

Písemná zkouška MA010 Grafy: 9.1. 2008, var A

Identifikace

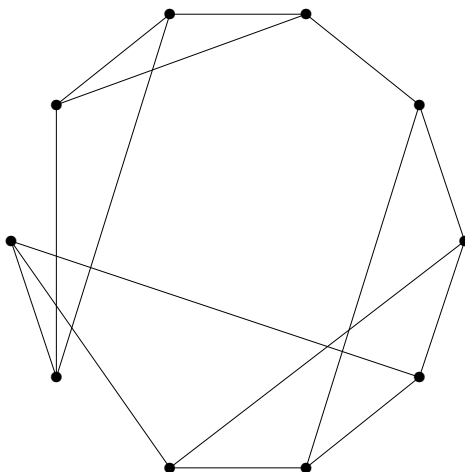
UČO:

JMÉNO:

Poloha v místnosti:

Na vypracování máte **100 minut**, celkem získáte $\leq 17 + 15 + 20 + 20$ bodů. Řešení musí být na tomtéž listu papíru jako je zadání, při nedostatku místa použijte druhou stranu papíru. Každý list papíru musíte **podepsat!** Je zakázáno použít kalkulačky a jiné el. přístroje včetně mobilů. Pracujte **samostatně**. Povolen je 1 list A4 vlastnoručně psaných poznámek k předmětu.

- 1). Dán je následující jednoduchý graf na 10 vrcholech.



Vášim úkolem je zjistit, kolik vzájemně neisomorfních grafů může vzniknout z tohoto grafu přidáním jednoho nového vrcholu x a (jediné) hrany z x do některého původního vrcholu. Svou odpověď aspoň stručně zdůvodněte.

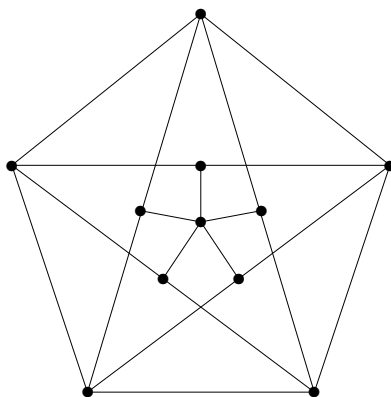
Vzorové výsledky (řešení):

Výsledkem je 4 vzájemně neisomorfních grafů. Valná většina z vás správně odhalila, že záleží jedine na tom, kolik “nesymetrických” vrcholů nakreslený graf obsahuje. Přesně řečeno, kolik je vrcholových orbit grupy automorfismů.

Přitom ve variantách B,D bylo poměrně snadnější ty správné symetrie nalézt, ale jen málokdo se vyrovnal i s požadavkem zdůvodnění, tedy vysvětlit i proč další symetrie nejsou. (To byl častý důvod ztráty bodů i při správně určeném počtu.)

Ve variantách A,C bylo více symetrií k objevení, které jen někteří našli a ostatní pak většinou měli odpovědi jako 5 nebo 6 získané z objevení té snadnější (zrcadlové) symetrie. Pokud však postup byl správně systematický a jedinou chybou bylo neobjevení té dodatečné “skryté” symetrie, uděloval jsem také dost hodně bodů. (Podívejte se na svůj příklad znovu. . .)

- 2). Je dán jednoduchý graf na 11 vrcholech:



Vášim úkolem je zodpovědět správně následující tři otázky o tomto grafu. V odpovědi nestačí uvést jen správný výsledek, ale nutné je i stručné zdůvodnění jeho správnosti (na přiloženém obrázku).

a) Jak velká je jeho největší nezávislá množina?

b) Nakreslete libovolný jednoduchý graf, který má stejnou posloupnost stupňů jako zadaný graf a přitom je nesouvislý.

c) Jaká je barevnost našeho grafu? Nazapomeňte korektně zdůvodnit.

Vzorové výsledky (řešení):

a) Jeho největší nezávislá množina má 5 vrcholů (kolem středového).

b) S nakreslením požadovaného grafu nebyl obvykle problém.

c) Barevnost grafu je 4, obarvení není obtížné. Potěšili jste mě, že většina i správně zdůvodnila, proč graf nelze obarvit 3 barvami: Vnější C_5 vyžaduje 3 barvy a až na symetrii je takové obarvení jednoznačné (to je klíčové). Pak vrcholy kolem středového také dostanou 3 různé barvy, jak lze zdůvodnit z obrázku, a prostřední vrchol už čtvrtou barvu vyžaduje.

Za každou část bylo po 5 bodů, přičemž hlavním důvodem ubírání bodů bylo nedostatečné zdůvodnění tam, kde bylo potřeba. Jelikož se varianta B ukázala znatelně obtížnější, všichni její účastníci obdrželi +1 bod navíc.

3). Mějme konečnou množinu uzavřených intervalů na reálné ose. Nad těmito intervaly definujeme graf následovně: Vrcholy jsou naše intervaly a hrany spojují právě ty dvojice intervalů, které jsou disjunktní. Grafy definované popsáním způsobem nazvěme *mimo-intervalové*. (Jsou to vlastně doplňky lépe známých intervalových grafů.)

a) Podejte zde elementární důkaz faktu, že barevnost mimo-intervalového grafu je vždy rovna velikosti jeho největší kliky.

b) Popište efektivní algoritmus (počítající v polynomiálním čase) pro určení barevnosti vstupního mimo-intervalového grafu.

Vzorové výsledky (řešení):

Dá se říci, že nikdo část a) správně neudělal. Pokusy barvit vrcholy od nejvyšších stupňů a podobně jsou předem odsouzeny k nezdaru, neboť problém barevnosti je NP-úplný. Aby byl váš postup barvení použitelný, musí podstatným způsobem využívat strukturu dané intervalové reprezentace. Bohužel však ani pozorování, že každý další vrchol x mimo největší kliky je s některým vrcholem v kliky nespojený k ničemu nevede, neboť i když x obarvíme stejnou barvou jako v , takových x může být více a některé z nich budou jako intervaly disjunktní, tudíž nemůžete všem přiřadit stejnou barvu!

Správným přístupem bylo nejprve udělat algoritmus pro část b). To se některým povedlo velmi pěkně. Opět však bylo mnoho pokusů snažících se prohledávat kliky nebo barvit hladově podle stupňů vrcholů, které byly předem odsouzeny k nezdaru (opět je důvodem NP-úplnost problémů barevnosti i kliky).

Správný barvicí algoritmus je následovný:

- ★ Intervaly si seřadíme podle začátků zleva. Štětec si namočíme do barvy 1.
- ★ Mějme štětec namočený barvou c . Postupujeme směrem doprava. Dokud objevujeme jen nové začátky intervalů, barvíme je všechny barvou c .
- ★ Jakmile narazíme na konec některého intervalu barvy c (intervalů barev $< c$ si nevšímáme), barvu si změním na $c + 1$ a pokračujeme předchozím.

Snadnou analýzou tohoto algoritmu nejen ukážeme jeho korektnost, ale také vidíme, že posloupnost vybraných intervalů, po kterých jsme měnili barvy, tvoří kliku, takže počet použitých barev je roven velikosti největší kliky.

Studenti mířící neperspektivními směry jsem odměňoval drobnými pár body, vyšší bodování dostávali nakonec jen ti, kteří se aspoň přiblížili k podání výše uvedeného algoritmu.

4). Dokažte platnost následujícího tvrzení:

Hrany (všechny!) každého jednoduchého neorientovaného grafu G lze zorientovat tak, aby do každého jeho vrcholu $v \in V(G)$ stupně d_v přicházelo nejvýše $\lceil d_v/2 \rceil$ šipek. ($\lceil \cdot \rceil$ je horní celá část.)

Proč analogické tvrzení neplatí s nejvýše $\lfloor d_v/2 \rfloor$ přicházejícími šipkami?

Vzorové výsledky (řešení):

Nejprve se podíváme na druhou otázku za 5 bodů, kterou skoro každý zvládl. Stačí se podívat na graf K_2 se stupni 1, do každého jeho vrcholu by muselo přicházet 0 hran, což nelze.

Hlavní otázka už dopadala hůře. Někteří se k ní snažili přistupovat přes kreslení grafu jedním tahem a zorientování tohoto tahu, ale dělalo jim problém se vyrovnat s vrcholy lichých stupňů. Jiní zkoušeli důkaz indukcí přes počet vrcholů, ale těm se vůbec nepovedl indukční krok, takže takové pokusy byly neuznatelné. Dá se to i tak, ale pro indukční předpoklad se musí hrany přidávaného vrcholu vhodně “přemostit”.

Nejhezčí řešení vymyslelo pár studentů, kteří si všimli významné role zorientovaných kružnic. (Bohužel nikdo z nich ani toto hezké řešení nedotáhl do formálně správného důkazu.) Formálně postupujeme indukcí podle počtu kružnic či počtu hran grafu. Stromy zorientujeme snadno podle požadavku (od kořene k listům). Jinak vezmeme kružnici, odebereme její hrany a indukci zbytek zorientujeme. K tomu přidáme tuto kružnici zorientovanou do cyklu.

Z 15 bodů na tuto část bylo udělováno podle zásluh, tedy podle přiblížení se k nějakému správnému důkazu.

Písemná zkouška MA010 Grafy: 9.1. 2008, var B

Identifikace

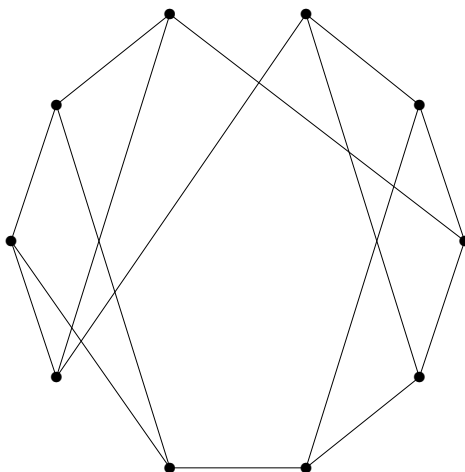
UČO:

JMÉNO:

Poloha v místnosti:

Na vypracování máte **100 minut**, celkem získáte $\leq 17 + 15 + 20 + 20$ bodů. Řešení musí být na tomtéž listu papíru jako je zadání, při nedostatku místa použijte druhou stranu papíru. Každý list papíru musíte **podepsat!** Je zakázáno použít kalkulačky a jiné el. přístroje včetně mobilů. Pracujte **samostatně**. Povolen je 1 list A4 vlastnoručně psaných poznámek k předmětu.

- 1). Dán je následující jednoduchý graf na 10 vrcholech.



Vášim úkolem je zjistit, kolik vzájemně neisomorfních grafů může vzniknout z tohoto grafu přidáním jednoho nového vrcholu x a (jediné) hrany z x do některého původního vrcholu. Svou odpověď aspoň stručně zdůvodněte.

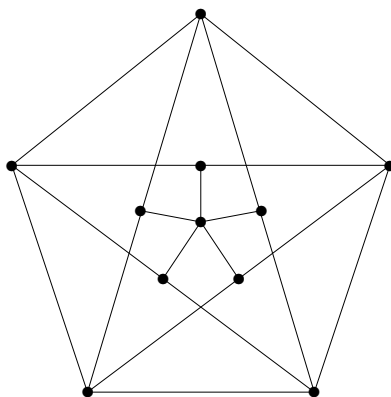
Vzorové výsledky (řešení):

Výsledkem je 6 vzájemně neisomorfních grafů. Valná většina z vás správně odhalila, že záleží jediné na tom, kolik “nesymetrických” vrcholů nakreslený graf obsahuje. Přesně řečeno, kolik je vrcholových orbit grupy automorfismů.

Přitom ve variantách B,D bylo poměrně snadnější ty správné symetrie nalézt, ale jen málokdo se vyrovnal i s požadavkem zdůvodnění, tedy vysvětlit i proč další symetrie nejsou. (To byl častý důvod ztráty bodů i při správně určeném počtu.)

Ve variantách A,C bylo více symetrií k objevení, které jen někteří našli a ostatní pak většinou měli odpovědi jako 5 nebo 6 získané z objevení té snadnější (zrcadlové) symetrie. Pokud však postup byl správně systematický a jedinou chybou bylo neobjevení té dodatečné “skryté” symetrie, uděloval jsem také dost hodně bodů. (Podívejte se na svůj příklad znovu. . .)

- 2). Je dán jednoduchý graf na 11 vrcholech:



Vášim úkolem je zodpovědět správně následující tři otázky o tomto grafu. V odpovědi nestačí uvést jen správný výsledek, ale nutné je i stručné zdůvodnění jeho správnosti (na přiloženém obrázku).

a) Jak velká je nejdelší kružnice v tomto grafu?

b) Nakreslete libovolný jednoduchý graf, který má stejnou posloupnost stupňů jako zadaný graf a přitom jej lze obarvit dvěma barvami.

c) Jaká je barevnost našeho grafu? Nazapomeňte korektně zdůvodnit.

Vzorové výsledky (řešení):

a) Nejdelší kružnice v tomto grafu má všech 11 vrcholů. Zajímavé, že? Jen málokdo ji našel.

b) S nakreslením požadovaného grafu nebyl obvykle problém.

c) Barevnost grafu je 4, obarvení není obtížné. Potěšili jste mě, že většina i správně zdůvodnila, proč graf nelze obarvit 3 barvami: Vnější C_5 vyžaduje 3 barvy a až na symetrii je takové obarvení jednoznačné (to je klíčové). Pak vrcholy kolem středového také dostanou 3 různé barvy, jak lze zdůvodnit z obrázku, a prostřední vrchol už čtvrtou barvu vyžaduje.

Za každou část bylo po 5 bodů, přičemž hlavním důvodem ubírání bodů bylo nedostatečné zdůvodnění tam, kde bylo potřeba. Jelikož se varianta B ukázala znatelně obtížnější, všichni její účastníci obdrželi +1 bod navíc.

3). Mějme konečnou množinu uzavřených intervalů na reálné ose. Nad těmito intervaly definujeme graf následovně: Vrcholy jsou naše intervaly a hrany spojují právě ty dvojice intervalů, které jsou disjunktní. Grafy definované popsáním způsobem nazvěme *mimo-intervalové*. (Jsou to vlastně doplňky lépe známých intervalových grafů.)

a) Podejte zde elementární důkaz faktu, že barevnost mimo-intervalového grafu je vždy rovna velikosti jeho největší kliky.

b) Popište efektivní algoritmus (počítající v polynomiálním čase) pro určení barevnosti vstupního mimo-intervalového grafu.

Vzorové výsledky (řešení):

Dá se říci, že nikdo část a) správně neudělal. Pokusy barvit vrcholy od nejvyšších stupňů a podobně jsou předem odsouzeny k nezdaru, neboť problém barevnosti je NP-úplný. Aby byl váš postup barvení použitelný, musí podstatným způsobem využívat strukturu dané intervalové reprezentace. Bohužel však ani pozorování, že každý další vrchol x mimo největší kliky je s některým vrcholem v kliky nespojený k ničemu nevede, neboť i když x obarvíme stejnou barvou jako v , takových x může být více a některé z nich budou jako intervaly disjunktní, tudíž nemůžete všem přiřadit stejnou barvu!

Správným přístupem bylo nejprve udělat algoritmus pro část b). To se některým povedlo velmi pěkně. Opět však bylo mnoho pokusů snažících se prohledávat kliky nebo barvit hladově podle stupňů vrcholů, které byly předem odsouzeny k nezdaru (opět je důvodem NP-úplnost problémů barevnosti i kliky).

Správný barvicí algoritmus je následovný:

- ★ Intervaly si seřadíme podle začátků zleva. Štětce si namočíme do barvy 1.
- ★ Mějme štětec namočený barvou c . Postupujeme směrem doprava. Dokud objevujeme jen nové začátky intervalů, barvíme je všechny barvou c .
- ★ Jakmile narazíme na konec některého intervalu barvy c (intervalů barev $< c$ si nevšímáme), barvu si změním na $c + 1$ a pokračujeme předchozím.

Snadnou analýzou tohoto algoritmu nejen ukážeme jeho korektnost, ale také vidíme, že posloupnost vybraných intervalů, po kterých jsme měnili barvy, tvoří kliku, takže počet použitých barev je roven velikosti největší kliky.

Studenti mířící neperspektivními směry jsem odměňoval drobnými pár body, vyšší bodování dostávali nakonec jen ti, kteří se aspoň přiblížili k podání výše uvedeného algoritmu.

4). Dokažte platnost následujícího tvrzení:

Hrany (všechny!) každého jednoduchého neorientovaného grafu G lze zorientovat tak, aby do každého jeho vrcholu $v \in V(G)$ stupně d_v přicházelo nejvýše $\lceil d_v/2 \rceil$ šipek. ($\lceil \cdot \rceil$ je horní celá část.)

Proč analogické tvrzení neplatí s nejvýše $\lfloor d_v/2 \rfloor$ přicházejícími šípkami?

Vzorové výsledky (řešení):

Nejprve se podíváme na druhou otázku za 5 bodů, kterou skoro každý zvládl. Stačí se podívat na graf K_2 se stupni 1, do každého jeho vrcholu by muselo přicházet 0 hran, což nelze.

Hlavní otázka už dopadala hůře. Někteří se k ní snažili přistupovat přes kreslení grafu jedním tahem a zorientování tohoto tahu, ale dělalo jim problém se vyrovnat s vrcholy lichých stupňů. Jiní zkoušeli důkaz indukcí přes počet vrcholů, ale těm se vůbec nepovedl indukční krok, takže takové pokusy byly neuznatelné. Dá se to i tak, ale pro indukční předpoklad se musí hrany přidávaného vrcholu vhodně “přemostit”.

Nejhezčí řešení vymyslelo pár studentů, kteří si všimli významné role zorientovaných kružnic. (Bohužel nikdo z nich ani toto hezké řešení nedotáhl do formálně správného důkazu.) Formálně postupujeme indukcí podle počtu kružnic či počtu hran grafu. Stromy zorientujeme snadno podle požadavku (od kořene k listům). Jinak vezmeme kružnici, odebereme její hrany a indukci zbytek zorientujeme. K tomu přidáme tuto kružnici zorientovanou do cyklu.

Z 15 bodů na tuto část bylo udělováno podle zásluh, tedy podle přiblížení se k nějakému správnému důkazu.

Písemná zkouška MA010 Grafy: 9.1. 2008, var C

Identifikace

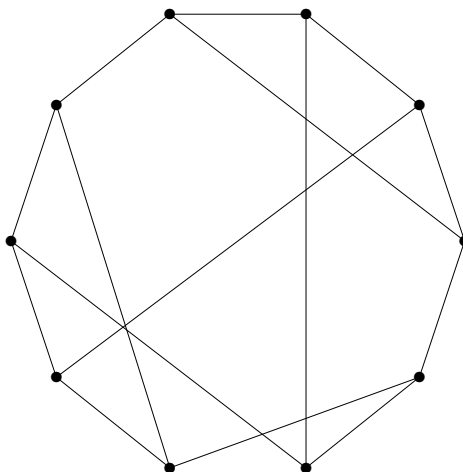
UČO:

JMÉNO:

Poloha v místnosti:

Na vypracování máte **100 minut**, celkem získáte $\leq 17 + 15 + 20 + 20$ bodů. Řešení musí být na tomtéž listu papíru jako je zadání, při nedostatku místa použijte druhou stranu papíru. Každý list papíru musíte **podepsat!** Je zakázáno použít kalkulačky a jiné el. přístroje včetně mobilů. Pracujte **samostatně**. Povolen je 1 list A4 vlastnoručně psaných poznámek k předmětu.

- 1). Dán je následující jednoduchý graf na 10 vrcholech.



Vášim úkolem je zjistit, kolik vzájemně neisomorfních grafů může vzniknout z tohoto grafu přidáním jednoho nového vrcholu x a (jediné) hrany z x do některého původního vrcholu. Svou odpověď aspoň stručně zdůvodněte.

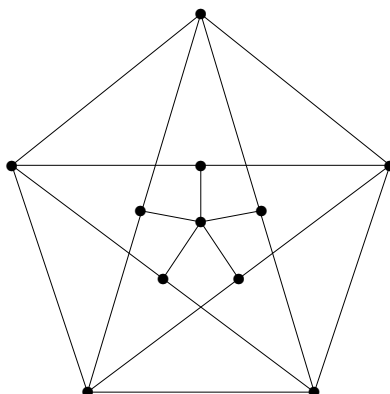
Vzorové výsledky (řešení):

Výsledkem je 3 vzájemně neisomorfních grafů. Valná většina z vás správně odhalila, že záleží jedine na tom, kolik “nesymetrických” vrcholů nakreslený graf obsahuje. Přesně řečeno, kolik je vrcholových orbit grupy automorfismů.

Přitom ve variantách B,D bylo poměrně snadnější ty správné symetrie nalézt, ale jen málokdo se vyrovnal i s požadavkem zdůvodnění, tedy vysvětlit i proč další symetrie nejsou. (To byl častý důvod ztráty bodů i při správně určeném počtu.)

Ve variantách A,C bylo více symetrií k objevení, které jen někteří našli a ostatní pak většinou měli odpovědi jako 5 nebo 6 získané z objevení té snadnější (zrcadlové) symetrie. Pokud však postup byl správně systematický a jedinou chybou bylo neobjevení té dodatečné “skryté” symetrie, uděloval jsem také dost hodně bodů. (Podívejte se na svůj příklad znovu. . .)

- 2). Je dán jednoduchý graf na 11 vrcholech:



Vášim úkolem je zodpovědět správně následující tři otázky o tomto grafu. V odpovědi nestačí uvést jen správný výsledek, ale nutné je i stručné zdůvodnění jeho správnosti (na přiloženém obrázku).

a) Jak velká je nejkratší kružnice v tomto grafu?

b) Nakreslete libovolný jednoduchý graf, který má stejnou posloupnost stupňů jako zadaný graf a přitom obsahuje dva vrcholy ve vzdálenosti 4 od sebe.

c) Jaká je barevnost našeho grafu? Nazapomeňte korektně zdůvodnit.

Vzorové výsledky (řešení):

a) Nejkratší kružnice v tomto grafu je C_4 .

b) S nakreslením požadovaného grafu nebyl obvykle problém.

c) Barevnost grafu je 4, obarvení není obtížné. Potěšili jste mě, že většina i správně zdůvodnila, proč graf nelze obarvit 3 barvami: Vnější C_5 vyžaduje 3 barvy a až na symetrii je takové obarvení jednoznačné (to je klíčové). Pak vrcholy kolem středového také dostanou 3 různé barvy, jak lze zdůvodnit z obrázku, a prostřední vrchol už čtvrtou barvu vyžaduje.

Za každou část bylo po 5 bodů, přičemž hlavním důvodem ubírání bodů bylo nedostatečné zdůvodnění tam, kde bylo potřeba. Jelikož se varianta B ukázala znatelně obtížnější, všichni její účastníci obdrželi +1 bod navíc.

3). Mějme konečnou množinu uzavřených intervalů na reálné ose. Nad těmito intervaly definujeme graf následovně: Vrcholy jsou naše intervaly a hrany spojují právě ty dvojice intervalů, které jsou disjunktní. Grafy definované popsáním způsobem nazvěme *mimo-intervalové*. (Jsou to vlastně doplňky lépe známých intervalových grafů.)

a) Podejte zde elementární důkaz faktu, že barevnost mimo-intervalového grafu je vždy rovna velikosti jeho největší kliky.

b) Popište efektivní algoritmus (počítající v polynomiálním čase) pro určení barevnosti vstupního mimo-intervalového grafu.

Vzorové výsledky (řešení):

Dá se říci, že nikdo část a) správně neudělal. Pokusy barvit vrcholy od nejvyšších stupňů a podobně jsou předem odsouzeny k nezdaru, neboť problém barevnosti je NP-úplný. Aby byl váš postup barvení použitelný, musí podstatným způsobem využívat strukturu dané intervalové reprezentace. Bohužel však ani pozorování, že každý další vrchol x mimo největší kliky je s některým vrcholem v kliky nespojený k ničemu nevede, neboť i když x obarvíme stejnou barvou jako v , takových x může být více a některé z nich budou jako intervaly disjunktní, tudíž nemůžete všem přiřadit stejnou barvu!

Správným přístupem bylo nejprve udělat algoritmus pro část b). To se některým povedlo velmi pěkně. Opět však bylo mnoho pokusů snažících se prohledávat kliky nebo barvit hladově podle stupňů vrcholů, které byly předem odsouzeny k nezdaru (opět je důvodem NP-úplnost problémů barevnosti i kliky).

Správný barvicí algoritmus je následovný:

- ★ Intervaly si seřadíme podle začátků zleva. Štětec si namočíme do barvy 1.
- ★ Mějme štětec namočený barvou c . Postupujeme směrem doprava. Dokud objevujeme jen nové začátky intervalů, barvíme je všechny barvou c .
- ★ Jakmile narazíme na konec některého intervalu barvy c (intervalů barev $< c$ si nevšímáme), barvu si změním na $c + 1$ a pokračujeme předchozím.

Snadnou analýzou tohoto algoritmu nejen ukážeme jeho korektnost, ale také vidíme, že posloupnost vybraných intervalů, po kterých jsme měnili barvy, tvoří kliku, takže počet použitých barev je roven velikosti největší kliky.

Studenti mířící neperspektivními směry jsem odměňoval drobnými pár body, vyšší bodování dostávali nakonec jen ti, kteří se aspoň přiblížili k podání výše uvedeného algoritmu.

4). Dokažte platnost následujícího tvrzení:

Hrany (všechny!) každého jednoduchého neorientovaného grafu G lze zorientovat tak, aby do každého jeho vrcholu $v \in V(G)$ stupně d_v přicházelo nejvýše $\lceil d_v/2 \rceil$ šipek. ($\lceil \cdot \rceil$ je horní celá část.)

Proč analogické tvrzení neplatí s nejvýše $\lfloor d_v/2 \rfloor$ přicházejícími šípkami?

Vzorové výsledky (řešení):

Nejprve se podíváme na druhou otázku za 5 bodů, kterou skoro každý zvládl. Stačí se podívat na graf K_2 se stupni 1, do každého jeho vrcholu by muselo přicházet 0 hran, což nelze.

Hlavní otázka už dopadala hůře. Někteří se k ní snažili přistupovat přes kreslení grafu jedním tahem a zorientování tohoto tahu, ale dělalo jim problém se vyrovnat s vrcholy lichých stupňů. Jiní zkoušeli důkaz indukcí přes počet vrcholů, ale těm se vůbec nepovedl indukční krok, takže takové pokusy byly neuznatelné. Dá se to i tak, ale pro indukční předpoklad se musí hrany přidávaného vrcholu vhodně “přemostit”.

Nejhezčí řešení vymyslelo pár studentů, kteří si všimli významné role zorientovaných kružnic. (Bohužel nikdo z nich ani toto hezké řešení nedotáhl do formálně správného důkazu.) Formálně postupujeme indukcí podle počtu kružnic či počtu hran grafu. Stromy zorientujeme snadno podle požadavku (od kořene k listům). Jinak vezmeme kružnici, odebereme její hrany a indukci zbytek zorientujeme. K tomu přidáme tuto kružnici zorientovanou do cyklu.

Z 15 bodů na tuto část bylo udělováno podle zásluh, tedy podle přiblížení se k nějakému správnému důkazu.

Písemná zkouška MA010 Grafy: 9.1. 2008, var D

Identifikace

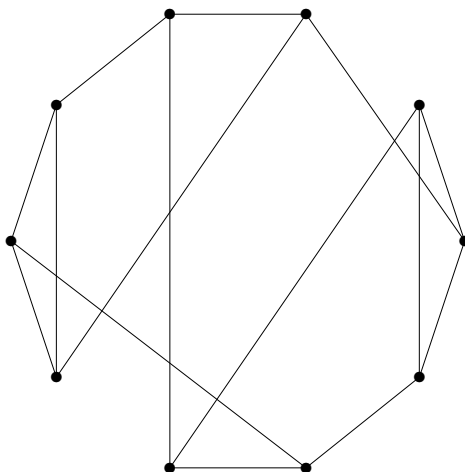
UČO:

JMÉNO:

Poloha v místnosti:

Na vypracování máte **100 minut**, celkem získáte $\leq 17 + 15 + 20 + 20$ bodů. Řešení musí být na tomtéž listu papíru jako je zadání, při nedostatku místa použijte druhou stranu papíru. Každý list papíru musíte **podepsat!** Je zakázáno použít kalkulačky a jiné el. přístroje včetně mobilů. Pracujte **samostatně**. Povolen je 1 list A4 vlastnoručně psaných poznámek k předmětu.

- 1). Dán je následující jednoduchý graf na 10 vrcholech.



Vášim úkolem je zjistit, kolik vzájemně neisomorfních grafů může vzniknout z tohoto grafu přidáním jednoho nového vrcholu x a (jediné) hrany z x do některého původního vrcholu. Svou odpověď aspoň stručně zdůvodněte.

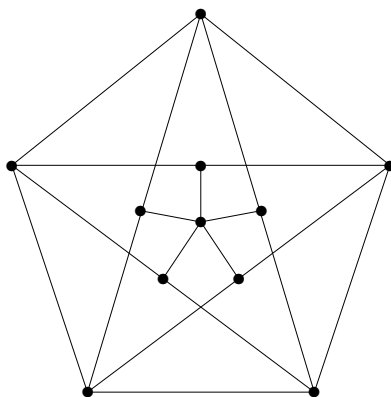
Vzorové výsledky (řešení):

Výsledkem je 5 vzájemně neisomorfních grafů. Valná většina z vás správně odhalila, že záleží jediné na tom, kolik “nesymetrických” vrcholů nakreslený graf obsahuje. Přesně řečeno, kolik je vrcholových orbit grupy automorfismů.

Přitom ve variantách B,D bylo poměrně snadnější ty správné symetrie nalézt, ale jen málokdo se vyrovnal i s požadavkem zdůvodnění, tedy vysvětlit i proč další symetrie nejsou. (To byl častý důvod ztráty bodů i při správně určeném počtu.)

Ve variantách A,C bylo více symetrií k objevení, které jen někteří našli a ostatní pak většinou měli odpovědi jako 5 nebo 6 získané z objevení té snadnější (zrcadlové) symetrie. Pokud však postup byl správně systematický a jedinou chybou bylo neobjevení té dodatečné “skryté” symetrie, uděloval jsem také dost hodně bodů. (Podívejte se na svůj příklad znovu. . .)

- 2). Je dán jednoduchý graf na 11 vrcholech:



Vášim úkolem je zodpovědět správně následující tři otázky o tomto grafu. V odpovědi nestačí uvést jen správný výsledek, ale nutné je i stručné zdůvodnění jeho správnosti (na přiloženém obrázku).

a) Jak velká je nejmenší podmnožina X jeho vrcholů taková, že každý jeho vrchol mimo X má nějakého souseda v X ?

b) Nakreslete libovolný jednoduchý graf, který má stejnou posloupnost stupňů jako zadaný graf a přitom obsahuje trojúhelník.

c) Jaká je barevnost našeho grafu? Nazapomeňte korektně zdůvodnit.

Vzorové výsledky (řešení):

a) Nejmenší podmnožina X jeho vrcholů taková, že každý jeho vrchol mimo X má nějakého souseda v X , má 3 vrcholy.

b) S nakreslením požadovaného grafu nebyl obvykle problém.

c) Barevnost grafu je 4, obarvení není obtížné. Potěšili jste mě, že většina i správně zdůvodnila, proč graf nelze obarvit 3 barvami: Vnější C_5 vyžaduje 3 barvy a až na symetrii je takové obarvení jednoznačné (to je klíčové). Pak vrcholy kolem středového také dostanou 3 různé barvy, jak lze zdůvodnit z obrázku, a prostřední vrchol už čtvrtou barvu vyžaduje.

Za každou část bylo po 5 bodů, přičemž hlavním důvodem ubírání bodů bylo nedostatečné zdůvodnění tam, kde bylo potřeba. Jelikož se varianta B ukázala znatelně obtížnější, všichni její účastníci obdrželi +1 bod navíc.

3). Mějme konečnou množinu uzavřených intervalů na reálné ose. Nad těmito intervaly definujeme graf následovně: Vrcholy jsou naše intervaly a hrany spojují právě ty dvojice intervalů, které jsou disjunktní. Grafy definované popsáním způsobem nazvěme *mimo-intervalové*. (Jsou to vlastně doplňky lépe známých intervalových grafů.)

a) Podejte zde elementární důkaz faktu, že barevnost mimo-intervalového grafu je vždy rovna velikosti jeho největší kliky.

b) Popište efektivní algoritmus (počítající v polynomiálním čase) pro určení barevnosti vstupního mimo-intervalového grafu.

Vzorové výsledky (řešení):

Dá se říci, že nikdo část a) správně neudělal. Pokusy barvit vrcholy od nejvyšších stupňů a podobně jsou předem odsouzeny k nezdaru, neboť problém barevnosti je NP-úplný. Aby byl váš postup barvení použitelný, musí podstatným způsobem využívat strukturu dané intervalové reprezentace. Bohužel však ani pozorování, že každý další vrchol x mimo největší kliky je s některým vrcholem v kliky nespojený k ničemu nevede, neboť i když x obarvíme stejnou barvou jako v , takových x může být více a některé z nich budou jako intervaly disjunktní, tudíž nemůžete všem přiřadit stejnou barvu!

Správným přístupem bylo nejprve udělat algoritmus pro část b). To se některým povedlo velmi pěkně. Opět však bylo mnoho pokusů snažících se prohledávat kliky nebo barvit hladově podle stupňů vrcholů, které byly předem odsouzeny k nezdaru (opět je důvodem NP-úplnost problémů barevnosti i kliky).

Správný barvicí algoritmus je následovný:

- ★ Intervaly si seřadíme podle začátků zleva. Štětce si namočíme do barvy 1.
- ★ Mějme štětec namočený barvou c . Postupujeme směrem doprava. Dokud objevujeme jen nové začátky intervalů, barvíme je všechny barvou c .
- ★ Jakmile narazíme na konec některého intervalu barvy c (intervalů barev $< c$ si nevšímáme), barvu si změním na $c + 1$ a pokračujeme předchozím.

Snadnou analýzou tohoto algoritmu nejen ukážeme jeho korektnost, ale také vidíme, že posloupnost vybraných intervalů, po kterých jsme měnili barvy, tvoří kliku, takže počet použitých barev je roven velikosti největší kliky.

Studenti mířící neperspektivními směry jsem odměňoval drobnými pár body, vyšší bodování dostávali nakonec jen ti, kteří se aspoň přiblížili k podání výše uvedeného algoritmu.

4). Dokažte platnost následujícího tvrzení:

Hrany (všechny!) každého jednoduchého neorientovaného grafu G lze zorientovat tak, aby do každého jeho vrcholu $v \in V(G)$ stupně d_v přicházelo nejvýše $\lceil d_v/2 \rceil$ šipek. ($\lceil \cdot \rceil$ je horní celá část.)

Proč analogické tvrzení neplatí s nejvýše $\lfloor d_v/2 \rfloor$ přicházejícími šipkami?

Vzorové výsledky (řešení):

Nejprve se podíváme na druhou otázku za 5 bodů, kterou skoro každý zvládl. Stačí se podívat na graf K_2 se stupni 1, do každého jeho vrcholu by muselo přicházet 0 hran, což nelze.

Hlavní otázka už dopadala hůře. Někteří se k ní snažili přistupovat přes kreslení grafu jedním tahem a zorientování tohoto tahu, ale dělalo jim problém se vyrovnat s vrcholy lichých stupňů. Jiní zkoušeli důkaz indukci přes počet vrcholů, ale těm se vůbec nepovedl indukční krok, takže takové pokusy byly neuznatelné. Dá se to i tak, ale pro indukční předpoklad se musí hrany přidávaného vrcholu vhodně “přemostit”.

Nejhezčí řešení vymyslelo pár studentů, kteří si všimli významné role zorientovaných kružnic. (Bohužel nikdo z nich ani toto hezké řešení nedotáhl do formálně správného důkazu.) Formálně postupujeme indukcí podle počtu kružnic či počtu hran grafu. Stromy zorientujeme snadno podle požadavku (od kořene k listům). Jinak vezmeme kružnici, odebereme její hrany a indukcí zbytek zorientujeme. K tomu přidáme tuto kružnici zorientovanou do cyklu.

Z 15 bodů na tuto část bylo udělováno podle zásluh, tedy podle přiblížení se k nějakému správnému důkazu.