Teorie maticových her

1. Nalezněte všechny sedlové body matice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Nalezněte všechny sedlové body matice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Pro které hodnoty parametru a má matice M sedlový bod:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}?$$

4. Pro které hodnoty parametru a má matice M sedlový bod:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}?$$

5. Pro následující matici $M = (m_{ij})$ určete dolní a horní hodnotu příslušné maticové hry, tj. $\alpha = \max_i \min_j m_{ij}$, $\beta = \min_j \max_i m_{ij}$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Pro následující matici $M = (m_{ij})$ určete dolní a horní hodnotu příslušné maticové hry, tj. $\alpha = \max_i \min_j m_{ij}$, $\beta = \min_j \max_i m_{ij}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Eliminujte dominované řádky a sloupce tak, aby se matice M zredukovala na nejmenší možnou velikost:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Eliminujte dominované řádky a sloupce tak, aby se matice M zredukovala na nejmenší možnou velikost:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5/2 & 6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

9. Nechť

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jestliže hráč 2 použije smíšenou strategii $(2/5, 1/3, 4/15)$, jaká je nejlepší strategie pro hráče 1?

10. Nechť

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Vypočítejte hodnotu výplatní funkce $E((1/5, 2/5, 2/5), (1/3, 1/3, 1/3))$.

   (b) Předpokládáme-li, že hráč 1 bude i nadále používat strategii $(1/5, 2/5, 2/5)$, jaká je nejlepší strategie pro hráče 2?

11. Představte si, že jste hráč, jehož strategie jsou popsány sloupci matice typu $(3, 4)$ a který chce realizovat smíšenou strategii $\mathbf{y} = (5/12, 1/4, 1/3)$. Váš kalkulátor Vám vytvoří 8-ciferná náhodná čísla rovnoměrně rozložená na intervalu $(0, 1)$. Vysvětlete, jak byste tato čísla použili k realizaci strategie $\vec{p}$ (co možná nejpřesněji).

12. Ověřte, že

$$\mathbf{x} = (21/52, 3/13, 0, 3/52, 4/13), \quad \mathbf{y} = (5/52, 0, 11/52, 17/26, 1/26), \quad \mathbf{v} = 19/52$$

je řešením hry s maticí

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Ověřte, že

$$\mathbf{x} = (3/4, 1/4, 0), \quad \mathbf{y} = (1/2, 0, 1/2), \quad \mathbf{v} = 1/2$$

je řešením hry s maticí

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

14. Ověřte, že

$$\mathbf{x} = (0, 1/4, 1/2, 1/4) \qquad \text{a} \qquad \mathbf{y} = (1/2, 0, 1/6, 0, 1/3)$$

jsou optimálními strategiemi ve hře dané maticí

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

15. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme, že hráč 1 věří, že jeho protivník zvolil smíšenou strategii $\mathbf{y} = (1/3, 2/3)$. Existuje strategie hráče 1, která je lepší reakcí na $\mathbf{y}$ než strategie "optimální"? A pokud ano, jaká?

16. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme, že hráč 2 má tajnou, ale spolehlivou informaci, že protivník zvolil strategii $\mathbf{x} = (1/2, 1/2)$. Jak má nejlépe zareagovat?

17. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \\ -3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \\ -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Pro maticovou hru určenou maticí

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

určete cenu hry, optimální strategii pro hráče 1 a dvě optimální strategie pro hráče 2.

21. Definujme *spravedlivou* hru jako hru, jejíž cena je rovna nule. Uvažujme maticovou hru určenou maticí

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pro které hodnoty parametru a je hra spravedlivá? Kdy zvýhodňuje hráče 1 (kladná hodnota)? Kdy zvýhodňuje hráče 2 ?

22. Uvažujme maticovou hru určenou maticí

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro které hodnoty parametru a je hra spravedlivá? Kdy zvýhodňuje hráče 1 (kladná hodnota)? Kdy zvýhodňuje hráče 2 ?

23. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

25. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

26. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

27. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

28. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

29. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

30. Nalezněte řešení hry "kámen, nůžky, papír": Každý ze dvou hráčů udělá ve stejný okamžik rukou gesto označující jeden ze tří objektů z názvu hry (sevřená pěst pro "kámen" atd.). J estliže oba zvolili stejný objekt, výsledkem hry je remíza. Jinak vítěze udává následující pravidlo: "Nůžky stříhají papír, papír zakryje kámen, kámen ztupí nůžky". Cena výhry je rovna 1, cena prohry -1.

31. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

32. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

33. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

34. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

35. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

36. Nalezněte řešení maticové hry určené maticí

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

37. Máme k dispozici tři druhy výzbroje, A_1, A_2, A_3, protivník má tři druhy letadel, B_1, B_2, B_3. Naším úkolem je letadlo sestřelit, zájmem protivníka je tomu zabránit. Při použití výzbroje A_1 jsou letadla B_1, B_2, B_3 sestřelována s pravděpodobnostmi $0,9$; $0,4$; $0,2$, při použití A_2 s pravděpodobnosti $0,3$; $0,6$; $0,8$; použijeme-li A_3, jsou pravděpodobnosti $0,5$; $0,7$ a $0,2$. Nalezněte optimální strategie jednotlivých stran.

38. Strana **A** vysílá na území nepřítele **B** dva bombardovací letouny **I** a **II**. **I** letí vpředu, **II** vzadu. Jeden z nich – předem není známo který – nese pumu, druhý tvoří doprovod. Na území protivníka budou bombardovací letouny napadeny stihačkou strany **B**.

Útočí-li stihačka na letoun **II**, je ostřelována pouze jeho děly, útočí-li na přední letoun, je ostřelována děly obou. Pravděpodobnost sestřelení stihačky je v prvním případě rovna $0,3$, v druhém $0,7$. Není-li stihačka sestřelena, zničí svůj cíl s pravděpodobností 0,6.

Úkolem bombardovacích letounů je dovést pumu na cíl, úkolem stihačky je tomu zabránit, tj. sestřelit letoun nesoucí pumu.

Rozhodněte:
a) pro stranu **A**: který letoun má nést pumu;
b) pro stranu **B**: na který letoun útočit.

39. Strana **A** útočí na objekt, strana **B** jej brání. Strana **A** má dvě letadla, protivník **B** má tři protiletadlová děla. Každé letadlo je nosičem natolik mocného prostředku ničení, že ke zničení objektu stačí, aby k němu proniklo alespoň jedno letadlo. Letadla strany **A** si mohou vybrat jeden ze tří možných směrů přístupu k objektu. Protivník může nasadit libovolnou zbraň v každém ze tří směrů. Zbraň střílí pouze ve zvoleném svěrovém pásmu a s účinností 1. Strana **A** nezná, jak jsou umístěny zbraně (do kterých směrů), protivník neví, odkud přiletí letadla.

    Nalezněte optimální strategie pro stranu **A** a pro stranu **B**.

40. Modifikujte předchozí úlohu pro případ, že strana **A** může útočit ze čtyř různých směrů, strana **B** má čtyři zbraně.

41. Plukovník Blotto vede pěchotu sestávající ze čtyř pluků. Nepřátelská armáda vedená generálem Attilou je tvořena třemi pluky. Existují dvě místa, která by obě armády rády dobyly, San Juan Hill a Lookout Mountain. Oba velící důstojníci musí rozhodnout, kolik pluků poslat na jednotlivá místa. Předpokládáme, že bitva mezi dvěma skupinami skončí vítězstvím té strany, která v ní má více pluků, a remízou, mají-li v ní stejný počet pluků. Sestavte a vyřešte model této rozhodovací situace. Uvažujte přitom následující výplatní funkci: přemůže-li armáda tvořená r pluky armádu tvořenou s pluky, pak vítěz získá $s+1$ ($+1$ je zde kvůli tomu, že tím získá i danou pozici, jejíž hodnota je 1).

42. Uvažujme následující rozhodovací situaci: Dvě firmy se ucházejí o zakázky na k trzích. Potenciální výše zakázek na i-tém trhu je dána částkou s_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Firma 1 může přidělování zakázek ovlivňovat z fondů na propagaci, jejichž výše činí a peněžních jednotek. Obdobně má firma 2 na propagaci fondy ve výši b peněžních jednotek. Zakázky z i-tého trhu jsou rozděleny mezi firmy v poměru částek, přidělených firmami na propagaci na trhu i. Každá z firem chce maximalizovat celkový objem získaných zakázek. Sestavte hru v normálním tvaru, která je modelem popsané situace.

43. Uvažujme následující hru - tzv. *morra*: Hráč 1 napíše na lístek číslo 1 nebo 2. Podobně hráč 2 napíše na svůj lístek 1 nebo 2. Současně každý hráč napíše, kolik tipuje, že tvoří součet čísel napsaných na lístcích u obou hráčů. Jestliže oba hráči tipují dobře nebo špatně, je pro oba výhra nulová. Jinak ten, kdo tipuje správně, vyhrává tolik peněžních jednotek, kolik činí součet čísel napsaných na obou lístcích. Nalezněte optimální strategie v této hře.

    Vyšetřete obdobnou hru, při níž hráči mohou psát na lístky čísla 1, 2 nebo 3.