Polynomy, jejich rozklad a Hornerovo schéma

Definice 10.1. Reálný polynom stupně n (neboli mnohočlen) je funkce tvaru

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \text{ kde } a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}, a_n \neq 0,$$

která každému komplexnímu číslu x přiřazuje komplexní číslo $p(x)$.
$a_0, \ldots, a_n$ se nazývají koeficienty.
a_0 je absolutní člen.
x je proměnná.
n je stupeň polynomu.

Polynom, který má za koeficienty $a_0, \ldots, a_n$ komplexní čísla, se nazývá komplexní polynom.
Připouštíme-li hodnoty za proměnnou x z reálného oboru (tj. $x \in \mathbb{R}$), mluvíme o reálném (případně komplexním) polynomu v reálném oboru.
Připouštíme-li hodnoty za proměnnou x z komplexního oboru (tj. $x \in \mathbb{C}$), mluvíme o reálném (případně komplexním) polynomu v komplexním oboru.

Definice 10.2. Každé číslo α (reálné i komplexní, podle oboru v jakém pracujeme) takové, že splňuje $p(\alpha) = 0$ se nazývá kořen polynomu $p(x)$.

Poznámka 10.3. Každý kořen je tedy řešením rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0\,,$$

které říkáme algebraická rovnice n-tého stupně.

Příklad Určete kořeny polynomu $p(x)$ v komplexním oboru:

1. $p(x) = x^2 + x - 2$ $[1, -2]$
2. $p(x) = x^4 - 1$ $[1; -1; i; -i]$
3. $p(x) = x^3 + 1$ $-1; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Při odhadování racionálních a celočíselných kořenů u polynomů s celočíselnými koeficienty a nenulovým absolutním členem nám výrazně pomůže následující věta. Upozorněme však na podstatný detail. Tvrzení věty nám dává pouze nutnou, nikoli však postačující podmínku pro to, aby číslo $\frac{r}{s}$ bylo kořenem polynomu.

Věta 10.7. Nechť číslo $\frac{r}{s}$, kde $r \in \mathbf{Z}$ a $s \in \mathbf{N}$ je kořenem polynomu $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ a $a_0 \neq 0$. Pak platí

$$\mathrm{r}|\mathrm{a_0} \wedge \mathrm{s}|\mathrm{a_n}.$$

Vysvětlivky: **$r|a_0$ … r dělí a_0**
$s|a_n$ … s dělí a_n

Věta 10.10. Nechť $\frac{r}{s}$, kde $r \in \mathbf{Z}$ a $s \in \mathbf{N}$ je kořenem polynomu $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ a $a_0 \neq 0$. Potom pro libovolné celé číslo m platí:

$$(r - ms)|f(m).$$

Speciálně tedy: $(r - s)|f(1)$, resp. $(r + s)|f(-1)$.

Příklad 10.9. Nalezněte všechny racionální a celočíslené kořeny polynomu $g(x) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$.

Řešení. Podle Věty 10.7 si vytipujeme čísla r a s takto:

$$r| - 3 \Longrightarrow r = 1, -1, 3, -3;$$
$$s\ |4 \Longrightarrow s = 1, 2, 4.$$

Dále si vypíšeme všechny možné hodnoty $\frac{r}{s}$.

$$\frac{r}{s}: \quad 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 3, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}.$$

Poznámka 10.8. Pro ověřování, zda je číslo kořenem polynomu se s výhodou používá **Hornerovo schema**. Pomocí něj se také snadno zjišťuje násobnost kořene.

Dále rozhodneme, které vytipované kořeny polynomu nemá smysl vyšetřovat Hornerovým schématem (k tomu použijeme Větu 10.10):

Řešení. Určíme funkční hodotu $g(1) = 4 - 8 - 11 - 3 = -18$ a $g(-1) = -4 - 8 + 11 - 3 = -4$. Podíváme se na vytipované hodnoty $\frac{r}{s}$:

$\frac{r}{s}:$	$\frac{1}{1}$,	$\frac{-1}{1}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{-1}{2}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{-1}{4}$,	$\frac{3}{1}$,	$\frac{-3}{1}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{-3}{2}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{-3}{4}$	
$r+s:$	2	0	3	1	5	3	4	-2	5	-1	7	1	$g(-1) = -4$
$r-s$	0	-2	-1	-3	-3	-5	2	-4	1	-5	-1	-7	$g(1) = -18$

Zjistíme, zda $r + s$ dělí (-4) a $r - s$ dělí (-18). Vidíme, že současně tuto vlastnost splňují hodnoty $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{1}$, a tedy má smysl vyšetřovat Hornerovým schématem pouze hodnotu $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{1}$ (**DÚ**).

Výsledek Příkladu 10.9.: $-\frac{1}{2}$ je dvojnásobným kořenem polynomu, 3 je jednonásobným kořenem polynomu.

Hornerovo schéma

Úkolem je najít kořeny polynomu $p(x)$. K tomu nám poslouží následující tabulka a algoritmus pro jeho hledání.

Nalezněte celočíselné kořeny polynomu $p(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36$.

1. Vytvoříme tabulku, v jejímž prvním řádku jsou koeficienty polynomu a v prvním sloupci celočíselné kořeny, které nalezneme pomocí Věty 10.7. a Věty 10.10. a do druhého sloupce sepíšeme koeficient a_n.

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1					
-1	1					
2	1					
-2	1					

2. Kořenem v prvním sloupci (pro každý řádek) vynásobíme v příslušném řádku námi (modře) sepsanou hodnotu a přičteme k ní koeficient polynomu stupně o jednu menšího a sepíšeme

tuto hodnotu do následujícího sloupce v příslušném řádku a opakujeme s dalším koeficientem polynomu na příslušném řádku.

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	1*1+1=2	1*2-5=-3	1*(-3)-9= -12	1*(-12)-24= -36	1*(-36)-36= -72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	-112
-2	1	-1	-3	-3	-18	0

3. Kořenem polynomu jsou ty hodnoty, kde se v příslušném řádku v posledním sloupci objeví 0. Toto platí pro hodnotu -2. Tudíž polynom můžeme zjednodušit na rozklad $p(x) = (x+2)(x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 18)$. Nyní zjistíme násobnost kořenu (-2). Opět k tomu použijeme tabulku, do které si do prvního řádku sepíšeme koeficienty polynomu čtvrtého stupně.

	1	-1	-3	-3	-18
-2	1	-3	3	-9	0

Opět jsme dostali v posledním sloupci 0, tudíž kořen (-2) má násobnost 2 a můžeme polynom zjednodušit na součin $p(x) = (x+2)^2(x^3 - 3x^2 - 3x - 9)$.

4. Opět vytipujeme kořeny polynomu třetího stupně, který nám vznikl postupným upravováním, a použijeme Hornerovo schéma.

	1	-3	3	-9
3	1	0	3	0
-3	1	-6	21	-72

Vidíme, že hodnota (-3) není kořenem polynomu a můžeme polynom zjednodušit na součin $p(x) = (x+2)^2(x-3)(x^2+3)$. Zjistíme ještě násobnost kořenu 3.

	1	0	3
3	1	3	9

Vidíme, že kořen 3 je násobnosti 1 a polynom má komplexní kořeny $\pm i\sqrt{3}$.

5. Polynom můžeme tedy napsat jako $p(x) = (x+2)^2(x-3)(x^2+3)$.

DÚ: Najděte racionální kořeny polynomu $f(x) = 2x^5 + 9x^4 + 13x^3 + 7x^2 - 4$. [Výsledek: $f(x) = (x+2)^2(x-\frac{1}{2})(2x^2+2x+2)$].