1. vnitrosemestrální písemka – MB103 – podzim 2019 – 31. 10.

SKUPINA — A

Na řešení je 60 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3.5 bodu) Uvažme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^3 + 6xy - 5y + y^2.$$

Určete stacionární body funkce $f(x, y)$ a o každém z těchto bodů rozhodněte, zda v něm nastává buď lokální maximum nebo lokální minimum nebo že v něm lokální extrém není.

2. (3 body) Uvažme funkci $z = f(x, y)$ zadanou implicitně vztahem

$$x^2 - 4z^2 + 2x - 8y + 8z = 0$$

na okolí bodu $(0, 0, 0)$.

a) Určete parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$.

b) Platí $z_{xx}(0, 0) = \frac{3}{16}$ a $z_{yy}(0, 0) = -1$ (toto nedokazujte). Určete druhou parciální derivaci z_{xy} v bodě $(0, 0)$ a napište matici druhých parciálních derivací v tomto bodě.

c) Napište Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$.

3. (3.5 bodu) Je dána množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ v polorovině $x \geq 0$ ohraničená křivkami $y = x^2 - 4$, $x = 0$ a $y = -x + 2$.

a) Načrtněte množinu A a určete ty průsečíky uvedených křivek, které leží v A. (Tyto body jsou „vrcholy“ množiny A.)

b) Spočtěte $\iint_A x \, dxdy$.

1. vnitrosemestrální písemka – MB103 – podzim 2019 – 31. 10.

SKUPINA — B

Na řešení je 60 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3.5 body) Uvažme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^3 + 6xy + 6x - 3y + y^2.$$

Určete stacionární body funkce $f(x, y)$ a o každém z těchto bodů rozhodněte, zda v něm nastává buď lokální maximum nebo lokální minimum nebo že v něm lokální extrém není.

2. (3 body) Uvažme funkci $z = f(x, y)$ zadanou implicitně vztahem

$$2x^2 - z^2 - 4x + 2y + 8z = 0$$

na okolí bodu $(0, 0, 0)$.

a) Určete parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$.

b) Platí $z_{xx}(0, 0) = -\frac{7}{16}$ a $z_{yy}(0, 0) = \frac{1}{64}$ (toto nedokazujte). Určete druhou parciální derivaci z_{xy} v bodě $(0, 0)$ a napište matici druhých parciálních derivací v tomto bodě.

c) Napište Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$.

3. (3.5 body) Je dána množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ v polorovině $x \leq 0$ ohraničená křivkami $y = x^2 - 1$, $x = 0$ a $y = x + 5$.

a) Načrtněte množinu A a určete ty průsečíky uvedených křivek, které leží v A. (Tyto body jsou „vrcholy“ množiny A.)

b) Spočtěte $\iint_A x \, dxdy$.

1. vnitrosemestrální písemka – MB103 – podzim 2019 – 31. 10.

SKUPINA — X

Na řešení je 60 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3.5 body) Uvažme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^3 + 6xy - 6x - 7y + y^2.$$

Určete stacionární body funkce $f(x,y)$ a o každém z těchto bodů rozhodněte, zda v něm nastává buď lokální maximum nebo lokální minimum nebo že v něm lokální extrém není.

2. (3 body) Uvažme funkci $z = f(x,y)$ zadanou implicitně vztahem

$$2x^2 - 4z^2 - 2x + y - 8z = 0$$

na okolí bodu $(0,0,0)$.

a) Určete parciální derivace funkce $f(x,y)$ v bodě $(0,0)$.

b) Platí $z_{xx}(0,0) = \frac{7}{16}$ a $z_{yy}(0,0) = -\frac{1}{64}$ (toto nedokazujte). Určete druhou parciální derivaci z_{xy} v bodě $(0,0)$ a napište matici druhých parciálních derivací v tomto bodě.

c) Napište Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y)$ v bodě $(0,0)$.

3. (3.5 body) Je dána množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ v polorovině $x \geq 0$ ohraničená křivkami $y = x^2 + 1$, $x = 0$ a $y = -x + 7$.

a) Načrtněte množinu A a určete ty průsečíky uvedených křivek, které leží v A. (Tyto body jsou „vrcholy“ množiny A.)

b) Spočtěte $\iint_A x \, dxdy$.

1. vnitrosemestrální písemka – MB103 – podzim 2019 – 31. 10.

SKUPINA — Y

Na řešení je 60 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3.5 body) Uvažme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^3 + 12xy - 10y + 4y^2.$$

Určete stacionární body funkce $f(x, y)$ a o každém z těchto bodů rozhodněte, zda v něm nastává buď lokální maximum nebo lokální minimum nebo že v něm lokální extrém není.

2. (3 body) Uvažme funkci $z = f(x, y)$ zadanou implicitně vztahem

$$4x^2 - z^2 - 2x + y - 2z = 0$$

na okolí bodu $(0, 0, 0)$.

a) Určete parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$.

b) Platí $z_{xx}(0, 0) = 3$ a $z_{yy}(0, 0) = -\frac{1}{4}$ (toto nedokazujte). Určete druhou parciální derivaci z_{xy} v bodě $(0, 0)$ a napište matici druhých parciálních derivací v tomto bodě.

c) Napište Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$.

3. (3.5 body) Je dána množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ v polorovině $x \leq 0$ ohraničená křivkami $y = x^2 - 3$, $x = 0$ a $y = x + 3$.

a) Načrtněte množinu A a určete ty průsečíky uvedených křivek, které leží v A. (Tyto body jsou „vrcholy“ množiny A.)

b) Spočtěte $\iint_A x \, dxdy$.

Řešení a bodování

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

Skupina A:

1. **[3.5b]** Parciální derivace položíme rovny nule,

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 6y = 0 \quad \text{a} \quad f_y(x,y) = 6x - 5 + 2y = 0,$$

[0.5b]. Tato soustava rovnic má dvě řešení: $[1, -\frac{1}{2}]$ a $[5, -\frac{25}{2}]$, [0.5b+0.5b]. Matice druhých derivací je

$$d^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Tedy

$$d^2 f(1, -\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad d^2 f(5, -\tfrac{25}{2}) = \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Matice $d^2 f(5, -\frac{25}{2})$ je pozitivně definitní a tedy je v bodě $[5, -\frac{25}{2}]$ lokální minimum, [0.5b]. Matice $d^2 f(1, -\frac{1}{2})$ nesplňuje kritéria pro definitnost; ukážeme přímo z definice, že je indefinitní:

$$(a,b) \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 6a^2 + 12ab + 2b^2,$$

což je kladný výraz např. pro $(a,b) = (1,1)$ a záporný např. pro $(a,b) = (1,-1)$. Tedy extrém v bodě $[1, -\frac{1}{2}]$ není, [0.5b]. (Totéž plyne z toho, že $\det\left(\begin{smallmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right) < 0$, tj. tato matice má jedno kladné a jedno záporné vlastní číslo a tedy je indefinitiní.)

2. a) **[1b]** Zderivujeme $x^2 - 4z^2 + 2x - 8y + 8z = 0$ parciálně podle x a y, přičemž chápeme z jako funkci proměnných x a y. Dostaneme

$$4z_x(z-1) - (x+1) = 0 \quad \text{a} \quad z_y(z-1) + 1 = 0,$$

což v bodě $[x,y,z] = [0,0,0]$ znamená $z_x = -\frac{1}{4}$ a $z_y = 1$, [0.5b za postup a 0.5b za správný výsledek].

b) **[1b]** Ukážeme výpočet všech druhých parciálních derivací. Další derivací $4z_x(z-1) - (x+1) = 0$ podle x a podle y a také derivací $z_y(z-1) + 1 = 0$ podle y postupně dostáváme

$$4z_{xx}(z-1) + 4(z_x)^2 - 1 = 0, \quad z_{xy}(z-1) + z_x z_y = 0 \quad \text{a} \quad z_{yy}(z-1) + (z_y)^2 = 0.$$

V bodě $[x,y,z] = [0,0,0]$ a pro $z_x = -\frac{1}{4}$ a $z_y = 1$ tedy dostáváme

$$\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix},$$

[0.5b za postup výpočtu z_{xy} a 0.5b za správný výsledek včetně matice druhých derivací].

Pozn.: V zadání se vyskytla chyba ve znaménku, $z_{xx} = -\frac{3}{16}$ a $z_{yy} = 1$ jsou správné hodnoty. Toto ovšem na hodnocení nemělo vliv.

c) **[1b]** Taylorův polynom funkce $z = f(x,y)$ se středem v počátku je

$$T_2(a,b) = f(0,0) + (-\tfrac{1}{4}, 1) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(a,b) \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= -\tfrac{1}{4}a + b - \tfrac{3}{32}a^2 - \tfrac{1}{4}ab + \tfrac{1}{2}b^2,$$

[0.5b za postup a 0.5b za správný výsledek].

3. a) **[1.5b]** Hledané body jsou $[0,-4]$, $[0,2]$ a $[2,0]$ + obrázek, [0.5b za náčrt, 0.5b za postup výpočtu bodů a 0.5b za správný úplný výsledek].

b) **[2b]** Množina A je plocha mezi křivkami $y = x^2 - 4$ a $y = -x + 2$ pro $0 \le x \le 2$, [0.5b za meze intergrálu]. Tedy

$$\iint_A x\, dxdy = \int_0^2 \int_{x^2-4}^{-x+2} x\, dydx = \int_0^2 x\big(-x^2 - x + 6\big)\, dx = [-\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2]_0^2 = \tfrac{16}{3}.$$

[0.5b za správné pořadí integrace, 0.5b za postup integrování a 0.5b za správný výsledek].

Řešení a bodování

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

Skupina B:

1. **[3.5b]** Parciální derivace položíme rovny nule,

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 6y + 6 = 0 \quad \text{a} \quad f_y(x,y) = 6x - 3 + 2y = 0,$$

[0.5b]. Tato soustava rovnic má dvě řešení: $[1, -\frac{3}{2}]$ a $[5, -\frac{27}{2}]$, [0.5b+0.5b]. Matice druhých derivací je

$$d^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Tedy

$$d^2 f(1, -\tfrac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad d^2 f(5, -\tfrac{27}{2}) = \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Matice $d^2 f(5, -\frac{27}{2})$ je pozitivně definitní a tedy je v bodě $[5, -\frac{27}{2}]$ lokální minimum, [0.5b]. Matice $d^2 f(1, -\frac{3}{2})$ nesplňuje kritéria pro definitnost; ukážeme přímo z definice, že je indefinitní:

$$(a,b) \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 6a^2 + 12ab + 2b^2,$$

což je kladný výraz např. pro $(a,b) = (1,1)$ a záporný např. pro $(a,b) = (1,-1)$. Tedy extrém v bodě $[1, -\frac{3}{2}]$ není, [0.5b]. (Totéž plyne z toho, že $\det \left(\begin{smallmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right) < 0$, tj. tato matice má jedno kladné a jedno záporné vlastní číslo a tedy je indefinitiní.)

2. a) **[1b]** Zderivujeme $2x^2 - z^2 - 4x + 2y + 8z = 0$ parciálně podle x a y, přičemž chápeme z jako funkci proměnných x a y. Dostaneme

$$z_x(z-4) - 2(x-1) = 0 \quad \text{a} \quad z_y(z-4) - 1 = 0,$$

což v bodě $[x,y,z] = [0,0,0]$ znamená $z_x = \frac{1}{2}$ a $z_y = -\frac{1}{4}$, [0.5b za postup a 0.5b za správný výsledek].

b) **[1b]** Ukážeme výpočet všech druhých parciálních derivací. Další derivací $z_x(z-4) - 2(x-1) = 0$ podle x a podle y a také derivací $z_y(z-4) - 1 = 0$ podle y postupně dostáváme

$$z_{xx}(z-4) + ((z_x)^2 - 2) = 0, \quad z_{xy}(z-4) + z_x z_y = 0 \quad \text{a} \quad z_{yy}(z-4) + (z_y)^2 = 0.$$

V bodě $[x,y,z] = [0,0,0]$ a pro $z_x = \frac{1}{2}$ a $z_y = -\frac{1}{4}$ tedy dostáváme

$$\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{32} & \frac{1}{64} \end{pmatrix},$$

[0.5b za postup výpočtu z_{xy} a 0.5b za správný výsledek včetně matice druhých derivací].

c) **[1b]** Taylorův polynom funkce $z = f(x,y)$ se středem v počátku je

$$T_2(a,b) = f(0,0) + (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(a,b) \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{32} & \frac{1}{64} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}b - \tfrac{7}{32}a^2 - \tfrac{1}{32}ab + \tfrac{1}{128}b^2,$$

[0.5b za postup a 0.5b za správný výsledek].

3. a) **[1.5b]** Hledané body jsou $[0,-1]$, $[0,5]$ a $[-2,3]$ + obrázek, [0.5b za náčrt, 0.5b za postup výpočtu bodů a 0.5b za správný úplný výsledek].

b) **[2b]** Množina A je plocha mezi křivkami $y = x^2 - 1$ a $y = x + 5$ pro $-2 \le x \le 0$, [0.5b za meze intergrálu]. Tedy

$$\iint_A x \, dxdy = \int_{-2}^{0} \int_{x^2-1}^{x+5} x \, dydx = \int_{-2}^{0} x(-x^2 + x + 6) \, dx = [-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2]_{-2}^{0} = -\tfrac{16}{3}.$$

[0.5b za správné pořadí integrace, 0.5b za postup integrování a 0.5b za správný výsledek].

Řešení a bodování

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

Skupina X:

1. **[3.5b]** Parciální derivace položíme rovny nule,

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 6y - 6 = 0 \quad \text{a} \quad f_y(x,y) = 6x - 7 + 2y = 0,$$

[0.5b]. Tato soustava rovnic má dvě řešení: $[1, \frac{1}{2}]$ a $[5, -\frac{23}{2}]$, [0.5b+0.5b]. Matice druhých derivací je

$$d^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Tedy

$$d^2 f(1, \tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad d^2 f(5, -\tfrac{23}{2}) = \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Matice $d^2 f(5, -\frac{23}{2})$ je pozitivně definitní a tedy je v bodě $[5, -\frac{23}{2}]$ lokální minimum, [0.5b]. Matice $d^2 f(1, \frac{1}{2})$ nesplňuje kritéria pro definitnost; ukážeme přímo z definice, že je indefinitní:

$$(a,b) \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 6a^2 + 12ab + 2b^2,$$

což je kladný výraz např. pro $(a,b) = (1,1)$ a záporný např. pro $(a,b) = (1,-1)$. Tedy extrém v bodě $[1, \frac{1}{2}]$ není, [0.5b]. (Totéž plyne z toho, že $\det \left(\begin{smallmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right) < 0$, tj. tato matice má jedno kladné a jedno záporné vlastní číslo a tedy je indefinitiní.)

2. a) **[1b]** Zderivujeme $2x^2 - 4z^2 - 2x + y - 8z = 0$ parciálně podle x a y, přičemž chápeme z jako funkci proměnných x a y. Dostaneme

$$4z_x(z+1) - (2x-1) = 0 \quad \text{a} \quad 8z_y(z+1) - 1 = 0,$$

což v bodě $[x,y,z] = [0,0,0]$ znamená $z_x = -\frac{1}{4}$ a $z_y = \frac{1}{8}$, [0.5b za postup a 0.5b za správný výsledek].

b) **[1b]** Ukážeme výpočet všech druhých parciálních derivací. Další derivací $4z_x(z+1) - (2x-1) = 0$ podle x a podle y a také derivací $8z_y(z+1) - 1 = 0$ podle y postupně dostáváme

$$2z_{xx}(z+1) + 2(z_x)^2 - 1 = 0, \quad z_{xy}(z+1) + z_x z_y = 0 \quad \text{a} \quad z_{yy}(z+1) + (z_y)^2 = 0.$$

V bodě $[x,y,z] = [0,0,0]$ a pro $z_x = -\frac{1}{4}$ a $z_y = \frac{1}{8}$ tedy dostáváme

$$\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{32} & -\frac{1}{64} \end{pmatrix},$$

[0.5b za postup výpočtu z_{xy} a 0.5b za správný výsledek včetně matice druhých derivací].

c) **[1b]** Taylorův polynom funkce $z = f(x,y)$ se středem v počátku je

$$T_2(a,b) = f(0,0) + (-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(a,b) \begin{pmatrix} \frac{7}{16} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{32} & -\frac{1}{64} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$
$$= -\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{8}b + \tfrac{7}{32}a^2 + \tfrac{1}{32}ab - \tfrac{1}{128}b^2,$$

[0.5b za postup a 0.5b za správný výsledek].

3. a) **[1.5b]** Hledané body jsou $[0,1]$, $[0,7]$ a $[2,5]$ + obrázek, [0.5b za náčrt, 0.5b za postup výpočtu bodů a 0.5b za správný úplný výsledek].

b) **[2b]** Množina A je plocha mezi křivkami $y = x^2 + 1$ a $y = -x + 7$ pro $0 \leq x \leq 2$, [0.5b za meze intergrálu]. Tedy

$$\iint_A x\, dxdy = \int_0^2 \int_{x^2+1}^{-x+7} x\, dydx = \int_0^2 x\big(-x^2 - x + 6\big)\, dx = [-\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2]_0^2 = \tfrac{16}{3}.$$

[0.5b za správné pořadí integrace, 0.5b za postup integrování a 0.5b za správný výsledek].

Řešení a bodování

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

Skupina Y:

1. **[3.5b]** Parciální derivace položíme rovny nule,

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 12y = 0 \quad \text{a} \quad f_y(x,y) = 12x - 10 + 8y = 0,$$

[0.5b]. Tato soustava rovnic má dvě řešení: $[1, -\frac{1}{4}]$ a $[5, -\frac{25}{4}]$, [0.5b+0.5b]. Matice druhých derivací je

$$d^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Tedy

$$d^2 f(1, -\tfrac{1}{4}) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad d^2 f(5, -\tfrac{25}{4}) = \begin{pmatrix} 30 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Matice $d^2 f(5, -\frac{25}{4})$ je pozitivně definitní a tedy je v bodě $[5, -\frac{25}{4}]$ lokální minimum, [0.5b]. Matice $d^2 f(1, -\frac{1}{4})$ nesplňuje kritéria pro definitnost; ukážeme přímo z definice, že je indefinitní:

$$(a,b) \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 6a^2 + 24ab + 8b^2,$$

což je kladný výraz např. pro $(a,b) = (1,1)$ a záporný např. pro $(a,b) = (1,-1)$. Tedy extrém v bodě $[1, -\frac{1}{4}]$ není, [0.5b]. (Totéž plyne z toho, že $\det \left(\begin{smallmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 8 \end{smallmatrix}\right) < 0$, tj. tato matice má jedno kladné a jedno záporné vlastní číslo a tedy je indefinitiní.)

2. a) **[1b]** Zderivujeme $4x^2 - z^2 - 2x + y - 2z = 0$ parciálně podle x a y, přičemž chápeme z jako funkci proměnných x a y. Dostaneme

$$z_x(z+1) - (4x-1) = 0 \quad \text{a} \quad 2z_y(z+1) - 1 = 0,$$

což v bodě $[x,y,z] = [0,0,0]$ znamená $z_x = -1$ a $z_y = \frac{1}{2}$, [0.5b za postup a 0.5b za správný výsledek].

b) **[1b]** Ukážeme výpočet všech druhých parciálních derivací. Další derivací $z_x(z+1) - (4x-1) = 0$ podle x a podle y a také derivací $2z_y(z+1) - 1 = 0$ podle y postupně dostáváme

$$z_{xx}(z+1) + (z_x)^2 - 4 = 0, \quad z_{xy}(z+1) + z_x z_y = 0 \quad \text{a} \quad z_{yy}(z+1) + (z_y)^2 = 0.$$

V bodě $[x,y,z] = [0,0,0]$ a pro $z_x = -1$ a $z_y = \frac{1}{2}$ tedy dostáváme

$$\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

[0.5b za postup výpočtu z_{xy} a 0.5b za správný výsledek včetně matice druhých derivací].

c) **[1b]** Taylorův polynom funkce $z = f(x,y)$ se středem v počátku je

$$T_2(a,b) = f(0,0) + (-1, \tfrac{1}{2}) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(a,b) \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$
$$= -a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{3}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{8}b^2,$$

[0.5b za postup a 0.5b za správný výsledek].

3. a) **[1.5b]** Hledané body jsou $[0,-3]$, $[0,3]$ a $[-2,1]$ + obrázek, [0.5b za náčrt, 0.5b za postup výpočtu bodů a 0.5b za správný úplný výsledek].

b) **[2b]** Množina A je plocha mezi křivkami $y = x^2 - 3$ a $y = x + 3$ pro $-2 \le x \le 0$, [0.5b za meze intergrálu]. Tedy

$$\iint_A x \, dxdy = \int_{-2}^{0} \int_{x^2-3}^{x+3} x \, dydx = \int_{-2}^{0} x(-x^2 + x + 6) \, dx = [-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2]_{-2}^{0} = -\tfrac{16}{3}.$$

[0.5b za správné pořadí integrace, 0.5b za postup integrování a 0.5b za správný výsledek].