IB107 Vyčíslitelnost a složitost
Zkouška 2? ledna 2019

Problém 1.

a) Která z následujících tvrzení jsou pravdivá? Svou odpověď zdůvodněte.

(i) Množina $A_1 \subseteq \mathbb{N}$ je rekurzivní právě tehdy, když existuje totálně vyčíslitelná funkce f taková, že $x \in A_1 \iff f(x)$ je prvočíslo.

(ii) Množina $A_2 \subseteq \mathbb{N}$ obsahující ty $i \in \mathbb{N}$, že se i-tý while-program zastaví na každém vstupu, je rekurzivní.

(iii) Množina $A_2 \subseteq \mathbb{N}$ z předchozího bodu je rekurzivně spočetná.

b) Definujte, kdy je rozhodovací problém PSPACE-úplný a uveďte příklad PSPACE-úplného rozhodovacího problému (bez důkazu PSPACE-úplnosti)

Řešení.

a) (i) Důkaz povedeme přímo dokázáním obou implikací.

$\Leftarrow$ Z rekurzivity A_1 máme *rozhodující* funkci g, tedy $g(x) = 1 \iff x \in A_1$.

Sestrojíme f pomocí g - funkce na prvcích A_1 vrací například 7 a 42 jinak.

$\Rightarrow$ Rozhodnout zda je $f(x)$ prvočíslo jsme schopni pro libovolnou hodnotu[1].

Funkce rozhodující A_1 vrátí 1 $\iff f(x)$ je prvočíslo a 0 jinak.

(ii) Taková vlastnost je netriviální a z Riceovy věty plyne, že A_2 není rekurzivní.

(Rozhodnout HALT by bylo jednoduché)

(iii) Uvažme funkci $answer$ jejíž index $i \in A_2$ která na 42 vrací 1 a 0 jinak. Pro libovolné $j \in \mathbb{N}$ takové, že φ_j je její konečná restrikce platí, že $j \notin A_2$.

Tedy A_2 nemuže být podle „třetí Riceovy" věty ani rekurzivně spočetná.

---

[1]Dokonce v polynomiálním čase - pomocí AKS testu deterministicky s časovou složitostí $\mathcal{O}(\log(n)^6)$

b) Problém L je PSPACE-úplný, pokud $L \in$ PSPACE a zároveň $\forall L' \in$ PSPACE platí $L' \leq_p L$. Z přednášky známe problém QSAT, který rozhoduje zda je formule obsahující kvantifikátory splnitelná.

■

Problém 2.

a) Zformulujte Třetí Riceovu větu.

b) Nechť B je množina těch $i \in \mathbb{N}$, že funkce φ_i je prostá a obor jejich hodnot je $\mathbb{N}$.

   (i) Dokažte, že množina B není rekurzivně spočetná.

   (ii) Dokaže, že množina $\overline{B} = \mathbb{N} \setminus B$ není rekurzivně spočetná.

Řešení.

a) Pokud I je množina která respektuje funkce, a $\exists i \in I$ takové, že $j \notin I$ pro každou konečnou restrikci φ_j funkce φ_i, pak I není rekurzivně spočetná.

b) (i) Uvažme funkci $\varphi_i = id$ kde zjevně $i \in B$, každá konečná restrikce φ_j není definovaná pro celé $\mathbb{N}$, tedy j nepatří do B a z „Třetí Riceovy“ věty není B rekurzivně spočetná.

   (ii) $\overline{B}$ respektuje funkce. Výše zmíněná φ_j je nevlastním rozšířením funkce φ_i. Zároveň platí, že $j \in \overline{B}, i \notin \overline{B}$ a tedy podle „Druhé Riceovy“ věty není $\overline{B}$ rekurzivně spočetná.

■

Problém 3.

a) Definujte třídy problémů NL a P.

b) Dokažte, že NL $\subseteq$ P. Pokud použijete k důkazu obecnější větu z přednášky, tak ji dokažte.

Řešení.

a) NL obsahuje problémy řešitelných v nedeterministickém lineárním prostoru[2].

P je třída problémů řešitelných v polynomiálním čase[3].

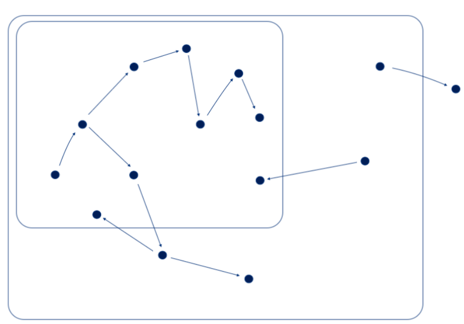
b) NL = NSPACE$(\log(n)) \subseteq$ TIME $\left(2^{\mathcal{O}(\log(n))}\right) =$ TIME$(n^{\mathcal{O}(1)}) = P$

První inkluze vychází z NSPACE$(f) \subseteq$ TIME $\left(2^{\mathcal{O}(f)}\right)$. Což lze ukázat, že platí obecně pro všechny $f > \log n$.

Algoritmus 1: Algoritmus výpočtu NSPACE(f) v deterministickém čase

---

nageneruj všechny možné stavy výpočtu $\ldots 2^{\mathcal{O}(f(n))}$
vytvoř orientovaný graf možných přechodů (obrázek 1)
if *příjímající stav výpočtu je dosažitelný z počátečního* **then**
  ACCEPT
end



Obrázek 1: Rozšiřování počtu stavů

■

[2] tedy NL = NSPACE$(\log(n))$
[3] tedy P $= \bigcup_{k\in\mathbb{N}}$ TIME(n^k)