ALGEBRA II

1995/6 - 1. termín

A) Reprezentace konečných distributivních svazů.

B) **Rektangulární band** je pologrupa splňující $x^2 = x,\ xyz = xz$. Dokažte, že $F = M \times M$ s operací $(a,b) \circ (c,d) = (a,d)$ je volným rektangulárním bandem nad množinou M vzhledem k vhodnému ι (najděte je).

C) Nechť $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, 1)$ je okruh.
a) Dokažte, že množina $\mathcal{J}$ všech jeho ideálů s relací $\subseteq$ je úplný svaz.
b) Pro $I, J \in \mathcal{J}$ určete $I \wedge J,\ I \vee J$.
c) Dokažte, že pro $I, J \in \mathcal{J}$ je též
$I \circ J = \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in I,\ b_i \in J\} \in \mathcal{J}$.
d) Dokažte, že v $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 1)$ jsou ideály právě tvaru $n\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0$.
e) V okruhu z d) popište operace $\wedge,\ \vee,\ \circ$.
f) V obecném případě uveďte všechny inkluze mezi $I,\ J,\ I \wedge J,\ I \vee J,\ I \circ J$.
g) Dokažte, že $I \circ (J \vee K) = I \circ J \vee I \circ K$.
h) Dokažte, že $I \wedge (J \vee K) \supseteq (I \wedge J) \vee (I \wedge K)$.
i) Nechť $R = \mathbb{R}[x,y],\ I = (x+y),\ J = (x),\ K = (y)$; jak vypadají levá, pravá strana v h) ?
Každá z položek a) - i) maximálně za 3 body, max. počet bodů za úlohu C) je 20 bodů (ne 27) !

1995/6 - 2. termín

A) Zachování platnosti identit pro homomorfní obrazy grupoidů.

B) Popište všechny a) kongruence, b) endomorfismy, c) automorfismy,
d) podalgebry 1-unární algebry, která je cyklem délky 6 s ocáskem délky 1.

C) Nechť $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ je těleso.
a) Nechť I ideál v $(R[x], +, \cdot)$. Dokažte, že I je hlavní (pro $I \neq \{0\}$ uvažujte nenulový polynom nejmenšího stupně v I).
b) Doplňte a dokažte $(f) = \{... \mid ...\},\ f \in R[x]$.
c) V okruhu $(R[x,y], +, \cdot)$ najděte ideál, který není hlavní.
d) Dokažte, že platí $(R[x,y], +, \cdot)\ /\ (x) \cong (R[x], +, \cdot)$.

1995/6 - 3. termín

A) Reprezentace konečných booleových svazů.

B) Dokažte, že okruh $\mathbb{Z}[x,y]$ je volným komutativním okruhem nad množinou $M =$ vzhledem ke vhodnému ι (určete je). (Okruhy uvažujeme s operacemi $+, -, 0, \cdot, 1$.)

C) Pologrupa $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, \cdot)$ se nazývá **pologrupou levých nul**, splňuje-li $xy = x$, **p** **grupou pravých nul** splňuje-li $xy = y$, **rektangulárním bandem** splňuje-li

$$xx = x,\ xyx = x\ .$$

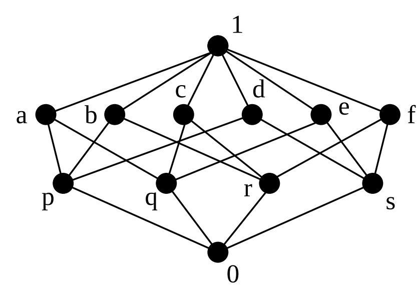
Ukažte, že
1. Rektangulární bandy lze místo identity $xyx = x$ zadat identitou $xyz = xz$.
2. Součin pologrupy $(R, \cdot)$ pravých nul a pologrupy $(L, \cdot)$ levých nul je rektangulární b
3. Vztah $a\ \rho\ b \ \Leftrightarrow\ a \cdot b = a$ definuje na rektangulárním bandu $(S, \cdot)$ kongruenci; fakt struktura je pologrupa ... nul.
4. Duálně definujeme λ $(a\ \lambda\ b \ \Leftrightarrow\ a \cdot b = b)$. Ukažte, že $\alpha : S \longrightarrow S/\rho \times S/\lambda,\ a \mapsto ([a]_\rho$ je izomorfismus pologrupy $(S, \cdot)$ na součin $(S, \cdot)/\rho$ a $(S, \cdot)/\lambda$.

1996/7 - 1. termín

A. Faktorové okruhy. (Definujte okruh $\mathcal{R} = (R, ...)$, jeho ideál I, množinu R/I, op na ní, dokažte korektnost, co je to za strukturu ?, přirozený homomorfismus na fakt okruh. O faktorových grupách nevíme nic.)

B. Uvažujme jazyk binárního $\cdot$, nulárního 1 a unárního operačního symbolu $^{-1}$. $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že množina $F = \mathbb{Z}^n$ je vzhledem k operaci $(p_1, \ldots, p_n) \circ (q_1, \ldots,$ $(p_1 + q_1, \ldots, p_n + q_n)$ volnou komutativní grupou nad množinou $\{a_1, \ldots, a_n\}$ vzhled vhodnému ι (najděte je).

C. a) Dokažte, že v modulárním svazu $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je pro libovolná nesrovna $a, b \in L$ zobrazení $\varphi : x \mapsto x \wedge a$ izomorfismem intervalu $[\ b, a \vee b\ ]$ na interval $[\ a \wedge b,$
b) Dokažte, že modulární svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ splňuje
(P) $(\ \forall\ a, b, c \in L)$ $(a \neq b,\ a, b$ pokrývají $c \Longrightarrow a \vee b$ pokrývá a i $b)$
i podmínku duální (D) (formulujte ji).
c) Je svaz



modulární ? Splňuje (P) ? Splňuje (D) ?
Nechť $\mathcal{P}$ značí třídu všech svazů splňujících podmínku (P).
d) Je každý interval svazu z $\mathcal{P}$ opět v $\mathcal{P}$?
e) Je každý podsvaz svazu z $\mathcal{P}$ opět v $\mathcal{P}$?

1996/7 - 2. termín

A. Minimální polynom. (Víme co je to těleso a polynom nad okruhem. Definujte ireducibilní polynom, rozšíření tělesa, algebraický prvek, minimální polynom. Dokažte jeho existenci a jednoznačnost.) Určete minimální polynom prvku $\sqrt[6]{2}+1$ nad tělesem $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. (Nedokazujte, že $\sqrt[6]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.)

B. Rektangulární band je pologrupa splňující $x^2 = x,\ xyz = xz$. Dokažte, že $F = M \times M$ s operací $(a,b)\circ(c,d) = (a,d)$ je volným rektangulárním bandem nad množinou M vzhledem k vhodnému ι (najděte je).

C. a) ρ je kongruencí svazu $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$, platí-li …
b) Nechť svaz má alespoň 3 prvky. Ukažte, že v něm existují prvky p, q, r tak, že $p < q < r$.
c) V distributivním svazu $\mathcal{L}$ pro pevné $a \in L$ klademe
$x \,\rho\, y \iff x \wedge a = y \wedge a\ ,\ x \,\tau\, y \iff x \vee a = y \vee a\ ,\ x, y \in L.$
Ukažte, že to jsou kongruence.
d) Ukažte, že platí $\rho \cap \tau = \Delta\ (= \{(x,x) \mid x \in L\})$ a za předpokladu z b) pro $a = q$ je $\rho, \tau \neq \Delta$.
e) Jak vypadají relace ρ, τ na součinu řetězců $u < v < w$ a $1 < 2 < 3 < 4$ pro $a = (v, 3)$?
f) Dokažte, že zobrazení $\alpha : x \mapsto ([x]_\rho, [x]_\tau)$ je prostý homomorfismus $\mathcal{L}$ do $\mathcal{L}/\rho \times \mathcal{L}/\tau$.

1996/7 - 3. termín

A. Reprezentace konečných distributivních svazů. (Víme co je to distributivní svaz, nic více. Definujte potřebné pojmy včetně okruhu množin, formulujte hlavní větu/věty a dokažte ji/je.)

B. K danému polynomu $f = x^4 + tx^3 + ux^2 + vx + w \in \mathbb{C}[x]$ najděte polynom, jehož kořeny jsou druhé mocniny kořenů polynomu f.

C. a) Dokažte, že množina $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ všech ideálů okruhu $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ je vzhledem k množinové inkluzi úplný svaz.
b) Dokažte, že pro netriviální komutativní okruh $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ platí:
$\mathcal{R}$ je těleso $\iff \{0\}$ a R jsou jedinými ideály tohoto okruhu.
c) Za předpokladů z b) a pro $J \in \mathcal{J}(\mathcal{R})$ platí:
$\mathcal{R}/J$ je těleso $\iff R$ pokrývá J (ve svazu z a)). (Využijte lemma o kongruencích faktorové algebry.)
d) Nechť $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ je okruh, nechť $(J_i)_{i\in I}$ je neprázdný řetězec jeho ideálů. Ukažte, že $\bigcup_{i\in I} J_i$ je opět ideál.
e) V $\mathcal{R} = (\mathbb{Z}, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}, +, \cdot) \times \ldots$ najděte posloupnost ideálů

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots,\ J_1 \neq J_2 \neq \ldots$$

f) Ukažte, že v okruhu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ taková posloupnost neexistuje.

1996/7 - náhradní termín

A. Nechť svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ splňuje identitu $\sigma = \tau$ (definujte to), nechť ρ je kongr
svazu $\mathcal{L}$ (definujte to). Ukažte, že $\mathcal{L}/\rho$ též splňuje $\sigma = \tau$.

B. Uvažujme unární algebru $\mathcal{A} = (A, f)$, kde $A = \{1, 2, ..., 7\}$ a $f(1) = 2,\ f($
$3,\ f(3) = 4,\ f(4) = 5,\ f(5) = 2,\ f(6) = 7,\ f(7) = 6.$
Najděte všechny její
a) endomorfismy,
b) izomorfismy,
c) podalgebry,
d) kongruence splňující $5\rho6$.

C. 1996/7, 3. termín, úloha C.

1997/8 - 1. termín

A. **Minimální polynom**
Víme co je to těleso a polynom nad okruhem. Definujte ireducibilní polynom, roz
tělesa, algebraický prvek, minimální polynom. Dokažte jeho existenci a jednoznačnost. U
minimální polynom prvku $\sqrt[6]{2} - 1$ nad tělesem $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. (Platí, že $\sqrt[6]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ – nedoka
to.)

B. Uvažujeme jazyk jediného, a to unárního, operačního symbolu f a v něm konk
algebru $\mathcal{A} = (A, g)$, kde $A = \{a, b, c, d, 1, 2\}$ a $g(a) = b,\ g(b) = g(d) = c,\ g(c) = d,\ g$
$2,\ g(2) = 1.$
Popište všechny její
a) kongruence ρ takové, že $\mathcal{A}/\rho$ má jediný cyklus,
b) množiny generátorů minimální mohutnosti,
c) endomorfismy (nějakou kompaktní formou – kolik je jich ?),
d) automorfismy,
e) podalgebry.
f) Pro která $k, l \in \mathbb{N}_0$ tato algebra splňuje identitu $f^k(x) = f^l(x)$?

C. Pologrupa $\mathcal{S} = (S, \cdot)$ se nazývá **pologrupou levých nul**, splňuje-li $xy = x$, **p**
grupou pravých nul splňuje-li $xy = y$, **rektangulárním bandem** splňuje-li

$$xx = x,\ xyz = xz\ .$$

Ukažte, že
a) Součin pologrupy $(R, \cdot)$ pravých nul a pologrupy $(L, \cdot)$ levých nul je rektangulární b
b) Vztah $a \,\rho\, b \Leftrightarrow a \cdot b = a$ definuje na rektangulárním bandu $(S, \cdot)$ kongruenci; fakt
struktura je pologrupa … nul.
c) Duálně definujeme λ ($a \,\lambda\, b \Leftrightarrow a \cdot b = b$). Ukažte, že

$$\alpha : S \longrightarrow S/\rho \times S/\lambda,\ a \mapsto ([a]_\rho, [a]_\lambda)$$

je izomorfismus pologrupy $(S, \cdot)$ na součin $(S, \cdot)/\rho$ a $(S, \cdot)/\lambda$.

1997/8 - 2. termín

A. Uvažujeme jazyk ternárního (= 3-árního) operačního symbolu f.

Definujte: a) termy, b) realizaci termu na algebře $\mathcal{A} = (A, g)$, c) identitu a kdy ji algebra $\mathcal{A}$ splňuje, d) homomorfismus, kongruenci a faktoralgebru.

e) Nechť $\mathcal{A}$ splňuje identitu $p = q$. Ukažte, že tato identita je splněna i v libovolné faktoralgebře algebry $\mathcal{A}$.

f) Pro stromy (= souvislé neorientované grafy bez kružnic) definujte nějakou přirozenou (= je to definováno univerzálně pro všechny stromy a závisí to na všech 3 svých argumentech) ternární operaci na množinách jejích vrcholů.

Body: 2,2,2,3,8,3.

B. Uvažujeme jazyk dvou unárních operačních symbolů $f,\ g$ a v něm konkrétní algebru $\mathcal{A} = (A, p, q)$, kde $A = \{\ 1, 2, ..., 7\ \}$ a $p(1) = q(1) = 2,\ p(2) = q(2) = 3,\ p(3) = 4,\ q(3) = 6,\ p(4) = 5,\ q(4) = 3,\ p(5) = 6,\ q(5) = 4,\ p(6) = 3,\ q(6) = 5,\ p(7) = q(7) = 4$.
a) Popište všechny její kongruence ρ, pro něž neplatí $3\rho 4$,
b) je naše algebra podpřímo nerozložitelná ? – zdůvodněte,
c) popište $\mathcal{A}/\rho$ pro některý atom ρ ve svazu všech kongruencí algebry $\mathcal{A}$,
d) popište všechny její endomorfismy (s komentářem),
e) popište všechny její 6-ti prvkové podalgebry.
f) Pro která $n \in \mathbb{N}_0$ tato algebra splňuje identitu $f^n(x) = g^n(x)$?
g) Pro které unární termy t je $t^{\mathcal{A},1}(1) = 6$?
h) (zejména pro informatiky) Formulujte otázku g) v termínech konečných automatů.

Body: 3,2,2,4,3,3,3,3 (maximálně 20).

C. a) Dokažte, že každý komplementární modulární svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je relativně komplementární (= libovolný jeho interval $[\ a, b\ ] = \{\ c \in L \mid a \leq c \leq b\ \},\ a, b \in L,\ a \leq b$ je komplementární).

Návod: dokažte nejprve, že intervaly tvaru $[0, p]$ jsou komplementární.

b) Dejte příklad svazu, který je komplementární, ale není relativně komplementární.

c) Dokažte, že v omezeném distributivním svazu je množina všech jeho prvků majících komplement podsvazem.

d) Dejte příklad 8-mi prvkového omezeného distributivního svazu, v němž právě 4 prvky mají komplement.

Body: 7,3,7,3.

1997/8 - 3. termín

A. a) Definujte distributivní svaz.

b) Definujte spojově ireducibilní prvky daného svazu. Jaké zde uvažujeme uspořádání ?

c) Definujte dědičné množiny dané uspořádané množiny. Jaké zde uvažujeme uspořádání ?

d) Doplňte a dokažte:
Pro libovolný … svaz $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{L} \cong$ ....

e) Ukažte, že libovolný … svaz je izomorfní s podsvazem součinu vhodného počtu exemplářů svazu $(\{0, 1\}, \leq)$.

f) Demonstrujte větu z d) na svazu $(\{0, 1\}, \leq)^3$.

Body: 1,2,2,9,3,3.

B. Uvažujeme jazyk binárního operačního symbolu $\cdot$ a v něm konkrétní algebru $\mathcal{A} =$
kde $A = \{0, 1, 2, a, b\}$ a operace $\cdot$ je dána tabulkou

	0	1	2	a	b
0	0	1	2	0	0
1	1	2	0	1	1
2	2	0	1	2	2
a	0	1	2	a	0
b	0	1	2	0	b

a) Najděte všechny atomy ve svazu všech kongruencí algebry $\mathcal{A}$.
b) Rozložte algebru $\mathcal{A}$ na podpřímý součin dvou algeber s menším počtem prvků než n
c) Naše operace je asociativní – nedokazujte to. Najděte všechny podgrupy algebry $\mathcal{A}$
d) Najděte všechny její podalgebry, které nejsou podgrupami.
e) Najděte všechny její endomorfismy α splňující $\alpha(1) = 2,\ \alpha(a) = b$.
f) Najděte všechny její automorfismy.
g) Pro která $n, d \in \mathbb{N}$ naše algebra splňuje identitu $x^{n+d} = x^n$? Je mezi těmito ident
taková, že všechny ostatní jsou její důsledky ?

Body: 3,2,3,3,3,3,3.

B'. Uvažujeme jazyk dvou unárních operačních symbolů $f,\ g$ a v něm konkrétní al
$\mathcal{A} = (A, p, q)$, kde $A = \{\ 1, 2, ..., 7\ \}$ a $p(1) = q(1) = 2,\ p(2) = q(2) = 3,\ p(3) = q$
$4,\ p(4) = 5,\ q(4) = 3,\ p(5) = q(5) = 6,\ p(6) = 3,\ q(6) = 5,\ p(7) = q(7) = 5$.

a) Popište všechny atomy ve svazu všech kongruencí algebry $\mathcal{A}$.

b) Rozložte algebru $\mathcal{A}$ na podpřímý součin dvou algeber s menším počtem prvk
má $\mathcal{A}$.

c) Popište všechny její endomorfismy (s komentářem).

d) Popište všechny její 6-ti prvkové podalgebry.

e) Pro která $n \in \mathbb{N}_0$ tato algebra splňuje identitu $f^n(x) = g^n(x)$?

f) Pro které unární termy t je $t^{\mathcal{A},1}(1) = 6$?

Body: 4,3,4,3,3,3.

C. Nechť $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ je netriviální komutativní okruh.

a) Nechť I je ideál okruhu $\mathcal{R}$. Jaký je vztah mezi ideály okruhu $\mathcal{R}/I$ a ideály okruhu
Formulujte to a dokažte.

b) Ideál I je maximální, platí-li $I \neq R$ a pro libovolný ideál J platí: $I \subseteq J \subseteq R$ imp
$J = I$ nebo $J = R$. Dokažte: ideál I je maximální $\Longleftrightarrow \mathcal{R}/I$ je těleso.

c) Popište všechny ideály okruhu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Které z nich jsou maximální ?

d) Ukažte, že množina všech ideálů okruhu $\mathcal{R}$ je vzhledem k inkluzi úplným svazem
vypadá $I \wedge J,\ I \vee J$?

Body: 5,5,5,5.