Hry N hráčů

1. Dokažte, že dvojmaticová hra určená dvojmaticí
$$\begin{pmatrix} (0,0) & (1,-2) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{pmatrix}$$
je nepodstatná.

2. Ukažte, že nutnou a postačující podmínkou pro to, aby hra s charakteristickou funkcí v byla hrou s konstantním součtem je, aby pro každou koalici $K \subset Q$ platilo
$$v(K) + v(Q - K) = v(Q).$$

3. Nalezněte jádro kooperativní hry tří hráčů určené charakteristickou funkcí
$$\begin{aligned} &v(\{1,2,3\} = 3/2, \\ &v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1, \\ &v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 1/2. \end{aligned}$$

4. Nalezněte jádro kooperativní hry tří hráčů určené charakteristickou funkcí
$$\begin{aligned} &v(\{1,2,3\} = 2, \\ &v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1, \\ &v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0. \end{aligned}$$

5. Nalezněte jádro kooperativní hry tří hráčů určené charakteristickou funkcí
$$\begin{aligned} &v(\{1,2,3\} = 0, \\ &v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1, \\ &v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = -1. \end{aligned}$$

6. Nalezněte jádro kooperativní hry tří hráčů určené charakteristickou funkcí
$$\begin{aligned} &v(\{1,2,3\} = 6/5, \\ &v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1, \\ &v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 1/2. \end{aligned}$$

7. Nalezněte jádro kooperativní hry tří hráčů určené charakteristickou funkcí
$$\begin{aligned} &v(\{1,2,3\} = 1, \\ &v(\{1,2\}) = 1/4,\ v(\{1,3\}) = 0,\ v(\{2,3\}) = 1/2, \\ &v(\{1\}) = -1/2,\ v(\{2\}) = 0,\ v(\{3\}) = -1/2. \end{aligned}$$

8. Uvažujte kooperativní hru čtyř hráčů určenou charakteristickou funkcí
$$\begin{aligned} &v(\{1,2,3,4\} = 2, \\ &v(\{1,2,3\}) = 1,\ v(\{1,2,4\}) = 2,\ v(\{1,3,4\}) = 0,\ v(\{2,3,4\}) = 1, \\ &v(\{1,2\}) = 0,\ v(\{1,3\}) = -1,\ v(\{1,4\}) = 1, \\ &v(\{2,3\}) = 0,\ v(\{2,4\}) = 1,\ v(\{3,4\}) = 0 \\ &v(\{1\}) = -1,\ v(\{2\}) = 0,\ v(\{3\}) = -1,\ v(\{4\}) = 0. \end{aligned}$$
Ověřte, že v je superaditivní funkce.

9. Určete Shapleyovu hodnotu hry tří hráčů s charakteristickou funkcí

$$\begin{aligned}&v(\{1,2,3\}=0,\\&v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=1,\\&v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=-1.\end{aligned}$$

10. Určete Shapleyovu hodnotu hry tří hráčů s charakteristickou funkcí

$$\begin{aligned}&v(\{1,2,3\}=200,\\&v(\{1,2\})=150,\ v(\{1,3\})=110,\ v(\{2,3\})=20,\\&v(\{1\})=100,\ v(\{2\})=10,\ v(\{3\})=0.\end{aligned}$$

11. Vyřešte hru s množinou hráčů $Q=\{1,2,3,4\}$, v níž hodnoty charakteristické funkce $v(K)$ se rovnají součtu čísel hráčů tvořících koalici K, takže například $v(\{1,3,4\}=8$, $v(Q)=10$.

12. Najděte Shapleyovu hodnotu hry N hráčů ve tvaru charakteristické funkce, která je zadána vzorcem $v(K)=5|K|$ pro všechna $K\in Q$, tj. každá koalice získává částku rovnou pětinásobku počtu členů koalice.

13. Nalezněte optimální strategie jednotlivých hráčů hry s charakteristickou funkcí

$$\begin{aligned}&v(\{1,2,3\}=8,75,\\&v(\{1,2\})=1,\ v(\{1,3\})=5,\ v(\{2,3\})=-1,\\&v(\{1\})=0,\ v(\{2\})=-3,\ v(\{3\})=-0,75,\end{aligned}$$

a určete optimální rozdělení celkové výhry.

14. Uvažujme hru tří hráčů v normálním tvaru s prostory strategií

$$X_1=\{0,1,2,3,4,5,6\},\ X_2=\{0,1,2,3\},\ X_3=\{0,1,2,3,4\}$$

a s výplatními funkcemi

$$\begin{aligned}M_1(x)&=-(x_1^2+x_1x_2+x_1x_3-11x_1+4)/2,\\M_2(x)&=-(x_1x_2+x_2^2+x_2x_3-11x_2+6)/2,\\M_1(x)&=-(x_1x_3+x_2x_3+x_3^2-21x_3/2+2)/2.\end{aligned}$$

Nalezněte charakteristickou funkci této hry.