0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
10 bodů

Uvažme systém $\mathcal{L}(\neg, \vee)$ výrokové logiky, obsahující jen negaci a disjunkci.
Definujte, co je formule systému $\mathcal{L}$.
Definujte, co je valuace (výrokových proměnných).
Definujte rozšíření valuace z výrokových proměnných na všechny formule systému $\mathcal{L}$.

Příklad 2
5 bodů

Víme, že P je predikátový symbol a f, g jsou funkční symboly. O každém z následujících výrazů rozhodněte, zda se může jednat o term, a pokud ano, napište pro něj nějakou vytvořující posloupnost:
a) x;
b) $P(x, f(x))$;
c) $f(x, f(x))$;
d) $g(x, f(x), f(f(x)))$.

Příklad 3
5 bodů

Najděte co nejkratší formuli φ systému $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$ výrokové logiky, která je ekvivalentní formuli $\big(((\neg B \rightarrow \neg A) \wedge C) \vee \neg((A \wedge \neg B) \vee C)\big)$.

Příklad 4
15 bodů

Nechť $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ označuje množinu všech přirozených čísel. Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\oplus, t\}$ s rovností, kde $\oplus$ je binární funkční a t unární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde nosičem je množina $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ všech (nekonečných) posloupností přirozených čísel, $\oplus$ se realizuje jako sčítání po složkách (tj. $(a_0, a_1, a_2, \dots) \oplus_{\mathcal{M}} (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$) a t se realizuje jako tail (tj. $t_{\mathcal{M}}((a_0, a_1, a_2, \dots)) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$).

Zadejte formuli $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{M} \models \varphi\,[e], \text{ právě když:}$$

a) [**5 bodů**] $e(x)$ je neklesající;
b) [**5 bodů**] $e(x) = (1, 0, 0, 0, \dots)$;
c) [**5 bodů**] $e(x)$ je rostoucí.

list 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ s rovností, kde P je unární predikátový symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie T jazyka $\mathcal{L}$, jejíž modely jsou právě realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$, kde množina $P_{\mathcal{M}}$:

a) má méně než 10 prvků;
b) má méně než 10 prvků nebo je nekonečná;
c) má více než 10 prvků, ale konečně mnoho;
d) má více než 10 prvků.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
15 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	1
c	funkční	0

Uvažme teorii

$$T = \{f^4(c) = c,\ \neg P(c),\ \bigvee_{i=1}^{3} P(f^i(c)),\ \forall x\big(P(f(x)) \rightarrow \big(P(x) \vee P(f(f(x)))\big)\big)\}$$

nad jazykem $\mathcal{L}$. Popište kanonickou strukturu $\mathcal{M}$ teorie T. Dokažte, že do $P_{\mathcal{M}}$ nepatří nic víc, než tvrdíte.

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 7
10 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f\}$ s rovností, kde f je unární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde nosičem je množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel, $f_{\mathcal{M}}(n) = n + 1$ pro každé nezáporné $n \in \mathbb{Z}$ a $f_{\mathcal{M}}(n) = n + 2$ pro každé záporné $n \in \mathbb{Z}$. Rozhodněte a dokažte, pro která $n \in \mathbb{Z}$ existuje formule $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ taková, že pro každé ohodnocení e platí $\mathcal{M} \models \varphi\,[e]$, právě když $e(x) = n$.