Závěrečná zkouška z MV011 Statistika I 10. 6. 2015

1	2	3	4	5	Σ	Jméno:
						Učo:

Za každý příklad lze získat maximálně 10 bodů.

1. Napište definici klasické pravděpodobnosti (klasický pravděpodobnostní prostor). Uveďte nějaký příklad klasického pravděpodobnostního prostoru a popište pravděpodobnosti vybraných jevů.

2. Definujte lineární regresní model pro obecnou regresní přímku. Napište matici plánu a soustavu normálních rovnic, které se řeší při odhadech neznámých parametrů.

3. Lukostřelec střílí na kruhový terč. Pravděpodobnost, že lukostřelec při jednotlivé střelbě trefí terč, je 0,5. Pokud je terč zasažen, dopadne šíp do libovolného místa na terči se stejnou pravděpodobností. Terč je přitom tvořen dvěma soustřednými kruhy, vnitřním o poloměru 20 cm a vnějším o poloměru 40 cm.
   (a) Spočítejte pravděpodobnost, že při jedné střelbě střelec zasáhne vnitřní kruh terče.
   (b) Jsou dva jevy „střelec trefil terč“ a „střelec trefil vnitřní kruh terče“ stochasticky nezávislé? Dokažte.
   (c) Spočítejte pravděpodobnost, že při třech vzájemně nezávislých střelbách střelec zasáhne vnitřní kruh alespoň jednou.
   (d) Za zásah do vnějšího mezikruží se uděluje 5 bodů, za zásah do vnitřního kruhu 10 bodů. Spočítejte podmíněnou pravděpodobnost, že vnitřní kruh byl zasažen alespoň jednou, když víme, že po dvou nezávislých střelbách má střelec 10 bodů.

4. Student se dostaví na zkoušku náhodnou dobu X před začátkem zkoušky, vždy však v intervalu 0 až 20 minut před jejím začátkem. Hustota pravděpodobnosti této doby do začátku zkoušky má tvar funkce $f(x) = cx$, $0 \le x \le 20$.
   (a) Určete hodnotu konstanty c tak, aby $f(x)$ byla skutečně hustotou pravděpodobností.
   (b) Spočtěte distribuční funkci náhodné veličiny X a nakreslete její graf pro $x \in \mathsf{R}$.
   (c) Spočítejte 25% kvantil doby čekání do začátku zkoušky a pravděpodobnost, že tato doba bude větší než 10 minut.
   (d) Spočítejte střední hodnotu a směrodatnou odchylku doby čekání do zkoušky.

5. Při kategorizaci okurek dle směrnic EU se měří míra zakřivení okurek jako odklon od přímé osy na každých 10 cm délky okurky. Při kontrole bylo zakoupeno jedno balení okurek, u nichž byla naměřena následující zakřivení (v milimetrech):
   5; 7; 7; 7; 8; 9; 9; 10; 11; 13.
   (a) Spočítejte výběrový průměr a výběrovou směrodatnou odchylku zakřivení pro daný vzorek.
   (b) Odvoďte a číselně spočítejte oboustranný 95% interval spolehlivosti pro střední zakřivení.
   (c) Pro kategorii „výběr“ EU stanovuje podmínku, že střední zakřivení musí být menší než 10 milimetrů. Zapište odpovídající statistické hypotézy a proveďte vhodný test, abyste na hladině významnosti 5 % na vzorku rozhodli, jestli odpovídá kategorii „výběr“.

$u_{0,95}$	$u_{0,975}$	$F_{0,95}(9,9)$	$F_{0,975}(9,9)$	$F_{0,95}(10,10)$	$F_{0,975}(10,10)$	$F_{0,95}(9,8)$	$F_{0,975}(9,8)$	$F_{0,95}(8,9)$	$F_{0,975}(8,9)$
1,645	1,960	3,179	4,026	2,978	3,717	3,388	4,357	3,230	4,102

$t_{0,95}(10)$	$t_{0,975}(10)$	$t_{0,95}(9)$	$t_{0,975}(9)$	$\chi^2_{0,025}(10)$	$\chi^2_{0,05}(10)$	$\chi^2_{0,95}(10)$	$\chi^2_{0,975}(10)$	$\chi^2_{0,025}(9)$	$\chi^2_{0,05}(9)$	$\chi^2_{0,95}(9)$	$\chi^2_{0,975}(9)$
1,812	2,228	1,833	2,262	3,247	3,940	18,307	20,483	2,700	3,325	16,919	19,023

Pomocné vzorce jsou na druhé straně zadání!

Závěrečná zkouška z MV011 Statistika I — 27. 5. 2015

1	2	3	4	5	Σ	Jméno:
						Učo:

Za každý příklad lze získat maximálně 10 bodů.

1. Definujte Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti $Po(\lambda)$. Napište střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má Poissonovo rozdělení.

2. Definujte $100(1-a)\%$ interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $\boldsymbol{\gamma(\theta)}$. Nechť $X = (X_1,\ldots,X_n)^{\mathrm{T}}$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu,\sigma^2)$, kde μ a σ^2 jsou neznámé parametry. Uveďte $100(1-a)\%$ interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

3. V odlehlém městečku jsou tři hospůdky. V hospodě U Poctivce, kam chodí 10 % obyvatel, nikdy nenatočí podmírák, ke Klasikovi chodí 70 % obyvatel a točí tam podmíráky ve 20 % a k Šidílkovi chodí ostatní a na 90 % jim natočí pod rysku.
   (a) S jakou pravděpodobností náhodně vybranému obyvateli načepují plnou míru? (nebude ošizen, ať je kdekoliv)
   (b) Měl-li host plný džbánek, s jakou pravděpodobností byl u Šidílka?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný host byl u Šidílka a zároveň měl plný džbánek?
   (d) Jsou dva jevy „host byl u Šidílka“ a „host nebyl ošizen“ nezávislé? Dokažte.

4. Je dána hustota náhodné veličiny X:
$$g(x) = \begin{cases} kx, & x \in (0,2), \\ 0, & x \notin (0,2), \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu k tak, aby $g(x)$ byla hustota.
   (b) Spočtěte a nakreslete distribuční funkci této náhodné veličiny.
   (c) Určete $P\left(X < \sqrt{2}\right)$.
   (d) Určete 0,5 kvantil (medián) a střední hodnotu náhodné veličiny X.

5. Byly změřený tyto šířky vzorků mostového lana v mm:
   80, 82, 88, 80, 74, 83, 77, 81, 71.
   (a) Spočítejte výběrový průměr a výběrovou směrodatnou odchylku ze vzorků mostového lana.
   (b) Určete šířku 95% oboustranného intervalu spolehlivosti pro rozptyl.
   (c) Stavaři tvrdí, že šířka lana příliš kolísá, některá lana se prý moc trhají a některá nejdou provléct. Proveďte vhodný statistický test pro rozptyl σ^2 na hladině významnosti 5 % a rozhodněte, je-li směrodatná odchylka σ skutečně větší než udávané 2 mm.

$u_{0,95}$	$u_{0,975}$	$F_{0,95}(9,9)$	$F_{0,975}(9,9)$	$F_{0,95}(10,10)$	$F_{0,975}(10,10)$	$F_{0,95}(9,8)$	$F_{0,975}(9,8)$	$F_{0,95}(8,9)$	$F_{0,975}(8,9)$
1,645	1,960	3,179	4,026	2,978	3,717	3,388	4,357	3,230	4,102

$t_{0,95}(10)$	$t_{0,975}(10)$	$t_{0,95}(9)$	$t_{0,975}(9)$	$\chi^2_{0,025}(10)$	$\chi^2_{0,05}(10)$	$\chi^2_{0,95}(10)$	$\chi^2_{0,975}(10)$	$\chi^2_{0,025}(9)$	$\chi^2_{0,05}(9)$	$\chi^2_{0,95}(9)$	$\chi^2_{0,975}(9)$
1,812	2,228	1,833	2,262	3,247	3,940	18,307	20,483	2,700	3,325	16,919	19,023

Pomocné vzorce jsou na druhé straně zadání!

Závěrečná zkouška z MV011 Statistika I **20. 5. 2015**

1	2	3	4	5	Σ	Jméno:
						Učo:

Za každý příklad lze získat maximálně 10 bodů.

6. Definujte jevové pole a uveďte nějaký příklad jevového pole. Vyberte nějaký jev z vámi uvedeného příkladu a slovně jej interpretujte.

7. Definujte lineární regresní model pro obecnou regresní přímku. Napište matici plánu a soustavu normálních rovnic, které se řeší při odhadech neznámých parametrů.

8. Dopravní podnik tvrdí, že 25% lidí je poctivých a kupují si jízdenky na 90 % cest. 70 % lidí je středně poctivých a šance, že nemají jízdenku, je 50 %. Pak existují notoricky známí černí pasažéři, kteří si jízdenku nikdy nekupují.
   (e) Spočítejte, kolik procent lidí si kupuje jízdenky.
   (f) Jaká je pravděpodobnost, že náhodný pasažér, který nemá jízdenku, je černý pasažér?
   (g) Jaká je pravděpodobnost, že náhodný pasažér, který nemá jízdenku, není černý pasažér?
   (h) Jsou dva jevy „pasažér nemá jízdenku“ a „pokud pasažér nemá jízdenku, je černý pasažér“ nezávislé? Dokažte.

9. Studenti mají maximálně 3 pokusy na úspěšné ukončení předmětu. Pokud student úspěšně složí předmět, tak na další pokus už nejde. Náhodná veličina X značí počet pokusů, které student absolvuje.
   (e) Určete rozdělení pravděpodobnosti pro náhodnou veličinu X.
   (f) Spočtěte a nakreslete distribuční funkci této náhodné veličiny a určete medián.
   (g) Určete $P\,(1 \leq X \leq 2{,}5)$.

10. Byly změřený tyto průměrné váhy balíčků jedné společnosti:
   130, 130, 130, 130, 128, 126, 124, 122, 120, 120.
   (d) Spočítejte střední hodnotu, směrodatnou odchylku a medián
   (e) Spočítejte a nakreslete distribuční funkci.
   (f) Odvoďte a spočítejte oboustranný 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu.
   (g) Společnost tvrdí, že balíček má vážit 125 mg. Ověřte hypotézu, že naměřené hodnoty potvrzují slova společnosti.

$u_{0,95}$	$u_{0,975}$	$F_{0,95}(9,9)$	$F_{0,975}(9,9)$	$F_{0,95}(10,10)$	$F_{0,975}(10,10)$	$F_{0,95}(9,8)$	$F_{0,975}(9,8)$	$F_{0,95}(8,9)$	$F_{0,975}(8,9)$
1,645	1,960	3,179	4,026	2,978	3,717	3,388	4,357	3,230	4,102

$t_{0,95}(10)$	$t_{0,975}(10)$	$t_{0,95}(9)$	$t_{0,975}(9)$	$\chi^2_{0,025}(10)$	$\chi^2_{0,05}(10)$	$\chi^2_{0,95}(10)$	$\chi^2_{0,975}(10)$	$\chi^2_{0,025}(9)$	$\chi^2_{0,05}(9)$	$\chi^2_{0,95}(9)$	$\chi^2_{0,975}(9)$
1,812	2,228	1,833	2,262	3,247	3,940	18,307	20,483	2,700	3,325	16,919	19,023

Pomocné vzorce jsou na druhé straně zadání!

Závěrečná zkouška z MV011 **Vzorové zadání**

1	2	3	4	5	$\sum$	Jméno:
						Učo:

Za každý příklad lze získat maximálně 10 bodů.

1. Napište definici klasické pravděpodobnosti (klasický pravděpodobnostní prostor). Uveďte nějaký příklad klasického pravděpodobnostního prostoru a popište pravděpodobnosti vybraných jevů.

2. Definujte nestranný a asymptoticky nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$. Formulujte postačující podmínku pro to, aby odhad parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ byl konzistentní.

3. Ve skupině 30 studentů je 5 geniálních, 10 výborných a zbytek jsou průměrní studenti. Geniální studenti odpoví vždy správně, výborní v 80 % otázek, průměrní jen s pravděpodobností 0,5. Náhodně je vybrán jeden student a je mu položena otázka.
(A) Spočítejte pravděpodobnost, že student odpoví špatně;
(B) Spočítejte pravděpodobnost, že student je průměrný, když odpověděl špatně.
(C) Jsou jevy „student odpoví špatně“ a „student je průměrný, když odpověděl špatně“ stochasticky nezávislé? Zdůvodněte.

4. Řidič dodávkového auta projíždí 4 křižovatkami řízenými nezávislými semafory. Na každé křižovatce svítí zelený signál s pravděpodobností 0,4 a červený signál s pravděpodobností 0,6, oranžovou neuvažujeme. Náhodná veličina X popisuje počet křižovatek, které řidič projede, než bude nucen poprvé zastavit na červený signál.
(A) Spočítejte rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X.
(B) Načrtněte graf distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X.
(C) Spočítejte střední hodnotu EX.
(D) Spočítejte pravděpodobnost $P(1 \leq X \leq 2{,}4)$.

5. Při zjišťování denní teploty (s normálním rozdělením pravděpodobnosti) v měsíci květnu bylo provedeno 10 měření s výběrovým průměrem 20,4 °C a výběrovou směrodatnou odchylkou 4,7 °C. Odvoďte a číselně spočítejte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu teploty. Postup výpočtu a výsledek okomentujte. Jak byste výsledný interval v praxi intepretovali?

$u_{0,95}$	$u_{0,975}$	$F_{0,95}(9,9)$	$F_{0,975}(9,9)$	$F_{0,95}(10,10)$	$F_{0,975}(10,10)$	$F_{0,95}(9,8)$	$F_{0,975}(9,8)$	$F_{0,95}(8,9)$	$F_{0,975}(8,9)$
1,645	1,960	3,179	4,026	2,978	3,717	3,388	4,357	3,230	4,102

$t_{0,95}(10)$	$t_{0,975}(10)$	$t_{0,95}(9)$	$t_{0,975}(9)$	$\chi^2_{0,025}(10)$	$\chi^2_{0,05}(10)$	$\chi^2_{0,95}(10)$	$\chi^2_{0,975}(10)$	$\chi^2_{0,025}(9)$	$\chi^2_{0,05}(9)$	$\chi^2_{0,95}(9)$	$\chi^2_{0,975}(9)$
1,812	2,228	1,833	2,262	3,247	3,940	18,307	20,483	2,700	3,325	16,919	19,023

Pomocné vzorce jsou na druhé straně zadání!

Pomocné vzorce

Čebyševova nerovnost: $P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Mějme $\perp\!\!\!\perp\{X_1, \ldots, X_n\} \simeq N(\mu, \sigma^2)$ a výběrový průměr $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ a výběrový rozptyl $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$. Pak platí

(1) Výběrový průměr $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

(2) Statistika $U = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

(3) Statistika $K = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$

(4) Statistika $T = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

Nechť $\perp\!\!\!\perp\{X_1, \ldots, X_{n_1}\} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\overline{X}$ výběrový průměr a S_1^2 výběrový rozptyl. Dále nechť $\perp\!\!\!\perp\{Y_1, \ldots, Y_{n_2}\} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\overline{Y}$ výběrový průměr a S_2^2 výběrový rozptyl. Předpokládejme $\mathbf{X} \perp \mathbf{Y}$. Pak

1. Statistika
$$U_{\overline{X}-\overline{Y}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1).$$

2. Pokud $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak statistika
$$T_{\overline{X}-\overline{Y}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{12}}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), S_{12}^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

3. Statistika
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

Nechť $\perp\!\!\!\perp\{X_1, \ldots, X_n\} \simeq A(\theta)$ a výběrový průměr $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Pak platí

Statistika $U = \frac{\overline{X}-\theta}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}\sqrt{n} \overset{A}{\sim} N(0,1)$

Nechť $\perp\!\!\!\perp\{X_1, \ldots, X_n\} \simeq Po(\theta)$ a výběrový průměr $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Pak platí

Statistika $U = \frac{\overline{X}-\theta}{\sqrt{\overline{X}}}\sqrt{n} \overset{A}{\sim} N(0,1)$