MB102 – Diferenciální a integrální počet
Zkoušková písemka, A, 8. 1. 2014

Příklad 1 (2 body). Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right).$$

Příklad 2 (3 body). Určete intervaly konvexnosti a konkávnosti spolu s inflexními body pro funkci

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1},\qquad x\neq\pm 1.$$

Příklad 3 (3 body). Nechť je dán trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[4,0]$, $[1,3]$. Vepište do něj obdélník maximálního obsahu tak, aby jeho základna byla součástí osy x. Jaký je obsah S hledaného obdélníku?

Příklad 4 (3 body). Integrujte

$$\int \frac{x^3+2x+x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 5 (2 body). Vyčíslete integrály

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^5+1}\,\mathrm{d}x;\qquad \int_1^\infty \frac{x^4}{x^5+1}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 6 (2 body). Zjistěte, zda jednotlivé řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\left(3-\frac{1}{n}\right)^n};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{n^2+1}};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-\sqrt{n}}$$

konvergují absolutně, konvergují relativně, či nekonvergují. Všechna svá tvrzení zdůvodněte.

Příklad 7 (2 body). Je-li $|\,x\,|<1$, sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Příklad 8 (3 body). Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y'=6xy+4x\mathrm{e}^{3x^2}.$$

Poté uveďte řešení splňující podmínku $y(0)=5$, tj. procházející bodem $[0,5]$.

MB102 – Diferenciální a integrální počet
Zkoušková písemka, B, 8. 1. 2014

Příklad 1 (2 body). Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

Příklad 2 (3 body). Určete intervaly konvexnosti a konkávnosti spolu s inflexními body pro funkci

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}, \qquad x\neq \pm 1.$$

Příklad 3 (3 body). Nechť je dán trojúhelník s vrcholy $[-2,0]$, $[0,6]$, $[6,0]$. Vepište do něj obdélník maximálního obsahu tak, aby jeho základna byla součástí osy x. Jaký je obsah S hledaného obdélníku?

Příklad 4 (3 body). Pro $x\neq 1$ integrujte

$$\int \frac{x}{x^4-x^3-x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 5 (2 body). Vyčíslete integrály

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x; \qquad \int_1^\infty \frac{x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 6 (2 body). Zjistěte, zda jednotlivé řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^n}; \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n};$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{arctg}\,(n^2+n+1)}; \qquad \sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\sqrt[3]{n}}$$

konvergují absolutně, konvergují relativně, či nekonvergují. Všechna svá tvrzení zdůvodněte.

Příklad 7 (2 body). Je-li $|\,x\,|<1$, sečtěte

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Příklad 8 (3 body). Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y'=3x^2y+(x+2)\mathrm{e}^{x^3}.$$

Poté uveďte řešení splňující podmínku $y(0)=4$, tj. procházející bodem $[0,4]$.

Výsledky

Příklad 1, A: $1/2$
Příklad 1, B: $1/2$

Příklad 2, A: Konvexní: $(-1,0]$, $(1,\infty)$; konkávní: $(-\infty,-1)$, $[0,1)$; infl. bod: [0,0]
Příklad 2, B: Konvexní: $(-\infty,-1)$, $[0,1)$; konkávní: $(-1,0]$, $(1,\infty)$; infl. bod: [0,0]

Příklad 3, A: Hledaný obdélník má základnu $z=2$ a výšku $v=3/2$, tj. $S=3$
Příklad 3, B: Hledaný obdélník má základnu $z=4$ a výšku $v=3$, tj. $S=12$

Příklad 4, A:

$$\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C,\qquad C\in\mathbb{R}$$

Pro $2x^2$ v čitateli:

$$\frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C,\qquad C\in\mathbb{R}$$

Příklad 4, B:

$$\frac{-1}{3x-3}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,\qquad C\in\mathbb{R}$$

Příklad 5, A: $(\ln 2)/5$; ∞
Příklad 5, B: $(\ln 2)/4$; ∞

Příklad 6, A: Konverguje absolutně; nekonverguje; nekonverguje; konverguje relativně
Příklad 6, B: Konverguje absolutně; nekonverguje; nekonverguje; konverguje relativně

Příklad 7, A: $-\operatorname{arctg} x$
Příklad 7, B: $\operatorname{arctg} x$

Příklad 8, A:

$$\left(2x^2+C\right)\mathrm{e}^{3x^2},\quad C\in\mathbb{R};\qquad \left(2x^2+5\right)\mathrm{e}^{3x^2}$$

Příklad 8, B:

$$\left(\frac{x^2}{2}+2x+C\right)\mathrm{e}^{x^3},\quad C\in\mathbb{R};\qquad \left(\frac{x^2}{2}+2x+4\right)\mathrm{e}^{x^3}$$