3 ANTAGONISTICKÉ HRY

3.1 ANTAGONISTICKÝ KONFLIKT

Antagonistický konflikt je rozhodovací situace, v níž vystupují dva inteligentní rozhodovatelé, kteří se po volbě svých rozhodnutí rozdělí o pevnou částku, jejíž výše nezávisí na tom, jaká rozhodnutí zvolili.

Matematickým modelem antagonistického konfliktu je **hra v normálním tvaru s konstantním součtem**:

$$\begin{gathered} \{Q = \{1,2\}; S, T; u_1(s,t), u_2(s,t)\} \\ u_1(s,t) + u_2(s,t) = \text{konst.} \quad \text{pro každé } (s,t) \in S \times T \end{gathered} \tag{3.1}$$

Definice 1. Strategie s^*, t^* se nazývají **rovnovážné** ve hře (3.1), platí-li pro každé $s \in S$ a každé $t \in T$:

$$u_1(s,t^*) \le u_1(s^*,t^*) \qquad \text{a zároveň} \qquad u_2(s^*,t) \le u_2(s^*,t^*) \tag{3.2}$$

Je-li speciálně součet ve hře (3.1) **nulový**, budeme používat značení

$$u_1(s,t) = u_2(s,t) = u(s,t);$$

model tedy bude vypadat takto:

$$\{Q = \{1,2\}; S, T; u(s,t)\} \tag{3.3}$$

Pro **rovnovážné strategie** s^*, t^* ve hře s nulovým součtem musí platit:

$$u(s,t^*) \le u(s^*,t^*) \le u(s^*,t) \qquad \text{pro všechna} \;\; s \in S, \;\; t \in T. \tag{3.4}$$

Hodnota $u(s^*,t^*)$ se nazývá **cena hry**.

Lze dokázat, že ke každé hře tvaru (3.1) s konstantním součtem lze přiřadit hru v normálním tvaru s **nulovým součtem**, která je s původní hrou **strategicky ekvivalentní**, tj. každá dvojice strategií s, t, které jsou rovnovážné v původní hře, představuje dvojici rovnovážných strategií i v příslušné hře s nulovým součtem a naopak. Přesněji:

Věta 1. *Nechť (3.1) je hra s konstantním součtem rovným K. Potom s^*, t^* jsou rovnovážné strategie ve hře (3.1) tehdy a jen tehdy, jsou-li s^*, t^* rovnovážné strategie ve hře s nulovým součtem (3.3), kde*

$$u(s,t) = u_1(s,t) - u_2(s,t).$$

3.2 MATICOVÉ HRY

Hru dvou hráčů s nulovým součtem a konečnými prostory strategií

$$S = \{s_1, s_2, \dots s_m\}, \quad T = \{t_1, t_2, \dots t_n\} \tag{3.5}$$

lze zadat pomocí **matice** A,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(s_1,t_1) & u_1(s_1,t_2) & \dots & u_1(s_1,t_l) \\ u_1(s_2,t_1) & u_1(s_2,t_2) & \dots & u_1(s_2,t_l) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1(s_k,t_1) & u_1(s_k,t_2) & \dots & u_1(s_k,t_l) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

jejíž prvky udávají hodnoty výplatní funkce prvního hráče (výplatní funkce druhého hráče má vždy opačnou hodnotu): prvek a_{ij} je roven hodnotě výplatní funkce prvního hráče, zvolil-li strategii s_i a protivník zvolil strategii t_j. Pro takto zadané hry se používá označení **maticové hry**.

Rovnovážné strategie v maticové hře

Základní myšlenka, jak nalézt optimální strategie obou hráčů, vychází z toho, že zvýšení zisku jednoho hráče je rovno zvýšení ztráty hráče druhého; chce-li nyní hráč pro sebe získat co nejvyšší zisk, usiluje zároveň o co nejvyšší ztrátu protivníka. Každý hráč proto nyní předpokládá, že jej jeho oponent chce co nejvíce poškodit a při volbě svých strategií postupuje následujícím způsobem. Pro každou svou strategii uvažuje všechny možné strategie oponenta a nalezne pro sebe nejhorší možný výsledek. Pak zvolí tu strategii, pro kterou je tento nejhorší výsledek co nejlepší – postupuje tedy cestou „nejmenšího zla“.

První hráč tedy pro každou svou strategii s_i, tj. pro každý řádek $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ matice, nalezne **minimální prvek**, který pro danou strategii představuje **minimální zaručenou výhru** bez ohledu na volbu protivníka. Pak vybere tu strategii, neboli ten řádek, kde je toto minimum nejvyšší a tím i nejvyšší zaručená výhra.

Podobně postupuje druhý hráč. Pro něj je nejhorší možností ta nejvyšší hodnota výhry prvního hráče; proto pro každou svou strategii t_i, tj. pro každý sloupec $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ matice, nalezne **maximální prvek**, který pro danou strategii představuje **maximální zaručenou prohru** bez ohledu na volbu protivníka. Potom vybere tu strategii, neboli ten sloupec, kde je toto maximum nejmenší, neboli kde je maximální prohra co nejnižší:

Hráč 2

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & \dots & t_l \end{array} \\ \textbf{Hráč 1} \; \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_k \end{array} & \begin{pmatrix} u_1(s_1,t_1) & u_1(s_1,t_2) & \dots & u_1(s_1,t_l) \\ u_1(s_2,t_1) & u_1(s_2,t_2) & \dots & u_1(s_2,t_l) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1(s_k,t_1) & u_1(s_k,t_2) & \dots & u_1(s_k,t_l) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hráč 1: $\min_{t_j} u_1(s_i, t_j) \quad \rightsquigarrow \quad$ **MAX**
Hráč 2: $\max_{s_i} u_1(s_i, t_j) \quad \rightsquigarrow \quad$ **MIN**

Zřejmě platí:

$$\max_{s_i} \min_{t_j} u_1(s_i, t_j) \le \min_{t_j} \max_{s_i} u_1(s_i, t_j) \tag{3.7}$$

Platí-li ve vztahu (3.7) rovnost, pak společná hodnota

$$u(s^*, t^*) = \max_{s_i} \min_{t_j} u_1(s_i, t_j) = \min_{t_j} \max_{s_i} u_1(s_i, t_j) \tag{3.8}$$

představuje **cenu hry** a dvojice strategií (s^*, t^*) je rovnovážným bodem.

Prvek $u(s^*, t^*)$ má tu vlastnost, že je **současně nejmenší na řádku a největší ve sloupci**, proto se nazývá **sedlový prvek matice**.

☛ ***Příklad.*** Uvažujme hru s maticí

$$\begin{array}{ccc}
 & & \textbf{Hráč 2} & & \\
 & & \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & & \\
\textbf{Hráč 1} & \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_k \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 4 & \boxed{4} & 5 \\ -4 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 8 & -1 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boxed{4} \\ -4 \\ -1 \end{array} & \min \\
 & \text{max:} & \begin{array}{cccc} 7 & 8 & \boxed{4} & 9 \end{array} & &
\end{array}$$

$$\max_{s} \min_{t} u_1(s_i, t_j) = 4 = \min_{t} \max_{s} u_1(s_i, t_j) = u_1(s_1, t_3)$$

Dvojice strategií (s_1, t_3) je rovnovážným bodem hry.

Bohužel, ne vždy sedlový prvek existuje:

☛ ***Příklad.***

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \textbf{Hráč 2} & & \\
 & & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} & & \\
\textbf{Hráč 1} & \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_k \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} & \min \\
 & \text{max:} & \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array} & &
\end{array}$$

$$\max_{s} \min_{t} u_1(s_i, t_j) = -1 < \min_{t} \max_{s} u_1(s_i, t_j) = 1$$

Podobně pro matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

V těchto případech nezbyde než zavést smíšené strategie. Uvažujme nový model dané rozhodovací situace, původně popsané maticovou hrou s maticí (3.6):

Definice 2. Mějme maticovou hru s prostory strategií (3.11) a maticí hry (3.6). Hru dvou hráčů s nulovým součtem s prostory strategií

$$\begin{aligned} S^s &= \{\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots p_m),\ p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1,\ \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{o}\} \\ T^s &= \{\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots q_n),\ q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1,\ \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{o}\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

a s výplatní funkcí

$$\pi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = \boldsymbol{p} A \boldsymbol{q}^T \tag{3.11}$$

nazveme **smíšeným rozšířením** původní maticové hry.

Prvky původních prostorů strategií S, T se nazývají **ryzí strategie**, prvky prostorů S^s, T^s, které udávají rozdělení pravděpodobností na prostoru ryzích strategií, se nazývají **smíšené strategie**.

Věta 2. Základní věta maticových her.
Smíšené rozšíření každé maticové hry má řešení v rovnovážných strategiích.

Jinými slovy, pro každou matici A existují vektory $\boldsymbol{p}^* \in S^s, \boldsymbol{q}^* \in T^s$, pro které platí:

$$\boldsymbol{p} A \boldsymbol{q}^{*T} \leq \boldsymbol{p}^* A \boldsymbol{q}^{*T} \leq \boldsymbol{p}^* A \boldsymbol{q}^T \qquad \text{pro všechna } \ \boldsymbol{p} \in S^s,\ \ \boldsymbol{q} \in T^s. \tag{3.12}$$

Ještě jinak:

Věta. Vždy existují smíšené strategie $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$, pro které

$$\pi(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) = \max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} \pi(s_i, t_j) = \min_{\boldsymbol{q}} \max_{\boldsymbol{p}} \pi(s_i, t_j)$$

Věta 3. *Rovnovážné strategie smíšeného rozšíření maticové hry se nemění, přičteme-li ke každému prvku matice hry totéž kladné nebo záporné číslo c. Cena hry s takto pozměněnou maticí je $v + c$, kde v je cena původní hry.*

3.3 GRAFICKÉ ŘEŠENÍ MATICOVÝCH HER PRO MATICE TYPU $(2, n)$

Střední hodnoty výhry hráče 1 při smíšené strategii $(p, 1-p)$ a při ryzích strategiích hráče 2:

$$g_j(p) = pa_{1j} + (1-p)a_{2j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Hledáme

$$p^* := \arg \max_{p \in \langle 0,1 \rangle} \min_{j=1,2,\ldots,n} g_j(p). \tag{3.14}$$

Nejprve budeme uvažovat funkci

$$\varphi(p) := \min_{j=1,2,\ldots,n} g_j(p). \tag{3.15}$$

Tato funkce je konkávní, po částech lineární, snadno nalezneme bod jejího maxima. Hledaná cena hry je potom rovna

$$v = \varphi(p^*) := \max_{p \in \langle 0,1 \rangle} \varphi(p) \tag{3.16}$$

a hledaná smíšená rovnovážná strategie hráče 1 je $(p^*, 1-p^*)$.

Nastává-li extrém v bodě p^*, kde $g_j(p^*) = g_k(p^*) = v$ pro jednoznačně určené strategie j, k pak složky smíšené rovnovážné strategie hráče 2 s indexy různými od j, k jsou rovny nule. Složky, které mohou být nenulové, získáme vyřešením soustavy

$$a_{1j}q_j + a_{1k}q_k = v, \qquad q_j + q_k = 1, \quad q_j \geq 0, \quad q_k \geq 0, \tag{3.17}$$

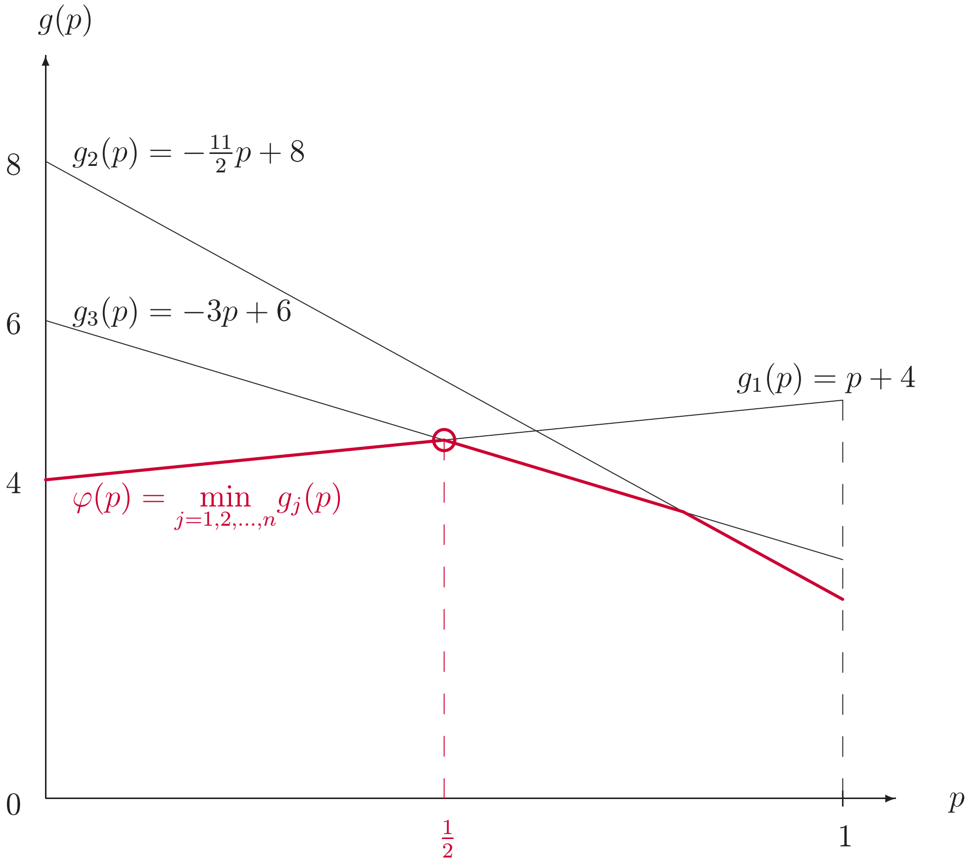
nebo

$$a_{2j}q_j + a_{2k}q_k = v, \qquad q_j + q_k = 1, \quad q_j \geq 0, \quad q_k \geq 0. \tag{3.18}$$

☛ ***Příklad***. Grafické určení rovnovážných strategií pro hru s maticí

$$\begin{pmatrix} 5 & 5/2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} g_1(p) &= 5p + 4(1-p) = p + 4 \\ g_2(p) &= \frac{5}{2}p + 8(1-p) = -\frac{11}{2}p + 8 \\ g_3(p) &= 3p + 6(1-p) = -3p + 6 \end{aligned}$$



Grafické řešení antagonistické hry

Funkce $\varphi(p)$ nabývá svého maxima v bodě $p = \frac{1}{2}$, hodnota tohoto maxima je

$$v(M) = 4.5.$$

Vyřešením soustavy rovnic

$$5q_1 + 3q_3 = 4.5, \qquad q_1 + q_3 = 1, \quad q_1 \geq 0, \quad q_3 \geq 0,$$

získáme $q_1 = 0.75$, $q_2 = 0.25$.

Rovnovážný bod je tedy

$$\boldsymbol{p}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \boldsymbol{q}^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

3.4 OBECNÉ ŘEŠENÍ MATICOVÝCH HER – LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

Uvažujme maticovou hru s maticí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

a smíšené strategie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= (p_1, p_2, \dots, p_m), \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1, \quad p_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ \boldsymbol{q} &= (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1, \quad q_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že všechny prvky matice A jsou kladné (Pokud by nebyly, mohli bychom ke všem prvkům matice přičíst dostatečně vysokou kladnou konstantu c, čímž se podle věty 3 z hlediska strategií nic nezmění).

Postup je podobný, jako v případě hledání ryzích rovnovážných strategií.

První hráč hledá pro libovolné, ale v tuto chvíli pevné $\boldsymbol{p}$ svou **minimální zaručenou výhru** h.

Uvažujme

$$h = \min_{\forall j} \{a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \dots + a_{mj} p_m\} \,. \tag{3.20}$$

Zřejmě je

$$h \leq a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \dots + a_{mj} p_m \text{ pro všechna } \ j \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{3.21}$$

Pro každé j udává výraz vpravo očekávanou výhru prvního hráče při jeho smíšené strategii $\boldsymbol{p}$ a ryzí strategii t_j druhého hráče. Očekávaná hodnota výhry $\pi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ pro smíšenou strategii $\boldsymbol{q}$ druhého hráče je pak lineární kombinací těchto hodnot s koeficienty $q_1, q_2, \dots, q_n$, jejichž součet je roven 1. Snadno si můžeme uvědomit, že nerovnost (3.21) zůstane zachována, bude-li na pravé straně uvedená lineární kombinace:

$$\begin{array}{rcl} q_1\, h & \leq & q_1(a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \dots + a_{m1} p_m) \\ q_2\, h & \leq & q_2(a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \dots + a_{m2} p_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ q_n\, h & \leq & q_n(a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + \dots + a_{mn} p_m) \\ \hline \underbrace{(q_1 + q_2 + \dots + q_n)}_{1} h & \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = \pi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \\ h & \leq & \pi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \end{array}$$

Hodnota h je proto minimální zaručenou výhrou hráče 1, ať již jeho protivník zvolí jakoukoli ryzí či smíšenou strategii (vzhledem k (3.20) je h největší číslo splňující poslední nerovnost).

Nerovnosti (3.21) vydělme hodnotou h

$$1 \le a_{1j}\frac{p_1}{h} + a_{2j}\frac{p_2}{h} + \cdots + a_{mj}\frac{p_m}{h}$$

a označme

$$y_i = \frac{p_i}{h}\ ; \qquad \text{zřejmě platí:} \quad y_1 + y_2 + \cdots + y_m = \frac{1}{h}\ .$$

Obdržíme nerovnost

$$1 \le a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m\ . \tag{3.22}$$

Maximalizovat minimální zaručenou výhru znamená maximalizovat h, tj.

Minimalizovat

$$\frac{1}{h} = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

při omezeních

$$1 \le a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m\ , \qquad j = 1, 2, \ldots, n\ . \tag{3.23}$$

To je přesně **duální úloha lineárního programování,** která nám jako výsledek poskytne příslušnou strategii $\boldsymbol{p}$.

Pro druhého hráče je postup analogický. Druhý hráč hledá h a $\boldsymbol{q}$ tak, aby

$$h \ge a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \cdots + a_{in}q_n \qquad \text{pro všechna} \ \ i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{3.24}$$

přičemž opět $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1, q_j \ge 0$ pro všechna $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Vydělme nerovnost(3.24) hodnotou h

$$1 \ge a_{i1}\frac{q_1}{h} + a_{i2}\frac{q_2}{h} + \cdots + a_{in}\frac{q_n}{h}$$

a označme

$$x_j = \frac{q_j}{h}\ ; \qquad \text{zřejmě platí:} \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{h}\ .$$

Obdržíme nerovnost

$$1 \ge a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n\ . \tag{3.25}$$

Minimalizovat h tedy znamená:

maximalizovat

$$\frac{1}{h} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

při omezeních

$$1 \ge a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, m\ . \tag{3.26}$$

To je odpovídající **primární úloha lineárního programování** (aby h byla cena hry, je třeba, aby to v obou případech bylo totéž číslo).