MB103 — 8. 2. 2011, skupina A

1. (6 bodů) Uvažte funkci $z = z(x, y)$ zadanou v okolí bodu [1, 1, -1] implicitně předpisem $z^3 - 2xyz - x^2y = 0$.

(a) Zapište diferenciál dz (jako funkci dx, dy) v bodě [1, 1].

(b) Zapište rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě [1, 1].

(c) Pomocí lineární aproximace odhadněte hodnotu $f(0{,}9; 1{,}2)$.

(d) Určete směrovou derivaci z v bodě [1, 1] ve směru vektoru (-1, 2).

(e) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce $z(x, y)$ se středem v bodě [1, 1].

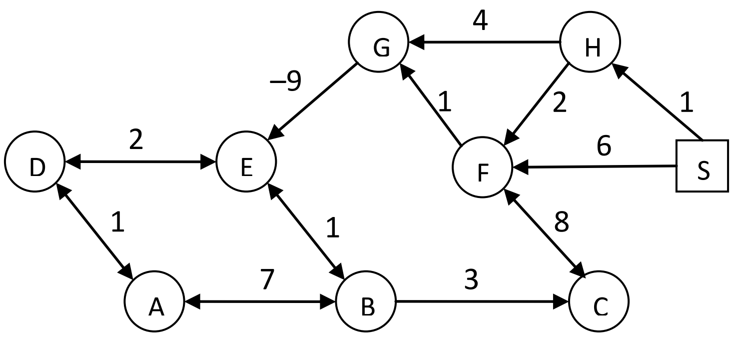
(f) Uveďte podmínku (ve tvaru polynomiální rovnice v proměnných x, y, z) pro to, aby v obecném bodě $[x, y, z]$ byla zadaným předpisem určená funkce $z(x, y)$.

2. (5 bodů)

(a) Určete hmotnost tělesa, které je určeno částí mezikruží $1 < x^2 + y^2 < 25$ ležící v polorovině, určené nerovností $x \leq 0$, je-li hustota v bodě $[x, y]$ rovna $\frac{y^2}{x^2+y^2}$.

(b) Určete souřadnice těžiště tohoto tělesa.

3. (5 bodů) Užijte Bellman-Fordův algoritmus pro nalezení nejkratších cest z vrcholu S do všech ostatních vrcholů. Hrany procházejte v abecedním pořadí dle počátečního (v případě shodnosti dle koncového) vrcholu. Vhodným způsobem zapisujte jednotlivé průchody algoritmu, aby bylo možné Váš postup rekonstruovat. Uveďte, jak zjistíte (ne)existenci záporného cyklu. Zakreslete strom nejkratších cest z S do ostatních vrcholů.



4. (4 body)

(a) Uveďte příklad grafu se 6 vrcholy, který je vrcholově i hranově právě 2-souvislý.

(b) Uveďte příklad grafu na alespoň 4 vrcholech, pro který nedá Borůvkův algoritmus správný výsledek.

(c) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) nerovinného hamiltonovského grafu, který je eulerovský.

(d) Definujte pojmy strom a list a dokažte, že každý strom s alespoň 2 vrcholy obsahuje alespoň 2 listy.