Antagonistické hry s nekonečně mnoha strategiemi

1. Uvažujme následující rozhodovací situaci: Generál 1 má k dispozici a vojáků, nepřátelský generál 2 má k dispozici b vojáků, přičemž a, b jsou velká čísla. Generál 2 má se svými vojáky hájit k objektů, jejichž strategická hodnota je po řadě $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Snahou generála 2 je uhájit co největší celkovou strategickou hodnotu. Generál 1 má na objekty hájené vojáky generála 2 zaútočit, přičemž je známo, že objekt i dobude, jestliže u něho bude mít alespoň o p_i% více vojáků než generál 2. Čísla s_i, p_i, a, b jsou známa oběma generálům. Sestavte matematický model, pomocí něhož lze určit optimální přiřazení počtu útočících a bránících vojáků k jednotlivým cílům.

2. Sestavte a vyřešte model následující rozhodovací situace: Na veletrhu v Brně je vystavován zahraniční výrobek a je známo, že vystavovatel by jej rád během veletrhu prodal. O výrobek mají zájem dva tuzemští zákazníci, kteří za něj nabízejí vystavovateli stejnou, ne příliš vysokou částku a Kč. Pravděpodobnost, že vystavovatel výrobek za cenu a prodá, je v první třetině veletrhu nula, potom lineárně roste tak, že na konci veletrhu je 1. Každý ze zákazníků může učinit nabídku pouze jednou během trvání veletrhu. Oba zákazníci jednají nezávisle a až na případ, kdy chtějí učinit nabídku a zjistí, že výrobek je již prodán, se o nabídce druhého zákazníka nedozví. Je třeba určit, ve kterém okamžiku trvání veletrhu je optimální učinit nabídku.

3. Sestavte model rozhodovací situace z úlohy 2, kde je však tato změna: Zákazník 2 má k dispozici pouze částku $b < a$ a vystavovatel reaguje na nabídku ve výši a Kč stejně jako v úloze 2, na nabídku ve výši b je jeho ochota prodat vyjádřena poloviční pravděpodobností ve srovnání s nabídkou ve výši a. Umíte určit optimální načasování nabídek obou zákazníků?

4. Sestavte model následující rozhodovací situace: Dva výrobci soutěží o získání zakázek na n trzích; trhy očíslujeme $1, 2, \ldots, n$. Každý z výrobců má ve svém rozpočtu určitou částku, kterou chce věnovat na ovlivnění výše zakázek na jednotlivých trzích tím, že provede propagaci svých výrobků (nebo zavede servisy apod.). Nechť potenciální objem zakázek na i-tém trhu je roven s_i. Zakázky na každém trhu budou podle intenzity propagace a kvality služeb rozděleny mezi oba výrobce. Předpokládejme, že oba výrobci dokáží investovat na každém trhu částku na propagaci a služby stejně účelně, takže celkový objem zakázek s_i bude na i-tém trhu rozdělen mezi výrobce v poměru částek investovaných výrobci na tomto trhu. Určete, kolik z celkové částky má výrobce investovat na každém trhu, aby maximalizoval celkový objem zakázek.

5. Uvažujme stejnou situaci jako v předchozím příkladu, jen s tím rozdílem, že zakázky v hodnotách s_i jsou nedělitelné (jde například o dodání investičního celku). Celou zakázku získá ten výrobce, který na trhu investuje větší částku na propagaci. Investují-li oba výrobci stejně, získá každý z nich zakázku s pravděpodobností 1/2.

6. Dva stíhači, z nichž každý je vyzbrojen právě jednou raketou typu vzduch–vzduch, nalétávají čelně proti sobě a snaží se jeden druhého sestřelit. Čím déle čeká stíhač 1 s výstřelem, tím více se zvětšuje pravděpodobnost, že zasáhne stíhače 2. Zvětšuje se však také pravděpodobnost, že 2 vystřelí dříve a zasáhne – 1 již nebude mít příležitost k výstřelu. Jestliže jeden stíhač vystřelí a mine, pak druhý může s výstřelem vyčkat, až zaujme vůči bezbrannému protivníkovi takovou pozici, z níž určitě zasáhne. Předpokládáme rovněž, že každý stíhač je v každém okamžiku informován o tom, zda protivník již vystřelil nebo nikoli. Máme určit, v kterém okamžiku je nutno vystřelit, aby naděje na vítězné vyjití ze souboje byla maximální.

   Při sestavování matematického modelu uvedené situace použijte následující upřesnění. Pravděpodobnost $P_1(x)$, resp. $P_2(y)$, že hráč 1, resp. 2, zasáhne soupeře, vystřelí-li ze vzdálenosti x, resp. y, od něj, je spojitá nerostoucí funkce; pro jednoduchost můžeme za jednotku vzdálenosti uvažovat dostřel té rakety, která střílí dále, takže $P_1(x)$, $P_2(y) \in \langle 0, 1\rangle$. Dále nechť $P_1(0) = P_2(0) = 1$ a nechť v každém bodě, kde $P_1(x), P_2(y)$ jsou kladné, jsou tyto funkce klesající. Výsledek hodnotíme z hlediska velitelství letectva a výplatní funkci položíme rovnou 1 v případě, že hráč 1 přežije a hráč 2 je zničen, -1 v případě, že je tomu naopak. Pokud jsou oba stíhači zničeni nebo oba přežijí (vystřelili současně), položíme výplatní funkci rovnou 0.