Vypracované úlohy z Panorámy z fyziky II

Autor: **Martin Brakl**

UČO: **410 316**

Dátum: **15.6.2013**

Príklad 1

Zadanie:

a) Aká je vzdialenosť medzi najbližšími susedmi v diamantovej mriežke uhlíka (C), kremíka (Si), germánia (Ge)?

b) Aká je hmotnosť doštičky kremíka o rozmeroch 15x15x0,7 mm^3 a koľko atómov obsahuje?

c) Koľko atómov je v kocke z kremíka o hrane 32 nm?

Riešenie:

a) Podľa rozloženia atómov v diamantovej mriežke je zrejmé, že najbližšie atómy sú od seba vzdialené 1/4 dĺžky telesovej uhlopriečky. Ich vzdialenosť teda vypočítame ako

$d = \frac{1}{4}\sqrt{3}a$, kde a je mriežková konštanta daného prvku.

Najbližšie vzdialenosti atómov v diamantovej mriežke sú:

Prvok	Mriežková konštanta a [nm]	Vzdialenosť d [nm]
C	0.356683	**0.154482**
Si	0.543095	**0.235167**
Ge	0.564613	**0.244485**

b) V = 15 x 15 x 0.7 mm^3 = 0,1575 cm^3

A_r(Si) = 28,0855 g/mol

N_A = 6,022 x 10^{23}

Hmotnosť: $m = V \cdot \rho = 0{,}1575 \cdot 2{,}329 = 0{,}36682\, g$

Látkové množstvo: $n = \frac{m}{M} = \frac{0{,}36682}{28{,}0855} = 0{,}01306\, mol$

Počet častíc: $N = n \cdot N_A = 0{,}01306 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 7{,}8652 \cdot 10^{21}\, \check{c}ast\acute{i}c$

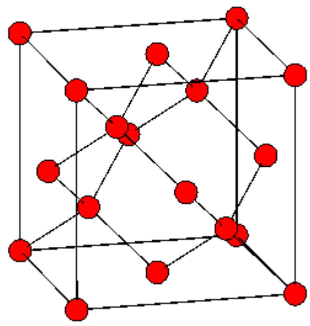
Hmotnosť tejto kremíkovej doštičky je približne **0,36682 g** a obsahuje **7,8652x10^{21} atómov Si**.

c) Hrana kocky d = 32 nm

Mriežková konštanta A_{si} = 0,543095 nm

Objem jednej „kocky“ Si s diamantovou mriežkou, kde a = 0.543095 nm je mriežková konštanta:

$$V_0 = a^3 = 0{,}160187 \cdot 10^{-27} m^3$$



Objem kocky tvorenej kryštálmi kremíka s d = 32 nm:

$$V = d^3 = 3{,}2768 \cdot 10^{-23} m^3$$

Kocka diamantovej mriežky má:

8 vrcholov – 8 atómov zdieľaných 8 kryštálmi

6 strán - 6 atómov zdieľaných 2 kryštálmi

- 4 „vlastné“ atómy ležiace na telesových uhlopriečkach

$$\cancel{N = \frac{V}{V_0} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{8}{1} = 204560{,}8509 \cdot 24 = 4909460{,}421}$$

$$N = \frac{V}{V_0} + \frac{8}{8} + \frac{6}{2} + \frac{4}{1} = 2{,}45 * 10^6$$

Kremíková kocka s mriežkou 32nm obsahuje teda cca **2,45 * 10^6 atómov Si**.

Príklad 2

Zadanie:

a) Aká je vzdialenosť najbližších susedov v kryštálovej rovine grafitu?
b) Aký počet atómov uhlíka je v ploche 1 cm^2 grafénovej roviny a aká je jej hmotnosť?

Riešenie:

a) Vzdialenosť dvoch susedných atómov uhlíka v kryštálovej rovine grafénu je **0,142 nm**.

b)

vzdialenosť susedných atómov: a = 0,142 nm (strana šesťuholníka)

obsah jedného hexagónu:

$$\cancel{S_h = \frac{(3\sqrt{2})}{2}\cdot a^2 = \frac{(3\sqrt{2})}{2}\cdot(0{,}142\cdot 10^{-9})^2 = 5{,}2388\cdot 10^{-20}\, m}$$

S_h = ((3*√3)/2)*a^2 = 5,23876*10 -20 m

obsah plochy: S = 10^{-4} m^2

počet hexagónov na ploche S:

$$x = \frac{S}{S_h} = \frac{10^{-4}}{5{,}2388}\cdot 10^{-20} = 1{,}9088\cdot 10^{15}$$

Každý hexagón je tvorený 6 atómami uhlíka a každý z nich je zdieľaný ďalšími 2 hexagónmi. Počet atómov uhlíka na ploche S teda vypočítame ako:

$$N = \frac{6}{3}\cdot x = 2\cdot 1{,}9088\cdot 10^{15} = 3{,}8176\cdot 10^{15}$$

Keďže poznáme počet atómov a vieme určiť hmotnosť jedného atómu, môžeme dopočítať hmotnosť 1cm^2 plochy grafitu:

relatívna atómová hmotnosť: $A_r(C^{12}) = 12$
atómová hmotnostná konštanta: m_u = 1,6603 . 10^{-27} kg
počet atómov C: N = 3,8176 . 10^{15}
celková hmotnosť: $m = N\cdot A_r(C^{12})\cdot m_u = 7{,}606\cdot 10^{-11}\, kg$

1 cm^2 grafitu obsahuje cca **3,8176 . 10^{15} atómov uhlíka** a jeho hmotnosť je cca **7,606 . 10^{-11} kg**.

Príklad 3

<u>Zadanie:</u>
Popíš procedúru datovania pomocou izotopu uhlíka ^{14}C.

<u>Riešenie:</u>
Uhlíková metóda datovania je chemicko-fyzikálna metóda určená pre zistenie veku biologického materiálu. Je založená na znalostiach o poklese počtu atómov rádioaktívneho izotopu uhlíka ^{14}C v pôvodne živých organizmoch.

V prírode izotop ^{14}C tvorí iba 0,000 001% celkového výskytu všetkého uhlíka. Práve tento prvok sa využíva, pretože z veľkej časti sa nachádza v takmer každom živom organizme. Súčasne však v živých organizmoch, dochádza k jeho rozpadu.

Po smrti organizmu dochádza k prerušeniu príjmu ^{14}C z okolia. polčas rozpadu 14C je 5730 rokov čo znamená, že za tento čas klesne jeho relatívny obsah vo vzorke na polovicu. zmeraním jeho pomeru k stabilnému ^{12}C potom môžeme vypočítať, kedy organizmus umrel.

Nevýhodou tejto metódy je jej nepresnosť, resp. pomocou nej je možné určiť vek iba u materiáloch s organickým pôvodom ako sú pozostatky živočíchov, rastlín apod. Metóda nedovoľuje určiť presný vek vzoriek starších ako cca 50 000 rokov v extrémnych prípadoch viac ako 100 000 rokov, pretože obsah tohto izotopu za tento čas klesne na príliš nízku úroveň. Takisto nie je možné určiť vek vzoriek mladších ako 100 až 200 rokov. Presnosť tejto metódy bola štatisticky zmeraná na rozptyl od 10 do 50 rokov. Nepresnosť sa tak môže pohybovať okolo 1 až 5% z odhadovaného veku vzorky.

Ďalšou nevýhodou je, že táto metóda je deštruktívna. Napríklad pri meraní veku nejakej kosti, sa kosť musí spáliť na čistý uhlík a potom sa meria rádioaktivita vzorky, teda ku koľkým rádioaktívnym rozpadom dôjde za určitý čas(približne za 10 hod.).

Pôvodná metóda vychádza z predpokladu, že koncentrácia 14C je stála. V skutočnosti sa ale táto koncentrácia mení. Neskôr bola preto táto metóda upravená a vylepšená hlavne pomocou dendrochronológie a pod. metód. Je preto treba kontrolovať, či údaje uvedené k vzorke sú surové nespracované(označované ako BP) alebo už prepočítané na bežný letopočet(označované ako BC). Dáta z druhej polovice 20. storočia sú silne ovplyvnené jadrovými pokusmi, ktoré výrazne zvýšili aj ked iba dočasne obsah 14C. Naopak vzorky z miest, kde sa do organizmov dostal uhlík z fosílnych zdrojov napr. spálením ropy alebo uhlia, sa môže javiť starší ako v skutočnosti je.

príklad 4

Zadanie:

Koľko atómov H, O, C, Ca obsahuje ľudské telo o hmotnosti 80 kg? Vyjadrite relatívne voči počtu atómov H.

Riešenie:

Prvok	Zastúpenie v ľudskom tele (%)	Hmotnosť prvkov m [kg]	Molová hmotnosť M	Počet atómov n	Relatívne voči počtu atómov H
H	10%	8	1	4818×10^{24}	-
O	65%	52	16	1957×10^{24}	**40,61%**
C	18%	14,4	12	7227×10^{23}	**15%**
Ca	1,4%	1,12	40	150×10^{23}	**0,31%**

Na základe percentuálneho zastúpenia prvkov v ľudskom tele som vypočítal ich hmotnosť u 80 kg človeka.

(80kg/100) * percentuálne zastúpenie = m (prvku)

Molárna hmotnosť M prvku je daná ako atómová hmotnosť prvku vynásobená molárnou hmotnostnou konštantou $M_u = 1\times10^{-3}$ kg/mol = 1 g/mol.

Pre počet atómov daného prvku platí:

$n = \frac{m * A}{M}$, kde

$A = 6{,}0225\text{x}10^{23}$ (Avogardovo číslo)

M = molárna hmotnosť prvku

Výsledné relatívne množstvo atómov O, C a Ca voči počtu atómov vodíka sme vyjadrili ako:

n určeného prvku / (n vodíka / 100).

Príklad 5

Zadanie:
Spočítajte objem, pripadajúci na jednu molekulu plynu pri tlaku 10^8 Pa, 10^5 Pa(atmosférický tlak pri mori),10^{-14} Pa a teplotách 300K (pokojová teplota), 2,7K (kozmické reliktné žiarenie).

Riešenie:
Stavová rovnica ideálneho plynu :

$$pV = \frac{N * k * T}{p}$$

N = 1 molekula
k = boltzmanova konštanta = $1{,}381*10^{-23}$ $J*K^{-1}$

Výpočet:

pre teplotu 2,7K a tlak 10^8 Pa: $V = \frac{1*1{,}381*10^{-23}*2{,}7}{10^8} = 3{,}7287 * \ 10^{-31} m^3$

pre teplotu 300K a tlak 10^8 Pa: $V = \frac{1*1{,}381*10^{-23}* 300}{10^8} = 4{,}143 * 10^{-29} m^3$

	objem V [m^3] pri teplote 2,7K	objem V [m^3] pri teplote 300K
tlak 10^5 Pa	$\underline{\mathbf{3,7287 * \ 10^{-28}}}$	$\underline{\mathbf{4,143 * 10^{-26}}}$
tlak 10^8 Pa	$\underline{\mathbf{3,7287 * \ 10^{-31}}}$	$\underline{\mathbf{4,143 * 10^{-29}}}$
tlak 10^{-14} Pa	$\underline{\mathbf{3,7287 * \ 10^{-9}}}$	$\underline{\mathbf{4,143 * 10^{-7}}}$

Príklad 6

Zadanie:
Pri akom objeme plynu nastáva relatívna fluktuácia hustoty plynu o veľkosti 10 %, pei tlaku 10^5 Pa a teplotě $20°$ C?
Riešenie:

Boltzmanova konstanta $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K

Vzťahy:
Pre ideálny plyn platí: $N = \frac{PV}{kT}$ $(pV = NkT)$, kde N je počet molekul.
Vzorec pre vzťah počtu molek´´ul a druhej mocniny relatívnej fluktuácie objemu:

$$\langle\frac{(V - V_0)^2}{V^2}\rangle = \frac{1}{N} = \frac{kT}{PV}$$

Výpočet:
Zo zadania poznáme...

$$\frac{V - V_0}{V} = 0.1$$

Dopočítame druhu mocninu (aby sme mohli dosadiť do vzorca) a označíme si ji δ

$$\delta = \langle\frac{(V - V_0)^2}{V^2}\rangle = 0.01$$

Vyjadríme objem a dosadíme.

$$V = \frac{kT}{P\delta} = \frac{1.38 * 10^{-23} * 293.15}{10^5 * 0.01} = 4 * 10^{-24}\ \mathrm{m}^3$$

Relatívna fluktuácia plynu podľa zadania nastáva pri plyne o objeme **$4 * 10^{-24}$ m^3**.

Príklad 7

Zadanie:

a) Aká je vnútorná energia 1m^3 jednoatómového plynu pri tlaku 10^5 Pa?
b) Aká je zmena tlaku a vnútornej energie pri adiabatickej kompresii na 1/100 objemu?

Riešenie:

Zo stavovej rovnice plynu si vyjadríme N:

$pV = N\,kT$
$N = pV/kT$

Dosadíme do vzťahu pre vnútornú energiu plynu:
$\boldsymbol{U} = 3/2 \,.\, N \,.\, k \,.\, T = 3/2 \,.\, (p \,.\, V \,.\, k \,.\, T)\ /\ (k \,.\, T) = 3/2 \,.\, p \,.\, V = 3/2 \,.\, 10^5 \,.\, 1 = 150\,000\ J$
$= \underline{\mathbf{150}\ \boldsymbol{kJ}}$

Pre adiabatický dej platí nasledujúci vzťah:
$p_1 V_1{}^{\kappa} = p_2 V_2{}^{\kappa}$

Zo zadania vyplýva, že $\boldsymbol{V_2} = V_1/100$, pre jednoatómový plyn je $\boldsymbol{\kappa} = 5/3$

Po dosadení môžeme vyjadriť zmenu tlaku:

$p_1 V_1{}^{\kappa} = p_2 \,.\, (V_1 / 100)^{\kappa}$
$\boldsymbol{p_2} = 100^{\kappa} \,.\, p_1 = 100^{5/3} \,.\, p_1 \approx \underline{\mathbf{2154}\ \boldsymbol{p_1}}$

Vnútorná energia sa mení podobne ako teplota, preto zistíme ako sa pri tomto deji mení teplota.

Z termodynamického zákona vyplýva:

$pV = NkT$
$Nk = (p_1\, V_1) / T_1$
$Nk = (p_2\, V_2) / T_2$

Preto môžeme písať $(p_1\, V_1) / T_1 = (p_2\, V_2) / T_2$
$(p_1\, V_1) / T_1 = ((100^{\kappa}\, p_1) \,.\, (V_1 / 100)) / T_2$
$T_2 = 100^{\kappa - 1}\, T_1 = 100^{2/3}\ T_1 \approx \underline{\mathbf{21{,}54}\ \boldsymbol{T_1}}$

Teplota sa zvýši cca 21,54-krát, čiže vnútorná energia sa zvýši cca **21,54-krát**.

Príklad 8

Zadanie:

Porovnajte prácu vykonanú jednoatómovým ideálnym plynom pri adiabatickej a izotermickej expanzii zo zväčšením objemu na dvojnásobok pôvodného objemu.

Riešenie:

Adiabatická expanzia:

Pre zmenu vnútornej energie plynu pri adiabatickej expanzii platí, že sa rovná práci vykonanej plynom, teda

$\Delta U = W_A = 3/2 * n * R * \Delta T$

Zmenu teploty si vyjadríme pomocou stavovej rovnice plynu a vzťahu pre adiabatický dej:

$p_1V_1 = nRT_1 \Rightarrow T_1 = p_1V_1 / nR$
$p_2V_2 = nRT_2 \Rightarrow T_2 = p_2V_2 / nR$
$p_1{V_1}^{\kappa} = p_2{V_2}^{\kappa}$
$p_1{V_1}^{\kappa} = p_2\,(2V_1)^{\kappa}$
$\boldsymbol{p_2} = p_1 / 2^{\kappa}$

Keďže pri adiabatickej expanzii sa teplota znižuje, platí, že $\boldsymbol{T\,1} > \boldsymbol{T\,2}$ a preto je zmena teploty

$\Delta T = T_1 - T_2$

$\Delta T = (p_1V_1 / nR) - ((p_1 / 2^{\kappa}) * 2V_1) / nR = (p_1V_1 / nR) * (1 - (2 / 2^{\kappa}))$

Po dosadení do pôvodného vzťahu si vyjadríme vzťah pre prácu plynu pri adiabatickej expanzii

$\boldsymbol{W_A} = 3/2 * nR\,\Delta T = 3/2 * nR * (p_1V_1 / nR) * (1 - 2/2^{\kappa}) = \boldsymbol{3/2\ p_1V_1 * (1 - 2/2^{\kappa})}$

Izotermická expanzia:

Pri izotermickej expanzii platí, že vnútorná energia plynu sa nezmení, a teda vykonaná práca sa rovná prijatému teplu. Hodnotu vykonanej práce určíme ako obsah plochy pod krivkou v pV diagrame:

$W_T = nRT \ln V_2/V_1$

Pre izotermický dej platí:

$p_1V_1 = p_2V_2$

Skombinovaním stavovej rovnice plynu so vzťahom pre vykonanú prácu dostávame:

$\boldsymbol{W_T} = p_1V_1 \ln V_2/V_1 = p_1V_1 \ln 2V_1/V_1 = \boldsymbol{p_1V_1\ \ln 2}$

Porovnanie W_A a W_T :

$\boldsymbol{W_T}$ / $\boldsymbol{W_A}$ = (p_1V_1 ln 2) / (3/2 p_1V_1 * (1 − 2/2$^{\kappa}$)) = ln 2 / (3/2 (1 − 2/2$^{\kappa}$)) ≈ $\underline{\mathbf{1,2488}}$

Teda práca vykonaná pri izotermickej expanzii je cca 1,24 krát väčšia ako pri adiabatickej expanzii.

Príklad 9

<u>Zadanie :</u>
Aký celkový výkon vyžaruje absolútne čierne teleso z plochy $1m^3$ pri teplotách 37°C a 5000°C?

<u>Riešenie:</u>

$S = 1m^3$
$\sigma = 5{,}6704 * 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$
$M_e = \sigma * T^4$

M_e[jednotky] -> $[W * m^{-2}]$ -> W

[K] = [°C] + 273,15

$T_1 = 37°\ C + 273{,}15 = 310{,}15K$
$T_2 = 5000°\ C + 273{,}15 = 5273{,}15K$

$P_1 = 5{,}6704 * 10_{-8} * 1 * (310{,}15)^4 =$ **<u>524,688 W</u>**
$P_2 = 5{,}6704 * 10^{-8} * 1 * (5273{,}15)^4 =$ **<u>$4{,}38424*10^7$ W</u>**

Úloha 10

Zadanie:

Aká je maximálna účinnosť spaľovacieho motoru s teplotou horúceho plynu rovnou teplote topenia hliníku a teplotou výfukových plynov 100°C?

Riešenie:

Teplota topenia hliníka je 660,32°C = 933,47K

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

T_1 =100°C = 373,15 K

T_2= 933,47 K

$$\boldsymbol{\eta = 0,60 = 60\%}$$

Motor má 60%-tnú účinnost.

Príklad 11

Zadanie:

Akú energiu (v eV) má dopadajúci a rozptýlený fotón v Comptonovom experimente, ak je vlnová dĺžka 0,1 nm a rozptyl pozorujeme pod uhlom 90°?

Aká je kinetická energia a rýchlosť rozptýleného elektrónu?

Riešenie:

$\lambda = 0{,}1\ \mathrm{nm} = 10^{-10}\ \mathrm{m}$

$\varphi = 90°$

$h = 6{,}626\ .\ 10^{-34}\ \mathrm{J.s}$

$c = 3\ .\ 10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$

$m_e = 9{,}109\ .\ 10^{-31}\ \mathrm{kg}$

$1\ \mathrm{eV} \approx 1{,}602\ .\ 10^{-19}\ \mathrm{J}$

Zo základnej rovnice foto-efektu platí pre Comptonov jav upravený vzťah:

$$E = E_1 + E_k$$

$$hf = hf' + E_k$$

Energia dopadajúceho fotónu:

$$E = hf = h\frac{c}{\lambda}$$

$$E = 6{,}626\ .\ 10^{-34}\ .\frac{3\ .\ 10^{8}}{10^{-10}} = 1{,}9878\ .\ 10^{-15}\ \mathrm{J} = \mathbf{12{,}408\ keV}$$

Energia odrazeného fotónu:

$$E_1 = hf' = h\frac{c}{\lambda'} = h\frac{c}{\lambda + \Delta\lambda}$$

Comptonov posun $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\varphi)$$

Comptonova vlnová dĺžka elektrónu

$$\lambda_C = 2{,}426\ .\ 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

$$E_1 = h\frac{c}{\lambda + \lambda_C\,(1 - \cos\varphi)}$$

$$E_1 = 6{,}626\,.\,10^{-34}\,.\,\frac{3\,.\,10^8}{10^{-10} + 2{,}426\,.\,10^{-12}\,.\,(1 - \cos 90°)} = 1{,}9407\,.\,10^{-15}$$
$$= \mathbf{12{,}114\ keV}$$

Kinetická energia rozptýleného elektrónu:

$$E = E_1 + E_k$$

$$E_k = E - E_1$$

$$E_k = 12{,}408 - 12{,}114 = 0{,}294\ \mathrm{keV} = \mathbf{294\ eV = 4{,}7099\,.\,10^{-17}\ J}$$

Rýchlosť rozptýleného elektrónu:

$$E_k = \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2\,E_k}{m_e}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\,.\,4.7099\,.\,10^{-17}}{9{,}109\,.\,10^{-31}}} = \mathbf{1{,}0169\,.\,10^{-7} m.\,s^{-1}}$$

Príklad 12

<u>Zadanie:</u>
Aká je energia, hybnosť a vlnová dĺžka (de Brogliova) molekuly C_{60} s rýchlosťou:
a) 1 m/s a
b) 1000 m/s?

<u>Riešenie:</u>
A_r (relatívna hmotnosť C) = 12,0107
m_u (atómová hmotnostná konštanta) = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg
m_a (pokojová hmotnosť atómu)

$$A_r = \frac{m_a}{m_u} \Rightarrow m_a = A_r \cdot m_u$$

Hmotnosť C_{60} = 60 * m_a = 1,196 * 10^{-24}
Hybnosť: p = m * v
Vlnová dĺžka: $\lambda = \frac{h}{p}$
Energia: $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$
h (Planckova konštanta) = 6,626 * 10^{-34} J * s

a)
v = 1 m/s
P = m_a * 1 = **<u>1,196 * 10^{-24} kg * m * s^{-1}</u>**
λ = h/p = **<u>5,54 * 10^{-10} m</u>**
E = $\frac{1}{2}$ * m_a * v^2 = **<u>5,98 * 10^{-25} J</u>**

b)
v = 1000 m/s
P = m_a * 1000 = **<u>1,196 * 10^{-21} kg * m * s^{-1}</u>**
λ = h/p = **<u>5,54 * 10^{-13} m</u>**
E = $\frac{1}{2}$ * m_a * v^2 = **<u>5,98 * 10^{-19} J</u>**