

## 数字信号处理大作业报告:

### 谐波恢复

吴昆 无 58 2015010625

2017 年 12 月

*And there is heard no more; it is a tale*

*Told by an idiot, full of sound and fury,*

*Signifying nothing.*

—*Macbeth* by Shakespeare

## 目 录

一、研究问题.....	3
二、研究假设.....	3
三、Pisarenko 谐波分解方法.....	3
四、对 $r_s(m)$ 估计值的讨论.....	5
五、DFT 性能分析.....	7
六、仿真实验.....	8
七、分析与讨论.....	14
八、参考文献.....	15

## 一、研究问题

谐波恢复。对于采样信号  $s[n] = \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j\omega_k n} + v[n]$ ，其中  $\alpha_k$  和  $\omega_k$  是第  $k$  个谐波的复数幅度和频率， $v[n]$  是噪声。用尽可能少的采样数，尽可能精确地恢复出  $\omega_k$ ，这里的精确是指分辨力高和精度高。

将算法与 DFT 的结果进行比较。

## 二、研究假设

1. 均匀采样。即离散与模拟信号的对应关系： $s[n] = \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j(\omega_k n + \varphi_k)} + v[n] = \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j(\Omega_k n T_s + \varphi_k)} + v(n T_s)$ 。其中  $\Omega_k T_s = \omega_k$ 。为了统一，我们令  $\omega_k \in [0, 2\pi]$ 。

2.  $v[n]$  是高斯白噪声。这是通信中研究复信号的常见假设，意味着噪声的功率不随频率而变化，且不同时间独立同分布。使得问题得到简化。

3.  $s[n]$  是一个宽平稳随机过程。由于已经假设  $v[n]$  是高斯白噪声，这一点在通常情况下是成立的。

## 三、Pisarenko 谐波分解方法

Pisarenko 谐波分解法利用信号的相关矩阵进行分析，适用于无色噪声。

记谐波数量为  $H$ ，那么离散信号  $s[n]$  可以表示为

$$s[n] = x[n] + w[n] = \sum_{k=1}^H \alpha_k e^{j(\omega_k n T_s + \varphi_k)} + w(n T_s)$$

它是宽平稳的，那么我们有

$$r_s(n, n+m) = r_s(m)$$

然而现实中，我们只收到了一段这样的信号，是确定性的。对于自相关  $r_s(m)$ （二阶期望），我们可以用时域的采样来计算这一期望值，这只需要  $\varphi_k$  是均匀分布的随机变量即可。

但是我们采样数有限，并且在估计谐波采样数情形这一数量是非常少的，我们记作  $N$ 。此时，我们对  $r_s(m)$  的估计值为：

$$\hat{r}_s(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-1-m} s[n] s^*[n+m]$$

由自相关函数  $r_s(m)$ ，我们构建维数为  $(p+1) \times (p+1)$  的自相关矩阵  $R_{p+1}$ ：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{p+1} &= \begin{bmatrix} r_s(0) & r_s(1) & \cdots & r_s(p) \\ r_s(-1) & r_s(0) & \cdots & r_s(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_s(-p) & r_s(-p+1) & \cdots & r_s(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_s(0) & r_s(1) & \cdots & r_s(p) \\ r_s^*(1) & r_s(0) & \cdots & r_s(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_s^*(p) & r_s^*(p-1) & \cdots & r_s(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

在信号长度无限的情况下，我们有

$$r_s(m) = \sum_{k=1}^H \alpha_k e^{j\omega_k m} + P_w \delta(m).$$

其中 $P_w$ 是复高斯白噪声的总功率。

尽管在信号长度无限的情况下的 $r_s(m)$ 让我们想到了对 $\mathbf{R}_{p+1}$ 特征值分解，但是它存在采样数过少的问题：我们令 $p=H$ ，这样理想状况下将解得 $H$ 个谐波的向量表示（基矢/特征矩阵为正交的 $e^{j\omega n}$ ），和一个噪声基底。但是它只使用了 $r_s(0)$ 到 $r_s(p)$ 这 $p+1$ 个值，而下面的最小二乘法则使用了 $N-(H+1)$ 个值，利用的信息更多。

我们依据张贤达老师的讲义，拓展成复信号的情形：

注意到对于单谐波信号 $x[n] = e^{j\omega n + \varphi}$ ，其根为 $z = e^{-j\omega}$ 。对于 $H$ 个信号累加，其特征方程是

$$\prod_{i=1}^H (z - z_i) = \sum_{i=0}^H a_i z^{-i} = 0.$$

因此我们有，

$$\sum_{i=0}^H a_i x[n-i] = 0.$$

两边同时乘以 $x(n+m)$ 后求期望，得到

$$E \left\{ x[n+m] \sum_{i=0}^H a_i x[n-i] \right\} = 0.$$

即

$$\sum_{i=0}^H a_i R_x[m-i] = 0$$

而 $R_s[n] = R_x[n] + P_w \delta[n]$

因此，

$$\sum_{i=0}^H a_i R_s[m-i] = \sum_{i=0}^H a_i P_w \delta[m-i]$$

取  $m > H$ ，有

$$\sum_{i=0}^H a_i R_s[m-i] = \sum_{i=0}^H a_i P_w \delta[m-i] \equiv 0$$

这消除了建模高斯噪声的麻烦和误差。

我们接下来可以构建方程组，从  $s[H+1]-s[2H+1]$ ，逐一到  $s[N-1-H]-s[N-1]$  代入上式。由最小二乘法解得根  $\{z\}$ ，即  $\{e^{j\omega}\}$ 。

在复数域， $Ax = b$  的最小二乘法解为

$$\hat{x} = (A^* A)^{-1} A^* b$$

其中  $A^*$  为共轭转置。

解得  $z$  即可得到各频率，频率数量由指定的  $H$  决定，我们尝试性地使用最小二乘法恢复各振幅：

构建旋转矩阵  $U = [u_1 \ \cdots \ u_n]$ ，其中  $u_k = [1 \ e^{j\omega_k} \ \cdots \ e^{j\omega_k n} \ \cdots \ e^{j\omega_k N}]$ 。则有

$$UA = S$$

$A$  和  $S$  分别为复振幅和信号向量，均为列向量。然后由上述最小二乘法公式即可解得  $A$ 。

#### 四、对 $r_s(m)$ 估计值的讨论

在无限情形下，若  $s[n]$  满足遍历，那么  $u(n)u^*(n+m)$  时域的平均值就是  $r_s(m)$ 。

$$r_s(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^N \sum_{k=1}^H A_k e^{j(\omega_k n T_s + \varphi_n)} + w(n T_s) \sum_{k=l}^H A_k^* e^{-j(\omega_l(n+m) T_s + \varphi_n)} + w^*((n+m) T_s)$$

在  $N$  极度有限的情况下，一个是  $w(n T_s)$  的乘积累加与  $P_w \delta(m)$  出现偏差，二是上式中不同频率相乘的交叉项无法完全消去。在本实验的  $r_s(m)$  的估计中， $m$  越小，样本数量越多（ $N-m$  个样本对），而大的  $m$  的自相关函数  $r_s(m)$  估计值可能偏差非常大。

我们有两个角度去思考解决这个问题。第一，类似于大数定律，随着取平均的观测值增多，统计特性会趋近于单个随机变量的统计特性，会呈现出概率分布逐渐向中心位置“收紧”，因此我们可以解析地推导<sup>1</sup>出低观测数时的概率分布，或者观测估计其概率分布情况，随后做

---

<sup>1</sup> 是张灏老师说的

判决丢掉或者加低权重。其中解析推导或估计我们不会。另一种，改无偏统计为有偏统计，也就是相关函数估值公式的分母由  $N-m$  改为  $N$ ，我们通过仿真，发现这大大提高了算法的成功率。

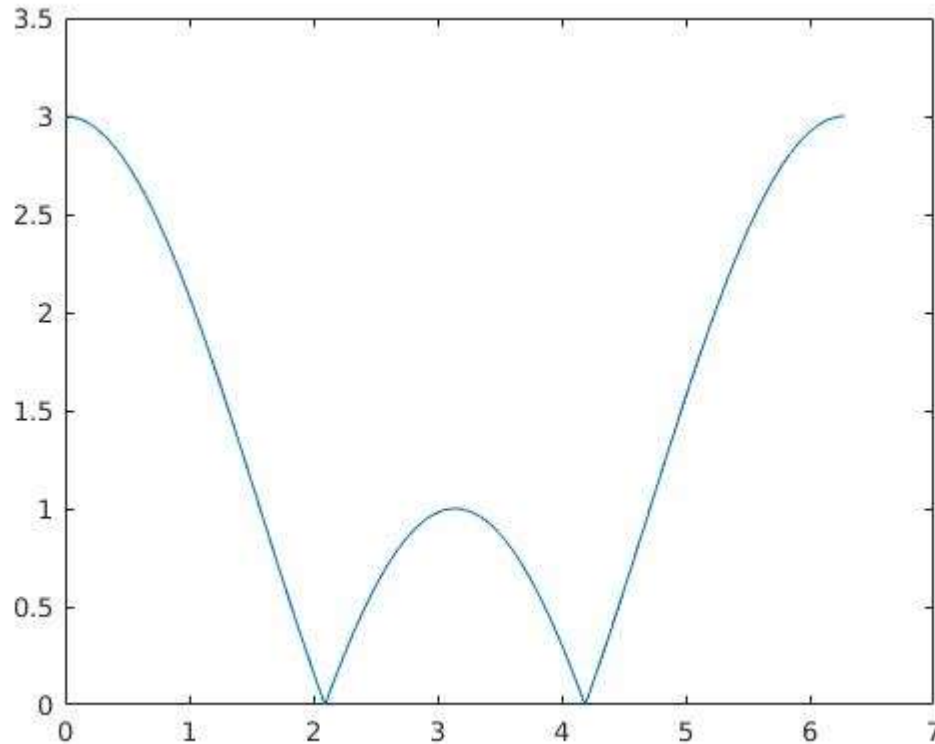
另一个观察视角，在自相关函数中，考虑两个累加函数乘积中的每一个加项，无非是对应谐波分量相同和对应谐波分量不同两种。理想情况下，有

$$E \left[ e^{-j(\omega_2(n+\tau)+\phi_2)} e^{j(\omega_1 n+\phi_1)} \right] = \begin{cases} e^{-j\omega_1 \tau}, & \omega_1 = \omega_2 \\ 0, & \text{others} \end{cases} = e^{-j\omega_1 \tau} \delta(\omega_1 - \omega_2)$$

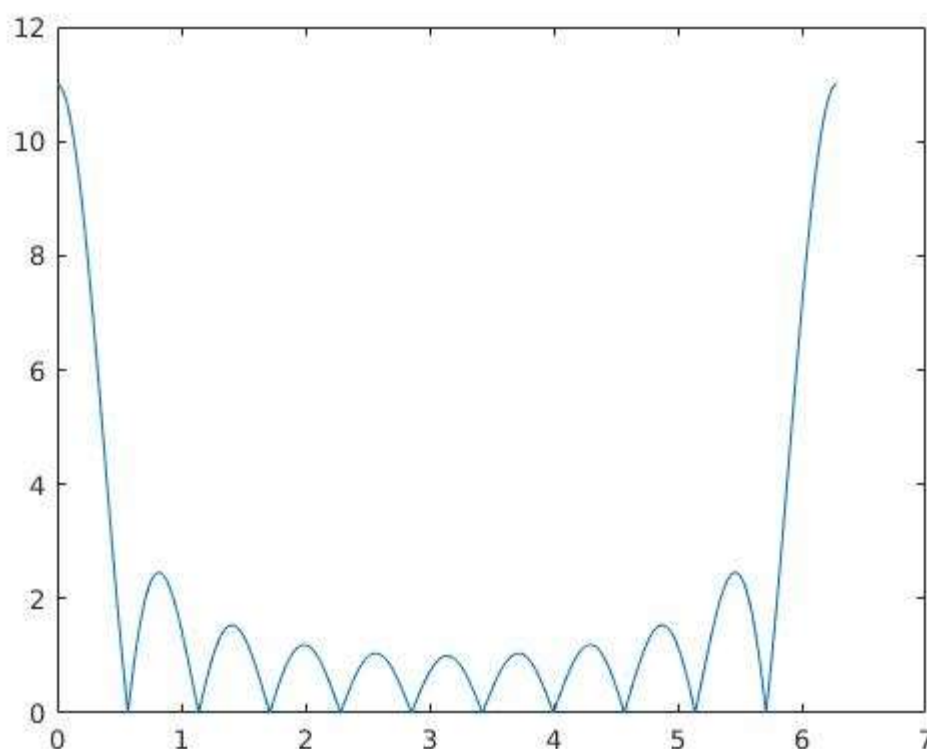
但是，对于有限长的序列，我们计算如下式子，与自相关函数的加项，它少了谐波振幅和取平均因子  $1/N$ ：

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega_2(n+\tau)+\phi_2)} e^{j(\omega_1 n+\phi_1)} = C \frac{1 - e^{j(\omega_1 - \omega_2)N}}{1 - e^{j(\omega_1 - \omega_2)}}$$

$C$  是一个常数旋转因子。右边的式子就是矩形窗的频谱，我们看  $N=3$  和  $N=11$  时的情形：



$N=3$



N=11

有鉴于此，相比理想两个  $e$  的相关函数，对较近的  $\omega$ ，它们之间的相关估计值可能会很糟糕。在仿真中，我们有时会遇到一个  $\omega$  在预测时分裂成两个非常接近的  $\omega$ ，它们的振幅共轭，我觉得可能可以由此解释。

我们还做过一些尝试，比如在计算相关值时，随机丢掉一个采样来破坏其窗函数的性质，但是这样算法的性能下降了。

## 五、DFT 性能分析

我们进行谐波恢复测试的采样非常少，相当于在一段原先比较长的信号上加了一个矩形窗。矩形窗的主瓣宽度为  $\frac{4\pi}{N}$ ，因此在采样数较少的情况下两个距离非常近的信号会被掩盖。这反映了在这种短序列的信号分析，傅里叶变换并不是一个非常合适的工具。此外，在仿真实验中，我们会发现，即便  $N=35$  的情形下（此时仿真取两个  $\omega$  为  $0.79\pi$  和  $0.81\pi$  虽然没有完全离开彼此的主瓣，但效果好还是能看见两个峰），原离散信号的 DFT 变换（2048 点）也偶尔会出现看不到第二个临近的频率分量的结果。

## 六、仿真实验

为了讨论分辨力和精度的方便，我们取了两个谐波，相距  $0.2\pi$ ： $0.79\pi$  和  $0.81\pi$ ，它们的初相和噪声随机。在实验中，我们先构造一个长度为 2048 的长信号，称其为原信号，取第 1 到第 N 个值作为取样序列。我们对 Pisarenko 谐波分解取  $H=6$ ，发现得到两个振幅绝对值非常大的谐波，另外 4 个解有数量级的差距，因此我们在仿真时认为这个算法可以识别出信号只有 2 个。有时信号的 2 个振幅最大值为一个频率分裂（表现为  $\omega$  很接近而振幅共轭），由于辨析并处理算法较为麻烦，在这种情况下不做特别处理。取最大的两个信号频率，做均方误差计算，取两种可能的最小值。

我们不难发现，理论上  $N>20$  时，DFT 就可以分辨出两个信号。但实际上，我们取  $N=35, SNR=10$ ，会发现对原信号的 DFT 经常会出现栅栏效应，只能看到一个信号，而这个时候我们的方法依然有效。

对于均方误差的要求，由于两个信号相差  $0.02\pi$ ，我们要求其均方误差不能大于  $1e-3$  量级，在大于时则判决算法失败。我们计算均方误差，取两个频率的误差的平方之和，没有取平均值。

在  $N<14$  时， $SNR<10$  的情况下经常会出现失败。因此合适的 N 的最小值为 14.

综上所述，我们取  $N=14$  及 35，对不同的 SNR，各测试 50 次，情况下本算法的成功率：

```
N=14,SNR=10,H=6,Var_avg=4.7701e-04,failures=3
N=20,SNR=10,H=6,Var_avg=3.9311e-04,failures=2
N=35,SNR=10,H=6,Var_avg=2.9782e-04,failures=0
N=14,SNR=-10,H=6,Var_avg=0.0337,failures=22
N=35,SNR=-10,H=6,Var_avg=0.0038,failures=7
N=14,SNR=-20,H=6,Var_avg=0.0553,failures=29
N=35,SNR=-20,H=6,Var_avg=0.0235,failures=19
N=50,SNR=-20,H=6,Var_avg=0.0236,failures=8
```

我们发现，当  $SNR=10$  时，即便  $N=14$  算法的成功率也很高，但是当 SNR 到 -10 或者 -20 时，算法的失败率开始增加，然而当我们改换成  $N=35$  或  $N=50$  时，算法的准确率就会迅速增加，而此时 DFT 的两个信号还没有完全分离。

使用有偏估计自相关后，成功率有了明显提高：

```
N=14,SNR=-10,H=6,failures=12,var_avg=7.0500e-04
```



$N=35, SNR=-20, H=6, failures=7, var\_avg=0.0042$

我们对多种取值，做五千次测试：

$N=14, SNR=-10, H=6, failures=871(5000), var\_avg=0.0040$

$N=15, SNR=-10, H=6, failures=833(5000), var\_avg=0.0019$

$N=16, SNR=-10, H=6, failures=739(5000), var\_avg=0.0017$

$N=17, SNR=-10, H=6, failures=725(5000), var\_avg=0.0016$

$N=31, SNR=-20, H=6, failures=852(5000), var\_avg=0.0125$

$N=32, SNR=-20, H=6, failures=827(5000), var\_avg=0.0119$

$N=35, SNR=-20, H=6, failures=843(5000), var\_avg=0.0131$

$N=39, SNR=-20, H=6, failures=920(5000), var\_avg=0.012$

$N=32, SNR=-30, H=6, failures=1526(5000), var\_avg=0.0385$

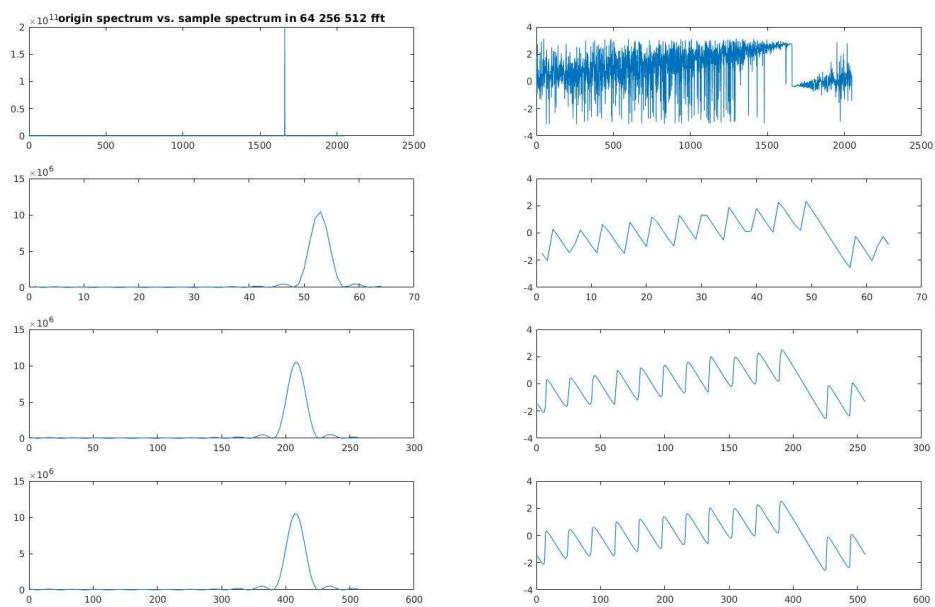
$N=37, SNR=-30, H=6, failures=1482(5000), var\_avg=0.0378$

$N=38, SNR=-30, H=6, failures=1503(5000), var\_avg=0.0394$

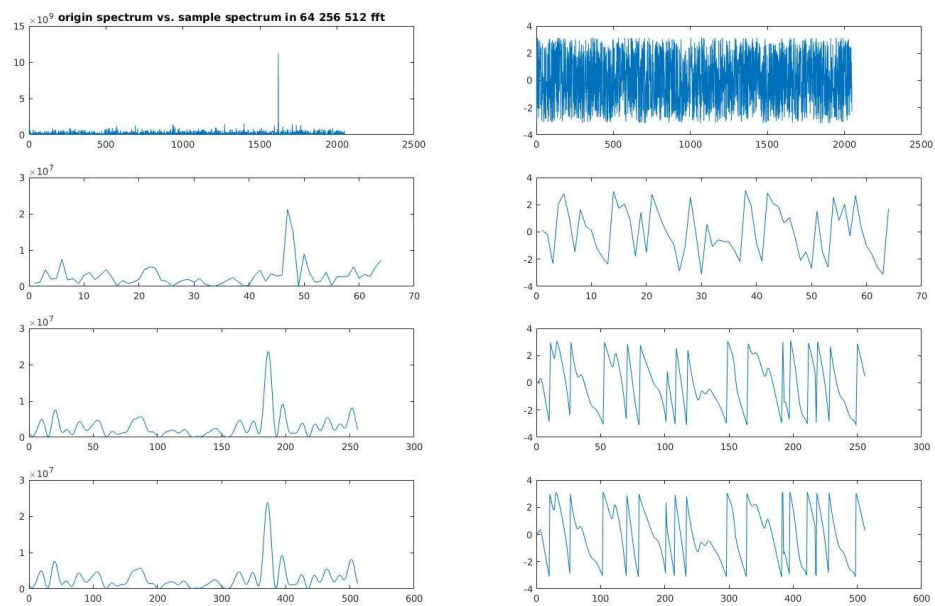
$N=39, SNR=-30, H=6, failures=1514(5000), var\_avg=0.0380$

反观 DFT，在  $N=35$  和 50 时，如果原信号可以看出两个信号，那么加窗以后也可以看到两个，在  $N=35$  时还未完全分离，当  $N=50$  时，完全分离。但依然可以看到较小的旁瓣。（有一个小 bug，以下绘图的幅频曲线实际上是幅频平方，但是其图线性质（主瓣宽度等）依然没有变，而相频曲线没有问题）。

## 数字信号处理大作业报告

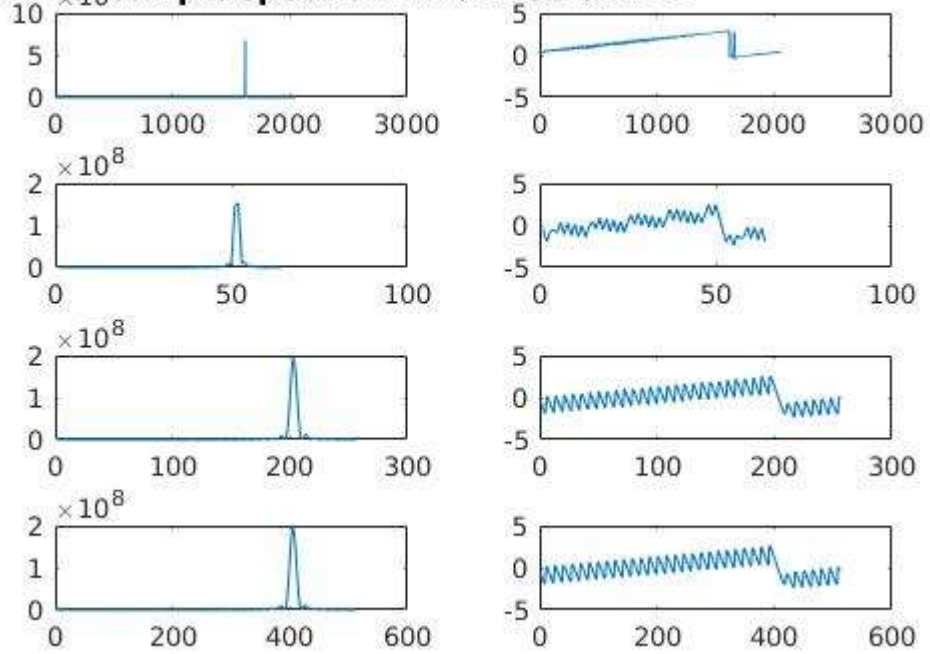


SNR=-10，本算法一次失败时的 DFT（从上到下分别为原信号的 DFT 和采样信号的补零至 64、256、512 长度的 DFT 的幅频和相频特性）

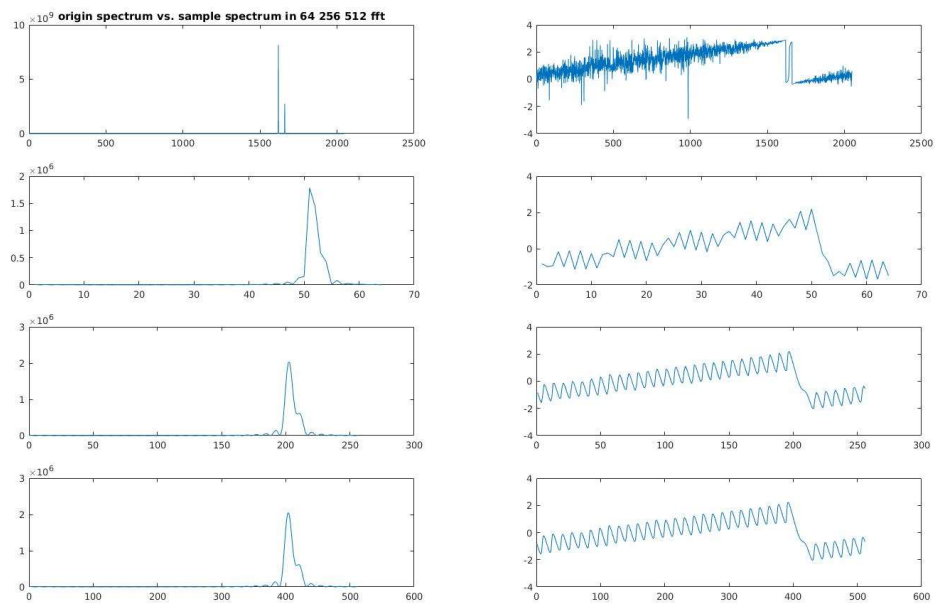


SNR=-20，本算法一次失败时的 DFT

spectrum vs. sample spectrum in 64 256 512 fft

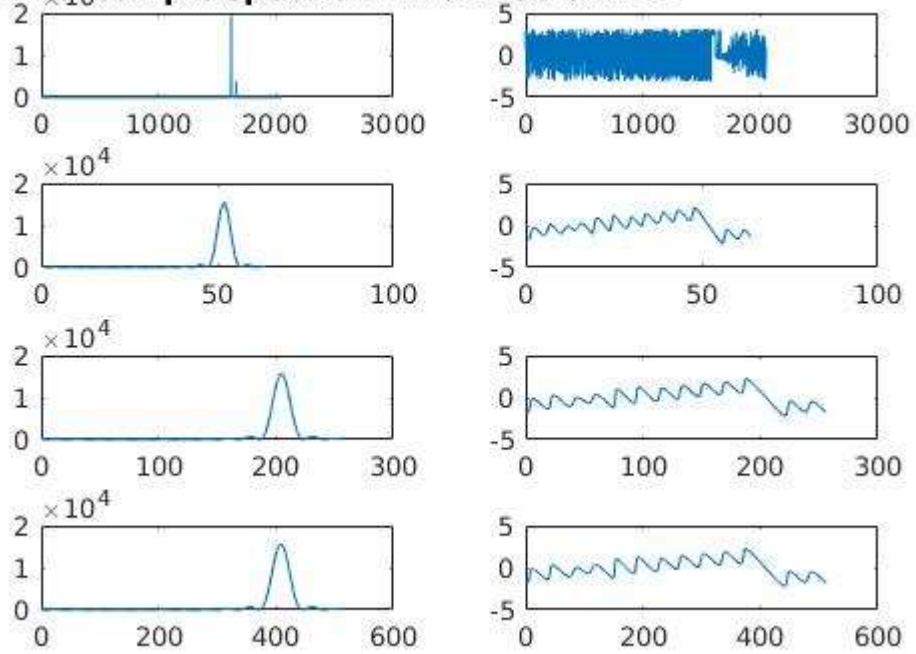


SNR=10 的栅栏效应

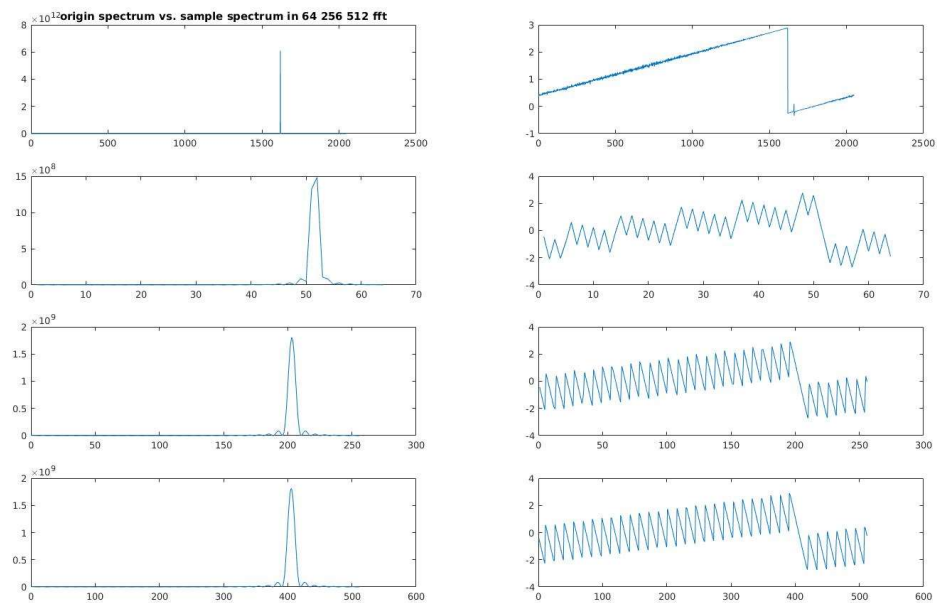


SNR=10 时 DFT 看到第二个频率的一次情形

**spectrum vs. sample spectrum in 64 256 512 fft**

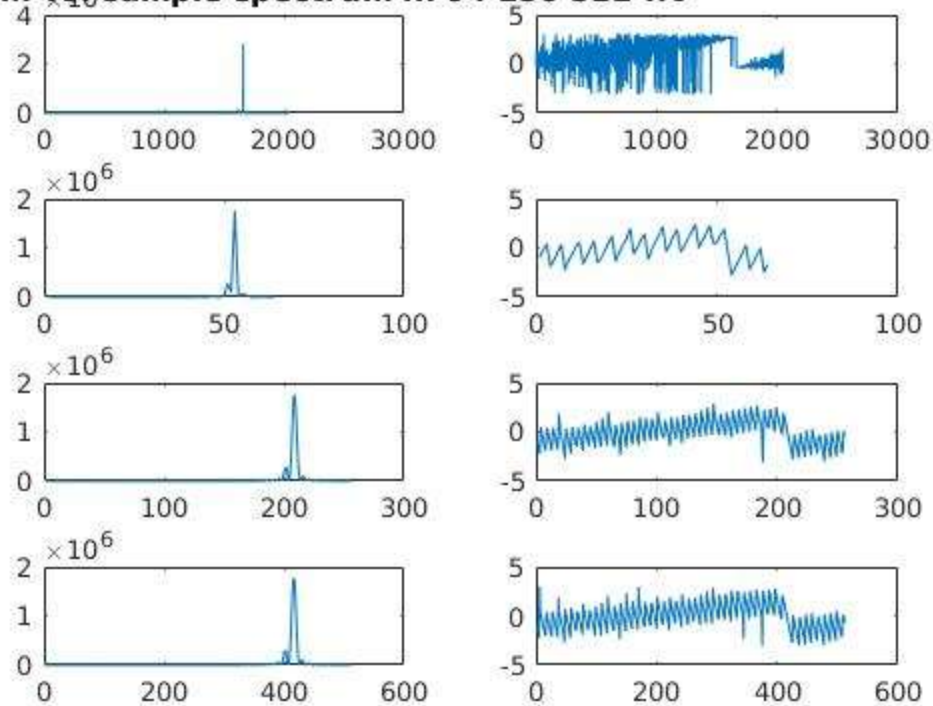


SNR=10, N=14 时的一次 DFT



SNR=10, N=35 时的一次 DFT

spectrum vs sample spectrum in 64 256 512 fft



SNR=10, N=50 时的一次 DFT

```

1.  variations =
2.
3.  Columns 1 through 7
4.
5.      0.0031    0.0000    0.1801    0.5533    0.0000    0.0006
0.0001
6.
7.  Columns 8 through 14
8.
9.      0.0003    0.0008    0.1445    0.0010    0.0019    0.0714
0.0000
10.
11.  Columns 15 through 21
12.

```

13.	0.0009	0.0698	0.1338	0.0564	0.0008	0.0032
0.0005						
14.						
15.	Columns 22 through 28					
16.						
17.	0.0019	0.0001	0.0049	0.0001	0.0004	0.0007
0.3575						
18.						
19.	Columns 29 through 35					
20.						
21.	0.0007	0.2236	0.0019	0.0057	0.0034	0.0118
0.3353						
22.						
23.	Columns 36 through 42					
24.						
25.	0.0006	0.0001	0.0018	0.0753	0.0001	0.0015
0.2804						
26.						
27.	Columns 43 through 49					
28.						
29.	0.0001	0.0583	0.0677	0.0000	0.0369	0.0038
0.0577						
30.						
31.	Column 50					
32.						
33.	0.0084					

SNR=-20 时本算法的一次测试的频率均方误差

## 七、分析与讨论

我们的算法本质上是利用了信号的宽平稳特性，利用自相关函数和最小二乘法，充分利用样本信息。我们注意到在  $N < 14$  时失败率会迅速增加，由之前理论分析，在  $N=14$  时建立的最小二乘方程组数量为  $N-H-1=7$ ，加上自相关函数值  $r_s[m]$  在  $m$  越大时样本越少，越

不准确，因此较少的方程数量会导致误差增大。而在  $N$  增大以后，甚至是  $\text{SNR}=-10$  的糟糕情形下，算法的成功率会迅速增加，这是因为自相关函数的  $r_s[m]$  的估计样本数增加，加上最小二乘的方程数量增加导致的。我们注意到，在  $N=8$  时，信号的平均值就已经接近  $1e-16$ ，其平均值符合宽平稳的要求，而在  $N=1、2$  时，这个值显然不会特性那么好。这就说明在临界值附近，采样数的略微增加会显著改善我们对信号的统计特性的估计。

由于算法的核心是相关的估计，我们在分析时列举出了可能影响其准确度的问题，我们使用有偏估计大幅提高了算法的成功率。一些失败的尝试见相关函数估计值分析这一节。

本方法尽可能拟合采样信号，其分辨力是不限的，精度随  $N$  和  $\text{SNR}$  而变化，我们在实际中可以控制  $N$  让其均方误差在  $1e-4$  量级以下，对于 2 个谐波信号及高信噪比条件下，取  $N=14$  ( $H=6$ ) 已足够。

理论分析发现 DFT 在同样少的采样点下会受制于过大的主瓣宽度而使第二个信号无法辨认，无法做到这么小的分辨力，同时其也会受到栅栏效应的影响。仿真验证了这一点，并且我们采了多次实验发现，在本算法失败的情形下，DFT 频谱均无法辨认出两个临近的谐波频率。

## 八、参考文献

1. 张贤达.《现代信号处理》课件 3.3.Pisarenko 谐波分解[EB]. 2017.
2. 王志群,朱守真,周双喜. 基于 Pisarenko 谐波分解的间谐波估算方法[J]. 电网技术, 2004.