Komplexní čísla

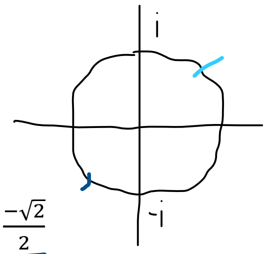
absolutní hodnota

algebraický a goniometrický tvar

násobení

řešení kvadr. rovnice

moivreova věta



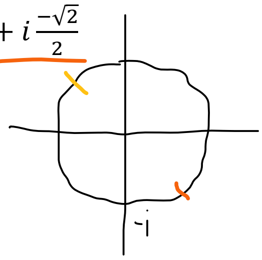
komplexní odmocniny z 1

dosazování do polynomů?

$\sqrt{i} = \cos\frac{\pi}{4} + i * sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ale taky $\sqrt{i} = \cos\frac{5\pi}{4} + i * sin\frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{-i} = \cos\frac{3\pi}{4} + i * sin\frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ale taky $\sqrt{-i} = \cos\frac{7\pi}{4} + i * sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{-\sqrt{2}}{2}$

…2. odmocnina => pravidelný dvojúhelník



binomické rovnice

$z^n = a \Rightarrow z = ?$
n-té mocniny tvoří pravidelný n úhelník
hledáme tedy z v goniometrickém tvaru tj. $|z|(\cos\varphi + i * \sin\varphi)$
respektive z_1 až z_n: . $|z|(\cos\varphi + i * \sin\varphi)$

Př. $z^6 = 1$
kořeny jsou šesté odmocniny z 1
$|z|^6(\cos 6\varphi + i * \sin 6\varphi) = 1(\cos 0 + i * \sin 0)$
$6\varphi = 0 + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{k\pi}{3}$ kde $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a zároveň $|z|^6 = 1 \Rightarrow |z| = 1$
$x_0 = 1(cos\frac{0\pi}{3} + i * sin\frac{0\pi}{3})$
$x_1 = 1(cos\frac{1\pi}{3} + i * sin\frac{1\pi}{3})$
…
$x_5 = 1(cos\frac{5\pi}{3} + i * sin\frac{5\pi}{3})$

Hornerovo schéma

polynom $4x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 2x - 3$

$q|$ $p|$

$$c = \frac{p}{q} \in \left\{ \pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm 3; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{3}{4} \right\}$$

	4	-12	9	2	-3
1	4	-8	1	3	0
1	4	-4	-3	0	
1	4	0	-3	X	
$-\frac{1}{2}$	4	-6	0		
$-\frac{1}{2}$	4	-8			
$\frac{3}{2}$	4	0			

$$\Rightarrow (x-1)^2 \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot 4 = (x-1)^2 (2x+1)(2x-3)$$

Kombinatorické příklady řešené rekurentně

viz. přednáška 2

řešíme obecně pro n schodů

Úročení

d_n je výše dluhu na konci n-tého měsíce (před začátkem splácení tedy: d_0 = C)
u je **měsíční** úrok
S je měsíční splátka
n je počet měsíců
C je půjčená částka

$$d_{n+1} = (1+u) \cdot d_n - S,$$

$$d_n = C \cdot (1+u)^n - S \cdot \frac{(1+u)^n - 1}{u}$$

Matice

transponovaná – prohození řádků a sloupců (nemusí být čtvercová)

symetrická – jestliže A = A^T

regulární – je n x n a má hodnost n

Věta

Pro čtvercovou matici A typu $n \times n$ je ekvivalentní:

- *A je regulární;*
- *sloupce matice jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^n$;*
- *sloupce matice tvoří bázi $\mathbb{R}^n$;*
- *řádky matice jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^n$;*
- *řádky matice tvoří bázi $\mathbb{R}^n$;*
- *$|A| \neq 0$;*
- *existuje matice A^{-1};*
- *soustava $A \cdot x^T = b$ má pro libovonou pravou stranu b právě jedno řešení.*

permutační matice – rozdělíme do bloků, najdeme periodické opakování

Násobení matic

musí platit, že A je *m* x *n* a B je *n* x *p*, součin bude *m* x *p*

čtvercové

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*5+2*4 & 1*3+2*1 \\ 2*5+3*4 & 2*3+3*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}$$

nečtvercové (2x3 a 3x2 => 2x2, 3x2 a 2x3 => 3x3, 3x2 a 2x1 => 3x1)

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*5+2*0+0*1 & 1*3+2*1+0*3 \\ 2*5+3*0+1*1 & 2*3+3*1+1*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5*1+3*2 & 5*2+3*3 & 5*0+3*1 \\ 0*1+1*2 & 0*2+1*3 & 0*0+1*1 \\ 1*1+3*2 & 1*2+3*3 & 1*0+3*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 19 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \times C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5*1+3*2 \\ 0*1+1*2 \\ 1*1+3*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Vektory

LZ a LN

vektory naskládáme do řádků, když získáme nulový řádek, byly LZ (takto se dá spočítat dimenze, už nezjistíme bázi)

Báze

výpočet báze umístěním do sloupců – bazické jsou např. ty vektory, které mají pivota – příklad viz. přednáška 5 slide 17

dimP + dimQ = dim(P+Q) + dim(P∩Q)

Souřadnice v dané bázi – jednoznačné koeficienty – Z bazických vektorů musím udělat jednotkovou matici E, hledaný vektor zapíšu do rozšířené matice

Gramm-schmidtův ortogonalizační proces (z báze u, udělat bázi v, kde na sebe vektory budou kolmé):
$v_1 = u_1$
$v_2 = \alpha_{21} * v_1 + u_2$ $\quad \alpha_{21} = -\frac{v_1 * u_2}{v_1 * v_1}$
$v_3 = \alpha_{31} * v_1 + \alpha_{32} * v_2 + u_3$ $\quad \alpha_{31} = -\frac{v_1 * u_3}{v_1 * v_1}$ $\quad \alpha_{32} = -\frac{v_2 * u_3}{v_2 * v_2}$

lineární obal – přednáška 5 slide 12

Afinní prostor A_n je množina bodů v R^n spolu s operací, která bodu A a vektoru v přiřadí bod A + v.
Vektory v náleží vektorovému prostoru V a ten nazýváme zaměřením afinního prostoru A_n.
Afinní podprostor zapisujeme M = A + Z(M).

Prostory

součet a průnik prostorů

počítá se současně

1) do matice do sloupců báze obou prostorů (můžeme mezi ně dát svislou čáru jako rovná se) a uděláme trojúhelníkový tvar
2) např. ty co mají pivota jsou bází sjednocení
3) průnik má dimenzi: počet původních vektorů mínus dimenze sjednocení
4) bázi průniku spočítáme vyřešením soustavy viz. přednáška 6 slide 4
   zkusit!

postup na nalezení průniku – analyticky jako na SŠ, pokud se jedná např. o dvě roviny, nebo rovinu a přímku

součet a průnik afinních prostorů (tj. bod + zaměření)

postup na nalezení součtu afinních podprostorů viz. dú 9.3

1) spočítáme báze (zaměření) obou prostorů a vektor XY, kde X leží v 1 prostoru a Y ve druhém
2) do sloupců naskládáme všechny tyto vektory a uděláme trojúhelníkový tvar
3) pivoti jsou bází sjednocení
4) lineární kombinace těchto bází + libovolný bod z prostorů tvoří hledaný afinní prostor

postup na nalezení průniku – analyticky jako na SŠ, pokud se jedná např. o dvě roviny, nebo rovinu a přímku

ortogonální doplněk

$U^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall u \in U : u \perp v\}$ množina vektorů, které jsou kolmé ke každému vektoru původního prostoru

spočítám tam, že bazické vektory U dáme do matice do řádků, převedeme do trojúhelníkového tvaru a soustavu rovnic vyřešíme. Čekáme výsledek se zvolenou proměnou (nekonečně mnoho řešení)

viz. přednáška 9 slide 8

vzdálenost bodu A od podprostoru Q

vybereme bod B ležící v Q a uděláme kolmou projekci BA do Q, tím získáme kolmý průmět A‘ bodu A do Q a již můžeme spočítat vzdálenost jakožto vzdálenost bodu A a A‘

využíváme:

BA‘ + A’A = BA

BA‘ * A’A = 0

vzdálenost podprostorů

obdobně

viz. přednáška 9 slide 11

odchylka podprostorů v euklidovském prostoru (obecně) – minimum všech odchylek jednorozměrných podprostorů

pokračování teorie viz. přednáška 9 slide 17

Analytická geometrie

speciální vzorečky na vzdálenosti viz. vzorečky ze SŠ

průsečík 2 přímek v rovině: ax + by = r, cx + dy = s => pokud ad – bc = 0, pak **ne**existuje průsečík (protože jsou LZ) vzdálenost bodu a roviny: kolmice z bodu A do roviny, najdeme kolmý průmět A‘, spočítáme vzdálenost AA‘

skalární součin vektorů: **<u, v>** = u * v = |u|*|v|*cosα

Obsah rovnoběžníku zadaného vektory u a v je

$$S = \left|det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|.$$

Objem rovnoběžnostěnu:
|AB x AC|*AD

Určete objem rovnoběžnostěnu daného vektory $(a, b, c), (d, e, f), (g, h, i)$.

Řešení

$$\left| \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \right|.$$

jehlan se čtvercovou postavou – děleno 3
čtyřstěn – děleno 6

Viditelnost, V které polorovině leží bod?

Nechť p má směrový vektor $\vec{AB}$. Vektory $\vec{AB}$ a $\vec{AX}$ dáme do řádků matice. Pokud je determinant kladný, je bod X „nalevo od vektoru“ $\vec{AB}$. Pokud je determinant záporný je bod „napravo“.

Pozn.: Nezáleží zda do řádků nebo sloupců. Důležité je pořadí vektorů.

pořadí!

příčka přímek – úsečka, jejíž jeden krajní bod leží na jedné přímce a druhý krajní bod na druhé
osa přímek – příčka, která je na obě přímky kolmé

zjistěte zda 4 body leží v 1 rovině

1) uděláme 3 vektory s počátkem ve stejném bodu
2) jestliže jsou tyto 3 vektory LZ, pak všechny 4 body leží v jedné rovině (1 vektor lze vyjádřit pomocí zbývajících)

Mějme podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$.

1. Jsou si rovny, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a $Z(\mathcal{M}) = Z(\mathcal{N})$.
2. Jeden je podprostorem druhého, např. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$.
3. Podprostory jsou rovnoběžné pokud $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ nebo $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$.
4. Podprostory jsou různoběžné pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a neplatí ani $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ ani $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$.
5. Podprostory jsou mimoběžné pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ a neplatí ani $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ ani $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$

Konvexní obal – je zadaný bod vnitřním bodem?

Rozhodněte, zda leží bod $X = [2, 1, 0]$ uvnitř konvexního obalu bodů $[0, 2, 1]$, $[1, 0, 1]$, $[3, -2, -1]$, $[-1, 0, 1]$.

Sestavíme nehomogenní lin. soustavu, pro koeficienty t_1, t_2, t_3, t_4, afinní kombinace daných bodů, která dává bod X (jsou určeny jednoznačně, pokud dané body neleží v rovině).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poslední rovnice udává, že jde o afinní kombinaci. Řešením soustavy dostáváme $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (1, 0, 1/2, -1/2)$, nejedná se tedy o konvexní kombinaci. Bod X neleží v konvexním obalu.

Lineární zobrazení

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xF(e_1) + yF(e_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

otočení o úhel alfa kolem počátku

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

rotace $\begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix}$ asi

osová souměrnost $\begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$ asi

podobnost $(L_a)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, rotace o 90° $(L_r)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$(L_p)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. projekce na osu y

- $\varphi : U \to V$ lineární zobrazení

$(\varphi(u))^T_\beta = A \cdot (u)^T_\alpha$, kde A matice $m \times n$

matice lineárního zobrazení (od α k β): $A = (\varphi)_{\beta,\alpha}$

Př. Ve standartní bázi je dána matice lineárního zobrazení, určete, o jaké zobrazení se jedná (viz. přednáška 7 d.ú. 8.4) vlastní čísla jsou skaláry lamba vyhovující rovnici $\varphi(u) = \lambda * u$ pro nenulový vektor u, příslušné vektory u pak vlastní vektory zobrazení spočítáme vlastní čísla a k nim vlastní vektory

Díky $\varphi(u) = \lambda * u$, můžeme určit o jaký typ zobrazení se jedná. Například, jestli -1 je vlastním číslem, tak násobky vlastního vektoru (odpovídající -1) otáčí (souměrnost středová/osová/rovinná). Pokud je vlastním číslem 1, tak násobky vlastního vektoru (odpovídající číslu 1) nechá tak jak byly.
Vlastní číslo 2, by zřejmě znamenalo podobnost.

Transformace souřadnic – matice přechodu

matice A přechodu od α k β: A = $(id)_{\beta,\alpha}$ ...do sloupců dáme bázi alfa, za čáru do sloupců bázi beta, vlevo uděláme jednotkovou matici, vpravo nám vyjde hledaná matice přechodu ?

matice B přechodu od β k α: A*B = B*A = E tj. B = $(id)_{\alpha,\beta} = A^{-1}$

příklad geometrické zobrazení: (přednáška 7 slide 10)

napište matici zobrazení ve standartní bázi, a to symetrií podle přímky se směrovým vektorem (1, 1, 1)

POZOR NA POŘADÍ

$$\boxed{(id)_{\varepsilon,\alpha}\cdot\overbrace{(\varphi)_{\alpha,\alpha}\cdot\underbrace{(id)_{\alpha,\varepsilon}\cdot(u)^T_\varepsilon}_{(u)^T_\alpha}}^{(\varphi(u))^T_\alpha}} = (\varphi(u))^T_\varepsilon$$

matice $(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}$

zvolme bázi α

α: $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$, $v_3 = (0,1,-1)$

$\varphi(v_1) = 1v_1$
$\varphi(v_2) = -v_2$
$\varphi(v_3) = -v_3$

symetrie podle přímky se sm. vekt. (1,1,1)

vezmu bazický vektor, zobrazím, výsledkem jsou jeho souřadnice v bázi alfa a dám do sloupců

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dáme vektory báze do sloupců matice a máme matici přechodu od alfa k epsilon

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

: píše se to obráceně $(id)_{\varepsilon,\alpha}$

už nám zbývá jen matice přechodu od epsilon k alfa (tedy inverzní)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (id)_{\alpha,\varepsilon} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

kontrola vynásobením

vynásobíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

máme matici zobrazení ve standartní bázi

Nalezení inverzní matice

pouze na čtvercových maticích

matice, k níž existuje inverze, je invertibilní matice

matice krát její inverze rovná se jednotkové matici ($A * A^{-1} = E$)

1) napíšeme původní matici a za čáru jednotkovou
2) původní upravujeme tak, abychom dostali schodovitý tvar a následně zpětnou eliminací diagonální matici
3) z diagonální uděláme jednotkovou
4) na pravé straně tímto získáme inverzní matici

pokud se nám po cestě některý z řádků vynuloval, pak matice není invertibilní (inverze neexistuje)

Př)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Determinant matice

základní poznatky

a) jednotková matice má determinant roven 1
b) velikost 2x2 a 3x3 má speciální vzorec
c) pokud matice obsahuje nulový řádek, pak je determinant 0
d) pokud je matice v horním trojúhelníkové tvaru, pak je determinant součin prvků na diagonále
e) transponovaná matice má stejný determinant jako původní
f) výpočet objemu

Cauchyho věta: det(A*B) = det(A) * det(B)
$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Determinant Gaussovou eliminací

pravidla úprav:

a) prohodím dva řádky, musím výsledek vynásobit -1
b) vynásobím některý řádek, musím výsledek stejným číslem vydělit
c) přičtení násobku některého řádku determinant nezmění
    a. pouze přičtení a pouze kladného násobku

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -6 & -21 & -15 & -18 \\ -6 & -4 & -1 & -0 \\ -12 & 9 & -3 & -3 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ *(-3) \\ \\ *(-3) \end{array} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{-1}{3} \cdot (-1) =$$

$$= \begin{array}{r} (1) \\ 2(1)+(2) \\ 2(1)+(3) \\ 4(1)+(4) \end{array} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -17 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 17 & 1 & 17 \end{vmatrix} \cdot \frac{-1}{9} = \begin{array}{r} \\ \\ \\ (2)+(4) \end{array} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -17 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -12 & 9 \end{vmatrix} \cdot \frac{-1}{9} =$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ \\ \frac{1}{3}(4) \end{array} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -17 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \frac{-1}{9} \cdot 3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -17 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 43 \end{vmatrix} \cdot \frac{-1}{3}$$

$$= 3 \cdot (-17) \cdot 1 \cdot 43 \left(\frac{-1}{3}\right) = 17 \cdot 43 = \underline{\underline{731}}$$

Determinant – Laplacelův rozvoj

vyberu libovolný řádek či sloupec a pak postupuji následovně:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
2 \Rightarrow & \begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} =
\end{array}
$$

$$= (-1)^{2+1} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \cdot (36-24) + 1 \cdot (45-16) + 0 =$$

$$= -72 + 29 = \underline{-43}$$

Cramerovo pravidlo

prý se nezkouší (stejně jako adjungovaná matice)

https://matrixcalc.org/en/slu.html

determinant je různý od 0 => jednoznačné řešení soustavy

determinant je různý od 0 => existuje inverzní matice

Věta

Buď A čtvercová matice řádu $n > 1$ taková, že $|A| \neq 0$. Pak soustava $Ax = b$ má jediné řešení $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$, kde

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|},$$

přičemž A_j je matice vzniklá z matice A nahrazením jejího j-tého sloupce sloupcem b.

Př:

2x + 3y + 5z = 0

x + 2y – z = 4

y + 2z = -1

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{9} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{9} = 1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{9} = 1$$

Vlastní čísla zobrazení a charakteristický polynom

vlastní čísla jsou skaláry lamba vyhovující rovnici $\varphi(u) = \lambda * u$ pro nenulový vektor u, příslušné vektory u pak vlastní vektory zobrazení

1) odečteme lambdu na diagonále
2) charakteristický polynom = determinant (např. úprava do trojúhelníkového tvaru a součin na diagonále, pozor na znaménka)
3) vlastní čísla = kořeny charakteristického polynomu

podprostor vlastních vektorů – prostor generovaný vlastními vektory (nejčastěji příslušícím konkrétní lamdě)

Lineární optimalizace

snažíme se dostat tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ 30 \\ 110 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

… poslední dva řádky jsou požadavek nezápornosti (když výsledek zkontrolujeme, že je nezáporný, tak bychom to snad mohli vypustit)

potřebujeme nerovnice stejného tvaru (znaménka mi musí sedět… nemůžu dávat do matice 2 nerovnice, kde u jedné je menší a u druhé větší)

když máme špatné znaménko, vynásobíme mínus jedničkou

soustava se dá řešit geometricky nebo simplexovým algoritmem

Simplexový algoritmus – standartní úloha s omezenými zdroji

postupujeme z vrcholu po hranách a vylepšujeme hodnotu účelové funkce

většinou můžeme začít v bodě 0, 0

1) uděláme si tabulku

hodnota úč. fce

účelová fce se záp. zn.			0
a_{11}	…	a_{1k}	b_1
⋮	nerovnosti	⋮	⋮
a_{k1}	…	a_{kk}	b_k

2) vybereme první sloupec **zleva**, který má v záhlaví záporný prvek
3) v tomto sloupci (označme si jej j) vybereme **kladný** prvek, pro který platí, že b_i/a_{ij} je minimální (i je označení řádku)
   a. pokud neexistuje kladný prvek, pak neexistuje optimální řešení z důvodu neohraničenosti
4) eliminujeme celý j-tý sloupec naším vybraným prvkem (tzn. upravujeme tak, aby na místě našeho vybraného prvku byla 1 a jinak samé 0, včetně záhlaví)
   a. pozor, že když eliminujeme třeba pomocí posledního sloupce, nesmíme zapomenout, že se tím zároveň upravují i předchozí sloupce
5) opakujeme kroky 2, 3, 4 dokud je celé záhlaví nezáporné
   a. celé záhlaví je nezáporné -> našli jsme optimální řešení
   b. sloupec s pivotem – v pravém sloupci řádku s pivotem se nachází aktuální hodnota příslušné proměnné
   c. aktuální hodnota účelové funkce je v pravém horním rohu

Perronova-Forbeinova teorie – pozitivní a primitivní matice

pozitivní – čtvercová reálná matice, jejíž všechny prvky jsou kladné
primitivní, čtvercová reálná matice, jejíž prvky jsou nezáporné a existuje její mocnina, která je pozitivní

Př. Máme zjistit, jestli matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ je primitivní, stačí ji postupně mocnit a místo kladných čísel si značit, že jsou pozice kladné: $\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k & 0 & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix}$ => $A^2 = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k & 0 & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k & 0 & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & k \end{pmatrix}$ => A^3 = $\begin{pmatrix} k & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & k \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k & 0 & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix}$ => A^3 je pozitivní, A měla nezáporné prvky => A je primitvní

Leslieho model růstu

1) uděláme matici modelu

Pokud je matice primitivní, máme jediné dominantní vlastní číslo λ_m (takové vlastní číslo, které je kladné reálné a je větší než absolutní hodnota libovolného jiného vlastního čísla)

Nutná podmínka je, aby bylo τ_i kladné pro všechna i a také $f_m > 0$. (Absolutní člen char. polynomu je jejich součin.)
Stačí, aby navíc $f_i, f_{i+1} > 0$ pro některý index i.
Určitě je Leslieho matice primitivní pokud jsou všechny parametry f_j, τ_i kladné.

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{m-1} & f_m \\ \tau_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

f je relativní plodnost, τ je relativní „přeživnost“

2) pomocí $|A - \lambda E|$ spočítáme vlastní čísla

Máme dominantní vlastní číslo => existuje i příslušný vlastní vektor v_m (má kladné všechny složky) a ukazuje stabilní populační distribuci.

Pokud je λ_m= 1, pak každá počáteční generace konverguje k populaci, která je násobkem vektoru v_m.
Pokud λ_m > 1, pak každá počáteční populace expanduje, generační distribuce odpovídá vektoru v_m.
Pokud λ_m < 1, pak každá počáteční populace vymře. (tj. když všechna vlastní čísla $|\lambda| < 1$).

3) generační distribuci teda vypočteme, úpravou matice ($A - \lambda_m E$) do schodovitého tvaru a vyřešením soustavy (měli bychom získat volný parametr).

Příklady, kde se ptají, jaký má být **parametr**, aby došlo ke stabilizaci, počítáme úplně stejně, ale už předem víme, že dominantní vlastní číslo má být 1, tedy řešíme úkol $|A - E| = 0$.

Markovovy procesy

systémy s pravděpodobností
součet ve sloupci = 1, musí platit vždy (tzv. stochastická matice)
také musí platí, že 1 je vlastní číslo a existuje vlastní vektor (rozložení pravděpodobností)

Pomocí Perronovy-Frobeinovy věty

1) Určíme matici (pozor, že někdy musíme pravděpodobnosti dopočítat (podmíněná pravděpodobnost viz. příklad se zapomenutým deštníkem)

2) odečteme 1 na diagonále (protože je vlastním číslem)
3) dopočítáme na schodovitý tvar a z toho už i vlastní vektor

Bez P-F věty – viz. příklad s ruletou přednáška 11 slide 21 – mocníme, dokud nedostáváme pořád stejný výsledek – asi

Lineární diferenční rovnice – hledání vzorečku pro n-tý člen rekurentní posloupnosti

viz. přednáška 12 slide 9

homogenní lineární diferenční rovnice (homogenní říká, že tam není absolutní člen)

Př. $x_{n+2} = 7x_{n+1} - 6x_n$ $x_0 = 10, x_1 = 0$
1) najdeme charakteristický polynom a jeho kořeny
$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 6x_n = 0$
$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$
$(\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$ $\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$
2) dosadíme do explicitního vyjádření
$x_n = c * (\lambda_1)^n + d * (\lambda_2)$
$x_n = c*1^n + d*6^n$
3) dosazením do zadání: $x_0 = c + d = 10$ a $x_1 = c + 6d = 0$ $\Rightarrow c = 10, d = -2$
4) máme výsledek $\mathbf{x_n = 12*1^n - 2*6^n}$

2násobné kořeny – příklad:
Dvojnásobný kořeny $\lambda_1 = 2$.
Explicitní vztah $p(n) = c \cdot 2^n + d \cdot n \cdot 2^n$
u vícenásobných kořenů se postupuje stejně, využitím vyšších derivací (přednáška 12 slide 10)

pro komplexní kořeny, využíváme goniometrický tvar. Víme, že jestliže kořen má k sobě ještě komplexně sdružené číslo a to můžeme zapsat následujícím způsobem:
$\lambda_1 = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$
$\lambda_1 = |z|(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))$
do explicitního výrazu, to potom (díky možnosti lineárně kombinovat řešení) můžeme zapsat následujícím způsobem:
$x_n = c * |z|^n \cos(n\varphi) + d * |z|^n \sin(n\varphi)$

nehomogení lineární diferenční rovnice

Př. $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n - n$ $x_0 = 2, x_1 = 5$
1) zhomogenizujeme a vypočítáme (tj. odmyslíme si mínus n, abychom měli $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ a spočítáme viz. výše)
vyjde nám $x_n = a(-1)^n + b2^n + cn + d$
2) nalezneme partikulární případ pro zbylý polynom (výjimka, kdyby 1 bylo kořenem charakteristického polynomu, tam se asi musí vzít polynom o 1 většího stupně?)
2a) vezmeme obecný polynom stejného stupně jako náš polynom ze zadání (tady je stupeň 1)
$x_n = cn + d$ $x_{n+1} = c(n+1) + d$ $x_{n+2} = c(n+2) + d$
2b) dosadíme do zadání $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n - n \Rightarrow c(n+2) + d = c(n+1) + d + 2(cn + d) - n$
dostáváme $cn = cn + 2cn - n$ a $2c + d = c + d + 2d$
spočítáme, že $c = ½, d = ¼$
3) spojíme obě části $a(-1)^n + b2^n + ½n + ¼$
4) obdobně jako v homogenních rovnicích dopočítáme a, b dosazením počátečních hodnot ze zadání
máme výsledek $-¼(-1)^n + 2*2^n + ½n + ¼$

Pozn.

$A \cdot (1, 1, 1)^T = (1, 2, 3)^T.$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ tyto zápisy jsou to samé