VB006 Domácí úlohy, Jaro 2012 **John Doe**

Úloha 1: Vypočtěte hustotu uhlíku (diamant), křemíku, germania a α-Sn (šedý cín) z mřížkové konstanty a hmotnosti jednoho atomu.

Všechny zadané prvky mají krystalovou strukturu kub. diamantu. (http://en.wikipedia.org/wiki/Diamond_cubic), tj. plošně centrovanou kubickou mříž.

Atomová hmotnostní konstanta: $m_u = 1.660538921 * 10^{-27}$ kg $= 1.660538921 * 10^{-24}$ g
Počet atomů v krys. buňce: Z = 8
Objem krys. buňky: $V = a^3$ (tj. mřížková konstanta na třetí, protože se jedná o krychli)

Uhlík (C):
Atomová hmotnost: $A_r = 12.0107$
Mřížková konstanta: a = 3.57 Å $= 3.57 * 10^{-8}$ cm
Klidová hmotnost: $m = A_r * m_u = 12.0107 * 1.660538921 * 10^{-24} = 1.994423 * 10^{-23}$ g
(ze vztahu pro rel. atom. hmotnost $A_r = \frac{m}{m_u}$)

Křemík (Si):
Atomová hmotnost: $A_r = 28.0855$
Mřížková konstanta: a = 5.43 Å $= 5.43 * 10^{-8}$ cm
Klidová hmotnost: $m = A_r * m_u = 28.0855 * 1.660538921 * 10^{-24} = 4.663707 * 10^{-23}$ g

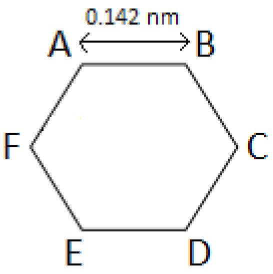
Germanium (Ge):
Atomová hmotnost: $A_r = 72.63$
Mřížková konstanta: a = 5.66 Å $= 5.66 * 10^{-8}$ cm
Klidová hmotnost: $m = A_r * m_u = 72.63 * 1.660538921 * 10^{-24} = 1.206049 * 10^{-22}$ g

Šedý cín (α-Sn):
Atomová hmotnost: $A_r = 118.71$
Mřížková konstanta: a = 6.49 Å $= 6.49 * 10^{-8}$ cm
Klidová hmotnost: $m = A_r * m_u = 8 * 118.71 * 1.660538921 * 10^{-24} = 1.971226 * 10^{-22}$ g

Hustota:	$\rho = \frac{Z*m}{V} = \frac{Z*m}{a^3}$
Uhlík (C):	$\frac{8*1.994423*10^{-23}}{(3.57*10^{-8})^3}$ = **3.5067 g/cm³**
Křemík (Si):	$\frac{8*4.663707*10^{-23}}{(5.43*10^{-8})^3}$ = **2.3304 g/cm³**
Germanium (Ge):	$\frac{8*1.206049*10^{-22}}{(5.66*10^{-8})^3}$ = **5.3212 g/cm³**
Šedý cín (α-Sn):	$\frac{8*1.971226*10^{-22}}{(6.49*10^{-8})^3}$ = **5.7689 g/cm³**

Úloha 2: Jaká je vzdálenost nejbližších sousedů v struktuře grafitové roviny (grafen)?
Jaký je počet uhlíkových atomů na ploše velikosti 1 μm² a jaká je její hmotnost?

Mezi dvěma sousedy je minimální vzdálenost 0.142 nm s vazebným úhlem 120°.
Vrstvy grafenu jsou od sebe vzdáleny 0.335 nm.



Vzdálenost AB: $a = 0.142\ nm = 1.42 * 10^{-1}\ nm$

Obsah plochy: $S_p = 1\ \mu m^2 = 10^6\ nm^2$

Obsah 1 hexagonu: $S_h = \frac{3*\sqrt{3}}{2}*a^2 = \frac{3*\sqrt{3}}{2}*(1.42*10^{-1})^2 = 5.23876 * 10^{-2}\ nm^2$

Počet hexagonů: $h = \frac{S_p}{S_h} = \frac{10^6}{5.23876*10^{-2}} = 1.908848 * 10^7$ ploch

Počet atomů: $N = \frac{h*6}{3} = 1.908848*10^7*2 = \mathbf{3.817696 * 10^7}$ **atomů**

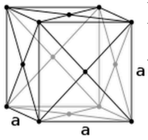
(krát 6 – jeden hexagon obsahuje 6 atomů, děleno 3 – jeden atom sdílejí 3 hexagony)

Atomová hmotnost C: $A_r = 12.0107$
Atomová hmotnostní konstanta: $m_u = 1.660538921 * 10^{-27}$ kg
Klidová hmotnost atomu C: $m_k = A_r * m_u = 12.0107 * 1.660538921 * 10^{-27} = 1.994423 * 10^{-26}$ kg

Hmotnost 1 μm² grafitu: $m = N * m_k = 3.817696 * 10^7 * 1.994423 * 10^{-26} = \mathbf{7.6141 * 10^{-19}}$ **kg**

Úloha 3: Z mřížkové konstanty C_{60} (kubická plošně centrovaná mříž) spočítejte jeho hustotu a porovnejte s hustotou diamantu a grafitu. Jaký objem připadá na jeden atom v těchto třech formách C?

Fulleren C_{60} ma kubickou plošně centrovanou mřížku, takže se 1 cm^2 dá složit z několika krystalových jednotek (krychliček) o hraně délky 'a' (tj. mřížková konstanta, viz níže).



Krystal z jedné krychličky se skládá ze 14 částic C_{60} (8 vrcholů + 6 středů stěn). Krystal z 8 krychliček (tj. 2*2*2) bude mít 63 částic, 3*3*3 bude mít 172...

=> <u>x*x*x krychlička bude mít $(x + 1)^3 + 3 * x^2 * (x + 1)$ částic</u>

<u>*Atomová hmotnostní konstanta:*</u> $m_u = 1.660538921 * 10^{-27}$ kg $= 1.660538921 * 10^{-24}$ g
<u>*Atomová hmotnost C:*</u> $A_r = 12.0107$
<u>*Mřížková konstanta C_{60}:*</u> $a = 14.15$ Å $= 1.415 * 10^{-7}$ cm
<u>*Klidová hmotnost atomu C:*</u> $m = A_r * m_u = 12.0107 * 1.660538921 * 10^{-24} = 1.994423 * 10^{-23}$ g
<u>*Počet částic v krystalu o hraně x:*</u> $Z = (x + 1)^3 + 3 * x^2 * (x + 1)$

<u>*Hustota:*</u> $\rho = \dfrac{Z*m}{V} =$

$$= \frac{((x+1)^3+3*x^2*(x+1))*(60*m_k)}{V}$$

Pro objem V = 1 cm^3 bude krystal mít hranu 1/a, hustota tedy bude:

$$\rho = \frac{((\frac{1}{a}+1)^3+3*(\frac{1}{a})^2*(\frac{1}{a}+1))*(60*m_k)}{V} =$$

$$= \frac{((\frac{1}{1.415*10^{-7}}+1)^3+3*(\frac{1}{1.415*10^{-7}})^2*(\frac{1}{1.415*10^{-7}}+1))*(60*1.994423*10^{-23})}{1} =$$

$$= 1.41186*10^{21}*1.1966538*10^{-21} = \mathbf{1.6895\ g/cm^3}$$

<u>*Hustota diamantu:*</u> $\rho_d = 3{,}515$ g/cm^3
<u>*Hustota grafitu:*</u> $\rho_g = 2.267$ g/cm^3

=> C_{60} má asi $\dfrac{\rho}{\rho_d}=\dfrac{1.6895}{3.515}$ = **48% hustoty diamantu** a $\dfrac{\rho}{\rho_g}=\dfrac{1.6895}{2.267}$ = **74% hustoty grafitu,** je tedy velice lehký.

<u>*Objem 1 atomu C_{60}:*</u> Zpětně vyjádříme objem 1 atom z předchozí rovnice o objemu 1 cm^3 tak, že vydělíme objem 1 cm^3 počtem molekul * 60 (1 molekula obsahuje 60 atomů):

$$V_{c60} = \frac{1}{1.41186*10^{21}*60} = \mathbf{1.18048 * 10^{-23}\ cm^3}$$

<u>*Objem 1 atomu diamantu:*</u> Z příkladu 1 víme, že diamant ma v krys. buňce 8 atomů, buňka má objem a^3, kde $a = 3.57 * 10^{-8}$ cm (mřížková konstanta), zpětně vyjádříme objem 1 atomu:

$$V_d = \frac{a^3}{8}=\frac{(3.57*10^{-8})^3}{8} = \mathbf{5.68741 * 10^{-24}\ cm^3}$$

<u>*Objem 1 atomu grafitu:*</u> Z příkladu 2 víme, že na 1 μm^2 je $3.817696 * 10^7$ atomů, vrstvy grafenu jsou od sebe vzdáleny 0.335 nm $= 3.35 * 10^{-4}$ µm, do 1 µm se jich tedy vejde $\dfrac{1}{3.35*10^{-4}}$.

Počet atomů v 1 $\mu m^3 = 10^{-12}$ cm^3 je tedy $3.817696*10^7*\dfrac{1}{3.35*10^{-4}} = 1.1396107 * 10^{11}$.

Objem 1 atomu poté bude: $V_g = \dfrac{10^{-12}}{1.1396107*10^{11}} = \mathbf{8.77493 * 10^{-24}\ cm^3}$

Úloha 4: Spočítejte objem na jednu molekulu plynu s tlakem 1 bar, 10^{-12} a 10^{-19} bar při teplotách 0 a 100 °C.

Počet částic: N = 1
Tlak 1: $p_1 = 1$ bar $= 10^5$ Pa
Tlak 2: $p_2 = 10^{-12}$ bar $= 10^{-7}$ Pa
Tlak 3: $p_3 = 10^{-19}$ bar $= 10^{-14}$ Pa
Teplota 1: $T_1 = 0$ °C = 273.15 K
Teplota 2: $T_2 = 100$ °C = 373.15 K
Boltzmannova konstanta: $k = 1.3806 * 10^{-23}$ J/K
Stavová rovnice idealního plynu: p*V = N*k*T =>

=> *Objem:* $V = \frac{N*k*T}{p} = \frac{(1*1.3806*10^{-23}*T)}{p}$

Objem:	$p_1 = 10^5$ Pa	$p_2 = 10^{-7}$ Pa	$p_3 = 10^{-14}$ Pa
$T_1 = 273.15$ K	**$3.77111 * 10^{-26}$ m^3**	**$3.77111 * 10^{-14}$ m^3**	**$3.77111 * 10^{-7}$ m^3**
$T_2 = 373.15$ K	**$5.15171 * 10^{-26}$ m^3**	**$5.15171 * 10^{-14}$ m^3**	**$5.15171 * 10^{-7}$ m^3**

Úloha 5: Spočtěte objem plynu za normálních podmínek, ve kterém nastávají relativní fluktuace hmoty velikosti 0,1 a 0,0001.

Normální podmínky: *Teplota:* T = 273.15 K
Tlak: p = 1.01325 * 10^5 P
Boltzmannova konstanta: k = 1.3806 * 10^{-23} J/K
Stavová rovnice idealního plynu: p*V = N*k*T =>

=> *Objem:* $V = \frac{N*k*T}{p} = \frac{N*1.3806*10^{-23}*273.15}{1.01325*10^5}$

Fluktuace (f) je nepřímo úměrná druhé odmocnině počtu molekul: $f = \frac{1}{\sqrt{N}}$ => $N = \frac{1}{f^2}$

Při fluktuacích 0.1 bude $N = \frac{1}{0.1^2} = 100$:

$$=> \quad V = \frac{100*1.3806*10^{-23}*273.15}{1.01325*10^5} = \mathbf{3.7218 * 10^{-24}\ m^3}$$

Při fluktuacích 0.0001 bude $N = \frac{1}{0.0001^2} = 10^8$:

$$=> \quad V = \frac{10^8*1.3806*10^{-23}*273.15}{1.01325*10^5} = \mathbf{3.7218 * 10^{-18}\ m^3}$$

Úloha 6: Jaká je vnitřní energie 1 m^3 idéalního jednoatomového plynu při tlaku 10^{-10} a 1000 bar?

Objem: $V = 1\ m^3$
Tlak 1: $p_1 = 10^{-10}$ bar $= 10^{-5}$ Pa
Tlak 2: $p_2 = 1000$ bar $= 10^8$ Pa
Stavová rovnice idealního plynu: $p*V = N*k*T$ =>
=> *Počet částic:* $N = \frac{p*V}{k*T}$
Vnitřní energie ideálního plynu: $U = \frac{3}{2}*N*k*T=\frac{3}{2}*\frac{p*V}{k*T}*k*T=\frac{3}{2}*p*V=\frac{3}{2}*1*p=\frac{3}{2}p$

Pro tlak 1: U = **$1.5 * 10^{-5}$ J**
Pro tlak 2: U = **$1.5 * 10^{8}$ J**

Úloha 7: Jaká je energie tepelného záření v objemu 1 m^3 při teplotách -270, 0, 6000°C?

Objem: $V = 1\ m^3$
Pi: $\pi = 3.1416$
Boltzmannova konstanta: $k = 1.3806 * 10^{-23}$ J/K
Redukovaná Planckova konstanta: $\hbar = 1.0546 * 10^{-34}$ J*s
Rychlost světla: $c = 299792458$ m/s
Energie (podle vzorce pro celkovou hustotu energie):

$$U = \frac{\pi^2 * k^4}{15 * \hbar^3 * c^3} * V * T^4 = \frac{3.1416^2 * (1.3806 * 10^{-23})^4}{15 * (1.0546 * 10^{-34})^3 * 299792458^3} * 1 * T^4 =$$

$$= 7.5641 * 10^{-16} * T^4 \text{ J}$$

Při teplotě: $T_1 = -270°\ C = 3.15\ K \Rightarrow U = 7.5641*10^{-16} * 3.15^4 =$ **$7.4473 * 10^{-14}$ J**
$T_2 = 0°\ C = 273.15\ K \Rightarrow U = 7.5641*10^{-16} * 273.15^4 =$ **$4.2108 * 10^{-6}$ J**
$T_3 = 6000°\ C = 6273.15\ K \Rightarrow U = 7.5641*10^{-16} * 6273.15^4 =$ **1.1714 J**

Úloha 8: Jaký celkový výkon vyzařuje absolutně černé těleso (emisivita 1) z plochy 1 dm^2 při teplotě 37° C?

Plocha: $S = 1\ dm^2 = 0.01\ m^2$
Teplota: $T = 37\ °C = 310{,}15\ K$
Emisivita: $\varepsilon = 1$
Stefan-Boltzmannova konstanta: $\sigma = 5.6704 * 10^{-8}\ \frac{W}{m^2 * K^4}$

Celkový výkon (podle Stefan-Boltzmannova zákona): $P = \varepsilon * \sigma * S * T^4$
$= 1 * 5.6704 * 10^{-8} * 0.01 * 310.15^4$
$=$ **5.2469 W**

Úloha 9: Jakou energii má dopadající a rozptýlený foton v Comptonově experimentu při λ_i = 0.1 nm a úhlu rozptylu 90°?

Počáteční vlnová délka: $\lambda_i = 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$
Úhel rozptylu: $\theta = 90°$
Planckova konstanta: $h = 6.626069 * 10^{-34}$ J*s
Rychlost světla: $c = 299792458$ m/s
Comptonova vlnová délka (elektron): $\lambda_c = \frac{h}{m_e * c} = 2.426310 * 10^{-12}$ m

Comptonova rovnice: $\lambda - \lambda_i = \frac{h}{m_e * c} * (1 - \cos\theta)$ =>

=> *Vlnová délka:* $\lambda = \frac{h}{m_e * c} * (1 - \cos\theta) + \lambda_i = 2.426310 * 10^{-12} * (1 - \cos 90°) + 10^{-10} =$
$= 1.0242631 * 10^{-10}$ m

Energie dopadajícího fotonu: $E_d = \frac{h * c}{\lambda_i} = \frac{6.626069 * 10^{-34} * 299792458}{10^{-10}}$ = **$1.98645 * 10^{-15}$ J**

Energie rozptýleného fotonu: $E_d = \frac{h * c}{\lambda} = \frac{6.626069 * 10^{-34} * 299792458}{1.0242631 * 10^{-10}}$ = **$1.93939 * 10^{-15}$ J**

Úloha 10: Jaká je de Broglieho vlnová délka elektronu a neutronu s rychlostmi 10^3 a 10^6 m/s?

<u>Planckova konstanta:</u> $h = 6.62606896 * 10^{-34}$ J*s
<u>Rychlost světla:</u> $c = 299792458$ m/s

<u>Relativistická hybnost:</u> $p = \frac{m_o * v}{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}}$

<u>De Broglieho vlnová délka:</u>

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\frac{m_o * v}{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}}} = \frac{h}{m_o * v} * \sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})} = \frac{6.62606896 * 10^{-34}}{m_o * v} * \sqrt{(1-\frac{v^2}{299792458^2})}$$

<u>Klidová hmotnost elektronu:</u> $m_e = 9.10938291 * 10^{-31}$ kg
<u>Klidová hmotnost neutronu:</u> $m_n = 1.674927351 * 10^{-27}$ kg
<u>Rychlost 1:</u> $v_1 = 10^3$ m/s
<u>Rychlost 2:</u> $v_2 = 10^6$ m/s

<u>De Broglieho vlnová délka:</u>	$m_e = 9.10938291 * 10^{-31}$ kg	$m_n = 1.674927351 * 10^{-27}$ kg
$v_1 = 10^3$ m/s	**$7.27389 * 10^{-7}$ m**	**$3.95603 * 10^{-10}$ m**
$v_2 = 10^6$ m/s	**$7.27385 * 10^{-10}$ m**	**$3.95601 * 10^{-13}$ m**

Úloha 11: Jaká je neurčitost hybnosti a rychlosti elektronu v jednorozměrném pohybu s prostorovou lokalizací do oblasti velikosti 1 nm?

Klidová hmotnost elektronu: $m_e = 9.10938291 * 10^{-31}$ kg
Odchylka pozice: $\Delta x = 1$ nm $= 10^{-9}$ m
Rychlost světla: c = 299792458 m/s
Redukovaná Planckova konstanta: $\hbar = 1.0545716 * 10^{-34}$ J*s

Relace odchylky pozice a hybnosti: $\Delta x \Delta o \geq \frac{\hbar}{2}$

=> *Odchylka hybnosti:* $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2 * \Delta x} = \frac{1.0545716 * 10^{-34}}{2 * 10^{-9}}$ = **$5.272858 * 10^{-26}$ (kg*m)/s**

Neurčitost rychlosti:

$$\frac{c^2 * p}{\sqrt{(p*c)^2 + (m_e * c^2)^2}} = \frac{299792458^2 * 5.272858 * 10^{-26}}{\sqrt{(5.272858 * 10^{-26} * 299792458)^2 + (9.10938291 * 10^{-31} * 299792458^2)^2}} =$$

= **57883.81 m/s**