Neantagonistické hry dvou hráčů

1. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (-3,-2) & (-1,-2) & (8,9) \\ (-1,-1) & (4,4) & (-4,-3) \\ (8,9) & (-1,-2) & (-3,-3) \end{pmatrix}.$$

   Určete dvojice rovnovážných a dominujících strategií.

2. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (-1,3) & (1,0) \\ (2,-1) & (0,1) \\ (1,1) & (-2,1) \end{pmatrix}.$$

   Vypočítejte maximinní hodnoty (nejmenší zaručené výhry) pro oba hráče.

3. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (0,1) & (2,0) \\ (1,2) & (-1,-1) & (1,2) \\ (2,-1) & (1,0) & (-1,-1) \end{pmatrix}.$$

   Určete rovnovážné a maximinní hodnoty pro oba hráče.

4. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (-2,3) & (-1,1) & (1,-2) \\ (0,1) & (-1,-2) & (1,1) \\ (2,2) & (2,-1) & (0,0) \end{pmatrix}.$$

   Vypočítejte maximinní hodnoty pro oba hráče.

5. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (2,-3) & (-1,3) \\ (0,1) & (1,-2) \end{pmatrix}.$$

   Určete rovnovážné a maximinní hodnoty pro oba hráče.

6. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (2,-1) & (-1,1) \\ (0,2) & (1,-1) \end{pmatrix}.$$

   Určete rovnovážné a maximinní hodnoty pro oba hráče.

7. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,5) \end{pmatrix}.$$

   Určete rovnovážné a maximinní hodnoty pro oba hráče.

8. Uvažujte nekooperativní hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (-3,-2) & (-1,-2) & (8,9) \\ (-1,-1) & (4,4) & (-4,-3) \\ (8,9) & (-1,-2) & (-3,-3) \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že tato hra nemá řešení v ryzích strategiích, odvozené pomocí pojmů rovnovážné strategie, dominování a záměnnost. Prověřte správnost tohoto tvrzení: Ve hře je optimální, jestliže hráči volí dvojici rovnovážných strategií $(2,2)$, neboť v tomto případě je výhra obou hráčů vyšší než je jejich střední hodnota výhry v situaci, kdy oba hráči volí strategie 1 a 3 s pravděpodobností $1/2$, ve snaze sejít sena dominujících dvojicích rovnovážných strategií. Je možné tuto úvahu systematicky propracovat tak, aby z ní vznikl další dodatečný princip pro řešení neantagonistických nekooperativních her?

9. Dokažte toto tvrzení: Jestliže je dvojmaticová hra určena maticemi A a B a jestliže ke všem prvkům matice A přičteme číslo c a ke všem prvkům matice B přičteme číslo d, rovnovážné strategie smíšeného rozšíření hry s maticemi A a B a rovnovážné strategie smíšeného rozšíření hry s maticemi s přičtenými čísly c a d jsou stejné.

10. Uvažujte dvojmaticovou hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že dvojice strategií $\bar{\mathbf{x}} = (1/3, 2/3)$, $\bar{\mathbf{y}} = (2/3, 1/3)$ a $\bar{\bar{\mathbf{x}}} = (2/3, 1/3)$, $\bar{\bar{\mathbf{y}}} = (1/3, 2/3)$ jsou rovnovážné. Dále ukažte, že konvexní kombinace

$$\mathbf{x} = k_1\bar{\mathbf{x}} + k_2\bar{\bar{\mathbf{x}}} \quad \text{a} \quad k_1\bar{\mathbf{y}} + k_2\bar{\bar{\mathbf{y}}}, \quad k_1 \geq 0,\ k_2 \geq 0,\ k_1 + k_2 = 1$$

obecně netvoří rovnovážné dvojice strategií v uvažované hře.

11. Rozhodněte, zda pro hry dvou hráčů s nekonstantním součtem je pravdivé toto tvrzení: Jestliže existuje jediná dvojice rovnovážných strategií, pak pro hodnoty charakteristické funkce platí: $v(\{1\}) = \bar{v}(\{1\})$, $v(\{2\}) = \bar{v}(\{2\})$.

12. U her, pro jejichž charakteristickou funkci platí $v(\{1\}) + v(\{2\}) = v(\{1,2\})$, je výsledek konfliktu pro oba hráče stejný, ať jej považují za konflikt s přenosnou nebo nepřenosnou výhrou. Může obdobný případ nastat i u podstatných her?