

1. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

2. Vypočítejte křivkový integrál $\int_C y^2 dx + (x+y)^2 dy$, kde C je obvod trojúhelníka o vrcholech $[1, 0]$, $[1, 1]$, $[0, 1]$ orientovaný záporně jako uzavřená křivka. Výpočet proveďte pomocí Greenovy věty (převod křivkového integrálu na dvojný)!

3. Ukažte, že řada

$$\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 4} + \frac{1}{x^2 + 9} - \frac{1}{x^2 + 16} + \dots$$

konverguje stejnoměrně na intervalu $(-\infty, \infty)$.

4. Definujte funkci $y = e^z$, $z \in \mathbb{C}$ a její základní vlastnosti: definiční obor, obor hodnot, Eulerův vztah, periodicitu.
5. Zformulujte Banachovu větu o pevném bodě. Definujte úplný metrický prostor.
6. Derivací podle parametru a spočítejte

$$J(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx, \quad a \geq 0$$

Ověřte předpoklady příslušné věty!