10.2.1. *Rozhodněte o následujících množinách a operacích, jaké tvoří struktury (grupoid, pologrupa, grupa, monoid):*

(1) *podmnožiny množiny přirozených čísel spolu s operací sjednocení*
(2) *přirozená čísla spolu s binární operací největší společný dělitel*
(3) *přirozená čísla spolu s binární operací nejmenší společný násobek*
(4) *množina všech invertibilních matic* 2×2 *nad* $\mathbb{R}$ *spolu se sčítáním*
(5) *množina všech matic* 2×2 *nad* $\mathbb{R}$ *spolu s násobením matic*
(6) *množina všech matic* 2×2 *spolu s odčítáním matic*
(7) *množina všech invertibilních matic* 2×2 *nad* $\mathbb{Z}_2$ *s násobením matic*
(8) *množina* $\mathbb{Z}_6$ *spolu s násobením (modulo 6)*
(9) *množina* $\mathbb{Z}_7$ *spolu s násobením (modulo 7)*

Svá tvrzení zdůvodněte (proč je něco např. pouze grupoid a není pologrupa ...). U třetího příkladu od konce sestavte tabulku dané operace.

Řešení.

(1) monoid (neutrálním prvkem je prázdná množina)
(2) pologrupa (bez neutrálního prvku)
(3) monoid (číslo 1 je neutrálním prvkem)
(4) není ani grupoid (uvážíme $A + (-A)$ pro nějakou invertibilní matici A)
(5) monoid (násobení matic je asociativní operace, viz 2.5, jednotková matice je neutrálním prvkem)
(6) grupoid (není asociativní)
(7) grupa (je monoidem stejně jako v bodě 5, z definice má každá invertibilní matice inverzi, tedy jde o grupu)
(8) monoid (operace je indukována klasickým násobením, je tedy asociativní, třída $[1]_{\mathbb{Z}_6}$ je neutrálním prvkem, např. třída $[2]_{\mathbb{Z}_6}$ nemá inverzi, není tedy grupou)
(9) grupa (jedná se o monoid ze stejných důvodů jako v předchozím bodě, z Bezoutovy věty věty vyplývá, že každý prvek v $\mathbb{Z}_p$, kde p je prvočíslo je invertibilní)

V příkladě 7 má grupa následující prvky:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Tabulka operace násobení těchto matic vypadá následovně:

	A	B	C	D	E	F
A	A	B	C	D	E	F
B	B	A	E	F	C	D
C	C	D	A	B	F	E
D	D	C	F	E	A	B
E	E	F	B	A	D	C
F	F	E	D	C	B	A

10.2.2. *Doplňte následující tabulku operace $\star$ na množině $\{a, b, c\}$ tak, aby zadávala pologrupu.*

	a	b	c
a	b	a	a
b			
c			

Je toto doplnění jednoznačné? Kolik jich existuje?

Řešení.

Začneme postupně tabulku doplňovat:

$ba = (aa)a = a(aa) = ab = a$,

$bb = (aa)b = a(ba) = aa = b$,

$bc = (aa)c = a(ac) = aa = b$,

$a(ca) = (ac)a = aa = b$, tedy $(ca) = a$.

Dále $cb = c(aa) = (ca)a = aa = b$.

Na cc dostáváme omezení (díky $acc = ac$) $cc = b$, nebo $cc = c$. Obě možnosti jsou možné.

Existují tedy dvě různá doplnění:

	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	b
c	a	b	$[b, c]$