Zkouška MB102, úterý 5.6.2007, 8:00–10:00 hodin

Skupina B

Maximum 30 bodů

1. (2 body) **Limita a spojitost.** Uvažujme funkci

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

(a) Rozhodněte, zda má funkce $f(x)$ limitu v bodě $x_0 = 0$. Pokud ano, tuto limitu určete.
(b) Napište definici spojitosti funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 0$. Podle této definice pak určete, zda je funkce $f(x)$ spojitá v bodě $x_0 = 0$.

2. (3 body) **Derivace.**
(a) Napište definici derivace (obecné) funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 0$. Podle této definice pak určete, jestli má funkce $f(x)$ z Příkladu 1 derivaci v bodě $x_0 = 0$ a pokud ano, tuto derivaci vypočítejte.
(b) Rozhodněte, zda je funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ řešením diferenciální rovnice

$$x^2 \,.\, y'' \,.\, y + (y')^2 = 0.$$

3. (4 body) **Průběh funkce.** Funkce $f(x)$ a její derivace $f'(x)$ a $f''(x)$ jsou zadány následovně:

$$f(x) = \frac{4 + x - 2x^2}{x - 2}, \quad f'(x) = \frac{-6 + 8x - 2x^2}{(x-2)^2}, \quad f''(x) = \frac{-10 + 8x - 2x^2}{(x-2)^3}.$$

Určete celkový průběh funkce – intervaly monotonie, lokální extrémy, konvexnost/konkávnost, inflexní body, asymptoty, graf.

4. (4 body) **Aplikace derivace.** Výběh pro králíky má rozlohu 800 m^2 a tvar obdélníka přiléhajícího jednou stranou ke stodole. Ze zbývajících tří stran je potřeba výběh oplotit. Jak velké mají být strany výběhu, aby bylo potřeba co nejméně pletiva na plot? Kolik metrů pletiva bude potřeba?

5. (4 body) **Integrál.**
(a) Vhodnou metodou vypočtěte uvedené integrály:

$$\int x \ln^2 x \, dx, \quad \int_1^e x \ln^2 x \, dx, \quad \int_0^1 x \ln^2 x \, dx.$$

(b) Určete průměrnou hodnotu funkce $x \ln^2 x$ na intervalech $[1, e]$, $[0, 1]$ a $[0, e]$.

6. (4 body) **Aplikace integrálu.** Pomocí vhodného určitého integrálu určete:
(a) Objem zmrzliny, která se vejde do kuželovitého kornoutu (tak, aby nic nepřesahovalo ven) o výšce $h = 16$ cm a poloměru "podstavy" $r = 4$ cm.
(b) Kolik stojí materiál na jeden kornout, jestliže jeho jednotková cena je 2 hal/cm^2?

7. (2 body) **Nekonečné řady.**
(a) Napište nutnou podmínku, kterou musí každá konvergentní řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ splňovat.
(b) Zformulujte odmocninové kritérium pro konvergenci/divergenci nekonečné řady.

8. (3 body) **Mocninné řady.**
(a) Určete Maclaurinovu řadu pro funkci $\sinh x := (e^x - e^{-x})/2$.
(b) Určete poloměr konvergence Vámi vypočítané mocninné řady.
(c) Určete Maclaurinovu řadu pro funkci $\int \sinh x \, dx$, tj. pro integrál funkce $\sinh x$.

9. (4 body) **Aplikace diferenciálních rovnic.** V čase $t_0 = 0$ minut má čaj v hrnku teplotu 100°C a za 15 minut poté už jen 75°C, přičemž teplota okolního vzduchu je $T_{\text{okolí}} = 20$°C. Označme jako $T(t)$ teplotu čaje v čase t minut.
(a) Napište diferenciální rovnici, kterou musí funkce $T(t)$ splňovat a tuto rovnici vyřešte.
(b) Určete, za jak dlouho bude mít čaj teplotu 50°C?