2 NEKOOPERATIVNÍ HRY

2.1 ZÁKLADNÍ POJMY A JEJICH VLASTNOSTI

2.1.1 Hra v normálním tvaru a rovnovážné strategie

Definice 1. Nechť je dána konečná neprázdná n-prvková množina $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$ a dále n množin $S_1, S_2, \ldots, S_n$ a n reálných funkcí $u_1, u_2, \ldots, u_n$ definovaných na kartézském součinu $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. **Hrou n hráčů v normálním tvaru** budeme rozumět uspořádanou $(2n + 1)$-tici

$$\{Q;\ S_1, S_2, \ldots, S_n;\ u_1(s_1, s_2, \ldots, s_n), u_2(s_1, s_2, \ldots, s_n), \ldots, u_n(s_1, s_2, \ldots, s_n)\}. \tag{2.1}$$

Množinu Q nazveme **množinou hráčů**, množinu S_i nazveme **prostorem strategií hráče** i, prvek $s_i \in S_i$ nazveme **strategií hráče** i a funkci $u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ nazveme **výplatní funkcí hráče** i. Je-li hodnota výplatní funkce pro daného hráče kladná, hovoříme o **zisku**, je-li záporná, hovoříme o **ztrátě**.

Definice 2. n-tice strategií $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ se nazývá **rovnovážným bodem hry** (2.1), právě když pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a všechna $s_i \in S_i$ platí:

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \leq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*). \tag{2.2}$$

Strategie s_i^* se nazývá **rovnovážná strategie hráče** i.

2.1.2 Konečná hra v normálním tvaru

Konečnou hrou se rozumí hra, v níž každý hráč má konečný prostor strategií, tj. množiny $S_1, S_2, \ldots, S_n$ jsou konečné.

Definice 3. Uvažujme konečnou hru n hráčů v normálním tvaru. Počet prvků prostoru strategií S_i libovolného hráče i označme symbolem m_i. **Smíšenou strategií** hráče i se rozumí vektor pravděpodobností

$$\begin{gathered} \boldsymbol{p}^i = (p_1^i, p_2^i, \ldots, p_{m_i}^i), \qquad \text{kde} \quad p_j^i \geq 0 \quad \text{pro všechna} \quad 1 \leq j \leq m_i, \\ \sum_{j=1}^{m_i} p_j^i = 1. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Smíšená strategie je tedy pro každého hráče vektor, jehož j-tá složka udává pravděpodobnost, s níž hráč volí j-tou strategii ze svého prostoru strategií. Je to tedy opět jistá strategie, kterou bychom mohli popsat takto: *„použij strategii $s_1^i \in S_i$ s pravděpodobností p_1^i, ..., použij strategii $s_{m_i}^i \in S_i$ s pravděpodobností $p_{m_i}^i$."*

Pro odlišení se prvky prostoru strategií S_i nazývají **ryzí strategie**.

Věta 1 (J. Nash). *Ve smíšených strategiích má každá konečná hra aspoň jeden rovnovážný bod.*

2.1.3 Hra v normálním tvaru, kde prostory strategií jsou otevřené intervaly

Věta 2 – ROVNOVÁŽNÝ TEST.
Nechť G je hra v normálním tvaru, kde prostory strategií S_i jednotlivých hráčů $1, 2, \ldots, n$ jsou otevřené intervaly a výplatní funkce jsou dvakrát diferencovatelné. Předpokládejme, že n-tice strategií $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ splňuje podmínky:

1) $$\frac{\partial u_i(s_1^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_i} = 0 \qquad \text{pro každé } i = 1, 2, \ldots, n.$$

2) Každé s_i^* je jediným stacionárním bodem funkce

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*), \quad s_i \in S_i.$$

3) $$\frac{\partial^2 u_i(s_1^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_i^2} < 0 \qquad \text{pro každé } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Potom je $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ rovnovážným bodem hry G.

Poznámka. V praxi se obvykle nalezne řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial u_i(s_1^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_i} = 0 \qquad \text{pro každé } \imath = 1, 2, \ldots, n$$

a pak se použijí jiné (například ekonomické) úvahy k ověření, že se skutečně jedná o rovnovážný bod.

Typickým příkladem hry v normálním tvaru, kde prostory strategií jsou otevřené intervaly, je model oligopolu, kde několik výrobců vyrábí týž produkt, přičemž každý z nich přispívá k celkovému množství nezanedbatelnou částí. Cena výrobku je dána poptávkovou rovnicí, která popisuje chování trhu a udává vztah mezi cenou a celkovým množstvím výrobků, jež je třeba prodat. Jinými slovy, udává nejvyšší cenu, za kterou je možné prodat dané množství výrobků. V níže diskutovaných Cournotových modelech má poptávková rovnice nejjednodušší tvar:

$$p + q = M, \qquad M >> c, \tag{2.4}$$

kde p je cena výrobku, q je poptávka na trhu po tomto výrobku, c jsou náklady na výrobu jednoho kusu, M je konstanta řádově mnohem větší než c.

☛ ***Příklad 1*** – **Cournotův model monopolu.**

Vyrábí-li daný produkt jediný výrobce – monopolista, je situace jednoduchá. Monopolista ví, že vyrobí-li q výrobků, pak nejvyšší cena, za kterou může prodávat jeden kus, aby celou produkci prodal, je dána rovnicí (2.4):

$$p = M - q. \tag{2.5}$$

Protože nikdo jiný celkové vyrobené množství neovlivní, stojí monopolista před úlohou pouhé maximalizace zisku, tj. nalezení maxima funkce

$$u(q) = p \cdot q - c \cdot q = Mq - q^2 - cq = (M - q - c)q. \tag{2.6}$$

Maximum lze snadno určit pomocí první derivace:

$$\begin{aligned} u'(q) = M - c - 2q = {} & 0 \\ q^*_{mon} = {} & \underline{\underline{\tfrac{1}{2}(M - c)}} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Protože pro $q < q^*_{mon}$ je derivace kladná a funkce u rostoucí, pro $q > q^*_{mon}$ je derivace záporná a funkce u klesající, jedná se skutečně o maximum této funkce. Maximálního zisku tedy monopolista dosáhne při výrobě $q^*_{mon} = \frac{1}{2}(M - c)$ kusů, a to

$$u^*_{mon} = u(q^*_{mon}) = \left(M - \tfrac{1}{2}(M - c) - c\right) \tfrac{1}{2}(M - c) = \underline{\underline{\left[\tfrac{1}{2}(M - c)\right]^2}} \tag{2.8}$$

Odpovídající cena je pak

$$p^*_{mon} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}(M + c)}} \tag{2.9}$$

☛ ***Příklad 2*** – **Cournotův model duopolu (1938).**

Nyní budeme uvažovat dva výrobce téhož produktu, z nichž každý přispívá nezanedbatelnou částí k celkovému množství výrobků na trhu. Problém monopolisty spočíval v nalezení maxima jednoduché kvadratické funkce. U duopolu se již jedná o hru, neboť každý z duopolistů ovlivňuje jen část celkového množství; cena, kterou za své výrobky utrží, tedy závisí nejen na jeho vlastním rozhodnutí, ale také na rozhodnutí soupeře. Duopolisté se rozhodují současně a nezávisle jeden na druhém. Pokusme se najít rovnovážný bod v této hře, tj. optimální množství, která mají jednotliví duopolisté vyrábět, aby ani pro jednoho nebylo výhodné se od tohoto množství odchýlit.

Označme jako q_1, q_2 množství vyráběná prvním a druhým duopolistou. Maximální cena, za kterou se výrobky prodají, je opět určena poptávkovou rovnicí (2.4):

$$p = M - q_1 - q_2 \tag{2.10}$$

Situaci lze modelovat pomocí hry v normálním tvaru, kde **hráči** jsou duopolisté, z nichž každý volí číslo z intervalu $\langle 0, M \rangle$; **prostory strategií** jsou tedy

$$S_1 = S_2 = \langle 0, M \rangle,$$

výplatní funkce jsou zisky:

$$\begin{aligned} u_1(q_1, q_2) &= (p - c)q_1 = (M - c - q_1 - q_2)q_1 \\ u_2(q_1, q_2) &= (p - c)q_2 = (M - c - q_1 - q_2)q_2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Přestože jsou prostory strategií nekonečné množiny, rovnovážný bod se nalezne snadno. První duopolista hledá funkci, která každé strategii soupeře, tj. každému množství q_2, přiřadí takové množství $q_1 = R_1(q_2)$, které je na q_2 nejlepší odpovědí v tom smyslu, že hodnota funkce $u_1(q_1, q_2)$ je maximální. Jinými slovy, pro každé pevné $q_2 \in S_2$ hledá první duopolista maximum funkce $u_1(q_1, q_2)$, která je nyní funkcí jediné proměnné q_1 :

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = M - c - q_2 - 2q_1 = 0$$

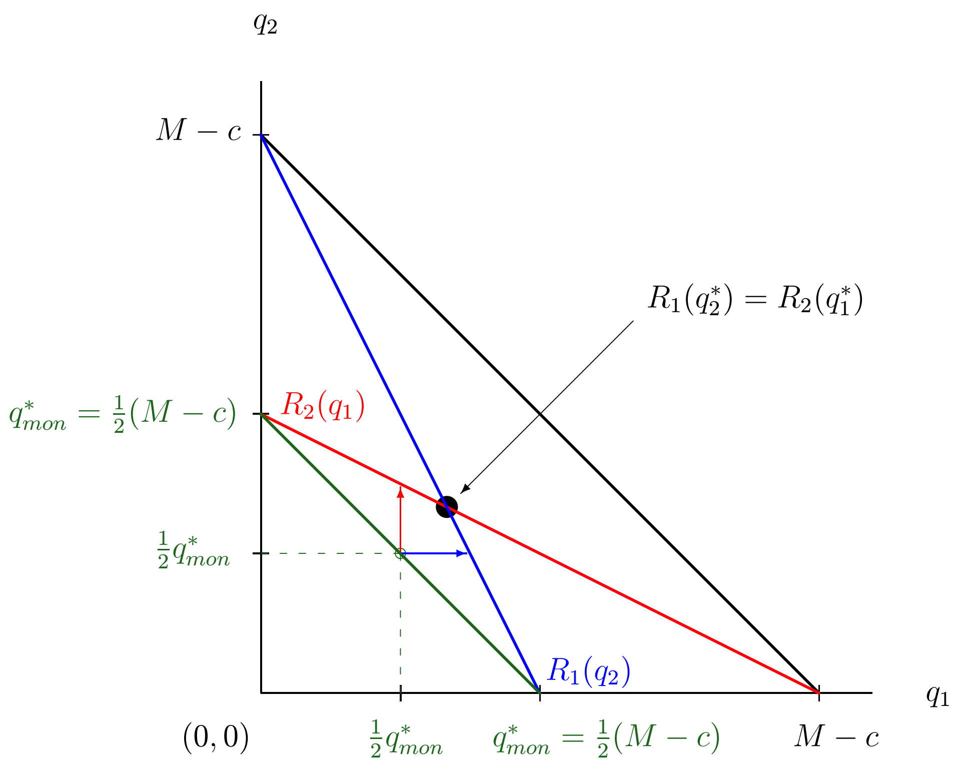
$$R_1(q_2) = q_1 = \tfrac{1}{2}(M - c - q_2) \tag{2.12}$$

(ověřte, že se jedná o maximum). Podobně druhý duopolista hledá pro každou strategii q_1 nejlepší odpověď $q_2 = R_2(q_1)$, tj. takové množství, které pro dané q_1 maximalizuje zisk u_2 :

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = M - c - q_1 - 2q_2 = 0$$

$$R_2(q_1) = q_2 = \tfrac{1}{2}(M - c - q_1) \tag{2.13}$$

Funkce $R_1(q_2)$ a $R_2(q_1)$ se nazývají **reakční křivky**; můžeme je znázornit následujícím způsobem:



Obr. 2.1: Reakční křivky pro Cournotův duopol

Podle definice lze odvodit, že (q_1^*, q_2^*) je rovnovážný bod, právě když $R_1(q_2^*) = R_2(q_1^*)$. Rovnovážný bod je tedy průsečíkem reakčních křivek, v našem případě

$$(q_1^*, q_2^*) = \underline{\underline{\left(\tfrac{1}{3}(M - c), \tfrac{1}{3}(M - c)\right)}}. \tag{2.14}$$

Cena, za kterou budou duopolisté prodávat, je

$$p = M - \tfrac{2}{3}(M - c) = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}M + \tfrac{2}{3}c}}. \tag{2.15}$$

Příslušný zisk pro každého z duopolistů je

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \underline{\underline{\left[\tfrac{1}{3}(M - c)\right]^2}}. \tag{2.16}$$

Při rovnovážných strategiích tedy duopolisté vyrobí dohromady

$$q_1^* + q_2^* = \tfrac{2}{3}(M - c) > \tfrac{1}{2}(M - c) = q_{mon}^*$$

a prodávají tudíž za nižší cenu než monopolista diskutovaný v předchozím příkladu.

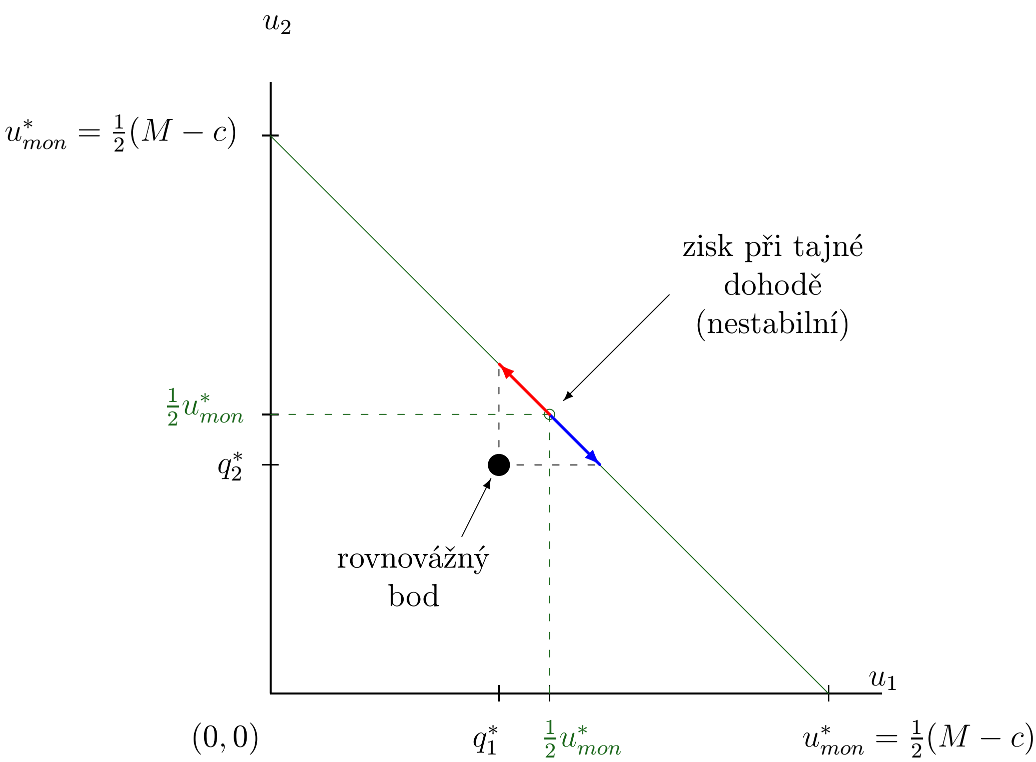
Srovnáme-li výsledky pro monopol a duopol, je zřejmé, že pro duopolisty by bylo nejlepší uzavřít tajnou dohodu o tom, že budou vyrábět dohromady pouze

$$q_1 + q_2 = q_{mon}^* = \tfrac{1}{2}(M - c) \tag{2.17}$$

(takovéto body tvoří zelenou úsečku) a s ohledem na okolnosti si pak rozdělí vzniklý zisk – v symetrických situacích rovným dílem:

$$\left(\tfrac{1}{2}q_{mon}^*, \tfrac{1}{2}q_{mon}^*\right) = \left(\tfrac{1}{4}(M - c), \tfrac{1}{4}(M - c)\right).$$

Tento výstup je však **nestabilní**, neboť pro každého z duopolisů je výhodné se odchýlit ke své nejlepší odpovědi na soupeřovu volbu a získat pro sebe více.



Obr. 2.2: Zisky v Cournotově duopolu

Problém spočívá v tom, že podobné dohody jsou tajné, vzhledem k antimonopolním opatřením zpravidla protizákonné – a tajná dohoda uzavřená v „zakouřené místnosti“ je laciná a legálními prostředky nevymahatelná.

Nakonec – naštěstí pro zákazníka (a k tomu slouží antimonopolní zákony) – jediná dohoda, při níž nemá ani jeden z duopolistů nutkání se odchýlit, je výše uvedený **rovnovážný bod**

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\tfrac{2}{3}q_{mon}^*, \tfrac{2}{3}q_{mon}^*\right) = \left(\tfrac{1}{3}(M-c), \tfrac{1}{3}(M-c)\right).$$

Situace se ovšem radikálně změní při **opakování**, kdy se titíž dva duopolisté budou ve stejné situaci ocitat opakovaně: je-li v každém „kole“ velká pravděpodobnost, že nastane ještě kolo následující, může být pro každého ze zúčastněných výhodnější tajnou dohodu dodržet (viz část **??**).

☛ ***Příklad 3*** **– Cournotův model oligopolu.**
Uvažujme n výrobců téhož produktu, z nichž každý přispívá nezanedbatelnou částí k celkovému množství výrobků na trhu. Nyní se jedná o hru n hráčů, z nichž každý hledá optimální množství q_i, které má vyrábět. Nalezněme rovnovážný bod v této hře.

Zisky jednotlivých oligopolistů jsou analogicky s předchozím příkladem následující:

$$\begin{aligned}
u_1(q_1,\dots,q_2) &= (p-c)q_1 = (M-c-q_1-q_2)q_1\\
u_2(q_1,\dots,q_2) &= (p-c)q_2 = (M-c-q_1-q_2)q_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
u_n(q_1,\dots,q_2) &= (p-c)q_n = (M-c-q_1-q_2)q_n
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Rovněž analogicky s případem duopolu lze nalézt rovnovážný bod. Z podmínek

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial q_1} &= M-c-2q_1-q_2-\cdots-q_n = 0\\
\frac{\partial u_2}{\partial q_2} &= M-c-q_1-2q_2-\cdots-q_n = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial u_n}{\partial q_n} &= M-c-q_1-q_2-\cdots-nq_n = 0
\end{aligned}$$

obdržíme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccc}
2q_1 & + & q_2 & + & \cdots & + & q_n & = & M-c\\
q_1 & + & 2q_2 & + & \cdots & + & q_n & = & M-c\\
\dots & & & & & & & & \\
q_1 & + & q_2 & + & \cdots & + & nq_n & = & M-c
\end{array}$$

Jejím řešením jsou hodnoty:

$$q_1^* = q_2^* = \cdots = q_n^* = \underline{\underline{\frac{M-c}{n+1}}} \tag{2.19}$$

Oligopolisté tedy dohromady vyrobí množství

$$q^* = q_1^* + q_2^* + \cdots + q_n^* = n\frac{M-c}{n+1} = \underline{\underline{\frac{n}{n+1}(M-c)}} \tag{2.20}$$

Z výsledku je patrné, že s tím, jak roste počet výrobců, roste i množství výrobků a klesá cena p^* i celkový zisk u^* firem:

$$p^* = \underline{\underline{\frac{1}{n+1}M + \frac{n}{n+1}c}} \tag{2.21}$$

$$u^* = \underline{\underline{\frac{n}{(n+1)^2}(M-c)^2}} \tag{2.22}$$

Limitním případem oligopolu, kde $n \to \infty$, je **dokonalá soutěž**: zde se na celkové produkci podílí velké množství malých firem, které samy o sobě neovlivní celkové množství. Toto množství je nyní dáno vztahem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}(M-c) = \underline{\underline{(M-c)}}, \tag{2.23}$$

cena, za níž se výrobky budou prodávat, je rovna přímo výrobním nákladům c,

$$p^* = M - (M-c) = \underline{\underline{c}}, \tag{2.24}$$

a zisk jednotlivých firem je roven nule,

$$u^* = \underline{\underline{0}}. \tag{2.25}$$

Výsledky, k nimž jsme při diskusi Cournotových modelů dospěli, lze shrnout do následující tabulky:

	Celkové množství q^*	**Cena za kus p^***	**Celkový zisk u^***
Monopol	$\frac{1}{2}(M-c)$	$\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}c$	$\frac{1}{4}(M-c)^2$
Duopol	$\frac{2}{3}(M-c)$	$\frac{1}{3}M + \frac{2}{3}c$	$\frac{2}{9}(M-c)^2$
Oligopol	$\frac{n}{n+1}(M-c)$	$\frac{1}{n+1}M + \frac{n}{n+1}c$	$\frac{n}{(n+1)^2}(M-c)^2$
Dokonalá soutěž	$(M-c)$	c	0

2.2 DVOJMATICOVÁ HRA

2.2.1 Úvod

Je-li speciálně množina hráčů $Q = \{1, 2\}$ a prostory strategií S_1, S_2 jsou konečné množiny, hovoříme o **dvojmaticové hře**. Přestože se jedná jen o speciální případ, uvádíme zde základní definice z části 2.1 znovu.

Definice 4. Dvojmaticovou hrou budeme rozumět hru dvou hráčů, kde

- Hráč 1 má konečnou množinu strategií $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$
- Hráč 2 má konečnou množinu strategií $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$
- Při volbě strategií (s_i, t_j) je výhra prvního hráče $a_{ij} = u_1(s_i, t_j)$ a výhra druhého hráče $b_{ij} = u_2(s_i, t_j)$; u_1, u_2 se nazývají **výplatní funkce**.

Hodnoty výplatních funkcí budeme znázorňovat pomocí dvojmatice:

		Hráč 2			
	Strategie	t_1	t_2	$\dots$	t_n
Hráč 1	s_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	$\dots$	(a_{1n}, b_{1n})
	s_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	$\dots$	(a_{2n}, b_{2n})
	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	s_m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	$\dots$	(a_{mn}, b_{mn})

Hodnoty výplatních funkcí můžeme znázornit zvlášť pro jednotlivé hráče:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matice A se nazývá **matice hry hráče 1**, matice B se nazývá **matice hry hráče 2**.

Definice 5. Dvojice strategií (s^*, t^*) se nazývá **rovnovážný bod**, právě když platí:

$$u_1(s, t^*) \leq u_1(s^*, t^*) \qquad \text{pro každé } \ s \in S$$

a zároveň (2.26)

$$u_2(s^*, t) \leq u_2(s^*, t^*) \qquad \text{pro každé } \ t \in T.$$

Snadno se ověří, že je-li (s^*, t^*) rovnovážný bod, pak

- a_{ij} je **největší prvek ve sloupci** j matice A : $a_{ij} = \max\limits_{1 \leq k \leq m} a_{kj}$
- b_{ij} je **největší prvek v řádku** i matice B : $b_{ij} = \max\limits_{1 \leq k \leq m} b_{kj}$

☛ ***Příklad 4.*** Uvažujme hru určenou dvojmaticí:

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$\boxed{\mathbf{(2,0)}}$	$(2, -1)$
	s_2	$(1, 1)$	$(3, -2)$

Bod (s_1, t_1) je zřejmě rovnovážný, protože pokud by druhý hráč zvolil svou první strategii t_1 a první hráč se od strategie s_1 odchýlil, tj. zvolil by strategii s_2, pak by si nepolepšil: získal by 1 místo 2. Pokud by naopak první hráč zvolil strategii s_1 a druhý hráč se od t_1 odchýlil, pak by si nepolepšil: obdržel by -1 místo 0.

Bohužel, ne v každé hře existuje rovnovážný bod přímo v ryzích strategiích:

☛ ***Příklad 5.*** Uvažujme hru určenou dvojmaticí:

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	s_2	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Žádný bod v této hře není rovnovážný (prověřte jednotlivé dvojice v tabulce).

Tento problém odstraní tzv. **smíšené strategie**, které udávají **pravděpodobnosti**, s nimiž hráči volí své jednotlivé ryzí strategie, tj. prvky množin S, T.

Definice 6. Smíšené strategie hráčů 1 a 2 jsou vektory pravděpodobností $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$, pro které platí:

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots p_m); \quad p_i \geq 0, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1,$$

$$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots q_n); \quad q_i \geq 0, \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1.$$

Smíšená strategie je tedy pro každého hráče vektor, jehož i-tá složka udává pravděpodobnost, s níž hráč volí i-tou strategii ze svého prostoru strategií. Je to tedy opět jistá strategie, kterou bychom mohli pro prvního hráče popsat takto:

„*použij strategii* $s_1 \in S$ *s pravděpodobností* p_1,

......

použij strategii $s_m \in S$ *s pravděpodobností* p_m."

Podobně pro druhého hráče.

Uvědomme si, že ryzí strategie odpovídají smíšeným strategiím

$$(1, 0, \dots, 0), \ (0, 1, \dots, 0), \ \dots \ (0, 0, \dots, 1).$$

Definice 7. Očekávané hodnoty výhry jsou definovány vztahy:

$$\begin{aligned} &\text{Hráč 1:} \qquad \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} \\ &\text{Hráč 2:} \qquad \pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Věta 3. *Ve smíšených strategiích má každá konečná hra aspoň jeden rovnovážný bod.*

2.2.2 Hledání rovnovážných strategií

Při hledání rovnovážných strategií lze u dvojmaticových her v některých případech eliminovat zjevně nevýhodné, tzv. dominované strategie:

Definice 8. Strategie $s_k \in S$ hráče 1 se nazývá **dominující** jinou strategii $s_i \in S$, jestliže pro každou strategii $t \in T$ hráče 2 platí:

$$u_1(s_k, t) \geq u_1(s_i, t);$$

dominující strategie druhého hráče je definována analogicky.

Postupná eliminace dominovaných strategií

V některých případech existují v dvojmatici dominované strategie. Zbude-li po jejich vyškrtání v dvojmatici jediný prvek, jedná se o rovnovážný bod. Zbude-li více prvků, získali jsme alespoň jednodušší dvojmatici.

☛ ***Příklad 6.*** Uvažujme dvojmaticovou hru určenou dvojmaticí:

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2	t_3
	s_1	$(1, 0)$	$(1, 3)$	$(3, 0)$
Hráč 1	s_2	$(0, 2)$	$(0, 1)$	$(3, 0)$
	s_3	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(5, 3)$

Strategie s_2 prvního hráče je dominovaná strategií s_3, neboť pro každou strategii druhého hráče získá první hráč více při volbě strategie s_3 než při volbě s_2. Stejně tak je strategie t_3 druhého hráče dominována strategií t_2. Protože racionální hráč 1 určitě nebude volit dominovanou strategii s_2 a racionální hráč 2 určitě nebude volit dominovanou strategii t_3, zredukovalo se rozhodování takto:

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$(1, 0)$	$(1, 3)$
	s_3	$(0, 2)$	$\boxed{(2, 4)}$

Strategie t_1 je dominovaná strategií t_2, druhý hráč tedy zvolí t_2. První hráč se nyní rozhoduje mezi hodnotami ve druhém sloupci dvojmatice, a protože $1 < 2$, zvolí strategii s_3. Rovnovážný bod v dané hře je proto (s_3, t_2) – rozmyslete si, že v původní dvojmatici skutečně jednostranné odchýlení od rovnovážné strategie nepřinese výhodu tomu, kdo se odchýlil.

☛ ***Příklad 7.*** Investor chce vybudovat dva hotely. Jeden nazveme Velký (zkratka V); ze získání zakázky na něj se očekává zisk ve výši 15 milionů. Druhý nazveme Malý (zkratka M); ze získání zakázky na něj se očekává zisk ve výši 9 milionů. O získání zakázek se ucházejí dvě firmy, které označíme jako 1 a 2. Žádná z firem nemá kapacitní možnosti na vybudování obou hotelů v plném rozsahu. Každá z firem se může u investora ucházet buď o stavbu jednoho z hotelů nebo nabídnout kooperaci na obou. Investor musí prostřednictvím obou firem stavbu hotelů realizovat a podle došlých nabídek rozdělí zakázky takto:

1. Jestliže se o jeden hotel uchází pouze jedna firma, získá celou tuto zakázku.
2. Jestliže se o jeden hotel ucházejí obě firmy a o druhý žádná, nabídne investor kooperaci oběma firmám na obou hotelech s tím, že se o provedení prací i o zisky budou dělit stejným dílem.
3. Jestliže se jedna z firem uchází o stavbu celého hotelu a druhá nabízí kooperaci na obou, získá firma, která nabízí realizaci celé stavby 60% a druhá 40%, jde-li o V. Jde-li o M, získá firma, která nabízí celou realizaci, 80% a druhá 20%. Na zbývajícím hotelu pak firmy kooperují stejným dílem a o zisk se dělí napůl.

Ať se firmy rozhodnou jakkoli, bude mezi ně vždy rozdělen celý potenciální zisk 15+9=24 milionů. Jaké nabídky je výhodné investorovi učinit, aby byl maximalizován celkový zisk ze zakázek?

Řešení

Výsledky při jednotlivých volbách strategií lze vystihnout pomocí dvojmatice takto:

		Firma 2		
	Strategie	Velký	Malý	Kooperace
	Velký	$\boxed{(12,12)}$	$(15,9)$	$(13,5;10,5)$
Firma 1	Malý	$(9,15)$	$(12,12)$	$(14,7;9,3)$
	Kooperace	$(10,5;13,5)$	$(9,3;14,7)$	$(12,12)$

Strategie „kooperace“ je pro obě firmy dominovaná strategií „velký“, můžeme proto vyškrtnout třetí řádek a třetí sloupec – pro firmu je výhodnější v každé situaci, ať už se protivník zachová jakkoli, zvolit první strategii. K rozhodování nyní zbývá pouze dvojmatice se dvěma řádky a dvěma sloupci (strategie „velký“ a „malý“). Zde je strategie „malý“ dominovaná strategií „velký“ a může být proto také vyškrtnuta. Pro obě firmy tak zbyde strategie „velký“ – skutečně lze snadno ověřit, že se jedná o rovnovážný bod.

Vzájemně nejlepší odpovědi

Rovnovážné strategie s^*, t^* tvořící rovnovážný bod (s^*, t^*) jsou podle definice vždy nejlepší odpovědí jedna na druhou v tom smyslu, že zvolí-li první hráč svou rovnovážnou strategii s^* pak si druhý hráč odchýlením od t^* nemůže polepšit, podobně první si nemůže polepšit odchýlením od s^*, zvolí-li druhý strategii t^*.

Přesněji řečeno:

Definice 9. Nejlepší odpovědí hráče 1 na strategii t hráče 2 se rozumí množina

$$R_1(t) = \{s^* \in S;\ u_1(s^*, t) \geq u_1(s, t) \text{ pro každé } s \in S\}\,. \tag{2.28}$$

Podobně **nejlepší odpovědí hráče 2 na strategii s hráče 1** se rozumí množina

$$R_2(s) = \{t^* \in T;\ u_2(s, t^*) \geq u_2(s, t) \text{ pro každé } t \in T\}\,. \tag{2.29}$$

Má-li každý z hráčů na výběr pouze dvě strategie, představují množiny R_1 a R_2 křivky v rovině – tzv. **reakční křivky**.

Věta 4. (s^*, t^*) *je rovnovážný bod, právě když platí:*

$$s^* = R_1(t^*) \qquad \textit{a zároveň} \qquad t^* = R_2(s^*).$$

Důkaz. Podle definice je $s^* = R_1(t^*)$ právě když pro každé $s \in S$ platí:

$$u_1(s^*, t^*) \geq u_1(s, t^*),$$

podobně $t^* = R_2(s^*)$ právě když pro každé $t \in T$ platí:

$$u_2(s^*, t^*) \geq u_1(s^*, t).$$

Dohromady tak získáme přesně podmínku pro rovnovážný bod. □

Hledáme-li rovnovážný bod, můžeme postupovat tak, že sestrojíme **reakční křivky** a nalezneme jejich **průsečík**.

☛ ***Příklad 8.*** Pro hru z příkladu 4 je nejlepší odpovědí hráče 1 na strategii t_1 hráče 2 strategie s_1, tj.

$$R_1(t_1) = s_1,$$

podobně nejlepší odpovědí hráče 1 na strategii t_2 je strategie s_2, tj.

$$R_1(t_2) = s_2.$$

Podobným způsobem si můžeme rozmyslet, že pro druhého hráče jsou nejlepší odpovědi následující:

$$R_2(s_1) = t_1, \qquad R_2(s_2) = t_1.$$

Dvojici strategií, které jsou navzájem nejlepšími odpověďmi, se v tomto případě podaří nalézt: je to (s_1, t_1) a jak jsme viděli výše, jedná se o rovnovážný bod.

☛ ***Příklad 9.*** Pro hru z příkladu 5 je

$$R_1(t_1) = s_1, \quad R_1(t_2) = s_2.$$

$$R_2(s_1) = t_2, \quad R_2(s_2) = t_1.$$

Žádná dvojice strategií není v tomto případě nejlepší odpovědí jedna na druhou a jak již bylo zmíněno, je třeba uvažovat smíšené strategie.

Hráč 1 bude volit svou první strategii s_1 s pravděpodobností p a druhou strategii s_2 s pravděpodobností $1 - p$. Hráč 2 bude volit svou první strategii t_1 s pravděpodobností q a druhou strategii t_2 s pravděpodobností $1 - q$:

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2	
Hráč 1	s_1	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	…… $\boldsymbol{p}$
	s_2	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	…… $\mathbf{1} - \boldsymbol{p}$
		$\boldsymbol{q}$	$\mathbf{1}- \boldsymbol{q}$	

Očekávané hodnoty výhry jednotlivých hráčů jsou následující:

$$\begin{aligned}
\pi_1(p, q) &= 1 \cdot p \cdot q - 1 \cdot p \cdot (1 - q) - 1 \cdot (1 - p) \cdot q + 1 \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) \\
&= pq - p + pq - q + pq + 1 - p - q + pq = 4pq - 2p - 2q + 1 \\
&= p(4q - 2) - 2q + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_2(p, q) &= -1 \cdot p \cdot q + 1 \cdot p \cdot (1 - q) + 1 \cdot (1 - p) \cdot q - 1 \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) \\
&= -pq + p - pq + q - pq - 1 + p + q - pq = -4pq + 2q + 2p - 1 \\
&= q(-4p + 2) + 2p - 1
\end{aligned}$$

Hledejme nejlepší odpovědi hráče 1 na různé volby pravděpodobností q :

Je-li $\boxed{0 \le q < \frac{1}{2},}$ pak $\pi_1(p, q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce se zápornou směrnicí, která je **klesající**. Největší hodnoty proto bude nabývat pro nejmenší možnou hodnotu p, tedy pro $p = 0$; v tomto případě platí: $R_1(q) = 0$.

Je-li $\boxed{q = \frac{1}{2},}$ pak $\pi_1(p, \frac{1}{2}) = 0$ je **konstantní funkce**, pro kterou je každá hodnota zároveň největší i nejmenší – hráč 1 je proto indiferentní mezi oběma strategiemi, $R_1(\frac{1}{2}) = \langle 0, 1 \rangle$.

Je-li $\boxed{\frac{1}{2} < q \le 1,}$ pak $\pi_1(p, q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce s kladnou směrnicí, která je **rostoucí**. Největší hodnoty proto bude nabývat pro největší možnou hodnotu p, tedy pro $p = 1$; v tomto případě platí: $R_1(q) = 1$.

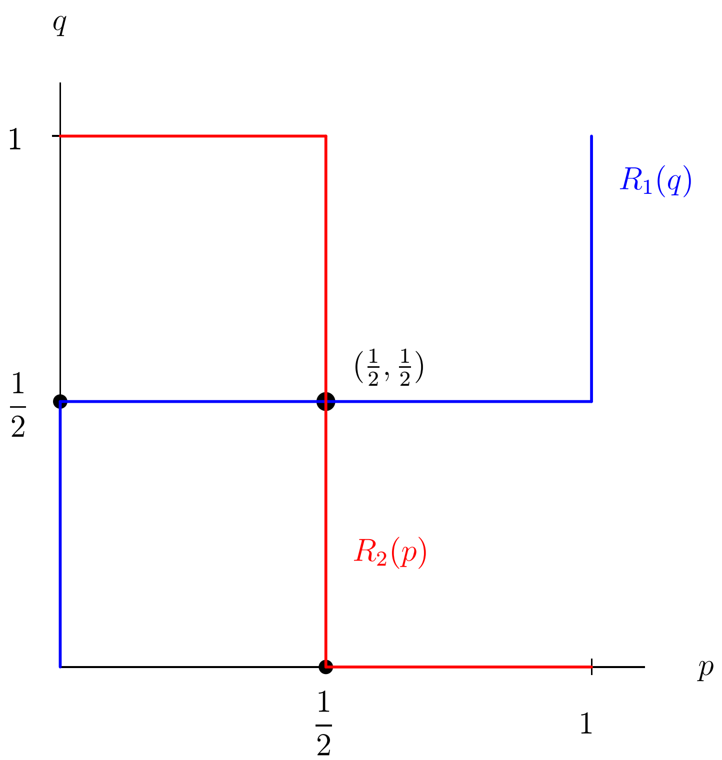
Celkem tedy:

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad 0 \le q < \frac{1}{2} \\ \langle 0,1 \rangle & \text{pro} \quad q = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pro} \quad \frac{1}{2} < q \le 1 \end{cases}$$

Podobně pro druhého hráče bude:

$$R_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \le p \le \frac{1}{2} \\ \langle 0,1 \rangle & \text{pro} \quad p = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{1}{2} \le p \le 1 \end{cases}$$

Křivky můžeme znázornit v rovině takto:



Obr. 2.3: Reakční křivky pro hru z příkladu 5

Rovnovážný bod je tedy

$$\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right).$$

Budou-li se hráči držet těchto strategií, bude očekávaná výhra každého z nich rovna nule.

Užitečný princip při smíšených strategiích:

Smíšená strategie $s^* = (p_1, \ldots, p_m)$ *je nejlepší odpovědí na* t^*, *právě když každá z ryzích strategií, jimž* s^* *přiřazuje nenulovou pravděpodobnost, je nejlepší odpovědí na* t^*.

Hráč, který optimalizuje použitím smíšené strategie, je proto indiferentní mezi všemi ryzími strategiemi, jimž daná smíšená strategie přiřazuje nenulovou pravděpodobnost.

(Uvědomme si, že kdyby byla například ryzí strategie s_1 v dané situaci výhodnější než s_2, pak kdykoli bychom se chystali použít s_2, bylo by lepší použít s_1 – nejednalo by se tedy o rovnovážný bod.)

☛ ***Příklad 10.*** Uvažujme hru určenou dvojmaticí

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$(4, -4)$	$(-1, -1)$
	s_2	$(0, 1)$	$(1, 0)$

Očekávané hodnoty výhry jednotlivých hráčů jsou následující:

$$\begin{aligned}\pi_1(p,q) &= 4pq - p(1-q) + 0 + (1-p)(1-q)\\ &= p(6q-2) - q + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2(p,q) &= -4pq - p(1-q) + (1-p)q + 0\\ &= q(-4p+1) - p\end{aligned}$$

Hledejme nejlepší odpovědi hráče 1 na různé volby pravděpodobností q hráče 2:

Je-li $\boxed{0 \leq q < \frac{1}{3},}$ pak $\pi_1(p,q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce se zápornou směrnicí, která je **klesající**. Největší hodnoty proto bude nabývat pro nejmenší možnou hodnotu p, tedy pro $p = 0$; v tomto případě platí: $R_1(q) = 0$.

Je-li $\boxed{q = \frac{1}{3},}$ pak $\pi_1(p, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$; je to tedy **konstantní funkce**, pro kterou je každá hodnota zároveň největší i nejmenší – hráč 1 je proto indiferentní mezi oběma strategiemi, $R_1(\frac{1}{3}) = \langle 0, 1\rangle$.

Je-li $\boxed{\frac{1}{3} < q \leq 1,}$ pak $\pi_1(p,q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce s kladnou směrnicí, která je **rostoucí**. Největší hodnoty proto bude nabývat pro největší možnou hodnotu p, tedy pro $p = 1$; v tomto případě platí: $R_1(q) = 1$.

Celkem tedy:

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad 0 \leq q < \frac{1}{3} \\ \langle 0, 1\rangle & \text{pro} \quad q = \frac{1}{3} \\ 1 & \text{pro} \quad \frac{1}{3} < q \leq 1 \end{cases}$$

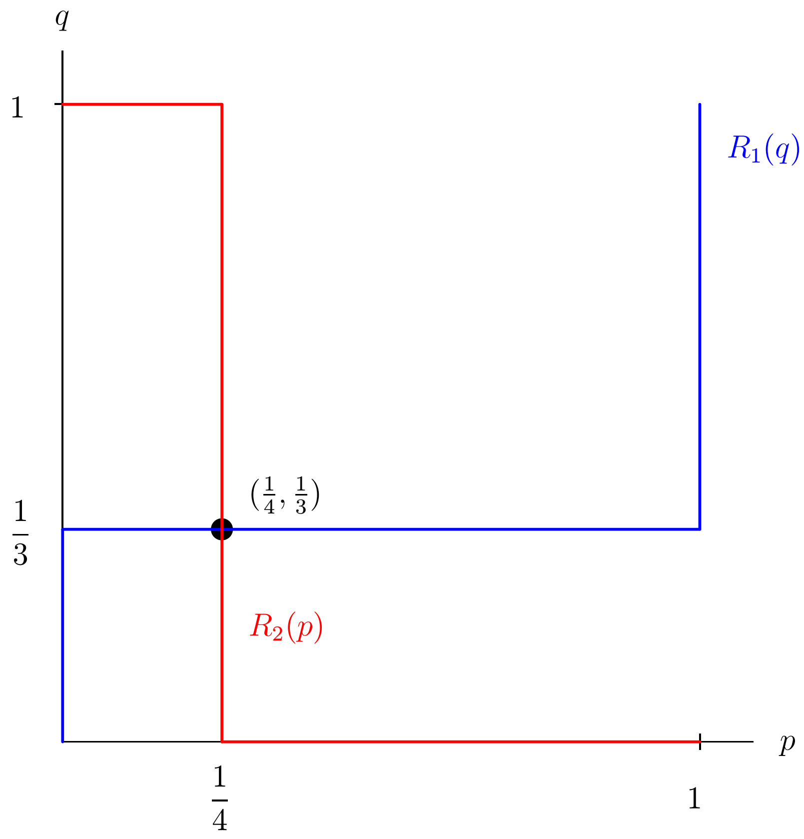
Podobně pro druhého hráče bude:

$$R_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \leq p \leq \frac{1}{4} \\ \langle 0, 1\rangle & \text{pro} \quad p = \frac{1}{4} \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{1}{4} \leq p \leq 1 \end{cases}$$

Křivky můžeme znázornit v rovině takto:

Rovnovážný bod je tedy

$$\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right).$$



Obr. 2.4: Reakční křivky pro hru z příkladu 10

Budou-li se hráči držet těchto strategií, bude očekávaná výhra prvního hráče $\frac{2}{3}$ a druhého $-\frac{1}{4}$.

Na základě principu, že hráč, který optimalizuje použitím smíšené strategie, je indiferentní mezi všemi ryzími strategiemi, jimž daná smíšená strategie přiřazuje nenulovou pravděpodobnost, lze hledání rovnovážného bodu podstatně zjednodušit (reakční křivky nám však slouží pro lepší pochopení, proč uvedený princip funguje):

Má-li být q rovnovážnou strategií hráče 2, musí být hráč 1 indiferentní mezi svými ryzími strategiemi s_1, s_2 (srov. obr. 2.5). Očekávaná hodnota výhry proto musí být stejná pro obě ryzí strategie hráče 1 při smíšené strategii $(q, 1-q)$ hráče 2:

$$\pi_1(1, q) = 4q - (1-q) = 0 + (1-q) = \pi_1(0, q)$$

$$6q = 2 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{3}$$

Podobně má-li být p rovnovážnou strategií hráče 1, musí být hráč 2 indiferentní mezi svými ryzími strategiemi t_1, t_2 (srov. obr. 2.5). Očekávaná hodnota výhry proto musí být stejná pro obě ryzí strategie hráče 2 při smíšené strategii $(p, 1-p)$ hráče 1:

$$\pi_2(p, 1) = -4p + (1-p) = -p + 0 = \pi_2(p, 0)$$

$$1 = 4p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{4}$$

Opět jsme došli k témuž rovnovážnému bodu $\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$.

Obecný návod pro nalezení smíšeného rovnovážného bodu:

- *Uvažujme dvojmaticovou hru* G *s maticemi* A, B.
- *Očekávané hodnoty výplatních funkcí zavedené vztahem (2.27) lze vyjádřit jako funkce proměnných* $p_1, p_2, \dots p_{m-1}$; $q_1, q_2, \dots q_{n-1}$, *a to na základě vztahů*

$$p_m = 1 - (p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-1}), \qquad q_m = 1 - (q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1}).$$

- *Uvažujme soustavu rovnic:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial p_i} &= 0 \quad \textit{pro všechna} \ \ i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_j} &= 0 \quad \textit{pro všechna} \ \ j = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Potom každé řešení soustavy (2.30),

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m); \qquad \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n),$$

kde

$$p_i \geq 0, \qquad q_j \geq 0 \qquad \textit{pro všechna} \ \ i, j$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-1} \leq 1, \qquad q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1} \leq 1,$$

představuje **rovnovážný bod hry ve smíšených strategiích**.

☛ ***Příklad 11.*** Nalezněme rovnovážné strategie ve hře „kámen-nůžky-papír“:

Hráč 2

		Kámen	Nůžky	Papír	
	Kámen	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)	p_1
Hráč 1	Nůžky	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)	p_2
	Papír	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	$1 - p_1 - p_2$
		q_1	q_2	$1 - q_1 - q_2$	

Očekávané hodnoty výhry:

$$\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = p_1q_2 - p_1(1 - q_1 - q_2) - p_2q_1 + p_2(1 - q_1 - q_2) + (1 - p_1 - p_2)q_1 - (1 - p_1 - p_2)q_2$$

$$\begin{aligned} \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) &= \ \ 3p_1q_2 - 3p_2q_1 - p_1 + p_2 + q_1 - q_2 \\ \pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) &= -3p_1q_2 + 3p_2q_1 + p_1 + p_2 - q_1 + q_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = \quad 3q_2 - 1 = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \pi_2}{\partial p_1} = \quad 3p_2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_2} = -3q_2 + 1 = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = -3p_1 + 1$$

Řešení: $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$, proto

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \left((\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}),\ (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})\right)$$

2.2.3 Hry s více rovnovážnými body

Zatím jsme se setkávali s příklady, kdy existoval právě jeden rovnovážný bod, ať již v ryzích strategiích či ve strategiích smíšených. Často však existuje více rovnovážných bodů a objevuje se otázka, který z nich uvažovat jako optimální.

Začněme několika definicemi.

Definice 10. Nechť $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ je rovnovážný bod dvojmaticové hry G, pro který platí:

$$\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq \pi_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) \qquad \text{a zároveň} \qquad \pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq \pi_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$$

pro libovolný rovnovážný bod $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ hry G. Potom se $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ nazývá **dominujícím rovnovážným bodem hry** G.

Existuje-li ve hře jediný rovnovážný bod, je zřejmě dominující (viz příklady výše).

☛ ***Příklad 12.*** Uvažujme hru danou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} \underline{(3,2)} & (-1,1) \\ (-2,0) & \boxed{(6{,}5)} \end{pmatrix}$$

Existují dva rovnovážné body v ryzích strategiích, a to (s_1, t_1) a (s_2, t_2). Druhý z nich dominuje prvnímu, neboť pro hodnoty výplatních funkcí platí: $6 > 3$ a $5 > 2$. Pro oba hráče je nejvýhodnější zvolit druhou strategii.

☛ ***Příklad 13.*** Uvažujme hru danou dvojmaticí

Hráč 2

		t_1	t_2	t_3
	s_1	(-2,-2)	(-1,0)	$\boxed{(8{,}6)}$
Hráč 1	s_2	(0,-1)	$\underline{(5{,}5)}$	(0,0)
	s_3	$\boxed{(8{,}6)}$	(0,-1)	(-2,-2)

V této hře existují tři ryzí rovnovážné body: (s_1, t_3), (s_2, t_2), (s_3, t_1). První a poslední z této trojice jsou dominující. Protože však hráči nemají možnost se domluvit, mohlo by se stát, že i při nejlepší vůli by zvolili strategie (s_1, t_1) nebo (s_3, t_3) a dosáhli by tak těch nejhorších možných výsledků.

Definice 11. Nechť $(\boldsymbol{p}^{(j)}, \boldsymbol{q}^{(j)})$, $j \in J$, jsou rovnovážné body dvojmaticové hry G. Tyto body se nazývají **záměnné**, jestliže se hodnota výplatních funkcí $\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ a $\pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ nezmění, dosadíme-li za $\boldsymbol{p}$ libovolné $\boldsymbol{p}^{(j)}$, $j \in J$ a za $\boldsymbol{q}$ libovolné $\boldsymbol{q}^{(j)}$, $j \in J$.

☛ ***Příklad 14.*** Pozměňme dvojmatici z předchozího příkladu takto:

Hráč 2

		t_1	t_2	t_3
	s_1	$\boxed{(8,6)}$	(-1,0)	$\boxed{(8,6)}$
Hráč 1	s_2	(0,-1)	$\underline{(5,5)}$	(0,0)
	s_3	$\boxed{(8,6)}$	(0,-1)	$\boxed{(8,6)}$

Nyní jsou všechny dominující rovnovážné body (s_1, t_1), (s_1, t_3), (s_3, t_1) a (s_3, t_3) záměnné a nemůže nastat nepříjemnost z předchozího příkladu. Tato skutečnost motivuje následující definici.

Definice 12. Optimálními body hry G se nazývají všechny záměnné dominující rovnovážné body dané hry G. Existují-li v dané hře tyto body, nazývá se hra **řešitelná**.

☛ ***Příklad 15*** – **Konflikt typu manželský spor.**

Představme si manželský pár, v němž mají partneři poněkud odlišné názory na nejlepší využití volného večera: žena dává přednost návštěvě boxu, muž fotbalu. Půjdou-li na box, přinese to větší užitek ženě a menší muži, půjdou-li na fotbal, bude tomu naopak. Půjde-li však každý jinam, bude výsledkem celkové rozladění a užitek bude pro každého z nich menší, než by tomu bylo v případě návštěvy méně preferované akce. Situaci si můžeme znázornit například následující dvojmaticí popisující užitek pro ženu a muže při jednotlivých kombinacích trávení volného večera:

Muž

		Box	Fotbal
Žena	Box	$(2,1)$	$(0,0)$
	Fotbal	$(0,0)$	$(1,2)$

Hra má dva rovnovážné body v ryzích strategiích, a to *(box, box)*, *(fotbal,fotbal)*, a další rovnovážný bod ve strategiích smíšených,

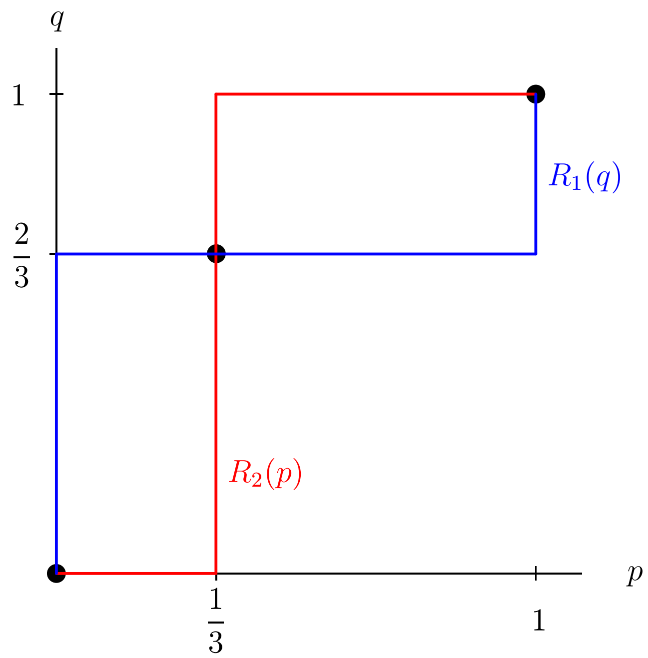
$$\left(\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \ \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\right),$$

jemuž odpovídají očekávané hodnoty výplatní funkce $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Tyto hodnoty se naleznou snadno vyřešením rovnice (po úpravě):

$$\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = p_1(3q_1 - 1) + 1 - q_1 = q_1(3p_1 - 2) - 2p_1 + 2 = \pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}).$$

Reakční křivky by v tomto případě vypadaly takto:



Obr. 2.5: Reakční křivky pro hru typu manželský spor

Tato hra není řešitelná ve smyslu definice 11, neboť žádný z rovnovážných bodů není dominující.

2.3 ROVNOVÁŽNÉ STRATEGIE V BIOLOGII

2.3.1 Úvod

Mezi nejdůležitější aplikace teorie her v zoologii patří aplikace související s bojem, kooperací a komunikací živočichů, koexistencí různých rysů, způsoby páření, konflikty mezi pohlavími, počtem a poměrem pohlaví potomků, rozdělením jedinců v jejich výskytišti; z botanických aplikací pak uveďme otázky klíčení a rozptýlení semen, konkurence kořenů, produkce nektaru, velikosti květů, aj.

Jisté herně-teoretické úvahy lze vysledovat již ve Fisherově knize *The Genetical Theory of Natural Selection* [7] z roku 1930, a to v souvislosti s teorií poměru pohlaví a výběru partnerů pro páření. Explicitní aplikace teorie her na evoluční biologii lze nalézt v pracích W. D. Hamiltona, G. C. Williamse, R. L. Triverse a dalších, až do počátku sedmdesátých let se však jednalo v podstatě o izolované práce, jimž se nedostalo větší pozornosti.[1] Skutečný historický mezník představuje poměrně krátký článek *The Logic of Animal Conflict* [14] J. Maynarda Smitha a G. R. Price z roku 1973, který vyvolal záplavu úspěšných prací a aplikací. Výsledky následujícího desetiletí jsou shrnuty v knize *Evolution and the Theory of Games* [15] Maynarda Smitha.

Brzy se ukázalo nejen to, že principy chování živočichů i rostlin při vzájemných interakcích i celou evoluční teorii lze zatím nejuspokojivěji objasnit z pohledu teorie her, ale dokonce i to, že nejslibnější aplikace teorie her jsou *právě* v biologii! Na jedné straně je zcela pochopitelné, že problematika konfliktu či spolupráce různých živých organismů do teorie her svým obsahem patří, neboť právě to je jejím předmětem, na druhé straně si člověk těžko dokáže představit, že si třeba štěnice či dokonce fíkovník sestaví matematický model rozhodovací situace, v níž se ocitl, vytvoří si přehled možných strategií, ocení si možné výstupy a pak pomocí aparátu teorie her určí optimální strategii. Ovšem ukazuje se, že dokonce čím méně vyvinutá je schopnost organismu přemýšlet, tím lépe se teorie her jeví fungovat!

2.3.2 Hra genů

Ač se nám to může na první pohled zdát nemožné, vysvětlení je zcela jednoduché: jako *hráče* stačí uvažovat *geny*, které řídí chování organismu, tj. volí pro organismus *strategie* v konkrétních situacích; genem přitom budeme rozumět část chromozomu, dostatečně malou na to, aby přežila v mnoha generacích a byla rozšířena v populaci v mnoha kopiích. *Strategií* bude behaviorální fenotyp, tj. chování „předprogramované“ geny – specifikace toho, co bude jedinec dělat v jakékoli situaci, v níž se může ocitnout; konečně *výplatní funkcí* bude reprodukční „zdatnost“, tj. schopnost genu zachovat se a šířit v genotypu populace.[2]

Ani kudlanka, ani její geny samozřejmě nic „nepočítají“, stejně jako světelný paprsek nepočítá svou trajektorii mezi dvěma body po lomu či odrazu a nehledá, kterou trasu urazí v nejkratším čase – jeho trajektorie je jednoduchým důsledkem fyzikálních zákonů.

[1] První explicitní aplikace teorie her na evoluční biologii je obsažena již v Lewontinově pojednání [12]; zde jsou však – na rozdíl od ostatních zmíněných autorů a od toho, co si ukážeme v tomto článku – uvažovány hry živočišných druhů proti přírodě, přičemž cílem druhu je přežití.

[2] Připomeňme, že *genotypem* se rozumí soubor všech genů, které má organismus k dispozici pro zajištění svých biochemických, fyziologických a morfologických vlastností a znaků; *fenotyp* je soubor všech pozorovatelných vlastností a znaků organismu.

Podobně může být jednoduchým důsledkem zákonů populační genetiky, že v rovnovážném stavu jsou maximalizovány jisté veličiny; nic se přitom neříká o záměru či úmyslu.

Zjednodušeně řečeno, k pochopení základních principů evoluce si stačí představit, že kdysi dávno, před čtyřmi miliardami let, vznikla – třeba náhodou – molekula schopná replikace, výroby svých vlastních kopií, a začala se množit. Při replikaci občas došlo k chybám čili *mutacím*, z nichž pravděpodobně většina byla pro svou nositelku nevýhodná a vedla k jejímu brzkému zániku bez možnosti dalšího rozmnožování, některé vedly k molekulám schopným další replikace a některé byly pro své nositelky dokonce výhodou; vedle sebe se tak množily různé replikující se molekuly a s rostoucím počtem mezi sebou musely začít soupeřit o stavební jednotky pro replikaci. Ty méně úspěšné se pak množily méně, případně časem zanikly, úspěšnější se začaly množit více a šířit v prostředí. Chyby v replikaci vedoucí k větší stabilitě či snižující stabilitu ostatních replikátorů byly tímto způsobem uchovávány a množeny. Některé „dravé“ replikátory mohly připadnout na způsob, jak štěpit molekuly jiných a použít vzniklé stavební jednotky na stavbu vlastních kopií, jiné se mohly začít chránit pomocí různých schránek. Dále přežívaly a množily se replikátory, které měly lepší a účinnější *nástroje na přežití*. Tyto nástroje se postupně vylepšovaly miliardy let, ze vzájemných soutěží vždy vítězně vycházely ty úspěšnější replikátory, které zvolily vhodnější *strategii* (ať již doslova vzorec chování či třeba morfologickou vlastnost). Těžko překonatelnými slovy R. Dawkinse:

Jaké podivné nástroje sebezachování přinesla následující tisíciletí? Co mělo být osudem prastarých replikátorů za 4 miliardy let? Nevymřely, neboť jsou dávnými mistry v umění přežít. Nečekejte však, že je uvidíte volně plavat v moři. Této dobrodružné svobody se dávno vzdaly. Dnes se hemží ve velkých koloniích, bezpečně usazeny v gigantických nemotorných robotech, odděleny od okolního světa, s nímž komunikují složitými nepřímými cestami a manipulují prostřednictvím dálkového ovládání. Jsou přítomny ve vás i ve mně, stvořily nás, tělo i mysl, a jejich zachování je konečným důvodem naší existence. Udělaly velký pokrok, tyto replikátory. Dnes se jim říká geny a my jsme jejich nástroje přežití.[3]

Generaci za generací se „schránky genů“, tj. živé organismy řízené geny, utkávají ve vzájemných soutěžích, geny, které svým nositelům zvolily nejlepší strategii a umožnily jim přežití a rozmnožování, se dále šíří a postupně tak dochází k jejich „učení“. Výsledkem je, že se jejich nositelé chovají tak, jako by vědomě hledali optimální strategie a tak, jak by jim předepsala teorie her; místo výpočtu však geny k rovnovážné strategii dospěly uvedeným postupným přizpůsobováním se a přírodním výběrem.

[3] [5], str. 28 (v českém vydání).

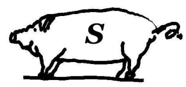
Učení se rovnovážným strategiím

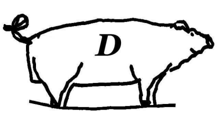
Názornou analogií toho, co se děje v dlouhém časovém horizontu na úrovni genů v evoluci, je učení se jedince, který se opakovaně ocitá ve stejné rozhodovací situaci, v krátkém časovém horizontu jeho života. Snad nejzajímavějším a přitom velmi jednoduchým příkladem je pokus, který v roce 1979 provedli B. A. Baldwin a G. B. Meese s dvojicí prasat ve speciálně upraveném Skinnerově boxu (či spíše chlívku): na jedné straně boxu je páka, jejíž stisknutí uvede do chodu násypku s potravou umístěnou na druhém konci boxu. Ponechá-li se v boxu jedno prase, naučí se, že stisknutí páky způsobí sypání určité dávky potravy a bude postupně přebíhat mezi pákou a korýtkem u násypky. Ovšem Baldwin a Meese do chlívku umístili *dvě prasata* a vytvořili tak možnost, aby jedno prase vykořisťovalo druhé – stálo u korýtka a cpalo se, zatímco druhé by ovládalo páku a běhalo ke korýtku.

Mezi dvojicí prasat se vždy ustanoví hierarchie *dominantní – submisivní*; kdo však v našem pokusu bude stát u korýtka a čekat a kdo bude mačkat páku a běhat? Donutí dominantní prase submisivní k obsluze páky? Situace je schematicky znázorněna na obrázku 1 (dominantní prase je znázorněno jako velké, submisivní jako malé).

Strategie *jsi-li dominantní, seď u koryta, jsi-li submisivní, mačkej páku* vypadá na první pohled rozumně, není však rovnovážná: submisivní prasátko by běhalo od páky ke korýtku, nikdy by však za svou námahu nebylo odměněno, protože dominantní prase by je k potravě nepustilo; výhodnější by pro něj bylo nic nedělat, protože by aspoň neztrácelo energii. Brzy proto s touto zbytečnou snahou skončí a dominantnímu praseti nezbude, než mačkat páku samo. Nakonec tedy bude submisivní prasátko čekat u korýtka a velké bude mačkat páku a pak se vždy vyřítí přes celý chlívek ke korýtku, odstrčí submisivní prasátko, které zatím stačilo aspoň něco pojíst, a dojí zbytek. Pokus skutečně takto dopadl, a to dokonce i v případě, že dávka potravy byla tak malá, že submisivní prasátko stačilo sníst více potravy než dominantní. Dvojice strategií (*mačkej páku*, *seď u koryta*) pro dominantní a submisivní prase je *rovnovážným bodem* ve smyslu výše uvedené definice.

Pokud bychom se na stejnou situaci podívali čistě matematicky z pohledu teorie her, pak bychom si sestavili model pomocí dvojmaticové hry, který by vypadal například takto:

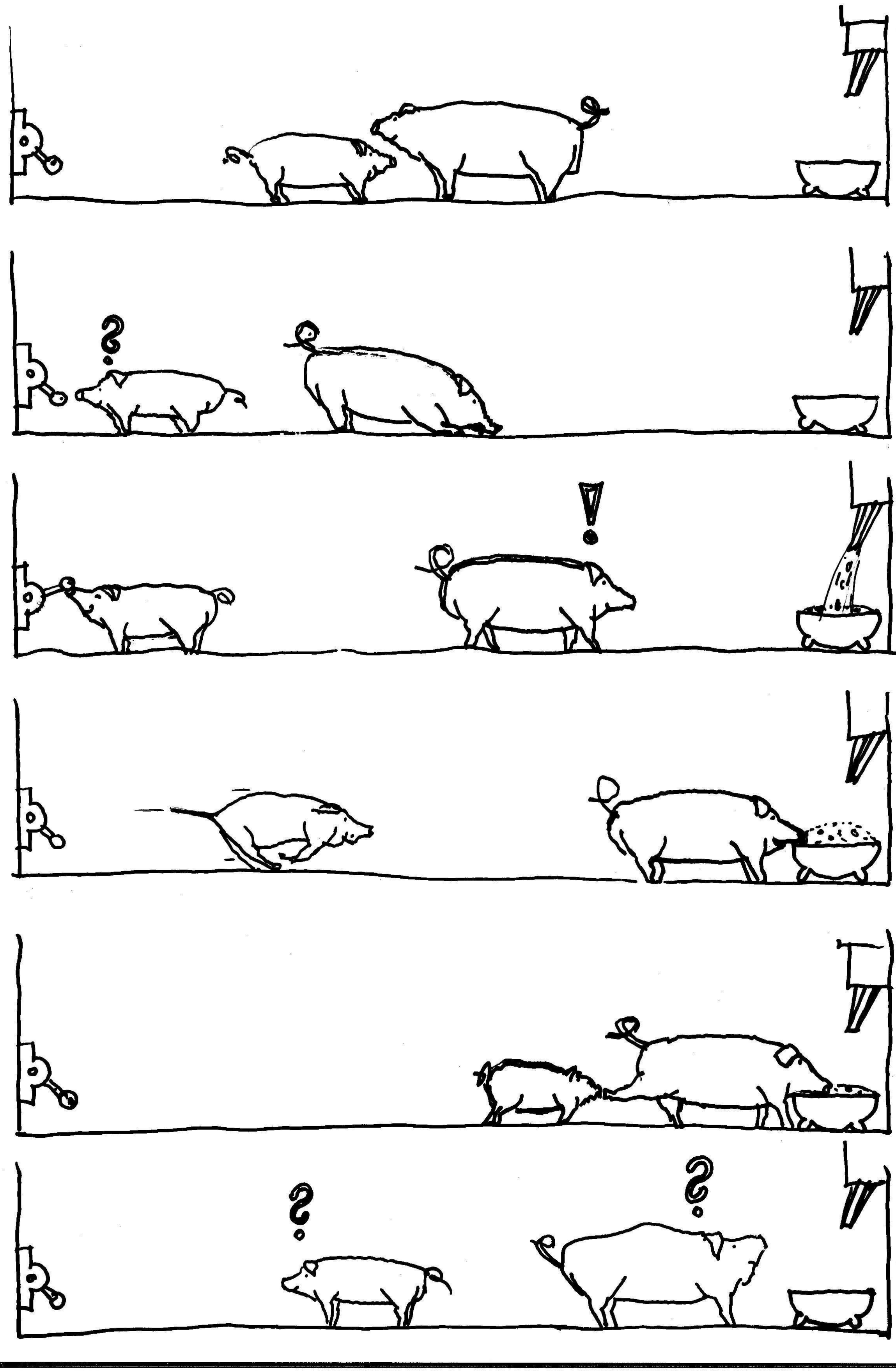




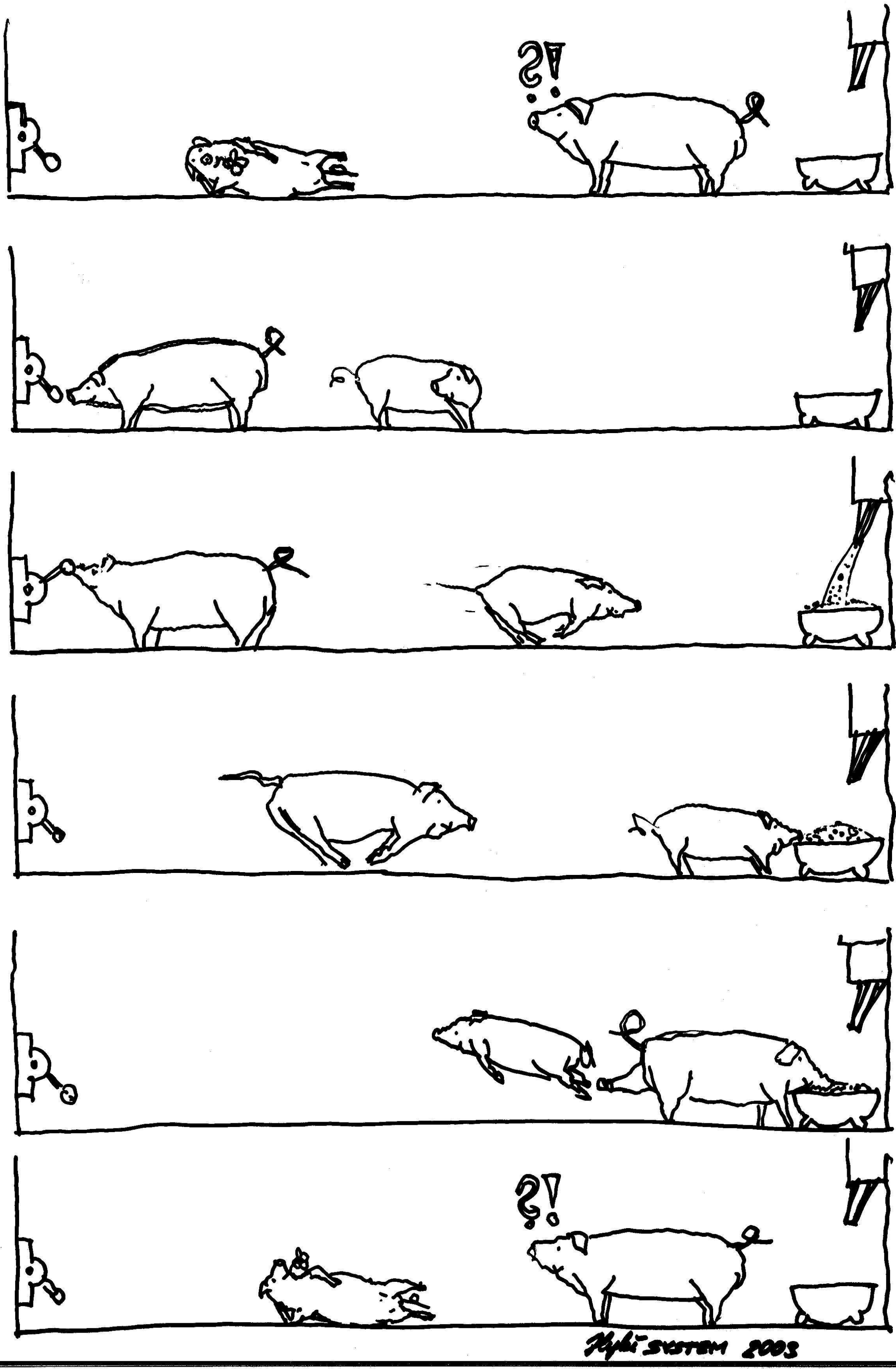
	Mačkej páku		*Seď u korýtka*
Mačkej páku	$(8,-2)$	$\rightarrow$	$\boxed{(\mathbf{4},\mathbf{4})}$
			$\uparrow$
Seď u korýtka	$(10,-2)$	$\rightarrow$	$(0,0)$

V modelu jsme uvažovali zisk z celé dávky potravy v hodnotě 10 jednotek užitku, ztrátu danou námahou spojenou s mačkáním páky a běháním v hodnotě -2 jednotek a množství potravy, které submisivní prasátko stačí pojíst, než je odstrčeno dominantním, v hodnotě 4 jednotek (tyto hodnoty byly zvoleny náhodně a laskavý čtenář si je může libovolně změnit; ze strategického hlediska se nic nezmění, ohodnotíme-li námahu libovolným záporným číslem, získá-li čekající submisivní prasátko nezáporný počet jednotek a nezáporný počet jednotek zbude na prase dominantní).

Racionálně uvažující hráči by dospěli k rovnovážným strategiím následujícím způsobem. Z pohledu druhého hráče – submisivního prasátka – je první strategie dominována



Obr. 1 Pokus se Skinnerým boxem


?!
?!
SYSTEM 2003

druhou a může být proto rovnou eliminována. První hráč – dominantní prase – předpokládá racionalitu svého protivníka a uvědomí si, že bude volit svou druhou strategii; rozhoduje se tedy mezi ziskem 0 a 6 jednotek, což jej dovede k volbě první strategie. Postupným eliminováním dominovaných strategií tak racionální rozhodovatelé došli ke stejnému závěru jako naše pokusná zvířata – ke dvojici rovnovážných strategií (*mačkej páku*, *seď u koryta*). Snadno se nahlédne, že tato dvojice strategií splňuje podmínku (2.2).

2.3.3 Evolučně stabilní strategie

Vraťme se ještě na chvilku ke hře genů. Několikrát v tomto textu padlo slovo *stabilní strategie*. Ústředním pojmem v celé evoluční teorii založené na teorii her je tzv. *evolučně stabilní strategie*, kterou biologové definují velmi obecně jako strategii, kterou – je-li přijata všemi členy populace – nemůže překonat žádná jiná v tom smyslu, že mutant, který by ji používal, by byl méně úspěšný v reprodukci. Ve speciálním případě populace s nekonečně mnoha členy, kteří se množí asexuálně a navzájem se střetávají vždy po dvojicích (tyto konflikty můžeme modelovat pomocí hry dvou hráčů v normálním tvaru s výplatními funkcemi u_1, u_2), musí evolučně stabilní strategie I splňovat následující podmínky: pro každou strategii $J \neq I$ platí:

$$\begin{aligned} & u_1(I,I) > u_1(J,I) \\ \text{nebo} \quad & u_1(I,I) = u_1(J,I) \quad \text{a zároveň} \quad u_1(I,J) > u_1(J,J) \end{aligned} \tag{2.31}$$

(v jiných konkrétních situacích odvozují obdobné matematické podmínky, které zde již nebudeme uvádět). Uvědomme si, že je-li I evolučně stabilní strategie, pak (I,I) představuje dvojici rovnovážných strategií.

2.3.4 Hrdličky a jestřábi

Základní model, který je sice velmi zjednodušený, avšak který ukazuje podstatu věci, je následující. Uvažujme populaci jednoho druhu, která při boji staví pouze na dvou různých strategiích; nazvěme je strategie *jestřába* a strategie *hrdličky*. Pojmenování je obrazné a pouze vystihuje způsob chování: jestřáb bojuje vždy tvrdě a nesmlouvavě a vzdává se jen tehdy, je-li vážně zraněn (či zabit), hrdlička se uchyluje pouze k symbolické hrozbě a při přímém útoku prchá nezraněna. Předmětem boje může být například výhodné teritorium, které vede ke zvýšení „zdatnosti“ jeho uživatele (a tím i jeho genů) o hodnotu V; celková zdatnost poraženého přitom nemusí být nulová – jedinec jen zůstává v horším teritoriu. Ztrátu ze zranění oceňme hodnotou C. Budeme předpokládat, že všichni jestřábi jsou stejně schopní bojovníci, takže při vzájemném střetnutí každý z nich s pravděpodobností 1/2 zvítězí a se stejnou pravděpodobností bude zraněn a poražen. Při střetnutí dvou hrdliček bude teritorium sdíleno rovným dílem; jedná-li se o nedělitelný zdroj, budeme opět uvažovat náhodné rozdělení mezi obě soupeřky. Příslušná dvojmaticová hra pro libovolnou dvojici členů populace vypadá takto:

	Jestřáb	*Hrdlička*
Jestřáb	$\left(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}\right)$	$(V, 0)$
Hrdlička	$(0, V)$	$\left(\frac{V}{2}, \frac{V}{2}\right)$

Strategie *hrdlička* není nikdy evolučně stabilní, protože populace hrdliček může být napadena jestřábím mutantem, jemuž se v populaci hrdliček daří lépe než hrdličkám samotným.

Je-li $V > C$, pak evolučně stabilní strategií je *jestřáb* – srov. (2.31). Pro zajímavost poznamenejme, že například u *rypouše sloního* je cena za vítězství ohromná: téměř úplný monopol nad harémem samic; souboje také bývají velmi zuřivé.

Je-li $V < C$, pak není ani jedna z ryzích strategií evolučně stabilní (hra nemá ani žádný rovnovážný bod) a ke slovu přicházejí *smíšené* strategie: *s pravděpodobností p použij strategii jestřáb, s pravděpodobností* $1 - p$ *použij strategii hrdlička.* Běžnými prostředky teorie her lze snadno odvodit, že rovnovážnou strategií je smíšená strategie obsahující strategii *jestřáb* s pravděpodobností $p = V/C$; rovněž se bez problémů ukáže, že tato strategie je evolučně stabilní.

I když se v přírodě setkáváme spíše s tzv. genetickým polymorfismem, kdy určitá část populace používá jednu strategii a zbytek druhou, jsou druhy, které používají skutečné smíšené strategie, například vosa *severoamerická kutilka.* Každá samice se stará sama o sebe, svůj život zasvěcuje shánění přístřeší a potravy pro své larvální potomstvo: vyhloubí tunelovou noru s komůrkou na dně, vyrazí na lov sarančete, svou oběť paralyzuje a odtáhne do nory; když nashromáždí čtyři až pět sarančat, položí na hromadu vajíčko a chodbu uzavře. Larva pak v komůrce, dokud nedospěje, pojídá paralyzovaná (avšak živá a tedy čerstvá) sarančata. Každá kutilka má přitom k dispozici dvě možné strategie: hloubit vlastní noru, anebo obsadit noru cizí, již vyhloubenou (to však v sobě nese riziko, že nora může být obsazená, což vosa zvenku nepozná). Snadno si představíme, že v případě, že by byla příliš často používána druhá strategie, nebylo by co obsazovat a vyplatilo by se hloubit vlastní hnízdo, velká dostupnost chodeb by naopak upřednostňovala obsazování.

J. Brockmannová, R. Dawkins a A. Grafen studovali časové a energetické výdaje a reprodukční zisky kutilek a ukázali, že na základě pozorování a kvantitativních měření je jednak skutečně možné určit konkrétní a reálné hodnoty *výplatních funkcí*, jednak ukázali, že kutilky používají „opravdové“ smíšené strategie: každá kutilka někdy kope, někdy obsazuje cizí hnízdo. Pravděpodobnosti vypočítané z modelu přitom odpovídaly terénním pozorováním.[4]

Hru „na hrdličky a jestřáby“ je možné komplikovat přidáváním libovolného množství dalších strategií, zaváděním různých asymetrií apod.

[4]Uvedené výsledky jsou popsány v práci [4].

Literatura

[1] Axelrod, R.: *The Evolution of Cooperation.* New York, Basic Books, 1984.

[2] Baldwin, B. A. – Meese, G. B.: *Social Behaviour in Pigs Studied by Means of Operant Conditioning.* Animal Behaivour **27**(1979), 947–957.

[3] Binmore, K.: *Fun and Games.* Lexington, D. C. Heath, 1992.

[4] Brockmannová, H. J. – Dawkins, R. – Grafen, A.: *Evolutionarily Stable Nesting Strategy in a Digger Wasp.* Journal of Theoretical Biology **77**(1979), 473–496.

[5] Dawkins, R.: *The Selfish Gene.* Oxford, Oxford University Press, 1976 (český překlad V. Kopského *Sobecký gen*, Praha, Mladá Fronta).

[6] Dawkins, R.: *The Blind Watchmaker.* Harlow, Longman, 1986 (český překlad T. Grima *Slepý hodinář*, Praha, Paseka, 2002).

[7] Fisher, R. A.: *The Genetical Theory of Natural Selection.* Oxford, Clar. Press, 1930.

[8] Hamilton, W. D.: *The Genetical Evolution of Social Behaviour I, II.* Journal of Theoretical Biology **7**(1964), 1–16; 17–52.

[9] Hamilton, W. D.: *Extraordinary Sex Ratios.* Science **156**(1967), 477–488.

[10] Hamilton, W. D.: *Gamblers since Life Began: Barnacles, Aphids, Elms.* Quaterly Review of Biology **50**(1975), 175–180.

[11] Hykšová, M.: *Teorie her – prezentace a motivace. In: Sborník příspěvků Mezinárodní konference prezentace matematiky,* Liberec, TUL, 2003, 35–42.

[12] Lewontin, R. C.: *Evolution and the Theory of Games.* Journal of Theoretical Biology **1**(1961), 382–403.

[13] Maňas, M.: *Teorie her a optimální rozhodování.* Praha, SNTL, 1974.

[14] Maynard Smith, J. – Price, G. R.: *The Logic of Animal Conflict.* Nature **246**(1973), 15–18.

[15] Maynard Smith, J.: *Evolution and the Theory of Games.* Cambridge, Cambridge University Press, 1982.

[16] Trivers, R. L.: *The Evolution of Reciprocal Altruism.* Quaterly Review of Biology **46**(1971), 35–57.

[17] Williams, G. C.: *Adaptation and Natural Selection.* Princeton, Princeton University Press, 1966.

[18] Williams, G. C.: *Sex and Evolution.* Princeton, Princeton University Press, 1975.

VĚZŇOVO DILEMA

Příklady

☛ ***Příklad 16*** – **Vězňovo dilema 1**

Jedna z interpretací konfliktu, kterému se říká *vězňovo dilema*, zní takto:

Píší se třicátá léta dvacátého století. V tehdejším Sovětském svazu cestuje jistý dirigent vlakem do Moskvy, kde jej večer čeká koncert se symfonickým orchestrem. Pročítá si partituru a soustředí se na náročné představení. Při této činnosti jej pozorují dva agenti KGB, kteří si ve své nevzdělanosti myslí, že partitura je jakási tajná šifra. Dirigentova snaha o vysvětlení, že je to přece Čajkovskij, je zcela marná – je zatčen a uvězněn. Druhý den jej navštíví naše dvojice agentů se slovy: „Raději byste měl všechno přiznat. Našli jsme toho vašeho kamaráda Čajkovského a ten už mluví …“

Dva nevinní lidé, jeden proto, že studoval partituru, a druhý proto, že se shodou okolností jmenoval Čajkovskij, se tak ocitnou ve vězení, postaveni před následující problém: pokud by oba statečně zapírali, navzdory fyzickému a psychickému týrání, putovali by oba na tři roky do Gulagu, pak by byli propuštěni. Pokud by se jeden z nich k fiktivnímu zločinu špionáže doznal a udal zároveň toho druhého, který by zapíral, bylo by mu to přičteno jako polehčující okolnost a dostal by jen jeden rok, zatímco druhý by byl odsouzen na 25 let. Pokud by se doznali oba, byli by posláni do Gulagu na 10 let. Situaci lze znázornit dvojmaticí:

		Hráč 1	
		Zapírat	Přiznat
Hráč 2	Zapírat	$(-3, -3)$	$(-25, -1)$
	Přiznat	$(-1, -25)$	$\boxed{(-10, -10)}$

Dilema se této situaci říká z toho důvodu, že všeobecně nejvýhodnější by bylo, kdyby oba zapírali a dostali tak 3 roky vězení; problém je však jednak v tom, že se nemohou domluvit, jednak v tom, že i kdyby se domluvili, stále je zde velké pokušení promluvit a vyváznout s pouhým jedním rokem. A i kdyby byl každý z nich solidární, může si o svém kolegovi myslet, že podlehne pokušení či mučení a dozná se – pak by mu hrozilo 25 let, což je ještě mnohem horší než 10 let. Každý proto raději zvolí svou druhou strategii a dozná se.

Skutečně, strategie *přiznat* dominuje strategii *zapírat* a dvojice *(přiznat, přiznat)* je jediným rovnovážným bodem ve hře.

☛ ***Příklad 17*** – **Vězňovo dilema 2**

Obecněji se vězňovým dilematem rozumí každá situace typu (srov. příkl. 16):

		Hráč 1	
		Spolupráce	Zrada
Hráč 2	Spolupráce	(*odměna, odměna*)	(*oškubání, pokušení*)
	Zrada	(*pokušení, oškubání*)	(*trest, trest*)

kde

$$\textit{oškubání} < \textit{trest} < \textit{odměna} < \textit{pokušení}.$$

Pod spoluprací si můžeme představit prakticky cokoli – dvojice strategií (*spolupráce, spolupráce*) odpovídá vzájemně solidárnímu jednání; hráč 1 například pomůže hráči 2 postavit dům, hráč 2 mu to vzápětí oplatí a oba získají jistou hodnotu ve výši *odměna*. Dvojice (*spolupráce, zrada*) odpovídá situaci, kdy hráč 1 pomůže hráči 2, ten však podlehne *pokušení* a první hráč skončí *oškubán*. Dvojice (*zrada, zrada*) představuje stav, kdy hráči navzájem nespolupracují, popř. se přímo navzájem poškozují a jsou za to *potrestáni*.

Kde se například vězňovo dilema objevuje

- **Budování čističky odpadních vod** (dva velké hotely u jednoho jezera):
  - *Spolupráce* = vybudovat čističku
  - *Zrada* = nevybudovat čističku
  - *Odměna* = čistá voda přitáhne turisty – zákazníky, zvýší se zisky, museli jsme však investovat jistou částku
  - *Pokušení* = využít zlepšení způsobené vybudováním čističky u druhého hotelu, ale přitom ušetřit na investici
  - *Trest* = špinavá voda odláká turisty, kteří raději pojedou jinam, zisk klesne na nulu
- **Duopolisté:**
  - *Spolupráce* = dohodnout se na optimálním množství výroby (odpovídajícím monopolu)
  - *Zrada* = porušit dohodu
  - *Odměna* = největší zisk pro obě strany
  - *Pokušení* = vyrábět o něco více a získat více na úkor druhého duopolisty
  - *Trest* = celkově menší zisk pro oba

- **Vybírání čmelíků:**
  - *Spolupráce* = vzájemné vybírání
  - *Zrada* = nechat si vybrat čmelíky, ale neoplatit to
  - *Odměna* = zbavím se čmelíků, nicméně za to zaplatím vybráním Vašich
  - *Pokušení* = zbavím se čmelíků a přitom mne to nestojí žádnou námahu
  - *Trest* = čmelíků se nezbavím a trápení s nimi je horší než trocha námahy s vybíráním Vašich
- **Veřejná doprava:**
  - *Spolupráce* = poctivě platit
  - *Zrada* = neplatit
  - *Odměna* = veřejná doprava funguje, mohu ji využívat, jistou částku měsíčně však za to zaplatím
  - *Pokušení* = využívat, ale neplatit
  - *Trest* = (téměř) nikdo neplatí, doprava je zrušena, musím si platit taxi, což je mnohem dražší než původní poplatek za veřejnou dopravu
- **Koncesionářské poplatky:**
  - *Spolupráce* = platit
  - *Zrada* = neplatit
  - *Odměna* = veřejnoprávní rozhlasové či televizní vysílání funguje, mohu jej sledovat, ale něco málo mne to stojí
  - *Pokušení* = neplatit, ale sledovat
  - *Trest* = (téměř) nikdo neplatí, vysílání je zrušeno
- **Bitva:**
  - *Spolupráce* = bojovat
  - *Zrada* = schovat se
  - *Odměna* = vítězství, ovšem také riziko zranění
  - *Pokušení* = vítězství bez rizika zranění
  - *Trest* = nepřítel zvítězí bez boje
- **Nukleární zbrojení:**
  - *Spolupráce* = odzbrojit
  - *Zrada* = zbrojit
  - *Odměna* = svět bez jaderného nebezpečí
  - *Pokušení* = být jako jediný vyzbrojen
  - *Trest* = všichni zbrojí, platí za to velké částky a navíc hrozí nebezpečí

Opakované vězňovo dilema

Jak jsme viděli v příkladu 16, uskuteční-li se hra jednou a není možné dopředu uzavřít skutečně závaznou dohodu, zvolí racionální hráč dominující strategii *zrada*. Ocitá-li se však daná dvojice hráčů ve stejné situaci opakovaně, v nekonečném či neurčitém časovém horizontu, pak *spolupráce* není nutně iracionální:

☛ ***Příklad 18*** – **Vězňovo dilema 3**

Uvažujme následující modifikaci vězňova dilematu:

		Hráč 1	
		Spolupráce	Zrada
Hráč 2	Spolupráce	$(3, 3)$	$(0, 5)$
	Zrada	$(5, 0)$	$(1, 1)$

Představme si, že hra se bude opakovat, přičemž v každém kole je pravděpodobnost, že se uskuteční ještě i kolo následující, rovna $2/3$.

Budou-li dva hráči spolupracovat, pak očekávaná hodnota výhry je pro oba rovna

$$\pi_S = 3 + 3 \cdot \tfrac{2}{3} + 3 \cdot (\tfrac{2}{3})^2 + 3 \cdot (\tfrac{2}{3})^3 + \cdots + 3 \cdot (\tfrac{2}{3})^n + \cdots$$

(uvědomme si, že pravděpodobnost, že nastane druhé kolo, je $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = (\frac{2}{3})^2$, pravděpodobnost, že nastane třetí kolo, je $(\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{2}{3} = (\frac{2}{3})^3$, atd.)

Strategie v opakované hře je kompletní plán, jak se hráč zachová v průběhu celé hry ve všech možných situacích, v nichž se může ocitnout.

Uvažujme například strategii **nevraživec**:

Spolupracuj, dokud Tě druhý nezradí, pak vždy zraď.

Setkají-li se dva nevraživci, budou navždy spolupracovat – dokud bude hra trvat – a každý získá hodnotu π_S.

Snadno lze dokonce ukázat, že dvojice strategií

(*nevraživec, nevraživec*)

je **rovnovážný bod** dané hry.

Představme si, že jeden z hráčů se od strategie *nevraživec* odchýlí, tj. zvolí jinou strategii, kterou si označíme jako *deviant*. V některém kole tedy tento *deviant* zradí, přestože protihráč dosud spolupracoval (toto kolo může být i první). Nechť k této odchylce došlo poprvé v kole $n + 1$. Protože *deviant* hraje s *nevraživcem*, v dalším kole bude protivník volit strategii *zrada* a již u ní zůstane. *Deviant* tedy nemůže získat více než

$$\pi_D = 3 + 3 \cdot \tfrac{2}{3} + 3 \cdot (\tfrac{2}{3})^2 + 3 \cdot (\tfrac{2}{3})^3 + \cdots + 3 \cdot (\tfrac{2}{3})^{n-1} + 5 \cdot (\tfrac{2}{3})^n + 1 \cdot (\tfrac{2}{3})^{n+1} + \cdots$$

(mohl by získat ještě méně, kdyby v některém z následujících kol volil *spolupráci*).

Protože

$$\begin{aligned}
\pi_N - \pi_D &= (3-5)\cdot(\tfrac{2}{3})^n + (3-1)\cdot(\tfrac{2}{3})^{n+1} + \cdots + (3-1)\cdot(\tfrac{2}{3})^{n+k} + \cdots \\
&= -2\cdot(\tfrac{2}{3})^n + 2\cdot(\tfrac{2}{3})^{n+1} + \cdots + 2\cdot(\tfrac{2}{3})^{n+k} + \cdots \\
&= (\tfrac{2}{3})^n \left(-2 + 2\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = (\tfrac{2}{3})^n \cdot 2 > 0,
\end{aligned}$$

nevyplatí se odchýlit.

Podobně můžeme uvažovat strategii *půjčka za oplátku*, která začne spoluprací a pak v každém kole vždy opakuje předchozí tah protivníka. Dvojice

(*půjčka za oplátku, půjčka za oplátku*)

rovněž představuje rovnovážný bod.

Příklady strategií v opakovaném vězňově dilematu

Vždy spolupracuje (Always Cooperates)

Vždy zradí (Always Defects)

Nevraživec (Grudger, Spiteful): Spolupracuje, dokud jej protihráč nezradí, pak navždy zrazuje (neodpouští).

Půjčka za oplátku (Tit for Tat): V prvním tahu spolupracuje, v dalších opakuje tah protihráče (zradí-li v jednom kole protihráč, v kole následujícím půjčka za oplátku zradí, na spoupráci odpoví v následujícím kole spoluprací).

Podezíravá půjčka za oplátku (Mistrust): V prvním kole zradí, v dalších se chová jako půjčka za oplátku – opakuje předchozí tah protihráče.

Naivní pokušitel (Naive Prober): Jako půjčka za oplátku, ale občas, zradí (např. náhodně, v průměru jednou za 10 tahů).

Kajícný pokušitel (Remorseful Prober): Jako naivní pokušitel, ale snaží se o ukončení cyklu S–Z způsobeného vlastní zradou: na zradu, která následuje jako odpověď na jeho vlastní nespravedlivou zradu, jednou zareaguje spoluprací

Nelítostná půjčka za oplátku (Hard Tit for Tat): Spolupracuje s výjimkou situace, kdy protivník zradil aspoň jednou v posledních dvou kolech.

Postupná (Gradual): Spolupracuje, dokud protivník nezradí. Potom po první zradě jednou zradí a dvakrát spolupracuje, po druhé zradě dvakrát po sobě zradí a dvakrát spolupracuje, ..., po n-té zradě n-krát po sobě zradí a dvakrát spolupracuje, atd.

Postupný zabiják (Gradual Killer): V prvních pěti kolech zradí, pak dvakrát spolupracuje. Jestliže protivník v 6. a 7. kole zradí, pak postupný zabiják zůstane navždy u zrady, v opačném případě navždy spolupracuje.

Nelítostná půjčka za dvě oplátky (Hard Tit for 2 Tats): Spolupracuje kromě případu, kdy protivník zradil aspoň dvakrát po sobě v posledních třech kolech.

Něžná půjčka za dvě oplátky (Soft Tit for 2 Tats): Spolupracuje kromě případu, kdy protivník zradil ve dvou po sobě jdoucích kolech.

Pomalá půjčka za oplátku (Slow Tit for Tat): Hraje S–S, potom pokud protivník hrál dvakrát po sobě stejný tah, hraje tah opačný.

Periodicky ZZS (Periodically DDC): Hraje periodicky Zrada–Zrada–Spolupráce

Periodicky SSZ (Per. CCD): Hraje periodicky Spolupráce–Spolupráce–Zrada

Něžná většinová (Soft Majority): Spolupracuje, pak použije strategii, kterou protivník použil nejčastěji; jsou-li četnosti obou protivníkových strategií stejné, pak spolupracuje.

Krutá většinová (Hard Majority): Spolupracuje, pak použije strategii, kterou protivník použil nejčastěji; jsou-li četnosti obou protivníkových strategií stejné, pak zradí.

Pavlov: Spolupracuje právě tehdy, když v předchozím kole zvolili oba hráči stejnou strategii, jinak zradí.

Pavlov P_n: Přizpůsobuje pravděpodobnost splupráce v jednotkách $1/n$ podle toho, jak si vedla v předchozím kole: Jestliže v předchozím kole spolupracovala s pravděpodobností p, pak v následujícím spolupracuje s pravděpodobností

$p \oplus \frac{1}{n} = \min(p + \frac{1}{n}, 1)$, získala-li Od;

$p \ominus \frac{1}{n} = \max(0, p - \frac{1}{n})$, získala-li T;

$p \oplus \frac{2}{n}$, získala-li P;

$p \ominus \frac{2}{n}$, získala-li Os.

Náhodná (Random): Spolupracuje s pravděpodobností $1/2$.

Nelítostná Joss (Hard Joss): Hraje jako půjčka za oplátku, ale spolupracuje jen s pravděpodobností 0,9 (Joss – čínská modla).

Něžná Joss (Soft Joss): Hraje jako půjčka za oplátku, ale zradí jen s pravděpodobností 0,9.

Velkorysá půjčka za oplátku (Generous Tit for Tat): Hraje jako půjčka za oplátku, ale po zradě spolupracuje s pravděpodobností

$$g(Od, T, P, Os) = \min\left(1 - \frac{P - Od}{Od - Os}, \frac{Od - T}{P - T}\right).$$

Lepší a lepší (Better and Better) Zradí s pravděpodobností (1000 − pořadí kola)/1000, tedy s pravděpodobností menší a menší.

Horší a horší (Worse and Worse): Zradí s pravděpodobností pořadí kola/1000, tedy s pravděpodobností větší a větší.

Axelrodův turnaj

V roce 1981 uspořádal Robert Axelrod počítačový turnaj, v němž se 15 různých strategií pro opakované vězňovo dilema, zaslaných předními herními teoretiky, utkaly každá s každou v zápasech o 200 tazích (celkem 15×15 zápasů). Sčítaly se vždy body získané na základě matice z příkladu 18.

Ke značnému překvapení všech zúčastněných získala nejvíce bodů velmi jednoduchá strategie: *půjčka za oplátku*, kterou do soutěže zaslal Anatol Rapoport, psycholog a odborník na teorii her.

V rozboru turnaje Axelrod rozlišil následující kategorie strategií:

- **Milá strategie** – nikdy nezradí jako první (jen v odvetě),

  Podlá strategie – aspoň někdy zradí jako první.

  V soutěži bylo 8 milých strategiích a obsadily prvních 8 míst (nejúspěšnější získala 504,5 bodů, což odpovídá 84% standardu 600 bodů, další milé získaly 83,4%–78,6%; nejúspěšnější z podlých získala 66,3%).

- **Odpouštějící strategie** – může odplácet, ale má krátkou paměť, zapomíná staré křivdy,

  Neodpouštějící strategie – staré křivdy nikdy nezapomene, nevymaní se z cyklu vzájemných odvet ani proti smířlivému protivníkovi.

- **Nezávistivá strategie** – jde jí o vlastní zisk, ne o porážku soupeře,

  Závistivá strategie

- **Vyprovokovatelná strategie** – nenechá se „oškubat“ nemilými strategiemi,

  Nevyprovokovatelná strategie

Druhý turnaj

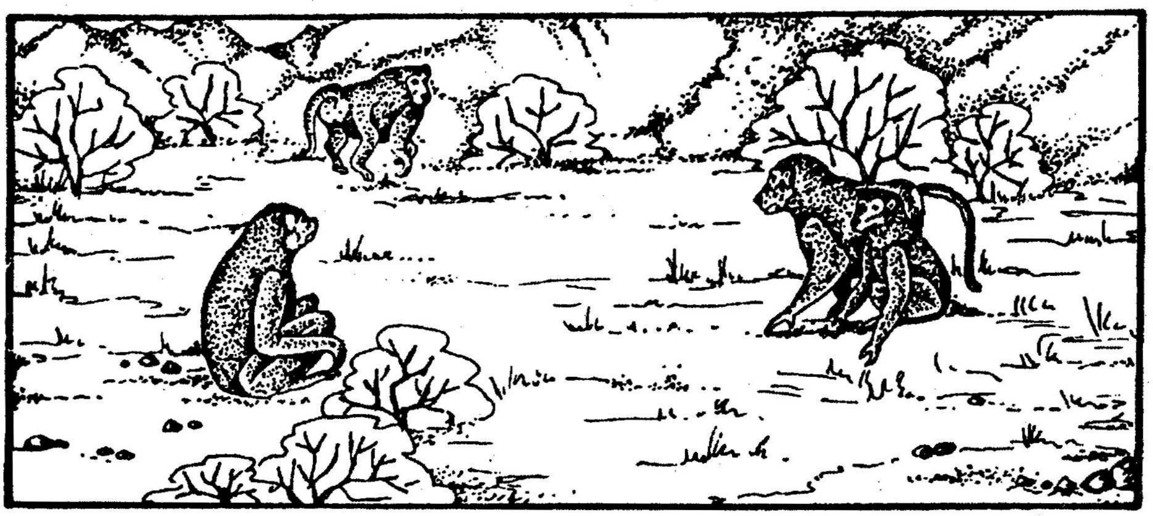
V druhém Axelrodově turnaji, který následoval nedlouho po prvním, nebyl pevně stanoven počet kol, ale turnaj probíhal analogicky s evolucí přírodním výběrem: všem strategiím byla přiřazena výhra určující počet potomků (při stálém celkovém počtu jedinců) – úspěšnější strategie se množily na úkor méně úspěšných, asi po 1000 generacích bylo dosaženo stability. I zde zvítězila *půjčka za oplátku.*

Výskyt opakovaného vězňova dilematu (další příklady)

- **Válečná fronta – žij a nech žít:**
  - *Spolupráce* = žít a nechat žít
  - *Zrada* = zabít každého, kdo k tomu dá příležitost
  - *Odměna* = přežití dlouhých válečných let
  - *Pokušení* = zneužít toho, že protivník je snadnou kořistí, a dopomoci si například k vyznamenání – přeci jen je lepší se nepřítele zbavit
  - *Trest* = všichni stále ve střehu, dokonale krytí,...

- **Výpomoc samců paviána anubiho:**
  - *Spolupráce* = pomoci druhému samečkovi při páření zahánět nepřítele
  - *Zrada* = neoplatit pomoc
  - *Odměna* = úspěšné páření, mláďata
  - *Pokušení* = využít pomoc, ale neoplatit ji a tím ušetřit čas a námahu
  - *Trest* = méně mláďat

  V přírodě: čím častěji sameček A podporuje samečka B, tím častěji i B podporuje A.



- **Fíkovník a vosičky chalcidky:**
  - *Spolupráce* = vyvážený poměr mezi květy, které chalcidka uvnitř fíku opyluje, a květy, do nichž naklade vajíčka
  - *Zrada* = naklást vajíčka do více květů
  - *Odměna* = šíření genů
  - *Pokušení* = naklást vajíčka do více květů a tím zvýšit počet potomků
  - *Trest* = fík i s celou „zrádnou rodinou“ schozen, rodina vymírá
- **Střídání pohlavních rolí u hermafrodita kanice:**
  - *Spolupráce* = jsem-li nyní sameček, stanu se příště samičkou
  - *Zrada* = po samečkovi se opět stát samečkem
  - *Odměna* = harmonické soužití, mnoho potomků
  - *Pokušení* = zopakovat si snadnou úlohu samečka
  - *Trest* = vztah se rozpadne
- **Upír Desmodus rotundus (netopýr sající krev savců) – krmení hladových jedinců:**
  - *Spolupráce* = po úspěšném lovu nakrmit neúspěšné „kolegy“
  - *Zrada* = nechat si vše pro sebe
  - *Odměna* = dlouhodobé úspěšné přežívání
  - *Pokušení* = v případě nouze se nechat nakrmit, o svůj úlovek se však nedělit
  - *Trest* = v případě neúspěšného lovu smrt vyhladověním

  V přírodě: Jedinci, kteří se vrátili z neúspěšného lovu, jsou úspěšnými, a to i nepříbuznými, krmeni; poznají se.