Ex. 1 — Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x}.$$

Ex. 2 — Vypočtěte křivkový integrál

$$\int_C (x+y)\,dx,$$

kde C je lomená čára OAB, kde $O = [0,0], A = [2,0], B = [2,2]$.

Ex. 3 — Určete obor konvergence a součet řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Ex. 4 — Oddělte reálnou a imaginární část výrazu $\sin(2+i)$.

Ex. 5 — Formulujte Weierstrassovo kriterium stejnoměrné konvergence.

Ex. 6 — Určete, jak vypadá funkce $y = f(x)$ zadaná implicitně rovnicí $F(x,y) = 0$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$, pro který platí $F(x_0, y_0) = 0$.

Answer (ex. 1) — Jde o nehomogenní lineární rovnici 1. řádu, viz skripta nebo `http://cs.wikipedia.org/wiki/Obyčejné_diferenciální_rovnice`.

Answer (ex. 2) — Integrál se rozdělí na dvě části:

$$\int_C (x+y)\,dx = \int_{OA} (x+y)\,dx + \int_{AB} (x+y)\,dx.$$

Křivky jsou parametricky vyjádřeny jako $\varphi(t) = (t,0)$, $t \in [0,2]$ a $\psi(t) = (2,t)$, $t \in [0,2]$.

$$\begin{aligned}\int_{OA} (x+y)\,dx &= \int_0^2 (\varphi_x(t) + \varphi_y(t))\frac{d\varphi}{dx}(t)\,dt \\ &= \int_0^2 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 \\ &= 2 \\ \int_{AB} (x+y)\,dx &= \int_0^2 (\psi_x(t) + \psi_y(t))\frac{d\psi}{dx}(t)\,dt \\ &= \int_0^2 (2+t)0\,dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Proto

$$\int_C (x+y)\,dx = 2.$$

Answer (ex. 3) — Jde o mocninnou řadu, poloměr konvergence lze spočítat jako

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

za předpokladu, že limita existuje. V tomto případě

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Obor konvergence je tedy alespoň $(-1,1)$. Ještě je potřeba ověřit krajní body: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ a $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. V prvním případě jde o harmonickou řadu, která

diverguje, v druhém případě jde o konvergentní alternující řadu. Obor konvergence tedy je $[-1, 1)$. Konvergence je stejnoměrná.
Co se týká součtu, zkušené oko si všimne, že jde o rozvoj $\ln(1-x)$ bez prvních dvou členů, proto

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x) - \frac{x^2}{2} - x.$$

Druhá možnost je

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} &= \sum_{n=3}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\, dt \\
&= \int_0^x \left(\sum_{n=3}^{\infty} t^{n-1} \right) dt \\
&= \int_0^x \frac{t^2}{1-t}\, dt \\
&= \ln|1-x| - x - \frac{x^2}{2} \\
&= \ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

Přehození sumy a integrálu je možné díky stejnoměrnosti konvergence. Řada, která tím vznikne, je geometrická a lze tedy snadno sečíst. Integrál lze spočítat pomocí substituce $u = 1 - t$. Poslední úprava je možná, neboť $|x| \leq 1$.

Answer (ex. 4) — Použije se Eulerův vztah a

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{e^{2i-1} - e^{1-2i}}{2i} \\
&= \frac{e^{-1}e^{2i} - ee^{-2i}}{2i} \\
&= \frac{e^{-1}(\cos 2 + i \sin 2) - e(\cos 2 - i \sin 2)}{2i} \\
&= \frac{(e^{-1} - e)\cos 2 + i(e^{-1} + e)\sin 2}{2i} \\
&= \frac{(e^{-1} + e)\sin 2}{2} + i\frac{(e - e^{-1})\cos 2}{2}
\end{aligned}$$