

## 1. Termin 2018

1.

(a) Zformulujte 3. Riceovu vetu.

(b) Nech  $B$  je množina *tych*  $i \in \mathbb{N}$ , že  $\varphi_i$  je prosta a obor jej hodnot je  $\mathbb{N}$

i. dokažte že  $B$  nie je rekurzívne spočetna

ii. dokažte že  $\overline{B} = \mathbb{N} \setminus B$  nie je rekurzívne spočetna.

2.

(a) Ktore z nasledujúcich tvrdení sú pravdivé. Odpoveď zdovodnite.

i. Množina  $A_1 \subseteq \mathbb{N}$  je rekurzívna práve vtedy, keď existuje totálne vypočítateľná funkcia  $f$  taká, že  $x \in A_1 \leftrightarrow f(x)$  je prvočíslo.

ii. Množina  $A_2 \subseteq \mathbb{N}$  obsahuje tie  $i \in \mathbb{N}$ , že sa  $i$ -ty while - program zastaví na každom vstupe, je rekurzívny.

iii. Množina  $A_2 \subseteq \mathbb{N}$  z (ii) je rekurzívne spočetná

(b) Definujte, kedy je rozhodovací problém PSPACE-uplný a uveďte príklad PSPACE-uplného rozhodovacieho problému (bez dokazu PSPACE-uplnosti).

3.

(a) Definujte triedy problémov NL a P.

(b) Dokažte, že  $NL \subseteq P$ . Ak použijete k dokazu obecnějšíu vetu z prednášky, tak ju dokažte.

## Skupina B

- (a) Zformulujte Třetí Riceovu větu.
- (b) Nechť  $A$  je množina těch  $i \in \mathbb{N}$ , že funkce  $\varphi_i$  je totálně vyčíslitelná. Dokažte, že množina  $A$  není rekurzivně spočetná.
- (c) Dokažte Třetí Riceovu větu.
- (a) Zformulujte Savitchovu větu. Jaká je časová složitost algoritmu z důkazu této věty?
- (b) Ukažte, že rozhodovací problém, zda zadaný  $n$ -vrcholový graf je souvislý, patří do třídy  $\text{SPACE}(\log^2 n)$ .
- (a) Která z následujících tvrzení jsou pravdivá? Svou odpověď zdůvodněte.
  - (i) Množina  $\{i, \varphi_i(i) = i\} \subseteq \mathbb{N}$  je rekurzivně spočetná.
  - (ii) Množina  $\{(i, j), W_i = W_j\} \subseteq \mathbb{N}^2$  je rekurzivní.
  - (iii) Pokud  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je prostá totálně vyčíslitelná funkce, pak funkce  $f^{-1}$  je vyčíslitelná.
- (b) Definujte třídy složitosti L a NP a uveďte, jaký je mezi nimi vztah.

list

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

### Skupina A

- (a) Která z následujících tvrzení jsou pravdivá? Svou odpověď zdůvodněte.
- (i) Množina  $\{i, 0 \in W_i\} \subseteq \mathbb{N}$  je rekurzivně spočetná
  - (ii) Množina  $\{(i, j), \varphi_i = \varphi_j\} \subseteq \mathbb{N}^2$  je rekurzivní.
  - (iii) Pokud  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je bijektivní totálně vyčíslitelná funkce, pak funkce  $f^{-1}$  je totálně vyčíslitelná.
- (b) Definujte třídy složitosti NL a P a uveďte, jaký je mezi nimi vztah.

list

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

### Skupina A

- (a) Zformulujte Savitchovu větu. Jaká je časová složitost algoritmu z důkazu této věty?
- (b) Ukažte, že rozhodovací problém, zda zadaný  $n$ -vrcholový graf je souvislý, patří do třídy  $\text{SPACE}(\log^2 n)$ .

list

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

### Skupina A

- (a) Zformulujte Druhou Riceovu větu.
- (b) Nechť  $A$  je množina těch  $i \in \mathbb{N}$ , že funkce  $\varphi_i$  není totálně vyčíslitelná. Dokažte, že množina  $A$  není rekurzivně spočetná.
- (c) Dokažte Druhou Riceovu větu.

- (a) Která z následujících tvrzení jsou pravdivá pro každou rekurzivní množinu  $A \subseteq \mathbb{N}$  a rekurzivně spočetnou množinu  $B \subseteq \mathbb{N}$ ? Svou odpověď vždy zdůvodněte.
- (i) Množina  $A \cap B$  je rekurzivní.
  - (ii) Množina  $A \cap B$  je rekurzivně spočetná.
  - (iii) Množina  $A \cup B$  je rekurzivní.
  - (iv) Množina  $A \cup B$  je rekurzivně spočetná.
  - (v) Množina  $A \setminus B$  je rekurzivně spočetná.
  - (vi) Množina  $B \setminus A$  je rekurzivně spočetná.
- (b) Seřadte následující třídy složitosti dle inkluze:  $\text{TIME}(\log n)$ ,  $\text{SPACE}(\sqrt{n})$ ,  $\text{NSPACE}(\log^4 n)$  a  $\text{PSPACE}$ . Odpověď stručně zdůvodněte.

---

Nechť  $A \subseteq \mathbb{N}$  je rekurzivně spočetná množina, která není rekurzivní.

- (a) Dokažte, že existuje nekonečná množina  $B$ , která je podmnožinou množiny  $A$  a je rekurzivní.
- (b) Dokažte, že existuje množina  $C$ , která je podmnožinou množiny  $A$  a není rekurzivně spočetná.

- 
- (a) Vysvětlete pojem časové složitosti nedeterministického algoritmu a definujte třídu NP.
  - (b) Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní pro každý rozhodovací problém  $Q$ :
    - $Q \in \text{NP}$
    - Existuje nedeterministický algoritmus  $A$  a polynom  $p(k)$ , t.ž. vstup  $x$  patří do  $Q$  právě tehdy, když  $A$  má přijímající výpočet s nejvýše  $p(|x|)$  kroky, kde  $|x|$  je délka vstupu  $x$ .
  - (c) Dokažte, že  $\text{NP} \subseteq \text{PSPACE}$ .

0007

list

učo

body

0007

list

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

- (a) Která z následujících tvrzení jsou pravdivá? Svou odpověď zdůvodněte.
- (i) Množina  $A_1 \subseteq \mathbb{N}$  je rekurzivní právě tehdy, když existuje totálně vyčíslitelná funkce  $f$  taková, že  $x \in A_1 \Leftrightarrow \forall x' < x : f(x) > f(x')$ .
  - (ii) Množina  $A_2 \subseteq \mathbb{N}$  obsahující ty  $i \in \mathbb{N}$ , že se  $i$ -tý while-program zastaví pro nějaký vstup, je rekurzivní.
  - (iii) Množina  $A_2 \subseteq \mathbb{N}$  z předchozího bodu je rekurzivně spočetná.
- (b) Definujte, co znamená, že rozhodovací problém je polynomiálně redukovatelný na jiný rozhodovací problém. Platí, že každý NP-úplný problém je polynomiálně redukovatelný na každý PSPACE-úplný problém? Svou odpověď zdůvodněte.

0007

list

učo

body

0007

list

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

- (a) Vysvětlete, co znamená, že množina  $B \subseteq \mathbb{N}$  respektuje funkce.
- (b) Nechť  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp\}$  je funkce, t.ž.  $f(x) \neq \perp$  pro konečně mnoho  $x \in \mathbb{N}$ , a nechť  $C$  je množina těch  $i \in \mathbb{N}$ , že funkce  $\varphi_i$  je rozšířením  $f$ .
- (i) Pro které funkce  $f$  je množina  $C$  rekurzivní?
  - (ii) Pro které funkce  $f$  je množina  $C$  rekurzivně spočetná?
  - (iii) Pro které funkce  $f$  je množina  $\overline{C}$  rekurzivně spočetná?

Své odpovědi zdůvodněte.

0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Svě UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

- Definujte prostorovou složitost nedeterministického algoritmu.
- Zformulujete a dokažete větu z přednášky, která hovoří o inkluzi třídy  $\text{NSPACE}(f(n))$  pro  $f(n) \in \Omega(\log n)$  ve třídě problémů řešitelných deterministicky v omezeném čase.