2010 Termín 1

Příklad 1 **50 bodů**

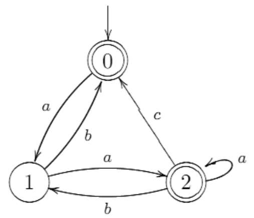
O každém z následujících jazyků rozhodněte, zda je bezkontextový. Svá tvrzení dokažte. *(Pro důkaz, že jazyk je bezkontextový, stačí napsat odpovídající gramatiku nebo automat.)*

(a) $L_1 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \#_a(w) + \#_b(w) \leq \#_c(w)\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \#_a(w) \leq \#_b(w) \leq \#_c(w)\}$

Příklad 2 **30 bodů**

Je dán automat A:



Napište regulární výraz E popisující jazyk $L(A)$.
(Rovnost $L(E) = L(A)$ nemusíte dokazovat, pokud použijete standardní algoritmus a zakreslíte všechny jeho mezivýsledky.)

Příklad 3 **35 bodů**

Je dána gramatika $\mathcal{G} = (\{S,A,B\},\{a,b,c\},P,S)$, kde

$$P = \{\ S \rightarrow ab \mid Ab \qquad A \rightarrow BaA \mid Sc \mid Ac \qquad B \rightarrow AA \mid bB\ \}.$$

Převeďte gramatiku $\mathcal{G}$ na ekvivalentní nelevorekursivní bezkontextovou gramatiku. Pokud nepoužijete algoritmus z přednášky, dokažte ekvivalenci výsledné gramatiky s gramatikou ze zadání.

Příklad 4 **40 bodů**

Napište algoritmus, který pro zadanou redukovanou bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G} = (N,\Sigma,P,S)$ spočítá množinu M všech neterminálů, z kterých lze odvodit neprázdný řetězec, tj. $M = \{A \in N \mid A \Rightarrow^* w$ pro nějaké $w \in \Sigma^+\}$.

Příklad 5 **15+15 bodů**

Rozhodněte, zda existují následující gramatiky. V kladném případě uveďte příklad takové gramatiky, v záporném důkaz její neexistence.

(a) Regulární gramatika, která je zároveň bezkontextovou gramatikou v CNF.

(b) Bezkontextová gramatika v GNF, která je cyklická.

Příklad 6 **30+10 bodů**

(a) Definujte pojmy *gramatika* a *kontextová gramatika*.

(b) Definujte, kdy má bezkontextová gramatika *vlastnost sebevložení.*

2010 Termín 2

Příklad 1 **40 bodů**

Navrhněte bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ v Greibachové normální formě generující jazyk

$$L(\mathcal{G}) = \{a^i b^j c^k d^{2j} \mid i,j,k > 0\}.$$

(Rovnost $L = L(\mathcal{G})$ není třeba dokazovat.)

Příklad 2 **36 bodů**

Zkonstruujte regulární výrazy popisující následující jazyky:

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ neobsahuje podslovo 11$\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ obsahuje podslova aaa a $abc\}$

Příklad 3 **20+15 bodů**

Je dána gramatika $\mathcal{G} = (\{S,A,B\},\{a,b\},P,S)$, kde

$$P = \{\ S \rightarrow aAA \mid Bb \qquad A \rightarrow aB \mid bb \qquad B \rightarrow Bb \mid bS \mid \varepsilon\ \}.$$

(a) Zkonstruujte rozšířený PDA $\mathcal{A}$ pro nedeterministickou syntaktickou analýzu zdola nahoru. Uveďte způsob akceptování.

(b) Zapište akceptující výpočet automatu $\mathcal{A}$ nad slovem $aabbb$.

Příklad 4 **40 bodů**

Napište algoritmus, který pro zadanou redukovanou bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G} = (N,\Sigma,P,S)$ a zadaný symbol $a \in \Sigma$ spočítá množinu M všech neterminálů, z kterých lze odvodit řetězec obsahující a, tj.

$$M = \{A \in N \mid A \Rightarrow^* uav \text{ pro nějaké } u,v \in \Sigma^*\}.$$

Příklad 5 **15+15 bodů**

Rozhodněte, zda existují následující gramatiky. V kladném případě uveďte příklad takové gramatiky, v záporném důkaz její neexistence.

(a) Bezkontextová vlastní gramatika s jediným neterminálem, která generuje nekonečný jazyk obsahující i slovo ε.

(b) Kontextová gramatika, která není bezkontextová, ale generuje regulární jazyk.

Příklad 6 **10+10+10+14 bodů**

(a) Definujte, kdy má bezkontextová gramatika *vlastnost sebevložení.*

(b) Nechť L je jazyk nad abecedou Σ. Definujte relaci $\sim_L$ zvanou *prefixová ekvivalence pro L.*

(c) Definujte, kdy je neterminál bezkontextové gramatiky *levorekursivní.*

(d) Napište 5 operací nad jazyky, na které je třída bezkontextových jazyků uzavřená. Dále napište 2 operace nad jazyky, na které třída bezkontextových jazyků není uzavřená.

2010 Termín 3

Příklad 1
40 bodů

Navrhněte zásobníkový automat $\mathcal{M}$ akceptující jazyk

$$L = \{a^i b^{2j} c^k d^i \mid i, j, k > 0,\ j > k\}.$$

Uveďte, jakým způsobem navržený automat akceptuje.

Příklad 2
35 bodů

Uvažme následující pravou kongruenci $\sim$ na slovech nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$:

$$u \sim v \overset{def}{\Longleftrightarrow} \#_a(u) \bmod 4 \ = \ \#_a(v) \bmod 4$$

(a) Určete index $\sim$.

(b) Najděte jazyk L nad Σ takový, že $\sim_L = \sim$.

(c) Najděte jazyk L, který je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^* podle $\sim$, ale přitom $\sim_L \neq \sim$.

Příklad 3
35 bodů

Je dána gramatika $\mathcal{G} = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{llll} P = \{ & S & \to & AaA \mid ab \mid B \\ & A & \to & BaBb \mid c \mid B \\ & B & \to & Bc \mid S \ \}. \end{array}$$

Převeďte gramatiku $\mathcal{G}$ na ekvivalentní gramatiku v CNF. Pokud nepoužijete algoritmus z přednášky, zdůvodněte ekvivalenci výsledné gramatiky s gramatikou ze zadání.

Příklad 4
40 bodů

Zformulujte algoritmus, který k danému nedeterministickému konečnému automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ zkonstruuje jazykově ekvivalentní deterministický automat bez nedosažitelných stavů a s totální přechodovou funkcí. *(Nezapomeňte přesně popsat výstupní automat.)*

Příklad 5
15+15 bodů

Rozhodněte, zda existují následující gramatiky. V kladném případě uveďte příklad takové gramatiky, v záporném důkaz její neexistence.

(a) Bezkontextová gramatika bez jednoduchých pravidel a bez ε-pravidel, která je cyklická.

(b) Bezkontextová gramatika, která má vlastnost sebevložení, ale generuje regulární jazyk.

Příklad 6
35+5+5 bodů

(a) Definujte *Turingův stroj* (včetně podmínky kladené na přechodovou funkci).

(b) Jak se nazývá třída jazyků akceptovaných Turingovými stroji?

(c) Jak se nazývá třída jazyků akceptovaných úplnými Turingovými stroji?

2010 Termín 4

Příklad 1
50 bodů

O každém z následujících jazyků rozhodněte, zda je bezkontextový. Svá tvrzení dokažte. *(Pro důkaz, že jazyk je bezkontextový, stačí napsat odpovídající gramatiku nebo automat.)*

(a) $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) \leq \#_c(w) \ \wedge \ \#_b(w) \leq \#_c(w)\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w)\}$

Příklad 2
30 bodů

K zadanému konečnému automatu zkonstruujte ekvivalentní deterministický konečný automat s totální přechodovou funkcí.
(Pokud nepoužijete standardní algoritmus, dokažte ekvivalenci obou automatů.)

	c	d
$\to 1$	$\{5\}$	$\{4\}$
2	$\{4\}$	$\{2, 3\}$
$\leftarrow 3$	$\{1\}$	$\{1, 3\}$
$\leftarrow 4$	$\emptyset$	$\{1\}$
5	$\{3, 5\}$	$\{1, 5\}$
$\leftarrow 6$	$\{2, 3\}$	$\{1, 4, 6\}$

Příklad 3
20+15 bodů

Je dána gramatika $\mathcal{G} = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{llll} P = \{ & S & \to & aAA \mid Bb \\ & A & \to & aB \mid bb \\ & B & \to & Bb \mid bS \mid \varepsilon \ \}. \end{array}$$

(a) Zkonstruujte PDA $\mathcal{A}$ pro nedeterministickou syntaktickou analýzu shora dolů. Uveďte způsob akceptování.

(b) Zapište akceptující výpočet automatu $\mathcal{A}$ nad slovem $aabbb$.

Příklad 4
40 bodů

Zformulujte algoritmus, který k dané bezkontextové gramatice $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ bez ε-pravidel zkonstruuje jazykově ekvivalentní gramatiku bez jednoduchých pravidel a bez ε-pravidel. *(Nezapomeňte přesně popsat výstupní gramatiku.)*

Příklad 5
15+15 bodů

Rozhodněte, zda existují následující gramatiky. V kladném případě uveďte příklad takové gramatiky, v záporném důkaz její neexistence.

(a) Bezkontextová gramatika bez jednoduchých pravidel, která je cyklická.

(b) Frázová gramatika, která není kontextová, ale generuje konečný jazyk.

Příklad 6
25+15 bodů

(a) Zformulujte Myhill-Nerodovu větu.

(b) Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je PDA. Napište podmínky, které musí platit, aby byl zásobníkový automat *deterministický*.