МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
АДЫГЕЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Инженерно-физический факультет
Кафедра автоматизированных систем обработки информации и управления

Отчёт по практике

Дискретное преобразование Фурье.

2 курс, группа 2ИВТ

Выполнил:
_________________К. В. Рябенко
«___»____________2025 г.

Руководитель:
_________________С. В. Теплоухов
«___»____________2025 г.

Майкоп, 2025 г.

Оглавление

Теория

Рассмотрим алгоритм, который позволяет перемножить два полинома длиной n за время O(n log n), что значительно лучше времени O(n^2), достигаемого тривиальным алгоритмом умножения. Очевидно, что умножение двух длинных чисел можно свести к умножению полиномов, поэтому два длинных числа также можно перемножить за время O(n log n).

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Пусть имеется многочлен n-ой степени:

$$A(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

Не теряя общности, можно считать, что nявляется степенью 2. Если в действительности nне является степенью 2, то мы просто добавим недостающие коэффициенты, положив их равными нулю.

Из теории функций комплексного переменного известно, что комплексных корней n-ой степени из единицы существует ровно n. Обозначим эти корни через $w_{n,k}, k = 0 \ldots n-1$, тогда известно, что $w_{n,k} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$. Кроме того, один из этих корней $w_n = w_{n,1} = e^{i\frac{2\pi}{n}}$(называемый главным значением корня n-ой степени из единицы) таков, что все остальные корни являются его степенями: $w_{n,k} = (w_n)^k$.

Тогда **дискретным преобразованием Фурье (ДПФ)** (discrete Fourier transform, DFT) многочлена $A(x)$(или, что то же самое, ДПФ вектора его коэффициентов $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$) называются значения этого многочлена в точках $x = w_{n,k}$, т.е. это вектор:

$$\mathrm{DFT}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = (A(w_{n,0}), A(w_{n,1}), \ldots, A(w_{n,n-1})) =$$
$$= (A(w_n^0), A(w_n^1), \ldots, A(w_n^{n-1})).$$

Аналогично определяется и **обратное дискретное преобразование Фурье** (InverseDFT). Обратное ДПФ для вектора значений многочлена $(y_0, y_1, \ldots y_{n-1})$— это вектор коэффициентов многочлена $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$:

$$\mathrm{InverseDFT}(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

Таким образом, если прямое ДПФ переходит от коэффициентов многочлена к его значениям в комплексных корнях n-ой степени из единицы, то обратное ДПФ — наоборот, по значениям многочлена восстанавливает коэффициенты многочлена.

Применение ДПФ для быстрого умножения полиномов

Пусть даны два многочлена Aи B. Посчитаем ДПФ для каждого из них: $\mathrm{DFT}(A)$и $\mathrm{DFT}(B)$— это два вектора-значения многочленов.

Теперь, что происходит при умножении многочленов? Очевидно, в каждой точке их значения просто перемножаются, т.е.

$$(A \times B)(x) = A(x) \times B(x).$$

Но это означает, что если мы перемножим вектора $\mathrm{DFT}(A)$ и $\mathrm{DFT}(B)$, просто умножив каждый элемент одного вектора на соответствующий ему элемент другого вектора, то мы получим не что иное, как ДПФ от многочлена $A \times B$:

$$\mathrm{DFT}(A \times B) = \mathrm{DFT}(A) \times \mathrm{DFT}(B).$$

Наконец, применяя обратное ДПФ, получаем:

$$A \times B = \mathrm{InverseDFT}(\mathrm{DFT}(A) \times \mathrm{DFT}(B)),$$

где, повторимся, справа под произведением двух ДПФ понимается попарные произведения элементов векторов. Такое произведение, очевидно, требует для вычисления только $O(n)$ операций. Таким образом, если мы научимся вычислять ДПФ и обратное ДПФ за время $O(n \log n)$, то и произведение двух полиномов (а, следовательно, и двух длинных чисел) мы сможем найти за ту же асимптотику.

Ход выполнения работы

1.Подключение библиотек

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <complex>
```

Рисунок 1.

<iostream> — позволяет выводить результаты в консоль (cout) или читать входные данные (cin).

<**cmath**> — содержит математические функции (cos, sin) и константу M_PI (число π ≈ 3.14159).

<**complex**> — добавляет поддержку комплексных чисел вида a + bi, где a — действительная часть, b — мнимая.

2. Размер сигнала

```
const int N = 4;
```

Рисунок 2

❿ **Назначение:** задаёт размер входного сигнала для Дискретного Преобразования Фурье

3. Функция dft( )

```
void dft(double input[], complex<double> output[]) {
    for (int k = 0; k < N; k++) {
        output[k] = complex<double>(0, 0); // Обнуляем выход
        for (int n = 0; n < N; n++) {
            double angle = -2 * M_PI * k * n / N;
            // e^(i*angle) = cos(angle) + i*sin(angle)
            output[k] += input[n] * complex<double>(cos(angle), sin(angle));
        }
    }
}
```

Рисунок 3

1.Входные параметры:

- **input[]** — массив вещественных чисел (сигнал).
- **output[]** — массив комплексных чисел (результат DFT).
- **Возвращаемое значение**: **void** (результат записывается в **output**).

2.Внешний цикл по частотам (k)

- **k** — индекс частоты (от 0 до **N-1**).
- Каждая компонента **output[k]** инициализируется нулём (**0 + 0i**).

3.Внутренний цикл по времени (n)

n — индекс отсчёта сигнала.

- **angle** вычисляет фазу для текущей частоты **k** и времени **n**

Комплексная экспонента:

Реализуется как **complex<double>(cos(angle), sin(angle))**.

- **Накопление результата**:
- Каждый отсчёт **input[n]** умножается на комплексную экспоненту и добавляется к **output[k]**.

4. Основная функция main( )

```
int main() {
    double input[N] = {1, 0, -1, 0};
    complex<double> output[N];
    dft(input, output);
    cout << "DFT result:" << endl;
    for (int k = 0; k < N; k++) {
        cout << "X[" << k << "] = " << output[k].real() << " + " << output[k].imag() << "i" << endl;
    }
    return 0;
}
```

Рисунок 4

4.2 Входной сигнал

```
double input[N] = {1, 0, -1, 0};
```

Рисунок 5

input[N] — тестовый сигнал (можно заменить на свои данные).

4.3 Результат dft

```
complex<double> output[N];
```

Рисунок 6

output[N] — массив для хранения результатов DFT (комплексные числа).

4.4 Вычисление dft

```
dft(input, output);
```

Рисунок 7

dft(input, output) — запуск расчёта.

4.5 Вывод решения

```
    cout << "DFT result:" << endl;
    for (int k = 0; k < N; k++) {
        cout << "X[" << k << "] = " << output[k].real() << " + " << output[k].imag() << "i" << endl;
    }
    return 0;
}
```

Рисунок 8

Вывод в формате:
X[k] = Re + Im i, где:

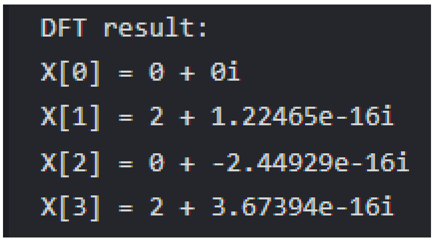
- **Re** — действительная часть,
- **Im** — мнимая часть.

Код программы:

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <complex>

using namespace std;

const int N = 4;

void dft(double input[], complex<double> output[]) {
    for (int k = 0; k < N; k++) {
        output[k] = complex<double>(0, 0);
        for (int n = 0; n < N; n++) {
            double angle = -2 * M_PI * k * n / N;
            output[k] += input[n] * complex<double>(cos(angle), sin(angle));
        }
    }
}
int main() {
    double input[N] = {1, 0, -1, 0};
    complex<double> output[N];
    dft(input, output);
    cout << "DFT result:" << endl;
```

```
    for (int k = 0; k < N; k++) {
        cout << "X[" << k << "] = " << output[k].real() << " + " << output[k].imag() << "i" << endl;
    }
    return 0;
}
```

Пример работы программы



```
DFT result:
X[0] = 0 + 0i
X[1] = 2 + 1.22465e-16i
X[2] = 0 + -2.44929e-16i
X[3] = 2 + 3.67394e-16i
```

Рисунок 9