2. vnitrosemestrální písemná práce JS 2014, MB102, sk. A

Jméno a příjmení	
UČO	
Počet listů přílohy	

Příklad	1	2	3	4	5	Σ
Body						

▶ `Příklad 1 [2 b.]:` Z drátu o délce 120 cm máme vytvořit model kvádru se čtvercovou podstavou o maximálním povrchu. Určete rozměry modelu.
(Vyřešte pomocí diferenciálního počtu!)

▶ `Příklad 2 [2 b.]:` Určete Maclaurinův polynom (tj. Taylorův polynom se středem v $x_0 = 0$) 3. řádu funkce e^x. Poté pomocí něj odhadněte $\sqrt[10]{\mathrm{e}}$.
(Polynom vypočítejte pomocí derivací. Výsledné číslo můžete nechat ve tvaru součtu zlomků.)

▶ `Příklad 3 [2 b.]:` Najděte neurčitý integrál

$$\int (2-5x)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 4 [2 b.]:` Pomocí substituce $t = \cos x$ vypočítejte integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 5 [2 b.]:` Jsou dány funkce

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = 2x + 4.$$

Načrtněte obrázek. Přímka g vytíná z paraboly f ohraničený kus. Jaký je objem tělesa, které vznikne rotací tohoto kusu paraboly f kolem osy x? Počítaný objekt na obrázku vyznačte.

▷ Do první tabulky vyplňte čitelně identifikační údaje a počet listů, které k zadání přikládáte.
▷ Druhou tabulku ponechejte prázdnou.
▷ U výpočtů příkladů řádně označujte, ke kterému příkladu (a jeho části) patří.
▷ Každý výsledek musí být podpořen výpočtem (zdůvodněním), jakkoli je triviální.
▷ Všechny papíry s výpočty podepište a odevzdejte společně se zadáním.
▷ Není povoleno použití kalkulačky ani žádných materiálů (tabulky, vzorce, skripta, poznámky,. . .). Jakýkoli pokus o podvádění bude mít za následek hodnocení 0 bez možnosti opravy.

2. vnitrosemestrální písemná práce JS 2014, MB102, sk. B

Jméno a příjmení	
UČO	
Počet listů přílohy	

Příklad	1	2	3	4	5	Σ
Body						

▶ `Příklad 1 [2 b.]:` Drát o délce 10 m máme ohnout do pravého úhlu tak, aby jeho konce byly od sebe co nejméně vzdáleny. Určete, v jakém místě je potřeba drát ohnout.
(Vyřešte pomocí diferenciálního počtu!)

▶ `Příklad 2 [2 b.]:` Určete Taylorův polynom 3. řádu se středem v $x_0 = 1$ funkce $\ln x$. Poté pomocí něj odhadněte $\ln(0{,}9)$.
(Polynom vypočítejte pomocí derivací, není nutné ho roznásobovat. Výsledné číslo můžete nechat ve tvaru součtu zlomků.)

▶ `Příklad 3 [2 b.]:` Najděte neurčitý integrál

$$\int (2x+3)\sin(4x)\,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 4 [2 b.]:` Pomocí vhodné substituce vypočítejte integrál

$$\int_{-\infty}^{0} x^2\,\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 5 [2 b.]:` Sestavte integrál, pomocí nějž je možné určit objem tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafy funkcí

$$f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = 4x - 1$$

kolem osy x. Načrtněte obrázek. Výsledný integrál nepočítejte.

▷ Do první tabulky vyplňte čitelně identifikační údaje a počet listů, které k zadání přikládáte.
▷ Druhou tabulku ponechejte prázdnou.
▷ U výpočtů příkladů řádně označujte, ke kterému příkladu (a jeho části) patří.
▷ Každý výsledek musí být podpořen výpočtem (zdůvodněním), jakkoli je triviální.
▷ Všechny papíry s výpočty podepište a odevzdejte společně se zadáním.
▷ Není povoleno použití kalkulačky ani žádných materiálů (tabulky, vzorce, skripta, poznámky,. . .). Jakýkoli pokus o podvádění bude mít za následek hodnocení 0 bez možnosti opravy.

2. vnitrosemestrální písemná práce — JS 2014, MB102, sk. C

Jméno a příjmení	
UČO	
Počet listů přílohy	

Příklad	1	2	3	4	5	Σ
Body						

▶ `Příklad 1 [2 b.]:` Na břehu řeky chceme oplotit pozemek tvaru obdélníku, přičemž stranu u vody oplocovat nebudeme. Máme-li k dispozici 1200 m pletiva, jaký největší pozemek lze oplotit?
(Udejte rozměry i plochu. Vyřešte pomocí diferenciálního počtu!)

▶ `Příklad 2 [2 b.]:` Určete Maclaurinův polynom (tj. Taylorův polynom se středem v $x_0 = 0$) 3. řádu funkce $\ln(1+x)$. Poté pomocí něj odhadněte $\ln(0{,}9)$.
(Polynom vypočítejte pomocí derivací. Výsledné číslo můžete nechat ve tvaru součtu zlomků.)

▶ `Příklad 3 [2 b.]:` Najděte neurčitý integrál

$$\int (7-3x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 4 [2 b.]:` Pomocí substituce $t^{10} = x$ vypočítejte integrál

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{x} - 3\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 5 [2 b.]:` Jsou dány funkce

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = 2x + 4.$$

Načrtněte obrázek. Parabola f ohraničuje kus přímky g. Jaký je povrch pláště komolého kužele, který vznikne rotací tohoto kusu přímky g kolem osy x? Počítaný objekt na obrázku vyznačte.

▷ Do první tabulky vyplňte čitelně identifikační údaje a počet listů, které k zadání přikládáte.
▷ Druhou tabulku ponechejte prázdnou.
▷ U výpočtů příkladů řádně označujte, ke kterému příkladu (a jeho části) patří.
▷ Každý výsledek musí být podpořen výpočtem (zdůvodněním), jakkoli je triviální.
▷ Všechny papíry s výpočty podepište a odevzdejte společně se zadáním.
▷ Není povoleno použití kalkulačky ani žádných materiálů (tabulky, vzorce, skripta, poznámky,. . .). Jakýkoli pokus o podvádění bude mít za následek hodnocení 0 bez možnosti opravy.

2. vnitrosemestrální písemná práce — JS 2014, MB102, sk. D

Jméno a příjmení	
UČO	
Počet listů přílohy	

Příklad	1	2	3	4	5	Σ
Body						

▶ `Příklad 1 [2 b.]:` Je dána parabola $y = 4 - x^2$. Určete souřadnice vrcholů obdélníku ABCD tak, aby bylo splněno:

- obdélník ABCD má maximální obvod,
- vrcholy A, B leží na ose x,
- vrcholy C, D leží na zadané parabole a mají nezápornou souřadnici y.

(Vyřešte pomocí diferenciálního počtu!)

▶ `Příklad 2 [2 b.]:` Určete Maclaurinův polynom (tj. Taylorův polynom se středem v $x_0 = 0$) 3. řádu funkce $\sqrt{1+x}$. Poté pomocí něj odhadněte $\sqrt{0{,}9}$.
(Polynom vypočítejte pomocí derivací. Výsledné číslo můžete nechat ve tvaru součtu zlomků.)

▶ `Příklad 3 [2 b.]:` Najděte neurčitý integrál

$$\int (3x+2)\ln(5x)\,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 4 [2 b.]:` Vypočítejte integrál

$$\int_1^3 \frac{7}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 5 [2 b.]:` Jsou dány funkce

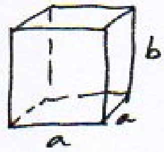
$$f(x) = x^2+2, \qquad g(x) = 4x-1$$

Načrtněte obrázek. Přímka g ohraničuje kus paraboly f. Sestavte integrál, pomocí nějž je možné určit délku tohoto kusu paraboly f. Integrál nepočítejte. Počítaný objekt na obrázku vyznačte.

▷ Do první tabulky vyplňte čitelně identifikační údaje a počet listů, které k zadání přikládáte.
▷ Druhou tabulku ponechejte prázdnou.
▷ U výpočtů příkladů řádně označujte, ke kterému příkladu (a jeho části) patří.
▷ Každý výsledek musí být podpořen výpočtem (zdůvodněním), jakkoli je triviální.
▷ Všechny papíry s výpočty podepište a odevzdejte společně se zadáním.
▷ Není povoleno použití kalkulačky ani žádných materiálů (tabulky, vzorce, skripta, poznámky,. . .). Jakýkoli pokus o podvádění bude mít za následek hodnocení 0 bez možnosti opravy.

A

1.)



$l = 8a + 4b = 120$

$2a + b = 30$

$b = 30 - 2a$

$S = 2\cdot a^2 + 4\cdot ab = 2a^2 + 4a\cdot(30-2a) =$

$= 2a^2 + 120a - 8a^2 = 120a - 6a^2 = S(a)$

$a \in [0,$ [redacted] $\frac{120}{8}]$

$S'(a) = 120 - 12a = 0 \Leftrightarrow 12a = 120$

$a = 10$

$S(0) = 0, \quad S(10) = \underset{MAX}{\underline{\underline{600}}}, \quad S($[redacted] $15) = 450$

$(S''(a) = -12 < 0 \Rightarrow$ l. max.$)$ $\quad a = 10, \ b = 30 - 20 = 10 \Rightarrow$ KRYCHLE $10\times10\times10$ cm

2.)

$f(x) = e^x \,|= 1$

$f'(x) = e^x \,|= 1$

$f''(x) = e^x \,|= 1$

$f'''(x) = e^x \,|_{x=0} = 1$

$T(x) = 1 + \frac{1}{1!}\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

$T(1/10) = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} \approx \sqrt[10]{e}$

3.)

$$\int (2-5x)\cdot e^{3x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = 2-5x & u' = -5 \\ v' = e^{3x} & v = \frac{e^{3x}}{3} \end{matrix} \right| = (2-5x)\cdot\frac{e^{3x}}{3} + \frac{5}{3}\cdot\int e^{3x}\,dx =$$

$$= (2-5x)\cdot\frac{e^{3x}}{3} + \frac{5}{3}\cdot\frac{e^{3x}}{3} + C = \frac{e^{3x}}{3}\cdot\left(2 - 5x + \frac{5}{3}\right) + C = \frac{e^{3x}}{3}\cdot\left(\frac{11}{3} - 5x\right) + C$$

4.)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{matrix} \right| \begin{matrix} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \\ = 1 - t^2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow t = 0 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{matrix} \right| = -\int_1^0 (1-t^2)\cdot t^2\,dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 - t^4\,dt = \left[-\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{+2}{15}$$

5.)

$x^2 + 1 = 2x + 4$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$f(3) = g(3) = 10$

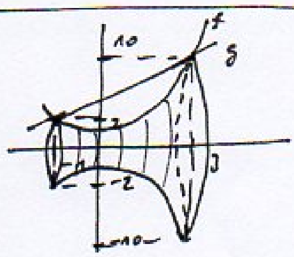
$f(-1) = g(-1) = 2$

$$V = \pi\int_{-1}^{3} (x^2+1)^2\,dx = \pi\cdot\int_{-1}^{3} x^4 + 2x^2 + 1\,dx =$$

$$= \pi\cdot\left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{3} =$$

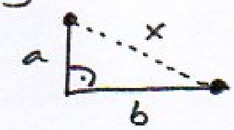
$$= \pi\cdot\left[\left(\frac{243}{5} + 2\cdot 9 + 3\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1\right)\right] = \pi\cdot\frac{729 + 270 + 45 + 3 + 10 + 15}{15}$$

$$= \frac{1072}{15}\pi$$



[5]

1.)

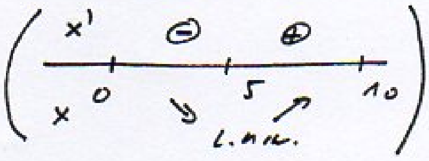


$a+b=10 \Rightarrow a=10-b$

$x^2 = a^2+b^2 = (10-b)^2+b^2 \Rightarrow x=\sqrt{(10-b)^2+b^2} =$

$= \sqrt{2b^2-20b+100} = x(b)\,,\quad b\in[0,10]$

$x'(b) = \dfrac{4b-20}{2\cdot\sqrt{2b^2-20b+100}} = 0 \Leftrightarrow b=5$



$x(0)=10\,,\; x(10)=10\,,\; x(5)=\underline{\underline{\sqrt{50}}} < 10$

$b=5 \Rightarrow a=10-5=5 \Rightarrow$ OHNOUT V POLOVINĚ

2.)

$f(x)=\ln x$	$=0$
$f'(x)=\frac{1}{x}$	$=1$
$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$	$=-1$
$f'''(x)=\frac{2}{x^3}$	$=2$
	$x=1$

$T(x) = 0 + \frac{1}{1!}\cdot(x-1) + \frac{-1}{2!}\cdot(x-1)^2 + \frac{2}{3!}\cdot(x-1)^3 =$

$= x-1-\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2+\frac{2}{6}\cdot(x-1)^3$

$T(0{,}9) = -\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{2}{6}\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)^3 = -\frac{1}{10}-\frac{1}{200}-\frac{1}{3000} \approx \ln$

3.) $\int(2x+3)\cdot\sin 4x\,dx = \left|\begin{matrix} u=2x+3 & u'=2 \\ v'=\sin 4x & v=\frac{-\cos 4x}{4}\end{matrix}\right| = (2x+3)\cdot\frac{-\cos 4x}{4}+\frac{2}{4}\cdot\int\cos 4x\,dx =$

$= \underline{-\frac{2x+3}{4}\cdot\cos 4x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 4x}{4}+C}$

4.) $\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot e^{x^3}\,dx = \left|\begin{matrix} t=x^3 \\ dt=3x^2\,dx\end{matrix}\right|\begin{matrix} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=-\infty \Rightarrow t=-\infty\end{matrix}\right| = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{0} e^t\,dt = \frac{1}{3}\cdot\left[e^t\right]_{-\infty}^{0} =$

$= \frac{1}{3}\cdot\left(e^0-\lim_{t\to-\infty}e^t\right) = \frac{1}{3}\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

5.) $x^2+2 = 4x-1$

$x^2-4x+3=0$

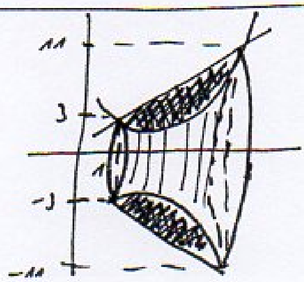
$D=16-12=4$

$x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1\end{cases}$

$f(3)=g(3)=11$

$f(1)=g(1)=3$

$V=\pi\cdot\int_1^3 g^2(x)-f^2(x)\,dx$



C

1.)

$1200 = 2a + b \Rightarrow b = 1200 - 2a$

$a \cdot b = S \to \max, \quad S(a) = a \cdot (1200 - 2a) = 1200a - 2a^2$

$S'(a) = 1200 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 300\ m \qquad a \in [0, 600]$

$\Rightarrow b = 600\ m, \quad S = 300 \cdot 600 = 180000$

$(S''(a) = -4 < 0 \Rightarrow \text{l. max.})$

$S(0) = 0, \quad S(600) = 0, \quad S(300) > 0$

$\Rightarrow \max.$

2.)

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = \ln(1+x) & = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x} & = 1 \\ f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} & = -1 \\ f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} & = 2 \end{array}\right|_{x=0}$$

$T(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{-1}{2!} \cdot x^2 + \frac{2}{3!} \cdot x^3 =$

$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

$\ln 0{,}9 \approx T(-1/10) = -\frac{1}{10} - \frac{1}{200} - \frac{1}{3000}$

3.) $\int (7-3x) \cdot \cos(4x)\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = 7-3x & u' = -3 \\ v' = \cos 4x & v = \frac{\sin 4x}{4} \end{array} \right| = (7-3x) \cdot \frac{\sin 4x}{4} + \frac{3}{4}\int \sin 4x\, dx =$

$= \underline{\frac{7-3x}{4} \cdot \sin 4x - \frac{3}{16} \cdot \cos 4x + c}$

4.) $\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{x} - 3\sqrt{x}}{x}\, dx = \left| \begin{array}{l} t^{10} = x \\ 10t^9\, dt = dx \end{array} \right| \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array} \left| = 10 \int_0^1 \frac{t^2 - 3t^5}{t^{10}} \cdot t^9\, dt = \right.$

$= 10 \cdot \int_0^1 t - 3t^4\, dt = 10 \cdot \left[\frac{t^2}{2} - 3 \cdot \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5} \right) = 5 - 6 = \underline{\underline{-1}}$

5.) $x^2 + 1 = 2x + 4$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

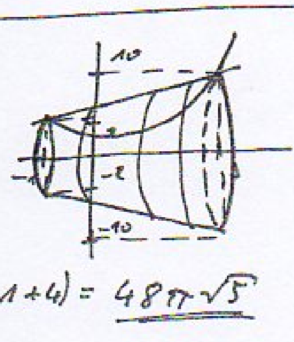
$D = 4 + 12 = 16$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$f(3) = g(3) = 10$

$f(-1) = g(-1) = 2$

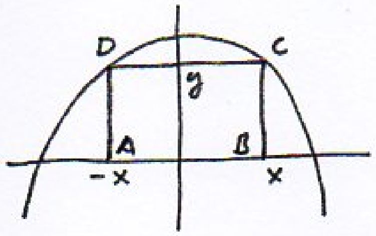
$S = 2\pi \cdot \int_{-1}^{3} (2x+4) \cdot \sqrt{1+4}\, dx =$



$= 2\pi\sqrt{5} \cdot \left[x^2 + 4x \right]_{-1}^{3} = 2\pi\sqrt{5} \cdot (21 - 1 + 4) = \underline{48\pi\sqrt{5}}$

$\boxed{D}$

1.)



$y = 4 - x^2$, $A = [-x, 0]$, $B = [x, 0]$, $C = [x, 4-x^2]$, $D = [-x, 4-x^2]$

$\sigma(x) = 4 \cdot x + 2 \cdot (4 - x^2) = -2x^2 + 4x + 8$, $x \in [0,2]$

$\sigma'(x) = -4x + 4 = 0 \iff x = 1$

$(\sigma''(x) = -4 < 0 \Rightarrow \max)$ $\sigma(0) = 8$, $\sigma(2) = 8$

$\sigma(1) = 10$ ... max

$\Rightarrow A = [-1, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [1, 3]$, $D = [-1, 3]$

2.)

$$\begin{array}{ll|l} f(x) = \sqrt{1+x} & & = 1 \\ f'(x) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1+x}} & & = \dfrac{1}{2} \\ f''(x) = \dfrac{-1}{4\cdot\sqrt{(1+x)^3}} & & = -\dfrac{1}{4} \\ f'''(x) = \dfrac{3}{8\cdot\sqrt{(1+x)^5}} & & = \dfrac{3}{8} \end{array}\Bigg|_{x=0}$$

$$T(x) = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} \cdot x + \frac{-\frac{1}{4}}{2!} \cdot x^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!} \cdot x^3 =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$T(-0{,}1) = 1 - \frac{1}{20} - \frac{1}{800} - \frac{1}{16000} \approx \sqrt{0{,}9}$$

3.)

$$\int (3x+2) \cdot \ln(5x)\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln 5x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 3x+2 & v = 3\frac{x^2}{2} + 2x \end{array} \right| = \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right) \cdot \ln 5x - \int \frac{3}{2}x + 2\, dx$$

$$= \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right) \cdot \ln 5x - \frac{3}{4}x^2 - 2x + C$$

4.)

$$\int_1^3 \frac{7}{x^2 - 2x + 5}\, dx = 7 \cdot \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2 + 4}\, dx = \cancel{\left| t = \frac{x-1}{2} \right|} = \frac{7}{4} \cdot \int_1^3 \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l|l} t = \frac{x-1}{2} & x = 3 \Rightarrow t = 1 \\ dt = \frac{1}{2}\, dx & x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = \frac{7}{4} \cdot 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt = \frac{7}{2} \cdot [\operatorname{arctg} t]_0^1 = \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \pi$$

5.)

$x^2 + 2 = 4x - 1$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$D = 16 - 12 = 4$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} = 3 \\ = 1 \end{cases}$

$f(3) = g(3) = 11$

$f(1) = g(1) = 3$

$$l = \int_1^3 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$