Dělení koláče:

Mařenka		Pepíček	
1	$\longrightarrow$	0	1

Dělení koláče – 2 kola:

Mařenka		Pepíček	
	$\longrightarrow$		1
0	$\longleftarrow$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Dělení koláče – 2 kola:

Mařenka		Pepíček	
$\frac{1}{2}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{2}$	1
0	$\longleftarrow$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Dělení koláče – 3 kola:

Mařenka		Pepíček	
	$\longrightarrow$		1
	$\longleftarrow$		$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\longrightarrow$	0	$\frac{1}{3}$

Dělení koláče – 3 kola:

Mařenka		Pepíček	
	$\longrightarrow$		1
$\frac{1}{3}$	$\longleftarrow$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\longrightarrow$	0	$\frac{1}{3}$

Dělení koláče – 3 kola:

Mařenka		Pepíček	
$\frac{2}{3}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	$\longleftarrow$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\longrightarrow$	0	$\frac{1}{3}$

Dělení koláče – 4 kola:

Mařenka		Pepíček	
	$\longrightarrow$		1
	$\longleftarrow$		$\frac{3}{4}$
	$\longrightarrow$		$\frac{2}{4}$
0	$\longleftarrow$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Dělení koláče – 4 kola:

Mařenka		Pepíček	
	$\longrightarrow$		1
	$\longleftarrow$		$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
0	$\longleftarrow$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Dělení koláče – 4 kola:

Mařenka		Pepíček	
	$\longrightarrow$		1
$\frac{1}{4}$	$\longleftarrow$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
0	$\longleftarrow$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Dělení koláče – 4 kola:

Mařenka		Pepíček	
$\frac{2}{4}$	$\longrightarrow$	$\frac{2}{4}$	1
$\frac{1}{4}$	$\longleftarrow$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
0	$\longleftarrow$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Dělení koláče – 4 kola:

Mařenka		Pepíček	
$\frac{3}{5}$	$\longrightarrow$	$\frac{2}{5}$	1
$\frac{2}{5}$	$\longleftarrow$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{2}{5}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{1}{5}$	$\longleftarrow$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{1}{5}$	$\longrightarrow$	0	$\frac{1}{5}$

Dělení koláče – 5 kol:

Mařenka		Pepíček	
$\frac{3}{5}$	$\longrightarrow$	$\frac{2}{5}$	1
$\frac{2}{5}$	$\longleftarrow$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{2}{5}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{1}{5}$	$\longleftarrow$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{1}{5}$	$\longrightarrow$	0	$\frac{1}{5}$

Vyjednávání manažerů s odboráři:

Kolo	Manažeři		Odboráři
101	0	$\leftarrow$	10

Vyjednávání manažerů s odboráři:

Kolo	Manažeři		Odboráři
100	10	$\longrightarrow$	10
101	0	$\longleftarrow$	10

Vyjednávání manažerů s odboráři:

Kolo	Manažeři		Odboráři
99	10	$\longleftarrow$	20
100	10	$\longrightarrow$	10
101	0	$\longleftarrow$	10

Vyjednávání manažerů s odboráři:

Kolo	Manažeři		Odboráři
98	20	$\longrightarrow$	20
99	10	$\longleftarrow$	20
100	10	$\longrightarrow$	10
101	0	$\longleftarrow$	10

Vyjednávání manažerů s odboráři:

Kolo	Manažeři		Odboráři
97	20	$\longleftarrow$	30
98	20	$\longrightarrow$	20
99	10	$\longleftarrow$	20
100	10	$\longrightarrow$	10
101	0	$\longleftarrow$	10

Vyjednávání manažerů s odboráři:

Kolo	Manažeři		Odboráři
2	500	$\longrightarrow$	500
	$\dots$		$\dots$
97	20	$\longleftarrow$	30
98	20	$\longrightarrow$	20
99	10	$\longleftarrow$	20
100	10	$\longrightarrow$	10
101	0	$\longleftarrow$	10

Vyjednávání manažerů s odboráři:

Kolo	Manažeři		Odboráři
1	500	$\longleftarrow$	510
2	500	$\longrightarrow$	500
	$\dots$		$\dots$
97	20	$\longleftarrow$	30
98	20	$\longrightarrow$	20
99	10	$\longleftarrow$	20
100	10	$\longrightarrow$	10
101	0	$\longleftarrow$	10

Složené úročení

Hodnota kapitálu K_0 uloženého na n let při roční úrokové míře i :

$$K_n = K_0(1+i)^n$$

Počet let	Hodnota kapitálu
0	K_0
1	$K_1 = K_0 + iK_0 = K_0(1+i)$
2	$K_2 = K_1 + iK_1 = K_1(1+i) = K_0(1+i)^2$
3	$K_3 = K_2 + iK_2 = K_2(1+i) = K_0(1+i)^3$
$\vdots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
n	$K_n = K_{n-1} + iK_{n-1} = K_{n-1}(1+i) = K_0(1+i)^n$

Současná hodnota kapitálu K_n, který máme získat za n let:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = K_n\,\delta\,, \qquad 0 < \delta < 1$$

δ se nazývá **diskontní faktor**

„Diskontování koláče:“

Kolo	Mařenka		Pepíček
n	K_n	$\longrightarrow$	0

„Diskontování koláče:“

Kolo	Mařenka		Pepíček
$n-1$	$K_n\delta$	$\longleftarrow$	$K_n(1-\delta)$
n	K_n	$\longrightarrow$	0

„Diskontování koláče:“

Kolo	Mařenka		Pepíček
$n-2$	$K_n(1-\delta(1-\delta))$	$\longrightarrow$	$\delta K_n(1-\delta)$
$n-1$	$K_n\delta$	$\longleftarrow$	$K_n(1-\delta)$
n	K_n	$\longrightarrow$	0

„Diskontování koláče:“

Kolo	Mařenka		Pepíček
$n-3$	$K_n\delta(1-\delta(1-\delta))$	$\leftarrow$	$K_n(1-\delta(1-\delta(1-\delta)))$
$n-2$	$K_n(1-\delta(1-\delta))$	$\rightarrow$	$\delta K_n(1-\delta)$
$n-1$	$K_n\delta$	$\leftarrow$	$K_n(1-\delta)$
n	K_n	$\rightarrow$	0

„Diskontování koláče:“

Kolo	Mařenka		Pepíček
$\dots$	$\dots$		$\dots$
$n-3$	$K_n\delta(1-\delta(1-\delta))$	$\leftarrow$	$K_n(1-\delta(1-\delta(1-\delta)))$
$n-2$	$K_n(1-\delta(1-\delta))$	$\rightarrow$	$\delta K_n(1-\delta)$
$n-1$	$K_n\delta$	$\leftarrow$	$K_n(1-\delta)$
n	K_n	$\rightarrow$	0

$$\lim_{n\to\infty} K_n(1-\cdots-\delta(1-\delta(1-\delta))\cdots) = \frac{K_n}{\delta+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} K_n\delta(1-\cdots-\delta(1-\delta(1-\delta))\cdots) = \frac{\delta K_n}{\delta+1}$$

Hra v normálním tvaru

Definice (HNT). Nechť je dána konečná neprázdná n-prvková množina $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$ a dále n množin $S_1, S_2, \ldots, S_n$ a n reálných funkcí $u_1, u_2, \ldots, u_n$ definovaných na kartézském součinu $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. **Hrou n hráčů v normálním tvaru** budeme rozumět uspořádanou $(2n + 1)$-tici

$$\{Q;\ S_1, \ldots, S_n;\ u_1(s_1, \ldots, s_n), \ldots, u_n(s_1, \ldots, s_n)\}.$$

Množinu Q nazveme **množinou hráčů**, množinu S_i nazveme **prostorem strategií hráče** i, prvek $s_i \in S_i$ nazveme **strategií hráče** i a funkci $u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ nazveme **výplatní funkcí hráče** i. Je-li hodnota výplatní funkce pro daného hráče kladná, hovoříme o **zisku**, je-li záporná, hovoříme o **ztrátě**.

Pod toto označení spadá velmi mnoho věcí, cokoli od rulety po šach, od bakaratu po bridž. A nakonec každá událost – jsou-li dány vnější podmínky a účastníci situace (a ti se chovají dle svobodné vůle) – může být považována za společenskou hru, jestliže sledujeme účinek, jaký má na účastníky.

(John von Neumann, 1928)

. . . obchodní společnosti, vojenské jednotky, stihačky, ponorky, účastníci souboje, národy, politici, politické strany, samci v říji, geny, motoristé, uživatelé počítačové sítě, majitelé téhož pozemku, ctitelé téže dámy, věřitelé zbankrotovaného dlužníka, . . .

☛ *Příklad*

Hráč 2

Hráč 1

Strategie	t_1		t_2
s_1	$\boxed{(2, 0)}$	$\leftarrow$	$(2, -1)$
	$\uparrow$		$\downarrow$
s_2	$(1, 1)$	$\leftarrow$	$(3, -2)$

☛ ***Příklad***

Hráč 2

	Strategie	t_1		t_2
	s_1	$\boxed{(2,0)}$	$\leftarrow$	$(2,-1)$
Hráč 1		$\uparrow$		$\downarrow$
	s_2	$(1,1)$	$\leftarrow$	$(3,-2)$

Definice. n-tice strategií $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ se nazývá **rovnovážným bodem hry (HNT)**, právě když pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a všechna $s_i \in S_i$ platí:

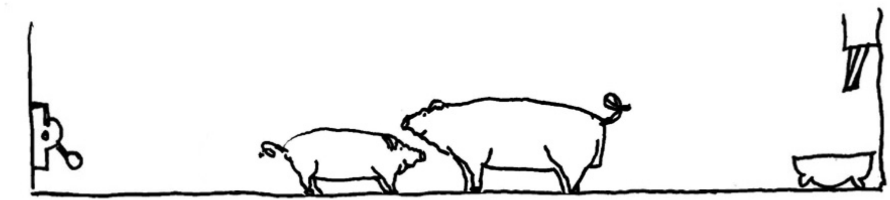
$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \leq$$

$$\leq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*).$$

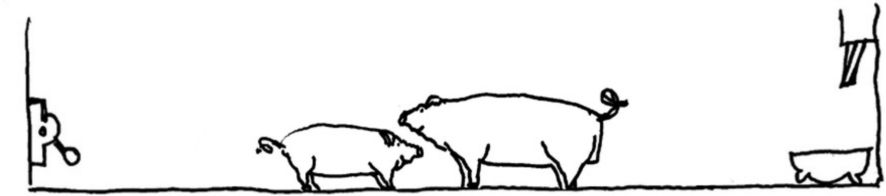
Strategie s_i^* se nazývá **rovnovážná strategie hráče** i.

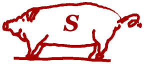
1979 B. A. Baldwin, G. B. Meese: Skinnerův chlívek

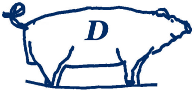
1979 B. A. Baldwin, G. B. Meese: Skinnerův chlívek



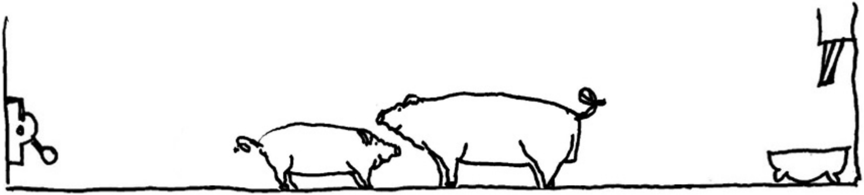
1979 B. A. Baldwin, G. B. Meese: Skinnerův chlívek

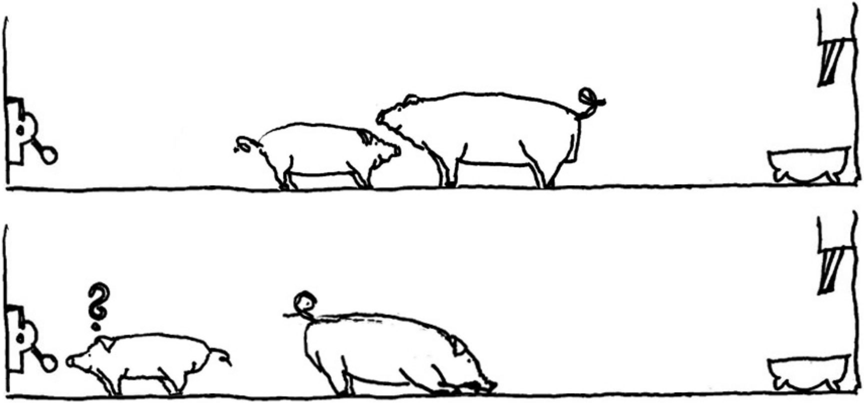


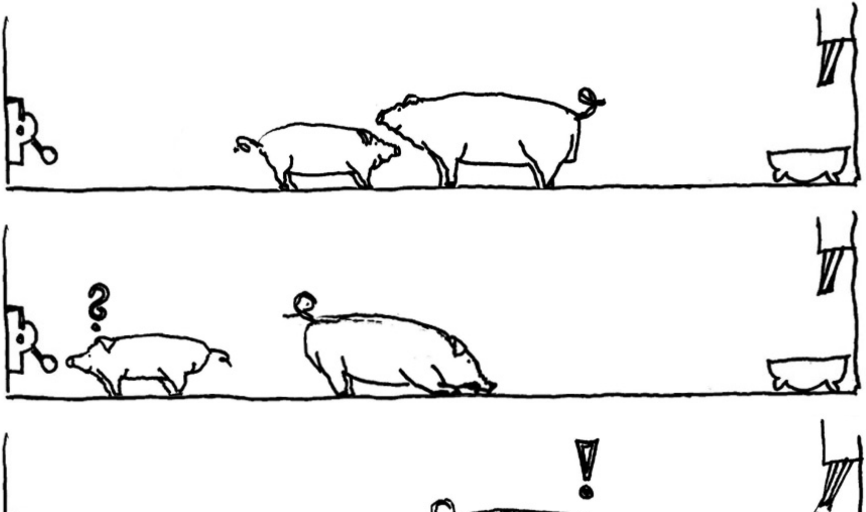


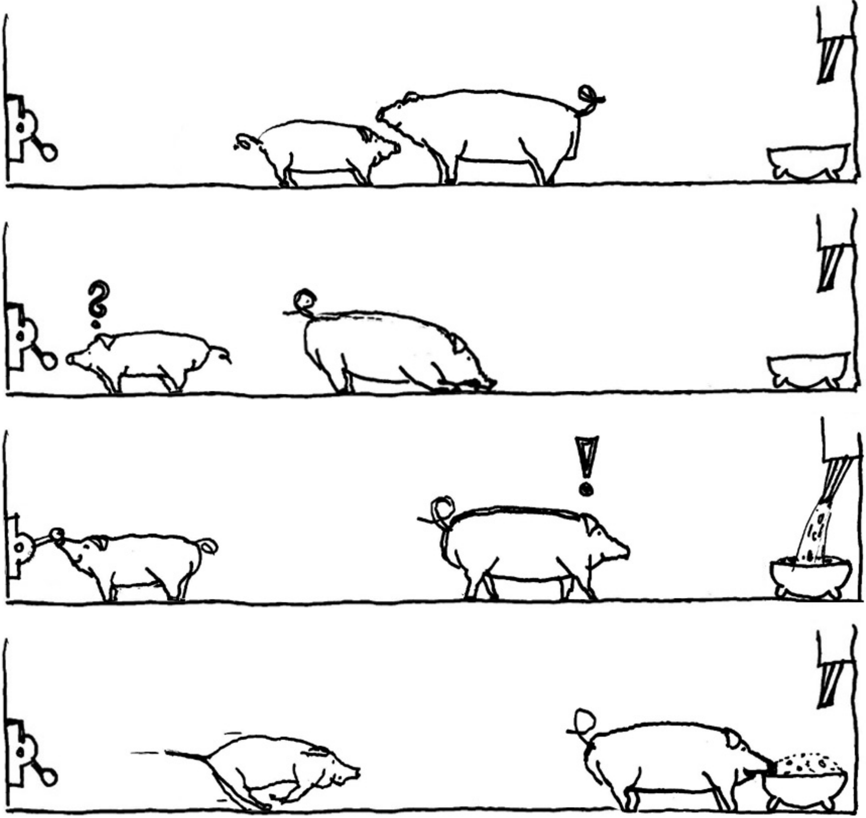


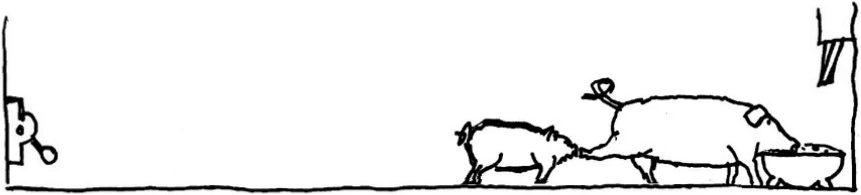
Strategie	Stiskni páku	Seď u koryta
Stiskni páku	$(8, -2)$	$(5, 3)$
Seď u koryta	$(10, -2)$	$(0, 0)$

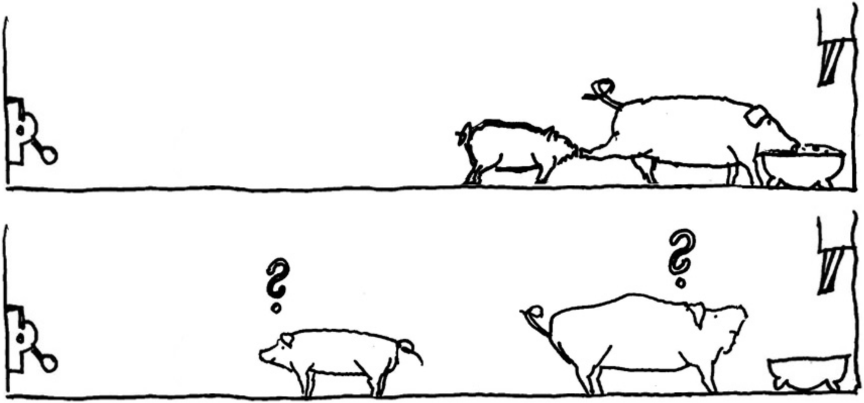


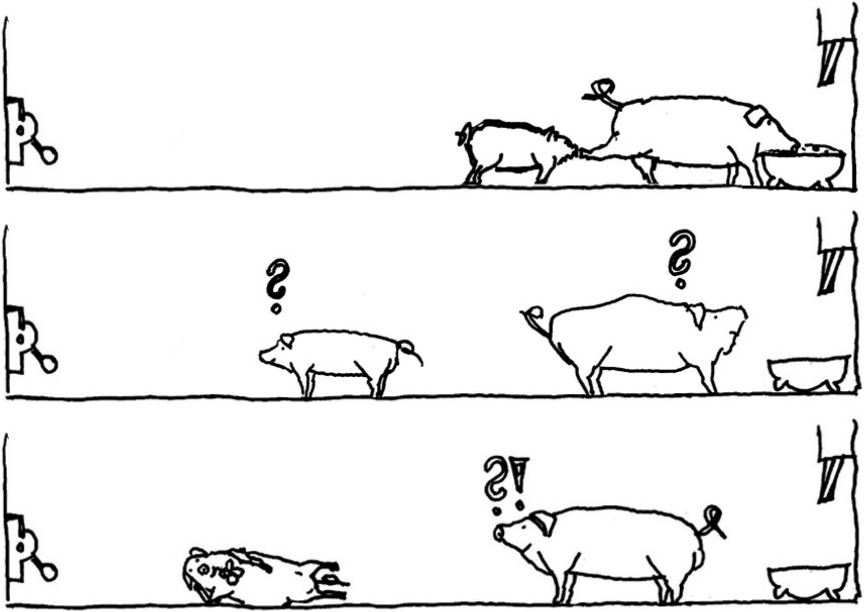


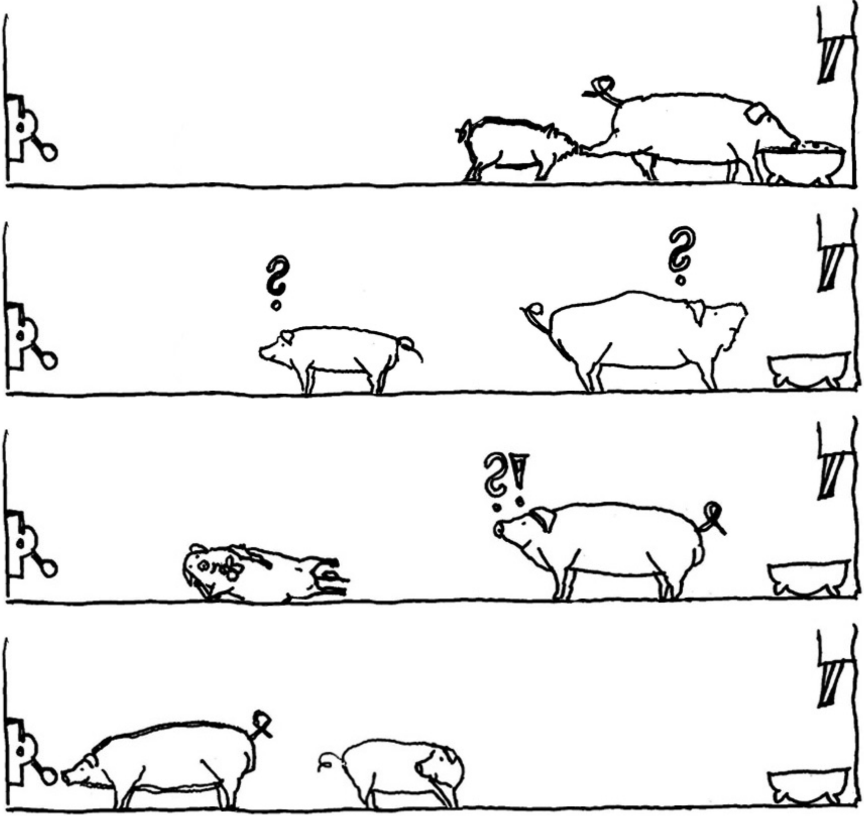


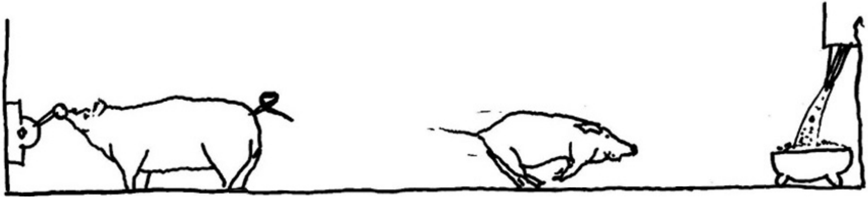


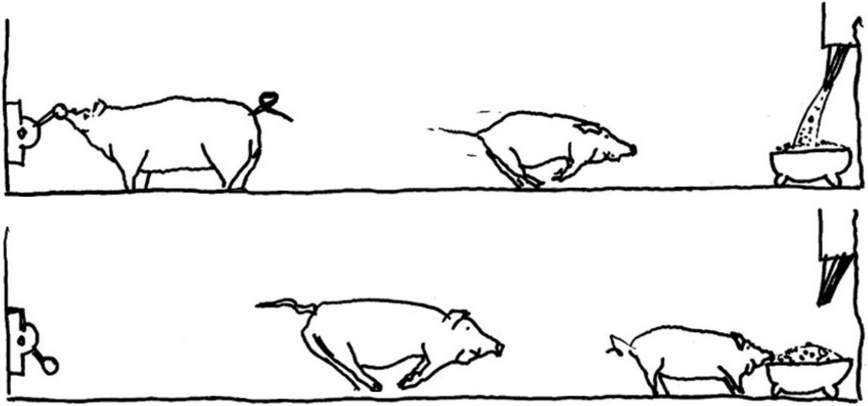


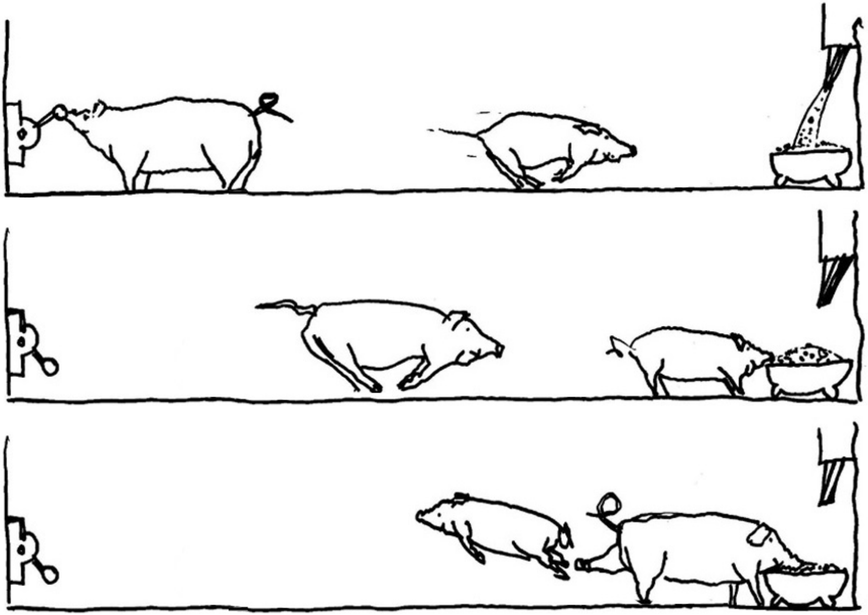


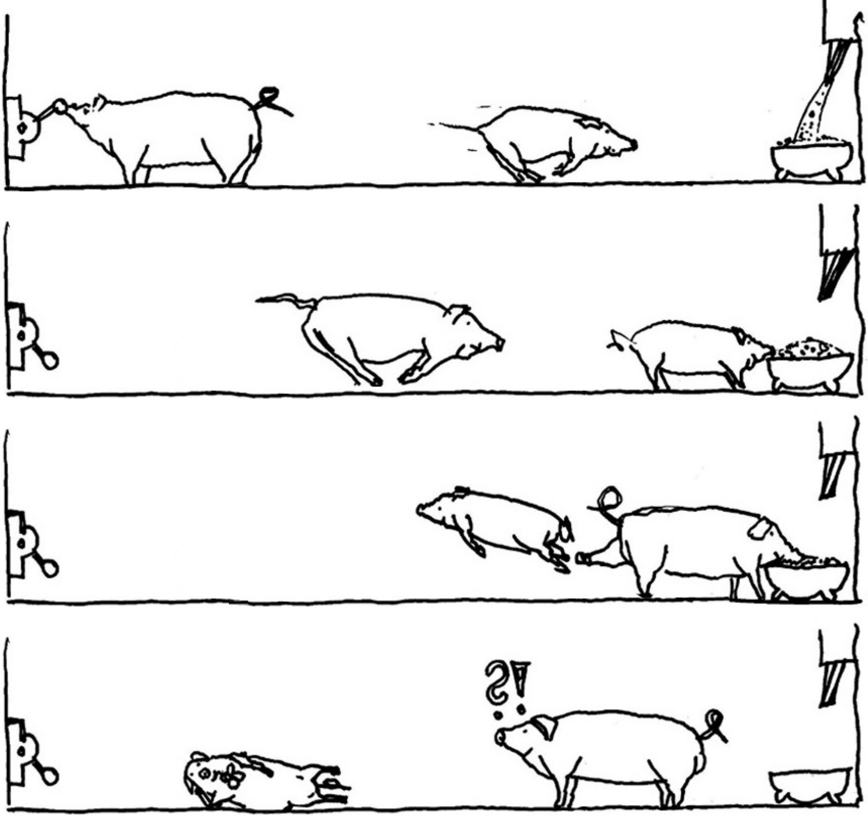


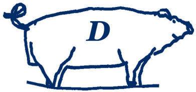












Strategie	Stiskni páku		Seď u koryta
Stiskni páku	$(\mathbf{8}, \mathbf{-2})$	$\longrightarrow$	$\boxed{(\mathbf{5}, \mathbf{3})}$
Seď u koryta	$(\mathbf{10}, \mathbf{-2})$	$\longrightarrow$	$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

Příklad

Hráč 2

Hráč 1

$$
\begin{array}{c|ccc}
\text{Strategie} & t_1 & & t_2 \\ \hline
s_1 & (1, -1) & \longrightarrow & (-1, 1) \\
 & \uparrow & & \downarrow \\
s_2 & (-1, 1) & \longleftarrow & (1, -1)
\end{array}
$$

☛ *Příklad*

Hráč 2

Hráč 1

$$\begin{array}{c|cccc}
\text{Strategie} & t_1 & & t_2 & \\ \hline
s_1 & (1,-1) & \longrightarrow & (-1,1) & p \\
 & \uparrow & & \downarrow & \\
s_2 & (-1,1) & \longleftarrow & (1,-1) & 1-p \\
 & & & & \\
 & q & & 1-q &
\end{array}$$

☛ *Příklad*

	Hráč 2				
	Strategie	t_1		t_2	
Hráč 1	s_1	$(1,-1)$	$\longrightarrow$	$(-1,1)$	p
		$\uparrow$		$\downarrow$	
	s_2	$(-1,1)$	$\longleftarrow$	$(1,-1)$	$1-p$
		q		$1-q$	

Smíšené strategie:

$$\{s_1, s_2\} \rightsquigarrow \{(p, 1-p), p \in \langle 0,1\rangle\}$$

$$\{t_1, t_2\} \rightsquigarrow \{(q, 1-q), q \in \langle 0,1\rangle\}$$

Výplatní funkce u_1, u_2 $\rightsquigarrow$ **očekávané výhry** π_1, π_2 **:**

$$\pi_1(p,q) = -1pq + 1(1-p)q + 1p(1-q) - 1(1-p)(1-q)$$

$$\pi_2(p,q) = \ 1pq - 1(1-p)q - 1p(1-q) + 1(1-p)(1-q)$$

Konečná hra v normálním tvaru

Konečnou hrou se rozumí hra, v níž každý hráč má konečný prostor strategií, tj. **množiny $S_1, S_2, \ldots, S_n$ jsou konečné.**

Definice. Uvažujme konečnou hru n hráčů v normálním tvaru. Počet prvků prostoru strategií S_i libovolného hráče i označme symbolem m_i. **Smíšenou strategií** hráče i se rozumí vektor pravděpodobností

$$p^i = (p^i_1, p^i_2, \ldots, p^i_{m_i}),$$

$$\text{kde} \quad p^i_j \geq 0 \quad \text{pro všechna} \quad 1 \leq j \leq m_i,$$

$$\sum_{j=1}^{m_i} p^i_j = 1.$$

Smíšená strategie je tedy pro každého hráče vektor, jehož j-tá složka udává pravděpodobnost, s níž hráč volí j-tou strategii ze svého prostoru strategií. Je to tedy opět jistá strategie, kterou bychom mohli popsat takto:

použij strategii $s_1^i \in S_i$ *s pravděpodobností* p_1^i

...

použij strategii $s_{m_i}^i \in S_i$ *s pravděpodobností* $p_{m_i}^i$

Pro odlišení se prvky prostoru strategií S_i nazývají **ryzí strategie**.

Věta. (J. Nash). *Ve smíšených strategiích má každá konečná hra aspoň jeden rovnovážný bod.*

MATEMATIZACE TEORIE HER

JOHN VON NEUMANN (1903 – 1957)

1926 důkaz **věty o minimaxu** (Göttingenská matem. spol.)

1928 **Sur la théorie des jeux** (Comptes Rendus)
Zur Theorie der Gesellschaftsspiele (Math. Annalen)

- **Matematizace pojmu strategická hra**
- **Důkaz ”věty o minimaxu”**

Formulace: **konečná hra n hráčů s nulovým součtem**

Více výsledků: $n = 2$

$$(\{1,2\}; \{s_1, \ldots, s_k\}, \{t_1, \ldots, t_l\}; u_1, u_2)$$

$$u_1(s_i, t_j) + u_2(s_i, t_j) = 0$$

Hráč 2

Hráč 1

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & \dots & t_l \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_k \end{array} &
\begin{pmatrix}
u_1(s_1,t_1) & u_1(s_1,t_2) & \dots & u_1(s_1,t_l) \\
u_1(s_2,t_1) & u_1(s_2,t_2) & \dots & u_1(s_2,t_l) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
u_1(s_k,t_1) & u_1(s_k,t_2) & \dots & u_1(s_k,t_l)
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Hráč 1: $\min_{t_j} u_1(s_i,t_j) \leadsto$ **MAX**

Hráč 2: $\max_{s_i} u_1(s_i,t_j) \leadsto$ **MIN**

Platí:

$$\max_{s_i} \min_{t_j} u_1(s_i,t_j) \leq \min_{t_j} \max_{s_i} u_1(s_i,t_j)$$

Hráč 2

$$
\textbf{Hráč 1}\quad
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ s_2 \\ s_k \\ \text{max:}
\end{array}
\begin{array}{cccc}
t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \text{min} \\
\hline
s_1 & 5 & 4 & \boxed{4} & 5 & \boxed{4} \\
s_2 & -4 & 5 & 3 & 9 & -4 \\
s_k & 7 & 8 & -1 & 8 & -1 \\
\hline
\text{max:} & 7 & 8 & \boxed{4} & 9 &
\end{array}
$$

$$\max_s \min_t u_1(s_i, t_j) = 4 = \min_t \max_s u_1(s_i, t_j)$$

Hráč 2

Hráč 1

$$
\begin{array}{cc|}
 & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} & \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_k \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \quad \text{min} \\
\text{max:} & \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array} &
\end{array}
$$

$$\max_s \min_t u_1(s_i, t_j) = -1 < \min_t \max_s u_1(s_i, t_j) = 1$$

$\rightsquigarrow$ **Smíšené strategie** – očekávaná výplata pro hráče 1:

$$\pi_1(p,q) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} u_1(s_i,t_j)p_i q_j$$

Věta. Vždy existují smíšené strategie (p^*, q^*), pro které

$$\pi_1(p^*,q^*) = \max_p \min_q \pi_1(s_i,t_j) = \min_q \max_p \pi_1(s_i,t_j)$$

TEORIE HER = MATEMATICKÁ DISCIPLÍNA

John von Neumann (1903 – 1957) a **Oskar Morgenstern (1902 – 1976)**

1944 Theory of Games and Economic Behavior

- Detailní formulace ekonomického problému:
  Aplikační možnosti teorie her
- **Axiomatická teorie užitku**
- **Obený popis strategické hry**
- **Konečné antagonistické hry dvou hráčů**
- **Kooperativní hry n hráčů** (přenosná výhra)
  $\rightsquigarrow$ **von Neumann-Morgensternovo řešení**
  (není jednoznačné, nemusí existovat)

. . .

$\rightsquigarrow$ **Masivní rozvoj teorie her a jejích aplikací**

Další krok: Hry s nekonstantním součtem

Nekooperativní hry více hráčů, kooperativní hry s nepřenosnou výhrou

$$\begin{pmatrix} (3,-3) & \boxed{(2,-2)} \\ (0,0) & (1,-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (3,3) & \boxed{(2,4)} \\ (0,6) & (1,5) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \begin{tikzcd} (3,3) \arrow[r] & \boxed{(2,4)} \arrow[d] \\ (0,2) \arrow[u] \arrow[r] & \underline{\underline{(4,5)}} \end{tikzcd} \end{pmatrix}$$

$(4,5)$ . . . vzájemně nejlepší odpovědi – rovnovážný bod

POČÁTKY TEORIE UŽITKU

Daniel Bernoulli (1700 – 1782)

Výklad nové teorie ohodnocení risku

(Petrohrad 1725 – 1733, publ. 1838)

Risk by neměl být hodnocen podle střední hodnoty finančního zisku, ale spíše podle **střední hodnoty užitku**, který tento zisk přinese.

Ilustrační příklad: *Velmi chudý člověk nějakým způsobem získá los, který se stejnou pravděpodobností přinese výhru dvaceti tisíc dukátů nebo nic. Ocení tento muž svou šanci na vítězství na deset tisíc dukátů? Neprodá neuváženě tento los za devět tisíc dukátů? Mně osobně se zdá, že odpověď je záporná. Na druhou stranu mám sklon věřit, že bohatý muž koupi tohoto losu za devět tisíc dukátů neuváženě odmítne. Pokud se nemýlým, pak je jasné, že při hodnocení hry nemohou všichni lidé používat stejné pravidlo. . . . Není pochyb, že zisk tisíce dukátů je mnohem významnější pro žebráka než pro bohatého člověka, i když oba získají stejnou částku.*

Funkce užitku $u(x)$

... počet jednotek užitku z vlastnictví peněžní částky x

Předpoklad:

při zvětšení částky x na $x + dx$ je přírůstek užitku $du(x)$ přímo úměrný přírůstku dx a nepřímo úměrný částce x :

$$
\begin{aligned}
du(x) &= \frac{b\,dx}{x} && b > 0 \quad \text{(konstanta úměrnosti)} \\
u(x) &= b \ln x + c && c \in \mathbb{R} \\
&= b \ln x - b \ln \alpha && \alpha \in (0, +\infty) \\
u(x) &= b \ln \frac{x}{\alpha} && \alpha \text{ – hodnota počátečního majetku}
\end{aligned}
$$

Využití: objasnění *Petrohradského paradoxu*

Petrohradský paradox

Petr hází mincí a pokračuje v tom tak dlouho, dokud nepadne „hlava“. Souhlasí s tím, že dá Pavlovi jeden dukát, padne-li hlava v prvním hodu, dva dukáty, padne-li v druhém, čtyři, padne-li ve třetím, osm, padne-li ve čtvrtém, a tak dále, takže s každým dalším hodem se počet dukátů, které musí zaplatit, zdvojnásobí. Předpokládejme, že se snažíme určit hodnotu Pavlova očekávání ... Rozumný člověk by s velkým potěšením prodal svou účast ve hře za dvacet dukátů.

Střední hodnota výhry:

$$\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+2^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

Paradox:

očekávaná hodnota výhry je nekonečná, člověk dá přednost poměrně skromné částce

Bernoulli: střední hodnota užitku, který výhra přinese:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} b \ln \frac{\alpha + 2^{n-1}}{\alpha} =$$

$$= b \ln[(\alpha+1)^{\frac{1}{2}} (\alpha+2)^{\frac{1}{4}} \cdots (\alpha + 2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \cdots] - b \ln \alpha$$

Částka D, jejíž přidání k počátečnímu majetku přinese stejný užitek:

$$b \ln \frac{\alpha + D}{\alpha} = b \ln[(\alpha+1)^{\frac{1}{2}} (\alpha+2)^{\frac{1}{4}} \cdots (\alpha+2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \cdots] - b \ln \alpha$$

$$D = [(\alpha+1)^{\frac{1}{2}} (\alpha+2)^{\frac{1}{4}} \cdots (\alpha + 2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \cdots] - \alpha$$

Pro nulové počáteční jmění:

$$D = \sqrt[2]{1} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{4} \cdot \sqrt[16]{8} \cdots = 2$$

Nedostatky Bernoulliho funkce užitku:

- Je definována jen pro kladné hodnoty částky x, zatímco ve skutečnosti se často jedná i o ztráty
- U různých lidí je funkce užitku z peněžních částech různá a neodvíjí se jen z majetkových poměrů

Důležitý podnět, od něhož se mohl odrazit další vývoj
Podobné – avšak nezávislé – úvahy
(Bernoulli cituje v závěru svého pojednání):

Gabriel Cramer (1704 – 1752)

Dopis Mikuláši Bernoullimu z roku 1728

Myšlenka: lidé hodnotí finanční částky podle užitku, který jim přinesou

Předpoklad: jakákoli částka převyšující $\mathbf{2^{24}}$ dukátů člověku připadá stejná jako $\mathbf{2^{24}}$.

Očekávaná hodnota zisku:

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\cdots+\frac{1}{2^{24}}\cdot 2^{24}+\frac{1}{2^{25}}\cdot 2^{24}+\frac{1}{2^{26}}\cdot 2^{24}+\cdots =$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = 12+1 = 13\,.$$

Mé morální očekávání je proto redukováno na hodnotu 13 dukátů a ekvivalentní částka, která mi má být vyplacena, je redukována podobně – to je výsledek, který se zdá být mnohem rozumnější než uvažování této částky rovné nekonečnu.

Daniel Bernoulli
(1700 – 1782)

Gabriel Cramer
(1704 – 1752)

AXIOMATICKÁ TEORIE UŽITKU

$\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ – množina základních alternativ, cen

Loterie: $L = (p_1 A_1, p_2 A_2, \ldots, p_r A_r)$

– náhodný mechanismus, který s pravděpodobností p_i vybírá cenu A_i; pravděpodobnosti p_i jsou známé,

$$p_i \geq 0; \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1\,.$$

$\mathfrak{L}$ – množina všech loterií s cenami z množiny $\mathfrak{A}$

Podmínka 1 (uspořádání alternativ). Na množině základních alternativ je definováno úplné neostré uspořádání **"preference nebo indiference"**, ozn. $A_i \succsim A_j$.

Pro každé $A_i, A_j \in \mathfrak{A}$ tedy platí: $A_i \succsim A_j$ nebo $A_j \succsim A_i$;

je-li $A_i \succsim A_j$ a $A_j \succsim A_k$, pak $A_i \succsim A_k$.

Složená loterie: $\left(q_1 L^{(1)}, q_2 L^{(2)}, \ldots, q_s L^{(s)}\right), \ L^{(i)} \in \mathfrak{L}$

$$q_i \geq 0, \quad q_1 + q_2 + \cdots + q_s = 1\,.$$

Označení:

A_1 – nejpreferovanější, A_r – nejméně preferovaná alternativa

$\rightsquigarrow$ rozšíření uspořádání množiny $\mathfrak{A}$ na množinu loterií $\mathfrak{L}$

Podmínka 2 (redukce složených loterií).

Libovolná složená loterie $\left(q_1 L^{(1)}, q_2 L^{(2)}, \ldots, q_s L^{(s)}\right)$, kde

$$L^{(i)} = \left(p_1^{(i)} A_1, p_2^{(i)} A_2, \ldots, p_r^{(i)} A_r\right), \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

je indiferentní s jednoduchou loterií

$$(p_1 A_1, p_2 A_2, \ldots, p_r A_r), \quad \text{kde}$$

$$p_i = q_1 p_i^{(1)} + q_2 p_i^{(2)} + \cdots + q_s p_i^{(s)}, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Podmínka 3 (spojitost).

Každá cena A_i je indiferentní s nějakou loterií zahrnující pouze A_1 a A_r. Tj. existuje takové $u_i \in \langle 0, 1\rangle$, že A_i je indiferentní s loterií

$$(u_i A_1, 0A_2, \ldots, 0A_{r-1}, (1-u_i)A_r)\ .$$

Pro jednoduchost budeme psát:

$$A_i \sim (u_i A_1,\ (1-u_i)A_r) = \tilde{A}_i.$$

***Podmínka 4* (záměnnost)**.

V libovolné loterii L lze zaměnit $\tilde{A}_i$ za A_i , tj.

$$(p_1 A_1, \ldots, p_i A_i, \ldots, p_r A_r) \sim (p_1 A_1, \ldots, p_i \tilde{A}_i, \ldots, p_r A_r).$$

***Podmínka 5* (tranzitivita).**

Relace preference a indiference na množině loterií $\mathfrak{L}$ jsou tranzitivní.

***Podmínka 6* (monotonie).**

$$(pA_1, (1-p)A_r) \succsim (p'A_1, (1-p')A_r) \Leftrightarrow p \geq p'.$$

Věta. *Splňuje-li relace $\succsim$ podmínky 1–6, pak existují taková reálná čísla u_i, že pro každou dvojici loterií*

$$L = (p_1A_1, p_2A_2, \ldots, p_rA_r), \;\; L' = (p'_1A_1, p'_2A_2, \ldots, p'_rA_r)$$

platí:

$$L \succsim L' \Leftrightarrow \left(p_1u_1 + \cdots + p_ru_r \geq p'_1u_1 + + \cdots + p'_ru_r\right).$$

Definice. Zavede-li určitá osoba na množině loterií úplné uspořádání $\succsim$ preferencí a je-li každé loterii L přiřazeno reálné číslo $u(L)$ odrážející tyto preference, tj. pro každou dvojici loterií $L, L' \in \mathfrak{L}$ je

$$L \succsim L' \Leftrightarrow u(L) \geq u(L')$$

pak řekneme, že na množině loterií $\mathfrak{L}$ existuje **funkce užitku u.**

Má-li navíc funkce užitku tu vlastnost, že

$$u\left(qL, (1-q)L'\right) = qu(L) + (1-q)u(L')$$

pro všechny loterie L, L' a každé $q \in \langle 0, 1 \rangle$, pak řekneme, že funkce užitku je **lineární.**

Jsou-li splněny podmínky 1–6, lze sestrojit lineární funkci užitku následujícím předpisem:

$$u(A_1) = 1$$

$$u(A_i) = u_i \quad \text{pro} \;\; 1 < i < r \quad \text{(podle podmínky 3)}$$

$$u(A_r) = 0$$

$$u(p_1 A_1\,, p_2 A_2\,, \ldots, p_r A_r) = p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_r u_r$$

Je-li u funkce užitku na $\mathfrak{L}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, pak funkce u', kde

$$u'(L) = au(L) + b \quad \text{pro každou loterii } L \in \mathfrak{L},$$

je rovněž funkcí užitku.

Naopak, pro každé dvě funkce užitku u, u^* na $\mathfrak{L}$ existují taková čísla $a^*, b^* \in \mathbb{R}$, $a^* > 0$, že pro všechny loterie $L \in \mathfrak{L}$ platí:

$$u^*(L) = a^* u(L) + b^*.$$

☛ *Příklad*

Pepíček

$$
\begin{array}{c|ccc}
\text{Strategie} & \text{Box} & & \text{Balet} \\
\hline
\text{Box} & \boxed{(2,1)} & \longleftarrow & (0,0) \\
 & \uparrow & & \downarrow \\
\text{Balet} & (0,0) & \longrightarrow & \boxed{(1,2)}
\end{array}
$$

Maruška

Rovnovážné body v ryzích strategiích: (Box, Box), (Balet, Balet)

Rovnovážný bod ve smíšených strategiích:

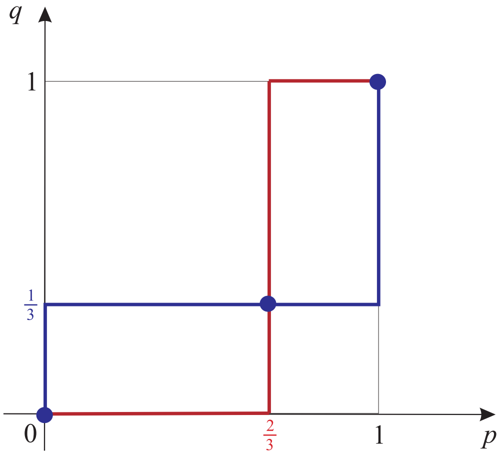
$$\pi_1(p,q) = 2pq + 1(1-p)(1-q) = 3pq - p - q + 1$$

$$\pi_2(p,q) = 1pq + 2(1-p)(1-q) = 3pq - 2p - 2q + 1$$

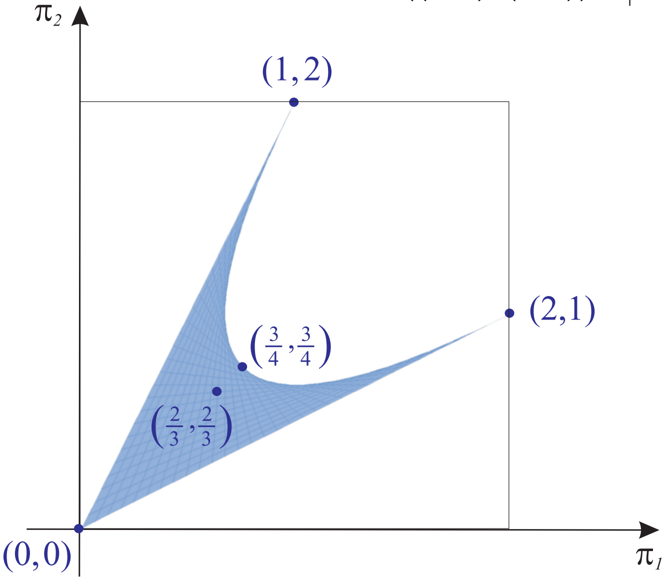
$$\pi_1(p,q) = p(3q-1) - q + 1, \qquad \pi_2(p,q) = q(3p-2) - 2p + 1$$

Reakční křivky:

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \dots\ q \in \langle 0, \frac{1}{3}) \\ \langle 0, 1\rangle & \dots\ q = \frac{1}{3} \\ 1 & \dots\ q \in (\frac{1}{3}, 1\rangle \end{cases} \qquad R_2(p) = \begin{cases} 0 & \dots\ p \in \langle 0, \frac{2}{3}) \\ \langle 0, 1\rangle & \dots\ p = \frac{2}{3} \\ 1 & \dots\ p \in (\frac{2}{3}, 1\rangle \end{cases}$$



Rovnovážný bod	Očekávaná výhra
$((1,0),(1,0))$	$(2,1)$
$((\frac{1}{3},\frac{2}{3}),(\frac{2}{3},\frac{1}{3}))$	$(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$
$((0,1),(0,1))$	$(2,1)$



DVOJMATICOVÁ HRA

		Hráč 2			
	Strategie	t_1	t_2	$\dots$	t_n
	s_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	$\dots$	(a_{1n}, b_{1n})
Hráč 1	s_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	$\dots$	(a_{2n}, b_{2n})
	$\vdots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$
	s_m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	$\dots$	(a_{mn}, b_{mn})

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Kooperativní hry dvou hráčů

Definice. Nechť G je dvojmaticová hra dvou hráčů s výplatními maticemi A, B typu $m \times n$. **Společnou strategií** budeme rozumět matici pravděpodobností $P = (p_{ij})$ typu $m \times n$, tj.

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{pro} \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Společná strategie tedy přiřazuje pravděpodobnost každé dvojici ryzích strategií. Očekávané hodnoty výplatní funkce jsou pro jednotlivé hráče při společné strategii P rovny

$$u(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{ij}, \qquad v(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_{ij}$$

☛ ***Příklad***

Ve hře Manželský spor: společnou strategií je například matice

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Očekávaná hodnota výhry Marušky:

$$u(P) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4}$$

Očekávaná hodnota výhry Pepíčka:

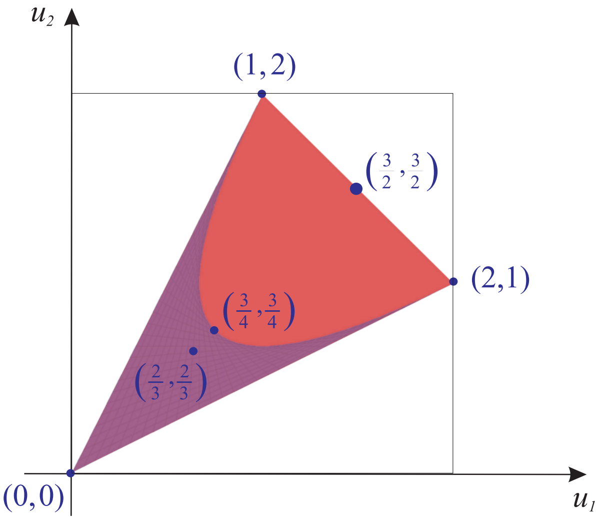
$$v(P) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1$$

V **kooperativní hře** hráči uzavírají dohodu o tom, jakou společnou strategii mají zvolit.

Definice. Kooperativní výplatní oblast je množina

$$\mathbf{K} = \{(u(P), v(P)) : P \text{ je společná strategie}\}. \qquad (1)$$

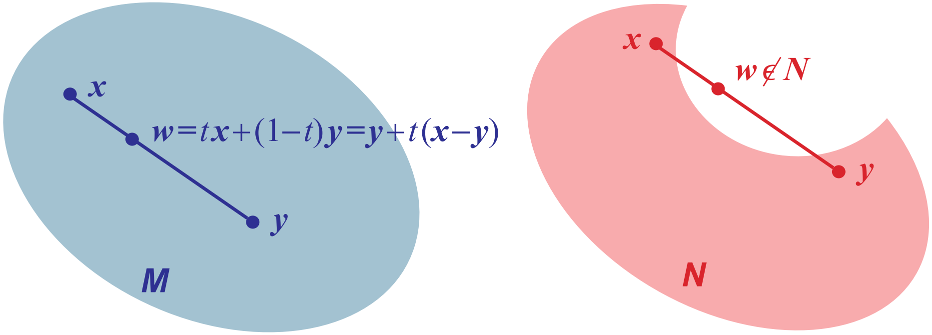
K je **konvexní, uzavřená a omezená množina** obsahující odpovídající nekooperativní oblast



KONVEXNÍ MNOŽINY

Definice. Množina **M** $\subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **konvexní**, jestliže pro každé $x, y \in$ **M** a každé reálné číslo t, $0 \leq t \leq 1$, platí:

$$tx + (1-t)y \in \mathbf{M}$$



Jinými slovy, množina **M** je konvexní, jestliže každá úsečka, jejíž koncové body leží v **M**, leží celá v **M**.

Definice. Nechť $F = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ je konečná podmnožina $\mathbb{R}^n$. **Konvexní kombinací** množiny F se rozumí vektor

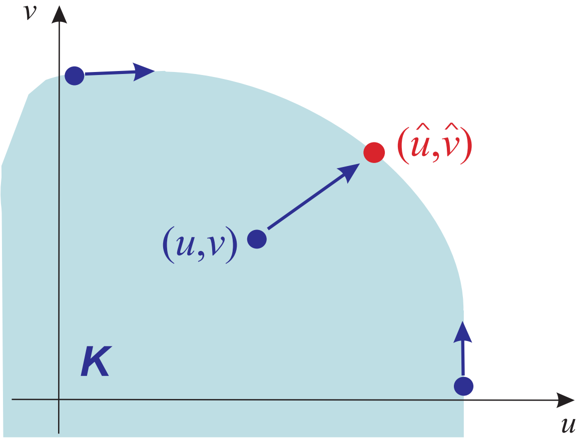
$$w = \sum_{i=1}^{k} t_i x_i, \qquad \text{kde } t_1 \geq 0, \dots, t_k \geq 0, \quad t_1 + \cdots t_k = 1.$$

Indukcí se snadno odvodí, že je-li daná množina **M** konvexní, pak každá konvexní kombinace bodů z **M** opět leží v **M**.

Definice. Dvojice hodnot výplatních funkcí $(\hat{u}, \hat{v}) \in \mathbf{K}$ se nazývá **paretovská** či **nedominovaná**, jestliže neexistuje žádná jiná výplatní dvojice $(u, v) \in \mathbf{K}$, pro kterou by bylo

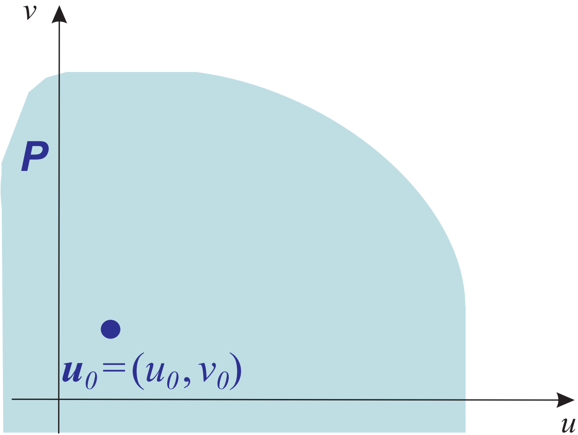
$$u \geq \hat{u} \qquad \text{a zároveň} \qquad v \geq \hat{v},$$

přičemž alespoň jedna nerovnost by byla ostrá.



VYJEDNÁVACÍ PROBLÉM

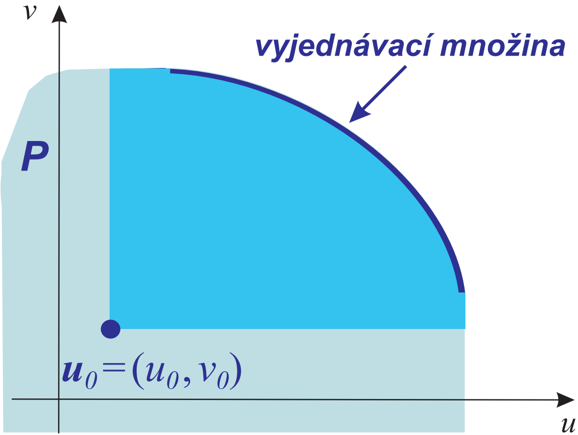
Definice. Vyjednávacím problémem budeme rozumět uspořádanou dvojici $(\mathbf{P}, \boldsymbol{u})$, kde **P** je kooperativní výplatní oblast, $\boldsymbol{u}_0 = (u_0, v_0)$, kde u_0, v_0 jsou výplaty v případě nedosažení dohody („hrozby“).



Definice. Vyjednávací množina pro daný vyjednávací problém je množina všech **Paretovských** výplatních dvojic $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbf{P}$ takových, že

$$\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{v}_{\mathbf{0}}, \qquad \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{v}_{\mathbf{0}},$$

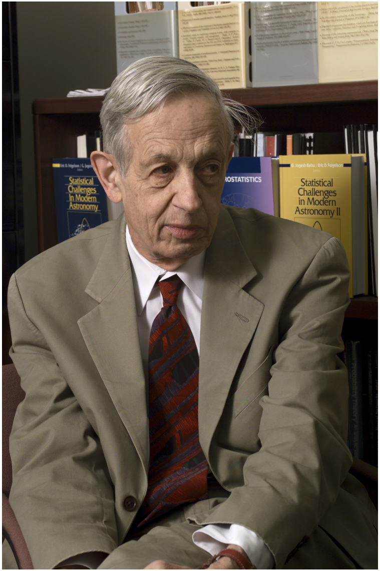
kde $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{v}_{\mathbf{0}})$ je důsledek nedosažení dohody.

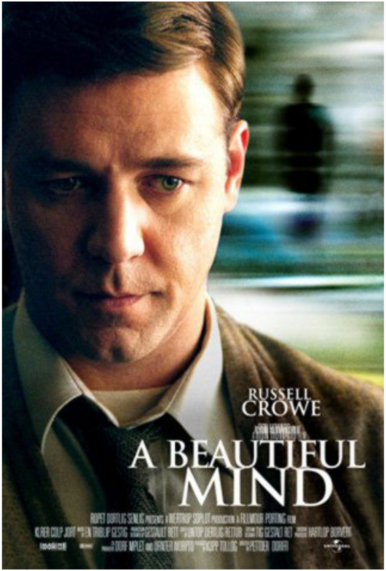


JOHN FORBES NASH (*1928)

1950 The bargaining problem, Econometrica 18

1953 Two-person cooperative games, Econometrica 21





Nashovy vyjednávací axiomy

Uvažujme vyjednávací problém $(\mathbf{P}, (u_0, v_0))$, označme jeho řešení $\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*)$.

Podmínka 1 (Individuální racionalita)

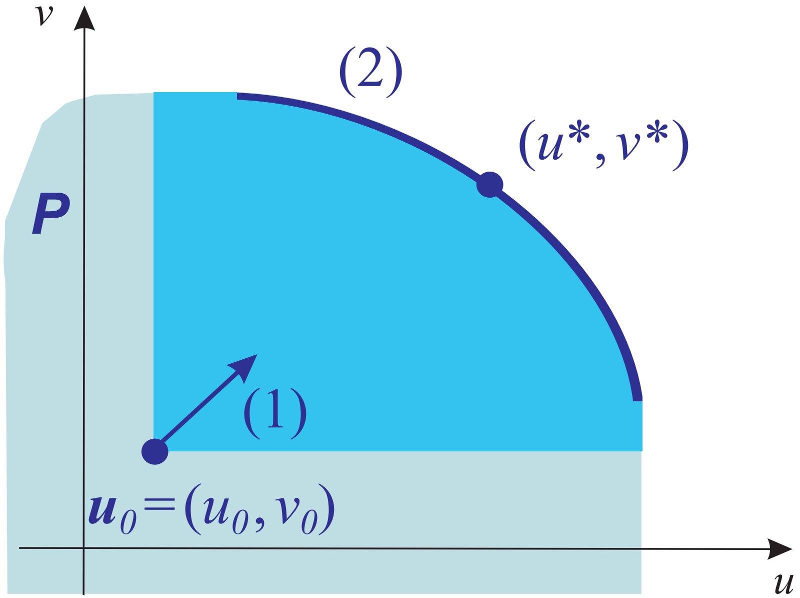
$$u^* \geq u_0, \; v^* \geq v_0$$

Podmínka 2 (Paretovská optimalita)

Dvojice (u^*, v^*) je paretovsky optimální.

Podmínka 3 (Dosažitelnost)

$$(u^*, v^*) \in P.$$

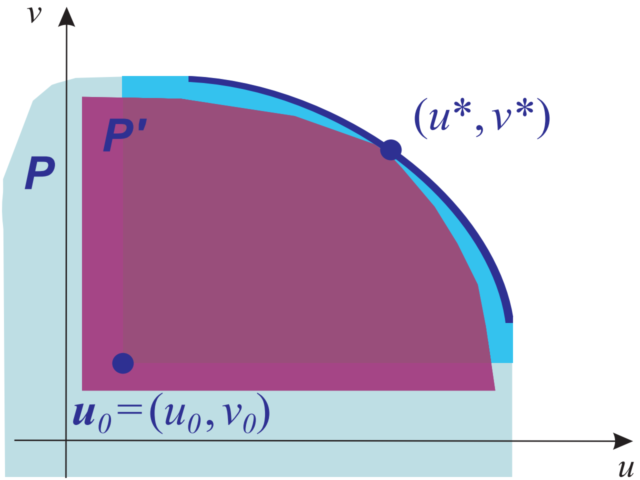


v
(2)
(u^*, v^*)
P
(1)
$\boldsymbol{u}_0 = (u_0, v_0)$
u

Podmínka 4 (Nezávislost na irelevantních alternativách)

Je-li P' výplatní oblast obsažená v P a obě dvojice (u_0, v_0), $(u^*, v^*) \in P'$, pak

$$\Psi(P', (u_0, v_0)) = (u^*, v^*).$$



Podmínka 5 (Nezávislost na lineární transformaci)

Je-li P' získáno z P lineární transformací

$$u' = au + b, \qquad v' = cv + d, \qquad \text{kde} \quad a, c > 0,$$

pak

$$\Psi(P', (au_0 + b, cv_0 + d)) = (au^* + b, cv^* + d).$$

Podmínka 6 (Symetrie)

Je-li množina P symetrická (tj. $(u, v) \in P \Leftrightarrow (v, u) \in P$) a $(u_0, v_0) \in P$, pak $u^* = v^*$.

Věta. *Existuje právě jeden* **„arbitrážní proces“** Ψ *splňující podmínky 1–6.*

Důkaz.

● **Konstrukce Ψ.**

Případ (i) Existuje $(u, v) \in \mathbf{P}$, kde $u > u_0$ a $v > v_0$.

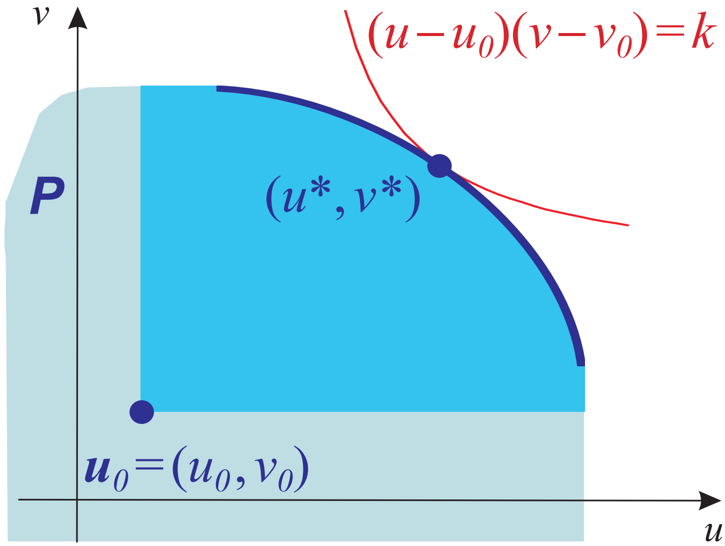
Označme $\mathbf{K} = \{(u, v) \in \mathbf{P}, u > u_0, v > v_0\}$ a definujme

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0) \quad \text{pro} \quad (u, v) \in \mathbf{K}.$$

Existuje právě jeden bod (u^*, v^*), v němž $g(u, v)$ nabývá maximální hodnoty.

Položme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*).$$



Případ (ii)

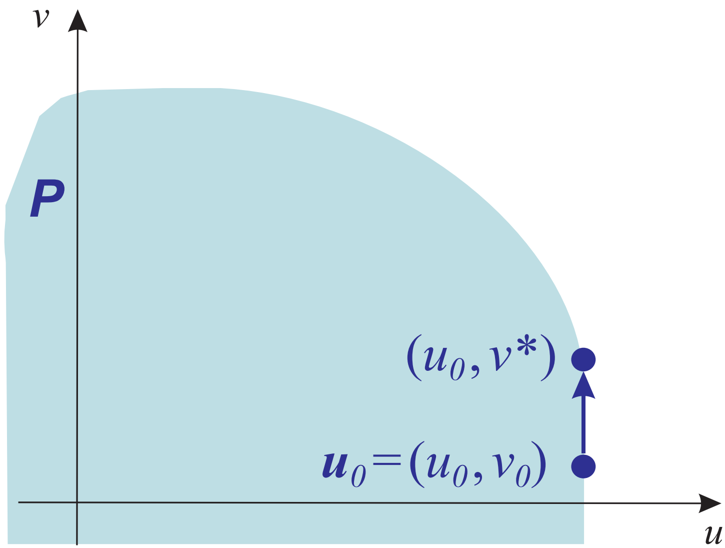
Pro žádný bod $(u, v) \in$ **P** neplatí zároveň $u > u_0$ a $v > v_0$.

Případ (iia) Existuje bod $(u_0, v) \in \mathbf{P}$, pro který $v > v_0$.

Největší v s touto vlastností, kde $(u_0, v) \in \mathbf{P}$, označme v^*.

Položme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u_0, v^*).$$

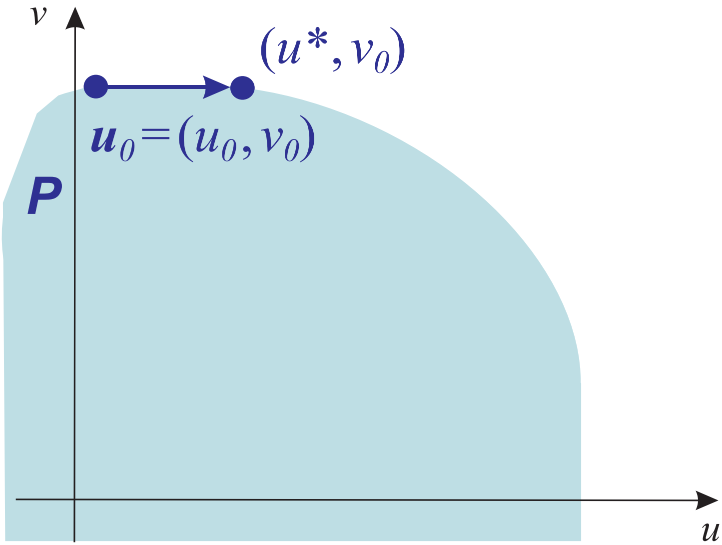


Případ (iib) Existuje bod $(u, v_0) \in \mathbf{P}$, pro který $u > u_0$.

Největší u s touto vlastností, pro něž $(u, v_0) \in \mathbf{P}$, označme u^*.

Položme

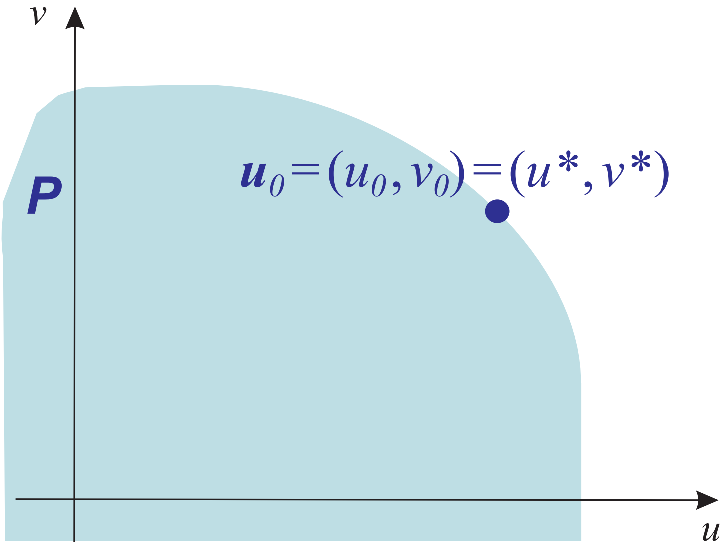
$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v_0).$$



Případ (iic) Nenastává ani jeden z případů (iia), (iib).

Položme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u_0, v_0).$$



● **Ověření Nashových axiomů.**

Podmínky (1) a (3) jsou zřejmě splněny ve všech případech.

Podmínka (2): Pokud by nebyla splněna, pak by existoval bod $(u, v) \in$ **P**, $(u, v) \neq (u^*, v^*)$, který by dominoval bodu (u^*, v^*).

V případě **(i)** by platilo

$$(u - u_0) \geq (u^* - u_0), \ (v - v_0) \geq (v^* - v_0)$$

a aspoň jedna z těchto nerovností by byla ostrá ($(u, v) \neq (u^*, v^*)$). Proto

$$g(u, v) > g(u^*, v^*),$$

což je **spor s konstrukcí** (u^*, v^*).

V případě **(iia)** musí být $u^* = u_0 = u$, protože neplatí zároveň (iib); proto $v > v^*$, což je **spor s definicí** v^*. Analogicky pro **(iib)**.

V případě **(iic)** je $(u^*, v^*) = (u_0, v_0)$; pokud by bylo $u > u_0$, pak by platilo (iib), při $v > v_0$ by nastal případ (iia), což je **spor**.

Podmínka (4): V případě **(i)** je maximální hodnota funkce g na průniku $\mathbf{K} \cap \mathbf{P'}$ menší nebo rovna její maximální hodnotě na **K**.

Protože je $(u^*, v^*) \in P'$, jsou si tato maxima rovna.

Proto
$$\Psi(P', (u_0, v_0)) = \Psi(P, (u_0, v_0)).$$

V případech **(iia)**, **(iib)** lze postupovat podobně, případ **(iic)** je snadný.

Podmínka (5): V případě **(i)** platí **(i)** i pro výplatní oblast P' se status quo bodem $(au_0 + b, cv_0 + d)$. Proto

$$(u' - (au_0 + b))(v' - (cv_0 + d)) = ac(u - u_0)(v - v_0).$$

Protože $a, c > 0$, nabývá funkce na levé straně rovnice svého maxima v bodě $(au^* + b, cv^* + d)$. V případě **(i)** tedy podmínka **(5)** platí. Postup v ostatních případech je obdobný.

Podmínka (6): Pokud by bylo $u^* \neq v^*$, pak by ze symetrie plynulo $(v^*, u^*) \in P$; v případě **(i)** by platilo

$$g(v^*, u^*) = g(u^*, v^*).$$

Podle tvrzení nabývá funkce g svého maxima pouze v jednom bodě, což je spor. Případy **(iia)** a **(iib)** nemohou vzhledem k symetrii nastat.

• Jednoznačnost.

Důkaz se provede sporem, k němuž se dojde z předpokladu, že existuje jiný arbitrážní proces $\overline{\Psi}$ splňující Nashovy axiomy. Protože jsou tyto procesy různé, existuje výplatní oblast **P** a bod „status quo" $(u_0, v_0) \in P$, pro něž

$$(\overline{u}, \overline{v}) = \overline{\Psi}(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) \neq \Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*).$$

Věta. *Nechť* ***P*** *je výplatní oblast a* $(u_0, v_0) \in P$. *Předpokládejme, že existuje bod* $(u, v) \in P$ *s vlastností*

$$u > u_0, \quad v > v_0;$$

množinu všech bodů (u, v) *uvedené vlastnosti označme symbolem* ***K***. *Definujme na množině* ***K*** *funkci*

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0).$$

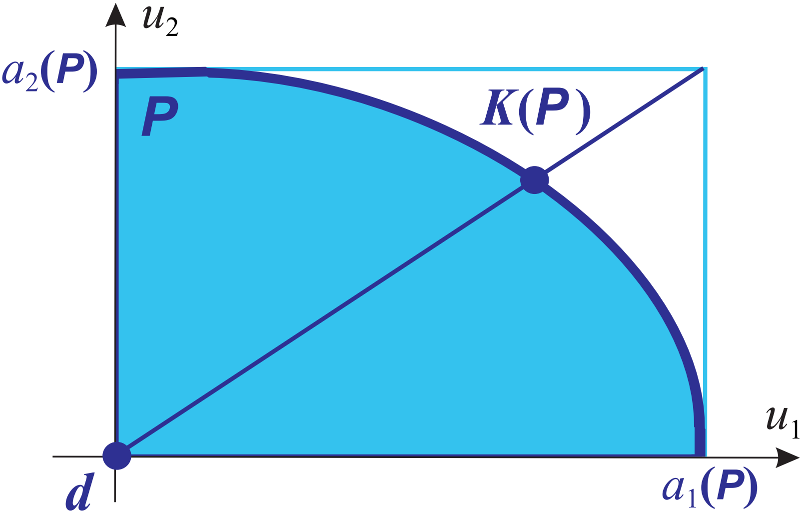
Potom g *dosahuje svého maxima na* ***K*** *v právě jednom bodě.*

Ehud Kalai, Meir Smorodinsky

Other Solutions to Nash's Bargaining Problem, 1975

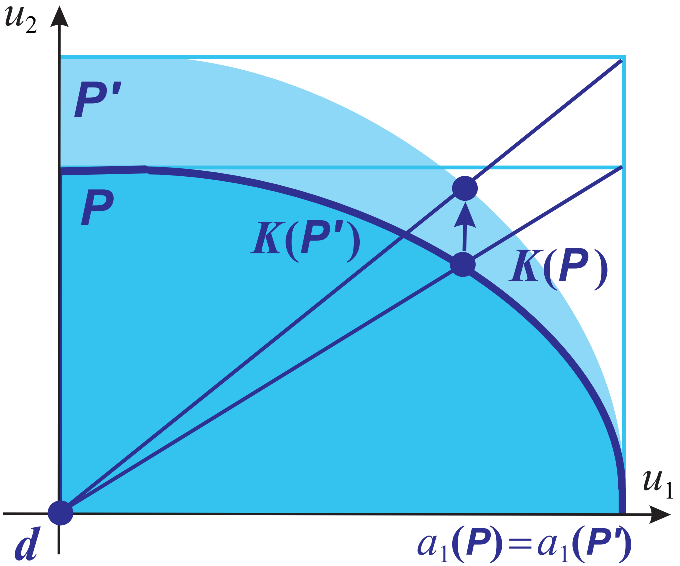
(Econometrica 43, 513–518)

Řešení vycházející z nejoptimističtějších očekávání:



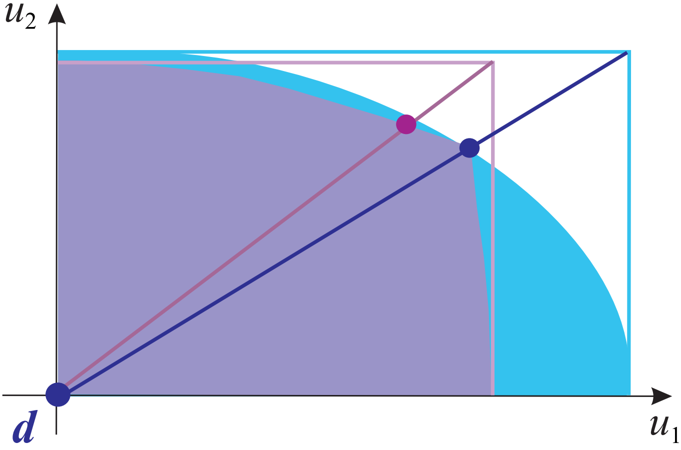
Místo podmínky 4 (nezávislost na irelevantních alternativách):

Individuální monotonie: Je-li $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P}'$ a pro $j \neq i$ je $a_j(\mathbf{P}') = a_j(\mathbf{P})$, pak $K_i(\mathbf{P}, d) \leq K_i(\mathbf{P}', d)$.

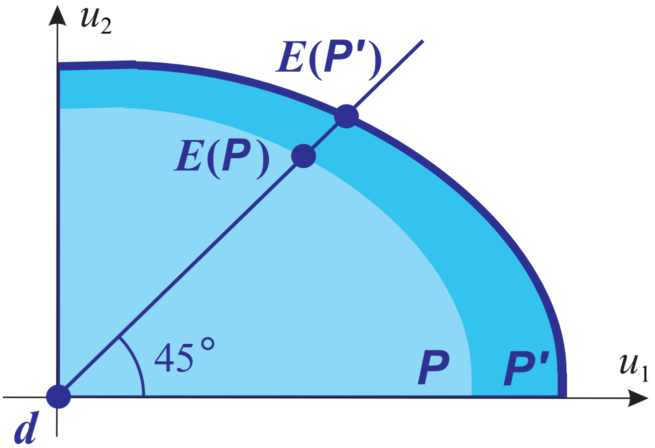


Věta. *Kalai-Smorodinského řešení je jediné řešení splňující podmínky paretovské optimality, symetrie, nezávislosti na lineárních transformacích a individuální monotonie* $(n = 2)$.

Závislost na irelevantních alternativách



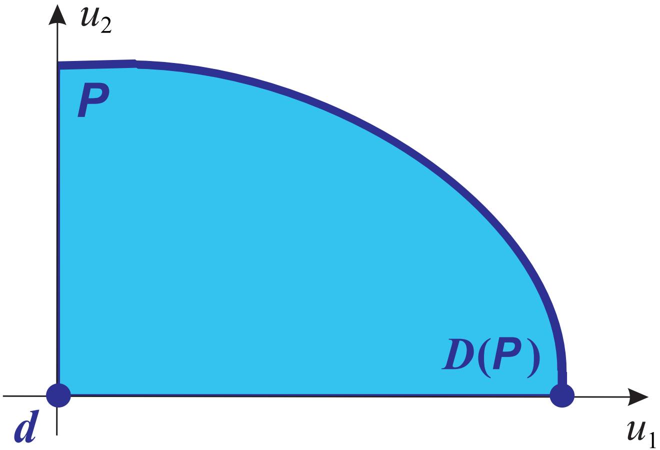
Rovnostářské řešení – Ehud Kalai, 1977



Silná monotonie: Je-li $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P}'$, pak $K_i(\mathbf{P}, d) \leq K_i(\mathbf{P}', d)$ pro všechna i.

Věta. *Rovnostářské řešení je jediné řešení splňující podmínky slabé paretovské optimality, symetrie, a silné monotonie.*

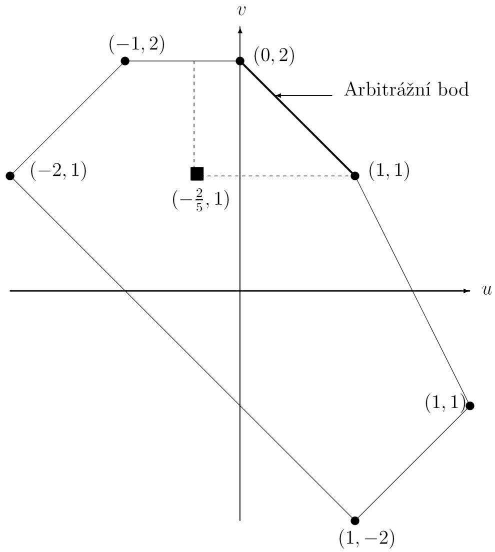
Diktátorské řešení



☛ ***Příklad***. Uvažujme kooperativní hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (2,-1) & (-2,1) & (1,1) \\ (-1,2) & (0,2) & (1,-2) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Maximinní hodnoty: $v_1 = -\frac{2}{5}, v_2 = 1$.



Položme $(u_0, v_0) = (-\frac{2}{5}, 1)$. Arbitrážní bod zřejmě musí být nalezen mezi body výplatní oblasti, které dominují $(-\frac{2}{5}, 1)$ a které nejsou dominovány žádnými jinými body – tj. na úsečce s krajními body $(0, 2)$ a $(1, 1)$, která představuje vyjednávací množinu. Podle konstrukce arbitrážního bodu hledáme maximum funkce

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0) = \left(u + \frac{2}{5}\right)(v - 1)$$

na úsečce dané rovnicí $v = -u + 2$. Jedná se tedy o nalezení extrému funkce jedné reálné proměnné

$$g(u, -u + 2) = \left(u + \frac{2}{5}\right)(-u + 1) = -u^2 + \frac{3}{5}u + \frac{2}{5}\,.$$

Pomocí diferenciálního počtu obdržíme

$$u = \frac{3}{10}\,, \quad v = \frac{17}{10}\,.$$

☛ ***Příklad***. Uvažujme kooperativní hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (5,1) & (7,4) & (1,10) \\ (1,1) & (9,-2) & (5,1) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Maximinní hodnoty jsou $v_1 = 3, v_2 = 1$. Vyjednávací množina je nyní tvořena dvěma úsečkami, stejný postup jako v předchozím příkladu se použije na obě úsečky, přičemž pro jednu vyjde bod maxima mimo ni, pro druhou získáme arbitrážní bod

$$u = \frac{13}{2}\,, \quad v = \frac{9}{2}\,.$$