1. **Definujte jevové pole a uveďte nějaký příklad jevového pole. Vyberte nějaký jev z vámi uvedeného příkladu a slovně jej interpretujte.**

   Mějme neprázdnou množinu Ω a neprázdný systém podmnožin *A*, pro který platí:
   a) $\Omega \in A$
   b) $\mathrm{A} \in A$ -> $\overline{\mathrm{A}} \in A$ //patří tam i opačný jev
   c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A_n} \in A$ //aditivita – sloučení všech jevů
   pak *A* nazýváme jevovou algebrou nad Ω, dvojici (Ω,*A*) nazýváme **jevové pole**.

   Česky: jevové pole je množina náhodných jevů (systém podmnožin základního systému Ω) s těmito vlastnostmi: pro každý náhodný jev A, patří do jevového pole i jev opačný a patří tam i sloučení všech jevů.

   Př:
   Prostor elementárních jevů: Ω = „hlava“, „orel“
   Elementární jevy: ω_1 = „hlava“, ω_2= „orel“
   Jevová algebra: A={prázdná množina, ω_1, ω_2, Ω}
   A = prázdná množina = nepadne „hlava“ ani „orel“
   B= ω_1 = padne „hlava“
   C = ω_2 = padne „orel“
   D = Ω = padne „hlava“ nebo „orel“

2. **Nechť (Ω, *A*) je jevové pole. Uveďte axiomatickou definici pravděpodobnosti P na (Ω, *A*). Uveďte alespoň čtyři vlastnosti pravděpodobnosti P.**
   Nechť (Ω, *A*) je jevové pole a P je množinová funkce definovaná nad *A* s vlastnostmi:
   a) P(Ω) = 1 tj. P je **normovaná**
   b) Pro $\forall\ \mathrm{A} \in A\ je\ P(\mathrm{A}) \geq 0$ tj. P je **nezáporná**
   c) Je-li $\{\mathrm{A_n}\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$posloupnost náhodných jevů, které jsou po dvou neslučitelné pak $(\bigcup_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{A_n})$ = $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A_n})$ tj. P je **aditivní**.
   Funkci *P* nazýváme pravděpodobnostním prostorem a trojici (Ω*, P, A*) pravděpodobnostním prostorem.

   Česky: Pravděpodobnost P(A) náhodného jevu A je reálná funkce definovaná na jevovém poli Ω s vlastnostmi… viz nahoře.

   Vlastnosti pravděpodobnosti:
   P(∅) = 0
   P(A ∪ B) = P(A) + P(B), když průnik je prázdný, jinak:
   P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B)
   P(A −B) = P(A) - P(B)
   0 ≤ P(A) ≤ 1
   P($\overline{\mathrm{A}}$) = 1 –P(A)
   …

3. **Napište definici klasické pravděpodobnosti (klasický pravděpodobnostní prostor). Uveďte nějaký příklad klasického pravděpodobnostního prostoru a popište pravděpodobnosti vybraných jevů.**
   Ω je konečná množina elementárních jevů.

A je systém všech podmnožin množiny Ω.
Pravděpodobnost libovolného jevu A = { ω_1, ω_2, ω_3…} ∈ A je rovna P(A) = $\sum_{j=1}^{k} P(\omega_{i_j})$, a přitom platí $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i)$ = 1.
Jestliže platí $P(\omega_i) = \frac{1}{2}$ mluvíme o klasickém pravděpodobnostním pokusu, ve kterém platí P(A) = $\frac{|A|}{|\Omega|}$, kde |A| značí počet elementárních jevů v A.

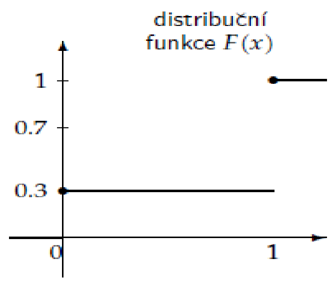
Česky: Jestliže základní prostor Ω je konečný nebo spočetný (tj. elementární jevy lze uspořádat do posloupnosti) tak pak pro pravděpodobností prostor Ω tvořený *n* stejně pravděpodobnými elementárními jevy {ω} je P(A) = m/n, kde m je počet elementárních jevů {ω}, z nichž sestává náhodný jev A.

Př:
Prostor elementárních jevů: Ω = {„hlava“, „orel“} konečná, velikost = 2
Elementární jevy: ω_1 = „hlava“, ω_2= „orel“
Jevová algebra: A={prázdná množina, ω_1, ω_2, Ω}
Model spravedlivé mince:
A = prázdná množina = nepadne „hlava“ ani „orel“ P($\frac{|\emptyset|}{|\Omega|}$) = 0/2 = 0
B= ω_1 = padne „hlava“ P(B) = 1/2
C = ω_2 = padne „orel“ P(C) = 1/2
D = Ω = padne „hlava“ nebo „orel“ P(D) = P(|Ω | / |Ω|) = 2/2 = 1

4. **Napište definici distribuční funkce náhodné veličiny X na pravděpodobnostním prostoru (Ω, A, P). Uveďte alespoň pět vlastností distribuční funkce.**
Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru (Ω, A, P). Pak funkci F(x) = P(X ≤ x), kde x náleží R, nazýváme distribuční funkcí náhodné veličiny X.

Vlastnosti:
F je neklesající. F je zprava spojitá.
$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
0 ≤ F(x) ≤ 1 pro x náležící R
F má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.
$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ pro $x_{1,2}$ náležící R a $x_1 < x_2$

5. **Definujte a nakreslete distribuční funkci náhodné veličiny s alternativním rozdělením A(θ). Napište střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny.**
Uvažujeme náhodný pokus, který může skončit s pravděpodobností θ ∈ (0,1) „úspěchem“ a s pravděpodobností 1 – θ „neúspěchem“.
E(X) = θ
D(X) = θ (1- θ)



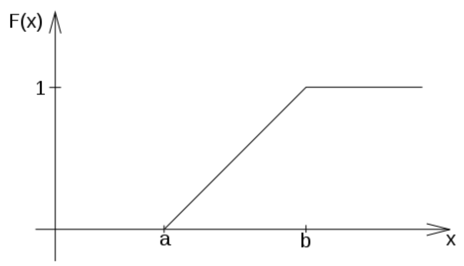
6. **Definujte binomické rozdělení pravděpodobnosti Bi(n, θ). Napište střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny. Uveďte příklad tohoto rozdělení.**
   Binomické rozdělení je posloupnost *n* nezávislých alternativních pokusů typu úspěch/neúspěch s pravděpodobností úspěchu θ ∈ (0,1) pro každý pokus. X je náhodná veličina udávající počet úspěchů v *n* pokusech.
   E(X) = n θ
   D(X) = n θ (1- θ)
   Příklad může být hod *n*-krát hod kostkou, kde chceme hodit 6.

7. **Definujte Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti P o(λ). Napište střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má Poissonovo rozdělení.**
   Jestliže M = {1,2,3…} a pravděpodobnostní funkce je tvaru
   $$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & x = 0,1,2,\dots, \quad \lambda > 0 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$
   Pak značíme toto rozložení jako Poissonovo.
   Rozdělení popisuje výskyt řídkých jevů za určitou jednotku času, prostoru… Parametr λ je očekávaný počet výskytů za jednotku.

   E(X) = λ
   D(X) = λ
   Příklad: počet hovorů na telefonní lince za časovou jednotku, počet havárií za jednotku času.

8. **Definujte geometrické rozdělení pravděpodobnosti Ge(θ). Uveďte příklad tohoto rozdělení.**
   Uvažujeme nekonečnou posloupnost nezávislých alternativních pokusů typu úspěch/neúspěch s pravděpodobností úspěchu θ ∈ (0,1) pro každý pokus. Náhodná veličina X udává počet úspěchů před prvním neúspěchem.
   Pravděpodobní funkce je ve tvaru
   $$p(x) = \begin{cases} (1-\theta)^x\theta & x = 0,1,2,\dots, \quad \theta \in (0,1) \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$
   Příklad: Házejme opět kostkou, ale nyní přestaneme házet v okamžiku, kdy padne 6. Jaká je pravděpodobnost toho, že 6 padne nejpozději ve třetím hodu?

9. **Definujte rovnoměrné (spojité) rozdělení pravděpodobnosti Ro(a, b). Nakreslete také distribuční funkci tohoto rozdělení.**
   Rovnoměrné rozdělení na intervalu (a,b), kde – nek < a < b < nek., má ve všech bodech daného intervalu konstantní hustotu pravděpodobnosti, kterou lze vyjádřit vztahem
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in (a,b) \\ 0 & \text{pro } x \notin (a,b) \end{cases}$$
   Mimo tento daný interval je tedy hustota pravděpodobnosti nulová.



10. **Definujte normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti N(μ, σ^2). Napište střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny s tímto rozdělením.**

Normální rozdělení pravděpodobnosti s parametry μ a σ^2, pro –nek < μ < nek a $\sigma^2 > 0$, je pro –nek < x < nek definováno hustotou pravděpodobnosti ve tvaru Gaussovy funkce:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

E(X) = μ

D(X) = σ^2

11. **Definujte exponenciální rozdělení pravděpodobnosti Ex(λ). Jaký experiment modelujeme tímto rozdělením? Stačí uvést příklad.**

Nechť jev A se vyskytuje v náhodných okamžicích a předpokládáme, že výskyty tohoto jevu v nepřekrývajících intervalech jsou nezávislé.

X … náhodná veličina udávající čas, kdy poprvé nastane sledovaný jev A.

Hustota má tento tvar:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x > 0, \\ 0 & ; x \leq 0. \end{cases}$$

Příklad: Radioaktivní rozpad.

12. **Definujte střední hodnotu diskrétní náhodné veličiny X a napište některé její základní vlastnosti (alespoň 4).**

Nechť X je náhodná veličina definovaná na (Ω, A, P) a nechť existuje integrál $\int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$ nazýváme střední hodnotou náhodné veličiny.

Výpočet u diskrétní: Nechť X ~(M,p) je veličina diskrétního typu: EX = $\sum_{x \in M} x\, p(x)$

Vlastnosti:

EX existuje <=> E|X| existuje.

Jestliže P(X = a) = 1 => EX = a

Existují-li EX_1, EX_2 => $E(a_1X_1 + a_2X_2) = a_1EX_1 + a_2EX_2$

Existují-li EX_1, EX_2 a platí $X_1 <= X_2$ => $EX_1 <= EX_2$

Nechť P(X >= 0) =1 => EX >=0

13. **Definujte rozptyl náhodné veličiny X. Definujte také směrodatnou odchylku náhodné veli- činy X. Napište některé základní vlastnosti rozptylu (alespoň 4).**

Druhý centrální moment nazýváme rozptyl a značíme DX.

DX = $E(X - EX)^2$.

Číslo σx = $\sqrt{DX}$ nazýváme směrodatnou odchylkou.

Vlastnosti rozptylu:

DX >= 0

DX = $EX^2 - (EX)^2$

Jestliže P(X = a) =1 => DX =0

Nechť X_1, X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny, pak $D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2$
$D(a_1 + a_2X) = a_2^2\, DX$

14. Formulujte Lindebergovu – Lévyho centrální limitní větu.
Nechť $\{Xn\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých veličin se stejným rozdělením se střední hodnotou μ a nenulovým rozptylem σ^2. Potom náhodní veličiny

$$U_{\overline{X}_n} = \frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}$$

Mají asymptoticky standardizované rozdělení N(0,1).

15. Formulujte integrální Moivre – Laplaceovu větu, tj. centrální limitní větu pro binomické rozdělení.
Nechť náhodná veličina Y_n udává počet úspěchů v posloupnosti délky *n* nezávislých alternativních pokusů s pravděpodobností úspěchu *q*. Pak náhodné veličiny

$$\frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \overset{A}{\sim} N(0,1).$$

16. Definujte nestranný a asymptoticky nestranný odhad parametrické funkce γ(θ). Formulujte postačující podmínku pro to, aby odhad parametrické funkce γ(θ) byl konzistentní.
Nechť γ(θ) je daná parametrická funkce. Řekneme, že statistika T_n je odhadem **nestranným** pokud
$\forall\theta \in \Theta$ platí $E_\theta T_n = \gamma(\theta)$.
Česky: Odhad je nestranný, pokud se jeho střední hodnota rovná hledanému parametru

Asymptoticky nestranným pokud $\lim_{n\to\infty} E_\theta \mathrm{T_n} = \gamma(\theta)$
Česky: Slabší formou nestrannosti je asymptotická nestrannost, odhad je asymptoticky nestranný, pokud: $\lim_{n\to\infty} E\hat{\theta} = \theta$

Postačující podmínka konzistence:
Nechť statistika T_n je nestranný nebo asymptoticky nestranný odhad parametrické funkce γ(θ) a platí:
$\lim_{n\to\infty} D_\theta \mathrm{T_n} = 0.$
Pak je statistika T_n konzistentním odhadem parametrické funkce γ(θ).

17. Definujte 100(1 − α)% interval spolehlivosti pro parametrickou funkci γ(θ). Nechť X = (X1, . . . , Xn) T je náhodný výběr z rozdělení N(μ, σ2), kde μ a σ 2 jsou neznámé parametry. Uveďte 100(1 − α)% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.
Interval $\langle D, H\rangle$ nazveme 100(1 − α)% intervalem spolehlivosti pro parametrickou funkci γ(θ) jestliže
$P_\theta(D(X_1, \dots, X_n) \leq \gamma(\theta) \leq \mathrm{H}(X_1, \dots, X_n)) = 1 - \alpha$

Česky: Interval spolehlivosti parametrické funkce γ(θ) je takový interval, jehož hranice jsou statistiky, a který s přesností (1 − α)% pokryje skutečnou hodnotu parametrické funkce γ(θ).

100(1 − α)% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ:

$$\langle \overline{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \rangle$$

18. Definujte obecný lineární regresní model. Formulujte předpoklady tohoto modelu.

Předpokládejme, že mezi nějakými náhodnými veličinami y, x_1, ..., x_k platí lineární vztah $y = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k$, ve kterém jsou β_1, β_k neznámé parametry. Informace o neznámých parametrech budeme získávat pomocí experimentu a to tak, že opakovaně budeme měřit hodnoty veličiny *y* při vybraných hodnotách $x_1, \ldots x_k$.

Při měření vznikají chyby, což lze definovat takto:

$y = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon$, kde ε je náhodná chyba měření.

Předpoklady o chybách ε:

a) jsou nesystematické – což lze vyjádřit $EY = X\beta$

b) homogenní v rozptylu - $D\varepsilon_i = \sigma^2 > 0$

c) jednotlivé náhodné chyby jsou nekorelované – $C(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$

19. Definujte lineární regresní model pro obecnou regresní přímku. Napište matici plánu a soustavu normálních rovnic, které se řeší při odhadech neznámých parametrů.

Předpokládejme Y_i (i = 1, …, n) mají normální rozdělení $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$, kde x_i jsou dané konstanty, které nejsou všechny stejné.

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_1 x_{11} + \cdots + \beta_k x_{1k} + \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_1 x_{n1} + \cdots + \beta_k x_{nk} + \varepsilon_n \end{aligned} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}\text{(matice plánu)}} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

20. Definujte základní model a minimální submodel, které se používají při analýze rozptylu. Formulujte hypotézu, která se zde testuje.

Základní model:

Náhodné veličiny Y_{ij} se řídí modelem M:

$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$,

Pro i = 1, …, *a* a j = 1, …, n_j, přičemž ε_{ij} jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením $N(0, \sigma^2)$, μ je společná část střední hodnoty proměnné veličiny, α_i je efekt faktoru A na úrovni *i*.

Submodel:

Náhodné veličiny Y_{ij} se řídí modelem M_0:

$Y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$,

Pro i = 1, …, *a* a j = 1, …, n_j, přičemž ε_{ij} jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením $N(0, \sigma^2)$.

Na hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu které tvrdí, že všechny střední hodnoty jsou stejné oproti alternativní hypotéze, která tvrdí že alespoň jedna dvojice středních hodnot se liší.