

MB102 – Diferenciální a integrální počet

2. vnitrosemestrální písemka, A, 10.12.2013

Příklad 1 (2 body). Pro $x \in (-2, 2)$ integrujte

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \int x^2 e^{x^3} dx.$$

Příklad 2 (2 body). Např. metodou per partes vyčíslete

$$\int_0^2 (x^2 - 3) e^{-x} dx.$$

Příklad 3 (1 bod). Vypočtete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací kolem osy x podgrafu funkce $y = 3x + 2$, $x \in [0, 3]$.

Příklad 4 (1 bod). Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6^n}.$$

Příklad 5 (2 body). Rozhodněte o konvergenci (či nekonvergenci) řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{6n+3} \right)^n;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - n + 6}{\sqrt{n^4 + 1}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(6 + \cos n)^n}.$$

Pokud některá z posledních dvou řad konverguje, zjistěte, zda konverguje absolutně (nebo relativně). Svá tvrzení zdůvodněte.

Příklad 6 (2 body). Stanovte intervaly konvergence mocninných řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{n} (x+3)^n.$$

MB102 – Diferenciální a integrální počet

2. vnitrosemestrální písemka, B, 10.12.2013

Příklad 1 (2 body). Pro $x > 0$ integrujte

$$\int \frac{3x+1}{3x^2+2x+5} dx; \quad \int \frac{(\ln x + 3)^3}{x} dx.$$

Příklad 2 (2 body). Např. metodou per partes vyčíslete

$$\int_0^1 (x^2 + 3) e^{-x} dx.$$

Příklad 3 (1 bod). Vypočtěte obsah pláště tělesa, které vznikne rotací kolem osy x podgrafu funkce $y = 4x + 1$, $x \in [0, 3]$.

Příklad 4 (1 bod). Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}.$$

Příklad 5 (2 body). Rozhodněte o konvergenci (či nekonvergenci) řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^5}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3n^2 + 4} \right)^n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Pokud některá z posledních dvou řad konverguje, zjistěte, zda konverguje absolutně (nebo relativně). Svá tvrzení zdůvodněte.

Příklad 6 (2 body). Stanovte intervaly konvergence mocninných řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n} (x-3)^n.$$

MB102 – Diferenciální a integrální počet

2. vnitrosemestrální písemka, C, 10.12.2013

Příklad 1 (2 body). Pro $x > 0$ integrujte

$$\int \frac{4x+3}{4x^2+6x+3} dx; \quad \int \frac{(4+\ln x)^4}{x} dx.$$

Příklad 2 (2 body). Např. metodou per partes vyčíslete

$$\int_{-1}^0 27x^2 e^{-3x} dx.$$

Příklad 3 (1 bod). Vypočtěte obsah pláště tělesa, které vznikne rotací kolem osy x podgrafu funkce $y = 5x + 3$, $x \in [0, 2]$.

Příklad 4 (1 bod). Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}.$$

Příklad 5 (2 body). Rozhodněte o konvergenci (či nekonvergenci) řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{4}{n+3\sqrt{n}} \right)^n;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n} + \sqrt[5]{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!}.$$

Pokud některá z posledních dvou řad konverguje, zjistěte, zda konverguje absolutně (nebo relativně). Svá tvrzení zdůvodněte.

Příklad 6 (2 body). Stanovte intervaly konvergence mocninných řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} (x-5)^n.$$

MB102 – Diferenciální a integrální počet

2. vnitrosemestrální písemka, D, 10.12.2013

Příklad 1 (2 body). Pro $x \in (0, \pi/2)$ integrujte

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx; \quad \int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2} \, dx.$$

Příklad 2 (2 body). Např. metodou per partes vyčíslete

$$\int_0^1 27 x^2 e^{-3x} \, dx.$$

Příklad 3 (1 bod). Vypočtete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací kolem osy x podgrafu funkce $y = 2x + 4$, $x \in [0, 4]$.

Příklad 4 (1 bod). Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}.$$

Příklad 5 (2 body). Rozhodněte o konvergenci (či nekonvergenci) řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{n + \sqrt[3]{n+1}} \right)^n;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + n + 4}{(3n + 5)^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3 + \sin n)^n}.$$

Pokud některá z posledních dvou řad konverguje, zjistěte, zda konverguje absolutně (nebo relativně). Svá tvrzení zdůvodněte.

Příklad 6 (2 body). Stanovte intervaly konvergence mocninných řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5} x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n} (x + 5)^n.$$

Výsledky

Příklad 1, A:

$$\arcsin \frac{x}{2} + C; \quad \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

Příklad 1, B:

$$\frac{1}{2} \ln(3x^2 + 2x + 5) + C; \quad \frac{1}{4} (3 + \ln x)^4 + C$$

Příklad 1, C:

$$\frac{1}{2} \ln(4x^2 + 6x + 3) + C; \quad \frac{1}{5} (4 + \ln x)^5 + C$$

Příklad 1, D:

$$\operatorname{tg} x - x + C; \quad -\frac{1}{2 + \sin x} + C$$

Příklad 2, A: $-1 - 7e^{-2}$

Příklad 2, B: $5 - 8e^{-1}$

Příklad 2, C: $-2 + 5e^3$

Příklad 2, D: $2 - 17e^{-3}$

Příklad 3, A: $39\pi\sqrt{10}$

Příklad 3, B: $42\pi\sqrt{17}$

Příklad 3, C: $32\pi\sqrt{26}$

Příklad 3, D: $64\pi\sqrt{5}$

Příklad 4, A: $6/25$

Příklad 4, B: $7/36$

Příklad 4, C: $5/16$

Příklad 4, D: $4/9$

Příklad 5, A: konverguje; konverguje; nekonverguje; konverguje absolutně

Příklad 5, B: nekonverguje; konverguje; konverguje relativně; konverguje absolutně

Příklad 5, C: nekonverguje; konverguje; konverguje relativně; konverguje absolutně

Příklad 5, D: konverguje; konverguje; nekonverguje; konverguje absolutně

Příklad 6, A: $[-1/4, 1/4]; (-3 - 1/4, -3 + 1/4]$

Příklad 6, B: $[-1/3, 1/3]; (3 - 1/3, 3 + 1/3]$

Příklad 6, C: $[-1/2, 1/2]; (5 - 1/2, 5 + 1/2]$

Příklad 6, D: $[-1/5, 1/5]; (-5 - 1/5, -5 + 1/5]$