Množiny a relace: zobrazení, funkce, rozklady, ekvivalence

Množiny

Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena. Množiny mohou být i prvky jiných množin.

- $\emptyset \in \{\emptyset\}; \emptyset \notin \emptyset; \{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, a\}$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in A \Rightarrow x \in B; A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$
- Sjednocení: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$; Průnik: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Rozdíl: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$; Doplněk: $A \subseteq M : \overline{A} = M \setminus A$
- Součin: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}; (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d; \forall M : \emptyset \times M = \emptyset$
- Potenční množina: $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}; 2^\emptyset = \{\emptyset\}; 2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Relace

Relace mezi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ je podmnožina součinu $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$. $2^{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k}$ je množina všech relací mezi $A_1, A_2, \ldots A_k$.

- Inverzní relace: $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$. Inverzní relaci má smysl uvažovat pouze u binárních relací.
- Skládání relací: $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C : S \circ R = \{(a, c) \mid \exists b \in B.(a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$

Funkce

(Totální) funkce z množiny A do množiny B je relace $f \subseteq A \times B$ kde pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $b \in B$ takové, že $(x, y) \in f$. $(x, y) \in f$ je ekvivalentní zápisu $f(x) = y$. A je definiční obor, B je obor hodnot.

Parciální funkce z množiny A do množiny B je relace $f \subseteq A \times B$ kde pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $b \in B$ takové, že $(x, y) \in f$.

- Funkce f je injektivní $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, x \neq y : f(x) \neq f(y)$.
- Funkce f je surjektivní $\Leftrightarrow \forall y \in B : \exists x \in A.f(x) = y$.
- Funkce f je bijektivní, jestliže je injektivní a surjektivní.
- Využití vlastnosti funkcí k porovnání velikosti množin: $|A| \leq |B|$ pokud existuje injekce $A \to B$.$|A| = |B|$ pokud existuje bijekce $A \to B$.

Funkce vs. zobrazení

Zobrazení je předpis, jak jednoznačně přiřazovat prvkům jedné množiny prvky obecně jiné množiny. Kdežto funkce je pojem pro zobrazení z nějaké množiny M do množiny čísel. Tedy každá funkce je i zobrazení. Někdy se slovo *funkce* používá pro jakékoliv zobrazení.

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}, C = \{5, 6, 7\}$
$f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\} \subseteq A \times B$
$g = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\} \subseteq A \times C$
f je tedy zobrazení a g je funkce.

Vlastnosti binárních relací

Pro všechny následující příklady platí $R \subseteq M \times M$.

- Relace R je reflexivní $\Leftrightarrow \forall a \in M : (a, a) \in R$.
- Relace R je symetrická $\Leftrightarrow (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.
- Relace R je antisymetrická $\Leftrightarrow (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$.
- Relace R je tranzitivní $\Leftrightarrow (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.
- Relace R je **ekvivalence** pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
- Relace R je **uspořádání** pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Rozklady a ekvivalence

Buď M množina. Rozklad na M je množina $N \subseteq 2^M$ taková, že platí:

- $\emptyset \notin N$
- $A, B \in N \Rightarrow A \cap B = \emptyset \vee A = B$
- $\bigcup_{A \in N} A = N$

Každý rozklad N určuje jistou ekvivalenci R_N na M:

$$(x, y) \in R_N \Leftrightarrow \exists A \in N.x, y \in A$$

Takto definovaná relace R_N splňuje všechny požadavky na relaci ekvivalence. Je tedy reflexivní, symetrická a tranzitivní. Toto je možné ověřit důkazem – viz slide č. 46 z Úvodu do informatiky, podzim 2005.

Každá ekvivalence R určuje jistý rozklad M/R na M:

$$[x] = \{y \in M \mid (x, y) \in R\}$$

$$M/R = \{[x] \mid x \in M\}$$

Takto definovaný rozklad splňuje všechny požadavky na rozklad (viz výše). Toto je opět možné dokázat – viz slide č. 47 z Úvodu do informatiky, podzim 2005.

Made by pally