Jméno: **Místnost:** **Souřadnice:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Mějme dvě kopie C_n a C'_n kružnice délky n, přičemž každá z nich je korektně obarvena třemi barvami. Řekneme, že tato obarvení jsou isomorfní, pokud existuje isomorfismus $\phi : C_n \to C'_n$ takový, že vrchol $\phi(v)$ má stejnou barvu jako $\phi(w)$ v C'_n, právě když vrchol v má stejnou barvu jako w v C_n.

Vašim úkolem je nalézt všechna neisomorfní korektní obarvení kružnice délky 8 třemi barvami – nemusíte všechny tři barvy použít, ale můžete. Svou odpověď přehledně (systematicky) zapište a zdůvodněte.

Pište upraveně – řešení nejprve hledejte na vlastních papírech!

Sem přepište finální řešení vašeho příkladu, žádné čmáranice. Lze použít i druhou stranu listu, opravující ji uvidí, ale nebude se scanovat do IS. Také můžete použít "pokračovací" odpovědní list.

Řešení:
Ani jsem nečekal, kolik problémů tento příklad způsobí, neboť možností bylo při vhodném přístupu skutecně málo – jen 8 v každé variantě. Proto každý, který vyvinul nějaký (jakýkoliv) rozumný systém, který může vést ke správnému výsledku při ručním počítání, tak dostal aspoň polovinu bodů a mnohdy více, i když třeba něco zapomněl nebo opakoval. Pozor však, pokusy dojít k výsledku pouze násobením barevných výběrů či podobně vzhledem k velmi bohaté grupě symetrií při ručním počítání k výsledku nepovedou a tudíž byly honorovány jen velmi málo.

Možným systémem při konstrukci neisomorfních obarvení bylo třeba je klasifikovat podle počtu výskytů té nejméně časté barvy C. (Mnozí si ale ani neuvědomili, že mezi barvami nerozlišujeme!) Přitom C se může vyskytovat 0, 1, nebo 2-krát. Při násobném výskytu C pak dále rozlišíme možnosti podle rozložení C na kružnici. Těch možností je jen pár a v každé bývá tak jedno až dvě obarvení, celkem 8. Zkuste si to znovu sami doma rozebrat!

Jméno: **Místnost:** **Souřadnice:**

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 2
20 bodů

V tomto příkladě máte za úkol sestrojit (nakreslit) *čtyři jednoduché grafy* požadovaných vlastností. V odpovědi musíte uvést nejen přehledný a snadno pochopitelný obrázek nebo případně konstrukci vašich grafů, ale zároveň i *zdůvodnění*, proč požadované vlastnosti splňují (bez toho nedostanete kladné body).

a) Setrojte dva neisomorfní stromy se stejnou posloupností stupňů na méně než 8 vrcholech.
b) Setrojte souvislý graf se všemi stupni vrcholů 5 nebo 6, který neobsahuje kružnici procházející všemi vrcholy.
c) Sestrojte graf, který má barevnost 7 a přitom neobsahuje úplný podgraf K_7.
d) Sestrojte (jednoduchý!) graf mající právě 8 koster a neobsahující kružnici délky 8.

Řešení:
Toto nebyl těžký příklad, jediné větší problémy působil bod (c), ale i ten má velmi snadnou konstrukci...

a) Vezměte si třeba posloupnost $3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$ a jednou dejte stupně 2 vedle sebe, podruhé ne.
b) Nejjednodušším řešením je úplný bipartitní graf $K_{5,6}$, ale k řešení bylo možno dojít třeba i vhodným propojováním kopií grafu K_6.
c) Je překvapivé, že málokoho napadla tak snadná konstrukce jako že k liché kružnici přidáte 4 vrcholy spojené se vším. Pozor, nějaké pokusy o kreslení zoufale složitých a zamotaných obrázků nemohly být bodově hodnoceny, neboť jim chybělo jakékoliv zdůvodnění vlastností!
d) Snadno získáme z kružnice délky 4 přidáním jedné tětivy.

Jméno: **Místnost:** **Souřadnice:**

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 3
20 bodů

Nechť H_n označuje průnikový graf systému D všech dvouprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Formálně tedy je $V(H_n) = D = \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{2}$ a $E(H_n) = \{XY : X, Y \in D,\ X \cap Y \neq \emptyset\}$.

a) Dokažte, že pro každé $n > 2$ je graf H_n Hamiltonovský, tedy že v něm existuje kružnice C procházející všemi vrcholy.

b) Pro která $n > 2$ v grafu H_n existuje taková kružnice C procházející všemi vrcholy, že pro každou trojici X, Y, Z po sobě jdoucích vrcholů v C platí $X \cap Y \cap Z = \emptyset$? Svou odpověď dokažte.

(Návod: Klíčem k úspěchu je správné pochopení toho, co kružnice C znamená...)

Řešení:
U tohoto příkladu jste mě velmi zklamali, neboť část a) byla velmi jednoduchá a čekal jsem správnou odpověď od většiny studentů. Avšak většina z vás místo toho uváděla úplné bludy(!!!) o Diracově větě, kterou na tento případ vůbec nelze aplikovat a každému, kdo se něco o grafech naučil, by to mělo být jasné.

a) Zde stačilo nakreslit pěkný názorný obrázek nebo krátký důkaz indukcí, skutečně o nic nešlo. Za takové názorné a srozumitelné řešení obvykle bylo plných 10 bodů. Ale za bludy se dávaly téměř samé nuly, jen občas pár drobných za jiné přínosné poznatky.

b) Tuto těžší část nezvládl vůbec nikdo, ani se nepřiblížil. Proč? Možná proto, že je svou podstatou protichůdná části a), musí se na ni úplně jinak...
Nejpodstatnějším faktem si bylo všimnout, že podmínka $X \cap Y \cap Z = \emptyset$ určuje následovné: Libovolná číselná dvojice $\{x, y\}$ na domnělé Hamiltonovské kružnici sdílí x právě s jednou ze dvou sousedních dvojic. Pokud by totiž sdílela x s oběma, podmínka se poruší, a pokud by x nebylo ani v jedné ze sousedních dvojic, bylo by v obou y. Proto se například dvojice obsahující $x = 1$ objevují podél domnělé Hamiltonovské kružnice po dvou, neboli počet dvojic obsahujících 1 musí být sudý. Tudíž $n \geq 3$ je liché a to je správná odpověď.
Nyní stačí pro každé $n \geq 3$ liché takovou Hamiltonovskou kružnici sestrojit, což lze například s pomocí Eulerovy věty o "kreslení jedním tahem".

Jméno: **Místnost:** **Souřadnice:**

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 4
20 bodů

Definice: Graf G je *perfektní*, pokud v každém jeho indukovaném podgrafu F platí, že barevnost F je rovna velikosti největší kliky (úplného podgrafu) v F.

Nechť v daném jednoduchém grafu H existují dvě kliky (úplné podgrafy), které ve sjednocení obsahují všechny vrcholy H. Dokažte, že pak je náš graf H perfektní.

Řešení:
Bohužel většina z vás si všímala jen obou klik a zcela ignorovala další hrany v grafu (mezi klikama), takže nevyřešili nakonec nic. Za takové řešení byla obvykle 0 nebo občas pár drobných za jiné úvahy k věci.
Podstatným zjištěním, ke kterému se dopracovalo jen pár jednotlivců, bylo následovné: Pokud na rozdělení grafu do dvou klik maximalizujeme tu první kliku K_p, tak každý vrchol druhé kliky K_q bude nespojený s některým vrcholem první K_p (jinak by se první klika dala zvětšit – není to nijak obtížné, že?). Proto nejprve obarvíme K_p pomocí p barev a pro každý vrchol v v K_q najdeme v K_p barvu, se kterou není s v spojená. Dotyční, kteří se k tomuto dopracovali, získali od 9 po 16 bodů podle kvality a srozumitelnosti popisu svých úvah.
Úplné řešení to ale ještě není, neboť nejpodstatnějším bodem je zdůvodnit, že takto volené barvy pro vrcholy K_q skutečně lze volit po dvou různé. To vůbec není na první pohled vidět a nikdo to nedokázal zdůvodnit. Měla by se zde aplikovat Hallova věta o systému různých reprezentantů a z té to vyjde poměrně přímočaře.

Jméno: **Místnost:** **Souřadnice:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Mějme dvě kopie C_n a C'_n kružnice délky n, přičemž každá z nich je korektně obarvena třemi barvami. Řekneme, že tato obarvení jsou isomorfní, pokud existuje isomorfismus $\phi : C_n \to C'_n$ takový, že vrchol $\phi(v)$ má stejnou barvu jako $\phi(w)$ v C'_n, právě když vrchol v má stejnou barvu jako w v C_n.

Vašim úkolem je nalézt všechna neisomorfní korektní obarvení kružnice délky 9 třemi barvami. Svou odpověď přehledně (systematicky) zapište a zdůvodněte.

Pište upraveně – řešení nejprve hledejte na vlastních papírech!
Sem přepište finální řešení vašeho příkladu, žádné čmáranice. Lze použít i druhou stranu listu, opravující ji uvidí, ale nebude se scanovat do IS. Také můžete použít "pokračovací" odpovědní list.

Řešení:
Ani jsem nečekal, kolik problémů tento příklad způsobí, neboť možností bylo při vhodném přístupu skutecně málo – jen 8 v každé variantě. Proto každý, který vyvinul nějaký (jakýkoliv) rozumný systém, který může vést ke správnému výsledku při ručním počítání, tak dostal aspoň polovinu bodů a mnohdy více, i když třeba něco zapomněl nebo opakoval. Pozor však, pokusy dojít k výsledku pouze násobením barevných výběrů či podobně vzhledem k velmi bohaté grupě symetrií při ručním počítání k výsledku nepovedou a tudíž byly honorovány jen velmi málo.

Možným systémem při konstrukci neisomorfních obarvení bylo třeba je klasifikovat podle počtu výskytů té nejméně časté barvy C. (Mnozí si ale ani neuvědomili, že mezi barvami nerozlišujeme!) Přitom C se může vyskytovat 1, 2, nebo 3-krát. Při násobném výskytu C pak dále rozlišíme možnosti podle rozložení C na kružnici. Těch možností je jen pár a v každé bývá tak jedno až dvě obarvení, celkem 8. Zkuste si to znovu sami doma rozebrat!

Jméno: **Místnost:** **Souřadnice:**

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 2
20 bodů

V tomto příkladě máte za úkol sestrojit (nakreslit) *čtyři jednoduché grafy* požadovaných vlastností. V odpovědi musíte uvést nejen přehledný a snadno pochopitelný obrázek nebo případně konstrukci vašich grafů, ale zároveň i *zdůvodnění*, proč požadované vlastnosti splňují (bez toho nedostanete kladné body).

a) Setrojte dva neisomorfní rovinné grafy se všemi stupni 3 na 8 vrcholech.
b) Setrojte souvislý graf se všemi stupni vrcholů 5 nebo 7, který neobsahuje cestu procházející všemi vrcholy.
c) Sestrojte graf, který má barevnost 6 a přitom neobsahuje úplný podgraf K_6.
d) Sestrojte graf mající právě 11 koster a neobsahující kružnici délky 11.

Řešení:
Toto nebyl těžký příklad, jediné větší problémy působil bod (c), ale i ten má velmi snadnou konstrukci...

a) Stačí třeba vzít krychli a dvakrát K_4.
b) Nejjednodušším řešením je úplný bipartitní graf $K_{5,7}$, ale k řešení bylo možno dojít třeba i vhodným propojováním kopií grafu K_6.
c) Je překvapivé, že málokoho napadla tak snadná konstrukce jako že k liché kružnici přidáte 3 vrcholy spojené se vším. Pozor, nějaké pokusy o kreslení zoufale složitých a zamotaných obrázků nemohly být bodově hodnoceny, neboť jim chybělo jakékoliv zdůvodnění vlastností!
d) Snadno získáme z kružnice délky 5 přidáním jedné tětivy.

Jméno: **Místnost:** **Souřadnice:**

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 3
20 bodů

Nechť H_n označuje průnikový graf systému D všech dvouprvkových podmnožin množiny $\{1,2,\ldots,n\}$. Formálně tedy je $V(H_n) = D = \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{2}$ a $E(H_n) = \{XY : X,Y \in D,\, X \cap Y \neq \emptyset\}$.

a) Dokažte, že pro každé $n > 2$ je graf H_n Hamiltonovský, tedy že v něm existuje kružnice C procházející všemi vrcholy.

b) Pro která $n > 2$ v grafu H_n existuje taková kružnice C procházející všemi vrcholy, že pro každou trojici X, Y, Z po sobě jdoucích vrcholů v C platí $X \cap Y \cap Z = \emptyset$? Svou odpověď dokažte.

(Návod: Klíčem k úspěchu je správné pochopení toho, co kružnice C znamená...)

Řešení:
U tohoto příkladu jste mě velmi zklamali, neboť část a) byla velmi jednoduchá a čekal jsem správnou odpověď od většiny studentů. Avšak většina z vás místo toho uváděla úplné bludy(!!!) o Diracově větě, kterou na tento případ vůbec nelze aplikovat a každému, kdo se něco o grafech naučil, by to mělo být jasné.

a) Zde stačilo nakreslit pěkný názorný obrázek nebo krátký důkaz indukcí, skutečně o nic nešlo. Za takové názorné a srozumitelné řešení obvykle bylo plných 10 bodů. Ale za bludy se dávaly téměř samé nuly, jen občas pár drobných za jiné přínosné poznatky.

b) Tuto těžší část nezvládl vůbec nikdo, ani se nepřiblížil. Proč? Možná proto, že je svou podstatou protichůdná části a), musí se na ni úplně jinak...
Nejpodstatnějším faktem si bylo všimnout, že podmínka $X \cap Y \cap Z = \emptyset$ určuje následovné: Libovolná číselná dvojice $\{x, y\}$ na domnělé Hamiltonovské kružnici sdílí x právě s jednou ze dvou sousedních dvojic. Pokud by totiž sdílela x s oběma, podmínka se poruší, a pokud by x nebylo ani v jedné ze sousedních dvojic, bylo by v obou y. Proto se například dvojice obsahující $x = 1$ objevují podél domnělé Hamiltonovské kružnice po dvou, neboli počet dvojic obsahujících 1 musí být sudý. Tudíž $n \geq 3$ je liché a to je správná odpověď.
Nyní stačí pro každé $n \geq 3$ liché takovou Hamiltonovskou kružnici sestrojit, což lze například s pomocí Eulerovy věty o "kreslení jedním tahem".

Jméno: **Místnost:** **Souřadnice:**

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 4
20 bodů

Definice: Graf G je *perfektní*, pokud v každém jeho indukovaném podgrafu F platí, že barevnost F je rovna velikosti největší kliky (úplného podgrafu) v F.

Nechť v daném jednoduchém grafu H existují dvě kliky (úplné podgrafy), které ve sjednocení obsahují všechny vrcholy H. Dokažte, že pak je náš graf H perfektní.

Řešení:
Bohužel většina z vás si všímala jen obou klik a zcela ignorovala další hrany v grafu (mezi klikama), takže nevyřešili nakonec nic. Za takové řešení byla obvykle 0 nebo občas pár drobných za jiné úvahy k věci.
Podstatným zjištěním, ke kterému se dopracovalo jen pár jednotlivců, bylo následovné: Pokud na rozdělení grafu do dvou klik maximalizujeme tu první kliku K_p, tak každý vrchol druhé kliky K_q bude nespojený s některým vrcholem první K_p (jinak by se první klika dala zvětšit – není to nijak obtížné, že?). Proto nejprve obarvíme K_p pomocí p barev a pro každý vrchol v v K_q najdeme v K_p barvu, se kterou není s v spojená. Dotyční, kteří se k tomuto dopracovali, získali od 9 po 16 bodů podle kvality a srozumitelnosti popisu svých úvah.
Úplné řešení to ale ještě není, neboť nejpodstatnějším bodem je zdůvodnit, že takto volené barvy pro vrcholy K_q skutečně lze volit po dvou různé. To vůbec není na první pohled vidět a nikdo to nedokázal zdůvodnit. Měla by se zde aplikovat Hallova věta o systému různých reprezentantů a z té to vyjde poměrně přímočaře.