MB102 Levou zadní - Vzorečky

Leoš Otáhal

23. února 2016

1 Střední škola + MB101

- Parciální zlomky (kořeny lze zjistit pomocí Hornerova schéma)

$$\frac{5x^4+7x^3-21x^2-17x-1}{x^5+x^4-2x^3-x^2-x+2} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)}$$

Dosazení nulového bodu - nepoužitelné u komplexních a vícenásobných kořenů

$$5x^4+7x^3-21x^2-17x-1 = A(x-1)^2(x^2+x+1)+B(x+2)(x-1)(x^2+x+1)+C(x+2)(x^2+x+1)+Dx(x+2)(x-1)^2+E(x+2)(x-1)^2$$

$$\begin{array}{rrclcrcl} 1: & 5(1)^4+7(1)^3-21(1)^2-17(1)-1 & = & C[(1)+2][(1)^2+(1)+1] & \Rightarrow & -27=9C & \Rightarrow & C=-3 \\ -2: & 5(16)+7(-8)-21(4)-17(-2)-1 & = & A[(-2)-1]^2[(4)+(-2)+1] & \Rightarrow & -27=27A & \Rightarrow & A=-1 \end{array}$$

Porovnání hodnot stejných exponentů - je třeba si roznásobit závorky

$$5x^4+7x^3-21x^2-17x-1 = A(x^4-x^3-x+1)+B(x^4+2x^3-x-2)+C(x^3+3x^2+3x+2)+D(x^4-3x^2+2x)+E(x^3-3x+2)$$

$$\begin{array}{lrcrrrrr} x^4: & 5 & = & A & +B & & +D & \\ x^3: & 7 & = & -A & +2B & +C & & +E \\ x^2: & -21 & = & & & 3C & -3D & \\ x^1: & -17 & = & -A & -B & +3C & +2D & -3E \\ x^0: & -1 & = & A & -2B & +2C & & +2E \end{array}$$

- $ax^2+2bx+c=(ax+b)^2-b^2+c, \quad a^2-b^2=(a-b)(a+b), \quad (a\pm b)^2=(a\pm b)(a\pm b)$
- Grafy: $ax+b$, $\frac{1}{x}$,$\sqrt{x}$, x^2, x^3, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sin^2 x+\cos^2 x=1, \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}, \quad a^b = e^{b\ln a}, \quad \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}, \quad \dfrac{n+1}{n} = 1+\dfrac{1}{n}, \quad \sin^2 e^x = (\sin(e^x))^2 \Rightarrow (x^2\circ\sin x\circ e^x)$

2 Limity

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \qquad \lim cf = c\lim f \qquad \lim f\pm g = \lim f \pm \lim g$
- Neurčité výrazy: $\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty-\infty, \quad 0\cdot\infty, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0$
- $x^2 << x^3 << 2^x << 3^x \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{42}}{2^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$
- L'Hospitalovo pravidlo $\Leftrightarrow$ Ultimate Hack $\Leftrightarrow$ $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ kde $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ nebo $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$

  $f^g \ \left|\infty^0\right| \to e^{g\ln f} \ \left|e^{0\cdot\infty}\right| \qquad f\cdot g \ |0\cdot\infty| \to \dfrac{f}{\frac{1}{g}} \ \left|\dfrac{0}{0}\right| \ \vee \ \dfrac{g}{\frac{1}{f}} \ \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| \qquad f-g \ |\infty-\infty| \to \dfrac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}} \ \left|\dfrac{0}{0}\right|$

3 Derivace

- $(cf)'=cf', \quad (f\pm g)'=f'\pm g', \quad (fg)'=f'g+fg', \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}, \quad (f\circ g)' = f'(g)g'$

$(c)'=0$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}; \ a>0$	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(a^x)' = a^x\ln a; \ a>0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

- Tečna: $y-y_0 = f'(x)(x-x_0)$ Normála: $y-y_0 = -\frac{1}{f'(x)}(x-x_0)$
- Derivace inverzní funkce: $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \Rightarrow \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{e'^{(\ln x)}} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$

- Asymptota je přímka $ax+b$ kde $\quad a = \lim_{x\to\inf} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\inf} f(x) - ax$
- Průběh funkce

  $f(x)$: Definiční obor, Sudost/Lichost, Nulové body, Znaménka, Asymptoty
  $f'(x)$: Stacionární body, Lokální extrémy, Rostoucí/Klesající
  $f''(x)$: Konvexnost $\cup$, Konkávnost $\cap$ (konkÁvní ... A je $\cap$ a $-$)
- Taylorův polynom: $T(x) = \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

4 Integrály

- $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

  $\int k\,dx = kx + c \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ goniometrické funkce viz derivace

  $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c;\ n \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln \mid f(x) \mid + c \qquad \int f(Ax+B)\,dx = \frac{1}{A} ln|Ax+B| + c$
- Parciální zlomky:

$$\int \frac{A}{(x-x_0)}\,dx = A\ln \mid x - x_0 \mid + c$$

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^n}\,dx = \frac{A}{(1-n)(x-x_0)^{n-1}} + c$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x-x_0)^2+a^2}\,dx = \frac{A}{2}\ln \mid (x-x_0)^2 + a^2 \mid + \frac{(Ax_0+B)}{a}\arctan\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + c$$

- Substituce: $\int f(g(x))g'(x)\,dx \left|\begin{smallmatrix} t=g(x) \\ dt=g'(x)dx \end{smallmatrix}\right| = \int f(t)\,dt$
  - Používá se, když má funkce složitý argument: $\int xe^{-x^2}\,dx|^{t=-x^2}$.
  - U trigonometrických funkcí substituovat funkci se sudou mocninu nebo $\tan x$.
- Per-Partes: $\int f'(x)g(x)\,dx \left|\begin{smallmatrix} f'(x) & \to & f(x) \\ g(x) & \to & g'(x) \end{smallmatrix}\right| = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
  - Nejčastěji je snaha se zbavit proměnné x. Metoda se používá opakovaně například u $\int x^2e^x\,dx$.
  - Při transformaci se derivuje x nebo funkce, u které se objeví x ve jmenovateli ($\ln x$, $\tan x$, ...).
- Určitý integrál $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = [F(x)]_{-\infty}^{a} = F(a) - \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$. Dělení intervalu $\int\limits_a^b = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b$.
-
  - Plocha mezi grafy: $\int\limits_a^b f(x) - g(x)\,dx; \quad \forall x \in [a,b] : f(x) > g(x)$
  - Délka křivky: $\int\limits_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$, Délka grafu: $\int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$
  - Objem rotačního tělesa: $\pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$, Povrch rotačního tělesa: $2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

5 Nekonečné řady

- Součet řady je reálné číslo $\to$ <u>kon</u>verguje, je $\pm\infty \to$ <u>div</u>erguje, nebo nelze určit $\to$ <u>osc</u>iluje.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n \quad |q| < 1$ <u>kon</u> $\quad |q| \geq 1$ <u>div</u>, $\qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^a} \quad a > 1$ <u>div</u> $\quad a \leq 1$ <u>div</u>.
- Nástroje pro zjištění <u>kon</u>, <u>div</u> a <u>osc</u>
  - Základní podmínka konvergence: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ <u>kon</u> $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Implikace!
    S jistotou víme pouze to, že když se limita nerovná nule, řada <u>div</u> nebo <u>osc</u>.
  - Podílové kritérium: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $\qquad$ Odmocninové kritérium: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$
    $q < 1 \to$ <u>kon</u> $\qquad q > 1 \to$ <u>div</u> $\qquad q = 1 \to$ nic nevíme
  - Integrální kritérium: $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ <u>kon</u> $\Leftrightarrow \int\limits_N^{\infty} f(n)\,dn \in \mathbb{R}$, $\quad \sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ <u>div</u> $\Leftrightarrow \int\limits_N^{\infty} f(n)\,dn = \infty$
  - Srovnávací kritérium:
    Zvětšená řada <u>kon</u>, tak <u>kon</u> i původní. $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n} \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ <u>kon</u>
    Zmenšená řada <u>div</u>, tak <u>div</u> i původní. $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3} \geq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow$ <u>div</u>
- Alternující řady: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ <u>kon</u> $\Leftrightarrow \lim a_n = 0$. Ekvivalence!
  - Absolutní konvergence: Řada i její absolutní hodnota <u>kon</u>. I po přeuspořádání stále <u>kon</u>.
  - Relativní konvergence: Řada <u>kon</u>, absolutní hodnota <u>div</u>. Po přeuspořádání členů může <u>div</u>.
- Mocninné řady: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)^n + a_2(x-x_0)^2 + ...$
  - x_0 je střed konvergence, v x_o řada vždy konverguje a součet je 0
  - poloměr konvergence r je obrácená hodnota podílového/odmocninového kritéria a_n
    $r \in \mathbb{R}$: řada <u>kon</u> v $(x_0 - r, x_0 + r)$, krajní body $x_0 + r$ a $x_0 - r$ nutné vyhodnotit zvlášť
    $r = 0$: řada <u>kon</u> pouze v bodě x_0, na zbytku $\mathbb{R}$ <u>div</u>
    $r = \infty$: řada <u>kon</u> na celé reálné ose
  - Součty mocninných řad

$\sin x$	$=$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$x \in \mathbb{R}$	$\ln(1+x)$	$=$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$x \in (-1,1)$
$\cos x$	$=$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}$	$x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1-x}$	$=$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$	$x \in (-1,1)$
e^x	$=$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$	$x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x}$	$=$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	$x \in (-1,1)$

6 Poznámky

- Derivace, integrály i součety nekonečných řad jsou limity a platí pro ně stejná pravidla.
- Limita je vždy z $\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^*$ je $\mathbb{R}$ s $\pm\infty$).
- "Nevlastní" vždy souvisí s tím, že se někde v zadání objeví nekonečno.
- "Krácení neznámé" funkční hodnota se sice mění, ale limita se nemění.
- U substituce určitého integrálu se transformace mezí nevrací.
- Per-Partes vychází z derivace násobku funkcí a Substituce z derivace složené funkce.
- Dávat pozor, zda je v definici ekvivalence či implikace.
- $e \approx 2.71828182...$
- Záhadná x_0 a y_0 určují výchozí pozici. V písemkách se v těch vzorečcích objeví přirozené číslo.