MA007 Matematická logika, závěrečná zkouška 6.1.2010

1. Nalezněte formule φ, ψ výrokové logiky takové, že $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi$ je kontradikce a zároveň $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \psi$ je tautologie.

2. Rozhodněte, zda existuje jazyk L s rovností a jeho realizace $\mathcal{M}$ tak, že pro všechny formule φ predikátového počtu jazyka L platí $\mathcal{M} \not\models \varphi$. Své tvrzení zdůvodněte.

3. Rozhodněte, zda je $\mathcal{L}(\vee, \wedge)$ plnohodnotný systém výrokové logiky. Své tvrzení zdůvodněte.

4. Nechť L je jazyk s rovností a s jedním binárním predikátovým symbolem R. Dejte příklad teorie T s jazykem L takové, že modely T jsou *přesně* uspořádané množiny, které obsahují alespoň 2 nesrovnatelné prvky.

5. Nechť L je prázdný jazyk s rovností. Rozhodněte, zda je teorie $T = \{\forall x \forall y (x = y)\}$

   (a) bezesporná

   (b) úplná

   Své tvrzení zdůvodněte.

6. Nechť L je jazyk bez rovnosti se dvěma unárními predikátovými symboly P, Q, jedním unárním funkčním symbolem g a jedním nulárním funkčním symbolem (tedy konstantou) c. Popište kanonickou strukturu teorie

$$T = \{\exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))\}$$

   s jazykem L. Zdůvodněte, že vámi popsaná struktura je skutečně kanonickou strukturou teorie T.

7. Formulujte následující věty (důkazy psát nemusíte).

   (a) Věta o úplnosti pro predikátovou logiku.

   (b) První Gödelova věta o neúplnosti.

   (c) Věta o kompaktnosti pro predikátovou logiku.