GRAFOVÉ ALGORITMY

2010/2011 - 1. termín

1. Minimální doplnění na silně souvislý graf

Je dán orientovaný graf $G = (V, E)$. Množina hran $F \subseteq V \times V$ je jeho **doplněním**, je-li graf $(V, E \cup F)$ silně souvislý. Úkolem je najít doplnění minimální kardinality.

Pro $v \in V$ označíme $[v]$ silně souvislou komponentu obsahující vrchol v. Definujeme **faktorový** graf $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$, kde

$$V^{SCC} = \{\, [v] \mid v \in V \,\}, \quad E^{SCC} = \{\, ([u], [v]) \mid (u, v) \in E,\ [u] \neq [v] \,\}$$

Zvolme zobrazení α přiřazující každé komponentě reprezentanta, neboli $\alpha : V^{SCC} \to V$ splňující $[\alpha([v])] = [v]$.

a) Nechť F je minimální doplnění grafu G. Pak pro lib. $(u, v) \in F$ je $[u] \neq$ ...... a pro různá (u, v), $(u', v') \in F$ je $([u], [v]) \neq$ .... Je tedy $\{\, ([u], [v]) \mid (u, v) \in F \,\}$ doplněním grafu G^{SCC} mohutnosti ....

b) Naopak, je-li H doplnění grafu G^{SCC} bez smyček, je

.... doplněním grafu G stejné mohutnosti.

Tedy obecný problém je převeden na problém hledání minimálního doplnění acyklického grafu. Vrchol bez výstupních hran označíme **stok**, vrchol bez vstupních hran **zdroj**. Vrchol, který je zároveň stok i zdroj nazveme **izolovaný**. Nechť v částech c) – j) je G acyklický bez izolovaných vrcholů, $|V| = n \geq 2$, $|E| = m$, s množinou zdrojů S a množinou stoků T, $|S| = s \geq 1$, $|T| = t \geq 1$.

c) Lze předpokládat, že $s \leq t$, jinak bychom graf G nahradili

....

Níže bude podán algoritmus, který najde $r \leq s$, označí prvky množiny S symboly $v_1, \ldots, v_s$ a prvky množiny T symboly $w_1, \ldots, w_t$ tak, aby platilo :

(i) pro každé $i = 1, \ldots, r$ existuje cesta z v_i do w_i; tyto dvojice (v_i, w_i) názýváme **páry**,

(ii) pro každé $i = r + 1, \ldots, s$ existuje $j \in \{1, \ldots, r\}$ a cesta z v_i do w_j,

(iii) pro každé $j = r + 1, \ldots, t$ existuje $i \in \{1, \ldots, r\}$ a cesta z v_i do w_j.

Nechť $S = \{a_1, \ldots, a_s\}$, $T = \{b_1, \ldots, b_t\}$.

Algoritmus 1 :

1. Pro $i = 1, \ldots, s$ vedeme z a_i cestu. Vrcholy na ní označujeme symbolem i. Jsou dvě možnosti :

a) narazíme na vrchol již označený; ten nepřeznačujeme a zvyšujeme i.

b) skončíme ve vrcholu $b_j \in T$; pak prohlásíme (a_i, b_j) za nový pár a zvýšíme i.

2. Nyní si všímáme neoznačených prvků z T. Postupně z každého takového, řekněme b_k, vedeme zpětnou cestu. Navštíveným neoznačeným vrcholům dáváme značku k'. Jsou tři možnosti :

2a) narazíme na vrchol se značkou i a a_i je v nějakém páru; bereme další neoznačený prvek z T,

2b) narazíme na vrchol se značkou i a a_i není v žádném páru; pak

(otázka d)) ....

2c) narazíme-li na vrchol se značkou j', bereme další neoznačený prvek z T.

3. Vzniklé páry nechť jsou $(v_1, w_1), \ldots, (v_r, w_r)$, zbývající prvky z S resp. T označíme symboly $v_{r+1}, \ldots, v_s$ resp. symboly $w_{r+1}, \ldots, w_t$ libovolně.

e) Složitost algoritmu je ...., neboť každé hrany si všímáme

.... a ....

f) K čemu bylo dobré předpokládat acykličnost ? ....

Algoritmus 2 :

Klademe

$$F = \{\ (w_1, v_2), \ldots, (w_{r-1}, v_r), \underbrace{(w_r, w_{s+1}), (w_{s+1}, w_{s+2}), \ldots, (w_{t-1}, w_t), (w_t, v_1)}_{\text{jen } (w_r, v_1) \text{ pro } s=t},$$

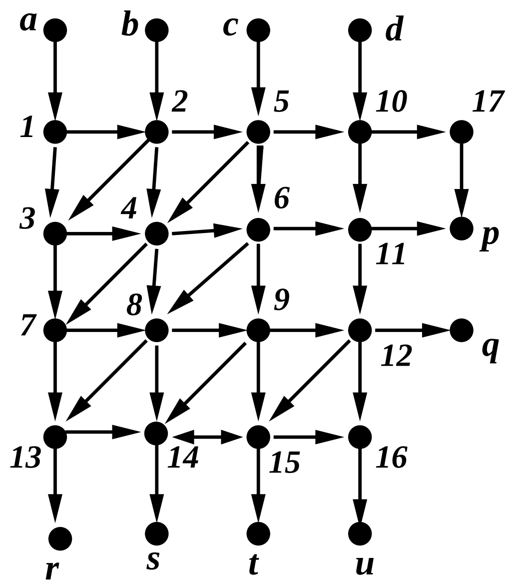
$$(w_{r+1}, v_{r+1}), \ldots, (w_s, v_s)\ \}\ .$$

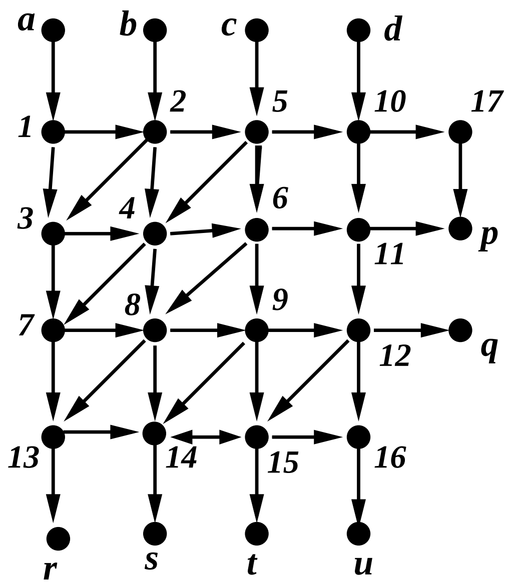
Uvažme uzavřenou cestu Q v $(V, E \cup F)$:

$$Q = (\underbrace{v_1, \ldots, w_1}_{\text{z párování}}, \underbrace{v_2, \ldots, w_2}_{\text{z párování}}, \ldots, \underbrace{v_r, \ldots, w_r}_{\text{z párování}}, \underbrace{w_{s+1}, \ldots, w_t}_{\text{nic pro } s=t}, v_1)\ .$$

g) Vše demonstrujte na následujícím grafu. Uveďte všechny páry, připište označení $v_1, \ldots, w_1, \ldots$ a přikreslete hrany z F. Kvůli jednoznačnosti dáváme přednost vrcholům, které jsou dříve v uspořádání

$$a < \ldots < d < 1 < 2 < \ldots < 17 < p < \ldots < u\ .$$





Ukážeme, že $(V, E \cup F)$ je silně souvislý :

Skutečně, lib. $u \in V$ mimo Q lze na Q napojit : v G existuje cesta z u do nějakého w_j. Je-li $j \in \{1, \ldots, r, s+1, \ldots, t\}$ jsme hotovi. V opačném případě použijeme novou hranu (w_j, v_j) a podmínku (iii).

h) Dále pro lib. takové u vede z Q do u cesta :

....

....

i) Máme $|F| =$ ....

j) Ukažte, že naše doplnění je minimální

....

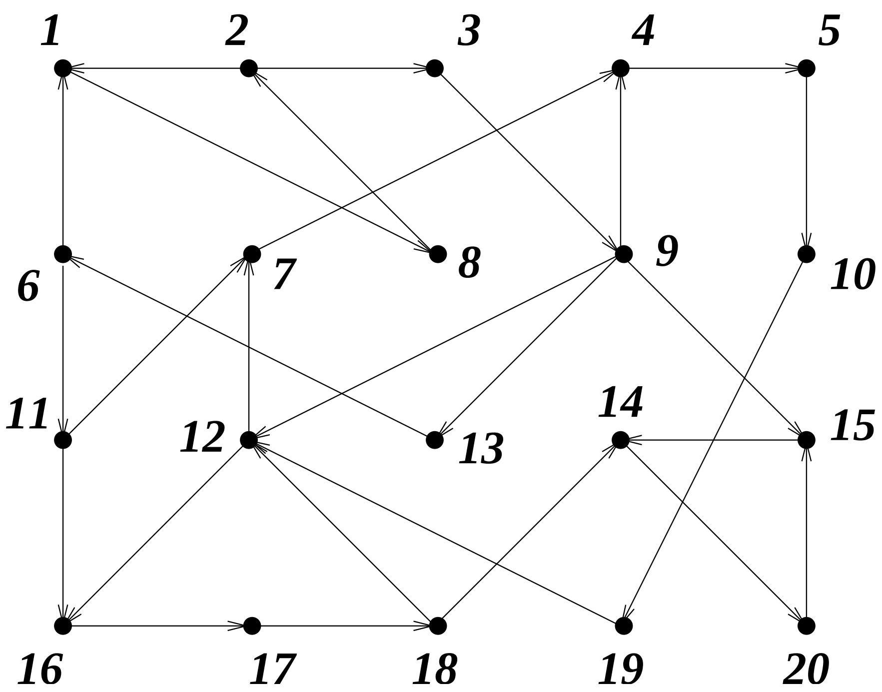
....

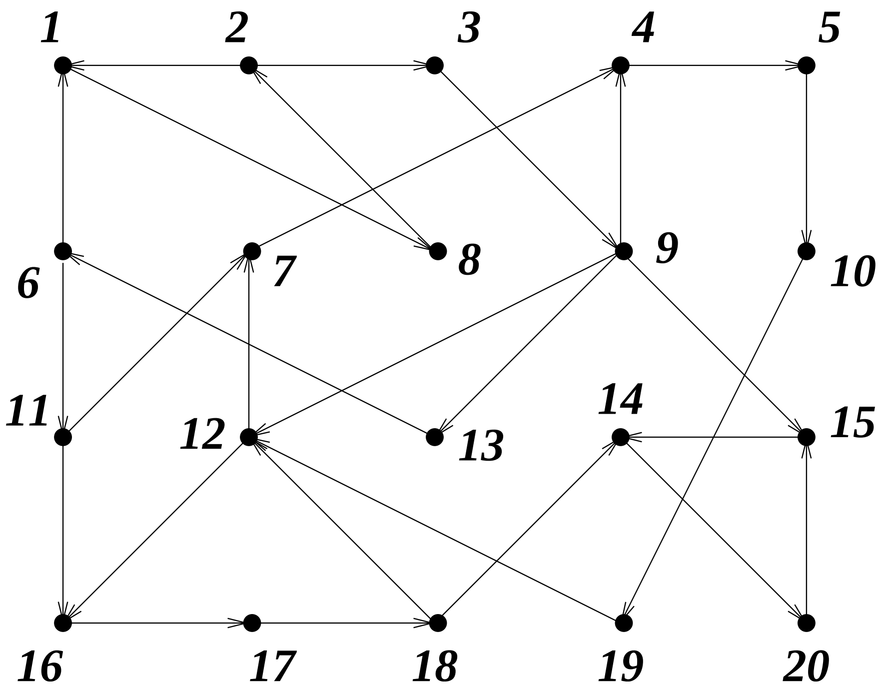
k) Graf složený z p izolovaných vrcholů má minimální doplnění z .... hran; jak vypadá ? ....

l) Konečně, nechť acyklický graf má p izolovaných vrcholů, $s \geq 1$ zdrojů a $t \geq s$ stoků. Takový graf má minimální doplnění z .... hran; jak vypadá ? ....

2. Silně souvislé komponenty

Orientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, \ldots, 20\}$ je dán seznamy sousedů :
1 : 8
2 : 1,3
3 : 9
4 : 5
5 : 10
6 : 1,11
7 : 4
8 : 2
9 : 4,12,13,15
10 : 19
11 : 7,16
12 : 7,16
13 : 6
14 : 20
15 :
16 : 17
17 : 18
18 : 12,14
19 : 12
20 : 15
Obrázek :





a) Aplikujte na graf G průzkum do hloubky. Přitom každý seznam sousedů procházíme zleva a seznam seznamů shora. Nakreslete příslušný les i s časy objevení a ukončení jednotlivých vrcholů.

b) Připravte si seznamy sousedů pro transponovaný graf. Využijte přitom řádky výše uvedeného seznamu pro G. Nechť položky v každém řádku jsou uspořádány rostoucím způsobem.

c) Dokončete algoritmus pro hledání silně souvislých komponent. Nakreslete příslušný les a v diagramu výše vyznačte komponenty.

d) Uveďte příslušný faktorový graf.