

Příklad 1**[8 bodů]**

Definujte následující operace nad jazyky: *zřetězení* a *i-tá mocnina* ($i \in \mathbb{N}_0$).

V definicích nepoužívejte notaci s nepřesným významem (typicky "...").

Dále definujte, kdy je třída jazyků \mathcal{L} uzavřená na binární operaci \circ .

Příklad 2**[5 bodů]**

Určete, kolik slov má jazyk $L^* \setminus (L^2)^+$, kde $L = \{aa, aaa\}$. Všechna slova vypište.

Příklad 3**[10 bodů]**

Navrhněte *deterministický* konečný automat, který rozpoznává jazyk

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ končí podslovem } 0101\}.$$

Příklad 4**[10 bodů]**

Rozhodněte, zda platí následující implikace. Svá rozhodnutí zdůvodněte.

(a) K je konečný a L není regulární $\implies K^* \cup L$ není regulární

(b) K je konečný a $K^* \cup L$ není regulární $\implies L$ není regulární

Příklad 5**15 bodů]**

Rozhodněte, zda je jazyk

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_b(w) = \#_a(w) \vee \#_a(w) \bmod 2 = 1\}$$

regulární. Své tvrzení dokažte. (*Pro důkaz, že jazyk je regulární, stačí napsat odpovídající gramatiku nebo automat.*)

Příklad 6**[12 bodů]**

Zkonstruujte konečný automat rozpoznávající jazyk popsáný regulárním výrazem

$(b^* \cdot (\emptyset \cdot c))^* \cdot (a \cdot a + \varepsilon)$. (*Nemusíte dokazovat, že zkonstruovaný automat rozpoznává zadaný jazyk, pokud použijete standardní algoritmus a uvedete i jeho mezivýsledky. Při provádění algoritmu můžete vykonat více kroků naráz, bude-li se každý krok týkat jiného přechodu*)

Příklad 7**[15 bodů]**

Uvažujme jazyk $L = \{a\} \cdot (\{a, b\}^* \cdot \{a\})$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.

- Určete index \sim_L .
- Popište jednotlivé třídy rozkladu Σ^* / \sim_L .
- Zdefinujte jazyk L' nad abecedou Σ takový, že $L' \neq L$ a $\sim_{L'} = \sim_L$.

Příklad 1**[8 bodů]**

Definujte *deterministický konečný automat*. Dále definujte, kdy jsou stavy tohoto automatu *jazykově ekvivalentní*.

Příklad 2**[5 bodů]**

Určete, kolik slov má jazyk $(\text{co}-L) \setminus L^2$, kde $L = \{a, a^4\} \cup \{a^7\} \cdot \{a\}^*$ je jazyk nad abecedou $\{a\}$. Všechny slova vypište.

Příklad 3**[10 bodů]**

Navrhněte *deterministický* automat generující jazyk

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) > \#_b(w) \wedge \#_b(w) < 2\}.$$

Příklad 4**[10 bodů]**

Nechť L, R jsou jazyky nad stejnou abecedou. Rozhodněte, zda platí následující implikace. Svá rozhodnutí zdůvodněte.

(a) $L \cdot R$ není regulární $\implies L$ není regulární a R není regulární

(b) R je konečný $\implies \text{co}-(L \cup \text{co}-L)$ je regulární

Příklad 5**[15 bodů]**

Rozhodněte, zda je jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) > \#_b(w) \vee \#_b(w) < 2\}$ regulární. Své tvrzení dokažte. (*Pro důkaz, že jazyk je regulární, stačí napsat odpovídající gramatiku nebo automat.*)

Příklad 6**[12 bodů]**

K zadanému deterministickému konečnému automatu \mathcal{A} skonstruujte ekvivalentní minimální konečný automat v kanonickém tvaru. Konstrukci zde uveďte.

\mathcal{A}	a	b
$\hookrightarrow 1$	3	6
$\leftarrow 2$	6	3
3	5	5
$\leftarrow 4$	4	5
$\leftarrow 5$	5	4
$\leftarrow 6$	-	1

Příklad 7**[15 bodů]**

Rozhodněte, zda existuje jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ takový, že:

(a) L je konečný a $\sim_L ab$.

(b) L je nekonečný a $\sim_L ab$.

(c) L není regulární a $\sim_L = \Sigma^* \times \Sigma^*$.

Pokud rozhodnete, že jazyk existuje, uveďte příklad takového jazyka. V opačném případě své tvrzení dokažte.

Příklad 1**[8 bodů]**

Definujte *nedeterministický konečný automat s ε -kroky* a funkci $D_\varepsilon : Q \rightarrow 2^Q$.

Příklad 2**[5 bodů]**

Určete, kolik slov má jazyk $L^3 \cap L^2$, kde $L = \{cd, cc, c, d\}$. Všechny slova vypište.

Příklad 3**[10 bodů]**

Navrhněte *deterministický* automat generující jazyk

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) \geq 2, \#_c(w) = 1\}.$$

Příklad 4**[10 bodů]**

Rozhodněte, zda platí následující implikace. Svá rozhodnutí zdůvodněte.

- (a) $L \cdot L$ není regulární $\implies R$ není regulární
- (b) L je regulární $\implies \{w \cdot w \mid w \in L\}$ je regulární

Příklad 5**[15 bodů]**

Rozhodněte, zda je jazyk $L = \{ab^n c^n \mid n \text{ je liché}\}$ regulární. Své tvrzení dokažte. (*Pro důkaz, že jazyk je regulární, stačí napsat odpovídající gramatiku nebo automat.*)

Příklad 6**[12 bodů]**

K zadanému konečnému automatu \mathcal{A} sestrojte ekvivalentní (nedeterministický) automat bez ε -kroků.

\mathcal{A}	a	b	ε
$\rightarrow 1$	$\{4\}$	$\{2\}$	$\{3, 5\}$
2	$\{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{4\}$
3	\emptyset	$\{1, 3, 4\}$	\emptyset
$\leftarrow 4$	$\{5\}$	\emptyset	$\{5\}$
$\leftarrow 5$	$\{3\}$	$\{4\}$	\emptyset

Příklad 7**[15 bodů]**

Uvažujte následující relace na slovech nad abecedou. U každé relace určete, zda se jedná o pravou kongruenci. Pokud rozhodnete, že se o pravou kongruenci nejedná, dokažte to. V opačném případě určete index relace a popište jednotlivé třídy ekvivalence.

- (a) $u \sim v \stackrel{def}{\iff} u$ obsahuje podslovo a právě když v obsahuje podslovo a .
- (b) $u \sim v \stackrel{def}{\iff} u$ obsahuje podslovo aa právě když v obsahuje podslovo aa .
- (c) $u \sim v \stackrel{def}{\iff} \#_b(u) \leq \#_b(v)$.

Příklad 1**[10 bodů]**

Definujte množinu *regulárních* výrazů nad abecedou Σ a pro každý regulární výraz E definujte jazyk $L(E)$ jednoznačně určený výrazem E .

Příklad 2**[8 bodů]**

Nechť $L = \{a, b, aa, bb, ab, ba\}$ je jazyk nad abecedou $\{a, b\}$. Určete, kolik slov má jazyk $L^* \setminus (\text{co-}L)^2$.

Příklad 3**[10 bodů]**

Najděte deterministický konečný automat rozpoznávající jazyk

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } ca \text{ nebo } bb\}$$

Příklad 4**[10 bodů]**

Rozhodněte, zda pro všechny jazyky L, R nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ platí následující implikace. Svá rozhodnutí zdůvodněte.

(a) L je konečný a $L \cup R$ není regulární $\implies R$ není regulární

(b) L je regulární a $R = L \cap R \implies R$ není regulární

Příklad 5**[15 bodů]**

Rozhodněte, zda je jazyk $L = \{a^i b^j c^k \mid i \geq 2, 0 \leq j, \leq k\}$ regulární. Své tvrzení dokažte. (*Pro důkaz, že jazyk je regulární, stačí napsat odpovídající gramatiku nebo automat.*)

Příklad 6**[12 bodů]**

K zadanému deterministickému konečnému automatu \mathcal{A} zkonstruuje ekvivalentní minimální automat v kanonickém tvaru. Konstrukci zde uveďte.

pozn.: nemám zadání automatu, výsledek ale byl

\mathcal{A}	a	b
$\rightleftarrows A$	A	B
B	C	A
$\leftarrow C$	D	E
D	D	D
E	A	A

Příklad 7**[15 bodů]**

Uvažujme jazyk $L = \{a\} \cdot (\{a, b\} \cdot \{a, b\})^*$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.

- Určete index \sim_L .
- Popište jednotlivé třídy rozkladu Σ^* / \sim_L .
- Zdefinujte nějakou pravou kongruenci \sim takovou, že L je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^* / \sim_L a přitom \sim je různé od \sim_L . (*Nemusíte dokazovat, že má požadované vlastnosti. Stačí ji definovat.*) ...

Příklad 1**[10 bodů]**

Napište definici nedeterministického konečného automatu a rozšířené přechodové funkce.

Příklad 2**[8 bodů]**

Určete, kolik slov má jazyk $L^* \setminus (L^+)^2$, kde $L = \{aa, ab, ba, bb\}$.

Příklad 3**[10 bodů]**

Najděte deterministický konečný automat rozpoznávající jazyk

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid (\#_a(w) + 2\#_b(w)) \bmod 5 = 1\}$$

Příklad 4**[10 bodů]**

Rozhodněte, zda pro všechny jazyky L, R nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ platí následující implikace. Svá rozhodnutí zdůvodněte.

- (a) L je regulární, R není regulární a $L \cap R = \emptyset \implies L \setminus R$ je regulární
- (b) $L \cup R$ není regulární $\implies L$ není regulární a R není regulární

Příklad 5**[15 bodů]**

Rozhodněte, zda je jazyk $L = \{a^j b^k \mid j, k \geq 0, j \text{ je sudé nebo } j = k\}$ regulární. Své tvrzení dokažte. (*Pro důkaz, že jazyk je regulární, stačí napsat odpovídající gramatiku nebo automat.*)

Příklad 6**[12 bodů]**

Zkonstruujte konečný automat rozpoznávající jazyk popsáný regulárním výrazem $(a + (b^* \cdot c) \cdot (b + \emptyset)^*)^*$. (*Nemusíte dokazovat, že zkonstruovaný automat rozpoznává zadaný jazyk, pokud použijete standardní algoritmus a uvedete i jeho mezivýsledky (můžete provést více kroků naráz, bude-li se každý krok týkat jiného přechodu).*)

Příklad 7**[15 bodů]**

Rozhodněte, zda existuje jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ takový, že:

- (a) L je konečný a index \sim_L je 3.
- (b) L je nekonečný a index \sim_L je 3.
- (c) L je konečný a index \sim_L je nekonečno.

Pokud rozhodnete, že jazyk existuje, uveďte příklad takového jazyka. V opačném případě své tvrzení dokažte.

Příklad 1**[10 bodů]**

Napište definici deterministického konečného automatu a rozšířené přechodové funkce.

Příklad 2**[5 bodů]**

Určete, kolik slov má jazyk $L^3 \setminus L$, kde $L = \{a, aa, aaa\}$.

Příklad 3**[15 bodů]**

Najděte deterministický konečný automat rozpoznávající jazyk $L = \{w \in \{a, b, c\} \mid w \text{ obsahuje podslovo } babaab\}$.

Příklad 4**[15 bodů]**

Nechť L, R jsou jazyky nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Rozhodněte, zda platí následující implikace a své rozhodnutí zdůvodněte.

- (a) L a $L.R$ jsou regulární $\Rightarrow R$ je regulární
 (b) $L \cup R$ není regulární $\Rightarrow L$ nebo R není regulární

Příklad 5**[20 bodů]**

Rozhodněte, zda je daný jazyk regulární. Svě tvrzení dokažte.

$$L = \{a\}^* \cdot \{w \in \{b, c\}^* \mid \#_b(w) = \#_c(w)\}$$

Příklad 6**[20 bodů]**

K danému konečnému automatu \mathcal{A} sestrojte ekvivalentní (nedeterministický) konečný automat bez ε -kroků.

\mathcal{A}	a	b	ε
$\rightarrow 1$	$\{2\}$	$\{4\}$	$\{3, 5\}$
2	$\{2, 3\}$	\emptyset	$\{5\}$
$\leftarrow 3$	\emptyset	$\{1, 4, 5\}$	\emptyset
$\leftarrow 4$	$\{4\}$	$\{2\}$	\emptyset
5	\emptyset	$\{3, 4\}$	$\{2\}$

Příklad 7**[20 bodů]**

Uvažujte následující relace na slovech nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. U každé relace určete, zda se jedná o pravou kongruenci. Pokud rozhodnete, že se o pravou kongruenci nejedná, dokažte to. V opačném případě určete index relace a popište třídy ekvivalence

- (a) $u \sim v \stackrel{def}{\iff} \#_a(u) = \#_a(v) + 1$
 (b) $u \sim v \stackrel{def}{\iff} \#_a(u) = \#_a(v)$
 (c) $u \sim v \stackrel{def}{\iff} \#_a(u)$ a $\#_a(v)$ jsou liché nebo $u = v$
 (d) $u \sim v \stackrel{def}{\iff} \#_a(u)$ a $\#_a(v)$ mají stejnou paritu