1. *(25 bodů)* Rozhodněte, zda je následující funkce $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ vyčíslitelná.

$$f(i,j) = \begin{cases} \varphi_i(107) & \text{pokud pro nějaké } y \in W_i \cap W_j \text{ platí } \varphi_i(y) = \varphi_j(y) \\ \perp & \text{jinak} \end{cases}$$

   Své rozhodnutí dokažte. *(Pro důkaz, že funkce je vyčíslitelná, stačí napsat while-program, který ji počítá.)*

2. *(40 bodů)* Binární operaci $\diamond$ na množinách $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definujeme jako

$$A \diamond B = \{i \mid i \in A \text{ a } i \text{ je sudé}\} \cup \{i \mid i \in B \text{ a } i \text{ je liché}\}.$$

   Rozhodněte a dokažte, zda je na tuto operaci uzavřená

   (a) třída všech rekurzivních množin,

   (b) třída všech rekurzivně spočetných množin.

3. *(35 bodů)* Řekneme, že neorientovaný graf obsahuje *dvojitou k-kliku* pro dané $k > 1$, pokud obsahuje dvě různé k-kliky, které sdílí alespoň jeden společný vrchol. Dokažte, že problém rozhodnout, zda daný neorientovaný konečný graf G pro dané k obsahuje dvojitou k-kliku, je NP-úplný. Formálně problém definujeme jako množinu

$$\mathit{DOUBLE\text{-}CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ je graf obsahující dvojitou } k\text{-kliku}\}.$$

1. *(25 bodů)* Rozhodněte, zda je následující funkce $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ vyčíslitelná.

$$f(i,j) = \begin{cases} \varphi_i(107) & \text{pokud pro nějaké } y \in W_i \cap W_j \text{ platí } \varphi_i(y) = \varphi_j(y) \\ \perp & \text{jinak} \end{cases}$$

Své rozhodnutí dokažte. *(Pro důkaz, že funkce je vyčíslitelná, stačí napsat while-program, který ji počítá.)*

Řešení: Funkce f je vyčíslitelná, počítá ji například následující program.

```
begin
  n := 0;
  flag := 0;
  while flag = 0 do begin
        y := π1(n);
        z := π2(n);
        if Sc(x1, y, z) = 1 ∧ Sc(x2, y, z) = 1 then
           if Φ(x1, y) = Φ(x2, y) then flag := 1;
        n := n + 1;
  end
  x1 := Φ(x1, 107);
end
```

Program pro vstup (i, j) postupně prohledává všechny dvojice $(y, z) \in \mathbb{N}^2$. Pro každou dvojici ověří, zda programy P_i a P_j skončí na vstupu y během z kroků (a tudíž $y \in W_i \cap W_j$) a následně zda $\varphi_i(y) = \varphi_j(y)$. Pokud dvojice splní obě podmínky, program vrátí hodnotu $\varphi_i(107)$.

2. *(40 bodů)* Binární operaci $\diamond$ na množinách $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definujeme jako

$$A \diamond B = \{i \mid i \in A \text{ a } i \text{ je sudé}\} \cup \{i \mid i \in B \text{ a } i \text{ je liché}\}.$$

Rozhodněte a dokažte, zda je na tuto operaci uzavřená

(a) třída všech rekurzivních množin,

(b) třída všech rekurzivně spočetných množin.

Řešení: Obě třídy jsou uzavřené na operaci $\diamond$.

(a) Nechť $A, B \subseteq \mathbb{N}$ jsou rekurzivní množiny. Pak jejich charakteristické funkce χ_A, χ_B jsou TVF. Množina $A \diamond B$ je také rekurzivní, neboť její charakteristická funkce je vyčíslitelná například tímto programem:

begin
  $y := x_1 \bmod 2$;
  if $y = 0$ **then** $x_1 := \chi_A(x_1)$;
  if $y = 1$ **then** $x_1 := \chi_B(x_1)$;
end

(b) Nechť A, B jsou r.e. množiny, tedy $A = dom(\varphi_i)$ a $B = dom(\varphi_j)$ pro nějaké $i, j \in \mathbb{N}$. Množina $A \diamond B$ je také r.e., protože je definičním oborem vyčíslitelné funkce počítané tímto programem:

begin
  $y := x_1 \bmod 2$;
  if $y = 0$ **then** $\Phi(i, x_1)$;
  if $y = 1$ **then** $\Phi(j, x_1)$;
end

3. *(35 bodů)* Řekneme, že neorientovaný graf obsahuje *dvojitou k-kliku* pro dané $k > 1$, pokud obsahuje dvě různé k-kliky, které sdílí alespoň jeden společný vrchol. Dokažte, že problém rozhodnout, zda daný neorientovaný konečný graf G pro dané k obsahuje dvojitou k-kliku, je NP-úplný. Formálně problém definujeme jako množinu

$$\mathit{DOUBLE\text{-}CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ je graf obsahující dvojitou } k\text{-kliku}\}.$$

Řešení: Nejprve ukážeme, že $\mathit{DOUBLE\text{-}CLIQUE} \in \mathsf{NP}$. Problém rozhoduje například nedeterministický TM, který nejdříve zjistí, zda vstup je tvaru $\langle G, k\rangle$. Pokud tomu tak není, stroj zamítne. Je-li k větší než počet vrcholů v grafu G, stroj také zamítne. Nyní stroj nedeterministicky vybere dvě podmnožiny vrcholů grafu G tak, aby každá obsahovala právě k vrcholů. Pokud jsou tyto množiny totožné nebo mají prázdný průnik, stroj zamítne. Nyní stačí ověřit, že vrcholy v každé množině tvoří k-kliku. Pokud tomu tak je, stroj akceptuje. V opačném případě zamítne. Popsaný výpočet lze provést v polynomiálním počtu kroků vzhledem k velikosti vstupu.

NP-těžkost dokážeme redukcí $\mathit{CLIQUE} \leq_p \mathit{DOUBLE\text{-}CLIQUE}$ z NP-úplného problému *CLIQUE*. Redukční funkci f definujeme takto:

- Pokud vstupní řetězec není kódem dvojice $\langle G, k\rangle$, pak funkce f dá na výstup stejný řetězec.
- Je-li vstupem kód dvojice $\langle G, k\rangle$, pak funkce f vrátí kód $\langle G', k+1\rangle$, kde G' je graf obsahující dvě kopie grafu G a navíc jeden přidaný vrchol, který má hranu do každého vrcholu. Pokud $G = (V, E)$, pak G' formálně definujeme jako (V', E'), kde $V' = \{v, v' \mid v \in V\} \cup \{w\}$ a $E' = \{\,\{v_1, v_2\}, \{v_1', v_2'\} \mid \{v_1, v_2\} \in E\} \cup \{\,\{v, w\}, \{v', w\} \mid v \in V\}$. Pokud graf G obsahoval n vrcholů, pak G' obsahuje $2n + 1$ vrcholů.

Redukční funkce je zjevně totálně vyčíslitelná deterministickým TM pracujícím v polynomiálním čase.

Zbýva dokázat, že $x \in \mathit{CLIQUE} \iff f(x) \in \mathit{DOUBLE\text{-}CLIQUE}$.

"$\Longrightarrow$" Pokud $x \in \mathit{CLIQUE}$, pak x je kódem dvojice $\langle G, k\rangle$, kde G obsahuje k-kliku. Nechť W je množina vrcholů této k-kliky. Pak G' obsahuje dvě $(k+1)$-kliky, kde jedna je tvořena vrcholy $W \cup \{w\}$ a druhá vrcholy $\{v' \mid v \in W\} \cup \{w\}$. Jedná se o různé kliky, které však mají společný vrchol w. Tedy $f(x) = \langle G', k+1\rangle \in \mathit{DOUBLE\text{-}CLIQUE}$.

"$\Longleftarrow$" Pokud $f(x) \in \mathit{DOUBLE\text{-}CLIQUE}$, pak $f(x) = \langle G', k+1\rangle$ a G' je graf obsahující dvojitou $(k+1)$-kliku. Vezměme jednu z těchto $(k+1)$-klik. Jelikož graf G' neobsahuje žádnou hranu spojijící dvě kopie grafu G, tak celá tato $(k+1)$-klika musí leže v jedné kopii grafu G rozšířené o vrchol w. Vypustíme-li z této $(k+1)$-kliky

  - vrchol w, pokud je v ní obsažen, nebo
  - jeden libovolný vrchol, pokud $(k+1)$-klika neobsahuje w,

  získáme nutně k-kliku v jedné z kopií grafu G. Graf G tedy obsahuje k-kliku a proto platí $x \in \mathit{CLIQUE}$.