ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ 2. ČÁSTI:

9. **(10 bodů)** Určete obor konvergence a součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

10. **(15 bodů)** S využitím vzorce

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}, \qquad \text{kde } a > 0,$$

vypočtěte integrál závislý na parametru

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - \mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x^2}\, \mathrm{d}x,$$

kde $0 \le \alpha \le \beta$ jsou reálné konstanty a e značí Eulerovo číslo.

11. **(10 bodů)** Vypočtěte křivkový integrál druhého druhu

$$\int_K y\, \mathrm{d}x,$$

kde K je první oblouk cykloidy s parametrickým vyjádřením $x(t) = t - \sin(t)$ a $y(t) = 1 - \cos(t)$ pro $t \in [0, 2\pi]$.

12. **(15 bodů)** Určete izolované singularity a jejich typ pro funkci

$$f(z) = \frac{z+3}{(z-i)^2(z^2+z)}$$

a pomocí teorie reziduí spočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z,$$

kde γ je jednoduchá uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ orientovaná proti směru hodinových ručiček a složená ze 4 následujících úseků

1. horní půlkružnice se středem v $[0,0]$ a poloměrem 2;
2. spodní půlkružnice se středem v $[-5/4, 0]$ a poloměrem $3/4$;

ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ 2. ČÁSTI:

9. **(10 bodů)** Určete obor konvergence a součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

10. **(15 bodů)** S využitím vzorce

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}, \quad \text{kde } a > 0,$$

vypočtěte integrál závislý na parametru

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - \mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde $0 \le \alpha \le \beta$ jsou reálné konstanty a e značí Eulerovo číslo.

11. **(10 bodů)** Vypočtěte křivkový integrál druhého druhu

$$\int_K y\,\mathrm{d}x,$$

kde K je první oblouk cykloidy s parametrickým vyjádřením $x(t) = t - \sin(t)$ a $y(t) = 1 - \cos(t)$ pro $t \in [0, 2\pi]$.

12. **(15 bodů)** Určete izolované singularity a jejich typ pro funkci

$$f(z) = \frac{z+3}{(z-i)^2(z^2+z)}$$

a pomocí teorie reziduí spočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z,$$

kde γ je jednoduchá uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ orientovaná proti směru hodinových ručiček a složená ze 4 následujících úseků

1. horní půlkružnice se středem v $[0,0]$ a poloměrem 2;
2. spodní půlkružnice se středem v $[-5/4, 0]$ a poloměrem $3/4$;
3. horní půlkružnice se středem v $[0,0]$ a poloměrem $1/2$;
4. spodní půlkružnice se středem v $[5/4, 0]$ a poloměrem $3/4$.

13. **(10 bodů)** Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$xy' + y = y^2$$

a také řešení této diferenciální rovnice s počáteční podmínkou $y(1) = \frac{1}{2}$.

14. **(10 bodů)** Do banky byl v čase $t = 0$ vložen počáteční kapitál y_0, který bude spojitě úročen úrokem ve výši p[%]. Sestavte diferenciální rovnici, jejíž řešení určuje stav účtu v čase t za předpokladu, že z účtu nejsou po dobu úročení vybírány žádné peníze a že úrok je daněn sazbou u[%] (bankovní poplatky zanedbejte). Určete řešení této diferenciální rovnice a vypočtěte čas, za jaký se vklad $y_0 = 50\,000,-$ zvýší na $55\,000,-$ při spojitém úročení s $p = 3\%$ a $u = 15\%$.

MA002: MATEMATICKÁ ANALÝZA III **Před-termín: 18. prosince 2012**

ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ 1. ČÁSTI:

1. **(4 body)** Zformulujte Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence pro řadu funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2. **(3 body)** Rozhodněte o pravdivosti tohoto výroku:

   Nechť integrál $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Potom $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

3. **(3 body)** Rozhodněte, zda v okolí bodu $[2,-2,1]$ je rovnicí $\ln z + x^2yz + 8 = 0$ dána implicitně funkce $z = f(x,y)$.

4. **(3 body)** Vypočtěte $\ln(-2)$ a $\mathrm{Ln}(-2)$ v $\mathbb{C}$.

5. **(4 body)** Definujte Jordanovu cestu.

6. **(4 body)** Doplňte následující tvrzení (tzv. Cauchyho vzorec pro Jordanovu cestu):

   Nechť γ je kladně orientovaná Jordanova cesta v $\mathbb{C}$ a G její vnitřek. Nechť funkce $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v G a spojitá na $\overline{G}$. Pak platí

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

7. **(6 bodů)** Pomocí metody neurčitých koeficientů určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 40\cos^2 x,$$

   přičemž platí $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Neurčité koeficienty dále nepočítejte.

8. **(3 body)** Udejte příklad lineární diferenciální rovnice, jejíž jediná lineárně nezávislá řešení jsou

$$y_1(x) = \mathrm{e}^x,\ y_2(x) = \mathrm{e}^{2x},\ y_3(x) = x\mathrm{e}^x,\ y_4(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(2x),\ y_5(x) = \mathrm{e}^x\sin(3x).$$