Definujte pojem *valuace* ve výrokové logice. Poté definujte rozšíření valuace na všechny výrokové formule systému $\mathcal{L}(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow)$. Dále definujte pojmy: *tautologie*, *kontradikce* a *splnitelná formule*.

Příklad 1
10 bodů

Formulujte větu o kompaktnosti pro predikátovou logiku.

Příklad 2
5 bodů

K následující formuli zadejte ekvivalentní formuli v (neplnohodnotném) logickém systému $\mathcal{L}(\vee, \rightarrow)$.

Příklad 3
5 bodů

$$\neg((\neg B \vee A) \wedge (\neg C \vee A) \wedge \neg D)$$

Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{+, *\}$ s rovností, kde $+$ a $*$ jsou binární funkční symboly. Mějme dále realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$, jejímž nosičem je množina $\mathbb{N}_0$ všech přirozených čísel s nulou, $+$ se realizuje jako standardní sčítání a $*$ se realizuje jako standardní násobení. Zadejte formuli φ jazyka $\mathcal{L}$ se třemi volnými proměnnými x, y a z takovou, že pro libovolné ohodnocení e platí:

Příklad 4
15 bodů

$$\mathcal{M} \models \varphi[e] \quad \Leftrightarrow e(z) \neq 0 \text{ a } e(x) \text{ je zbytek po dělení čísla } e(y) \text{ číslem } e(z) \; .$$

Neformálně popište význam formule.

Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{f, g\}$ s rovností, kde f a g jsou unární funkční symboly. Pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ uvažme následující formuli ψ_n:

Příklad 5
15 bodů

$$\psi_n \quad \equiv \quad \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} (f(x_i) \neq f(x_j)) \wedge (g(x_i) \neq g(x_j)) \wedge (f(x_i) \neq g(x_j)))).$$

Uvažme dále teorii $T = \{\forall x \exists y (f(x) = g(y))\} \cup \{\psi_n \mid n \geq 2\}$.
Nalezněte nějaký model teorie T. Své řešení stručně a neformálně zdůvodněte.

Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{f\}$ s rovností, kde f je unární funkční symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie T s jazykem $\mathcal{L}$ taková, že pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí

Příklad 6
15 bodů

$$\mathcal{M} \models T \quad \Leftrightarrow \quad f_{\mathcal{M}} \text{ má konečný obraz.}$$

Mějme libovolný soubor formulí výrokové logiky T a formuli φ takovou, že $T \models \varphi$. Rozhodněte a dokažte, zda existuje konečný podsoubor T' souboru T (tedy má platit $T' \subseteq T$) takový, že $T' \models \varphi$.

Příklad 7
8 bodů

Z přednášky víme, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

Příklad 8
7 bodů

- Každá bezesporná teorie má model.
- Nechť T je teorie a φ je formule nějakého jazyka predikátové logiky. Pokud $T \models \varphi$, pak $T \vdash \varphi$.

Vyberte si jednu ze dvou (meta)implikací, které tvoří tuto (meta)ekvivalenci, a dokažte ji.