2. vnitrosemestrální písemná práce JS 2018, MB102, sk. A

Jméno a příjmení	
UČO	
Počet listů přílohy	

Příklad	1	2	3	4	5	Σ
Body						

▶ `Příklad 1 [2 b.]:` Trosečníka na voru unáší mořský proud rychlostí 10 km/h a kolmo na směr proudu pluje obchodní loď rychlostí 30 km/h (rychlosti jsou uvedeny vzhledem k povrchu Země). V jeden okamžik je loď vzdálena od místa, kde se protnou jejich trajektorie, 95 km a trosečník 15 km. V jaké nejmenší vzdálenosti se minou? Předpokládejte, že z lodi jsou objekty velikosti voru s trosečníkem viditelné do vzdálenosti 20 km a hlídka na lodi ho do této vzdálenosti nepřehlédne. Bude trosečník zachráněn?
(Vyřešte pomocí diferenciálního počtu. Nezapomeňte vhodně zdůvodnit, že nalezená hodnota skutečně odpovídá minimu.)

▶ `Příklad 2 [2 b.]:` Určete Maclaurinův polynom (tj. Taylorův polynom se středem v $x_0 = 0$) 3. řádu funkce $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$. Poté pomocí něj odhadněte hodnotu $f(-0{,}1)$ a určete, s jakou přesností je odhad proveden.
(Polynom není nutné roznásobovat. Výslednou hodnotu i odhad chyby zapište jako jednoduché zlomky.)

▶ `Příklad 3 [2 b.]:` Vypočítejte neurčité integrály

$$(a) \int (7-3x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x, \qquad (b) \int \frac{5x+2}{x^2-3x+4}\,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 4 [2 b.]:` Např. pomocí substituce $t^2 = x^2 - 4$ vypočítejte integrál

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

▶ `Příklad 5 [2 b.]:` Jsou dány funkce

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = |\sin(2x)|, \qquad x \in [0, \pi].$$

Načrtněte obrázek. Vypočítejte obsah plochy mezi grafy funkcí f a g na daném intervalu. Počítaný objekt vyznačte na obrázku.

▷ Do první tabulky vyplňte čitelně identifikační údaje a počet listů, které k zadání přikládáte.
▷ Druhou tabulku ponechejte prázdnou.
▷ U výpočtů příkladů řádně označujte, ke kterému příkladu (a jeho části) patří.
▷ Každý výsledek musí být podpořen výpočtem (zdůvodněním), jakkoli je triviální.
▷ Všechny papíry s výpočty podepište a odevzdejte společně se zadáním.
▷ Není povoleno použití kalkulačky ani žádných materiálů (tabulky, vzorce, skripta, poznámky,. . .). Jakýkoli pokus o podvádění bude mít za následek hodnocení 0 bez možnosti opravy.

2. vnitrosemestrální písemná práce JS 2018, MB102, sk. B

Jméno a příjmení	
UČO	
Počet listů přílohy	

Příklad	1	2	3	4	5	Σ
Body						

▶ `Příklad 1 [2 b.]`: Na přímé silnici odstartuje v čase $t = 0$ h ze stejného bodu chodec a cyklista. Oba se budou pohybovat od startu týmž směrem, chodec rychlostí 6 km/h a cyklista rychlostí 24 km/h. Na kolmici k silnici vedené startem stojí ve vzdálenosti 300 m od startu pozorovatel a měří zorný úhel, pod kterým vidí pomyslnou úsečku spojující chodce a cyklistu. Určete, za kolik sekund od startu bude zorný úhel maximální.
(Vyřešte pomocí diferenciálního počtu. Nezapomeňte vhodně zdůvodnit, že nalezená hodnota skutečně odpovídá maximu.)

▶ `Příklad 2 [2 b.]`: Určete Taylorův polynom 2. řádu se středem v $x_0 = 1$ funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Poté pomocí něj odhadněte hodnotu $f(1{,}1)$ a určete, s jakou přesností je odhad proveden.
(Polynom není nutné roznásobovat. Výslednou hodnotu i odhad chyby zapište jako jednoduché zlomky.)

▶ `Příklad 3 [2 b.]`: Najděte neurčité integrály

$$(a) \int (2-5x)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x, \qquad (b) \int \frac{1-x}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 4 [2 b.]`: Např. pomocí substituce $t = x^3 + 3$ vypočítejte integrál

$$\int_{-\infty}^{0} 2x^2\,\mathrm{e}^{x^3+3}\,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 5 [2 b.]`: Jsou dány funkce

$$f(x) = \arcsin x, \qquad g(x) = x^2.$$

Určete objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce g kolem osy x na intervalu $[0, A]$, kde $A > 0$. Dále uvažujte těleso vzniklé rotací grafu funkce f kolem osy y pro $x \in [0, 1]$ a zapište pomocí integrálu plochu jeho pláště (plochu zapište tak, aby neobsahovala derivaci, jinak integrál nepočítejte; vhodnou úpravou funkce lze k vyřešení problému použít vzorec pro objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x). Počítané objekty nakreslete a na obrázku vyznačte.

▷ Do první tabulky vyplňte čitelně identifikační údaje a počet listů, které k zadání přikládáte.
▷ Druhou tabulku ponechejte prázdnou.
▷ U výpočtů příkladů řádně označujte, ke kterému příkladu (a jeho části) patří.
▷ Každý výsledek musí být podpořen výpočtem (zdůvodněním), jakkoli je triviální.
▷ Všechny papíry s výpočty podepište a odevzdejte společně se zadáním.
▷ Není povoleno použití kalkulačky ani žádných materiálů (tabulky, vzorce, skripta, poznámky,. . .). Jakýkoli pokus o podvádění bude mít za následek hodnocení 0 bez možnosti opravy.

2. vnitrosemestrální písemná práce JS 2018, MB102, sk. C

Jméno a příjmení	
UČO	
Počet listů přílohy	

Příklad	1	2	3	4	5	Σ
Body						

▶ `Příklad 1 [2 b.]:` Výkon P elektrického spotřebiče zapojeného do stejnosměrného obvodu je dán vztahem $P = I^2R$, kde I je proud v obvodu a R odpor spotřebiče. Pokud nezanedbáváme vnitřní odpor zdroje, platí pro velikost proudu vztah $I(R+\tilde{R}) = \tilde{U}$, kde $\tilde{R}$ je daný vnitřní odpor zdroje a $\tilde{U} > 0$ jeho elektromotorické napětí. Určete, jaký musí být vztah mezi $R > 0$ a $\tilde{R} > 0$, aby byl výkon spotřebiče maximální.
(Vyřešte pomocí diferenciálního počtu. Nezapomeňte vhodně zdůvodnit, že nalezená hodnota skutečně odpovídá maximu.)

▶ `Příklad 2 [2 b.]:` Určete Taylorův polynom 3. řádu se středem v $x_0 = 1/3$ funkce $f(x) = x^2 \ln(3x)$. Poté pomocí něj odhadněte hodnotu $f(13/30)$ a určete, s jakou přesností je odhad proveden.
(Polynom není nutné roznásobovat. Výslednou hodnotu i odhad chyby zapište jako jednoduché zlomky.)

▶ `Příklad 3 [2 b.]:` Najděte neurčité integrály

$$(a) \int (3x+2)\ln(5x)\,\mathrm{d}x, \qquad (b) \int \frac{1-5x}{x^2-5x+7}\,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 4 [2 b.]:` Např. pomocí substituce $t^2 = x$ vypočítejte integrál

$$\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x}}.$$

▶ `Příklad 5 [2 b.]:` Jsou dány funkce

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = 3\sin x, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Načrtněte obrázek. Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafy funkcí f a g na daném intervalu kolem osy x. Dále zapište pomocí integrálu délku grafu funkce f na daném intervalu (délku jen zapište tak, aby neobsahovala derivaci, jinak integrál nepočítejte). Počítané objekty na obrázku vyznačte.

▷ Do první tabulky vyplňte čitelně identifikační údaje a počet listů, které k zadání přikládáte.
▷ Druhou tabulku ponechejte prázdnou.
▷ U výpočtů příkladů řádně označujte, ke kterému příkladu (a jeho části) patří.
▷ Každý výsledek musí být podpořen výpočtem (zdůvodněním), jakkoli je triviální.
▷ Všechny papíry s výpočty podepište a odevzdejte společně se zadáním.
▷ Není povoleno použití kalkulačky ani žádných materiálů (tabulky, vzorce, skripta, poznámky,. . .). Jakýkoli pokus o podvádění bude mít za následek hodnocení 0 bez možnosti opravy.

2. vnitrosemestrální písemná práce JS 2018, MB102, sk. D

Jméno a příjmení	
UČO	
Počet listů přílohy	

Příklad	1	2	3	4	5	Σ
Body						

▶ Příklad 1 [2 b.]: Drát délky L rozdělíte na dvě části o délkách L_1, L_2. Z první části vytvarujete kružnici, z druhé obvod čtverce. Rozhodněte v jakém poměru $(L_1 : L_2)$ je potřeba drát rozdělit, aby součet obsahů vzniklého kruhu a čtverce byl minimální.
(Vyřešte pomocí diferenciálního počtu. Nezapomeňte vhodně zdůvodnit, že nalezená hodnota skutečně odpovídá minimu.)

▶ Příklad 2 [2 b.]: Určete Taylorův polynom 3. řádu se středem v $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$. Poté pomocí něj odhadněte hodnotu $f(1{,}1)$ a určete, s jakou přesností je odhad proveden.
(Polynom není nutné roznásobovat. Výslednou hodnotu i odhad chyby zapište jako jednoduché zlomky.)

▶ Příklad 3 [2 b.]: Najděte neurčité integrály

$$(a) \int (2x+3)\sin(4x)\,\mathrm{d}x, \qquad (b) \int \frac{3x-1}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}x.$$

▶ Příklad 4 [2 b.]: Např. pomocí substituce $t = \operatorname{tg} x$ vypočítejte integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}.$$

▶ Příklad 5 [2 b.]: Jsou dány funkce

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \cos x, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Načrtněte obrázek. V rozsahu části daného intervalu se nachází množina ohraničená pouze grafy funkcí f a g. Vypočítejte plochu této množiny a zapište pomocí integrálu její obvod (obvod jen zapište tak, aby neobsahoval derivaci, jinak integrál nepočítejte). Počítané objekty na obrázku vyznačte.

▷ Do první tabulky vyplňte čitelně identifikační údaje a počet listů, které k zadání přikládáte.
▷ Druhou tabulku ponechejte prázdnou.
▷ U výpočtů příkladů řádně označujte, ke kterému příkladu (a jeho části) patří.
▷ Každý výsledek musí být podpořen výpočtem (zdůvodněním), jakkoli je triviální.
▷ Všechny papíry s výpočty podepište a odevzdejte společně se zadáním.
▷ Není povoleno použití kalkulačky ani žádných materiálů (tabulky, vzorce, skripta, poznámky,. . .). Jakýkoli pokus o podvádění bude mít za následek hodnocení 0 bez možnosti opravy.

Výsledky

1) A: $5\sqrt{10} \Rightarrow$ ano
   B: 90 s
   C: $R = \tilde{R}$
   D: poměr $\pi : 4$

2) A: $T(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3, \quad T\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{2\,443}{3\,000}$, chyba $\leq \frac{1}{48\,000}$
   B: $T(x) = x - 1 - \frac{3}{2}(x-1)^2, \quad T\left(\frac{11}{10}\right) = \frac{17}{200}$, chyba $\leq \frac{11}{6\,000}$
   C: $T(x) = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{3}\right)^3, \quad T\left(\frac{13}{30}\right) = \frac{37}{750}$, chyba $\leq \frac{3}{40\,000}$
   D: $T(x) = x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3, \quad T\left(\frac{11}{10}\right) = \frac{629}{6\,000}$, chyba $\leq \frac{1}{120\,000}$

3) A: $(a)\ \frac{7-3x}{4}\sin(4x) - \frac{3}{16}\cos(4x) + c, (b)\ \frac{5}{2}\ln(x^2 - 3x + 4) + \frac{19}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}} + c$
   B: $(a)\ \frac{e^{3x}}{3}\left(\frac{11}{3} - 5x\right) + c, (b)\ -\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 5) + \operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + c$
   C: $\left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\ln(5x) + \frac{3}{4}x^2 - 2x + c, (b)\ -\frac{5}{2}\ln(x^2 - 5x + 7) - \frac{23}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-5}{\sqrt{3}} + c$
   D: $(a)\ -\frac{2x+3}{4}\cos(4x) + \frac{1}{8}\sin(4x) + c, (b)\ \frac{3}{2}\ln(x^2 + 3x + 4) - \frac{11}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c$

4) A: $\frac{\pi}{4}$
   B: $\frac{2}{3}e^3$
   C: $\frac{\pi}{2}$
   D: ∞

5) A: $S = 1$
   B: $V = \frac{A^5\pi}{5}, \quad P = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$
   C: $V = 8\pi^2, \quad \ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$
   D: $S = 2\sqrt{2}, \quad \ell = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$