Formálny jazyk

21. septembra 2013 21:15

Abeceda je ľubovoľná konečná množina.

Slovo nad abecedou Σ je ľubovoľná konečná postúpnosť znakov tejto abecedy.

Jazyk nad abecedou Σ je ľubovoľná množina slov nad Σ.

Slovo *u* je **podslovom** slova *v*, ak existujú slová *x, y* také, že *v = x.u.y*.

Gramatika *G* je štvorica (N, Σ, P, S), kde

- **N** je neprázdna konečná množina **neterminálnych symbolov (neterminálov)**.
- **Σ** je konečná množina **terminálnych symbolov (terminálov)** také, že $N \cap \Sigma = \emptyset$. Zjednotením *N* a *Σ* obdržíme množinu **všetkých symbolov** gramatiky, ktorú obvykle označujeme symbolom *V.*
- **P** $\subseteq V^*NV^* \times V^*$ je konečná množina **pravidiel**. Pravidlo *(α, β)* obvykle zapisujeme v tvare $\alpha \to \beta$ (α prepíš na β).
- **S** ∈ N je špeciálny **počiatočný neterminál** (koreň gramatiky).

Gramatika *G =* (N, Σ, P, S) určuje reláciu $\Rightarrow_G$ **krok odvodenia** na množine V*,
$\gamma \Rightarrow_G \delta$ práve vtedy, keď existuje pravidlo $\alpha \to \beta \in P$ a slová η, σ ∈ V také, že platí $\boldsymbol{\gamma = \eta\alpha\sigma}$ a $\boldsymbol{\delta = \eta\beta\sigma}$.

Vetná forma gramatiky *G* je každý reťazec z množiny *V**, ktorý je možné odvodiť z počiatočného neterminálu gramatiky.

Veta gramatiky *G* je každá vetná forma, ktorá obsahuje iba terminály.

Jazyk generovaný gramatikou *G, L(G)* je množina všetkých viet gramatiky.
$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^*_G w \}$

Chomského hierarchia gramatík
Typ 0 = **frázové gramatiky**
Typ 1 = **kontextové gramatiky**, pre každé pravidlo $\boldsymbol{\alpha \to \beta}$ platí $\boldsymbol{|\alpha| \le |\beta|}$ s eventuálnou výnimkou pravidla $\boldsymbol{S \to \varepsilon}$, ak sa S nevyskytuje na pravej strane žiadneho pravidla.
Typ 2 = bezkontextové gramatiky, každé pravidlo je v tvare $\boldsymbol{A \to \alpha}$ platí $\boldsymbol{|\alpha| \ge 1}$ s eventuálnou výnimkou pravidla $\boldsymbol{S \to \varepsilon}$, ak sa S nevyskytuje na pravej strane žiadneho pravidla.
Typ 3 = regulárne gramatiky, každé pravidlo je v tvare $\boldsymbol{A \to aB}$ alebo $\boldsymbol{A \to a}$ s eventuálnou výnimkou pravidla $\boldsymbol{S \to \varepsilon}$, ak sa S nevyskytuje na pravej strane žiadneho pravidla.

L_0 = trieda všetkých rekurzívne spočetných jazykov
L_1 = trieda všetkých kontextových jazykov
L_2 = trieda všetkých bezkontextových jazykov
L_3 = trieda všetkých regulárych jazykov
Platí**:** $L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset L_3$

Konečné automaty

30. septembra 2013 0:35

Deterministický konečný automat (DFA) *M* je pätica $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

- **Q** je neprázdna konečná množina **stavov**.
- **Σ** je konečná **vstupná abeceda**.
- **δ** : $Q \times \Sigma \to Q$ je parciálna **prechodová funkcia**.
  - **δˆ** : $Q \times \Sigma^* \to Q$ je parciálna **rozšírená prechodová funkcia**.
- $q_0 \in Q$ je **počiatočný (iniciálny) stav**.
- $F \subseteq Q$ je množina **koncových (akceptujúcich) stavov**.

Jazyk, ktorý je rozpoznateľný deterministickým konečným automatom, nazývame **regulárny**.

Trieda regulárnych jazykov **je uzavrená** na operáciach:

- **prienik** ∩
- **prienik s regulárnym jazykom** $\cap^R$
- **zjednotenie** ∪
- **rozdiel** \
- **iterácia** *
- **kladná iterácia** $^+$
- **reverse** ^{R}
- **zreťazenie** .
- **doplnok** co-

Pumping lemma.

L je regulárny jazyk $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$
$\forall w \in L: |w| \geq n$
$\exists x, y, z: w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq n$
$\forall i \geq 0: xy^iz \in L$

L nie je regulárny jazyk $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$
$\exists w \in L: |w| \geq n$
$\forall x, y, z: w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq n$
$\exists i \geq 0: xy^iz \notin L$

Ekvivalencia ~ je **pravá kongruencia**, ak pre každé *u, v, w* ∈ Σ* platí: $u \sim v \Rightarrow uw \sim vw$.

Index ekvivalencie ~ je počet tried rozkladu $\Sigma^*/\sim$.

Nech L je ľubovoľný jazyk nad abecedou Σ. Na množine Σ* definujeme $\sim_L$ nazvanú **prefixová ekvivalencia** pre L takto: $u \sim_L v \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^*: uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$.

Myhill-Nerodová veta:

Nech L je jazyk nad Σ. Tak tieto tvrdenia sú ekvivalentné:

- L je rozpoznateľný deterministickým konečným atomatom.
- L je zjednotením niektorých tried rozkladu určeného pravou kongruenciou nad Σ* s konečným indexom.
- Relácia $\sim_L$ má konečný index.

Nech $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA. Stav $q \in Q$ nazveme **dosiahnuteľný**, ak existuje $w \in \Sigma^*$ také, že $\hat\delta(q_0, w) = q$. Stav je **nedosiahnuteľný**, ak nie je dosiahnuteľný.

Stavy *p,q* nazývame **jazykovo ekvivalentné**, ak: $p \equiv q \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma : (\hat\delta(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat\delta(q, w) \in F)$.

Nedeterministický konečný automat (NFA) *M* je pätica $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde význam všetkých zložiek je rovnaký ako v definícií DFA s výnimkou prechodovej funkcie

- **δ** : $Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ je totálna **prechodová funkcia**.
    - **δˆ** : $Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ je totálna **rozšírená prechodová funkcia**.

Nedeterministický konečný automat s ε-**krokmi (NFA)** *M* je pätica $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde význam všetkých zložiek je rovnaký ako v definícií NFA s výnimkou prechodovej funkcie

- **δ** : $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$ je totálna **prechodová funkcia**.
    - $\mathbf{D_\varepsilon}$: $Q \rightarrow 2^Q$ je **ε okolie**.
    - **δˆ** : $Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ je totálna **rozšírená prechodová funkcia**.

Regulárny prechodový graf (RE) *M* je pätica $(Q, \Sigma, \delta, I, F)$, kde

- **Q** je neprázdna konečná množina **stavov**.
- **Σ** je **vstupná abeceda**.
- **δ** : $Q \times Q \rightarrow RE(\Sigma)$ je parciálna **prechodová funkcia**.
- **I** $\subseteq Q$ je množina **počiatočných stavov**.
- **F** $\subseteq Q$ je množina **koncových stavov**.

Problém **ekvivalencie**: $L(M) = L(M')$.
Problém **inklúzie**: $L(M) \subseteq L(M')$.
Problém **príslušnosti**: $w \in \Sigma$, $w \in L(M)$.
Problém **prázdnosti**: $L(M) = \emptyset$.
Problém **univerzality**: $L(M) = \Sigma$.
Problém **konečnosti**: $L(G)$ je konečný jazyk.

Bezkontextové gramatiky

21. októbra 2013 11:02

Bezkontextová gramatiky (CFG) *G* je štvorica (N, Σ, P, S), kde

- **N** je neprázdna konečná množina **neterminálnych symbolov**.
- **Σ** je konečná množina **terminálnych symbolov** taká, že $N \cap \Sigma = \emptyset$.
- **S** $\in$ N je počiatočný neterminál.
- **P** $\subseteq N \times V^*$ je konečná množina **pravidiel**.

Jazyk je **bezkontextový**, ak je generovaný nejakou bezkontextovou gramatikou.

Trieda bezkontextových jazykov **je uzavrená** na operáciach:

- **prienik s regulárnym jazykom** $\cap^R$
- **zjednotenie** $\cup$
- **iterácia** *
- **kladná iterácia** $^+$
- **reverse** ^{R}
- **zreťazenie** .

Nech *G* = (N, Σ, P, S) je CFG. Tak pre ľubovoľné $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ platí $S \Rightarrow^* \alpha$ práve vtedy, keď v *G* existuje **derivačný strom** s výsledkom α.

CFG *G* sa nazýva **viacznačná** práve vtedy, keď existuje $w \in L(G)$ majúce aspoň dva rôzne stromy.
V opačnom prípade hovoríme, že *G* je **jednoznačná**.

Bezkontextový jazyk *L* sa nazýva **vnútorne viacznačný** práve vtedy, keď každá bezkontextová gramatika, ktorá ho generuje, je viacznačná.

Symbol $X \in N \cup \Sigma$ je **nepoužiteľný** v CFG *G* = (N, Σ, P, S) práve vtedy, keď v *G* neexistuje derivácia tvaru $S \Rightarrow^* wXy \Rightarrow^* wxy$ pre žiadne $w, x, y \in \Sigma^*$. Povedzme, že *G* je **redukovaná**, ak neobsahuje žiadne nepoužiteľné symboly.

Jednoduchým pravidlom nazývame každé pravidlo tvaru $A \to B$, kde $A, B \in N$.

CFG *G* = (N, Σ, P, S) sa nazýva **necyklická** práve vtedy, keď neexistuje $A \in N$ také, že $A \Rightarrow^+ A$.

G sa nazýva **vlastná** práve vtedy, keď je bez nepoužiteľných symbolov, bez ε-pravidiel a necyklická.

Bezkontextová gramatika *G* = (N, Σ, P, S) je v **Chomského normálne forme (CNF)** ⇔ *G* je bez ε-pravidiel a každé pravidlo z P má jeden z týchto tvarov:

- $A \to BC$, kde $B, C \in N$
- $A \to a$, kde $a \in \Sigma$
- $S \to \varepsilon$

Pumping lemma pre CFL.
L je CFL $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$
$\forall z \in L: |z| \geq n$
$\exists u, v, w, x, y: z = uvwxy \wedge (v \neq \varepsilon \vee x \neq \varepsilon) \wedge |vwx| \leq n$
$\forall i \geq 0: uv^iwx^iy \in L$

L nie je CFL $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$
$\exists z \in L: |z| \geq n$
$\forall u, v, w, x, y: z = uvwxy \wedge (v \neq \varepsilon \vee x \neq \varepsilon) \wedge |vwx| \leq n$
$\exists i \geq 0: uv^iwx^iy \notin L$

Neterminál A v CFG $G = (N, \Sigma, P, S)$ sa nazýva **ľavorekurzívny**, ak v G existuje derivácia $A \Rightarrow^{+} A\beta$.
CFG bez ľavorekurzívnych neterminálov sa nazýva **neľavorekurzívny.**

Bezkontextová gramatika $G = (N, \Sigma, P, S)$ je v **Greibachovej normálna forme (GNF)** ⇔ G je bez ε-pravidiel a každé pravidlo z P má jeden z týchto tvarov:

- $A \rightarrow a\alpha$, kde $a \in \Sigma$, $\alpha \in N^*$

S prípadnou výnimkou pravidla $S \rightarrow \varepsilon$.

Rozhodnuteľné problémy pre CFL:

- **problém príslušnosti**: Existuje algoritmus, ktorý pre ľubovoľnú CFG G a slovo w rozhoduje, či $w \in L(G)$.
- **problém prázdnosti**: Existuje algoritmus, ktorý pre ľubovoľnú CFG G a slovo w rozhoduje, či $L(G) = \emptyset$.
- **problém konečnosti**: Existuje algoritmus, ktorý pre ľubovoľnú CFG G a slovo w rozhoduje, či $L(G)$ je konečný.
- **problém regularity**: **Ne**existuje algoritmus, ktorý pre ľubovoľnú CFG G a slovo w rozhoduje, či $L(G)$ je regulárny.
- **problém univerzality**: **Ne**existuje algoritmus, ktorý pre ľubovoľnú CFG G a slovo w rozhoduje, či $L(G) = \Sigma^*$.
- **problém ekvivalencie a inklúzie**: Nie sú rozhodnuteľné (plynie z nerozhodnuteľnosti problému univerzality).

Zásobníkové automaty

4. novembra 2013 10:11

Nedeterministický zásobníkový automat (PushDown Automaton, PDA) je sedmica $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

- **Q** je konečná množina, ktorej prvky nazývame **stavy**.
- **Σ** je konečná množina, tzv. **vstupná abeceda**.
- **Γ** je konečná množina, tzv. **zásobníková abeceda**.
- **δ** : $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to P_{Fin}(Q \times \Gamma^*)$, tzv. parciálna **prechodová funkcia**.
- $\mathbf{q_0} \in Q$ je **počiatočný stav**.
- $\mathbf{Z_0} \in \Gamma$ je **počiatočný symbol v zásobníku**.
- $\mathbf{F} \subseteq Q$ je množina **koncových stavov**.

Konfiguráciu nazývame ľubovoľný prvok $(p, w, a) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.

Na množine všetkých konfigurácií automatu M definujeme binárnu reláciu **krok výpočtu** $\vdash_M$ takto:
$(p, aw, Z\alpha) \vdash_M (q, w, \gamma\alpha) \Leftrightarrow \exists(q, \gamma) \in \delta(p, a, Z), a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

Rozšírený zásobníkový automat je sedmica $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde význam všetkých zložiek je rovnaký ako v definícií PDA s výnimkou prechodovej funkcie

- **δ** : $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^* \to Q \times \Gamma^*$.

Krok výpočtu $\vdash_R$ pre rozšírený PDA definujeme takto:
$(p, aw, \gamma_1\alpha) \vdash_R (q, w, \gamma_2\alpha) \Leftrightarrow \exists(q, \gamma_2) \in \delta(p, a, \gamma_1), a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

Deterministický zásobníkový automat (Deterministic PushDown Automaton, DPDA) je sedmica
$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde význam všetkých zložiek je rovnaký ako v definícií PDA a platia tieto podmienky:

- $\forall q \in Q$ a $\forall Z \in \Gamma$: $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset \Rightarrow \delta(q, a, Z) = \emptyset$ pre všetky $a \in \Sigma$.
- Pre žiadne $q \in Q$, $\forall Z \in \Gamma$ a $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ neobsahuje $\delta(q, a, Z)$ viac než jeden prvok.

Trieda deterministických bezkontextových jazykov (DCFL) **je uzavrená** na operáciach:

- **prienik s regulárnym jazykom** $\cap^R$
- **doplnok** co-

Turingov stroj

11. novembra 2013 10:58

Turingov stroj (TM) je $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \rhd, \sqcup, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$, kde

- **Q** je konečná množina, ktorej prvky nazývame **stavy**.
- **Σ** je konečná množina, tzv. **vstupná abeceda**.
- **Γ** je konečná množina, tzv. **pracovná abeceda** $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- $\rhd \in \Gamma \setminus \Sigma$ je **ľavá koncová značka**.
- $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$ je symbol označujúci **prázdne políčko**.
- **δ** : $(Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, tzv. totálna **prechodová funkcia**.
- $\mathbf{q_0} \in Q$ je **počiatočný stav**.
- $\mathbf{q_{acc}} \in Q$ je **akceptujúci stav**.
- $\mathbf{q_{rej}} \in Q$ je **zamietajúci stav**.

Konfigurácia Turingového stroja je trojica $(q, z, n) \in Q \times \{y\sqcup^\omega \mid y \in \Gamma\} \times \mathbb{N}_0$, kde

- **q** je stav.
- $\mathbf{y\sqcup^\omega}$ je obsah pásky.
- **n** značí pozíciu hlavy na páske.

Počiatočná konfigurácia pre vstup $w \in \Sigma^*$ je trojica $(q_0, \rhd w\sqcup^\omega, 0)$.
Akceptujúca konfigurácia je každá trojica tvaru (q_{acc}, z, n).
Zamietajúca konfigurácia je každá trojica tvaru (q_{rej}, z, n).

k-páskový Turingov stroj je $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \rhd, \sqcup, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$, kde význam všetkých zložiek je rovnaký ako v definícií TM s výnimkou prechodovej funkcie:

- **δ** : $(Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$, tzv. totálna **prechodová funkcia**.

Nedeterministický Turingov stroj je $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \rhd, \sqcup, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$, kde význam všetkých zložiek je rovnaký ako v definícií TM s výnimkou prechodovej funkcie:

- **δ** : $(Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L, R\}}$, tzv. totálna **prechodová funkcia**.

Churchova-Turingova téza: Každý proces, ktorý ide nazvať algoritmom, je možné realizovať na Turingovom stroji.

TM *M* **akceptuje/rozpoznáva/príjima** jazyk L(*M*).
Jazyk L(*M*) je **rekurzívne vyčisliteľný**.
Ak je TM *M* úplny, hovoríme, že *M* **rozhoduje** jazyk L(*M*).
Jazyk L(*M*) je **rekurzívny**.

Trieda rekurzívne vyčisliteľných a rekurzívnych jazykov **je uzavrená** na operáciach:

- **prienik** ∩
- **zjednotenie** ∪
- **zreťazenie** .
- **iterácia** *
- **doplnok** co- (neplatí pre rekurzívne spočetné jazyky)

Existuje **univerzálny Turingov stroj** *U*, ktorý dokáže simulovať ľubovoľne zadaný TM na zadanom vstupe:
U akceptuje <*M*>#<w> ⇔ *M* akceptuje w.

Problém *P* odpovedajúci jazyku L ={<*O*> | *O* má vlastnosť P} je:

- **rozhodnuteľný** práve vtedy, keď L je rekurzívny.
- **nerozhodnuteľný** práve vtedy, keď L je nie rekurzívny.
- **čiastočne rozhodnuteľný (semirozhodnuteľný)** práve vtedy, keď L je rekurzívne spočetný.

Problém akceptovania (problém príslušnosti pre Turingov stroj) je problém rozhodnúť, či daný TM *M* akceptuje dané slovo w nad jeho vstupnou abecedou.
$ACC = \{<M, w> \mid M$ je TM a M akceptuje $w\}$.

Problém zastavenia (halting problem) je problém rozhodnúť, či daný TM *M* akceptuje dané slovo w nad jeho vstupnou abecedou.
$HALT = \{<M, w> \mid M$ je TM, výpočet M na w je konečný$\}$.

Funkcia $f : \Sigma^* \rightarrow \Phi^*$ je **vyčislíteľná**, ak existuje TM *M*, ktorý na vstupu w zastaví, práve keď $f(w)$ je definovaná a naviac $f(w) = M(w)$.
Funkcia je **totálne vyčislíteľná**, ak je vyčislíteľná a totálna.

Nech $A \subseteq \Sigma^*$ a $B \subseteq \Phi^*$ sú jazyky. Povedzme, že *A* sa **m-redukuje** na *B*, píšeme $A \leq_m B$, práve keď existuje totálne vyčislíteľná funkcia $f : \Sigma^* \rightarrow \Phi^*$ taká, že:
$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.
Funkciu *f* nazývame **redukcia** *A* na *B*.
A a *B* sú **m-ekvivalentné**, píšeme $A \equiv_m B$, ak $A \leq_m B$ *a* $B \leq_m A$.

Problém neprázdnosti je problém rozhodnúť, či daný TM akceptuje neprázdny jazyk.
$NONEMPTY = \{<M> \mid M$ je TM a $L(M) \neq \emptyset\}$.

Postov systém *P* nad abecedou Σ je konečná množina dvojíc:
$P = \{(\alpha_i, \beta_i) \mid \alpha_i, \beta_i \in \Sigma^*, 1 \leq i \leq n\}$.

Postov korešpondenčný problém (PCP) je problém rozhodnúť, či má Postov systém *P* nejaké riešenie.
$PCP = \{<P> \mid P$ je Postov systém, ktorý má nejaké riešenie$\}$.

Iniciálny Postov korešpondenčný problém (inPCP) je problém rozhodnúť, či má Postov systém *P* nejaké riešenie začínajúce číslom 1.
$inPCP = \{<P> \mid P$ je Postov systém, ktorý má riešenie začínajúce číslom 1$\}$.

Teóra vyčísliteľnosti a zložitosti

2. decembra 2013 9:20

Nech M je **úplny deterministický Turingov** stroj so vstupnou abecedou Σ. Pre každé w ∈ Σ* definujeme $t_M(w)$ ako počet krokov výpočtu stroja M na vstupu w.
Časová zložitosť stroja M je funkcia $T_M : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ definovaná vzťahom:
$T_M(n) = \max\{t_M(w) \mid w \in \Sigma^n\}$.

O-notácia:
Nech $f, g : \mathbb{N}_0 \to R^+$ sú funkcie. Povedzme, že g je **asymptotická horná závora** pre f, a píšeme $f \in O(g)$ alebo $f = O(g)$, ak existujú konštanty $c, n_0 \in \mathbb{N}$ také, že:
$\forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n)$.

o-notácia:
Nech $f, g : \mathbb{N}_0 \to R^+$ sú funkcie. Povedzme, že g **rastie asymptoticky rýchlejšie než** f, a píšeme $f \in o(g)$ alebo $f = o(g)$, ak

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = 0.$$

Časová zložitosť problému je najmenšia časová zložitosť, s akou je možné daný problém rozhodnúť.

Nech M je **úplny nedeterministický Turingov** stroj so vstupnou abecedou Σ. Pre každé w ∈ Σ* definujeme $t_M(w)$ ako počet krokov najdlhšieho výpočtu stroja M na vstupu w.
Časová zložitosť stroja M je funkcia $T_M : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ definovaná vzťahom:
$T_M(n) = \max\{t_M(w) \mid w \in \Sigma^n\}$.

Problém existencie cesty je problém rozhodnúť, či v danom orienotvanom grafe *G* existuje cesta z *s* do *t*.
PATH = *{*<*G*, *s*, *t*> | *G* je orientovaný graf obsahujúci cestu z *s* do *t*}.

Hamiltonovská cesta je cesta prechadzajúca každým uzlom práve jeden krát.

Problém Hamiltonovskej cesty je problém rozhodnúť, či v danom orienotvanom grafe *G* existuje Hamiltonovská cesta z *s* do *t*.
HAMPATH = *{*<*G*, *s*, *t*> | *G* je orientovaný graf obsahujúci Hamiltonovskú cestu z *s* do *t*}.

Problém zložených čísel je problém rozhodnúť, či je dané číslo *x* zložené, teda či je súčinom dvoch čísel väčších než 1.
COMPOSITES = {<*x*> | *x* = *pq* pre nejaké prirodzené čísla *p*, *q* > 1}.

Polynomiálny verifikátor pre jazyk L je deterministický TM *V* splňujúci
w ∈ L ⇔ existuje reťazec c taký, že *V* akceptuje <w, c> a pracujúci v polynomiálnom čase vzhľadom k |w|.

Nech $A \subseteq \Sigma^*$ a $B \subseteq \Phi^*$ sú jazyky. Povedzme, že A sa **polynomiálne redukuje** na B, píšeme $A \leq_p B$, práve keď $A \leq_m B$ a redukčná funkcia *f* je vyčisliteľná Turingovým strojom pracujúcim v polynomiálnom čase. Funkcia *f* nazývame **redukcia** A na B **v polynomiálnom čase.**

Nech *C* je zložitostná trieda. Jazyk L nazveme **ťažký** v triede *C* (***C*-ťažky**), práve keď pre každý jazyk L' ∈ *C* platí $L' \leq_p C$.
Povedzme, že L je **úplny** v triede *C* (***C*-úplny**), ak naviac L ∈ *C*.

Problém splniteľnosti je problém rozhodnúť, či je daná Booleovská formula splniteľná.
SAT = {<φ> | φ je splniteľná Booleovská formula}.

Konjuktívna normálna forma (cnf) formulí

- **literál** je premenná alebo jej negácia
- **klauzula** je disjunkcia literálov
- **formula v cnf** je konjunkcia klauzulí
- **formula v 3cnf** je formula v cnf, kde všetky klauzule obsahujú 3 literály

Problém rozhodnuteľnosti je problém rozhodnúť, či je daná Booleovská formula v 3cnf forme splniteľná.
3SAT = {<φ> | φ je splniteľná formula v 3cnf}.

$\mathbf{\Phi = \Phi_{cell} \wedge \Phi_{start} \wedge \Phi_{move} \wedge \Phi_{accept}}$

- $\mathbf{\Phi_{cell}}$
  - každé $x_{i,j,s}$ platí ⇔ v tabuľke na pozícii i, j je symbol s, kde $s \in C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\}$
  - $O(n^{2k})$
- $\mathbf{\Phi_{start}}$
  - na prvom riadku je iniciálna konfigurácia pre $w = w_1w_2 \ldots w_n$
  - $O(n^k)$
- $\mathbf{\Phi_{move}}$
  - každé okno tabuľky je legálne
  - $O(n^{2k})$
- $\mathbf{\Phi_{accept}}$
  - v tabuľke je stav q_{acc}
  - $O(n^{2k})$

$|\Phi|$ = $O(n^{2k}) + O(n^k) + O(n^{2k}) + O(n^{2k}) = \mathbf{O(n^{2k})}$

Nech *M* je **úplny deterministický Turingov** stroj so vstupnou abecedou Σ. Pre každé $w \in \Sigma^*$ definujeme $s_M(w)$ ako **počet políčok pásky**, ktoré stroj *M* číta pri výpočtu na vstupu w. **Priestorová zložitosť** stroja *M* je funkcia $S_M : N_0 \to N$ definovaná vzťahom:
$S_M(n) = \max\{s_M(w) \mid w \in \Sigma^n\}$.
U **úplneho nedeterministického Turingového** stroja $s_M(w)$ označuje **maximálny počet políčok pásky**.

Priestorová zložitosť problému je najmenšia piestorová zložitosť, s akou je možné problém rozhodnúť.
Každá funkcia *f* : N → N definuje **priestorovú zložitostnú triedu problémov**:
SPACE(f(n)) = {L| L je rozhodovaný deterministickým TM *M* s priestorovou zložitosťou $S_M(n) = O(f(n))$}.
NSPACE(f(n)) = {L| L je rozhodovaný nedeterministickým TM *N* s priestorovou zložitosťou $S_N(n) = O(f(n))$}.

Savitchova veta: pre každú funkciu *f* : N → N splňujúcu $f(n) \geq n$ platí:
$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n))$.

Vzťahy priestorových a časových tried:
P ⊆ NP ⊆ PSPACE = NSPACE ⊆ EXPTIME ⊆ NEXPTIME

QBF je kvantifikovaná Booleovská formula.

Problém TQBF je problém rozhodnúť, či je daná QBF formula bez voľných premenných pravdivá.
TQBF = {<φ> | φ je pravdivá QBF formula bez voľných premenných}.

Zhrnutie

6. februára 2014 15:27

Uzáverové vlastnosti

Jazyk	**Množinové operácie**
RE	$\cap$ $\cap^R$ $\cup$ \ * $^{+R}$. co-
CFL	$\cap^R$ $\cup$ * $^{+R}$.
CSL	$\cap$ $\cup$ * .
DCFL	$\cap^R$ co-
Rekurzívny	$\cap$ $\cup$ * . co-
Rekurzívne spočetný	$\cap$ $\cup$ * .
P	$\cup$. co-
NP	$\cup$.

Prechodové funkcie

Automat	**δ**	**Rozšírená δ**		**typ**
DFA	$Q \times \Sigma \to Q$	$Q \times \Sigma^* \to Q$		parciálna
NFA	$Q \times \Sigma \to 2^Q$	$Q \times \Sigma^* \to 2^Q$		totálna
NFA s ε	$Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$	$Q \times \Sigma^* \to 2^Q$	$\mathbf{D}_\varepsilon : Q \to 2^Q$	totálna
RE	$Q \times Q \to RE(\Sigma)$			parciálna
PDA	$Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to P_{Fin}(Q \times \Gamma^*)$			parciálna
Rozšírený PDA	$Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^* \to Q \times \Gamma^*$			parciálna
DPDA	$Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to P_{Fin}(Q \times \Gamma^*)$			parciálna
TM	$(Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$			totálna
k-páskový TM	$(Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$			totálna
NTM	$(Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L, R\}}$			totálna

Inklúzie

P ⊆ NP
P ⊆ TIME
P ⊆ PSPACE
P ⊊ EXPSPACE
P ⊊ EXPTIME
TIME ⊆ SPACE
TIME ⊆ NTIME
NTIME ⊆ NSPACE
NP ⊆ PSPACE
NP ⊆ EXPTIME
PSPACE ⊊ EXPSPACE
NSPACE ⊆ PSPACE (Savitchová veta)
NSPACE(f(n)) ⊆ SPACE($f(n)^2$)
P ⊆ NP ⊆ PSPACE = NSPACE ⊆ EXPTIME ⊆ NEXPTIME

Tomáš Smetanka
FI MUNI 2013