P_{TD} 概念.

$$P_{TD} = 1 - \int_0^T \psi(t) dt \quad (37)$$

P_{TD} 表示被截断的概率, 即服务超时未完成而放弃 (如丢包, 死机等) 的概率.

3.4 截尾到达间隔时间 S_T 的矩

先求 $\psi_T(t)$ 的 Laplace 变换 $F_T(s)$.

$$\begin{aligned}
 F_T(s) &= \mathcal{L}\{\psi_T(t)\} \\
 &= \int_0^T e^{-s\tau} \psi(\tau) d\tau + e^{-sT} (1 - \int_0^T \psi(\tau) d\tau) \\
 &= \int_0^T e^{-s\tau} d[-E_\mu(-v\tau^\mu)] + e^{-sT} E_\mu(-vT^\mu) \\
 &= -e^{-s\tau} E_\mu(-v\tau^\mu) \Big|_0^T + \int_0^T E_\mu(-v\tau^\mu) d e^{-s\tau} + e^{-sT} E_\mu(-vT^\mu) \\
 &= \int_0^T E_\mu(-v\tau^\mu) d e^{-s\tau}
 \end{aligned} \tag{38}$$

则 n 阶矩可以如下计算,

$$E(S_T^n) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial s^n} F_T(s) \Big|_{s=0} \tag{39}$$

则一阶矩和二阶矩为,

$$E(S_T) = (-1) \frac{\partial}{\partial s} F_T(s) \Big|_{s=0} = \int_0^T E_\mu(-v\tau^\mu) d\tau \tag{40}$$

$$E(S_T^2) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} F_T(s) \Big|_{s=0} = 2 \int_0^T \tau E_\mu(-v\tau^\mu) d\tau \tag{41}$$

这里用到了 $\frac{\partial^2}{\partial s^2} e^{-s\tau} = \tau^2 e^{-s\tau}$.

3.5 $E(S_T), E(S_T^2), P_{TD}$ 随 T 变化图线

我们作图出不同 μ 下的一阶矩和二阶矩随 T 的变化, 作为比较, 同时单独作出了 $\mu = 1$ 的情形.

同时, 作出超时率 $P_{TD} \sim T$, $\mu = 1$ 情形只在放大图中出现.

由于 $\mu = 1$ 时矩和超时率上升/下降过快, 覆盖其他图线, 因此作了如上所述的处理.

上述图一律取 $v = 5$.

可以看到, 超时率在 $T = 0$ 附近有一个陡降. 在 $T = 5$ 时, $\mu = 0.8$ 及 $\mu = 0.5$ 的超时率已经分别降到了 1.29% 和 5.03%, 而 $\mu = 0.2$ 也降到了

11.17. 在 $T = 9.4$, $\mu = 0.2$ 的超时率跌破 10%(精度 0.1), 到达 9.99%. 而此时三者的一阶矩均在 1 以内. $\mu = 0.8$, $\mu = 0.5$, 在 $T = 5$ 时一阶矩分别为 0.4666, 0.6756, 即离开强度为 2.1432, 1.4808. 对于 $\nu = 5$ 来说, 10% 的丢包率和 2 左右的离开强度尚能接受. 而 $\mu = 0.2$ 的情况要相对糟糕一些.

总的来说, μ 越小情况越糟糕. 对于 $\mu \geq 0.5$ 的情况, 截尾的处理办法是可以接受的.

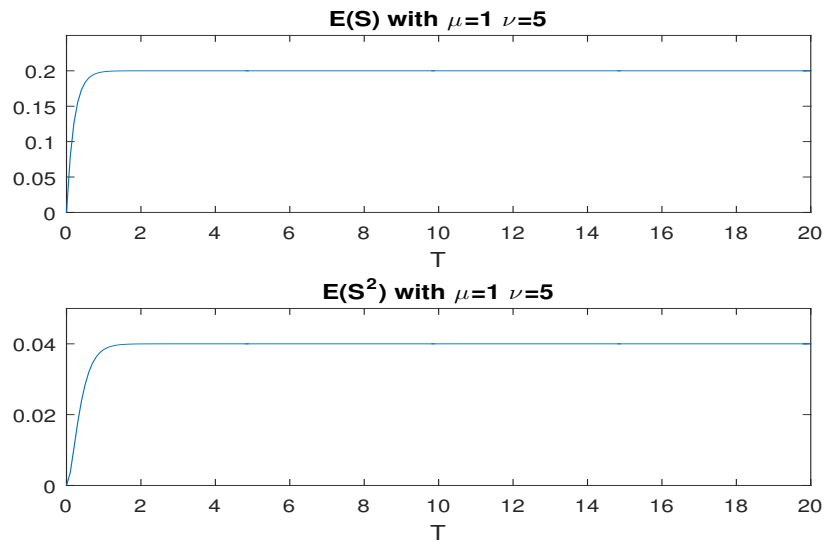
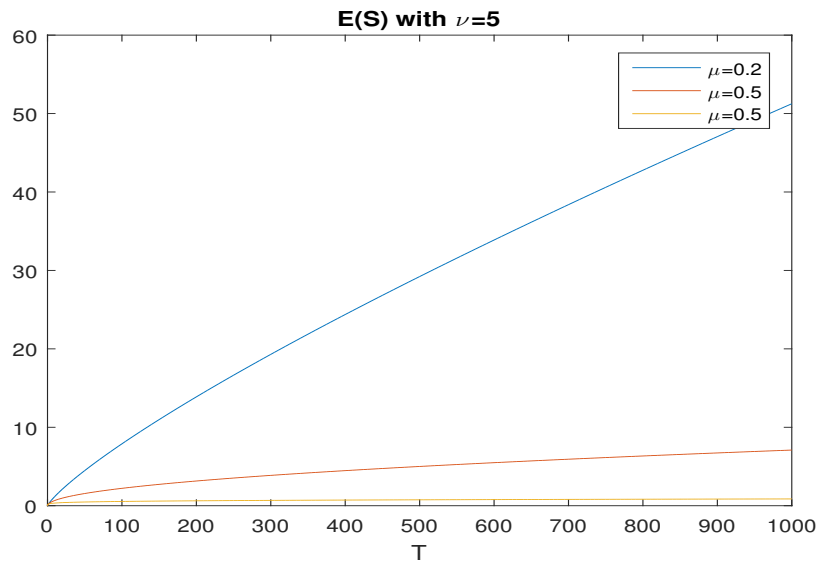
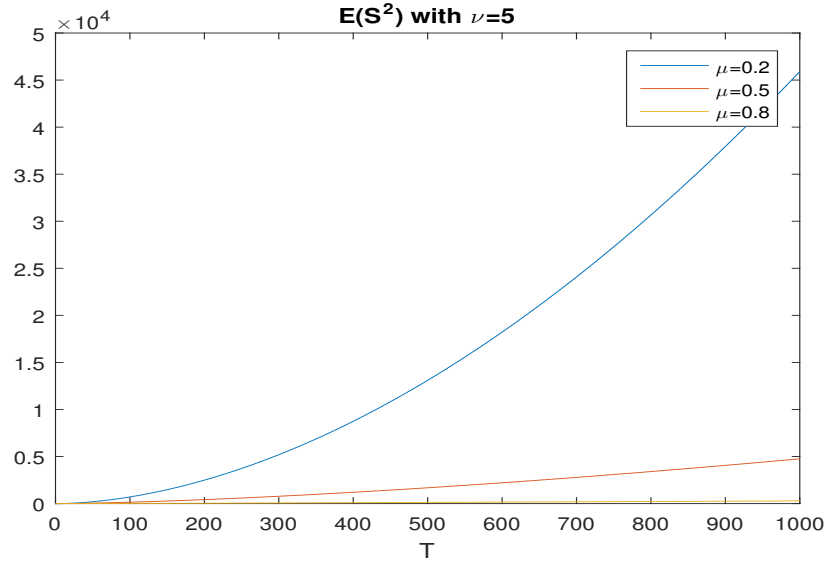
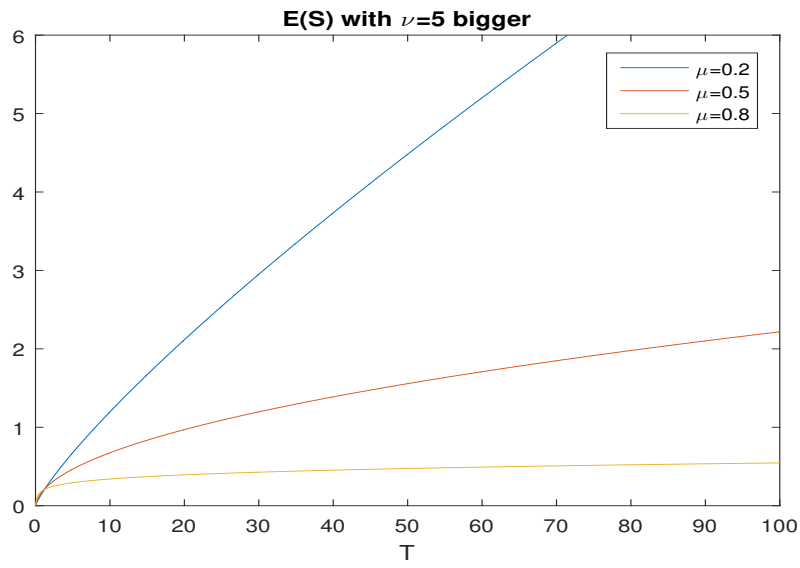
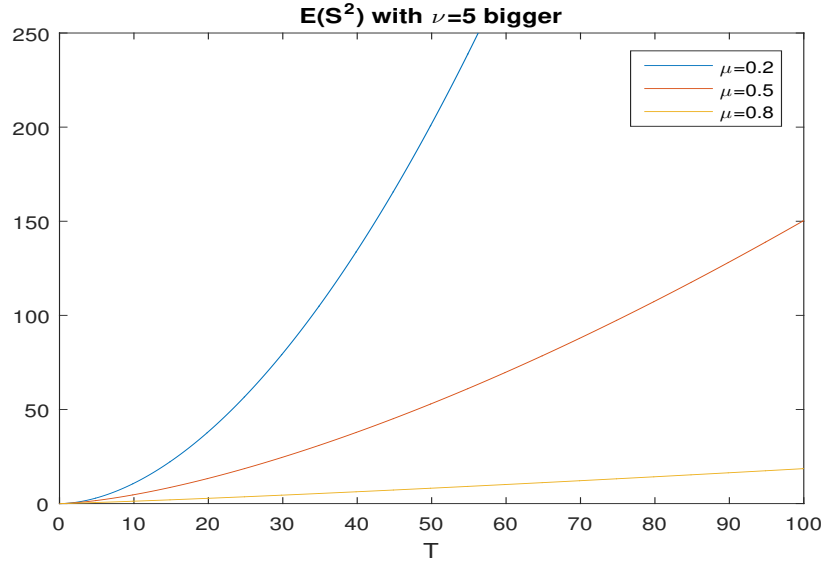
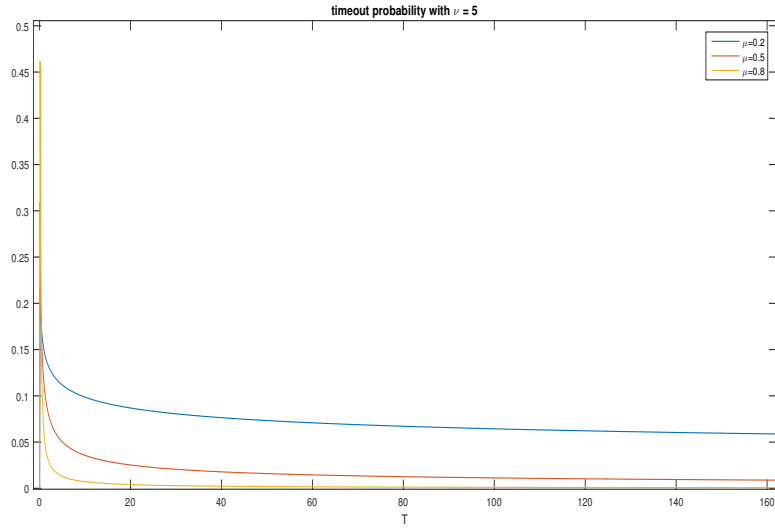
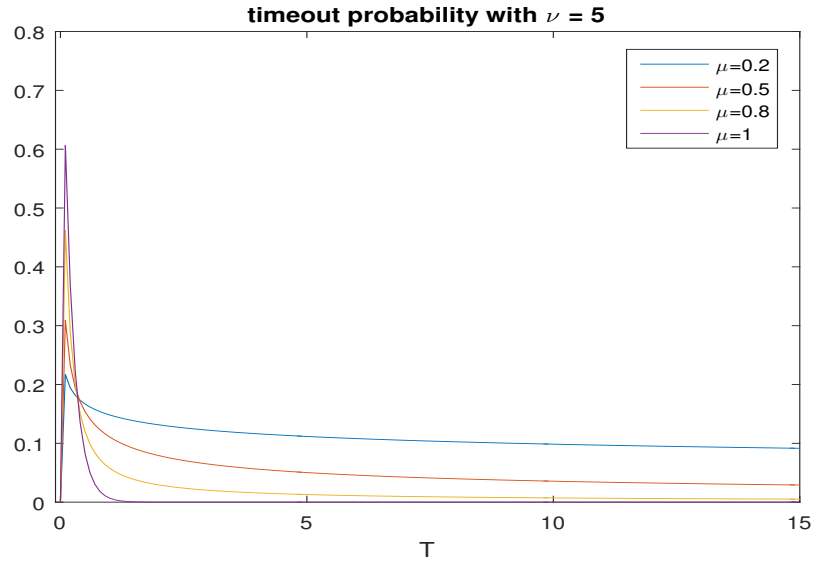


Figure 3: $\mu = 1$ 时的 $E(S_T)$ 和 $E(S^2)$ 随截尾时刻 T 的变化

Figure 4: 不同 μ 下 $E(S_T)$ 随截尾时刻 T 的变化Figure 5: 不同 μ 下 $E(S_T^2)$ 随截尾时刻 T 的变化

Figure 6: Figure 4 $T \in [0, 100]$ 局部放大Figure 7: Figure 5 $T \in [0, 100]$ 局部放大

Figure 8: 超时率 P_{TD} 随 T 变化Figure 9: Figure 8 $T \in [0, 16]$ 局部放大

4 计算机仿真 M/Ψ_T/1 排队模型

4.1 截尾服务时间 S_T 随机变量的生成

使用计算机仿真该排队系统, 第一步准备是生成符合分布的服务时间 S 随机变量. 在计算机数值系统中, 最基本, 最常见的是均匀分布的随机变量. 因此, 我们要用均匀随机变量, 生成符合分数阶 Poisson 过程的等待间隔时间概率密度 $\psi(t)$ 的随机变量 S . [8] 给出了生成方法,

Lemma 4.1 (用三个均匀随机变量生成随机变量 S).

$$T := \frac{|\ln U_1|^{1/\nu}}{\mu^{1/\nu}} \frac{\sin(\nu\pi U_2) [\sin((1-\nu)\pi U_2)]^{1/\nu-1}}{[\sin(\pi U_2)]^{1/\nu} \|^{1/\nu-1}} \quad ((3.7) \text{ from [8]})$$

其中, U_1, U_2, U_3 独立同分布, $X_i \sim U[0, 1]$.

显然, 把生成的 S 过一个限幅器即可得到所需的截尾服务时间随机变量 S_T .

4.2 排队模型仿真算法

M/G/1 的再生点为顾客服务完离开, 仿真再生点的情形使得仿真算法相当简单. 算法如下,

N 为当前系统人数. t 为当前时间. ST 为随机变量截尾服务时间. ta 为随机变量下一个顾客到达所需时间. nc 为随机变量服务时间完进入顾客数量.

```

1 while 1
2     if N==0 %闲置, 顾客到来立即开始服务
3         以lambda为参数, 生成指数分布随机变量ta;
4         T=T+ta;
5     else
6         随机生成ST;
7         N=N-1;
8         T=T+S_T;
9         以lambda*ST为参数, 生成泊松分布随机变量nc.
10        N=N+nc.

```

Listing 1: 排队系统仿真伪代码

Remark. 这里有一个细节问题须要注意, 当最后一个顾客服务完 (t_1) $N=0$ 后在服务时间里没有新的顾客来, 排队系统会闲置, 下一个顾客来 (t_2) 系统会立即进行服务. 这种情形需要单独讨论. 算法中处理比较简单, 在顾客服务完条件判断一下生成的随机.

这会导致构建 Markov 模型有小小的麻烦, 但是不影响最后平稳分布的结果.

4.3 仿真结果

对 $\nu = 5, \mu = 0.5, T=5$ 时的情形进行仿真. 由(37)(40)(41)计算得到

Table 1: $\nu = 5, \mu = 0.5, T=5$

$E(S)$	$E(S^2)$	$1/E(S)$	P_{TD}
0.466637031400487	0.832431327732974	2.142993231803241	0.0503

分别取 $\lambda = 2.0, \lambda = 2.1, \lambda = 2.2$, 每次做十遍仿真.

我们发现, 在 $\lambda = 2.1$ 和 $\lambda = 2.0$ 时仿真结果的超时率和平均队长和理论计算相吻合.

在 $\lambda = 2.2$ 时理论计算 $\lambda E(S) > 1$, 从 Figure 12中可以直观地看出系统中顾客数量一直在增长, 无法收敛到平稳分布.

Table 2: $\lambda = 2$ 仿真结果

名称	Exp. No.1	2	3	4	5
avg Queue Length	43.5063	42.1694	36.2571	70.6925	41.6948
Timeout Ratio	0.0506	0.0501	0.0497	0.0510	0.0501
6	7	8	9	10	十次平均值
40.3805	48.3466	39.4688	41.0774	46.9206	avg45.0514
0.0495	0.0514	0.0503	0.0501	0.0498	avg 0.0502

Table 3: $\lambda = 2.1$ 仿真结果					
名称	Exp. No.1	2	3	4	5
avg Queue Length	383.1234	68.2720	201.3576	188.3571	164.2789
Timeout Ratio	0.0515	0.0478	0.0506	0.0503	0.0509
6	7	8	9	10	十次平均值
203.9802	205.4271	117.8312	202.4387	140.8080	avg 187.5874
0.0510	0.0506	0.0493	0.0494	0.0498	avg 0.0501

5 结论与展望

我们首先尝试平行推广标准 Poisson 过程的结果, 推导出分式 Poisson 过程具分裂性, 及其到达时刻的条件分布. 由于分数阶 Poisson 不具备独立增量, 平稳增量的性质, 我们能依靠的几乎就是 $\{\tau_i\}$ 独立同分布. 加上结果中的 Mittag-Leffler 函数, 使得分数阶 Poisson 不具备“到达时刻的条件分布独立同分布顺序统计量”等等优秀的性质, 从而实际应用中的计算往往不能避免多重积分.

由于更新过程和排队论均极其依赖到达间隔时间的一阶矩和二阶矩, 我们研究了分数阶 Poisson 过程的一阶矩和二阶矩, 发现均为无限大. 我们利用 Fubini 定理推导了分数阶矩, 或许可以揭示一部分其性质. 此外还探讨了其渐近性质.

我们将到达间隔时间概率密度截尾, 从而使其一阶矩和二阶矩为有限. 并应用于 M/G/1 模型. 截尾在现实中有其对应, 且具体数值计算验证了其可行性. 计算机仿真结果验证了理论计算.

对于同样依赖一阶矩和二阶矩的更新过程, 截尾服务时间的一阶矩和二阶矩推导结果可以立即应用, 从而研究其在更新过程的性质.

截尾的方法或许对研究有同样毛病的分布有借鉴意义.

未来工作有:

1. 研究 Mittag-Leffler 函数性质, 及近似表达式. 在近似条件下, 化简结果, 得到分数阶 Poisson 过程好的性质.

2. 进一步推导 $M/\Psi_T/1$ 排队模型性质, 如根据母函数计算平衡分布等. 并推广至 $M/G/1$ 排队模型变种.
3. 将截尾服务时间分布应用至更新过程, 推导性质.

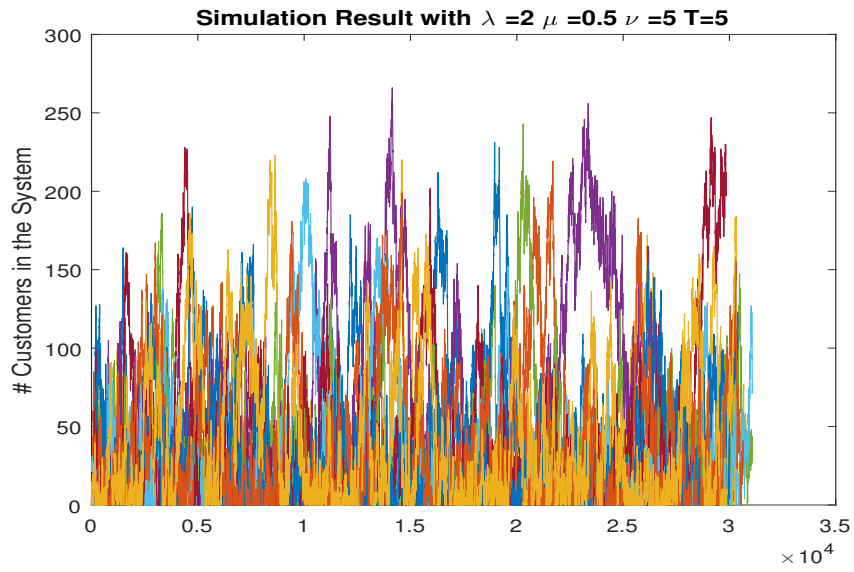
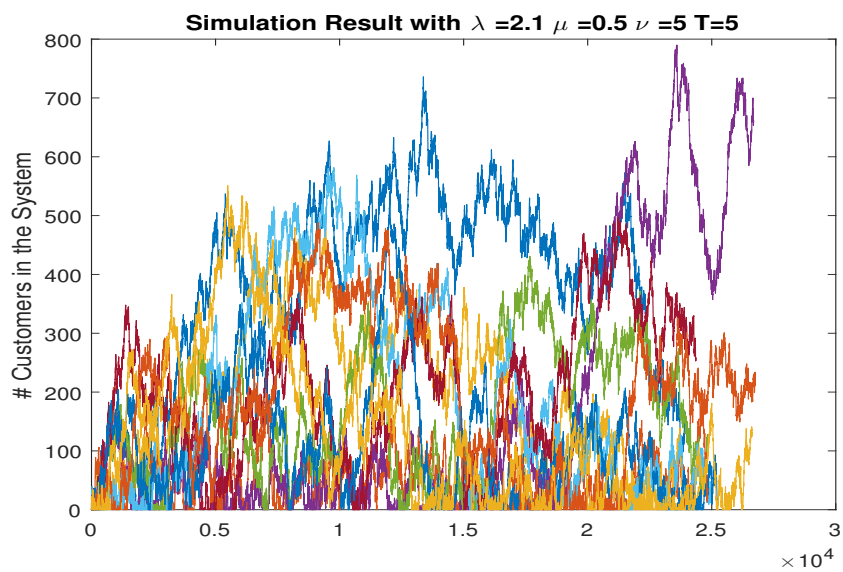
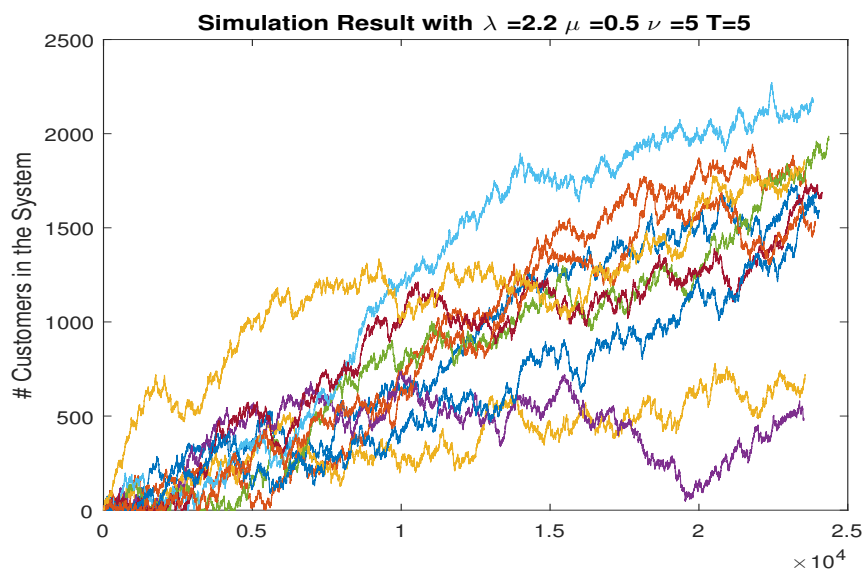


Figure 10: $\lambda = 2.0$ 系统中顾客数随时间变化

Figure 11: $\lambda = 2.1$ 系统中顾客数随时间变化Figure 12: $\lambda = 2.2$ 系统中顾客数随时间变化

References

- [1] Nick Laskin. Fractional Poisson Process[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 8 (2003) 201-213.
- [2] Nick Laskin. Some Applications of the Fractional Poisson Probability Distribution[J]. Journal of Mathematical Physics, 2009, 50(11):201-227
- [3] Nikolai Leonenko, Enrico Scalas and Mailan Trinh. The Fractional Non-homogeneous Poisson Process[J]. Statistics and Probability Letters, 2016.
- [4] Mauro Politi and Taisei Kaizoji. Full Characterization of the Fractional Poisson Process[J]. Europhysics Letters, 2011, 96(2).
- [5] 陆大彥, 金, 张灏. 随机过程及其应用 [M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2011.
- [6] 陆大彥, 金. 随机过程及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1984.
- [7] 王颖. 复合分数阶泊松过程的参数估计及应用 [D]. 吉林大学: 吉林大学数学研究所, 2015.
- [8] Dexter Odchigie. Fractional Poisson Process in terms of Alpha-stable Densities[D]. Case Western Reserve University: Department of Statistics, 2007.
- [9] Rudolf Gorenflo and Francesco Mainardi. Laplace-Laplace Analysis of the Fractional Poisson Process[J]. Mathematics, 2013.
- [10] Sheldon M. Ross. Introduction to Probability Models[M]. 11th edition. 龚光鲁译. 北京: 人民邮电出版社, 2016.
- [11] Robert G. Gallager. Stochastic Processes: Theory for Applications[M]. Cambridge University Press, 2014. <http://www.rle.mit.edu/rgallager/documents/Renewal.pdf>
- [12] Matthew Roughan, Darryl Veitch and Michael Rumsewicz. Computing Queue-Length Distributions for Power-Law Queues[J]. Infocom, 1998.

- [13] A. Saichev and D. Sornette. Effects of Diversity and Procrastination in Priority Queuing Theory: the Different Power Law Regimes[J]. Physical Review, 2010, 81(1).
- [14] Vladimir N. Zadorozhnyi and Tatiana R. Zakharenkova. Minimization of Packet Loss Probability in Network with Fractal Traffic[J]. ITMM, 2017.
- [15] Jeff Schenker. Laplace transform and fractional moments[Z]. <https://mathoverflow.net/questions/5525/laplace-transform-and-fractional-moments>
- [16] J. Virtamo. Queueing Theory: M/G/1-queue[Z]. https://www.netlab.tkk.fi/opetus/s383143/kalvot/E_mgljono.pdf