IB102 – úkol 1 – řešení **Odevzdání: 26. 9. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [**2 body**] Mějme následující jazyky nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.

$$L_1 = (\{a\} \cdot \{b\}^*) \cdot \emptyset^3$$
$$L_2 = (\{a\} \cup \{b\})^* \cdot \emptyset^*$$
$$L_3 = (\{a\}^* \setminus \{b\}) \cap \emptyset^0$$

Seřaďte zadané jazyky podle počtu slov. Svou odpověď zdůvodněte.

Řešení: Z definice mocniny platí: $\emptyset^0 = \{\varepsilon\}$, $\emptyset^n = \emptyset$ pro libovolné $n > 0$, a tudíž $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$. Jazyky ze zadání je tedy možno upravit následovně:

$$L_1 = (\{a\} \cdot \{b\}^*) \cdot \emptyset^3 = (\{a\} \cdot \{b\}^*) \cdot \emptyset = \emptyset \qquad \text{(zřetězení lib. jazyka s } \emptyset \text{ je } \emptyset\text{)}$$
$$L_2 = (\{a\} \cup \{b\})^* \cdot \emptyset^* = \{a, b\}^* \cdot \{\varepsilon\} = \{a, b\}^* \qquad \text{(zřetězení lib. jazyka s } \{\varepsilon\} \text{ je tentýž jazyk)}$$
$$L_3 = (\{a\}^* \setminus \{b\}) \cap \emptyset^0 = \{a\}^* \cap \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$$

Vidíme, že jazyk L_1 je prázdný, neobsahuje tedy žádné slovo, jazyk L_2 obsahuje nekonečně mnoho slov a jazyk L_3 obsahuje jedno slovo, slovo ε. Pořadí podle počtu slov je tedy následující: L_1, L_3, L_2.

IB102 – úkol 1 – řešení **Odevzdání: 26. 9. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

2. [**2 body**] Nechť L je jazyk nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ tvořený právě všemi slovy délky alespoň 5, která mají lichý počet písmen a. Zapište jazyk L pomocí jednoprvkových jazyků $\{a\}$ a $\{b\}$ s využitím operací sjednocení ($\cup$), průniku ($\cap$), rozdílu ($\setminus$), doplňku ($\mathsf{co}-$), zřetězení ($\cdot$), mocniny ($^2, ^3, \ldots$) a iterace (*).

Řešení je možno napsat například takto:

$$L = \big(\{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^*)^*\big) \cap \big((\{a\} \cup \{b\})^5 \cdot (\{a\} \cup \{b\})^*\big)$$

Vysvětlení: první část $(\{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^*)^*)$ je jazyk všech slov nad zadanou abecedou, která mají lichý počet písmen a. Druhá část $((\{a\} \cup \{b\})^5 \cdot (\{a\} \cup \{b\})^*)$ pak je jazyk všech slov délky alespoň 5. Jejich průnikem pak dostaneme zadaný jazyk L.

IB102 – úkol 2 – řešení **Odevzdání: 10. 10. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

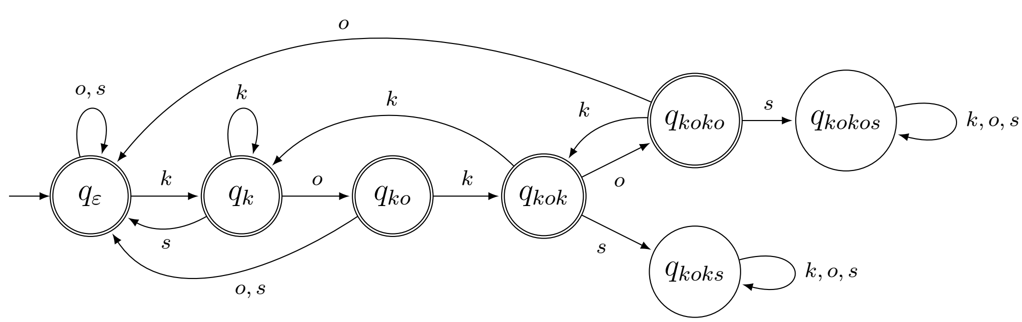
1. [2 body] Mějme následující jazyk:

$$L = \{w \in \{k, o, s\}^* \mid w \text{ neobsahuje podslovo } kokos \text{ ani podslovo } koks\}$$

Sestrojte totální deterministický konečný automat přijímající jazyk L.

Varianta za 1 bod: Pokud toto zadání nezvládnete, zkuste sestrojit automat pro jazyk všech slov nad abecedou $\{k, o, s\}$ neobsahujících pouze podslovo *kokos*.

Řešení: Totální deterministický konečný automat přijímající L může vypadat například takto:



Poznámka: Řešení varianty za 1 bod by mohlo vypadat obdobně, jen by v automatu neexistoval stav q_{koks} a přechod pod s ze stavu q_{kok} by vedl do stavu q_ε.

IB102 – úkol 2 – řešení **Odevzdání: 10. 10. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

2. [**2 body**] Mějme následující gramatiku (nemusí být regulární) s vynechanou částí pravidel:

$$G = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{0, 1\}, P, S)$$

$$\begin{array}{rrcl} P = \{ & S & \to & 0 \mid 1A, \\ & A & \to & 0B \mid 1C, \\ & B & \to & 0D \mid 1E, \\ & C & \to & 0F \mid 1A, \\ & D & \to & 0B \mid 1C, \\ & E & \to & 0D \mid 1E, \\ & F & \to & ??? \ \ \} \end{array}$$

Doplňte do gramatiky pravidla pro neterminál F tak, aby gramatika generovala jazyk

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ je binární zápis čísla dělitelného } 6\}.$$

Své řešení zdůvodněte.

Nápověda: Je třeba přidat tři pravidla.

Řešení: Do gramatiky přidáme pravidla $F \to 0F \mid 1A \mid \varepsilon$.

Zdůvodnění: Libovolná větná forma odvozená z S v této gramatice je buď S nebo 0 nebo tvaru wX, kde $w \in \{1\} \cdot \{0, 1\}^*$ a $X \in \{A, B, C, D, E, F\}$. Pro každou větnou formu tvaru wX platí:

- je-li $X = A$, pak w je binární zápis čísla, jehož zbytek po dělení 6 je 1,
- je-li $X = B$, pak w je binární zápis čísla, jehož zbytek po dělení 6 je 2,
- je-li $X = C$, pak w je binární zápis čísla, jehož zbytek po dělení 6 je 3,
- je-li $X = D$, pak w je binární zápis čísla, jehož zbytek po dělení 6 je 4,
- je-li $X = E$, pak w je binární zápis čísla, jehož zbytek po dělení 6 je 5,
- je-li $X = F$, pak w je binární zápis čísla, jehož zbytek po dělení 6 je 0.

Toto tvrzení by se dalo snadno dokázat indukcí k délce w. Spolu s existencí pravidla $F \to \varepsilon$ z toho vyplývá, že gramatika generuje zadaný jazyk L.

IB102 – úkol 3 – řešení **Odevzdání: 17. 10. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [2 body] Mějme následující jazyk:

$$L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0, n, m \text{ jsou lichá nebo } n = 2m\}$$

Rozhodněte, zda je zadaný jazyk regulární. Dále:

- Pokud je L regulární, sestrojte pro zadaný jazyk konečný automat i regulární gramatiku. Automat i gramatiku zapište úplně formálně správně.
- Pokud L není regulární, dokažte tuto skutečnost pomocí Lemmatu o vkládání (tzv. Pumping lemma).

Řešení: L není regulární. Důkaz provedeme pomocí PL.

- Nechť n je libovolné přirozené číslo.
- Zvolíme slovo $w = a^{2n}b^n$. Zřejmě $w \in L$ a $|w| \geq n$.
- Všechna možná rozdělení $w = xyz$, $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$ vypadají takto:

$$\begin{aligned} x &= a^k && k \geq 0 \\ y &= a^l && l > 0,\ k + l \leq n \\ z &= a^{2n-k-l}b^n \end{aligned}$$

- Zvolíme $i = 3$, slovo xy^iz pak vypadá takto:

$$xy^3z = a^k a^{3l} a^{2n-k-l} b^n = a^{2n+2l} b^n$$

  Zřejmě $a^{2n+2l}b^n \notin L$, neboť $2n + 2l$ je sudé, ale $2n + 2l \neq 2n$ (protože $l > 0$). Podle Lemmatu o vkládání tedy L není regulární.

IB102 – úkol 3 – řešení **Odevzdání: 17. 10. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

2. [**2 body**] Mějme následující jazyk:

$$L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0, n, m \text{ jsou lichá a } n = 2m\}$$

Rozhodněte, zda je zadaný jazyk regulární. Dále:

- Pokud je L regulární, sestrojte pro zadaný jazyk konečný automat i regulární gramatiku. Automat i gramatiku zapište úplně formálně správně.
- Pokud L není regulární, dokažte tuto skutečnost pomocí Lemmatu o vkládání (tzv. Pumping lemma).

Řešení: Není možno najít dvě přirozená čísla n, m tak, aby obě byla lichá a zároveň platilo $n = 2m$. Proto $L = \emptyset$, a tedy je L regulární jazyk.

Regulární gramatika generující L může vypadat například takto:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS\}, S)$$

Konečný automat přijímající L může vypadat například takto:

$$A = (\{q\}, \{a, b\}, \delta, q, \emptyset), \text{ kde } \delta(q, a) = \delta(q, b) = q.$$

IB102 – úkol 4 – řešení **Odevzdání: 24. 10. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [2 body]

a) Uvažme abecedu $\Sigma = \{a\}$ a relaci R_a nad Σ^* definovanou takto:

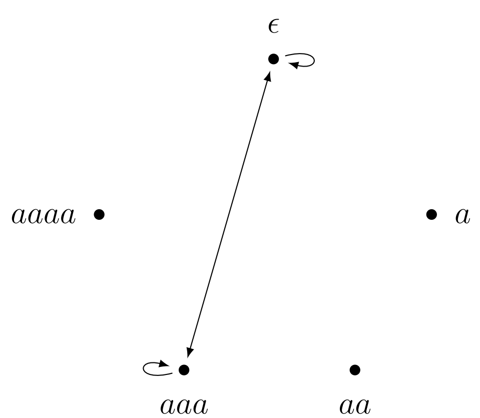
$$u\, R_a\, v \iff |u| \bmod 3 = 0 \wedge |v| \bmod 3 = 0.$$

- Rozhodněte, která slova z množiny $\{\epsilon, a, aa, aaa, aaaa\}$ jsou spolu v relaci a která nikoliv a výsledek znázorněte do obrázku níže, tj. spojte šipkou vedoucí z u do v všechna u a v taková, že $u\, R_a\, v$. Pokud $u\, R_a\, v$ i $v\, R_a\, u$, můžete použít "dvojšipku"– jednu čáru se šipkami na obou koncích. Nezapomeňte udělat šipku z u do u v případě, že $u\, R_a\, u$.
- Je R_a ekvivalence? Zdůvodněte.
- Je R_a pravá kongruence? Zdůvodněte.

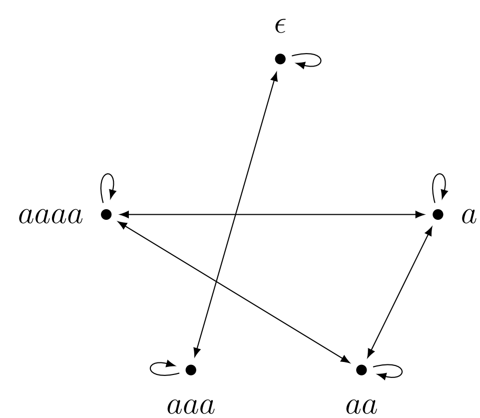
b) Proveďte totéž pro relaci R_b nad Σ^* definovanou takto:

$$u\, R_b\, v \iff (|u| \bmod 3 = 0 \iff |v| \bmod 3 = 0).$$

a)



b)



Řešení: Relace jsou znázorněny v obrázcích výše.

Relace R_a není reflexivní (např. neplatí $a\, R_a\, a$), není proto relací ekvivalence, a tudíž není ani relací pravé kongruence.

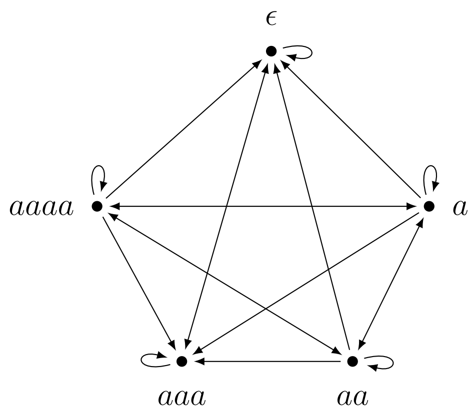
Relace R_b je reflexivní, symetrická i tranzitivní, je proto relací ekvivalence. Tyto vlastnosti zřejmě plynou z vlastností výrokového operátoru $\iff$. Relace R_b ovšem není relací pravé kongruence, neboť platí $a\, R_b\, aa$, ale neplatí $aa\, R_b\, aaa$.

Bonus: [+1 bod]

c) Proveďte totéž pro relaci R_c nad Σ^* definovanou takto:

$$u\, R_c\, v \iff (|u| \bmod 3 = 0 \Rightarrow |v| \bmod 3 = 0).$$

c)



Řešení: Relace R_c není symetrická (např. $a\,R_c\,\varepsilon$, ale neplatí $\varepsilon\,R_c\,a$), proto není relací ekvivalence, a tedy ani relací pravé kongruence.

IB102 – úkol 4 – řešení **Odevzdání: 24. 10. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

2. [**2 body**] Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí:

- Existuje regulární jazyk $L \subseteq \{a, b\}^*$ a pravá kongruence $\sim$ na $\{a, b\}^*$ taková, že L je sjednocením některých tříd rozkladu $\{a, b\}^*$ podle $\sim$ a **index $\sim$ je dvojnásobkem indexu $\sim_L$**.
- Existuje regulární jazyk $L \subseteq \{a, b\}^*$ a pravá kongruence $\sim$ na $\{a, b\}^*$ taková, že L je sjednocením některých tříd rozkladu $\{a, b\}^*$ podle $\sim$ a **index $\sim_L$ je dvojnásobkem indexu $\sim$**.

(*Pozn.* Pokud bude Vaše odpověď „ano, platí", uveďte zcela konkrétní příklad takového jazyka L a pravé kongruence $\sim$, a zdůvodněte. Pokud bude Vaše odpověď „ne, neplatí", pokuste argumentovat, proč to neplatí pro žádný jazyk L a žádnou pravou kongruenci $\sim$).

Bonus: [**+1 bod**]

Jak by se změnily odpovědi, pokud bychom netrvali na regularitě jazyka L? Zdůvodněte.

Řešení:

- První tvrzení platí. Vezměme si $L = \emptyset$ (tedy $\sim_L = \Sigma^* \times \Sigma^*$) a $\sim = \{(\varepsilon, \varepsilon)\} \cup \Sigma^+ \times \Sigma^+$. Index $\sim_L$ je 1 a index $\sim$ je 2.
- Druhé tvrzení neplatí. Víme totiž, že prefixová ekvivalence pro jazyk L je největší pravá kongruence s vlastností, že L je sjednocením některých tříd jí odpovídajícího rozkladu na Σ^*. Pro každou takovou pravou kongruenci $\sim$ tedy musí platit, že index $\sim$ je větší nebo roven indexu $\sim_L$.
- *Bonus:* Pokud ze zadaných tvrzení vyjmeme požadavek na regularitu jazyka L, obě tvrzení platí. Stačí vzít libovolný neregulární jazyk L a vzít $\sim = \sim_L$. Pak jsou oba indexy nekonečné, a tudíž je možno tvrdit, že je jeden dvojnásobkem druhého.

IB102 – úkol 6 – řešení **Odevzdání: 7. 11. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [**2 body**] Rozhodněte a dokažte, zda následující implikace platí:

(a) K je konečný jazyk, N je neregulární jazyk $\Rightarrow$ $\textsf{co-}((K \cap N) \cup N)$ je regulární.

(b) K je konečný jazyk, N je neregulární jazyk $\Rightarrow$ $\textsf{co-}(K \cap N) \cup N$ je regulární.

Řešení:

(a) Implikace neplatí. Stačí vzít $K = \emptyset$ a N libovolný neregulární jazyk. Pak zřejmě $\textsf{co-}((K \cap N) \cup N) = \textsf{co-}N$. Kdyby však $\textsf{co-}N$ byl regulární, pak by i $N = \textsf{co-}(\textsf{co-}N)$ byl regulární, což není.

(b) Implikace platí. Zřejmě $\textsf{co-}(K \cap N) \supseteq \textsf{co-}N$ a proto $\textsf{co-}(K \cap N) \cup N = \Sigma^*$, což je regulární jazyk.

IB102 – úkol 6 – řešení **Odevzdání: 7. 11. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

2. [**3 body**] Mějme následující operaci na jazycích:

$$triple(L) = \{w \cdot w \cdot w \mid w \in L\}$$

Rozhodněte a dokažte, zda následující tvrzení platí:

(a) Třída všech regulárních jazyků je uzavřená na *triple*.

(b) Třída všech konečných jazyků je uzavřená na *triple*.

Pokud při dokazování budete o nějakém jazyce tvrdit, že není regulární, tuto skutečnost musíte rovněž dokázat.

Bonus [1 bod]: Změnila by se nějak odpověď na předchozí otázky, pokud bychom se omezili na jazyky nad jednoprvkovou abecedou? Pokud ano, jak a proč?

Řešení:

(a) Toto tvrzení neplatí. Vezměme si například jazyk $L = \{a\}^* \cdot \{b\}$. Platí

$$triple(L) = \{a^n b a^n b a^n b \mid n \geq 0\}$$

O tomto jazyce ukážeme, že není regulární. Použijeme k tomu Myhill-Nerodovu větu. Nechť $L' = triple(L)$. Mějme nekonečnou posloupnost slov $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^i, \ldots$; ukážeme, že pro žádné $i \neq j$ neplatí $a^i \sim_{L'} a^j$. Zřejmě však $a^i \cdot ba^iba^ib \in L'$, zatímco $a^j \cdot ba^iba^ib \notin L'$. Index $\sim_{L'}$ je tedy nekonečný, proto L' není regulární.

(b) Toto tvrzení platí. Slov jazyka $triple(L)$ je zřejmě právě tolik, kolik je slov jazyka L. (Formálně: existuje bijekce mezi L a $triple(L)$ definovaná takto: $f(w) = w \cdot w \cdot w$.)

Bonus: Pokud bychom se omezili na jazyky nad jednoprvkovou abecedou, pak by se změnila odpověď v části (a). Třída všech regulárních jazyků nad jednoprvkovou abecedou je uzavřená na *triple*, neboť pak platí

$$triple(L) = \{a^{3n} \mid a^n \in L\}$$

a k důkazu uzavřenosti pak stačí použít uzavřenost na homomorfismus $h(a) = aaa$.

IB102 – úkol 7 – řešení **Odevzdání: 14. 11. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [2 body] Navrhněte algoritmus, který pro zadanou regulární gramatiku rozhodne, zda tato gramatika generuje alespoň jedno slovo neobsahující symbol a.

Bonus [2 body] Navrhněte algoritmus, který pro zadanou regulární gramatiku rozhodne, zda tato gramatika generuje alespoň dvě slova neobsahující symbol a.

Řešení mohlo vypadat například takto:

1. Odstraníme z gramatiky všechna pravidla obsahující na pravé straně terminál a, tedy všechna pravidla tvaru $A \to aB$ nebo $A \to a$ pro všechny neterminály A, B.
2. Pro tímto vzniklou novou gramatiku zkonstruujeme ekvivalentní konečný automat. Použijeme konstrukci v důkazu lemmatu 2.69 ze skript.
3. Spočítáme si množinu všech dosažitelných stavů automatu. Obsahuje-li tato množina koncový stav, odpověď je ANO; v opačném případě je odpověď NE.

Bonus: Řešení mohlo vypadat například takto:

1. Odstraníme z gramatiky všechna pravidla obsahující na pravé straně terminál a, tedy všechna pravidla tvaru $A \to aB$ nebo $A \to a$ pro všechny neterminály A, B.
2. Pro tímto vzniklou novou gramatiku zkonstruujeme ekvivalentní konečný automat. Použijeme konstrukci v důkazu lemmatu 2.69 ze skript. Označme si tento automat M.
3. Spočítáme si množinu všech dosažitelných stavů automatu. Obsahuje-li tato množina koncový stav, pokračujeme bodem 4; v opačném případě je odpověď NE a algoritmus končí.
4. Nalezneme nějaké slovo akceptované zkonstruovaným automatem. To provedeme například tak, že pomocí prohledávání do šířky nalezneme cestu z počátečního stavu do stavu koncového (že taková cesta existuje, jsme si zaručili v předchozím bodě). Označme si toto slovo w.
5. Sestrojíme automat M_w akceptující jazyk $\Sigma^* - \{w\}$, kde Σ je množina terminálů původní gramatiky.
6. Pomocí techniky synchronního paralelního spojení sestrojíme automat M' akceptující jazyk $L(M) \cap L(M_w)$.
7. Spočítáme si množinu všech dosažitelných stavů automatu M'. Obsahuje-li tato množina koncový stav, odpověď je ANO; v opačném případě je odpověď NE.

IB102 – úkol 8 – řešení **Odevzdání: 28. 11. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [2 body] Mějme následující jazyk nad abecedou $\{a, b, c, d\}$:

$$L = \{a^n b^m c^r d^s \mid n + m = r + s \text{ nebo } n = s\}$$

Sestrojte jednoznačnou bezkontextovou gramatiku generující tento jazyk. Stručně zdůvodněte, proč je Vaše gramatika jednoznačná.

(Pokud nevíte, jak sestrojit jednoznačnou gramatiku, zkuste sestrojit alespoň nějakou bezkontextovou gramatiku generující tento jazyk. V tom případě bude Vaše řešení hodnoceno maximálně 1 bodem.)

Řešení: Hledaná gramatika může vypadat například takto:
$G = (\{S, B, C, X, Y, Z\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$, kde

$$\begin{aligned} P = \{ \quad S &\to aSd \mid B \mid C \mid BC \mid bXd \mid aYc \mid \varepsilon, \\ B &\to b \mid bB, \\ C &\to c \mid cC, \\ X &\to bXd \mid Z, \\ Y &\to aYc \mid Z, \\ Z &\to bZc \mid \varepsilon \quad \}. \end{aligned}$$

Zdůvodnění jednoznačnosti této gramatiky je následující:

Nejprve se podíváme na slova tvaru $a^n b^m c^r d^s$, kde $n = s$. Zřejmě se při odvození takovýchto slov nikdy nepoužije pravidlo $S \to bXd$ ani pravidlo $S \to aYc$, protože po jejich použití už nikdy není počet a a d ve větné formě stejný. Slovo tvaru $a^n b^m c^r d^s$, kde $n = s$, tedy musí vzniknout právě jedním z těchto odvození:

- $S \Rightarrow^n a^n S d^n \Rightarrow a^n BC d^n \Rightarrow^* a^n b^m c^r d^n$ (pokud $m > 0$ a $r > 0$)
- $S \Rightarrow^n a^n S d^n \Rightarrow a^n B d^n \Rightarrow^* a^n b^m d^n$ (pokud $m > 0$ a $r = 0$)
- $S \Rightarrow^n a^n S d^n \Rightarrow a^n C d^n \Rightarrow^* a^n c^r d^n$ (pokud $m = 0$ a $r > 0$)
- $S \Rightarrow^n a^n S d^n \Rightarrow a^n d^n$ (pokud $m = r = 0$)

Protože odvození $B \Rightarrow b^m$ $(m > 0)$ i odvození $C \Rightarrow c^r$ $(r > 0)$ je vždy jenom jedno (pro dané m nebo r), znamená to, že pro každé slovo tvaru $a^n b^m c^r d^s$, kde $n = s$, existuje právě jeden derivační strom.

Odvození slov tvaru $a^n b^m c^r d^s$, kde $n < s$ a $n + m = r + s$, musí nutně vypadat takto:

$$S \Rightarrow^n a^n S d^n \Rightarrow a^n b X d^{n+1} \Rightarrow^* a^n b^{s-n} X d^s \Rightarrow a^n b^{s-n} Z d^s \Rightarrow^* a^n b^{s-n+r} Z c^r d^s \Rightarrow a^n b^{s-n+r} c^r d^s$$

a odvození slov tvaru $a^n b^m c^r d^s$, kde $n > s$ a $n + m = r + s$, musí nutně vypadat takto:

$$S \Rightarrow^n a^s S d^s \Rightarrow a^{s+1} Y c d^s \Rightarrow^* a^n Y c^{n-s} d^s \Rightarrow a^n Z c^{n-s} d^s \Rightarrow^* a^n b^m Z c^{n-s+m} d^s \Rightarrow a^n b^m c^{n-s+m} d^s$$

V obou případech jde zřejmě o jedno jediné možné odvození, pro každé slovo tvaru $a^n b^m c^r d^s$, kde $n \neq s$ a $n + m = r + s$, existuje tedy právě jeden derivační strom.

IB102 – úkol 8 – řešení **Odevzdání: 28. 11. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

2. [2 body] Mějme gramatiku $G = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{rrcl}
P = \{ & S & \to & A \mid CD \mid F, \\
& A & \to & BA \mid CAD, \\
& B & \to & b \mid bb, \\
& C & \to & \varepsilon \mid CD, \\
& D & \to & \varepsilon \mid D, \\
& E & \to & aE \mid bCb \mid cFc, \\
& F & \to & ab \mid aDaDaS \mid EC \quad \}.
\end{array}
$$

Sestrojte *vlastní* gramatiku G' *bez jednoduchých pravidel* takovou, že $L(G) = L(G')$. K jejímu sestrojení použijte algoritmů z přednášky.

Řešení: Nejprve odstraníme nenormované a nedosažitelné neterminály. Při napočítání normovaných neterminálů postupně dostáváme: $N_1 = \{B, C, D, F\}$, $N_2 = \{B, C, D, F, E, S\}$, $N_3 = N_2 = N_e$. Při počítání dosažitelných neterminálů dostáváme: $N_0 = \{S\}$, $N_1 = \{S, C, D, E, F\}$, $N_2 = N_1 = N'$. Nová gramatika tedy vypadá takto:
$G_1 = (\{S, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P_1, S)$, kde

$$
\begin{array}{rrcl}
P_1 = \{ & S & \to & CD \mid F, \\
& C & \to & \varepsilon \mid CD, \\
& D & \to & \varepsilon \mid D, \\
& E & \to & aE \mid bCb \mid cFc, \\
& F & \to & ab \mid aDaDaS \mid EC \quad \}.
\end{array}
$$

Dále odstraníme ε-pravidla. Nejprve napočítáme $N_\varepsilon = \{C, D, S\}$ a potom podle algoritmu z přednášky dostaneme následující gramatiku: $G_2 = (\{S', S, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P_2, S')$, kde

$$
\begin{array}{rrcl}
P_2 = \{ & S' & \to & S \mid \varepsilon, \\
& S & \to & CD \mid F \mid C \mid D, \\
& C & \to & CD \mid C \mid D, \\
& D & \to & D, \\
& E & \to & aE \mid bCb \mid cFc \mid bb, \\
& F & \to & ab \mid aDaDaS \mid EC \mid aaDaS \mid aDaaS \mid aDaDa \mid aaaS \mid aDaa \mid aaDa \mid aaa \mid E \quad \}.
\end{array}
$$

Tím nám mohly vzniknout (a taky vznikly) zbytečné neterminály, takže je před dalšími úpravami opět odstraníme. Zřejmě $N'' = \{S', E, F, S\}$ je množina normovaných a dosažitelných neterminálů G_2, Dostáváme tedy gramatiku: $G_3 = (\{S', S, E, F\}, \{a, b, c\}, P_3, S')$, kde

$$
\begin{array}{rrcl}
P_3 = \{ & S' & \to & S \mid \varepsilon, \\
& S & \to & F, \\
& E & \to & aE \mid cFc \mid bb, \\
& F & \to & ab \mid aaaS \mid aaa \mid E \quad \}.
\end{array}
$$

Dále odstraníme jednoduchá pravidla. Zřejmě $N'_S = \{S', S, F, E\}$, $N_S = \{S, F, E\}$, $N_E = \{E\}$, $N_F = \{F, E\}$. Provedením algoritmu z přednášky dostáváme gramatiku:
$G_4 = (\{S', S, E, F\}, \{a, b, c\}, P_4, S')$, kde

$$\begin{array}{rrcl} P_4 = \{ & S' & \rightarrow & \varepsilon \mid aE \mid cFc \mid bb \mid ab \mid aaaS \mid aaa, \\ & S & \rightarrow & aE \mid cFc \mid bb \mid ab \mid aaaS \mid aaa, \\ & E & \rightarrow & aE \mid cFc \mid bb, \\ & F & \rightarrow & aE \mid cFc \mid bb \mid ab \mid aaaS \mid aaa \quad \}. \end{array}$$

Tím nám mohly vzniknout nedosažitelné neterminály. Snadno se ale ověří, že množina dosažitelných neterminálů gramatiky G_4 je $N''' = \{S', S, E, F\}$, a tedy výsledná gramatika je $G' = G_4$.

IB102 – úkol 9 – řešení **Odevzdání: 5. 12. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [2 body] Mějme následující jazyk:

$$L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid \#_a(w) = 2\#_b(w) \text{ a } \#_a(w) < \#_c(w)\}$$

Rozhodněte, zda je tento jazyk bezkontextový, a své rozhodnutí dokažte. (Pro důkaz toho, že je jazyk bezkontextový, stačí sestrojit příslušnou bezkontextovou gramatiku nebo zásobníkový automat.)

Řešení: Jazyk L není bezkontextový. Dokážeme to pomocí lemmatu o vkládání (Pumping Lemma) pro bezkontextové jazyky.

Nechť n je libovolné přirozené číslo. Zvolíme slovo $z = a^{2n}b^nc^{2n+1}$. Zřejmě platí $z \in L$ a $|z| > n$. Nyní prozkoumáme všechna rozdělení $z = uvwxy$ taková, že $|vwx| \leq n$ a $vx \neq \varepsilon$. Každé takové rozdělení je jednoho z těchto druhů:

- Část v nebo x obsahuje alespoň jedno a. Potom zřejmě ani v ani x neobsahují žádné c. Zvolíme $i = 2$, pak zřejmě platí $\#_a(uv^2wx^2y) \geq \#_c(uv^2wx^2y)$, a tedy $uv^2wx^2y \notin L$. (Pumpováním se zvětší počet a, ale počet c se nezmění.)

- Části v ani x neobsahují žádné a, ale alespoň jedna z nich obsahuje alespoň jedno b. Zvolíme $i = 0$, pak zřejmě platí $\#_a(uv^2wx^2y) > 2\#_b(uv^2wx^2y)$, a tedy $uv^2wx^2y \notin L$. (Pumpováním se zmenší počet b, ale počet a se nezmění.)

- Části v ani x neobsahují žádná a ani žádná b, musí tedy obsahovat pouze symboly c. Zvolíme $i = 0$, pak zřejmě platí $\#_a(uv^2wx^2y) \geq \#_c(uv^2wx^2y)$, a tedy $uv^2wx^2y \notin L$. (Pumpováním se zmenší počet c, ale počet a se nezmění.)

Je jasné, že tyto tři body pokrývají všechny možnosti, které mohou nastat. Ukázali jsme tedy, že pro každé rozdělení $z = uvwxy$ je možno najít i takové, že $uv^iwx^iy \notin L$. Podle lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky tedy L není bezkontextový.

IB102 – úkol 9 – řešení **Odevzdání: 5. 12. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

---

2. [**2 body**] Mějme gramatiku $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{rrcl} P = \{ & S & \to & Aa \mid BaC, \\ & A & \to & Sa \mid AD, \\ & B & \to & Sb \mid b, \\ & C & \to & CCa \mid b, \\ & D & \to & aD \mid bD \ \ \}. \end{array}$$

Převeďte tuto gramatiku do Greibachové normální formy použitím algoritmů z přednášky.

Poznámka: Nezapomeňte si nejdřív zkontrolovat, zda je pro použití algoritmů gramatika ve vhodném vstupním tvaru.

Řešení: Pro provedení převodu na GNF potřebujeme, aby byla gramatika bez levé rekurze a vlastní. Algoritmus pro odstranění levé rekurze rovněž vyžaduje na vstupu vlastní gramatiku. Zadaná gramatika není vlastní, protože není redukovaná, obsahuje totiž nenormovaný neterminál. Provedeme tedy nejprve odstranění zbytečných neterminálů. Zřejmě jediný nenormovaný neterminál je D a po jeho odstranění jsou všechny neterminály normované a dosažitelné. Máme tedy $G' = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P', S)$, kde

$$\begin{array}{rrcl} P' = \{ & S & \to & Aa \mid BaC, \\ & A & \to & Sa, \\ & B & \to & Sb \mid b, \\ & C & \to & CCa \mid b \ \ \}. \end{array}$$

Tato grmatika už je vlastní, můžeme tedy provést algoritmus pro odstranění levé rekurze. Nejprve si zvolíme uspořádání na neterminálech, například $S < A < B < C$. Dále provádíme substituci podle algoritmu. Pravidla S se nemění:

$$S \to Aa \mid BaC$$

V pravidlech pro A nejprve substituujeme za počáteční S:

$$A \to Aaa \mid BaCa$$

Následně odstraníme bezprostřední levou rekurzi:

$$\begin{array}{l} A \to BaCa \mid BaCaA' \\ A' \to aa \mid aaA' \end{array}$$

V pravidlech pro B nejprve substituujeme za počáteční S:

$$B \to Aab \mid BaCb \mid b$$

Následně substituujeme za počáteční A:

$$B \to BaCaab \mid BaCaA'ab \mid BaCb \mid b$$

A nakonec odstraníme bezprostřední levou rekurzi:

$$\begin{aligned} B &\to b \mid bB' \\ B' &\to aCaab \mid aCaA'ab \mid aCb \mid aCaabB' \mid aCaA'abB' \mid aCbB' \end{aligned}$$

V pravidlech pro C pouze odstraníme bezprostřední levou rekurzi:

$$\begin{aligned} C &\to b \mid bC' \\ C' &\to Ca \mid CaC' \end{aligned}$$

Výsledná gramatika bez levé rekurze je $G'' = (\{S, A, A', B, B', C, C'\}, \{a, b\}, P'', S)$, kde

$$\begin{array}{rrcl} P'' = \{ & S & \to & Aa \mid BaC, \\ & A & \to & BaCa \mid BaCaA', \\ & A' & \to & aa \mid aaA', \\ & B & \to & b \mid bB', \\ & B' & \to & aCaab \mid aCaA'ab \mid aCb \mid aCaabB' \mid aCaA'abB' \mid aCbB', \\ & C & \to & b \mid bC', \\ & C' & \to & Ca \mid CaC' \quad \}. \end{array}$$

Tato gramatika je zřejmě i vlastní, můžeme tedy rovnou pokračovat algoritmem pro převod na GNF. Lineární uspořádání splňující podmínku v algoritmu je například $C' < B' < A' < S < A < B < C$. Provedeme tedy substituci podle algoritmu a nahradíme terminály na nepočátečních pozicích neterminály. Dostaneme tak výslednou gramatiku:

$$G''' = (\{S, A, A', B, B', C, C', a', b'\}, \{a, b\}, P''', S), \text{ kde}$$

$$\begin{array}{rrcl} P''' = \{ & C & \to & b \mid bC', \\ & B & \to & b \mid bB', \\ & A & \to & ba'Ca' \mid bB'a'Ca' \mid ba'Ca'A' \mid bB'a'Ca'A', \\ & S & \to & ba'Ca'a' \mid bB'a'Ca'a' \mid ba'Ca'A'a' \mid bB'a'Ca'A'a' \mid ba'C \mid bB'a'C, \\ & A' & \to & aa' \mid aa'A', \\ & B' & \to & aCa'a'b' \mid aCa'A'a'b' \mid aCb' \mid aCa'a'bxB' \mid aCa'A'a'bxB' \mid aCb'B', \\ & C' & \to & ba' \mid bC'a' \mid ba'C' \mid bC'a'C' \quad \}. \end{array}$$

IB102 – úkol 10 – řešení **Odevzdání: 12. 12. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [6 bodů] Mějme následující gramatiku: $G = (N, \Sigma, P, V)$, kde

$$
\begin{aligned}
N = \;& \{V, W, \textsf{Podmět}, \textsf{Předmět}, \textsf{Kdo}, \textsf{Koho}, \textsf{Jakou}, \textsf{Sloveso}\},\\
\Sigma = \;& \{\underline{\textbf{,}}, \underline{\textbf{která}}, \underline{\textbf{žena}}, \underline{\textbf{růže}}, \underline{\textbf{píseň}}, \underline{\textbf{kost}}, \underline{\textbf{ženu}}, \underline{\textbf{růži}},\\
& \underline{\textbf{krásnou}}, \underline{\textbf{tvrdou}}, \underline{\textbf{ostrou}}, \underline{\textbf{zpívá}}, \underline{\textbf{vidí}}, \underline{\textbf{vaří}}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
P = \{ \; V & \to & \textsf{Podmět Sloveso Předmět}\\
W & \to & \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \textsf{Sloveso Předmět}\\
\textsf{Podmět} & \to & \textsf{Kdo} \mid \textsf{Kdo}\ W\, \underline{\textbf{,}}\\
\textsf{Předmět} & \to & \textsf{Koho} \mid \textsf{Koho}\ W \mid \textsf{Jakou Předmět}\\
\textsf{Kdo} & \to & \underline{\textbf{žena}} \mid \underline{\textbf{růže}} \mid \underline{\textbf{píseň}} \mid \underline{\textbf{kost}}\\
\textsf{Koho} & \to & \underline{\textbf{ženu}} \mid \underline{\textbf{růži}} \mid \underline{\textbf{píseň}} \mid \underline{\textbf{kost}}\\
\textsf{Jakou} & \to & \underline{\textbf{krásnou}} \mid \underline{\textbf{tvrdou}} \mid \underline{\textbf{ostrou}}\\
\textsf{Sloveso} & \to & \underline{\textbf{zpívá}} \mid \underline{\textbf{vidí}} \mid \underline{\textbf{vaří}} \;\}.
\end{array}
$$

(a) Pro gramatiku G sestrojte syntaktický analyzátor metodou **shora dolů**. Analyzujte slovo **žena , která vaří tvrdou kost , zpívá ostrou píseň**.

(b) Pro gramatiku G sestrojte syntaktický analyzátor metodou **zdola nahoru**. Analyzujte slovo **růže , která zpívá krásnou píseň , zpívá krásnou píseň**.

(c) Pomocí deterministické analýzy (CYK) analyzujte slovo **žena vidí ženu , která vaří růži**. Pro usnadnění práce je zde k dispozici gramatika převedená na CNF:

$$G' = (N \cup \{X, Y, Z, U, K\}, \Sigma, P', V), \text{ kde}$$

$$
\begin{array}{lll}
P' = \{ \; V & \to & \textsf{Podmět}\ X\\
W & \to & Y Z\\
\textsf{Podmět} & \to & \underline{\textbf{žena}} \mid \underline{\textbf{růže}} \mid \underline{\textbf{píseň}} \mid \underline{\textbf{kost}} \mid \textsf{Kdo}\ U\\
\textsf{Předmět} & \to & \underline{\textbf{ženu}} \mid \underline{\textbf{růži}} \mid \underline{\textbf{píseň}} \mid \underline{\textbf{kost}} \mid \textsf{Koho}\ W \mid \textsf{Jakou Předmět}\\
\textsf{Kdo} & \to & \underline{\textbf{žena}} \mid \underline{\textbf{růže}} \mid \underline{\textbf{píseň}} \mid \underline{\textbf{kost}}\\
\textsf{Koho} & \to & \underline{\textbf{ženu}} \mid \underline{\textbf{růži}} \mid \underline{\textbf{píseň}} \mid \underline{\textbf{kost}}\\
\textsf{Jakou} & \to & \underline{\textbf{krásnou}} \mid \underline{\textbf{tvrdou}} \mid \underline{\textbf{ostrou}}\\
\textsf{Sloveso} & \to & \underline{\textbf{zpívá}} \mid \underline{\textbf{vidí}} \mid \underline{\textbf{vaří}}\\
X & \to & \textsf{Sloveso Předmět}\\
Y & \to & \underline{\textbf{,}}\\
Z & \to & K X\\
U & \to & W Y\\
K & \to & \underline{\textbf{která}} \;\}.
\end{array}
$$

Poznámka: Dobře si všimněte, jaká je množina terminálů a neterminálů gramatiky, zejména, že terminál je i znak **,** (čárka).

Odevzdávejte, prosím, každou část příkladu na zvláštním listě!

IB102 – úkol 10 – řešení **Odevzdání: 12. 12. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

Řešení (a):

Syntaktický analyzátor metodou shora dolů vypadá takto:

$$A_{td} = (\{q\}, \Sigma, \Sigma \cup N, \delta, q, V, \emptyset), \text{ kde}$$

$$
\begin{aligned}
\delta(q,\varepsilon,V) &= \{(q, \mathsf{Podmět\ Sloveso\ Předmět})\}\\
\delta(q,\varepsilon,W) &= \{(q, \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{která}}\ \mathsf{Sloveso\ Předmět})\}\\
\delta(q,\varepsilon,\mathsf{Podmět}) &= \{(q,\mathsf{Kdo}), (q, \mathsf{Kdo}\ W \underline{\mathbf{,}})\}\\
\delta(q,\varepsilon,\mathsf{Předmět}) &= \{(q,\mathsf{Koho}), (q,\mathsf{Koho}\ W), (q, \mathsf{Jakou\ Předmět})\}\\
\delta(q,\varepsilon,\mathsf{Kdo}) &= \{(q,\underline{\mathbf{žena}}), (q,\underline{\mathbf{růže}}), (q,\underline{\mathbf{píseň}}), (q,\underline{\mathbf{kost}})\}\\
\delta(q,\varepsilon,\mathsf{Koho}) &= \{(q,\underline{\mathbf{ženu}}), (q,\underline{\mathbf{růži}}), (q,\underline{\mathbf{píseň}}), (q,\underline{\mathbf{kost}})\}\\
\delta(q,\varepsilon,\mathsf{Jakou}) &= \{(q,\underline{\mathbf{krásnou}}), (q,\underline{\mathbf{tvrdou}}), (q,\underline{\mathbf{ostrou}})\}\\
\delta(q,\varepsilon,\mathsf{Sloveso}) &= \{(q,\underline{\mathbf{zpívá}}), (q,\underline{\mathbf{vidí}}), (q,\underline{\mathbf{vaří}})\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(q,\underline{\mathbf{,}},\underline{\mathbf{,}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\} & \delta(q,\underline{\mathbf{která}},\underline{\mathbf{která}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\}\\
\delta(q,\underline{\mathbf{žena}},\underline{\mathbf{žena}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\} & \delta(q,\underline{\mathbf{růže}},\underline{\mathbf{růže}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\}\\
\delta(q,\underline{\mathbf{píseň}},\underline{\mathbf{píseň}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\} & \delta(q,\underline{\mathbf{kost}},\underline{\mathbf{kost}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\}\\
\delta(q,\underline{\mathbf{ženu}},\underline{\mathbf{ženu}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\} & \delta(q,\underline{\mathbf{růži}},\underline{\mathbf{růži}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\}\\
\delta(q,\underline{\mathbf{krásnou}},\underline{\mathbf{krásnou}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\} & \delta(q,\underline{\mathbf{tvrdou}},\underline{\mathbf{tvrdou}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\}\\
\delta(q,\underline{\mathbf{ostrou}},\underline{\mathbf{ostrou}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\} & \delta(q,\underline{\mathbf{zpívá}},\underline{\mathbf{zpívá}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\}\\
\delta(q,\underline{\mathbf{vidí}},\underline{\mathbf{vidí}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\} & \delta(q,\underline{\mathbf{vaří}},\underline{\mathbf{vaří}}) &= \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

Syntaktickou analýzou slova **žena , která vaří tvrdou kost , zpívá ostrou píseň** je pak následující výpočet:

$$
\begin{aligned}
&(q, \underline{\mathbf{žena}}\ \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{která}}\ \underline{\mathbf{vaří}}\ \underline{\mathbf{tvrdou}}\ \underline{\mathbf{kost}}\ \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{zpívá}}\ \underline{\mathbf{ostrou}}\ \underline{\mathbf{píseň}}, V)\\
\overset{\varepsilon}{\vdash}\ &(q, \underline{\mathbf{žena}}\ \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{která}}\ \underline{\mathbf{vaří}}\ \underline{\mathbf{tvrdou}}\ \underline{\mathbf{kost}}\ \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{zpívá}}\ \underline{\mathbf{ostrou}}\ \underline{\mathbf{píseň}}, \mathsf{Podmět\ Sloveso\ Předmět})\\
\overset{\varepsilon}{\vdash}\ &(q, \underline{\mathbf{žena}}\ \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{která}}\ \underline{\mathbf{vaří}}\ \underline{\mathbf{tvrdou}}\ \underline{\mathbf{kost}}\ \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{zpívá}}\ \underline{\mathbf{ostrou}}\ \underline{\mathbf{píseň}}, \mathsf{Kdo}\ W \underline{\mathbf{,}}\ \mathsf{Sloveso\ Předmět})\\
\overset{\varepsilon}{\vdash}\ &(q, \underline{\mathbf{žena}}\ \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{která}}\ \underline{\mathbf{vaří}}\ \underline{\mathbf{tvrdou}}\ \underline{\mathbf{kost}}\ \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{zpívá}}\ \underline{\mathbf{ostrou}}\ \underline{\mathbf{píseň}}, \underline{\mathbf{žena}}\ W \underline{\mathbf{,}}\ \mathsf{Sloveso\ Předmět})\\
\overset{\mathbf{žena}}{\vdash}\ &(q, \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{která}}\ \underline{\mathbf{vaří}}\ \underline{\mathbf{tvrdou}}\ \underline{\mathbf{kost}}\ \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{zpívá}}\ \underline{\mathbf{ostrou}}\ \underline{\mathbf{píseň}}, W \underline{\mathbf{,}}\ \mathsf{Sloveso\ Předmět})\\
\overset{\varepsilon}{\vdash}\ &(q, \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{která}}\ \underline{\mathbf{vaří}}\ \underline{\mathbf{tvrdou}}\ \underline{\mathbf{kost}}\ \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{zpívá}}\ \underline{\mathbf{ostrou}}\ \underline{\mathbf{píseň}}, \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{která}}\ \mathsf{Sloveso\ Předmět}\ \underline{\mathbf{,}}\ \mathsf{Sloveso\ Předmět})\\
\overset{\mathbf{,}}{\vdash}\ &(q, \underline{\mathbf{která}}\ \underline{\mathbf{vaří}}\ \underline{\mathbf{tvrdou}}\ \underline{\mathbf{kost}}\ \underline{\mathbf{,}}\ \underline{\mathbf{zpívá}}\ \underline{\mathbf{ostrou}}\ \underline{\mathbf{píseň}}, \underline{\mathbf{která}}\ \mathsf{Sloveso\ Předmět}\ \underline{\mathbf{,}}\ \mathsf{Sloveso\ Předmět})
\end{aligned}
$$

$$\overset{\textbf{která}}{\vdash}(q, \underline{\textbf{vaří}}\ \underline{\textbf{tvrdou}}\ \underline{\textbf{kost}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět}\ \underline{\textbf{,}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{vaří}}\ \underline{\textbf{tvrdou}}\ \underline{\textbf{kost}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \underline{\textbf{vaří}}\ \mathsf{Předmět}\ \underline{\textbf{,}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\textbf{vaří}}{\vdash}(q, \underline{\textbf{tvrdou}}\ \underline{\textbf{kost}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \mathsf{Předmět}\ \underline{\textbf{,}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{tvrdou}}\ \underline{\textbf{kost}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \mathsf{Jakou}\ \mathsf{Předmět}\ \underline{\textbf{,}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{tvrdou}}\ \underline{\textbf{kost}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \underline{\textbf{tvrdou}}\ \mathsf{Předmět}\ \underline{\textbf{,}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\textbf{tvrdou}}{\vdash}(q, \underline{\textbf{kost}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \mathsf{Předmět}\ \underline{\textbf{,}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{kost}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \mathsf{Koho}\ \underline{\textbf{,}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{kost}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \underline{\textbf{kost}}\ \underline{\textbf{,}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\textbf{kost}}{\vdash}(q, \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \underline{\textbf{,}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\textbf{,}}{\vdash}(q, \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \underline{\textbf{zpívá}}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\textbf{zpívá}}{\vdash}(q, \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \mathsf{Jakou}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \underline{\textbf{ostrou}}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\textbf{ostrou}}{\vdash}(q, \underline{\textbf{píseň}}, \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{píseň}}, \mathsf{Koho})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{píseň}}, \underline{\textbf{píseň}})$$

$$\overset{\textbf{píseň}}{\vdash}(q, \varepsilon, \varepsilon)$$

Slovo $\underline{\textbf{žena}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \underline{\textbf{vaří}}\ \underline{\textbf{tvrdou}}\ \underline{\textbf{kost}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{ostrou}}\ \underline{\textbf{píseň}}$ je akceptováno, je tedy možné jej odvodit v zadané gramatice.

IB102 – úkol 10 – řešení **Odevzdání: 12. 12. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

Řešení (b):

Syntaktický analyzátor metodou zdola nahoru vypadá takto:

$$A_{bu} = (\{q,r\}, \Sigma, \Sigma \cup N \cup \{\perp\}, \delta, q, \perp, \{r\}), \text{ kde}$$

$$
\begin{array}{rlrl}
\delta(q,\varepsilon,\textsf{Podmět Sloveso Předmět}) &= \{(q,V)\} & \delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{žena}}) &= \{(q,\textsf{Kdo})\} \\
\delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \textsf{Sloveso Předmět}) &= \{(q,W)\} & \delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{růže}}) &= \{(q,\textsf{Kdo})\} \\
\delta(q,\varepsilon,\textsf{Kdo}) &= \{(q,\textsf{Podmět})\} & \delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{ženu}}) &= \{(q,\textsf{Koho})\} \\
\delta(q,\varepsilon,\textsf{Kdo}\ W\underline{\textbf{,}}) &= \{(q,\textsf{Podmět})\} & \delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{růži}}) &= \{(q,\textsf{Koho})\} \\
\delta(q,\varepsilon,\textsf{Koho}) &= \{(q,\textsf{Předmět})\} & \delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{píseň}}) &= \{(q,\textsf{Kdo}),(q,\textsf{Koho})\} \\
\delta(q,\varepsilon,\textsf{Koho}\ W) &= \{(q,\textsf{Předmět})\} & \delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{kost}}) &= \{(q,\textsf{Kdo}),(q,\textsf{Koho})\} \\
\delta(q,\varepsilon,\textsf{Jakou Předmět}) &= \{(q,\textsf{Předmět})\} & \delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{krásnou}}) &= \{(q,\textsf{Jakou})\} \\
\delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{tvrdou}}) &= \{(q,\textsf{Jakou})\} & \delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{ostrou}}) &= \{(q,\textsf{Jakou})\} \\
\delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{zpívá}}) &= \{(q,\textsf{Sloveso})\} & \delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{vidí}}) &= \{(q,\textsf{Sloveso})\} \\
\delta(q,\varepsilon,\underline{\textbf{vaří}}) &= \{(q,\textsf{Sloveso})\} & \delta(q,\varepsilon,\perp V) &= \{(r,\varepsilon)\} \\
\delta(q,\underline{\textbf{,}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{,}})\} & \delta(q,\underline{\textbf{která}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{která}})\} \\
\delta(q,\underline{\textbf{žena}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{žena}})\} & \delta(q,\underline{\textbf{růže}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{růže}})\} \\
\delta(q,\underline{\textbf{ženu}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{ženu}})\} & \delta(q,\underline{\textbf{růži}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{růži}})\} \\
\delta(q,\underline{\textbf{píseň}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{píseň}})\} & \delta(q,\underline{\textbf{kost}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{kost}})\} \\
\delta(q,\underline{\textbf{krásnou}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{krásnou}})\} & \delta(q,\underline{\textbf{ostrou}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{ostrou}})\} \\
\delta(q,\underline{\textbf{tvrdou}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{tvrdou}})\} & \delta(q,\underline{\textbf{zpívá}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{zpívá}})\} \\
\delta(q,\underline{\textbf{vidí}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{vidí}})\} & \delta(q,\underline{\textbf{vaří}},\varepsilon) &= \{(q,\underline{\textbf{vaří}})\}
\end{array}
$$

Syntaktickou analýzou slova **<u>růže</u> <u>,</u> <u>která</u> <u>zpívá</u> <u>krásnou</u> <u>píseň</u> <u>,</u> <u>zpívá</u> <u>krásnou</u> <u>píseň</u>** je pak následující výpočet:

$$
\begin{array}{l}
(q,\underline{\textbf{růže}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}},\perp) \\
\overset{\textbf{růže}}{\vdash}(q,\underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}},\perp\underline{\textbf{růže}}) \\
\overset{\varepsilon}{\vdash}(q,\underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}},\perp\textsf{Kdo}) \\
\overset{\textbf{,}}{\vdash}(q,\underline{\textbf{která}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}},\perp\textsf{Kdo}\ \underline{\textbf{,}}) \\
\overset{\textbf{která}}{\vdash}(q,\underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}},\perp\textsf{Kdo}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}) \\
\overset{\textbf{zpívá}}{\vdash}(q,\underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}},\perp\textsf{Kdo}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \underline{\textbf{zpívá}}) \\
\overset{\varepsilon}{\vdash}(q,\underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}},\perp\textsf{Kdo}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \textsf{Sloveso})
\end{array}
$$

$$\overset{\textbf{krásnou}}{\vdash}(q, \underline{\textbf{píseň}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Kdo}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \mathsf{Sloveso}\ \underline{\textbf{krásnou}})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{píseň}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Kdo}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Jakou})$$

$$\overset{\textbf{píseň}}{\vdash}(q, \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Kdo}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Jakou}\ \underline{\textbf{píseň}})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Kdo}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Jakou}\ \mathsf{Koho})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Kdo}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Jakou}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Kdo}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Kdo}\ W)$$

$$\overset{\textbf{,}}{\vdash}(q, \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Kdo}\ W\ \underline{\textbf{,}})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Podmět})$$

$$\overset{\textbf{zpívá}}{\vdash}(q, \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Podmět}\ \underline{\textbf{zpívá}})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Podmět}\ \mathsf{Sloveso})$$

$$\overset{\textbf{krásnou}}{\vdash}(q, \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Podmět}\ \mathsf{Sloveso}\ \underline{\textbf{krásnou}})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \underline{\textbf{píseň}}, \bot\mathsf{Podmět}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Jakou})$$

$$\overset{\textbf{píseň}}{\vdash}(q, \varepsilon, \bot\mathsf{Podmět}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Jakou}\ \underline{\textbf{píseň}})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \varepsilon, \bot\mathsf{Podmět}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Jakou}\ \mathsf{Koho})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \varepsilon, \bot\mathsf{Podmět}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Jakou}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \varepsilon, \bot\mathsf{Podmět}\ \mathsf{Sloveso}\ \mathsf{Předmět})$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(q, \varepsilon, \bot V)$$

$$\overset{\varepsilon}{\vdash}(r, \varepsilon, \varepsilon)$$

Slovo $\underline{\textbf{růže}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{která}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}\ \underline{\textbf{,}}\ \underline{\textbf{zpívá}}\ \underline{\textbf{krásnou}}\ \underline{\textbf{píseň}}$ je akceptováno, je tedy možné jej odvodit v zadané gramatice.

IB102 – úkol 10 – řešení **Odevzdání: 12. 12. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

Řešení (c): CYK tabulka pro slovo **žena** **vidí** **ženu** **,** **která** **vaří** **růži** vypadá takto:

$\{V\}$						
$\emptyset$	$\{X\}$					
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\text{Předmět}\}$				
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{W\}$			
$\{V\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{Z\}$		
$\emptyset$	$\{X\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{X\}$	
$\{\text{Kdo}, \text{Podmět}\}$	$\{\text{Sloveso}\}$	$\{\text{Koho}, \text{Předmět}\}$	$\{Y\}$	$\{K\}$	$\{\text{Sloveso}\}$	$\{\text{Koho}, \text{Předmět}\}$
žena	**vidí**	**ženu**	**,**	**která**	**vaří**	**růži**

Vidíme, že počáteční neterminál V je obsažen v $T_{1,7}$ (nejvyšší pole tabulky). Slovo **žena** **vidí** **ženu** **,** **která** **vaří** **růži** je tedy možné odvodit v zadané gramatice.

IB102 – úkol 10 – řešení **Odevzdání: 12. 12. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

---

2. [**2 body**] Mějme následující jazyk nad abecedou $\{\text{❶}, \text{❷}, \text{❺}, \text{❿}, \underline{\mathbf{10min}}, \underline{\mathbf{60min}}\}$:

$$L = \{xy \mid \; x \in \{\underline{\mathbf{10min}}, \underline{\mathbf{60min}}\}^+, y \in \{\text{❶}, \text{❷}, \text{❺}, \text{❿}\}^*,$$
$$14 \cdot \#_{\underline{\mathbf{10min}}}(x) + 22 \cdot \#_{\underline{\mathbf{60min}}}(x) \leq \#_{\text{❶}}(y) + 2 \cdot \#_{\text{❷}}(y) + 5 \cdot \#_{\text{❺}}(y) + 10 \cdot \#_{\text{❿}}(y)\}$$

Sestrojte zásobníkový automat akceptující jazyk L. Jasně uveďte, jakým způsobem Váš automat akceptuje (koncovým stavem, prázdným zásobníkem).

Motivace: Cílem je sestrojit automat na jízdenky. Uživatel automatu nejdříve zvolí počet a typ jízdenek (pomocí dvou tlačítek **10min** a **60min**), následně vhazuje mince ❶, ❷, ❺, ❿. Automat vydá jízdenky (tj. akceptuje vstup), pokud je hodnota vhozených mincí větší nebo rovná hodnotě jízdenek (desetiminutová jízdenka stojí 14 korun, hodinová stojí 22). Automat nevrací.

Řešení: Idea konstrukce bude taková, že použijeme zásobník jakožto počitadlo dosud nezaplacené částky. Hledaný automat pak můžeme zkonstruovat například takto:

$$A = (\{q, r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}, \{\text{❶}, \text{❷}, \text{❺}, \text{❿}, \underline{\mathbf{10min}}, \underline{\mathbf{60min}}\}, \{I, Z\}, \delta, q, Z, \emptyset), \text{ kde}$$

$$\begin{array}{rrl}
 & \delta(q, \underline{\mathbf{10min}}, Z) = \{(q, I^{14}Z)\} & \delta(r_0, \text{❶}, I) = \{(r_0, \varepsilon)\} \\
 & \delta(q, \underline{\mathbf{10min}}, I) = \{(q, I^{14}I)\} & \delta(r_0, \text{❷}, I) = \{(r_1, \varepsilon)\} \\
 & \delta(q, \underline{\mathbf{60min}}, Z) = \{(q, I^{22}Z)\} & \delta(r_0, \text{❺}, I) = \{(r_4, \varepsilon)\} \\
 & \delta(q, \underline{\mathbf{60min}}, I) = \{(q, I^{22}I)\} & \delta(r_0, \text{❿}, I) = \{(r_9, \varepsilon)\} \\
 & \delta(q, \varepsilon, I) = \{(r_0, I)\} & \delta(r_0, \varepsilon, Z) = \{(r_0, \varepsilon)\} \\
\forall n \in \{1, \ldots, 9\} & \delta(r_n, \varepsilon, I) = \{(r_{n-1}, \varepsilon)\} & \\
\forall n \in \{1, \ldots, 9\} & \delta(r_n, \varepsilon, Z) = \{(r_0, Z)\} & \\
\forall x \in \{\text{❶}, \text{❷}, \text{❺}, \text{❿}\} & \delta(r_0, x, Z) = \{(r_0, Z)\} &
\end{array}$$

Automat akceptuje prázdným zásobníkem.