Democvičení

MB104 - jaro 2013

Příklad 1. Určete největší společný dělitel a koeficienty v příslušné Bezoutově rovnosti polynomů $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x$ a $2x^5 + x^4 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$

Příklad 2. Určete všechny alespoň dvojnásobné kořeny polynomu $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 1 \in \mathbb{R}[x]$.

Příklad 3. Nalezněte dvojice normovaných polynomů $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, jestliže $f(x)$ je polynom stupně 3 a má dvojnásobný kořen, $g(x)$ je polynom stupně 4 a má trojnásobný kořen a zároveň jejich největší společný dělitel je $x^2 + 3x - 4$. Vyjádřete jej Bezoutovou rovností.

Příklad 4. Určete všechny kořeny polynomu $x^6+8x^5+24x^4+24x^3-27x^2-80x-50 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $-2 + i$.

Příklad 5. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají jednoduchý kořen $\frac{1}{2}$ a dvojnásobný kořen $5+2i$, nalezněte polynom nejmenšího stupně. Rozložte tento polynom na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Příklad 6. Určete všechny kořeny polynomů $x^3 - 2x^2 + x - 2$ a $x^3 + 3x^2 + x + 3$ víte-li, že mají společný kořen.

1 $\mathbb{Z}_3[x]$

$$(2x^5 + x^4 + x + 2) : (x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x) = 2x$$
$$-(2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2)$$
$$\underline{x^3 - x^2 + x + 2}$$

$$(x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x) : (x^3 - x^2 + x + 2) = x$$
$$-(x^4 - x^3 + x^2 + 2x)$$
$$0$$

Největší společný dělitel je poslední nenulový zbytek.

stupeň $f \geq 5$

$f = (x-a)^2 \cdot g(x)$ $\qquad f' = 2(x-a)\cdot g(x) + (x-a)^2 \cdot g'(x)$ $\qquad (f, f')$

$f' = (x-a)\left(2g(x) + g'(x)\right)$

2 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 1$

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 10x - 5$ $\qquad (f(x), f'(x)) = ?$

derivace vydělená 5

$$(x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 1) : (x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1) = x - 1$$
$$-(x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x)$$
$$-x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$
$$-(-x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1)$$
$$-2x^3 + 6x^2 - 2x \xrightarrow{:(-2)}$$

$$(x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1) : (x^3 - 3x^2 + x) = x - 1$$
$$-(x^4 - 3x^3 + x^2)$$
$$-x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$
$$-(-x^3 + 3x^2 - x)$$
$$-x^2 + 3x - 1$$

$$(x^3 - 3x^2 + x) : (x^2 - 3x + 1) = x$$
$$-(x^3 - 3x^2 + x)$$
$$0$$

$\mathrm{NSD}(f, f') = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow x_{1,2,3,4} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 1) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$

$\Rightarrow x_5 = -1$

$(x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 1) : (x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1) = x + 1$

ireducibilní faktory: $(x+1)\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$ nad $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$

$(x+1)(x^2 - 3x + 1)^2$ nad $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}$

③ $(f,g) = x^2 + 3x - 4$ $\quad d(f) = 3$ $\quad d(g) = 4$ $\quad$ f má 2násobný kořen
g má 3násobný kořen

$$f_1 = (x^2+3x-4)(x+4) = (x-1)(x+4)^2 = x^3+7x^2+8x-16$$
$$g_1 = (x^2+3x-4)(x-1)^2 = (x^2+3x-4)(x^2-2x+1) = x^4+x^3-9x^2+11x-4$$

$$f_2 = (x-1)^2(x+4)$$
$$g_2 = (x-1)(x+4)^3$$

$g_1 : f_1$

$$(x^4+x^3-9x^2+11x-4):(x^3+7x^2+8x-16) = x-6$$
$$-(x^4+7x^3+8x^2-16x)$$
$$-6x^3-17x^2+27x-4$$
$$-(-6x^3-42x^2-48x+96)$$
$$25x^2+75x-100$$

$$25\cdot(x^2+3x-4) = (x^4+x^3-9x^2+11x-4) - (x-6)(x^3+7x^2+8x-16)$$

$$(x^3+7x^2+8x-16):(x^2+3x-4) = x+4$$
$$-(x^3+3x^2-4x)$$
$$4x^2+12x-16$$
$$0$$

$$x^2+3x-4 = \frac{1}{25}\cdot g_1(x) - \frac{1}{25}\cdot(x-6)\cdot f_1(x)$$

④ $x^6+8x^5+24x^4+24x^3-27x^2-80x-50$

$x_{1,2}=-2+i \Rightarrow x_{3,4}=-2-i$

$(x-(-2+i))\cdot(x-(-2-i))=((x+2)-i)\cdot((x+2)+i)=(x+2)^2+1=x^2+4x+5$

$(x^2+4x+5)\cdot(x^2+4x+5)=x^4+8x^3+26x^2+40x+25$

$$
\begin{aligned}
&(x^6+8x^5+24x^4+24x^3-27x^2-80x-50):(x^4+8x^3+26x^2+40x+25)=x^2-2\\
&-(x^6+8x^5+26x^4+40x^3+25x^2)\\
&\qquad -2x^4-16x^3-52x^2-80x-50\\
&\quad -(-2x^4-16x^3-52x^2-80x-50)\\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

$x_{5,6}=\pm\sqrt{2}$

C: $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-(-2-i))^2(x-(-2+i))^2$

R: $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+4x+5)^2$

Z: $(x^2-2)(x^2+4x+5)^2$

⑤ $x_1=\frac{1}{2}$ $x_{2,3}=5+2i$ $\Rightarrow$ $x_{4,5}=5-2i$

C: $f(x)=(x-\frac{1}{2})(x-(5+2i))^2\cdot(x-(5-2i))^2$

$(x-(5+2i))\cdot(x-(5-2i))=((x-5)+2i)\cdot((x-5)-2i)=x^2-10x+29$

R: $(x-\frac{1}{2})(x^2-10x+29)^2$

Z: $(2x-1)(x^2-10x+29)^2$

⑥ $f: x^3-2x^2+x-2$ $g: x^3+3x^2+x+3$

$$(f,g): (x^3-2x^2+x-2):(x^3+3x^2+x+3)=1$$
$$\underline{-(x^3+3x^2+x+3)}$$
$$-5x^2 \quad -5$$

$:(-5)$

$$(x^3+3x^2+x+3):(x^2+1)=x+3$$
$$\underline{-(x^3+x)}$$
$$3x^2+3$$
$$\underline{-(3x^2+3)}$$
$$0$$

$(x^2+1)\mid f$
$(x^2+1)\mid g$ $\Rightarrow$ Společné kořeny jsou i a $-i$.

$(x^3+3x^2+x+3):(x^2+1)=x+3$ $\Rightarrow$ Kořenem polynomu g je navíc -3.

$(x^3-2x^2+x-2):(x^2+1)=x-2$ $\Rightarrow$ Kořenem polynomu f je navíc 2.

$$\underline{-(x^3+x)}$$
$$-2x^2-2$$
$$\underline{-(-2x^2-2)}$$
$$0$$

$\deg(f) \geq 5$

- $f = (x-a)^2 \cdot g(x)$
- $f' = 2(x-a) g(x) + (x-a)^2 \cdot g'(x)$

$f' = (x-a)(2g(x) + g'(x))$

(f, f')

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 1$

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 10x - 5$

$f'(x)$, $\frac{4}{5} f'(x)$!

$(x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 1) : (x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1) = x - 1$

$-(x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x)$

$\to -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

$-(-x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1)$

zb. $-2x^3 + 6x^2 - 2x$

$(x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1) : (x^3 - 3x^2 + x) = x - 1$

$-(x^4 - 3x^3 + x^2)$

$-x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

$-(-x^3 + 3x^2 - x)$

zb.: $-x^2 + 3x - 1$

$(x^3 - 3x^2 + x) : (x^2 - 3x + 1) = x$

$x^3 - 3x^2 + x$

0

$\gcd(f, f') = x^2 - 3x + 1$

$x_{1,2,3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$2\times \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad f : \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

$2\times \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$f : f_1$

f_2

f_3

f_4

$f : (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4)$

$(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 1) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$

$(x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 1) : (x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1) = x + 1$

$-(x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2 + x)$

$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$

$x_5 = -1$

3 25-17:54

urč. faktory nad $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ $f(x) = (x+1)\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: $f(x) = (x+1)(x^2 - 3x + 1)^2$

3 25-18:23

- $(f, g) = x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$
- $\deg f = 3$
- $\deg g = 4$
- f musí 2-nás kořen
- g -"- 3- -"-

$f_1 = (x^2 + 3x - 4)(x + 4) = (x-1)(x+4)^2$

$g_1 = (x^2 + 3x - 4)(x - 1)^2$ $\qquad -4$, 1

$\cancel{(x+4)^2}$

$f_2 = (x-1)^2 (x+4)$

$g_2 = (x-1)(x+4)^3$

$f_1 = (x-1)(x+4)^2 = (x^2 + 3x - 4)(x + 4) = x^3 + 7x^2 + 8x - 16$

$g_1 = (x^2 + 3x - 4)(x^2 - 2x + 1) = x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4$

$g_1 : f_1$

$(x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4) : (x^3 + 7x^2 + 8x - 16) = x - 6$

$-(x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 16x)$

$-6x^3 - 17x^2 + 27x - 4$

$-(-6x^3 - 42x^2 - 48x + 96)$

zb.: $25x^2 + 75x - 100$

$25 \cdot (x^2 + 3x - 4) = (x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4) - (x - 6)(x^3 + 7x^2 + 8x - 16)$

$(x^3 + 7x^2 + 8x - 16) : (x^2 + 3x - 4) = x + 4$

$-(x^3 + 3x^2 - 4x)$

$4x^2 + 12x - 16$

0

$x^2 + 3x - 4 = \frac{1}{25}(g_1) - \frac{1}{25}(x-6) \cdot f_1$

3 25-18:26

$f, g \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \exists\, \alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{R}[x]$:

$(f, g) = \alpha(x) \cdot f + \beta(x) \cdot g$

3 25-18:42

$x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 24x^3 - 27x^2 - 80x - 50$

$-2+i$

$f \in \mathbb{R}[x]$

$a+bi$

$a-bi$

! $i-2$!

ne $i+2$

$z = -2+i$

$\bar{z} = -2-i$

f : $(x - (-2+i))(x - (-2-i))$

$((x+2) - i)((x+2) + i) =$

$(x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$

$(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 4x + 5) = x^4 + 8x^3 + 26x^2 + 40x + 25$

$(x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 24x^3 - 27x^2 - 80x - 50) : (x^4 + 8x^3 + 26x^2 + 40x + 25) =$

$x^2 - 2$

$-(x^6 + 8x^5 + 26x^4 + 40x^3 + 25x^2)$

$-2x^4 - 16x^3 - 52x^2 - 80x - 50$

0

$x_5 = \sqrt{2}$

$x_6 = -\sqrt{2}$

$\mathbb{C}$: $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - (-2+i))^2 (x - (-2-i))^2$

$\mathbb{R}$: $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4x + 5)^2$

$\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: $(x^2 - 2)(x^2 + 4x + 5)^2$

3 25-18:44

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{2,3} = 5 + 2i \\ x_4, x_5 = 5 - 2i \end{cases}$$

$f \in \mathbb{R}[x]$

$\mathbb{C}$: $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x - (5+2i))^2 (x - (5-2i))^2$

$\mathbb{R}$: $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 10x + 29)^2$

$\mathbb{Q}$ $\quad (x - (5+2i))(x - (5-2i)) = ((x-5) - 2i)((x-5) + 2i)$

$= x^2 - 10x + 29$

$\mathbb{Z}$: $(2x - 1)(x^2 - 10x + 29)^2$

3 25-18:56

$f: x^3-2x^2+x-2$

$g: x^3+3x^2+x+3$

(f,g)

$(x^3-2x^2+x-2):(x^3+3x^2+x+3) = 1$

$-(x^3+3x^2+x+3)$

zb. $-5x^2-5$

$\boxed{(x^3+3x^2+x+3):(x^2+1)} = x+3$

$-(x^3+x)$

$3x^2+3$

0

$(x^2+1)|f$

$(x^2+1)|g$

f,g $i,-i$

$(x^3+3x^2+x+3):(x^2+1) = \underline{x+3}$

$(x^3-2x^2+x-2):(x^2+1) = \underline{x-2}$

$-(x^3+x)$

$-2x^2-2$

0

3 25-19:00

$\mathbb{Z}_3[x]$

$(2x^5+x^4+x+2):(x^4+2x^3+x^2+2x) = 2x$

$-(2x^5+x^4+2x^3+x^2)$

zb: $\boxed{x^3-x^2+x+2}$

$(x^4+2x^3+x^2+2x):(x^3-x^2+x+2) = x$

$-(x^4-x^3+x^2+2x)$

0

3 25-19:05

$\underbrace{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=0 \quad /:\underline{x^2}$

i) sud:

$x^2+2x+3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$x+\frac{1}{x}=y \quad /^2$

$x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=y^2$

$\underline{x^2+\frac{1}{x^2}} = y^2-2$

$y^2-2+2y+3=0$

$y^2+2y+1=0$

$(y+1)^2=0$

$y=-1$ 2 nás.

i) $x+\frac{1}{x}=-1 \quad /\cdot x$

$x^2+x+1=0$

$x_{1,2,3,4}=\underbrace{\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3 25-19:08

4) lich: $\underbrace{x^5+2x^4}-\underbrace{2x^3-2x^2}+\underbrace{2x+1}$

vždy kořen $\boxed{-1}$

$x+1$

	1	2	-2	-2	2	1
-1	1	1	-3	1	1	0

$x^4+x^3-3x^2+x+1=0 \quad /:x^2$

$x^2+x-3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$y=x+\frac{1}{x}$

$y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$

$y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$

$y^2-2+y-3=0$

$y^2+y-5=0$

$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

1) $y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$2x^2-x(-1+\sqrt{21})+2=0$

$x_{1,2}=\frac{-1+\sqrt{21}\pm\sqrt{1-2\sqrt{21}+21-16}}{4}$

$x_{1,2}=\frac{-1+\sqrt{21}\pm\sqrt{6-2\sqrt{21}}}{4}$

$x+\frac{1}{x}=1+i \quad /\cdot x$

$x^2-(1+i)x+1=0$

$D=(1+i)^2-4=1+2i-1-4$

$=2i-4$

3 25-19:13

$D=2i-4$

$\underline{\sqrt{D}}=\sqrt{2i-4}=\sqrt{2}\cdot\boxed{\sqrt{i-2}}$

$\sqrt{i-2}=a+bi \quad /^2$

$i-2=a^2+2abi-b^2$

$\boxed{\begin{aligned}-2&=a^2-b^2\\ +1&=2ab\end{aligned}} \Rightarrow \underline{a=\frac{1}{2b}}$

$-2=\frac{1}{4b^2}-b^2 \quad /\cdot 4b^2$

$-8b^2=1-4b^4$

$4b^4-8b^2-1=0 \qquad 2b^2=y$

$y^2-4y-1=0$

$y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+4}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{5}}{2}=$

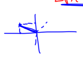
$=\boxed{2\pm\sqrt{5}}$

! $2b^2=2+\sqrt{5}$!

$b^2=1+\frac{\sqrt{5}}{2}$

$b=\pm\underline{\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}}{2}}}$

$a=\pm\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}}{2}}}$



3 25-19:22