Zkouška MB102, úterý 5.6.2007, 8:00–10:00 hodin

Skupina A

Maximum 30 bodů

1. (2 body) **Limita a spojitost.** Uvažujme funkci

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

(a) Rozhodněte, zda má funkce $f(x)$ limitu v bodě $x_0 = 0$. Pokud ano, tuto limitu určete.
(b) Napište definici spojitosti funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 0$. Podle této definice pak určete, zda je funkce $f(x)$ spojitá v bodě $x_0 = 0$.

2. (3 body) **Derivace.**
(a) Napište definici derivace (obecné) funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 0$. Podle této definice pak určete, jestli má funkce $f(x)$ z Příkladu 1 derivaci v bodě $x_0 = 0$ a pokud ano, tuto derivaci vypočítejte.
(b) Rozhodněte, zda je funkce $y = \sqrt{1 + x^2}$ řešením diferenciální rovnice

$$x^2 \,.\, y'' \,.\, y - (y')^2 = 0.$$

3. (4 body) **Průběh funkce.** Funkce $f(x)$ a její derivace $f'(x)$ a $f''(x)$ jsou zadány následovně:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 4}{x - 2}, \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x - 2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x^2 - 8x + 10}{(x - 2)^3}.$$

Určete celkový průběh funkce – intervaly monotonie, lokální extrémy, konvexnost/konkávnost, inflexní body, asymptoty, graf.

4. (4 body) **Aplikace derivace.** Výběh pro slepice má rozlohu 200 m^2 a tvar obdélníka přiléhajícího jednou stranou k domu. Ze zbývajících tří stran je potřeba výběh oplotit. Jak velké mají být strany výběhu, aby bylo potřeba co nejméně pletiva na plot? Kolik metrů pletiva bude potřeba?

5. (4 body) **Integrál.**
(a) Vhodnou metodou vypočtěte uvedené integrály:

$$\int x \ln^2 x \, dx, \qquad \int_1^e x \ln^2 x \, dx, \qquad \int_0^1 x \ln^2 x \, dx.$$

(b) Určete průměrnou hodnotu funkce $x \ln^2 x$ na intervalech $[1, e]$, $[0, 1]$ a $[0, e]$.

6. (4 body) **Aplikace integrálu.** Pomocí vhodného určitého integrálu určete:
(a) Objem zmrzliny, která se vejde do kuželovitého kornoutu (tak, aby nic nepřesahovalo ven) o výšce $h = 12$ cm a poloměru "podstavy" $r = 3$ cm.
(b) Kolik stojí materiál na jeden kornout, jestliže jeho jednotková cena je 2 hal/cm^2?

7. (2 body) **Nekonečné řady.**
(a) Napište nutnou podmínku, kterou musí každá konvergentní řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ splňovat.
(b) Zformulujte podílové kritérium pro konvergenci/divergenci nekonečné řady.

8. (3 body) **Mocninné řady.**
(a) Určete Maclaurinovu řadu pro funkci $\cosh x := (e^x + e^{-x})/2$.
(b) Určete poloměr konvergence Vámi vypočítané mocninné řady.
(c) Určete Maclaurinovu řadu pro funkci $(\cosh x)'$, tj. pro derivaci funkce $\cosh x$.

9. (4 body) **Aplikace diferenciálních rovnic.** V čase $t_0 = 0$ minut má čaj v hrnku teplotu 100°C a za 10 minut poté už jen 80°C, přičemž teplota okolního vzduchu je $T_{\text{okolí}} = 22$°C. Označme jako $T(t)$ teplotu čaje v čase t minut.
(a) Napište diferenciální rovnici, kterou musí funkce $T(t)$ splňovat a tuto rovnici vyřešte.
(b) Určete, za jak dlouho bude mít čaj teplotu 60°C?