4 KOOPERATIVNÍ HRY DVOU HRÁČŮ S NEPŘENOSNOU VÝHROU

4.1 ZÁKLADNÍ POJMY

V této kapitole se budeme zabývat situacemi, kdy hráči mohou před začátkem hry uzavřít závaznou dohodu o tom, jaké použijí strategie, vygenerovaný zisk si však nemohou přerozdělit.

Definice 1. Nechť G je dvojmaticová hra dvou hráčů s výplatními maticemi A, B typu $m \times n$. **Společná strategie** je matice pravděpodobností $P = (p_{ij})$ typu $m \times n$, tj.

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{pro} \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1. \tag{4.1}$$

Společná strategie tedy přiřazuje pravděpodobnost každé dvojici ryzích strategií. Očekávané hodnoty výplatní funkce jsou pro jednotlivé hráče při společné strategii P rovny

$$u(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{ij}, \qquad v(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_{ij} \tag{4.2}$$

☛ ***Příklad 1.*** Uvažujme hru dvou hráčů určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (2,0) & (-1,1) & (0,3) \\ (-2,-1) & (3,-1) & (0,2) \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Jedna možná společná strategie by zde byla určená maticí

$$\begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 5/24 & 1/12 \end{pmatrix}$$

a říkala by, že dvojice ryzích strategií (1. řádek, 3. sloupec) bude realizována s pravděpodobností 1/3, dvojice (2. řádek, 3. sloupec) s pravděpodobností 1/12, apod. Očekávaná výhra prvního hráče je při uvedené společné strategii rovna

$$u(P) = \frac{1}{8} \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-2) + \frac{5}{24} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 0 = \frac{3}{8}\ .$$

Definice 2. Kooperativní výplatní oblast je množina

$$\mathsf{K} = \{(u(P), v(P)) :\ P \text{ je společná strategie}\}. \tag{4.4}$$

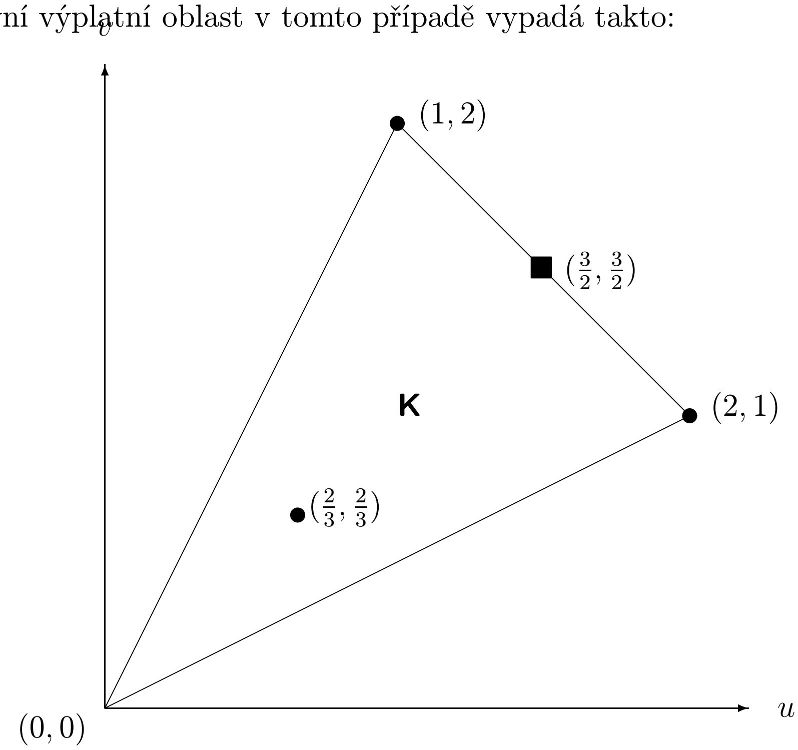
Přímo z definice plyne, že kooperativní výplatní oblast je vždy **konvexní, uzavřená a omezená množina**, která vždy obsahuje odpovídající nekooperativní oblast.

V **kooperativní hře** hráči uzavírají dohodu o tom, jakou společnou strategii mají zvolit.

☛ ***Příklad 2.*** **Konflikt typu manželský spor** je hra určená dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Kooperativní výplatní oblast v tomto případě vypadá takto:



Obr. 4.1: Kooperativní výplatní oblast pro manželský spor

Definice 3. Dvojice hodnot výplatních funkcí $(\hat{u}, \hat{v}) \in \mathbf{K}$ se nazývá **paretovská** či **nedominovaná**, jestliže neexistuje žádná jiná výplatní dvojice $(u, v) \in \mathbf{K}$, pro kterou by bylo

$$u \geq \hat{u} \qquad \text{a zároveň} \qquad v \geq \hat{v},$$

přičemž alespoň jedna nerovnost by byla ostrá.

Intuitivní představy o tom, které dvojice výplatních funkcí přicházejí v úvahu pro dohodu, shrnuje následující definice:

Definice 4. Vyjednávací množina pro kooperativní hru dvou hráčů je množina všech *Paretovských*) výplatních dvojic $(u, v) \in \mathsf{K}$ takových, že

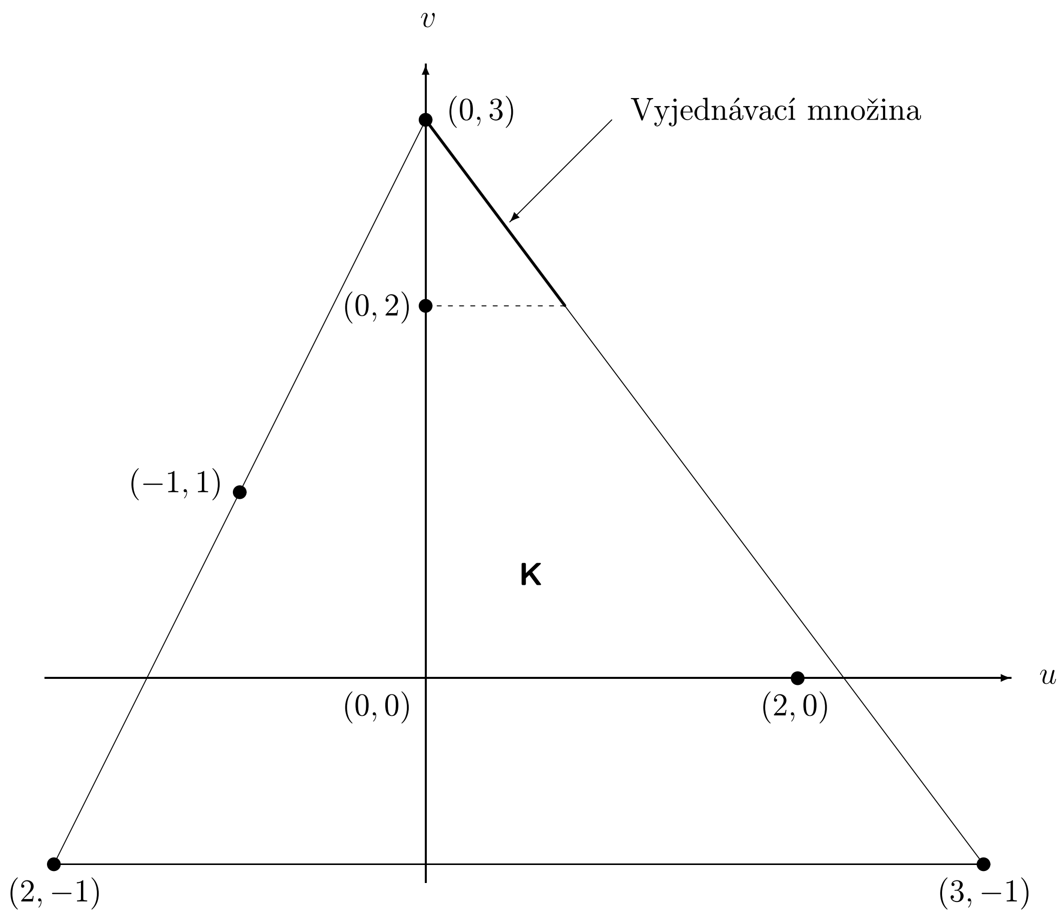
$$u \geq v_1, \qquad v \geq v_2,$$

kde v_1, v_2 jsou maximinní hodnoty, tj.

$$v_1 = \max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \qquad v_2 = \max_{\boldsymbol{q}} \min_{\boldsymbol{p}} v(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

(tyto hodnoty jsou si hráči schopni zaručit bez spolupráce).

Pro hru z příkladu 4.1 je vyjednávací množina znázorněna na obr. 4.2. Maximinní hodnoty jsou zde $v_1 = 0$, $v_2 = 2$, vyjednávací množina je proto úsečka mezi body $(0, 3)$ a $(3/4, 2)$.



Obr. 4.2: Vyjednávací množina pro hru z příkladu 4.1

4.2 KONVEXNÍ MNOŽINY

Připomeňme si základní pojmy a vlastnosti týkající se konvexních množin.

Definice 5. Množina $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **konvexní**, jestliže pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$ a každé reálné číslo t, $0 \leq t \leq 1$, platí:

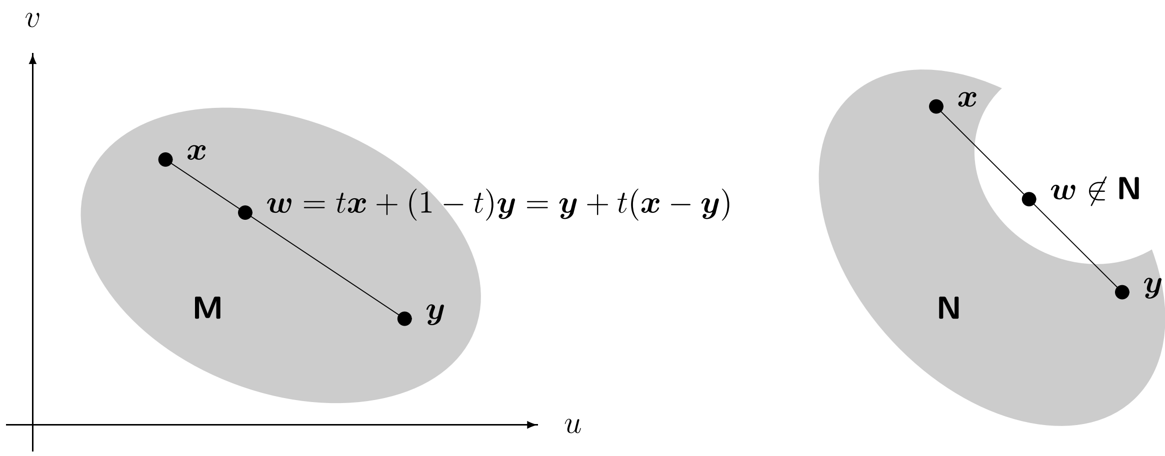
$$t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$$

Jinými slovy, množina $\mathbf{M}$ je konvexní, jestliže každá úsečka, jejíž koncové body leží v $\mathbf{M}$, leží celá v $\mathbf{M}$ (viz obr. 4.3).

Definice 6. Nechť $F = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ je konečná podmnožina $\mathbb{R}^n$. **Konvexní kombinací** množiny F se rozumí vektor

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{x}_i, \qquad \text{kde } t_1 \geq 0, \dots, t_k \geq 0, \quad t_1 + \cdots t_k = 1. \tag{4.6}$$

Indukcí se snadno odvodí, že je-li daná množina $\mathbf{M}$ konvexní, pak každá konvexní kombinace bodů z $\mathbf{M}$ opět leží v $\mathbf{M}$.



OBR. 4.3: KONVEXNÍ MNOŽINA M A NEKONVEXNÍ MNOŽINA N

Definice 7. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná podmnožina $\mathbb{R}^n$. **Konvexním uzávěrem** množiny A se rozumí množina všech konvexních kombinací konečných podmnožin množiny $\mathbf{A}$. Konvexní uzávěr budeme značit symbolem $\mathrm{konv}(A)$.

Rozmyslete si, že konvexní uzávěr je konvexní množina a že každá konvexní množina obsahující $\mathbf{A}$ obsahuje i $\mathrm{konv}(A)$.

Na obrázku 4.1 je konvexním uzávěrem množiny bodů $(0,0)$, $(1,2)$ a $(2,1)$ trojúhelník K s vrcholy v těchto bodech, týž trojúhelník je konvexním uzávěrem množiny bodů, kde k výše uvedeným přibudou body $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ a $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, případně další body ležící uvnitř nebo na obvodu daného trojúhelníku. Na obrázku 4.2 je konvexním uzávěrem množiny všech znázorněných bodů trojúhelník K s vrcholy v bodech $(2,-1)$, $(3,-1)$ a $(0,3)$. Na obrázku 4.3 vlevo je elipsa M konvexním uzávěrem bodů ležících na její hranici či uvnitř.

Vzhledem k tomu, že koeficienty t_i v konvexní kombinaci (4.6) mají vlastnosti pravděpodobností, dostáváme následující větu:

Věta 2. *Nechť G je hra dvou hráčů určená dvojmaticí C typu $m \times n$. Kooperativní výplatní oblast je konvexní uzávěr množiny bodů v $\mathbb{R}^2$, jejichž souřadnice jsou prvky dvojmatice C.*

Důkaz. Je-li P společná strategie, pak odpovídající dvojice hodnot výplatních funkcí je

$$(u(P), v(P)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} c_{ij}.$$

Všechny tyto body vytvoří komplexní uzávěr množiny

$$\{c_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Naopak, jakýkoli bod konvexního uzávěru této množiny je výplatní dvojicí. □

Definice 8. Množina $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá **symetrická**, jestliže pro každé $u, v \in \mathbb{R}$ platí:

$$(v,u) \in M \iff (u,v) \in M.$$

Definice 9. Uvažujme množinu $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^2$. **Symetrický konvexní uzávěr** je definován jako konvexní uzávěr množiny

$$\mathbf{A} \cup \{(v,u) : \ (u,v) \in \mathbf{A}\}$$

a značí se symbolem skonv($\mathbf{A}$).

Tvrzení 2. *Nechť $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^2$ a k je takové číslo, že pro každý bod $(u,v) \in \mathbf{A}$ platí:*

$$u + v \leq k.$$

Potom stejná nerovnost platí pro každý bod symetrického konvexního uzávěru skonv($\mathbf{A}$).

4.3 VYJEDNÁVÁNÍ

4.3.1 Nashovy vyjednávací axiomy

Následující teorie byla vypracována Johnem Nashem v roce 1950 a představuje pokus o ustanovení spravedlivé metody, jak rozhodnout, která dvojice hodnot výplatních funkcí ve vyjednávací množině má být zvolena. Základní myšlenka spočívá v odvození tzv. **arbitrážního procesu** Ψ, který pro výplatní oblast $\mathbf{P}$ a bod „status quo“ $(u_0, v_0) \in \mathbf{P}$ poskytne dvojici hodnot výplatních funkcí – tzv. **arbitrážní bod**, který je spravedlivý k oběma hráčům. Jako bod „status quo“ se obvykle uvažuje dvojice maximinních hodnot.

Arbitrážní proces Ψ si lze představit jako proces, kdy je povolán nezávislý člověk – arbitr, aby vyřešil konflikt.

Od arbitrážního procesu jsou požadovány následující vlastnosti, které lze chápat jako principy spravedlnosti a konzistence, jež mohou vést arbitra při rozhodování.

Definice 10 – NASHOVY VYJEDNÁVACÍ AXIOMY.
Pro výplatní oblast $\mathbf{P}$ a bod „status quo“ $(u_0, v_0) \in \mathbf{P}$ označme $\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*)$.

1. **Individuální racionalita:** $u^* \geq u_0,\ v^* \geq v_0$
2. **Paretovská optimalita:** dvojice (u^*, v^*) je paretovsky optimální.
3. **Dosažitelnost:** $(u^*, v^*) \in P$.
4. **Nezávislost irelevantních alternativ:**
   Je-li P' výplatní oblast obsažená v P a obě dvojice $(u_0, v_0),\ (u^*, v^*) \in P'$, pak
   $$\Psi(P', (u_0, v_0)) = (u^*, v^*).$$
5. **Nezávislost na lineární transformaci:**
   Je-li P' získáno z P lineární transformací
   $$u' = au + b, \qquad v' = cv + d, \qquad \text{kde} \quad a, c > 0,$$
   pak
   $$\Psi(P', (au_0 + b, cv_0 + d)) = (au^* + b, cv^* + d).$$
6. **Symetrie:** Je-li množina P symetrická (tj. $(u, v) \in P \Leftrightarrow (v, u) \in P$) a $(u_0, v_0) \in P$, pak $u^* = v^*$.

Věta 3. *Existuje právě jeden arbitrážní proces Ψ splňující Nashovy axiomy.*

Důkaz.

- **Konstrukce Ψ.**

Případ (i) Existuje bod $(u, v) \in \mathbf{P}$, pro který $u > u_0$ a $v > v_0$.

Množinu všech bodů (u, v) s touto vlastností označme $\mathbf{K}$ a definujme

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0), \qquad \text{pro} \quad (u, v) \in \mathbf{K}.$$

Lze dokázat, že existuje právě jeden bod (u^*, v^*), v němž funkce $g(u,v)$ nabývá maximální hodnoty. Definujme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*).$$

Případ (ii) Pro žádný bod $(u,v) \in \mathbf{P}$ neplatí zároveň $u > u_0$ a $v > v_0$.

Uvažujme následující tři dílčí případy:

Případ (iia) Existuje bod $(u_0, v) \in \mathbf{P}$, pro který $v > v_0$.

Největší v s uvedenou vlastností, pro něž je $(u_0, v) \in \mathbf{P}$, označme symbolem v^*.

Definujme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u_0, v^*).$$

Případ (iib) Existuje bod $(u, v_0) \in \mathbf{P}$, pro který $u > u_0$.

Největší u s uvedenou vlastností, pro něž je $(u, v_0) \in \mathbf{P}$, označme symbolem u^*.

Definujme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v_0).$$

Případ (iic) Nenastává ani jeden z případů (iia), (iib).

Definujme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u_0, v_0).$$

Případy (iia) a (iib) nemohou nastat zároveň, neboť pak by stačilo uvažovat bod

$$(u', v') = \frac{1}{2}(u_0, v) + \frac{1}{2}(u, v_0),$$

který je prvkem množiny $\mathbf{P}$ (plyne z konvexnosti) a splňuje podmínku z případu (i) – ten však v případě (ii) neplatí a vznikl tak spor.

• **Ověření Nashových axiomů.**

Axiomy (1) a (3) jsou zřejmě splněny ve všech případech.

Axiom (2): Pokud by nebyl splněn, pak by existoval bod $(u,v) \in \mathbf{P}$, který by dominoval bodu (u^*, v^*) a byl by od něj různý.
V případě **(i)** by platilo

$$(u - u_0) \geq (u^* - u_0), \qquad (v - v_0) \geq (v^* - v_0)$$

a aspoň jedna z těchto nerovností by byla ostrá (protože $(u,v) \neq (u^*, v^*)$). Proto

$$g(u,v) > g(u^*, v^*),$$

což je **spor** s konstrukcí (u^*, v^*).
V případě **(iia)** musí být $u^* = u_0 = u$, protože neplatí zároveň (iib), proto $v > v^*$, což je spor s definicí v^*. V případě **(iib)** se postupuje podobně. V případě **(iic)** je $(u^*, v^*) = (u_0, v_0)$; pokud by bylo $u > u_0$, pak by platilo (iib), při $v > v_0$ by nastal případ (iia), což je opět spor. Axiom (2) tedy musí platit.

Axiom (4): V případě **(i)** je maximální hodnota funkce g přes průnik $\mathbf{K} \cap \mathbf{P}'$ je menší nebo rovna její maximální hodnotě přes množinu $\mathbf{K}$. Protože ale $(u^*, v^*) \in P'$, jsou si tato maxima rovna. Proto

$$\Psi(P', (u_0, v_0)) = \Psi(P, (u_0, v_0)).$$

V případech **(iia)**, **(iib)** lze postupovat podobně, případ **(iic)** je snadný.

Axiom (5): V případě **(i)** platí **(i)** i pro výplatní oblast P' se status quo bodem $(au_0 + b, cv_0 + d)$. Proto

$$(u' - (au_0 + b))(v' - (cv_0 + d)) = ac(u - u_0)(v - v_0).$$

Protože $a, c > 0$, nabývá funkce na levé straně rovnice svého maxima v bodě $(au^* + b, cv^* + d)$. V případě (i) tedy axiom (5) platí. Postup v ostatních případech je obdobný.

Axiom (6): Pokud by bylo $u^* \neq v^*$, pak by ze symetrie plynulo $(v^*, u^*) \in P$; v případě **(i)** by platilo

$$g(v^*, u^*) = g(u^*, v^*).$$

Podle tvrzení 3 nabývá funkce g svého maxima pouze v jednom bodě, což je spor. Případy **(iia)** a **(iib)** nemohou vzhledem k symetrii nastat.

- **Jednoznačnost.**

Důkaz se provede sporem, k němuž se dojde z předpokladu, že existuje jiný arbitrážní proces $\overline{\Psi}$ splňující Nashovy axiomy. Protože jsou tyto procesy různé, existuje výplatní oblast $\mathbf{P}$ a „status quo“ bod $(u_0, v_0) \in P$, pro něž

$$(\overline{u}, \overline{v}) = \overline{\Psi}(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) \neq \Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*).$$

Tvrzení 3. *Nechť* $\mathbf{P}$ *je výplatní oblast a* $(u_0, v_0) \in P$*. Předpokládejme, že existuje bod* $(u, v) \in P$ *s vlastností*

$$u > u_0, \quad v > v_0;$$

množinu všech bodů (u, v) *uvedené vlastnosti označme symbolem* $\mathbf{K}$*. Definujme na množině* $\mathbf{K}$ *funkci*

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0).$$

Potom g *dosahuje svého maxima na* $\mathbf{K}$ *v právě jednom bodě.*

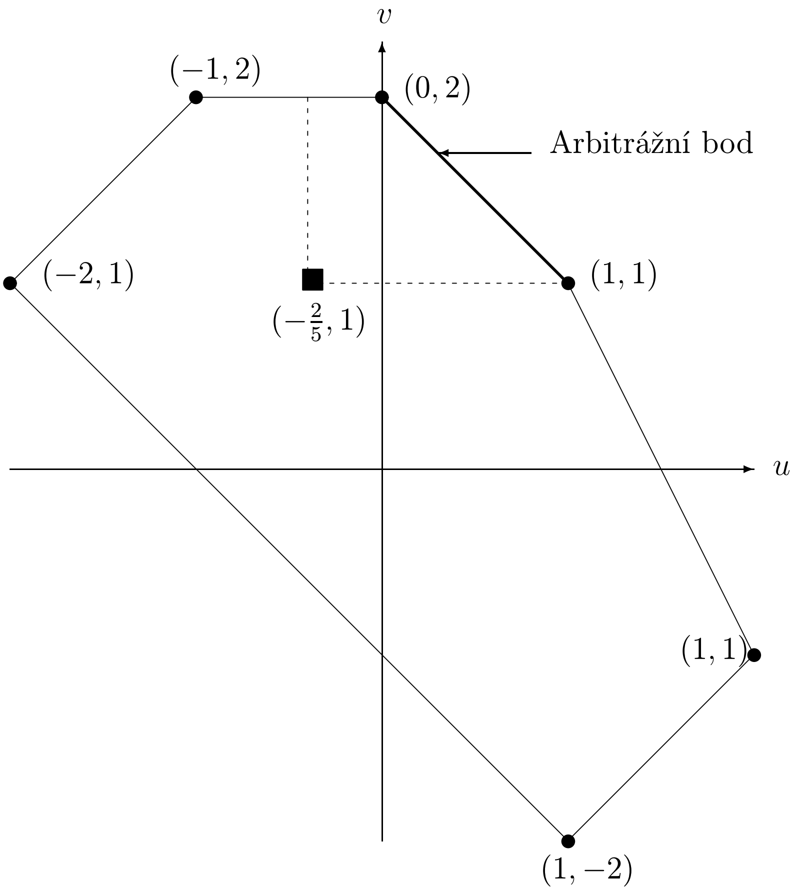
4.3.2 Příklady

V případě konfliktu typu manželský spor z příkladu 4.1 je výplatní oblast symetrická, dvojice maximinních hodnot je $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Jako „status quo“ uvažujme $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Vzhledem k axiomu (6) musí mít arbitrážní bod tvar (a, a). Protože vzhledem k axiomu (2) musí být bod (a, a) paretovsky optimální, tj. nedominovaný, musí být $a = \frac{3}{2}$ (viz obr. 4.1). To je zároveň bod, k němuž by nás dovedla intuice.

☛ ***Příklad 3.*** Uvažujme kooperativní hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (2,-1) & (-2,1) & (1,1) \\ (-1,2) & (0,2) & (1,-2) \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Maximinní hodnoty jsou $v_1 = -\frac{2}{5}, v_2 = 1$ (vypočítejte!).



Obr. 4.4: Výplatní oblast a arbitrážní bod pro hru z příkladu 4.3.2

Položme $(u_0, v_0) = (-\frac{2}{5}, 1)$. Arbitrážní bod zřejmě musí být nalezen mezi body výplatní oblasti, které dominují $(-\frac{2}{5}, 1)$ a které nejsou dominovány žádnými jinými body – tj. na úsečce s krajními body $(0,2)$ a $(1,1)$, která představuje vyjednávací množinu. Podle konstrukce arbitrážního bodu hledáme maximum funkce

$$g(u,v) = (u-u_0)(v-v_0) = \left(u + \frac{2}{5}\right)(v-1)$$

na úsečce dané rovnicí $v = -u + 2$. Jedná se tedy o nalezení extrému funkce jedné reálné proměnné

$$g(u, -u+2) = \left(u + \frac{2}{5}\right)(-u+1) = -u^2 + \frac{3}{5}u + \frac{2}{5}\ .$$

Pomocí diferenciálního počtu obdržíme

$$u = \frac{3}{10}\ , \quad v = \frac{17}{10}\ .$$

☛ ***Příklad 4.*** Uvažujme kooperativní hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (5,1) & (7,4) & (1,10) \\ (1,1) & (9,-2) & (5,1) \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Maximinní hodnoty jsou $v_1 = 3, v_2 = 1$. Vyjednávací množina je nyní tvořena dvěma úsečkami, stejný postup jako v příkladu 4.3.2 se použije na obě úsečky, přičemž pro jednu vyjde bod maxima mimo ni, pro druhou získáme arbitrážní bod

$$u = \frac{13}{2}, \quad v = \frac{9}{2}.$$

☛ ***Příklad 5.*** Uvažujme kooperativní hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (2,-3) & (-1,3) \\ (0,1) & (1,-2) \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Maximinní hodnoty jsou $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = -\frac{1}{3}$. Vyjednávací množina je tvořena úsečkou s krajními body $(\frac{1}{2}, 0)$ a $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. Maximum funkce

$$g(u,v) = (u - \frac{1}{2})(v + \frac{1}{3})$$

na úsečce

$$v = -2u + 1, \qquad \frac{1}{2} \le u \le \frac{2}{3}$$

nastává v bodě $(\frac{7}{12}, -\frac{1}{6})$; to je hledaný arbitrážní bod.