Rozhodněte, zda pro libovolné formule φ, ψ výrokové logiky platí

Příklad 1
10 bodů

$$\varphi \to \psi \approx \neg\varphi \to \neg\psi$$

Své tvrzení zdůvodněte.

Nechť $\mathcal{L}$ je prázdný jazyk s rovností. Rozhodněte a dokažte, zda existuje formule φ a realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ taková, že $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \exists x \neg\varphi$?

Příklad 2
10 bodů

Dokažte, že logický systém $\mathcal{L}(\wedge, \vee, \neg)$ je plnohodnotný. V důkazu nesmíte využít plnohodnotnost žádného jiného logického systému.

Příklad 3
10 bodů

Nechť L je jazyk s rovnosti a s jedním unárním predikátovým symbolem P. Dále nechť T je teorie s jazykem $\mathcal{L}$. Nalezněte rozšíření T' teorie T takové, že pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ platí, že $\mathcal{M} \models T'$, právě když $\mathcal{M} \models T$ a $P_\mathcal{M} = M$ (přesněji $P_\mathcal{M} = \{(a) \mid a \in M\}$, protože $P_\mathcal{M}$ z definice není množina ale unární relace). Rozhodněte a dokažte, zda je takové rozšíření konzervativní.

Příklad 4
10 bodů

Nechť L je prázdný jazyk s rovností. Zadejte teorii T takovou, že realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ je modelem teorie T, právě když nosič M realizace $\mathcal{M}$ je nekonečný nebo když existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $|M| = 2^k$.

Příklad 5
10 bodů

Příklad 6
10 bodů

1. Nechť $\mathcal{L}$ je prázdný jazyk s rovností. Rozhodněte a dokažte, zda je teorie $T = \emptyset$ úplná.
2. Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk bez rovnosti s nekonečně mnoha unárními predikátovými symboly P_1, P_2, P_3, ... Rozhodněte a dokažte, zda je teorie $T = \{\forall x P_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$ úplná.

Formulujte a dokažte větu o korektnosti pro predikátovou logiku. V důkazu můžete využít (a nemusíte dokazovat) následující pomocné tvrzení:

Příklad 7
10 bodů

Lemma 1. Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk a T je toerie v jazyku $\mathcal{L}$. Je-li ψ instancí jednoho ze schémat P1–P5 (příp. také R1–R3, pokud jazyk teorie T je jazyk s rovností) a $\mathcal{M}$ je model T, pak $\mathcal{M} \models \psi$.