

2. vnitrosemestrální písemka – MB103 – podzim 2019 – 28. 11.

SKUPINA — A

Na řešení je 60 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3.5 bodu) Podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, \ z \leq 6, \ z \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\},$$

je rotační oblast (tento fakt nedokazujte).

- Určete osu rotace a načrtněte průnik množiny M s rovinou $y = 0$.
- Určete objem oblasti M .

2. (4.5 bodu)

- Popište všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 4y = 0$.
- Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 4y = 8(x - 1)^2$.
- Určete řešení rovnice $y'' + 3y' - 4y = 8(x - 1)^2$ splňující počáteční podmínky $y(0) = -\frac{13}{4}$ a $y'(0) = 0$.

3. (2 body) Máme tři urny s míčky:

- v urně I. je jeden černý, dva bílé a tři červené míčky,
- v urně II. je jeden černý, jeden bílý a dva červené míčky,
- v urně III. je dva černé, dva bílé a dva červené míčky.

Náhodně vybereme jednu z těchto urn a z ní tři míčky (bez vracení). Určete pravděpodobnost, že byla vybrána druhá urna, jestliže tři vybrané míčky byly různých barev.

2. vnitrosemestrální písemka – MB103 – podzim 2019 – 28. 11.

SKUPINA — B

Na řešení je 60 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3.5 bodu) Podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 16, \ z \geq -1, \ z \leq x^2 + y^2\},$$

je rotační oblast (tento fakt nedokazujte).

- Určete osu rotace a načrtněte průnik množiny M s rovinou $y = 0$.
- Určete objem oblasti M .

2. (4.5 bodu)

- Popište všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 10y = 0$.
- Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 14x + 24$.
- Určete řešení rovnice $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 14x + 24$ splňující počáteční podmínky $y(0) = -\frac{11}{5}$ a $y'(0) = 0$.

3. (2 body) Studenti tří oborů (matematiky, fyziky a informatiky) jsou rozmístěni v učebnách A, B a C následovně:

- v učebně A jsou tři studenti matematiky, jeden student fyziky a jeden student informatiky,
- v učebně B jsou dva studenti matematiky, dva studenti fyziky a dva studenti informatiky,
- v učebně C je jeden student matematiky, dva studenti fyziky a dva studenti informatiky.

Náhodně vybereme jednu z těchto učeben a z ní tři studenty (bez vracení). Určete pravděpodobnost, že byla vybrána učebna B, jestliže tři vybraní studenti byli z různých oborů.

2. vnitrosemestrální písemka – MB103 – podzim 2019 – 28. 11.

SKUPINA — C

Na řešení je 60 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3.5 bodu) Podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, \ z \leq 3, \ z \geq -2(x^2 + y^2)\},$$

je rotační oblast (tento fakt nedokazujte).

- Určete osu rotace a načrtněte průnik množiny M s rovinou $y = 0$.
- Určete objem oblasti M .

2. (4.5 bodu)

- Popište všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 4y' - 5y = 0$.
- Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 4y' - 5y = 25(x - 1)^2$.
- Určete řešení rovnice $y'' + 4y' - 5y = 25(x - 1)^2$ splňující počáteční podmínky $y(0) = -\frac{22}{5}$ a $y'(0) = 3$.

3. (2 body) Máme tři urny s míčky:

- v urně I. je jeden černý, jeden bílý a dva červené míčky,
- v urně II. je dva černé, dva bílé a dva červené míčky,
- v urně III. je jeden černý, dva bílé a tři červené míčky.

Náhodně vybereme jednu z těchto urn a z ní tři míčky (bez vracení). Určete pravděpodobnost, že byla vybrána třetí urna, jestliže tři vybrané míčky byly různých barev.

2. vnitrosemestrální písemka – MB103 – podzim 2019 – 28. 11.

SKUPINA — D

Na řešení je 60 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3.5 bodu) Podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \quad z \geq -2, \quad z \leq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\},$$

je rotační oblast (tento fakt nedokazujte).

- Určete osu rotace a načrtněte průnik množiny M s rovinou $y = 0$.
- Určete objem oblasti M .

2. (4.5 bodu)

- Popište všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' - 8y = 0$.
- Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' - 8y = 16(x + 1)^2$.
- Určete řešení rovnice $y'' + 2y' - 8y = 16(x + 1)^2$ splňující počáteční podmínky $y(0) = -\frac{11}{4}$ a $y'(0) = -3$.

3. (2 body) Studenti tří oborů (matematiky, fyziky a informatiky) jsou rozmístěni v učebnách A, B a C následovně:

- v učebně A jsou dva studenti matematiky, dva studenti fyziky a dva studenti informatiky,
- v učebně B je jeden student matematiky, dva studenti fyziky a dva studenti informatiky,
- v učebně C jsou tři studenti matematiky, jeden student fyziky a jeden student informatiky.

Náhodně vybereme jednu z těchto učeben a z ní tři studenty (bez vracení). Určete pravděpodobnost, že byla vybrána učebna B, jestliže tři vybraní studenti byli z různých oborů.

Řešení a bodování

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

Skupina A:

1. a) [1b] Množina M je část válce s osou z o poloměrem 2, která je zespoda ohraničená paraboloidem $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ a seshora ohraničená rovinou $z = 6$. Osa rotace je osa z , [0.5b], a průnik s rovinou $y = 0$ je oblast mezi přímkami $x = -2$ a $x = 2$ zespoda ohraničená parabolou $z = \frac{1}{2}x^2$ a seshora ohraničená přímkou $z = 6$, [0.5b].
- b) [2.5b] Použijeme válcové souřadnice, tj. provedeme transformaci do polárních souřadnic $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, přičemž z -tová souřadnice se nemění. Tedy budeme integrovat přes oblast nových proměnných

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 6,$$

[0.5b]. Determinant z Jacobiho matice je r , [0.5b], takže hledaný objem V je

$$\begin{aligned} V &= \iiint_M dx dy dz = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 \int_{z=\frac{1}{2}r^2}^6 r dz dr d\varphi = \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_{r=0}^2 r(6 - \frac{1}{2}r^2) dr \right) = \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{8}r^4 + 3r^2 \right]_0^2 = 2\pi \cdot 10 = 20\pi, \end{aligned}$$

[0.5b za správné pořadí integrace, 0.5b za postup integrování a 0.5b za správný výsledek].

2. a) [1b] Diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 4y = 0$ má charakteristický polynom $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda + 4)(\lambda - 1)$, [0.5b], který má kořeny -4 a 1 . Tedy řešení jsou tvaru $C_1 e^{-4x} + C_2 e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, [0.5b].
- b) [2.5b] Rovnice je $y'' + 3y' - 4y = 8(x - 1)^2$ má pravou stranu $4(x + 1)^2 = 8x^2 - 16x + 8$, což je polynom stupně dva – partikulární řešení $y_p(x)$ tedy budeme hledat ve tvaru polynomu stupně dva, [0.5b]. (Přesněji, pravá strana je tvaru $8(x^2 - 2x + 1) \cdot e^{0x}$, kde 0 není kořenem charakteristického polynomu.) Tedy $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, tj. $y_p'(x) = 2ax + b$ a $y_p''(x) = 2a$, což po dosazení do rovnice dává

$$2a + 3(2ax + b) - 4(ax^2 + bx + c) = -4ax^2 + (6a - 4b)x + (2a + 3b - 4c) = 8x^2 - 16x + 8,$$

[0.5b]. Porovnáním koeficientů polynomů dostaneme soustavu rovnic $-4a = 8$, $6a - 4b = -16$, $2a + 3b - 4c = 8$, [0.5b], která má řešení $a = -2$, $b = 1$, $c = -\frac{9}{4}$, [0.5b]. Tedy hledané partikulární řešení je $y_p(x) = -2x^2 + x - \frac{9}{4}$ a obecné řešení je, [0.5b],

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x - 2x^2 + x - \frac{9}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- c) [1b] Použitím počátečních podmínek pro $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x - 2x^2 + x - \frac{9}{4}$ dostaneme

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{9}{4} = -\frac{13}{4} \quad \text{a} \quad y'(0) = -4C_1 + C_2 + 1 = 0,$$

[0.5b]. Tato soustava rovnic má řešení $C_1 = 0$ a $C_2 = -1$, tedy hledané řešení je $y(x) = -e^x - 2x^2 + x - \frac{9}{4}$, [0.5b].

3. Pracujeme s jevem A , že budou vytaženy míčky různých barev, a také budeme potřebovat jevy U_i , že k výběru byla zvolena urna číslo $i \in \{1, 2, 3\}$. Chceme určit $P(U_2|A)$. Platí $P(U_i) = \frac{1}{3}$ a použijeme vztah $P(U_2|A) = \frac{P(A|U_2)P(U_2)}{P(A)}$, [0.5b]. Platí

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|U_1)P(U_1) + P(A|U_2)P(U_2) + P(A|U_3)P(U_3) = \frac{6}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{\binom{4}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{6}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

[0.5b za postup a 0.5b za výsledek]. Tedy

$$P(U_2|A) = \frac{P(A|U_2)P(U_2)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{\binom{4}{3}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{12},$$

[0.5b].

Řešení a bodování

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

Skupina B:

1. a) [1b] Množina M je část válce s osou z o poloměrem 4, která je zespoda ohraničená rovinou $z = -1$ a seshora ohraničená paraboloidem $z = x^2 + y^2$. Osa rotace je osa z , [0.5b], a průnik s rovinou $y = 0$ je oblast mezi přímkami $x = -4$ a $x = 4$ zespoda ohraničená přímkou $z = -1$ a seshora ohraničená parabolou $z = x^2$, [0.5b].

- b) [2.5b] Použijeme válcové souřadnice, tj. provedeme transformaci do polárních souřadnic $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, přičemž z -tová souřadnice se nemění. Tedy budeme integrovat přes oblast nových proměnných

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 4 \quad \text{a} \quad -1 \leq z \leq x^2 + y^2,$$

[0.5b]. Determinant z Jacobiho matice je r , [0.5b], takže hledaný objem V je

$$\begin{aligned} V &= \iiint_M dx dy dz = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^4 \int_{z=-1}^{r^2} r dz dr d\varphi = \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_{r=0}^4 r(r^2 + 1) dr \right) = \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2 \right]_0^4 = 2\pi \cdot 72 = 144\pi, \end{aligned}$$

[0.5b za správné pořadí integrace, 0.5b za postup integrování a 0.5b za správný výsledek].

2. a) [1b] Diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 10y = 0$ má charakteristický polynom $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$, [0.5b], který má kořeny -5 a 2 . Tedy řešení jsou tvaru $C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, [0.5b].

- b) [2.5b] Rovnice je $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 14x + 24$ má pravou stranu $10x^2 + 14x + 24$, což je polynom stupně dva – partikulární řešení $y_p(x)$ tedy budeme hledat ve tvaru polynomu stupně dva, [0.5b]. (Přesněji, pravá strana je tvaru $(10x^2 + 14x + 24) \cdot e^{0x}$, kde 0 není kořenem charakteristického polynomu.) Tedy $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, tj. $y_p'(x) = 2ax + b$ a $y_p''(x) = 2a$, což po dosazení do rovnice dává

$$2a + 3(2ax + b) - 10(ax^2 + bx + c) = -10ax^2 + (6a - 10b)x + (2a + 3b - 10c) = 10x^2 + 14x + 24,$$

[0.5b]. Porovnáním koeficientů polynomů dostaneme soustavu rovnic $-10a = 10$, $6a - 10b = 14$, $2a + 3b - 10c = 24$, [0.5b], která má řešení $a = -1$, $b = -2$, $c = -\frac{16}{5}$, [0.5b]. Tedy hledané partikulární řešení je $y_p(x) = -x^2 - 2x - \frac{16}{5}$ a obecné řešení je, [0.5b],

$$y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} - x^2 - 2x - \frac{16}{5}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- c) [1b] Použitím počátečních podmínek pro $y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} - x^2 - 2x - \frac{16}{5}$ dostaneme

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{16}{5} = -\frac{11}{5} \quad \text{a} \quad y'(0) = -5C_1 + 2C_2 - 2 = 0,$$

[0.5b]. Tato soustava rovnic má řešení $C_1 = 0$ a $C_2 = 1$, tedy hledané řešení je $y(x) = e^{2x} - x^2 - 2x - \frac{16}{5}$, [0.5b].

3. Pracujeme s jevem D , že budou vybráni studenti různých oborů, a také budeme potřebovat jevy U_A , U_B a U_C , že k výběru byl zvolena učebna A , B nebo C . Chceme určit $P(U_B|D)$. Platí $P(U_A) = P(U_B) = P(U_C) = \frac{1}{3}$ a použijeme vztah $P(U_B|D) = \frac{P(D|U_B)P(U_B)}{P(D)}$, [0.5b]. Platí

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|U_A)P(U_A) + P(D|U_B)P(U_B) + P(D|U_C)P(U_C) = \frac{3}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{30}, \end{aligned}$$

[0.5b za postup a 0.5b za výsledek]. Tedy

$$P(U_B|D) = \frac{P(D|U_B)P(U_B)}{P(D)} = \frac{\frac{8}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{11}{30}} = \frac{\frac{4}{30}}{\frac{11}{30}} = \frac{4}{11},$$

[0.5b].

Řešení a bodování

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

Skupina C:

1. a) [1b] Množina M je část válce s osou z o poloměrem 2, která je zespoda ohraničená paraboloidem $z = -2(x^2 + y^2)$ a seshora ohraničená rovinou $z = 3$. Osa rotace je osa z , $[0.5b]$, a průnik s rovinou $y = 0$ je oblast mezi přímkami $x = -2$ a $x = 2$ zespoda ohraničená parabolou $z = -2x^2$ a seshora ohraničená přímkou $z = -1$, $[0.5b]$.
- b) [2.5b] Použijeme válcové souřadnice, tj. provedeme transformaci do polárních souřadnic $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, přičemž z -tová souřadnice se nemění. Tedy budeme integrovat přes oblast nových proměnných

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \text{a} \quad -2(x^2 + y^2) \leq z \leq 3,$$

$[0.5b]$. Determinant z Jacobiho matice je r , $[0.5b]$, takže hledaný objem V je

$$\begin{aligned} V &= \iiint_M dx dy dz = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 \int_{z=-2r^2}^3 r dz dr d\varphi = \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_{r=0}^2 r(3+2r^2) dr \right) = \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2}r^4 + \frac{2}{3}r^3 \right]_0^2 = 2\pi \cdot 14 = 28\pi, \end{aligned}$$

$[0.5b]$ za správné pořadí integrace, $0.5b$ za postup integrování a $0.5b$ za správný výsledek].

2. a) [1b] Diferenciální rovnice $y'' + 4y' - 5y = 0$ má charakteristický polynom $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda + 5)(\lambda - 1)$, $[0.5b]$, který má kořeny -5 a 1 . Tedy řešení jsou tvaru $C_1 e^{-5x} + C_2 e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $[0.5b]$.
- b) [2.5b] Rovnice je $y'' + 4y' - 5y = 25(x-1)^2$ má pravou stranu $25(x-1)^2 = 25x^2 - 50x + 25$, což je polynom stupně dva – partikulární řešení $y_p(x)$ tedy budeme hledat ve tvaru polynomu stupně dva, $[0.5b]$. (Přesněji, pravá strana je tvaru $25(x-1)^2 \cdot e^{0x}$, kde 0 není kořenem charakteristického polynomu.) Tedy $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, tj. $y_p'(x) = 2ax + b$ a $y_p''(x) = 2a$, což po dosazení do rovnice dává

$$2a + 4(2ax + b) - 5(ax^2 + bx + c) = -5ax^2 + (8a - 5b)x + (2a + 4b - 5c) = 25x^2 - 50x + 25,$$

$[0.5b]$. Porovnáním koeficientů polynomů dostaneme soustavu rovnic $-5a = 25$, $8a - 5b = -50$, $2a + 4b - 5c = 25$, $[0.5b]$, která má řešení $a = -5$, $b = 2$, $c = -\frac{27}{5}$, $[0.5b]$. Tedy hledané partikulární řešení je $y_p(x) = -5x^2 + 2x - \frac{27}{5}$ a obecné řešení je, $[0.5b]$,

$$y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x - 5x^2 + 2x - \frac{27}{5}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- c) [1b] Použitím počátečních podmínek pro $y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x - 5x^2 + 2x - \frac{27}{5}$ dostaneme

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{27}{5} = -\frac{22}{5} \quad \text{a} \quad y'(0) = -5C_1 + C_2 + 2 = 3,$$

$[0.5b]$. Tato soustava rovnic má řešení $C_1 = 0$ a $C_2 = 1$, tedy hledané řešení je $y(x) = e^x - 5x^2 + 2x - \frac{27}{5}$, $[0.5b]$.

3. Pracujeme s jevem A , že budou vytaženy míčky různých barev, a také budeme potřebovat jevy U_i , že k výběru byla zvolena urna číslo $i \in \{1, 2, 3\}$. Chceme určit $P(U_3|A)$. Platí $P(U_i) = \frac{1}{3}$ a použijeme vztah $P(U_3|A) = \frac{P(A|U_3)P(U_3)}{P(A)}$, $[0.5b]$. Platí

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|U_1)P(U_1) + P(A|U_2)P(U_2) + P(A|U_3)P(U_3) = \frac{2}{\binom{4}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

$[0.5b]$ za postup a $0.5b$ za výsledek]. Tedy

$$P(U_3|A) = \frac{P(A|U_3)P(U_3)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4},$$

$[0.5b]$.

Řešení a bodování

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

Skupina D:

1. a) [1b] Množina M je část válce s osou z o poloměrem 1, která je zespoda ohraničená rovinou $z = -2$ a seshora ohraničená paraboloidem $z = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Osa rotace je osa z , [0.5b], a průnik s rovinou $y = 0$ je oblast mezi přímkami $x = -1$ a $x = 1$ zespoda ohraničená přímkou $z = -2$ a seshora ohraničená parabolou $z = -\frac{1}{2}x^2$, [0.5b].
- b) [2.5b] Použijeme válcové souřadnice, tj. provedeme transformaci do polárních souřadnic $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, přičemž z -tová souřadnice se nemění. Tedy budeme integrovat přes oblast nových proměnných

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \text{a} \quad -2 \leq z \leq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

[0.5b]. Determinant z Jacobiho matice je r , [0.5b], takže hledaný objem V je

$$\begin{aligned} V &= \iiint_M dx dy dz = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=-2}^{-\frac{1}{2}r^2} r dz dr d\varphi = \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_{r=0}^1 r(-\frac{1}{2}r^2 + 2) dr \right) = \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{8}r^4 + r^2 \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{4}\pi, \end{aligned}$$

[0.5b za správné pořadí integrace, 0.5b za postup integrování a 0.5b za správný výsledek].

2. a) [1b] Diferenciální rovnice $y'' + 2y' - 8y = 0$ má charakteristický polynom $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = (\lambda + 4)(\lambda - 2)$, [0.5b], který má kořeny -4 a 2 . Tedy řešení jsou tvaru $C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, [0.5b].
- b) [2.5b] Rovnice je $y'' + 2y' - 8y = 16(x + 1)^2$ má pravou stranu $16(x + 1)^2 = 16x^2 + 32x + 16$, což je polynom stupně dva – partikulární řešení $y_p(x)$ tedy budeme hledat ve tvaru polynomu stupně dva, [0.5b]. (Přesněji, pravá strana je tvaru $16(x + 1)^2 \cdot e^{0x}$, kde 0 není kořenem charakteristického polynomu.) Tedy $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, tj. $y_p'(x) = 2ax + b$ a $y_p''(x) = 2a$, což po dosazení do rovnice dává

$$2a + 2(2ax + b) - 8(ax^2 + bx + c) = -8ax^2 + (4a - 8b)x + (2a + 2b - 8c) = 16x^2 + 32x + 16,$$

[0.5b]. Porovnáním koeficientů polynomů dostaneme soustavu rovnic $-8a = 16$, $4a - 8b = 32$, $2a + 2b - 8c = 16$, [0.5b], která má řešení $a = -2$, $b = -5$, $c = -\frac{15}{4}$, [0.5b]. Tedy hledané partikulární řešení je $y_p(x) = -2x^2 - 5x - \frac{15}{4}$ a obecné řešení je, [0.5b],

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 - 5x - \frac{15}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- c) [1b] Použitím počátečních podmínek pro $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 - 5x - \frac{15}{4}$ dostaneme

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{15}{4} = -\frac{11}{4} \quad \text{a} \quad y'(0) = -4C_1 + 2C_2 - 5 = -3,$$

[0.5b]. Tato soustava rovnic má řešení $C_1 = 0$ a $C_2 = 1$, tedy hledané řešení je $y(x) = e^{2x} - 2x^2 - 5x - \frac{15}{4}$, [0.5b].

3. Pracujeme s jevem D , že budou vybráni studenti různých oborů, a také budeme potřebovat jevy U_A , U_B a U_C , že k výběru byl zvolena učebna A , B nebo C . Chceme určit $P(U_B|D)$. Platí $P(U_A) = P(U_B) = P(U_C) = \frac{1}{3}$ a použijeme vztah $P(U_B|D) = \frac{P(D|U_B)P(U_B)}{P(D)}$, [0.5b]. Platí

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|U_A)P(U_A) + P(D|U_B)P(U_B) + P(D|U_C)P(U_C) = \frac{8}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{8}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{30}, \end{aligned}$$

[0.5b za postup a 0.5b za výsledek]. Tedy

$$P(U_B|D) = \frac{P(D|U_B)P(U_B)}{P(D)} = \frac{\frac{4}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{11}{30}} = \frac{\frac{4}{30}}{\frac{11}{30}} = \frac{4}{11},$$

[0.5b].