

1 HRA V EXPLICITNÍM TVARU

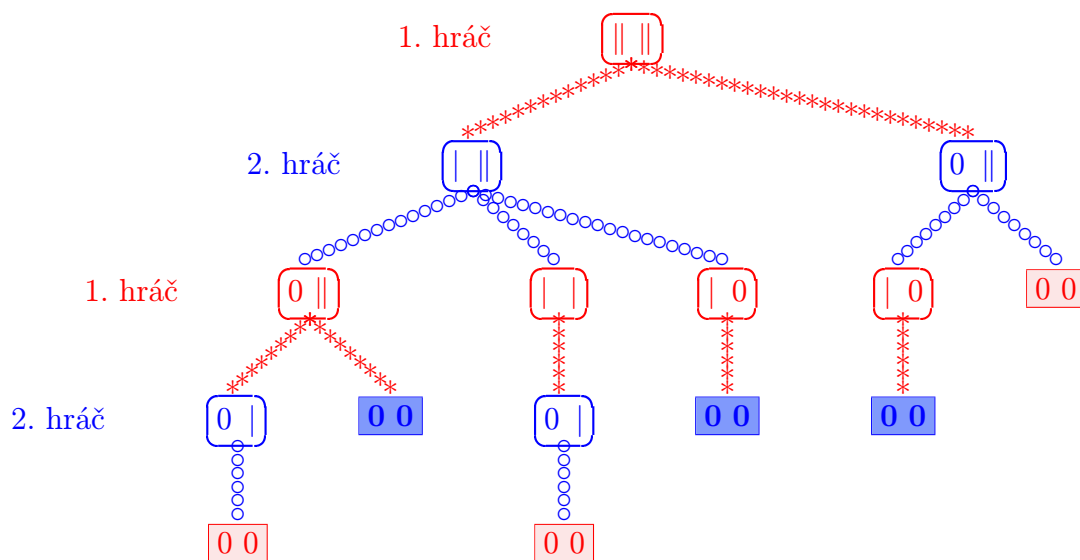
1.1 ÚVOD

1.1.1 Hra Nim

Uvažujme jednoduchou hru, kdy dva hráči – označme je čísly 1, 2 – mají před sebou dvě hromádky, z nichž každá je tvořena dvěma fazolemi. Hráč 1 musí vzít z jedné hromádky jednu nebo dvě fazole, fazole se nevracejí zpět. Potom je na řadě hráč 2, který také musí vzít z jedné hromádky jednu nebo dvě fazole. Takto se hráči střídají, až jeden z nich vezme poslední fazoli – a ten prohrává.

Pokud byste si mohli vybrat, zda budete začínat, či budete-li hráčem 2, pro co byste se rozhodli?

Uvedenou hru si můžeme znázornit pomocí modelu, který se nazývá **hra v explicitním tvaru**. Tento model, zvaný též **strom hry**, zachycuje všechny situace, které ve hře mohou nastat. Každé situaci odpovídá jeden **uzel**, z každého uzlu vychází určitý počet **hran** odpovídajících možným rozhodnutím, tzv. **tahům** daného hráče. Jestliže se hráč, který je na řadě, rozhodne pro nějaký tah, navodí novou situaci, v níž se rozhoduje druhý hráč – této nové situaci opět odpovídá jistý uzel stromu spojený s předchozím hranou. Při znázorňování se většinou postupuje ve směru shora dolů (popř. zleva doprava) a pravidelně se střídají uzly, v nichž se rozhoduje první hráč, a uzly, v nichž se rozhoduje druhý hráč.



OBR. 1.1: HRA NIM

Právě jeden uzel má tu vlastnost, že do něj nevchází žádná hrana; takový uzel se nazývá **počáteční uzel** nebo také **kořen** stromu. Dále jsou zde uzly, z nichž žádná hrana nevychází; tyto uzly se nazývají **koncové** a odpovídají pozicím, kdy je rozhodnuto o výsledku a hra končí.

Z obrázku 1.1 je patrné, že ať zvolí první hráč jakoukoli strategii, druhý může zvolit takovou strategii, která jej dovede k vítězství.

1.1.2 Hra Nim – obměna

V příkladu z části 1.1.1 nyní místo dvou hromádek uvažujme tři hromádky po dvou fazolích, pravidla jsou jinak stejná. Který hráč má nyní zaručenou výhru?

☛ *Řešení*

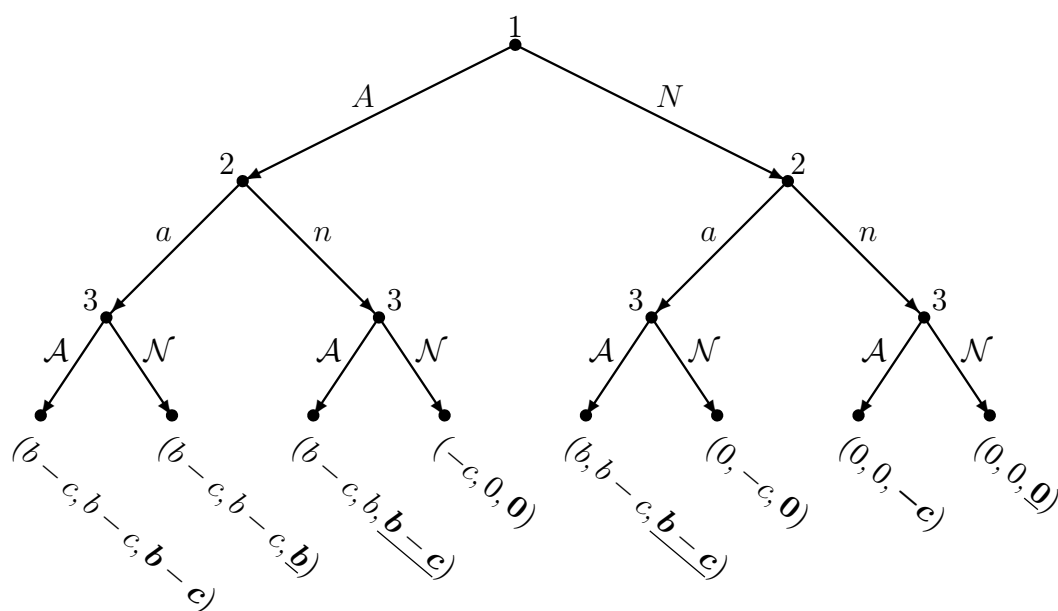
Návod: První hráč může na začátku odebrat jednu hromádku a tím postavil protihráče do pozice hráče č. 1 v předchozí variantě se dvěma hromádkami.

1.1.3 Hlasování o platech

Tři zákonodárci hlasují o tom, zda mají zvýšit své platy. Všichni tři si zvýšení přejí, zároveň však každého z nich v případě hlasování "pro" čeká ztráta u voličů v hodnotě c . Prospěch ze zvýšení b převyšuje ztrátu c , $b > c$. Hlasují-li postupně a otevřeně, je lepší volit jako první nebo jako poslední? Kdo volí jako poslední, vidí, jaká je situace a může případně rozhodnout o tom, zda zvýšení projde či nikoli. Je to tedy nejvýhodnější?

☛ *Řešení*

Návod: Situaci si můžeme znázornit následujícím obrázkem:



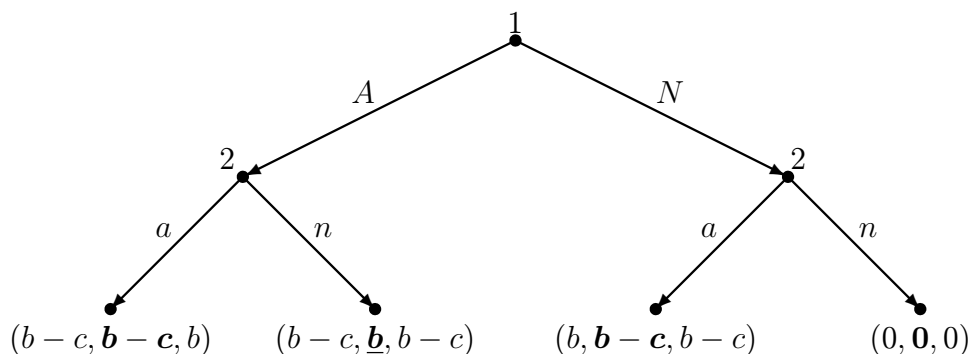
OBR. 1.2: HLASOVÁNÍ O PLATECH

Číslo u uzlu vyjadřuje, který zákonodárci se v daném okamžiku rozhoduje (první, druhý, třetí). Trojice čísel u každého z koncových uzlů znázorňuje po řadě zisk prvního, druhého a třetího zákonodárce.

Postupujeme v grafu zdola nahoru. V uzlech s číslem 3 se rozhoduje třetí zákonodárci, jehož zisk vyjadřuje třetí složka trojice. Nastane-li situace odpovídající uzlu s číslem 3 zcela vlevo, rozhoduje se třetí zákonodárci mezi třetími složkami trojic $(b-c, b-c, \underline{b-c})$ a $(b-c, b-c, \underline{b})$; protože $b > b-c$, je jasné, že si zvolí $(b-c, b-c, \underline{b})$. Stejným způsobem

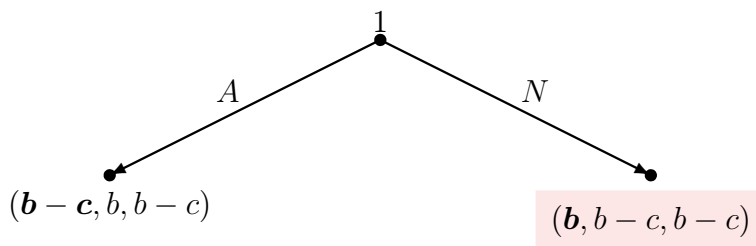
můžeme projít všechny ostatní uzly s číslem 3 a u každého si můžeme označit výstup, který třetí zákonodárce zvolí (v obrázku podtrženo).

Druhý zákonodárce se proto v každém svém uzlu rozhoduje mezi následujícími alternativami:



Zisky druhého zákonodárce vyjadřují druhá čísla z daných trojic, výhodnější alternativy jsou v obrázku dvakrát podtrženy.

První zákonodárce si může předem rozmyslet, jak by se jeho kolegové v jednotlivých situacích zachovali, a vidí, že se v podstatě rozhoduje mezi dvěma možnostmi:



Výhodnější je zřejmě alternativa vpravo. Hlasuje-li tedy první zákonodárce „NE“, platy se stejně zvýší a ztrátu plynoucí z hlasování „ANO“ ponесou zbývající dva.

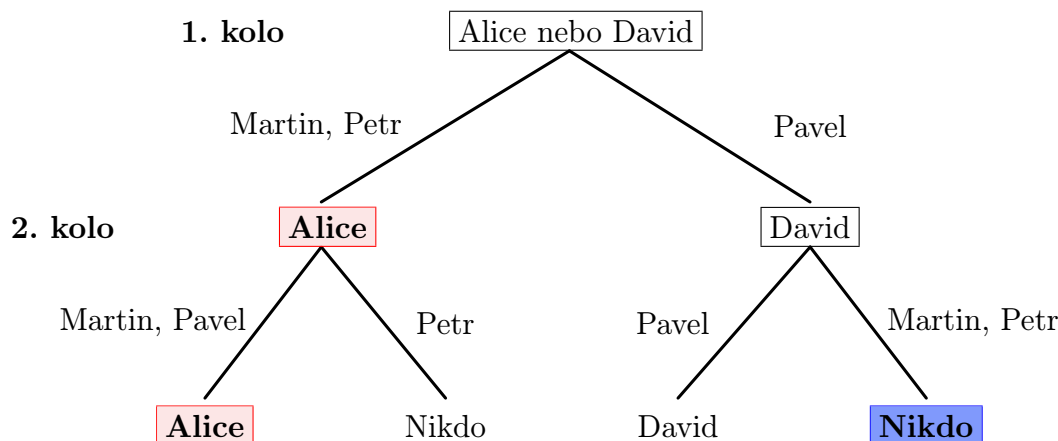
Popsanému myšlenkovému postupu se říká **zpětná indukce** – na základě předvídání budoucnosti se vyvozují nejvýhodnější alternativy na začátku rozhodování.

1.1.4 Dvoukolová volba do výboru

Martin, Petr a Pavel jsou členy výboru velmi exkluzivní Společnosti burzovních makléřů. Závěrečným bodem jednoho jejich dopoledního jednání je návrh, aby Alice byla přijata za nového člena. V návrhu chyběla zmínka o jiném možném kandidátovi, Davidovi, a tak se objevil pozměňovací návrh, aby Alice byla nahrazena Davidem. Podle jednacích pravidel je třeba hlasovat nejprve o pozměňovacím návrhu, tj. má-li David nahradit Alici. Potom se hlasuje o tom, zda bude vítěz přijat, či zda nebude přijat nikdo. Preference jednotlivých členů výboru jsou následující:

Pořadí	Martin	Petr	Pavel
1.	Alice	Nikdo	David
2.	Nikdo	Alice	Alice
3.	David	David	Nikdo

Pokud by všichni volili v obou kolech pouze podle svých preferencí, pak by volby proběhly takto: Při volbě mezi Alicí a Davidem by zvítězila Alice, protože jak Martin, tak Petr ji upřednostňují před Davidem – Pavel by tak byl přehlasován. V druhém kole by Alice získala hlasy od Martina a Pavla, neboť je v žebříčku jejich hodnot výše než „nikdo“, a stala by se tak vítězem voleb.



OBR. 1.3: DVOUKOLOVÁ VOLBA DO VÝBORU

Bude-li však Petr prozíravý, zvolí v prvním kole Davida, protože vidí, že v druhém kole v tom případě zvítězí varianta „nikdo“, což je pro něj ta nejvítanější možnost. Pavel by ovšem mohl předvídat, že Petr bude tímto způsobem taktizovat, a mohl by rovněž volit strategicky: v prvním kole by místo Davida zvolil Alici, která by pak zvítězila, což Pavel preferuje více než variantu „nikdo“. Jinými slovy, z obrázku či ze zpětné indukce je patrné, že první kolo je v podstatě rozhodování mezi Alicí a nikým, kteří by zvítězili v druhém kole v jednotlivých případech. Protože Alice je před nikým preferována u Martina a Pavla, zvítězí.

1.1.5 Sofistikovaná volba v různých soudních systémech

Uvažujme tři právní systémy, v nichž vždy rozhodují tři soudci:

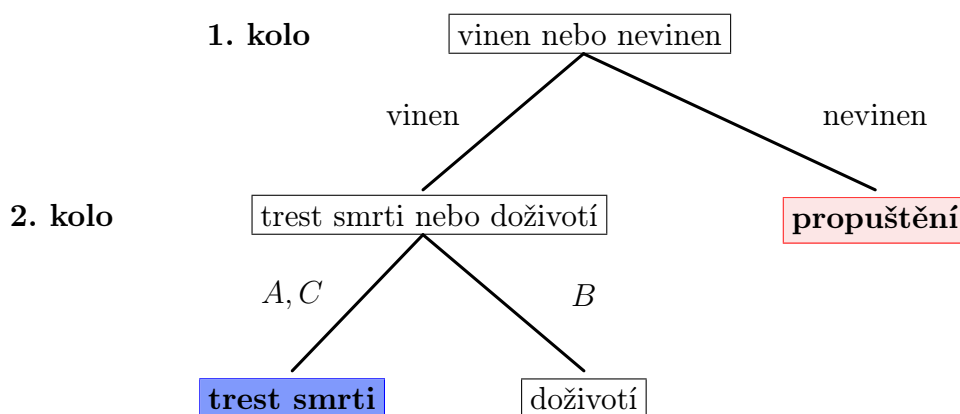
1. **Status quo** (používaný např. v USA): Nejprve se rozhoduje o vině či nevině obžalovaného, v případě viny se dále rozhoduje o trestu.
2. **Římská tradice**: Po předložení důkazů se začne s hlasováním sestupně od nejpřísnějšího trestu k nejmírnějšímu, popř. k propuštění (např. zda uložit trest smrti; pokud ne, zda doživotí, atd.).
3. **Mandatorní soud**: Nejprve se určí trest pro daný zločin, pak se určí, zda má být obžalovaný uznán vinným.

Uvažujme pro jednoduchost tři možné výsledky, trest smrti, doživotní vězení, propuštění, a následující preference jednotlivých soudců:

Pořadí	Soudce A	Soudce B	Soudce C
1.	trest smrti	doživotí	propuštění
2.	doživotí	propuštění	trest smrti
3.	propuštění	trest smrti	doživotí

1. Status quo

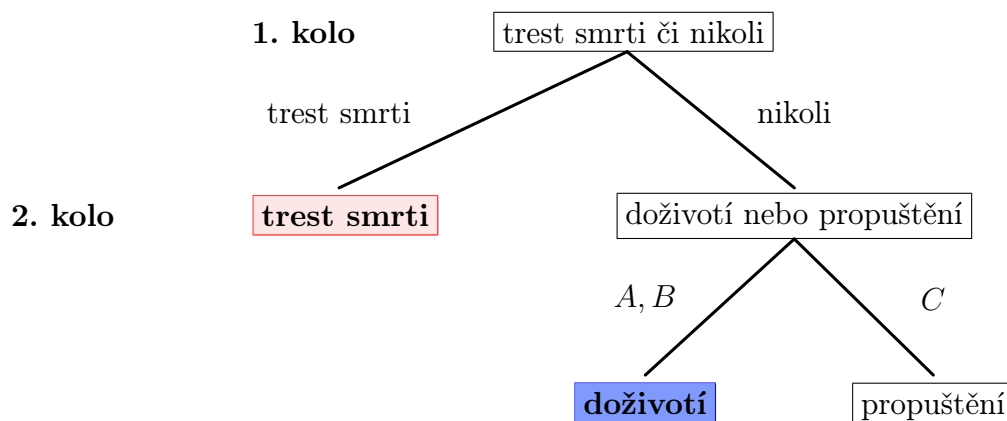
V prvním kole se hlasuje o vině či nevině; při upřímném hlasování by zvítězilo „vinen“ (soudci A, B), v druhém kole, při rozhodování mezi trestem smrti a doživotím, by zvítězil trest smrti (soudci A, C). První kolo je tedy v podstatě hlasováním mezi propuštěním a trestem smrti – při sofistikované volbě, tedy budou-li soudci uvažovat racionálně a budou předvídat, co se stane v druhém kole, proto v prvním kole zvítězí **propuštění** (kromě soudce C dá v prvním kole hlas propuštění i B, neboť v opačném případě by druhé kolo vedlo k jeho nejméně preferované variantě).



OBR. 1.4: SOFISTIKOVANÁ VOLBA V SYSTÉMU STATUS QUO

2. Římská tradice

V prvním kole se hlasuje o nejprísnějším trestu, tj. zda uložit trest smrti či nikoli. Pokud ano, je trest vykonán, pokud ne, nastane druhé kolo, v němž se bude hlasovat, zda doživotí či propuštění.

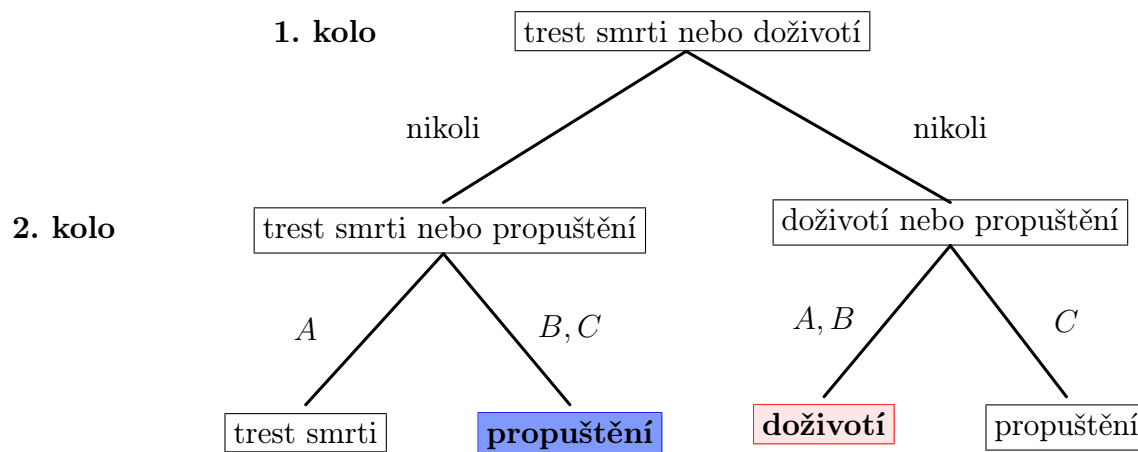


OBR. 1.5: SOFISTIKOVANÁ VOLBA V ŘÍMSKÉ TRADICI

Protože v druhém kole by zvítězilo doživotí (soudci A, B), je první kolo v podstatě hlasováním mezi trestem smrti a doživotím – při sofistikované volbě proto v prvním kole zvítězí **trest smrti** (kromě soudce A dá v prvním kole hlas trestu smrti i C, neboť v opačném případě by druhé kolo vedlo k jeho nejméně preferované variantě).

3. Mandatorní soud

V prvním kole se hlasuje o trestu za daný zločin, tj. zda uložit trest smrti či doživotí. V druhém kole se pak hlasuje o tom, zda daný trest uložit či nikoli (tj. propustit). Při rozhodování mezi trestem smrti a propuštěním by zvítězilo propuštění (B, C), při rozhodování mezi doživotím a propuštěním by zvítězilo doživotí (A, B). První kolo je tedy rozhodováním mezi propuštěním a doživotím, takže vězeň bude odsouzen na doživotí (A dá v prvním kole hlas raději doživotí, než aby byl propuštěn).



OBR. 1.6: SOFISTIKOVANÁ VOLBA V PŘÍPADĚ MANDATORNÍHO SOUDU