

Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z ALGEBRY
ELEMENTY LINEÁRNÍ ALGEBRY

1999/2000

CIFRIK

Základní pojmy

Binární relace R

Binární relace R mezi množinami A, B je libovolná podmnožina R kartézského součinu množin A, B . Pro dva prvky $a \in A, b \in B$ takové, že $(a, b) \in R$, píšeme též aRb a čteme „(prvek) a je v relaci R s (prvkem) b “.

Binární relace je :

- reflexivní, jestliže platí $\forall x \in M : xRx$
- ireflexivní, jestliže platí $\forall x \in M : \text{non } xRx$
- symetrická, jestliže platí $\forall x, y \in M : (xRy \Rightarrow yRx)$
- antisymetrická, jestliže platí $\forall x, y \in M : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$
- tranzitivní, jestliže platí $\forall x, y, z \in M : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$
- konektivní, jestliže platí $\forall x, y \in M : (xRy \vee x = y \vee yRx)$

Binární relace U na množině M se nazývá

- (neostré) uspořádání na množině M , je-li reflexivní, antisymetrická a tranzitivní
- ostré uspořádání na množině M , je-li ireflexivní, antisymetrická a tranzitivní
- (ostré či neostré) lineární uspořádání na množině M , jestliže je (ostrým či neostrým) uspořádáním na M a je navíc konektivní.

Příklad 1.

Je dána množina $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

- a) Určeme výčtem prvků binární relaci $R = \{(x, y) \in A^2; x / y \wedge x < y \wedge x > 1\}$
- b) Určeme 1. a 2. obor binární relace R .
- c) Určeme výčtem prvků relaci R^{-1} doplňkovou k R .

ad a) $R = \{[2, 4], [2, 6], [2, 8], [3, 6], [4, 8]\}$

ad b) první obor $O_1(R) = \{2, 3, 4\}$, druhý obor $O_2(R) = \{4, 6, 8\}$

ad c) $\forall [x, y] \in A^2; [x, y] \in R^{-1} \Leftrightarrow [y, x] \in R$

To znamená, že relaci R^{-1} vytvoříme z relace R záměnou pořadí složek ve všech uspořádaných dvojicích relace R . Tedy

$$R^{-1} = \{[4, 2], [6, 2], [8, 2], [6, 3], [8, 4]\}$$

Příklad 2.

Nechť M je množina přímek v rovině. Definujme relaci R takto: pRq znamená, že přímka p nemá společný bod s přímkou q . Které vlastnosti má relace R ?

Relace R není reflexivní, protože přímka p má sama se sebou dokonce nekonečně mnoho společných bodů. Relace R je symetrická, protože zřejmě p má společný bod s q , právě když q má společný bod s p . Relace není tranzitivní. Kdyby byla tranzitivní, znamenalo by to, že nemá-li p společný bod s q a současně nemá q společný bod s r , pak p nemá společný bod s r . Zvolme speciálně $p \neq q, pRq$, tj. $p \neq q, p \parallel q$, a $r = p$. Pak zřejmě pRq, qRp , ale p není v relaci R sama se sebou.

Zobrazení

Def.I. Zobrazení (funkce) f množiny A do množiny B (označení $f : A \rightarrow B$) je jakákoli relace mezi množinami A, B taková, že pro každé $a \in A$ existuje právě jeden prvek $b \in B$ takový, že $(a, b) \in f$. Prvek b nazýváme hodnotou zobrazení f v bodě a (příp. obrazem prvku a při zobrazení f) a píšeme stručně $b = f(a)$. Prvek a nazýváme vzorem prvku b při zobrazení f .

Definiční obor $D(f)$ zobrazení f je množina $D(f) = \{x \in A; \exists b \in B : b = f(x)\}$.

Obor hodnot $H(f)$ zobrazení f je množina $H(f) = \{y \in B; \exists x \in A : y = f(x)\}$.

Def.II. Zobrazením z množiny A do množiny B rozumíme takovou podmnožinu f množiny $A \times B$, pro kterou platí :

$$(\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in B) \{[(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f] \Rightarrow y_1 = y_2\}.$$

Zobrazení $f : A \rightarrow B$ se nazývá

- **prosté (injekce)**, jestliže pro libovolná $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: Je-li $x_1 \neq x_2$, je $f(x_1) \neq f(x_2)$ (tj. každým dvěma různým vzorům přísluší dva různé obrazy);
- **na (surjekce)**, je-li $H(f) = B$;
- **vzájemně jednoznačné (bijekce)**, jestliže je zároveň prosté a na (tj. $D(f) = A, H(f) = B$ a f je prosté).

Binární operace

(Binární) operaci \odot na množině M rozumíme každé **zobrazení** (celého) kartézského součinu $M \times M$ do M . Není-li definičním oborem celá množina $M \times M$ hovoříme o parciální nebo též částečné operaci.

Říkáme, že operace \odot na množině M

- je komutativní, jestliže $(\forall a, b \in M) a \odot b = b \odot a$
- je asociativní, jestliže $(\forall a, b, c \in M) (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$,
- má neutrální prvek n , jestliže $(\exists n \in M)(\forall c \in M) n \odot c = c \odot n = c$
- má agresivní prvek a , jestliže $(\exists a \in M)(\forall c \in M) a \odot c = c \odot a = a$
- má inverzní prvek c^{-1} ke každému prvku c , jestliže existuje neutrální prvek n a platí $(\forall c \in M)(\exists c^{-1} \in M) c \odot c^{-1} = c^{-1} \odot c = n$.

Grupa

Grupou rozumíme uspořádanou dvojici (G, \odot) , kde G je neprázdná množina, tzv. nosič grupy G , a \odot je **binární operace** na G , která je asociativní, má neutrální prvek a ke každému prvku i prvek inverzní. Je-li navíc operace \odot komutativní, hovoříme o komutativní (neboli Abelově) grupě.

Číselné těleso

Číselným tělesem rozumíme uspořádanou trojici $(T, +, \cdot)$, kde T je podmnožina množiny komplexních čísel \mathbb{C} taková, že $0 \in T, 1 \in T$ a platí:

$(\forall x, y \in T)(x + y \in T \wedge x \cdot y \in T)$ (je uzavřená na sčítání a násobení)

$(\forall x \in T)(-1) \cdot x \in T$ (je uzavřená na opačné prvky)

$(\forall x \in T)(x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in T)$ (je uzavřená na převrácené hodnoty nenulových prvků)

Obecně číselným tělesem rozumíme každou uspořádanou trojici $(T, *, \circ)$, kde T je aspoň dvouprvková množina; $*, \circ$ jsou operace na T a platí $(x, y, z \in T)$:

$$\begin{array}{ll} x * y = y * x & x \circ y = y \circ x \\ (x * y) * z = x * (y * z) & (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \\ (\exists 0 \in T)(\forall x) \ 0 * x = x & (\exists 1 \in T)(\forall x) \ 1 \circ x = x \\ (\forall x)(\exists -x \in T) \ x * (-x) = 0 & (\forall x \neq 0)(\exists x^{-1} \in T) \ x \circ x^{-1} = 1 \\ (x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z) & \text{(distributivita operace } \circ \text{ vzhledem k operaci } *) \end{array}$$

Aritmetický vektor

Nechť T je [těleso](#), n přirozené číslo. Uspořádanou n -tici $\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, kde

$x_i \in T, i = 1, 2, \dots, n$, nazveme n -rozměrným aritmetickým vektorem nad tělesem T . Prvek x_i nazýváme i -tým členem aritmetického vektoru \underline{x} . Množinu všech n -rozměrných aritmetických vektorů nad T budeme značit $V_n(T)$.

Rovnost dvou aritmetických vektorů

Dva vektory $\underline{x}, \underline{y}$ se sobě rovnají, právě když $x_i = y_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Součet dvou aritmetických vektorů

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

 α -násobek

$$\alpha \underline{x} = \{\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n\}$$

Nulový aritmetický vektor

$\underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$, tj. všechny členy jsou rovny nulovému prvku tělesa T .

Lineární kombinace

Nechť a_1, a_2, \dots, a_k jsou vektory z $V_n(T)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ prvky z T . Aritmetický vektor

$$\underline{x} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_k \underline{a}_k$$

nazýváme lineární kombinací [aritmetických vektorů](#) a_1, a_2, \dots, a_k s koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

triviální lineární kombinací - nazýváme lineární kombinaci, která má všechny koeficienty rovné nulovému prvku 0 z tělesa T

netriviální lineární kombi. - jestliže je aspoň jeden koeficient různý od 0

nulová lineární kombinace - jestliže pro prvky $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in T$ a vektory

$a_1, a_2, \dots, a_k \in V(T)$ platí: $\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_k \underline{a}_k = \underline{0}$.

Lineární závislost a nezávislost vektorů**závislé** – existuje nulová netriviální lineární kombinace**nezávislé** – existuje pouze triviální lineární kombinace**Příklad 3.**

Rozhodneme, zda následující vektory z aritmetického vektorového prostoru R^3 nad R jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

$$\underline{u} = (3, 2, 7), \quad \underline{v} = (1, 1, 1), \quad \underline{w} = (2, 0, 3)$$

Rozhodnout, zda vektory $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ jsou lineárně závislé resp. nezávislé, znamená rozhodnout, zda rovnice $c_1 \underline{u} + c_2 \underline{v} + c_3 \underline{w} = \underline{0}$ má nenulové resp. pouze nulové řešení. Tuto rovnici lze přepsat na soustavu

$$3c_1 + c_2 + 2c_3 = 0$$

$$2c_1 + c_2 = 0.$$

$$7c_1 + c_2 + 3c_3 = 0$$

Tato soustava má pouze triviální řešení $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, takže vektory $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ jsou LN. Pozn. O nezávislosti vektorů $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ lze rozhodnout též na základě výpočtu determinantu matice soustavy. (Soustava rovnic má pouze triviální řešení právě tehdy, když determinant matice soustavy není 0).

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 + 0 - 14 - 0 - 6 = -7 \neq 0 \Rightarrow \text{lineárně nezávislé}$$

Příklad 4.

Určeme reálné číslo b tak, aby vektory $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ z aritmetického vektorového prostoru R^3 nad R byly lineárně závislé.

$$\underline{u} = (1, 2, 3), \quad \underline{v} = (3, 1, 4), \quad \underline{w} = (b, 4, 11)$$

Aby vektory $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ byly lineárně závislé, musí existovat čísla $c_1, c_2, c_3 \in R$, z nichž aspoň jedno je nenulové, a platí $c_1 \underline{u} + c_2 \underline{v} + c_3 \underline{w} = \underline{0}$. Zkoumáme tedy, pro které hodnoty parametru b má soustava

$$c_1 + 3c_2 + b \cdot c_3 = 0$$

$$2c_1 + c_2 + 4c_3 = 0$$

$$3c_1 + 4c_2 + 11c_3 = 0$$

nulové řešení.

Odečtením 1. a 2. rovnice od 3. rovnice dostaneme

$$(7-b)c_3 = 0.$$

Snadno zjistíme, že pro $b \neq 7$ je $c_3 = c_1 = c_2 = 0$ a pro $b = 7$ má soustava nekonečně mnoho řešení, tedy pro $b = 7$ jsou vektory $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ lineárně závislé.

Příklad 5.

Určeme všechny hodnoty $a \in R$, pro které je vektor \underline{v} lineární kombinací vektorů $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$.

$$\underline{u}_1 = (3, 2, 5), \quad \underline{u}_2 = (2, 4, 7), \quad \underline{u}_3 = (5, 6, a), \quad \underline{v} = (1, 3, 5)$$

Vektor \underline{v} je lineární kombinací vektorů $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ právě tehdy, když existují $c_1, c_2, c_3 \in R$ taková, že $\underline{v} = c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 + c_3 \underline{u}_3$, tzn. když soustava rovnic

$$3c_1 + 2c_2 + 5c_3 = 1$$

$$2c_1 + 4c_2 + 6c_3 = 3$$

$$5c_1 + 7c_2 + a \cdot c_3 = 5$$

má aspoň jedno řešení.

Podle [Frobeinovy věty](#) je tato soustava řešitelná právě tehdy, když je hodnost matice soustavy

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & a \end{pmatrix}$$

rovna hodnosti rozšířené matice soustavy

$$\underline{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & a & 5 \end{array} \right).$$

Matici \underline{A}' upravíme na trojúhelníkový tvar:

$$\underline{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & a & 5 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & a-11 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & a-11 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & a-12 & \frac{1}{8} \end{array} \right)$$

Vidíme, že pro $a \neq 12$ je $h(\underline{A}) = h(\underline{A}') = 3$, tedy soustava je řešitelná (protože hodnost matice soustavy je rovna počtu neznámých, je toto řešení právě jedno). To znamená, že vektor \underline{v} je lineární kombinací vektorů $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ pro libovolné reálné $a \neq 12$.

Pamatujme:

Neexistuje ani jedna oblast matematiky, a to ať je jakkoli abstraktní, která by se jednou nedala aplikovat na jevy reálného světa.

N.I.Lobačevskij

Matice

Nechť T je [těleso](#). Obdélníkovou tabulku prvků z T sestavených do m řádků a n sloupců nazýváme matici typu (m, n) nad tělesem T . Je-li $m = n$, hovoříme o čtvercové matici n -tého řádu.

Matice \underline{A} přiřazuje každé dvojici $(i, k), i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n$ prvek z T , který označujeme a_{ik} a nazýváme prvkem matice \underline{A} v i -tém řádku a k -tém sloupci. Matici \underline{A} zapisujeme

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

nebo zkráceně

$$\underline{A} = (a_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}.$$

pokud je z textu známo m, n , píšeme pouze $\underline{A} = (a_{ik})$. Aritmetický vektor $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ se nazývá i -tý řádek, aritmetický vektor $(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk})$ k -tý sloupec matice \underline{A} .

Diagonála a diagonální matice

Nechť $\underline{A} = (a_{ik})$ je matice typu (m, n) . Aritmetický vektor $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr})$, kde $r = \min(m, n)$, se nazývá (hlavní) diagonála matice \underline{A} . Prvky $a_{ii}, i = 1, 2, \dots, r$, se nazývají diagonální prvky. Matice $\underline{A} = (a_{ik})$, která má mimo hlavní diagonálu samé 0, tj. $a_{ik} = 0$ pro $i \neq k$, se nazývá diagonální.

Jednotková matice

Jednotkovou matici \underline{A} n -tého řádu nazýváme diagonální matici $\underline{E} = (e_{ik})$ n -tého řádu, pro níž platí $e_{ii} = 1$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$. (Jednotková matice stupně n je čtvercová matice $\underline{E} = (e_{ik})$ stupně n mající v hlavní diagonále všude prvek 1 a všude jinde prvek 0.)

Transponovaná matice

Transponovaná matice k matici $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m, n) je matice $\underline{B}^T = (b_{ik})$ typu (n, m) , pro kterou platí $a_{ik} = b_{ik}, i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n$. (Transponovanou matici \underline{A}^T dostaneme z matice \underline{A} tak, že vzájemně vyměníme řádky a sloupce v matici \underline{A}).

Příklad 6.

Určeme transponované matice k maticím

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Matice symetrická a antisymetrická

Matice \underline{A} se nazývá symetrická (antisymetrická), jestliže platí

$$\underline{A} = \underline{A}^T \quad (\underline{A} = -\underline{A}^T).$$

Trojúhelníková matice

zobecněná : právě když matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m, n)

^a má pouze nenulové řádky,

^b jsou-li a_{ik}, a_{rs} vedoucí prvky takové, že $i < r$, pak $k < s$.

redukovaná : právě když je u zobecněné trojúhelníkové matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m, n)

^a každý vedoucí prvek je roven 1,

^b nad každým vedoucím prvkem jsou ve sloupci pouze 0.

Čtvercové matice: regulární × singulární

Čtvercovou matici \underline{A} n -tého řádu nazveme **regulární** jestliže $\text{hod } \underline{A} = n$,

čtvercovou matici \underline{A} n -tého řádu nazveme **singulární** jestliže $\text{hod } \underline{A} < n$.

(Regulární matici nazýváme čtvercovou matici n -tého řádu, jejíž hodnota je rovna n .

V opačném případě mluvíme o singulární matici.)

Matice \underline{A} je regulární je-li determinant $\det \underline{A} \neq 0$. K regulární matici existuje inverzní matice.

Řádkový prostor

Řádkovým prostorem matice \underline{A} rozumíme podprostor vektorového prostoru $V_n(T)$

generovaný všemi řádky matice \underline{A} .

Hodnota matice

Hodnotu matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (n, m) nazýváme dimenzi jejího řádkového prostoru.

Elementární úpravy

Elementární řádkové (sloupcové) úpravy:

^a změna pořadí řádků (resp. sloupců) matice \underline{A}

^b nahrazení řádku (resp. sloupce) matice \underline{A} jeho α -násobkem, kde $\alpha \in T, \alpha \neq 0$.

^c nahrazení řádku (resp. sloupce) matice \underline{A} jeho součtem s α -násobkem, $\alpha \in T$, jiného řádku matice \underline{A} .

^d vynechání řádku (resp. sloupce), který je lineární kombinací ostatních řádků (resp. sloupců)

Dvě matice jsou **ekvivalentní**, právě když lze jednu z druhé získat konečným počtem elementárních úprav řádků.

Příklad 7.

Určeme hodnotu matice

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \\ 11 & -4 & 13 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí elementárních řádkových a sloupcových úprav převedeme matici \underline{A} na ekvivalentní zobecněnou trojúhelníkovou matici:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \\ 11 & -4 & 13 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ -4 & 11 & 13 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -9 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 11 & -1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -34 & -11 \\ 0 & 0 & -34 & -11 \end{pmatrix} \approx \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -34 & -11 \\ 0 & 0 & -34 & -11 \end{pmatrix}}}$$

Hodnost matice \underline{A} je 3.

Rovnost matic

Matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m, n) a $\underline{B} = (b_{ik})$ typu (r, s) se sobě rovnají, právě když platí: $m = r$, $n = s$, $a_{ik} = b_{ik}$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Součet matic

Nechť jsou dány matice $\underline{A} = (a_{ik})$, $\underline{B} = (b_{ik})$ téhož typu (m, n) nad týmž tělesem T . Součtem matic \underline{A} a \underline{B} nazýváme matici $\underline{C} = (c_{ik})$ typu (m, n) definovanou předpisem

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Píšeme $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$.

Platí:

$$\text{a) } \underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$$

$$\text{b) } \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$$

$$\text{c) } \underline{A} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{A} = \underline{A}$$

$$\text{d) } (\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T$$

e) $-\underline{A} = (-a_{ik})$, kde $-a_{ik}$ je opačný prvek k a_{ik} v tělese T , $-\underline{A}$ je matice opačná k matici \underline{A} , tj. platí $-\underline{A} + \underline{A} = \underline{0}$.

(Z a, b, c, e plyne, že množina matic daného typu (m, n) nad tělesem T tvoří komutativní grupu.)

Příklad 8.

Sečtěme matice \underline{A} a \underline{B} .

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{pmatrix} 2+1 & 4+2 & -1+3 \\ 5+0 & -2-2 & -3+1 \\ 4-3 & 0+6 & 1-3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}}}$$

α -násobek matice

Nechť $\underline{A} = (a_{ik})$ je matice typu (m, n) nad tělesem T . Součinem prvků $\alpha \in T$ a matice \underline{A} nazýváme matici $\underline{C} = (c_{ik})$ typu (m, n) definovanou předpisem

$$c_{ik} = \alpha \cdot a_{ik}, i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n.$$

Píšeme $\underline{C} = \alpha \cdot \underline{A}$.

Příklad 9.

Určeme matici $\underline{D} = -2\underline{A} + 3\underline{B}$.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{D} &= \begin{pmatrix} -2.2 & -2.4 & -2.(-1) \\ -2.5 & -2.(-2) & -2.(-3) \\ -2.4 & -2.0 & -2.1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.1 & 3.2 & 3.3 \\ 3.0 & 3.(-2) & 3.1 \\ 3.(-3) & 3.6 & 3.(-3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -8 & 2 \\ -10 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -6 & 3 \\ -9 & 18 & -9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 11 \\ -10 & -2 & 9 \\ -17 & 18 & -11 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

Příklad 10.

Vypočítejme matici \underline{X} z rovnice

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Rovnice je ve tvaru $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$ a budeme ji řešit vynásobením obou stran rovnice inverzní maticí \underline{A}^{-1} zleva: $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}$, takže $\underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}$.

Určíme tedy matici \underline{A}^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & | & 1 & 0 \\ 4 & -3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6 & -5 & | & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & | & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6 & 0 & | & -9 & 15 \\ 0 & \frac{1}{3} & | & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & | & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 19 & \frac{1}{2} \\ 23 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Zkouška:

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & \frac{1}{2} \\ 23 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \underline{B}$$

Součin matic

Nechť je dána matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m, n) a matice $\underline{B} = (b_{ik})$ typu (n, p) , obě nad týmž tělesem T . Součinem matic \underline{A} , \underline{B} (v tomto pořadí!) nazýváme matici $\underline{C} = (c_{ik})$ typu (m, p) definovanou předpisem

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, \quad i=1,2,\dots,m, k=1,2,\dots,p.$$

Píšeme $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$. (Podmínku pro typy matic při násobení si můžeme zapamatovat pomocí formálního vztahu $(m,n)(n,p) = (m,p)$.) !!! Násobení matic není komutativní !!!

Příklad 11.

Určeme součin matic $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad kde$$

$$a_{11} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) = 5$$

$$a_{12} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 6 = -10$$

$$a_{13} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) = 13$$

$$a_{21} = 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot (-3) = 14$$

$$a_{22} = 5 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + (-3) \cdot 6 = -4$$

$$a_{23} = 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) = 22$$

$$a_{31} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) = 1$$

$$a_{32} = 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 6 = 14$$

$$a_{33} = 4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 9, \quad tedy$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & -10 & 13 \\ 14 & -4 & 22 \\ 1 & 14 & 9 \end{pmatrix}}}$$

Záměnné matice

Jsou matice $\underline{A}, \underline{B}$, pro které platí $\underline{AB} = \underline{BA}$.

Frobeinova věta

soustava rovnic je řešitelná právě tehdy, když [hodnota matice](#) soustavy $\underline{A} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$,

je rovna hodnotě matice rozšířené $\underline{A}_r = \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right)$.

Adjungované matice**Příklad 12.**

Určeme adjungovanou matici $\underline{adj} \underline{A}$ k matici \underline{A} .

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Adjungovanou matici $\underline{adj} \underline{A}$ vypočítáme tak, že každý prvek matice \underline{A} nahradíme jeho algebraickým doplňkem a takto získanou matici transponujeme:

$$\underline{adj} \underline{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & -17 & 8 \\ -4 & 6 & 16 \\ -14 & 1 & -24 \end{pmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & -4 & -14 \\ -17 & 6 & 1 \\ 8 & 16 & -24 \end{pmatrix}}}$$

Inverzní matice

Bud'te $\underline{A}, \underline{B}$ čtvercové regulární matice stupně n . Řekneme, že \underline{B} je inverzní matice k matici \underline{A} nebo že \underline{A} je inverzní maticí k matici \underline{B} , jestliže $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \underline{E}$, kde \underline{E} je jednotková matice.

Příklad 13.

Určeme inverzní matici \underline{A}^{-1} k matici \underline{A} .

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & | & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & | & 1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \approx \\ \approx \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & | & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & | & 1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & | & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & 0 & | & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & | & 1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & | & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & | & 1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \approx \\ \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{7} & -\frac{7}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\underline{A}^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}}}}$$

Příklad 14.

Určeme inverzní matici \underline{A}^{-1} k matici \underline{A} .

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení 1 Zjistíme determinant dané matice a matici adjungovanou. Je-li determinant nenulový platí vztah

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \underline{A}}{\det \underline{A}}.$$

$\det \underline{A}$ vypočteme snadno pomocí Sarrusova pravidla:

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 0 - 48 - 8 - 0 - 20 = -80,$$

výpočet $\text{adj } \underline{A}$ je uveden v předchozím [příkladě](#), proto

$$\underline{A}^{-1} = -\frac{1}{80} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -14 \\ -17 & 6 & 1 \\ 8 & 16 & -24 \end{pmatrix}.$$

Řešení 2 Pomocí jednotkové matice :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \approx \\ & \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} -20 & -40 & 0 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 240 & 0 & 51 & -18 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \approx \\ & \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} -120 & 0 & 0 & -3 & -6 & -21 \\ 0 & 240 & 0 & 51 & -18 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{120}{51} & \frac{120}{18} & \frac{120}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{240}{51} & \frac{240}{18} & \frac{240}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{3}{10} \end{array} \right) \\ & \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{120} & \frac{6}{120} & \frac{21}{120} \\ -\frac{240}{51} & \frac{240}{18} & \frac{240}{3} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} = -\frac{1}{80} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -14 \\ -17 & 6 & 1 \\ 8 & 16 & -24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zkoušku správnosti lze provést ověřením platnosti vztahu $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$, kde \underline{E} je jednotková matice.

Příklad 15.

Řešme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & + & 3x_2 & & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & & = & 2 \end{array}$$

Jedná se o soustavu tří rovnic o třech neznámých, přičemž determinant matice soustavy

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

takže soustava má právě jedno řešení.

Řešení 1 Úpravou rozšířené matice soustavy (Gaussova eliminační metoda):

$$\underline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \end{array} \right)$$

Znovu jsme se přesvědčili, že soustava je řešitelná, neboť $h(\underline{A}) = h(\underline{A}') = 3$ (Frobeniova věta; \underline{A}' je matice rozšířená) a $h(\underline{A}) = n$ (n počet neznámých), takže řešení je právě jedno.

Z poslední upravené rovnice vidíme, že $7x_3 = 12$, takže $x_3 = \frac{12}{7}$. Podobně $x_2 = \frac{5}{7}$, $x_1 = -\frac{4}{7}$.

Řešení 2 Užitím [Cramerova pravidla](#):

$$x_i = \frac{\det \underline{A}_i}{\det \underline{A}},$$

kde matice \underline{A}_i vznikne z \underline{A} nahrazením i -tého sloupce pravými stranami soustavy.

Takže

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-4}{7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{7} = \frac{5}{7}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{12}{7}$$

Řešení 3 Pomocí inverzní matice \underline{A}^{-1} k matici soustavy \underline{A} :

Danou soustavu lze přepsat ve tvaru rovnice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Řešení této rovnice určíme tak, že vynásobíme zleva obě strany rovnice maticí \underline{A}^{-1} inverzní k matici \underline{A} .

Znáмым způsobem ([inverzní matice](#)) zjistíme, že

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proto po dosazení do rovnice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & -1 & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Odsud vidíme, že $x_1 = -\frac{4}{7}$, $x_2 = \frac{5}{7}$, $x_3 = \frac{12}{7}$.

Pamatujme:

„Matematika je jen tehdy mocným nástrojem, když spolu s ní se zavádí něco nového, když vůbec do hloubky vnímá jak fyziku, tak i matematiku, když užívá právě ty metody, které jsou pro daný případ nutné.“

Zkouší-li bezmyšlenkovitě aplikovat matematický aparát a snaží-li se kompenzovat nedostatek pochopení podstaty věci matematickými formulami, pak má stejně malou pravděpodobnost, že se dobere výsledku, jako má dítě začínající mluvit, že napíše báseň.“

A.N.Krylov

Permutace, determinanty a jejich užití

Pořadí prvků

Bud' n přirozené číslo. Pořadím prvků $1, 2, \dots, n$ rozumíme každou uspořádanou n -tici (i_1, i_2, \dots, i_n) prvků $1, 2, \dots, n$, kde se každý z prvků $1, 2, \dots, n$ vyskytuje právě jednou.

Inverze v pořadí

Inverzí v pořadí (i_1, i_2, \dots, i_n) rozumíme každou dvojici čísel i_r, i_s takovou, že $r < s$ a zároveň $i_r > i_s$ (tj. větší číslo se v pořadí vyskytuje před menším číslem).

Permutace

Permutací π množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ rozumíme každou bijekci množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Permutaci π zapisujeme pomocí matice typu $(2, n)$ tvaru

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

ve které první řádek nazýváme pořadím vzorů, druhý řádek pořadím obrazů a pro každé $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $\pi(i_x) = j_x$. Množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ značíme S_n .

Inverzní zobrazení π^{-1} k permutaci π nazýváme inverzní permutací k permutaci π . Říkáme, že permutace je v základním tvaru, jestliže pořadí vzorů je $(1, 2, \dots, n)$.

Inverzní permutace

Inverzní permutaci vytvoříme výměnou řádků.

Znaménko permutace π

Znaménkem permutace π rozumíme celé číslo $(-1)^{k+m}$, kde k je počet všech inverzí v pořadí vzorů a m počet všech inverzí v pořadí obrazů. Znaménko permutace π značíme $\text{sign } \pi$. Je-li $\text{sign } \pi = 1$ řekneme, že permutace π je sudá, pokud $\text{sign } \pi = -1$ je permutace π lichá.

Příklad 16.

Určeme znaménko permutace $\begin{pmatrix} 3, 4, 1, 2 \\ 1, 4, 3, 2 \end{pmatrix}$.

Můžeme postupovat dvěma způsoby. Bud' určíme počet inverzí v pořadí vzorů a v pořadí obrazů (a), nebo nejprve zapíšeme permutaci v základním tvaru (b). Tedy

a) inverze v pořadí vzorů: $(3, 4, 1, 2) \quad 2 + 2 + 0 + 0 = 4$

inverze v pořadí obrazů $(1, 4, 3, 2) \quad 0 + 2 + 1 + 0 = 3$

Znaménko permutace je $(-1)^{4+3} = -1$

b) permutaci zapsaná v základním tvaru je $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 3, 2, 1, 4 \end{pmatrix}$. Inverzí v pořadí vzorů je tedy 0 a

v pořadí obrazů $2 + 1 + 0 + 0 = 3$, proto znaménko permutace je $(-1)^3 = -1$.

Determinant matice A

Bud' $A = (a_{ij})$ čtvercová matice n -tého řádu nad tělesem T . Determinantem matice A rozumíme prvek (číslo) $\det A$ z tělesa T , pro který platí:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign} \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{matrix} \right) a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{ns_n}.$$

Jsou-li $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ řádkové (resp. sloupcové) vektory matice A , píšeme místo $\det A$ též $\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$.

Jinak definováno: Determinantem n -tého stupně matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

nazýváme číslo

$$\det A = \sum (-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n},$$

kde se sčítá přes všechny permutace (k_1, k_2, \dots, k_n) čísel $1, 2, \dots, n$ a kde r udává počet inverzí v permutaci (k_1, k_2, \dots, k_n) .

- Determinant matice A je součet součinů; v každém součinu se vyskytuje z každého řádku i sloupce právě jeden prvek. Na druhé straně každý prvek řádku či sloupce se vyskytuje aspoň v jednom sčítanci.
- Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.
- Vznikne-li matice B ze čtvercové matice A n -tého řádu výměnou dvou řádků, resp. sloupců, potom $\det B = -\det A$.
- Platí $\det A = \det A^T$.
- Věta o součtu determinantů:
 $\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_i + \underline{b}_i, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n) = \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n) + \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{b}_i, \dots, \underline{a}_n)$
- Věta o vytýkání konstanty ze řádku:
 $\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{i-1}, \alpha \underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n) = \alpha \cdot \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n)$
- Bud' A čtvercová matice stupně n . Jestliže matice B vznikne z matice A vynásobením libovolného řádku prvkem $c \in T$, pak $\det B = c \cdot \det A$.
- Věta o součinu dvou determinantů
 $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- Hodnota determinantu se nezmění, jestliže k danému řádku, resp. sloupci přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků, resp. sloupců.
- Determinant regulární (singulární) matice je vždy různý od nuly (roven nule).

Příklad 17.

Spočtěme determinant pátého stupně

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 5 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} - \begin{vmatrix} -10 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \\ \stackrel{1}{=} - \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -6 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -28$$

1. elementární transformace sloupců matice

2. (Laplaceův) rozvoj podle prvního řádku

Minor (subdeterminant)

Minorem (subdeterminantem) M_{ij} z čtvercové matice A příslušným prvku a_{ij} rozumíme determinant matice, která vznikne z matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Buď $A = (a_{ij})$ matice typu (m, n) . Každou matici B , která vznikne z A vynecháním některých (libovolných) řádků a některých sloupců, nazýváme dílčí maticí matice A . Determinant každé čtvercové dílčí matice nazýváme subdeterminantem matice A . Je-li A čtvercová matice stupně n , pak vynecháním libovolných k řádků, $k < n$, a libovolných k sloupců z matice A dostaneme dílčí čtvercovou matici stupně $n - k$. Determinant každé takové dílčí matice nazýváme subdeterminantem matice A stupně $n - k$. Subdeterminant stupně $n - 1$ vyniklý vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce označíme M_{ij} . Prvek $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ nazýváme algebraickým doplňkem prvku a_{ij} .

Cramerovo pravidlo

Je-li matice A regulární, pak rozšířená matice má právě jedno řešení jež se vypočítá

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

kde matice A_i vznikne z matice A nahrazením i -tého sloupce pravými stranami.

Příklad 18.

Pomocí Cramerova pravidla řešme soustavu

$$\begin{array}{rrcrcl}
2x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 4 \\
4x_1 & +3x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 6 \\
8x_1 & +5x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & 12 \\
3x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 6
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\det \underline{A} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= (-1)(-1)^{3+1}(-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - (-3) = \underline{\underline{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det \underline{A}_1 &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3}(-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 12 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= (-1)^{1+3} 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = \underline{\underline{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det \underline{A}_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \\ 8 & 12 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= (-1)(-1)^{1+3}(-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -2 - (-4) = \underline{\underline{2}}
\end{aligned}$$

$$\det \underline{A}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-2}}; \quad \det \underline{A}_4 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-2}}$$

$$x_1 = \frac{\det \underline{A}_1}{\det \underline{A}} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{\det \underline{A}_2}{\det \underline{A}} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_3 = \frac{\det \underline{A}_3}{\det \underline{A}} = \underline{\underline{-1}}, \quad x_4 = \frac{\det \underline{A}_4}{\det \underline{A}} = \underline{\underline{-1}}$$

Zkouška:

$$L_1 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - (-1) + (-1) = 4, \quad P_1 = 4, \quad L_1 = P_1$$

$$L_2 = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - (-1) + 2(-1) = 6, \quad P_2 = 6, \quad L_2 = P_2$$

$$L_3 = 8 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 3(-1) + 4(-1) = 12, \quad P_3 = 12, \quad L_3 = P_3$$

$$L_4 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2(-1) + 2(-1) = 6, \quad P_4 = 6, \quad L_4 = P_4$$

Vektorový prostor

Vektorový prostor

Nechť T je [těleso](#), V množina. Uspořádanou trojici $(V, +, \cdot)$, kde $+$ je vnitřní operace na V (tj. zobrazení $V \times V \rightarrow V$), \cdot vnější operace na V nad T (tj. zobrazení $T \times V \rightarrow V$), nazveme vektorovým prostorem nad tělesem T , jestliže:

^a $(V, +)$ je [komutativní grupa](#),

^b vnější operace \cdot splňuje tyto podmínky :

$$\forall \alpha \in T \forall a, b \in V : \alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b,$$

$$\forall \alpha, \beta \in T \forall a \in V : (\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a,$$

$$\forall \alpha, \beta \in T \forall a \in V : (\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a),$$

$$\forall a \in V : 1 \cdot a = a \quad (1 \text{ je jednotkový prvek z } T)$$

Ve vektorovém prostoru $V(T)$ platí:

^a $\forall a \in V : 0 \cdot a = 0$ (0 je nulový skalár)

^b $\forall \alpha \in T : \alpha \cdot 0 = 0$

^c $\alpha \cdot a = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee a = 0)$

^d $\forall a \in V : -a = (-1) \cdot a$

- Nejjednodušším příkladem vektorového prostoru je tzv. triviální nebo nulový vektorový prostor $\{0\}$, skládající se pouze z nulového vektoru.

Příklad 19. Příklady vektorových prostorů

1. Těleso T spolu s operacemi sčítání a násobení definovanými na T je vektorový prostor nad T .
2. Speciálně těleso reálných čísel je vektorový prostor nad R (reálný vektorový prostor)
3. Množina P všech kladných reálných čísel spolu s operacemi \circ a \bullet , kde

$$\underline{u} \circ \underline{v} = \underline{uv}, \quad r \bullet \underline{u} = \underline{u}^r, \quad \underline{u}, \underline{v} \in P, r \in R, \text{ je reálný vektorový prostor}$$

4. Na množině T^n všech uspořádaných n -tic prvků z T definujeme operace

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$r(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$$

Množina T^n je pak vektorovým prostorem nad T , který nazýváme aritmetickým vektorovým prostorem nad T .

Vektorový podprostor

Nechť W je neprázdna podmnožina vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$. Uspořádanou trojici $(W, +, \cdot)$ nazveme (vektorovým) podprostorem prostoru $V(T)$, jestliže platí:

^a $\forall a, b \in W : a + b \in W$

^b $\forall \alpha \in T \forall a \in W : a \cdot \alpha \in W$

Průnik libovolného neprázdného systému podprostorů vektorového prostoru V je opět podprostorem prostoru V .

Lineární obal

Def.I Necht' a_1, a_2, \dots, a_n jsou vektory z vektorového prostoru $V(T)$. Množinu

$$M = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T\}$$

nazýváme podprostorem (lineárním obalem) generovaným vektory a_1, a_2, \dots, a_n a značíme $[a_1, a_2, \dots, a_n]$. O množině $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ říkáme, že generuje množinu M nebo že je to množina generátorů podprostoru M .

Def.II Buď M podmnožina vektorového prostoru V . Průnik všech podprostorů prostoru V , obsahujících množinu M , nazýváme lineárním obalem množiny M a značíme $[M]$.

• Buď M podmnožina vektorového prostoru V . Pak platí:

^a je-li $M = 0$, je $[M] = 0$

^b je-li $M \neq 0$, pak $[M]$ je množina všech lineárních kombinací $\sum_{i=1}^n r_i \underline{u}_i$, kde

$$\underline{u}_i \in M, i = 1, 2, \dots, n.$$

Úpravy generátorů

Necht' a_1, a_2, \dots, a_n jsou vektory z vektorového prostoru $V_n(T)$, $M = [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Provedeme-li na skupinu vektorů a_1, a_2, \dots, a_n některou z následujících změn, dostaneme novou skupinu vektorů, která generuje stejný podprostor M :

^a změna pořadí vektorů,

^b nahrazení libovolného vektoru z M jeho α -násobkem, kde $\alpha \in T, \alpha \neq 0$,

^c nahrazení libovolného vektoru z M jeho součtem s lineární kombinací ostatních vektorů z M ,

^d vynechání vektoru, který je lineární kombinací ostatních vektorů,

^e přidání vektoru, který je lineární kombinací vektorů z M .

Steinitzova věta

Necht' vektory a_1, a_2, \dots, a_n generují vektorový prostor $V(T)$. Necht' vektory b_1, b_2, \dots, b_k z $V(T)$ jsou lineárně nezávislé. Pak platí:

^a $k \leq n$

^b existuje $n - k$ vektorů a_i z $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, které spolu s vektory b_1, b_2, \dots, b_k generují $V(T)$.

Konečněrozměrný vektorový prostor

Jestliže existují vektory $a_1, a_2, \dots, a_k \in V(T)$ takové, že $V(T) = [a_1, a_2, \dots, a_k]$, je tento prostor konečněrozměrný.

Báze

Necht' $V(T)$ je konečněrozměrný prostor. Podmnožinu $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset V(T)$ nazveme bází vektorového prostoru $V(T)$, jestliže platí:

^a a_1, a_2, \dots, a_n jsou lineárně nezávislé,

^b $[a_1, a_2, \dots, a_n] = V(T)$, tj. generují $V(T)$

Dimenze

Nechť $V(T)$ je konečněrozměrný vektorový prostor. Dimenzí nenulového prostoru $V(T)$ nazýváme počet prvků některé jeho báze. Dimenze nulového vektorového prostoru je 0. Dimenze nekonečněrozměrného vektorového prostoru je ∞ . Dimenzi vektorového prostoru $V(T)$ značíme $\dim V(T)$.

Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Označme B skupinu vektorů $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ v tomto pořadí a necht' B je báze vektorového prostoru $V(T)$, $a \in V(T)$. Uspořádanou n -tici skalárů $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ takovou, že platí

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n,$$

nazýváme souřadnicemi vektoru \underline{a} vzhledem k bázi B . Píšeme

$$\underline{a}_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Součet podprostorů

^a Necht' U, W jsou podprostory vektorového prostoru $V(T)$. Podprostor $U + W$ nazýváme **lineárním součtem** podprostorů U, W .

^b Necht' $U \cap W = \{0\}$. Potom lineární součet $U + W$ nazýváme **direktním součtem** podprostorů U, W a píšeme $U \oplus W$.

- Necht' $U = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $W = [b_1, b_2, \dots, b_k]$ jsou podprostory vektorového prostoru $V(T)$. Pak platí: $U + W = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_k]$
- Necht' U, W jsou podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru $V(T)$. Pak platí: $\dim U + \dim W = \dim (U + W) + \dim (U \cap W)$

Příklad 20.

Rozhodněme zda množina W tvoří podprostor vektorového prostoru $V_3(R)$.

$$W = \{(x, y, 1) \in V_3(R)\}$$

Musíme ověřit podmínky [vektorového podprostoru](#).

$$(0, 0, 0) \in W \Rightarrow W \neq 0$$

$$(x_1, y_1, 1) + (x_2, y_2, 1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2) \notin W$$

$$\alpha(x, y, 1) = (\alpha x, \alpha y, \alpha) \notin W$$

tedy W netvoří podprostor vektorového prostoru $V_3(R)$.

Příklad 21.

Určeme bázi a dimenzi vektorového prostoru generovaného vektory

$$\underline{u}_1 = (2, 0, 1, 3, -1), \underline{u}_2 = (1, 1, 0, -1, 1), \underline{u}_3 = (0, -2, 1, 5, -3), \underline{u}_4 = (1, -3, 2, 9, -5)$$

z aritmetického vektorového prostoru R^5 .

Nejprve zjistíme, zda vektory $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4$ nejsou lineárně nezávislé, tj. zda netvoří bázi daného vektorového prostoru. Řešíme tedy rovnici $c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 + c_3 \underline{u}_3 + c_4 \underline{u}_4 = \underline{0}$, kterou lze přepsat na soustavu

$$\begin{aligned} 2c_1 + c_2 + c_4 &= 0 \\ c_2 - 2c_3 - 3c_4 &= 0 \\ c_1 + c_3 + 2c_4 &= 0 \\ 3c_1 - c_2 + 5c_3 + 9c_4 &= 0 \\ -c_1 + c_2 - 3c_3 - 5c_4 &= 0 \end{aligned}$$

Užitím Gaussovy eliminační metody zjistíme, že tato soustava je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned} -c_1 + c_2 - 3c_3 - 5c_4 &= 0 \\ c_2 - 2c_3 - 3c_4 &= 0 \end{aligned}$$

kteřá má zřejmě nekonečně mnoho řešení závislých na 2 parametrech.

Množinu všech řešení soustavy lze zapsat např. ve tvaru

$$\{(-c_3 - 2c_4, 2c_3 + 3c_4, c_3, c_4); c_3, c_4 \in R\}.$$

To znamená, že např. pro $c_3 = c_4 = 1$ je $(-3, 5, 1, 1)$ jedním z řešení soustavy, takže

$-3\underline{u}_1 + 5\underline{u}_2 + \underline{u}_3 + \underline{u}_4 = \underline{0}$. Vektory $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4$ jsou tedy lineárně závislé a bázi daného vektorového prostoru netvoří. Podobně i vektory $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_4$ jsou lineárně závislé, neboť $-2\underline{u}_1 + 3\underline{u}_2 + \underline{u}_4 = \underline{0}$. Vektory $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ jsou již lineárně nezávislé, protože $k_1 \underline{u}_1 + k_2 \underline{u}_2 = \underline{0}$ právě tehdy, když $k_1 = k_2 = 0$.

Množina $B = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\} = \{(2, 0, 1, 3, -1), (1, 1, 0, -1, 1)\}$ je tedy bázi daného vektorového prostoru a jeho dimenze je rovna 2.

Jinou bázi téhož vektorového prostoru určíme jednodušším způsobem úpravou matice

$$\begin{aligned} \underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \\ \underline{u}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 10 & -6 \end{pmatrix} \approx \\ &\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \underline{A}^* \end{aligned}$$

Řádky matice \underline{A}^* jsou lineárně nezávislé vektory, které tvoří bázi daného vektorového prostoru.

Euklidovské vektorové prostory

Euklidovský vektorový prostor

Vektorový prostor $(E, +, \cdot)$ nad R nazýváme euklidovským vektorovým prostorem, jestliže existuje zobrazení $g : E \times E \rightarrow R$ takové, že pro libovolné vektory $a, b, c \in E$ a libovolné reálné číslo α platí:

$$\begin{aligned} &^a g(a, b) = g(b, a) \\ &^b g(a + b, c) = g(a, c) + g(b, c) \\ &^c g(\alpha a, c) = \alpha g(a, c) \\ &^d g(a, a) \geq 0, g(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

Zobrazení g nazýváme skalárním součinem.

Úmluva: Euklidovský vektorový prostor $(E, +, \cdot)$ se skalárním součinem g budeme v dalším textu značit (E, g) .

V euklidovském vektorovém prostoru (E, g) platí:

$$\begin{aligned} &^a \|\alpha a\| = |\alpha| \|a\| \\ &^b \|a\| \geq 0; \quad \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ &^c |g(a, b)| \leq \|a\| \|b\| \text{ (Schwartzova nerovnost)} \\ &^d \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \text{ (trojúhelníková nerovnost)} \end{aligned}$$

Velikost vektorů a jimi sevřeného úhlu

Necht' (E, g) je euklidovský vektorový prostor, $a, b \in E$.

Délkou (velikostí, normou) vektoru a nazýváme reálné číslo

$$\|a\| = \sqrt{g(a, a)}.$$

Velikost ρ úhlu mezi vektory a, b definujeme takto:

$$\cos \rho = \frac{g(a, b)}{\|a\| \cdot \|b\|} \text{ pro } a \neq 0, b \neq 0, \rho \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$\cos \rho = 0 \text{ pro } a = 0 \text{ nebo } b = 0.$$

Jestliže platí $\cos \rho = 0$, nazýváme vektory a, b kolmými (ortogonálními) a píšeme $a \perp b$.

Ortogonalní doplněk

Necht' (E, g) je euklidovský vektorový prostor, M podmnožina E . Ortogonálním doplňkem množiny M nazýváme množinu

$$M^\perp = \{a \in E; \forall b \in M : a \perp b\}$$

Vektory ortogonální a ortonormální

Necht' a_1, a_2, \dots, a_k jsou vektory z euklidovského vektorového prostoru (E, g) .

Vektory a_1, a_2, \dots, a_k nazýváme ortogonálními, jestliže $a_i \perp a_j$ pro všechna $i \neq j$. Vektory

a_1, a_2, \dots, a_k nazýváme ortonormální, jestliže jsou navzájem ortogonální a $\|a_i\| = 1, 1 \leq i \leq k$.

Ortogonalní (ortonormální) báze

Nechť (E, g) je n -rozměrný euklidovský vektorový prostor, $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ jeho báze. Jsou-li vektory a_1, a_2, \dots, a_n navzájem ortogonální, resp. ortonormální, nazýváme B ortogonální, resp. ortonormální bází.

Příklad 22.

Nechť V je podprostor aritmetického vektorového prostoru R^3 se skalárním součinem takový, že

$$V = [\{(2,1,3), (4,2,0)\}].$$

Určeme: ^a ortogonální bázi ve V , která není ortonormální

^b ortogonální doplněk V^\perp v prostoru R^3

^c ortonormální bázi ve V

^d ortonormální bázi ve V^\perp .

^a Vektory $\underline{u}_1 = (2,1,3)$ a $\underline{u}_2 = (4,2,0)$, které generují vektorový prostor V , jsou zřejmě lineárně nezávislé, takže množina $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ je bází tohoto podprostoru. Tato báze však není ortogonální, neboť $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 10 \neq 0$. Abychom dostali ortogonální bázi, nahradíme např. vektor \underline{u}_2 vektorem $\underline{w} \in V$ takovým, že $\underline{u}_1 \cdot \underline{w} = 0$.

Protože $\underline{w} \in V$, musí existovat čísla $a_1, a_2 \in R$ taková, že $\underline{w} = a_1 \underline{u}_1 + a_2 \underline{u}_2$.

Platí tedy $\underline{u}_1 \cdot (a_1 \underline{u}_1 + a_2 \underline{u}_2) = 0$, takže $a_1 (\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1) + a_2 (\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2) = 0$.

K určení vektoru \underline{w} stačí najít libovolné nenulové řešení této rovnice.

Proto zvolíme např. $a_2 = 1$.

Potom $a_1 = \frac{-(\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2)}{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1}$; po dosazení $a_1 = \frac{-(2,1,3) \cdot (4,2,0)}{(2,1,3) \cdot (2,1,3)} = -\frac{5}{7}$.

Hledaný vektor $\underline{w} = -\frac{5}{7}(2,1,3) + (4,2,0) = \left(\frac{18}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{15}{7}\right)$.

Množina $B = \{\underline{u}_1, \underline{w}\} = \left\{(2,1,3), \left(\frac{18}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{15}{7}\right)\right\}$ je tedy ortogonální bází prostoru V , která není ortonormální, neboť např. $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1 = 14 \neq 1$. Jinou ortogonální bází prostoru V , která není ortonormální je množina $B' = \{(2,1,3), (6,3,-5)\}$.

^b Ortogonalním doplněkem V^\perp podprostoru V v prostoru R^3 , je množina všech vektorů z R^3 ortogonálních na vektory $\underline{u}_1, \underline{u}_2$.

Tedy $V^\perp = \left\{ \underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) \in R^3; \underline{u} \cdot (2,1,3) = 0 \wedge \underline{u} \cdot (4,2,0) = 0 \right\}$.

Pro každý vektor $\underline{u} \in V^\perp$ tedy musí platit

$$2u_1 + u_2 + 3u_3 = 0$$

$$4u_1 + 2u_2 = 0$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru. Množinu řešení lze zapsat například ve tvaru

$$\{(u_1, -2u_2, 0), u_1 \in R\}.$$

Tedy $V^\perp = \left\{ \underline{u} \in R^3; \underline{u} = (u_1, -2u_2, 0) \right\}$.

^z Ortonormální bázi vektor. prostoru V získáme např. z báze $B' = \{\underline{u}_1, \underline{w}'\} = \{(2,1,3), (6,3,-5)\}$, která je pouze ortogonální tak, že z vektorů $\underline{u}_1, \underline{w}'$ vytvoříme vektory jednotkové:

$$\frac{\underline{u}_1}{|\underline{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1}} \cdot \underline{u}_1 = \frac{1}{14} \cdot (2,1,3)$$

$$\frac{\underline{w}_1}{|\underline{w}_1|} = \frac{1}{\sqrt{\underline{w}_1 \cdot \underline{w}_1}} \cdot \underline{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{70}} \cdot (6,3,-5)$$

Množina $\left\{ \frac{1}{14} \cdot (2,1,3), \frac{1}{\sqrt{70}} \cdot (6,3,-5) \right\}$ je tedy ortonormální bázi vektorového prostoru V .

^d Vzhledem k tomu, že dimenze vektorového prostoru R^3 je rovna 3 a dimenze jejího podprostoru V je rovna 2, musí být dimenze podprostoru V^\perp rovna $3 - 2 = 1$. To znamená, že libovolný nenulový vektor z V^\perp tvoří bázi V^\perp . Uvažujme např. bázi $\{(1,-2,0)\}$. Tato báze zřejmě není ortonormální, neboť $(1,-2,0) \cdot (1,-2,0) = 5 \neq 1$. Ortonormální bázi bude tvořit jednotkový vektor z V^\perp , tedy vektor

$$\frac{1}{\sqrt{(1,-2,0) \cdot (1,-2,0)}} \cdot (1,-2,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right).$$

Ortonormální bázi prostoru V^\perp je tedy množina $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right)$.

Pamatujme:

„I kdyby byl naším údělem dlouhý život, bylo by nutné šetrně si rozdělit čas, aby stačil na nezbytné záležitosti. Jaké šílenství učit se zbytečnosti v tak velké časové tísní, v níž jsme.“

Seneca

Lineární zobrazení, isomorfismus vektorových prostorů

Lineární zobrazení

Nechť $V(T)$, $V'(T)$ jsou vektorové prostory nad týmž tělesem T . Zobrazení $\rho: V \rightarrow V'$ se nazývá lineární zobrazení, jestliže pro libovolné $a, b \in V$, $\alpha \in T$ platí:

$$\stackrel{a}{\rho(\underline{a} + \underline{b})} = \rho(\underline{a}) + \rho(\underline{b}) \text{ (zobrazení se nazývá aditivní)}$$

$$\stackrel{b}{\rho(\alpha \underline{a})} = \alpha \rho(\underline{a}) \text{ (zobrazení je homogenní)}$$

- Obraz lineární kombinace vektoru z V je roven lineární kombinaci jejich obrazů se stejnými koeficienty.

Jádro a obraz zobrazení ρ

Nechť $\rho: V(T) \rightarrow V'(T)$ je lineární zobrazení. Množina $\ker \rho = \{a \in V; \rho(a) = o\}$ se nazývá jádro zobrazení ρ , množina $\text{Im } \rho = \{b \in V'; \exists a \in V : \rho(a) = b\}$ se nazývá obraz zobrazení ρ .

- $\ker \rho$ je podprostor prostoru $V(T)$, $\text{Im } \rho$ je podprostor prostoru $V'(T)$.
- Necht' $\rho: V(T) \rightarrow V'(T)$ je lineární zobrazení a V je konečně rozměrný prostor. Pak platí:

$$\dim(\ker \rho) + \dim(\text{Im } \rho) = \dim V$$

- Necht' $\rho: V(T) \rightarrow V'(T)$ je lineární zobrazení a V je konečně rozměrný prostor. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

$$a) \rho \text{ je prosté} \quad b) \ker \rho = \{o\} \quad c) \dim(\text{Im } \rho) = \dim V$$

•
•
•

Takto lineární algebra rozhodně nekončí, končí jen má práce.

Použitá literatura

Bican, L.: Lineární algebra, Praha 1979

Bican, L.: Lineární algebra v úlohách, Praha 1979

Kopecký, M.-Emanovský, P.: Sbírká řešených příkladů z algebry, Olomouc 1990

Liebl, P.: Maticová algebra, Praha 1977

Novotná, J.-Trch, M.: Algebra a teoretická aritmetika (Lineární algebra), Praha 1995

Novotná, J.-Trch, M.: Algebra a teoretická aritmetika (Základy algebry), Praha 1993

OBSAH

| | |
|---|----|
| ELEMENTY LINEÁRNÍ ALGEBRY | 0 |
| Základní pojmy | 1 |
| Binární relace R | 1 |
| Zobrazení | 2 |
| Binární operace | 2 |
| Grupa | 2 |
| Číselné těleso | 3 |
| Aritmetický vektor | 3 |
| Rovnost dvou aritmetických vektorů | 3 |
| Součet dvou aritmetických vektorů | 3 |
| α -násobek | 3 |
| Nulový aritmetický vektor | 3 |
| Lineární kombinace | 3 |
| Lineární závislost a nezávislost vektorů | 4 |
| Matice | 6 |
| Diagonála a diagonální matice | 6 |
| Jednotková matice | 6 |
| Transponovaná matice | 6 |
| Matice symetrická a antisymetrická | 7 |
| Trojúhelníková matice | 7 |
| Čtvercové matice: regulární \times singulární | 7 |
| Řádkový prostor | 7 |
| Hodnost matice | 7 |
| Elementární úpravy | 7 |
| Rovnost matic | 8 |
| Součet matic | 8 |
| α -násobek matice | 9 |
| Součin matic | 10 |
| Záměnné matice | 10 |
| Frobeniova věta | 10 |
| Adjungované matice | 11 |
| Inverzní matice | 11 |
| Permutace, determinanty a jejich užití | 15 |
| Pořadí prvků | 15 |
| Inverze v pořadí | 15 |
| Permutace | 15 |
| Inverzní permutace | 15 |
| Znaménko permutace π | 15 |
| Determinant matice A | 16 |
| Minor (subdeterminant) | 17 |
| Cramerovo pravidlo | 17 |
| Vektorový prostor | 19 |
| Vektorový prostor | 19 |
| Vektorový podprostor | 19 |
| Lineární obal | 20 |
| Úpravy generátorů | 20 |
| Steinitzova věta | 20 |
| Konečněrozměrný vektorový prostor | 20 |

| | |
|---|----|
| Báze | 20 |
| Dimenze | 21 |
| Souřadnice vektoru vzhledem k bázi | 21 |
| Součet podprostorů | 21 |
| Euklidovské vektorové prostory | 23 |
| Euklidovské vektorové prostory | 23 |
| Euklidovský vektorový prostor | 23 |
| Velikost vektorů a jimi sevřeného úhlu | 23 |
| Ortogonalní doplněk | 23 |
| Vektory ortogonální a ortonormální | 23 |
| Ortogonalní (ortonormální) báze | 24 |
| Lineární zobrazení, isomorfismus vektorových prostorů | 26 |
| Lineární zobrazení | 26 |
| Jádro a obraz zobrazení ρ | 26 |
| Použitá literatura | 26 |
| OBSAH | 27 |