Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z POLYNOMICKÉ ALGEBRY

POLYNOM

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$$

2001/2002 **CIFRIK**

Zadání:

Vyšetřete všemi probranými prostředky polynom $f(x)=x^4-2x^3+x^2-10x-20$.

Vypracování:

Racionální kořeny

Podle věty:

> Nechť $\frac{p}{q}\in Q$ je kořen polynomu $f(x)=a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n$. Pak $p \mid a_n, q \mid a_0$.

určíme množinu M všech racionálních čísel, které mohou být kořeny: V našem případě je

$$p\in\{\pm 1,\pm 2,\pm 4,\pm 5,\pm 10,\pm 20\}$$
$$q\in\{\pm 1\}$$

a proto

$$M=\{\pm 1,\pm 2,\pm 4,\pm 5,\pm 10,\pm 20\}.$$

Tuto množinu M ještě omezíme, neboť platí věta:

> Nechť $\frac{p}{q}\in Q$ je kořen polynomu $f(x)=a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, nechť $c\in Z$.
> Pak $(qc-p)\mid f(c), (qc+p)\mid f(-c)$ (používá se nejčastěji pro $c=1$, kdy dostáváme pro kořen $\frac{p}{q}$ podmínky $(q-p)\mid f(1), (q+p)\mid f(-1)$).

Nejprve zjistíme, že $f(1)=-30, f(-1)=-6$. Další výpočet zapíšeme do tabulky:

$\frac{p}{q}$	$q+p \mid -6$	$q-p \mid -30$	výsledek
2	3	-1	ano
-2	-1	3	ano
4	5	-3	ne
-4	-3	5	ano
5	6	-4	ne

$\frac{p}{q}$	$q+p \mid -6$	$q-p \mid -30$	výsledek
-5	-4	6	ne
10	11	-9	ne
-10	-9	11	ne
20	21	-19	ne
-20	-19	21	ne

Zjistili jsme, že $M_1=\{2,-2,-4\}$. Hornerovým schématem vyšetříme, které prvky z M_1 jsou kořeny polynomu f:

	1	-2	1	-10	-20
2	0	2	0	2	-16
	1	0	1	-8	$\boxed{-36}$

	1	-2	1	-10	-20
-2	0	-2	8	-18	56
	1	-4	9	-28	$\boxed{36}$

	1	-2	1	-10	-20
4	0	4	8	36	104
	1	2	9	26	$\boxed{84}$

Z vypočítaných hodnot plyne závěr – polynom $f(x)=x^4-2x^3+x^2-10x-20$ nemá racionální kořeny.

Odhad počtu reálných kořenů a jejich polohy

Descartesova věta:
Počet kladných kořenů polynomu $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ je buď roven počtu znaménkových změn v posloupnosti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jeho koeficientů, nebo je o sudý počet menší.

- V polynomu $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$ jsou 3 znaménkové změny. Počet kladných kořenů je tedy buď 3 nebo 1.

Všechny reálné kořeny polynomu $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ leží v intervalu $\langle -1 - A, 1 + A \rangle$, kde $A = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|)$

- V našem případě je
$$A = \max(|1|, |-2|, |1|, |-10|, |-20|) = 20$$
proto všechny reálné kořeny polynomu $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$ leží v intervalu $\langle -21; 21 \rangle$

Další odhady polohy reálných kořenů polynomu $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.
Předpokládejme, že aspoň jeden z koeficientů polynomu f je záporný.
Označme

a_i … nejmenší záporný koeficient,
a_r … první záporný koeficient
a_s … největší kladný koeficient před prvním záporným koeficientem,
B … největší z absolutních hodnot záporných koeficientů.

Pak pro každý reálný kořen α polynomu $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ platí:

Maclaurinova věta $\alpha < 1 + \dfrac{|a_i|}{|a_0|}$,

Lagrangeova věta $\alpha < 1 + \sqrt[r]{B}$,

Tillotova věta $\alpha < 1 + \sqrt[r-s]{\dfrac{|a_i|}{a_s}}$

- Pro náš polynom $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$ platí:

$$a_i = a_4 = -20$$
$$a_r = a_1 = -2$$
$$a_s = a_0 = 1$$
$$B = 20$$

Maclaurinova věta: $\alpha < 1 + \frac{|a_i|}{|a_0|}$

$\alpha < 1 + \frac{|-20|}{1}$

$\alpha < 21$

Tillotova věta: $\alpha < 1 + \sqrt[r-s]{\frac{|a_i|}{a_s}}$

$\alpha < 1 + \sqrt[1-0]{\frac{|-20|}{1}}$

$\alpha < 21$

Lagrangeova věta: $\alpha < 1 + \sqrt[r]{B}$

$\alpha < 1 + \sqrt[1]{20}$

$\alpha < 21$

Použití těchto vět nám původní odhad $\langle -21; 21 \rangle$ nezlepšilo.

Dolní odhady kořenů polynomu f získáme opakováním postupu pro polynom g, pro který platí

$$g(x) = f(-x)$$

(protože n je sudé, kdyby bylo liché, platilo by $g(x) = -f(-x)$).

Polynom g tedy je

$$g(x) = f(-x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 10x - 20$$

a protože má jedenu znaménkovou změnu, má i jeden kladný kořen. Proto má polynom f jeden záporný kořen.

Pro polynom $g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 10x - 20$ platí:

$$a_i = a_4 = -20$$
$$a_r = a_4 = -20$$
$$a_s = a_3 = 10$$
$$B = 20$$

Maclaurinova věta: $\alpha < 1 + \frac{|a_i|}{|a_0|}$

$\alpha < 1 + \frac{|-20|}{1}$

$\alpha < 21$

Tillotova věta: $\alpha < 1 + \sqrt[r-s]{\frac{|a_i|}{a_s}}$

$\alpha < 1 + \sqrt[4-3]{\frac{|-20|}{10}}$

$\alpha < 3$

Lagrangeova věta: $\alpha < 1 + \sqrt[r]{B}$

$\alpha < 1 + \sqrt[4]{20} < 3{,}115$

Zjistili jsme, že reálné kořeny polynomu $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$ leží v intervalu $\langle -3; 21 \rangle$. Jeden kořen je záporný a buď tři nebo jeden je kladný.

Separace kořenů

Separovat kořeny polynomu f znamená určit intervaly, v nichž leží právě jeden kořen polynomu f.

Sturmův řetězec:
Nechť $f \in R[x]$. Sturmovým řetězcem polynomu f nazýváme konečnou posloupnost polynomů f_i, $i = 1,2,\ldots,m$, definovaných takto:

$$f_1(x) = f(x), \qquad f_2(x) = f'(x),$$
$$f_{j-1}(x) = q_{j-1}(x) f_j(x) - f_{j+1}(x), \quad j = 2,\ldots,m-1$$
$$f_{m-1}(x) = q_{m-1}(x) f_m(x)$$

(polynom $-f_{j+1}$ je zbytek při dělení polynomu f_{j-1} polynomem f_j, f_m je $D(f, f')$).

Sturmova věta:
Buď $f \in R[x]$. Nechť je $\alpha < \beta$ a $f(\alpha)f(\beta) \neq 0$. Pak počet navzájem různých kořenů polynomu $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ležících v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ je roven číslu $\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)$, kde $\sigma(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově řetězci polynomu $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.
(Pomocí této věty můžeme určit <u>přesný</u> počet kořenů daného polynomu v daném intervalu.)

Sturmův řetězec polynomu $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$ má tyto členy:

$$f_1(x) = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$$
$$f_2(x) = f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 10$$
$$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}$$
$$f_4(x) = -3200x - 10360$$
$$f_5(x) = -\frac{79591}{32400}$$

(jednotlivé výpočty členů posloupnosti jsou uvedeny v dodatku).

Protože je $\mathrm{st}(D(f, f')) = 0$, nemá polynom $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$ vícenásobné kořeny (tj. má pouze jednoduché kořeny).

Sestrojme nyní tabulku znamének polynomu ze Sturmova řetězce v intervalu $\langle -3; 21\rangle$, k výpočtu znamének hodnot v jednotlivých bodech můžeme využít také Hornerovo schéma (ukázka v dodatku):

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$\sigma(x)$
-3	+	–	+	–	–	3
-2	+	–	+	–	–	3
-1	–	–	+	–	–	2
0	–	–	+	–	–	2
1	–	–	+	–	–	2
2	–	+	+	–	–	2
3	–	+	+	–	–	2
4	+	+	+	–	–	1
5	+	+	+	–	–	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	+	+	+	–	–	1

Z tabulky vidíme, že polynom f má jeden jednoduchý kořen v intervalu $(-2,-1)$ a jeden jednoduchý kořen v intervalu $(3, 4)$.

Iterakční metody hledání reálných kořenů polynomu $f \in R[x]$

Metoda půlení intervalu:
Hledáme kořen α polynomu f s přesností $\varepsilon > 0$. Buď $\langle c_1, c_2 \rangle$ takový interval, že znaménka čísel $f(c_1), f(c_2)$ jsou různá (pak v intervalu (c_1, c_2) leží aspoň jeden kořen polynomu f. Označme $c_3 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$. Pak buď $f(c_3) = 0$ a $\alpha = c_3$, nebo $f(c_3) \neq 0$. Ke konstrukci bodu c_4 použijeme ten z intervalů $\langle c_1, c_3 \rangle, \langle c_3, c_2 \rangle$, pro který platí $f(c_i) f(c_3) < 0$ (tj. ten interval, v jehož krajních bodech má funkce f opačná znaménka). Popsaným způsobem pokračujeme tak dlouho, až nalezneme buď přímo kořen α, nebo až platí $|c_{i-1} - c_i| < \varepsilon$.

Metoda tečen (Newtonova metoda):
Předpokládejme, že polynom $f \in R[x]$ má jednoduché kořeny. Nechť $\langle \alpha, \beta \rangle$ je takový interval, uvnitř kterého leží jediný kořen α polynomu f , a nechť na celém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ je $f'(x) \neq 0,\ f''(x) \neq 0$. Označme c_1 to z čísel α, β, pro něž platí $f(c_1) f''(c_2) > 0$, d_1 druhé z čísel α, β, tj. číslo, pro něž platí $f(d_1) f''(d_2) < 0$.
Utvořme posloupnosti

$$c_1,\ c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)},\ c_3 = c_2 - \frac{f(c_2)}{f'(c_2)}, \ldots,$$

$$d_1,\ d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(c_1)},\ d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(c_2)}, \ldots.$$

Potom jedna z posloupností je klesající, druhá rostoucí a obě posloupnosti konvergují ke kořenu α polynomu f.

Metoda sečen (metoda regula falsi):
Předpokládejme, že polynom $f \in R[x]$ má jednoduché kořeny. Nechť $\langle \alpha, \beta \rangle$ je takový interval, uvnitř kterého leží jediný kořen α polynomu f , a nechť na celém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ je $f'(x) \neq 0,\ f''(x) \neq 0$. Označme

$$c_1 = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

Sestrojme posloupnost $\{c_n\}$ předpisem

$$c_n = \frac{c_{n-1} f(\beta) - \beta f(c_{n-1})}{f(\beta) - f(c_{n-1})},\ n = 2,3,\ldots.$$

Pak posloupnost $\{c_n\}$ konverguje ke kořenu α polynomu f.

Aproximace kořenů

Platí $f'(x)=4x^3-6x^2+2x-10, \quad f''(x)=12x^2-12x+2$. Uvažujme nejprve interval $(-2,-1)$. Protože $f(-2)>0, f(-1)<0, f'(x)<0, f''(x)>0$, můžeme použít kteroukoli z uvedených iterakčních metod. Použijme například Newtonovu metodu:

$$c_1=-2 \qquad f(c_1)=36 \qquad f'(c_1)=-70$$

$$c_2=c_1-\frac{f(c_1)}{f'(c_1)}=-1{,}48571 \qquad f(c_2)=8{,}49584 \qquad f'(c_2)=-39{,}333458$$

$$c_3=c_2-\frac{f(c_2)}{f'(c_2)}=-1{,}26972 \qquad f(c_3)=1{,}002566 \qquad f'(c_3)=-30{,}400648$$

$$c_4=c_3-\frac{f(c_3)}{f'(c_3)}=-1{,}23674 \qquad f(c_4)=0{,}0196407 \qquad f'(c_4)=-29{,}217155$$

$$c_5=c_4-\frac{f(c_4)}{f'(c_4)}=-1{,}23607$$

$$d_1=-1 \qquad f(d_1)=-6$$

$$d_2=d_1-\frac{f(d_1)}{f'(c_1)}=-1{,}118779 \qquad f(d_2)=-4{,}014943$$

$$d_3=d_2-\frac{f(d_2)}{f'(c_2)}=-1{,}23283 \qquad f(d_3)=-1{,}369229$$

$$d_4=d_3-\frac{f(d_3)}{f'(c_3)}=-1{,}23606 \qquad f(d_4)=-0{,}09439$$

Víme, že posloupnost $\{c_n\}$ je rostoucí, posloupnost $\{d_n\}$ klesající a $x_1=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}d_n$. Proto

$$x_1\in(c_5,d_4)=(-1{,}23607,-1{,}23606)$$

I v druhém intervalu $(3, 4)$ můžeme použít Newtonovu metodu, protože $f(3) < 0, f(4) > 0,\ f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$.

$$c_1 = 4 \qquad f(c_1) = 84 \qquad f'(c_1) = 158$$

$$c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)} = 3{,}468354 \qquad f(c_2) = 18{,}609368 \qquad f'(c_2) = 91{,}64985$$

$$c_3 = c_2 - \frac{f(c_2)}{f'(c_2)} = 3{,}265306 \qquad f(c_3) = 2{,}06131675 \qquad f'(c_3) = 71{,}81895$$

$$c_4 = c_3 - \frac{f(c_3)}{f'(c_3)} = 3{,}236604 \qquad f(c_4) = 0{,}03712353 \qquad f'(c_4) = 69{,}24115$$

$$c_5 = c_4 - \frac{f(c_4)}{f'(c_4)} = 3{,}236068$$

$$d_1 = 3 \qquad f(d_1) = \text{-}14$$

$$d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(c_1)} = 3{,}088608 \qquad f(d_2) = \text{-}9{,}2721034$$

$$d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(c_2)} = 3{,}189776 \qquad f(d_3) = \text{-}3{,}1089784$$

$$d_4 = d_3 - \frac{f(d_3)}{f'(c_3)} = 3{,}233065 \qquad f(d_4) = \text{-}0{,}2073528$$

$$d_5 = d_4 - \frac{f(d_4)}{f'(c_4)} = 3{,}23606$$

Víme, že posloupnost $\{c_n\}$ je klesající, posloupnost $\{d_n\}$ rostoucí a $x_2 = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$. Proto

$$x_2 \in (d_5, c_4) = (3{,}23606;\ 3{,}236068)$$

Závěr:

Polynom $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$ má dva reálné jednoduché kořeny. První z nich v intervalu $x_1 \in (-1{,}23607, -1{,}23606)$ a druhý v intervalu $x_2 \in (3{,}23606;\ 3{,}236068)$. Polynom je stupně 4, proto má další dva komplexní kořeny.

- Program DERIVE všechny kořeny vypočetl takto:

$$x_1 = 1 + \sqrt{5}$$
$$x_2 = 1 - \sqrt{5}$$
$$x_3 = i\sqrt{5}$$
$$x_4 = -i\sqrt{5}$$

DODATKY

Hornerovo schéma ve vybraných bodech

	1	-2	1	-10	-20
-2	0	-2	8	-18	56
	1	-4	9	-28	36

	1	-2	1	-10	-20
-1	0	-1	3	-4	14
	1	-3	4	-14	-6

	1	-2	1	-10	-20
3	0	3	3	12	6
	1	1	4	2	-14

	1	-2	1	-10	-20
4	0	4	8	36	104
	1	2	9	26	84

Výpočty polynomů Sturmova řetězce

$$f_1(x) = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$$

$$f_2(x) = f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 10$$

$f_1(x) : f_2(x)$

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & (x^4 & -2x^3 & +x^2 & -10x & -20) : (4x^3 - 6x^2 + 2x - 10) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} \\
-(& x^4 & -\frac{3}{2}x^3 & +\frac{1}{2}x^2 & -\frac{5}{2}x) & \\
 & & -\frac{1}{2}x^3 & +\frac{1}{2}x^2 & -\frac{15}{2}x & -20 \\
 & -(& -\frac{1}{2}x^3 & +\frac{3}{4}x^2 & -\frac{1}{4}x & +\frac{5}{4}) \\
 & & & -\frac{1}{4}x^2 & -\frac{29}{4}x & -\frac{85}{4}
\end{array}$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20 = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)\left(4x^3 - 6x^2 + 2x - 10\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}\right)$$

$$f_3(x) = \underline{\underline{\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}}}$$

$f_2(x) : f_3(x)$

$$\begin{array}{rrrrl}
 & (4x^3 & -6x^2 & +2x & -10) : (\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}) = \\
= & (16x^3 & -24x^2 & +8x & -40) \quad : (x^2 + 29x + 85) = 16x - 488 \\
-(& 16x^3 & +464x^2 & +1360x) & \\
 & & -488x^2 & -1352x & -40 \\
 & -(& -488x^2 & -14152x & -41480) \\
 & & & 12800x & +41440
\end{array}$$

$$4x^3 - 6x^2 + 2x - 10 = (16x - 488)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}\right) - (-3200x - 10360)$$

$$f_4(x) = \underline{\underline{-3200x - 10360}}$$

$f_3(x) : f_4(x)$

$$\begin{array}{rrrl}
 & (\frac{1}{4}x^2 & +\frac{29}{4}x & +\frac{85}{4}) : (-3600x - 10360) = -\frac{1}{14400}x - \frac{2351}{1296000} \\
- & (\frac{1}{4}x^2 & +\frac{259}{360}x & +\frac{85}{4}) \\
 & & \frac{2351}{360}x & +\frac{85}{4} \\
 & -(& \frac{2351}{360}x & +\frac{608909}{32400}) \\
 & & & \frac{79591}{32400}
\end{array}$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4} = \left(-\frac{1}{14400}x - \frac{2351}{1296000}\right)(-3600x - 10360) - \left(-\frac{79591}{32400}\right)$$

$$f_5(x) = -\frac{79591}{32400}$$

LITERATURA

- NOVOTNÁ, J. – TRCH, M.: Algebra a teoretická aritmetika. Polynomická algebra. Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Praha 2000.
- ŠISLER, M. – ANDRYS, J.: O řešení algebraických rovnic. Mladá fronta, Praha 1966.

OBSAH