4 KOOPERATIVNÍ HRY N HRÁČŮ

4.1 HRA VE TVARU CHARAKTERISTICKÉ FUNKCE

4.1.1 Základní pojmy

V předchozí kapitole mohli hráči koordinovat své strategie, nemohli však sdílet zisky. Ve hrách studovaných v této kapitole budou hráči moci spolupracovat zcela, včetně případného přerozdělení výhry. Budeme předpokládat, že dohody, které uzavřou, jsou naprosto závazné.

Definice 1. Uvažujme hru N hráčů; množinu všech hráčů označme symbolem Q. **Koalicí** se rozumí skupina hráčů spolupracujících při volbě strategií, případně při přerozdělování výhry. **Koaliční strukturou** se nazývá množina všech koalic, které se v dané situaci z uvažovaných hráčů vytvoří. Koalice budeme značit písmeny K, L, Q, apod., případně je udáme přímo jako množinu obsahující členy této koalice, např. $\{1\}$, $\{2, 3, 5\}$, apod.

Protikoalicí ke koalici $K \subseteq Q$ se rozumí množina hráčů

$$K^p = Q \setminus K = \{i \in Q; i \notin K\}.$$

Množina všech hráčů Q se nazývá **velká koalice**, její protikoalice, tj. prázdná množina, se nazývá **prázdná koalice**.

Obecně se ve hře může vytvořit 2^N koalic – právě tolik je všech podmnožin množiny Q.

Definice 2. Hra ve tvaru charakteristické funkce sestává z množiny hráčů

$$Q = \{1, 2, \ldots, N\}$$

a reálné funkce v definované na množině všech koalic, pro je

$$v(\emptyset) = 0$$

a pro každé dvě disjunktní koalice K, L platí **superaditivita**:

$$v(K \cup L) \geq v(K) + v(L).$$

Pro jednoduchost budeme symbolem v značit i příslušnou hru ve tvaru charakteristické funkce.

Hodnoty charakteristické funkce udávají sílu jednotlivých koalic.

Definice 3. Hra ve tvaru charakteristické funkce se nazývá **nepodstatná**, jestliže platí:

$$v(Q) = \sum_{i=1}^{N} v(\{i\})$$

Hra, která není nepodstatná, se nazývá **podstatná**.

Věta 2. *Nechť K je libovolná koalice hráčů v nepodstatné hře. Potom*

$$v(K) = \sum_{i \in K} v(\{i\})$$

4.1.2 Imputace

Definice 4. Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s množinou hráčů

$$Q = \{1, 2, \dots, N\}.$$

N-tice $\boldsymbol{a}$ reálných čísel se nazývá **imputace**, jsou-li splněny následující podmínky:

- **Individuální racionálnost**: pro každého hráče i je

$$a_i \geq v(\{i\}). \tag{4.1}$$

- **Kolektivní racionálnost**: Platí

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = v(Q). \tag{4.2}$$

Motivace – individuální racionálnost:

Kdyby pro nějaké i bylo $a_i < v(\{i\})$, pak by se nikdy nevytvořila koalice, která by hráči přinesla pouze a_i – pro hráče i by bylo výhodnější zůstat sám za sebe a takové koalice se nezúčastnit.

Kolektivní racionálnost:

Určitě platí:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \geq v(Q). \tag{4.3}$$

V opačném případě by totiž bylo

$$\beta = v(Q) - \sum_{i=1}^{N} a_i > 0.$$

Pro hráče by tak bylo výhodnější vytvořit velkou koalici a rozdělit si celkový zisk ve výši $v(Q)$ tak, aby každý z nich získal více – například:

$$a_i' = a_i + \beta/N.$$

Na druhou stranu musí být také

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \leq v(Q). \tag{4.4}$$

Představme si, že došlo k rozdělení $\boldsymbol{a}$, tj. hráči jisté koalice K i členové příslušné protikoalice K^p souhlasili s takovýmto rozdělením. Vzhledem k superaditivtě potom platí:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i \in K} a_i + \sum_{i \in K^p} a_i = v(K) + v(K^p) \leq v(Q).$$

Podmínky (4.3) a (4.4) dávají dohromady podmínku kolektivní racionálnosti (4.2)

Věta 3. *Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce. Je-li v nepodstatná, pak má právě jednu imputaci, a to*

$$\boldsymbol{a} = (v(\{1\}), v(\{2\}), \ldots, v(\{N\})).$$

Je-li v podstatná, pak má nekonečně mnoho imputací.

Důkaz. Pro nepodstatnou hru v : Kdyby bylo pro nějaké j

$$a_j > v(\{j\}),$$

pak

$$\sum_{i=1}^{N} a_i > \sum_{i=1}^{N} v(\{i\}) = v(Q),$$

což by odporovalo podmínce kolektivní racionálnosti.

Pro podstatnou hru v : Uvažujme

$$\beta = v(Q) - \sum_{i=1}^{N} a_i > 0.$$

Pro jakoukoli N-tici $\boldsymbol{\alpha}$ nezáporných čísel, jejichž součet je β, definuje vztah

$$\boldsymbol{a}_i = v(\{i\}) + \alpha_i$$

imputaci. Protože existuje nekonečně mnoho takových čísel α, existuje i nekonečně mnoho imputací. □

Formalizace myšlenky, že daná koalici preferuje jednu imputaci před jinou:

Definice 5. Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce, K je koalice, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ jsou imputace. Řekneme, že $\boldsymbol{a}$ **dominuje** $\boldsymbol{b}$ **pro koalici** $\boldsymbol{K}$, jestliže platí:

- $a_i > b_i$ pro všechna $i \in K$,
- $\sum_{i \in K} a_i \leq v(K)$.

Dominanci budeme značit symbolem $\boldsymbol{a} \succ_K \boldsymbol{b}$.

Druhá podmínka říká, že rozdělení $\boldsymbol{a}$ je **dosažitelné**, tj. hráči v koalici K mohou získat dostatečně vysokou hodnotu na to, aby každému mohlo být vyplaceno příslušné a_i.

4.1.3 Jádro hry

Intuitivně je zřejmé, že bude-li nějaká imputace dominována pro nějakou koalici jinou imputací, budou mít hráči této koalice snahu zrušit původní koalici a ustavit tuto výhodnější.

Definice 6. Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce. **Jádro hry** je tvořeno všemi imputacemi, které nejsou dominovány žádnou jinou imputací pro žádnou jinou koalici.

Je-li tedy imputace $\boldsymbol{a}$ v jádru dané hry, nemá žádná skupina hráčů důvod vytvořit jinou koalici a nahradit $\boldsymbol{a}$ jinou imputací.

K usnadnění rozhodnutí, zda jistá imputace leží v jádru hry či nikoli, slouží následující věta:

Věta 4. *Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s N hráči a nechť $\boldsymbol{a}$ je imputace. Potom $\boldsymbol{a}$ leží v jádru hry v právě tehdy, když*

$$\sum_{i \in K} a_i \leq v(K) \tag{4.5}$$

pro každou koalici K.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že pro každou koalici platí vztah (4.5). Jestliže nějaká jiná imputace $\boldsymbol{b}$ dominuje $\boldsymbol{a}$ pro nějakou koalici K, pak

$$\sum_{i \in K} b_i > \sum_{i \in K} a_i \geq v(Q),$$

což odporuje podmínce dosažitelnosti z definice dominance. Proto $\boldsymbol{a}$ musí být v jádru.

$\Leftarrow$ Předpokládejme naopak, že $\boldsymbol{a}$ je v jádru a předpokládejme, že K je koalice, pro kterou

$$\sum_{i \in K} a_i < v(Q).$$

Chceme dojít ke sporu. Nejprve si uvědomme, že $K \neq Q$, protože by neplatila podmínka kolektivní racionálnosti.

Dále lze ukázat, že existuje hráč $j \in K^p$, pro něhož

$$a_j > v(\{j\}).$$

Kdyby tomu tak nebylo, pak by vzhledem k superaditivitě platilo:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i < v(K) + \sum_{i \in K^p} a_i \leq v(Q),$$

což opět odporuje podmínce kolektivní racionálnosti. Můžeme tedy zvolit takové $j \in K^p$, že existuje číslo α, pro které platí:

$$0 < \alpha \leq a_j - v(\{j\}) \qquad \text{a} \qquad \alpha \leq v(Q) - \sum_{i \in K} a_i.$$

Značí-li k počet hráčů v koalici K, můžeme definovat novou imputaci $\boldsymbol{b}$ dominující $\boldsymbol{a}$ vztahem:

$$\begin{aligned} &b_i = a_i + \alpha/k \qquad \text{pro } P_i \in K, \\ &b_j = a_j - \alpha, \\ &b_i = a_i \qquad \text{pro všechna ostatní } i. \end{aligned}$$

Taková imputace $\boldsymbol{b}$ dominuje imputaci $\boldsymbol{a}$ pro K, což je spor s předpokladem, že $\boldsymbol{a}$ leží v jádru. □

Tvrzení 2. *Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s N hráči a nechť $\boldsymbol{a}$ je N-tice čísel. Potom $\boldsymbol{a}$ je imputace v jádru, právě když platí:*

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i = v(Q)$,
- $\displaystyle\sum_{i \in K} a_i \geq v(K)$ *pro každou koalici K.*

Důkaz. Každá imputace z jádra zřejmě splňuje obě podmínky.

Splňuje-li naopak N-tice $\boldsymbol{a}$ tyto podmínky, pak užitím druhé podmínky na jednoprvkové koalice získáme individuální racionálnost, první představuje přímo kolektivní racionálnost; $\boldsymbol{a}$ je proto imputací. Z předchozí věty pak plyne, že $\boldsymbol{a}$ leží v jádru. □

☛ ***Příklad 1.*** Uvažujme hru tří hráčů popsanou tabulkou:

Trojice strategií	Výplatní vektory
(1,1,1)	(-2,1,2)
(1,1,2)	(1,1,-1)
(1,2,1)	(0,1,-1)
(1,2,2)	(-1,2,0)
(2,1,1)	(1,-1,1)
(2,1,2)	(0,0,1)
(2,2,1)	(1,0,0)
(2,2,2)	(1,2,-2)

Množina hráčů je $Q = \{1, 2, 3\}$, všechny možné koalice jsou

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} = Q.$$

Uvažujme koalici $K = \{1, 3\}$. Protikoalice je $K^P = \{2\}$. Koalice K má čtyři společné strategie: $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$. Protikoalice má dvě ryzí strategie: 1, 2. Zajímá-li nás, co je koalice K schopna pro sebe zajistit, uvažujeme dvojmaticovou hru:

		Protikoalice K^P	
	Strategie	1	2
	$(1, 1)$	$(0, 1)$	$(2, -1)$
Koalice K	$(1, 2)$	$(0, 1)$	$(-1, 2)$
	$(2, 1)$	$(2, -1)$	$(1, 0)$
	$(2, 2)$	$(1, 0)$	$(-1, 2)$

Maximinní hodnoty výplatních funkcí jsou $3/4$ a $-1/3$, charakteristickou funkci proto budeme uvažovat takto:

$$v(\{1, 3\}) = 3/4, \quad v(\{2\}) = -1/3.$$

Podobným způsobem obdržíme:

$$v(\{1, 2\}) = 1, \quad v(\{3\}) = 0 \quad v(\{2, 3\}) = 3/4, \quad v(\{1\}) = 1/4,$$

$$v(Q) = 1, \quad v(\emptyset) = 0.$$

Takto definovaná funkce v je skutečně charakteristickou funkcí – ověřte superaditivitu.

Imputace:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \qquad a_1 \geq 1/4, \quad a_2 \geq -1/3, \quad a_3 \geq 0.$$

Například:

$$(1/3, 1/3, 1/3), \quad (1/4, 3/8, 3/8), \quad (1, 0, 0).$$

Jádro:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ a_1 &\geq 1/4 \\ a_2 &\geq -1/3 \\ a_3 &\geq 0 \\ a_1 + a_2 &\geq 1 \\ a_1 + a_3 &\geq 4/3 \\ a_2 + a_3 &\geq 3/4 \end{aligned}$$

Z prvního, čtvrtého a pátého vztahu plyne: $a_3 = 0$, $a_1 + a_2 = 1$. Přitom ale $a_1 \geq 4/3$, $a_2 \geq 3/4$. Jádro hry je v tomto případě prázdné.

☛ ***Příklad 2.*** Uvažujme hru tří hráčů s charakteristickou funkcí:

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= -1/2 \\ v(\{2\}) &= 0 \\ v(\{3\}) &= -1/2 \\ v(\{1,2\}) &= 1/4 \\ v(\{1,3\}) &= 0 \\ v(\{2,3\}) &= 1/2 \\ v(\{1,2,3\}) &= 1 \end{aligned}$$

Jádro:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ a_1 &\geq -1/2 \\ a_2 &\geq 0 \\ a_3 &\geq -1/2 \\ a_1 + a_2 &\geq 1/4 \\ a_1 + a_3 &\geq 0 \\ a_2 + a_3 &\geq 1/2 \end{aligned}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení; prvkem jádra je například trojice $(1/3, 1/3, 1/3)$.

☛ ***Příklad 3.*** **Hra s ojetým automobilem.**

David má starý automobil, který nepužívá a je pro něj bezcenný, pokud jej nebude moci prodat. O koupi se zajímají dva lidé, Marie a František. Marie automobil cení na 50 000 Kč, František na 70 000 Kč. Hra spočívá v tom, že zájemci navrhnou cenu Davidovi a ten buď přijme jednu z nabídek, nebo obě odmítne.

Jádro: (a_D, a_M, a_F); $\quad 50\,000 \leq a_D \leq 70\,000, \quad a_F = 70\,000 - a_D, \quad a_M = 0.$

4.2 DALŠÍ POJMY ŘEŠENÍ

4.2.1 Shapleyho hodnota

Shapleyho hodnota bere v úvahu hráčův příspěvek k úspěchu koalice, do níž náleží.

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s N hráči, K je koalice sestávající z k členů, do níž náleží hráč i. Pak číslo

$$\delta(i, K) = v(K) - v(K \setminus \{i\})$$

je mírou hodnoty hráče i, kterou přispěje koalici K, když se k ní připojí.

Koalice $K \setminus \{i\}$ má $k-1$ členů a lze ji proto vytvořit

$$\binom{N-1}{k-1} = \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}$$

způsoby (hráč i je mimo výběr, do koalice vstupuje jako poslední).

Střední hodnota přínosu hráče i ke všem k-členným koalicím je

$$\begin{aligned} h_i(k) = \sum_{K \subset Q,\ k=|K|} \frac{v(K) - v(K \setminus \{i\})}{\binom{N-1}{k-1}} = \\ = \sum_{K \subset Q,\ k=|K|} \frac{(k-1)!(N-k)!}{(N-1)!} \left(v(K) - v(K \setminus \{i\})\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Střední hodnota přínosu hráče i k úhrnu všech jednočlenných, dvoučlenných, ..., N-členných koalic je dána vztahem:

$$H_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{h_i(k)}{N} = \sum_{K \subset Q,\ i \in K} \frac{(N-k)!(k-1)!}{N!} \left(v(K) - v(K \setminus \{i\})\right) \tag{4.7}$$

Definice 7. Shapleyho vektor hry N hráčů ve tvaru charakteristické funkce je definován jako vektor

$$\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, \ldots, H_N), \tag{4.8}$$

jehož i-tá složka H_i je určena vztahem (4.7).

Složka H_i se nazývá **Shapleyho hodnota** pro hráče i.

Věta 5. Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce. Potom Shapleyho vektor je imputací.

Ihned z definice je patrné, že Shapleyho vektor vždy existuje a pro danou hru je určen jednoznačně.

☛ ***Příklad 4.*** Vypočtěme Shapleyho hodnoty hry s charakteristickou funkcí

$$v(Q) = 0, \quad v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = -1,$$

$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1, .$$

V tomto případě bude

$$h_1(1) = -1, \qquad h_1(2) = \frac{2+2}{2} = 2, \qquad h_1(3) = -1,$$

Shapleyho hodnota pro každého z hráčů bude

$$H_i = \frac{-1+2-1}{3} = 0 \qquad \text{pro} \;\; i = 1, 2, 3,$$

a Shapleyho vektor bude $\boldsymbol{H} = (0, 0, 0)$

☛ ***Příklad 5.*** Uvažujme hru s charakteristickou funkcí

$$v(Q) = 200, \quad v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = 100, \quad v(\{2\}) = 10 \quad v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = 150, \quad v(\{1,3\}) = 110, \quad v(\{2,3\}) = 20.$$

V tomto případě bude

$$h_1(1) = 100, \qquad h_2(1) = 10, \qquad h_3(1) = 0,$$

$$h_1(2) = \frac{140+110}{2}, \qquad h_2(2) = \frac{50+20}{2}, \qquad h_3(2) = \frac{10+10}{2},$$

$$h_1(3) = 180, \qquad h_2(3) = 90, \qquad h_3(3) = 50,$$

Celkem tedy:

$$H_1(1) = \frac{100+125+180}{3} = 135,$$

$$H_1(2) = \frac{10+35+90}{3} = 45,$$

$$H_1(3) = \frac{0+10+50}{3} = 20,$$

Shapleyho vektor: $\boldsymbol{H} = (135, 45, 20)$.

Příklad 6. Uvažujme hru z příkladu 1, jejíž charakteristická funkce je dána vztahy:

$$v(Q) = 1, \quad v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = \frac{1}{4}, \quad v(\{2\}) = -\frac{1}{3}, \quad v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = 1, \quad v(\{1,3\}) = \frac{4}{3}, \quad v(\{2,3\}) = \frac{3}{4}.$$

Shapleyho hodnoty jsou v tomto případě následující:

$$H_1 = \frac{2!0!}{3!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1!1!}{3!} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1!1!}{3!} \cdot \frac{4}{3} + \frac{0!2!}{3!} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{18},$$

podobně

$$H_2 = \frac{1}{36}, \qquad H_3 = \frac{13}{36}.$$

Shapleyho vektor je tedy

$$\boldsymbol{H} = \left(\frac{11}{18}, \frac{1}{36}, \frac{13}{36}\right)$$

Příklad 7. Pro hru z příkladu 3 jsou Shapleyho hodnoty následující:

$$H_D = 43\,333,\overline{3}; \qquad H_M = 8\,333,\overline{3}; H_F \qquad 18\,333,\overline{3};$$

tj.

$$\boldsymbol{H} = \left(43\,333,\overline{3};\ 8\,333,\overline{3};\ 18\,333,\overline{3}\right).$$

***Příklad 8.* Hra Kocourkov.**

Obecní správa v Kocourkově je tvořena městskou radou a starostou. Rada je tvořena šesti radními a předsedou. Vyhláška může vejít v platnost dvěma způsoby:

- Většina rady (přičemž předseda volí jen v případě remízy mezi radními) ji schválí a starosta ji podepíše.
- Rada ji schválí, starosta ji vetuje, ale alespoň šest ze sedmi členů rady pak veto přehlasuje (v tomto případě předseda vždy volí).

Definujme $v(S) = 1$ pro *vítěznou koalici*, $v(S) = 0$ pro *poraženou koalici*.
Rozdělení

$$(a_S, a_P, a_1, \ldots, a_6),$$

kde S značí starostu, P předsedu a $1, 2, \ldots, 6$ radní, je **imputací**, právě když

$$a_S, a_P, a_1, \ldots, a_6 \geq 0 \qquad \text{a} \qquad a_S + a_P + a_1 + \cdots + a_6 = 1.$$

Snadno lze odvodit, že **jádro** této hry je prázdné:
Vzhledem k tomu, že jakákoli aspoň šestiprvková koalice zvítězí, je

$$a_P + a_1 + \cdots + a_6 \geq 1$$

a stejná nerovnost platí i tehdy, když libovolný ze sčítanců vypustíme. Protože všichni sčítanci jsou nezáporní a součet všech osmi je roven jedné, musí být všechny rovny nule, což je spor.

Pokusme se nyní najít **Shapleyho vektory** pro tuto hru.

Začněme s hodnotou starosty S. Nenulové členy v součtu (4.7) jsou ty, pro něž je $K \setminus \{S\}$ poražená koalice, ale K je vítězná (odstraní-li starostu, radní vyhlášku schválí, ale nepřehlasují jeho veto). V tomto případě existují čtyři druhy vítězných koalic:

1. K obsahuje starostu, tři radní a předsedu. Takovýchto koalic je
$$\binom{6}{3} = 20.$$
Protože $|K| = k = 5$, je příspěvek těchto množin k celkové hodnotě H_S roven
$$20 \cdot \frac{(N-k)!(k-1)!}{N!} = 20 \cdot \frac{(8-5)!(5-1)!}{8!} = 20 \cdot \frac{1}{280} = \frac{1}{14}\ .$$

2. K obsahuje starostu a čtyři radní. Takovýchto koalic je 15 a příspěvek těchto množin k celkové hodnotě H_S je roven
$$15 \cdot \frac{(8-5)!(5-1)!}{8!} = \frac{3}{56}\ .$$

3. K obsahuje starostu, čtyři radní a předsedu. Takovýchto koalic je 15 a příspěvek těchto množin k celkové hodnotě H_S je roven
$$15 \cdot \frac{(8-6)!(6-1)!}{8!} = \frac{5}{56}\ .$$

4. K obsahuje starostu a pět radních. Takovýchto koalic je 6 a příspěvek těchto množin k celkové hodnotě H_S je roven
$$6 \cdot \frac{(8-6)!(6-1)!}{8!} = \frac{1}{28}\ .$$

Celkem je tedy
$$H_S = \frac{1}{14} + \frac{3}{56} + \frac{5}{56} + \frac{1}{28} = \frac{1}{4}\ .$$

Dále se podívejme na předsedu P. V tomto případě existují jen dva druhy vítězných koalic:

1. K obsahuje předsedu, tři radní a starostu (volba radních skončí remízou, předseda volí, starosta podepíše.

2. K obsahuje předsedu a pět radních (návrh bude vetován, ale s předsedovým hlasem bude přehlasovánj).

Koalic prvního typu je celkem 20, druhého typu 6. Proto

$$H_P = 20 \cdot \frac{(8-5)!(5-1)!}{8!} + 6 \cdot \frac{(8-6)!(6-1)!}{8!} = \frac{3}{28} \, .$$

Součet všech H je 1, hodnoty pro jednotlivé radní jsou zřejmě stejné, proto pro každé $i = 1, 2, \ldots, 6$ bude

$$H_i = \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{28}) = \frac{3}{28} \, .$$

Celkem:

$$\boldsymbol{H} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{28}, \frac{3}{28}, \ldots, \frac{3}{28}\right)$$

Je vidět, že starosta má mnohem větší moc než předseda či obyčejný radní. A ukazuje se, že předseda má přesně stejnou moc jako radní.

4.2.2 Nukleolus

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s N hráči, $\boldsymbol{a}$ je daná imputace, K je daná koalice. Číslo

$$e(K, \boldsymbol{a}) = v(K) - \sum_{i \in K} a_i \tag{4.9}$$

se nazývá **exces koalice K vzhledem k imputaci $\boldsymbol{a}$**.

Označme symbolem $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})$ vektor o $2^N - 1$ složkách, který je tvořen excesy pro všechny koalice. Uspořádejme jeho složky sestupně podle velikosti a takto vzniklý vektor označme jako $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

Každé imputaci $\boldsymbol{a}$ tímto způsobem přiřaďme vektor $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ a na takto vzniklé množině vektorů

$$\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}); \boldsymbol{a} \text{ je imputace}\}$$

uvažujme lexikografické uspořádání. Řekneme, že **imputace $\boldsymbol{b}$ je přijatelnější než imputace $\boldsymbol{a}$**, jestliže platí:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \leq_{(\text{lex})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \tag{4.10}$$

kde $\leq_{(\text{lex})}$ je nerovnost v lexikografickém („slovníkovém“) uspořádání, tj. buď je první složka vektoru $\boldsymbol{b}$ je menší než první složka vektoru $\boldsymbol{a}$, nebo jsou první složky stejné, ale druhá složka vektoru $\boldsymbol{b}$ je menší než druhá složka vektoru $\boldsymbol{a}$, nebo jsou první i druhé složky stejné, ale třetí složka vektoru $\boldsymbol{b}$ je menší než třetí složka vektoru $\boldsymbol{a}$, atd.

Uvědomme si, že je-li imputace $\boldsymbol{b}$ přijatelnější než imputace $\boldsymbol{a}$, vzbuzuje méně námitek než imputace $\boldsymbol{a}$ nebo jsou tyto námitky stejné – první rozdílný exces musí být v $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ menší než v $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

Definice 8. Nukleolem hry se nazývá taková imputace, pro kterou platí:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \leq_{(\text{lex})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \qquad \text{pro všechny imputace } \boldsymbol{a}.$$

☛ ***Příklad 9.*** Pro hru s charakteristickou funkcí

$$v(Q) = 0, \quad v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = -1,$$

$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1, .$$

má vektor $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})$ tyto složky:

$$\begin{aligned} &-(a_1 + a_2 + a_3),\\ &1 - a_1 - a_2,\\ &1 - a_1 - a_3,\\ &1 - a_2 - a_3,\\ &-(1 + a_1),\\ &-(1 + a_2),\\ &-(1 + a_3). \end{aligned}$$

První složka je rovna nule, neboť $v(Q) = a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Protože $a_i \geq v(\{i\}) = -1$, jsou poslední tři složky vždy nekladné. Kladný exces proto mohou mít jen dvouprvkové koalice. Maximum

$$\max_{\boldsymbol{a} \text{ je imputace}} \{1 - a_1 - a_2,\ 1 - a_1 - a_3,\ 1 - a_2 - a_3\}$$

nastává pro $\boldsymbol{a} = (0, 0, 0)$.

Nukleolus je tedy imputace $(0, 0, 0)$.