Вопрос 11. Предельные точки. Связь с замыканием множества.

1. Опр. Проколотая окрестность точки a
$\overset{\circ}{\mathcal{U}}_a = B_r(a)\backslash\{a\}$

2. Опр. Предельная точка множества.
a - предельная точка множества A, если любая $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_a \cap A \neq \varnothing$

3. Обозначение: A' - множество предельных точек A

Полезно для понимания: Если U открытое и $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap Cl(a) = \varnothing$. От противного, $x \in U \cap Cl(A) \Rightarrow x \in U \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \in U$, $x \in Cl(A) \Rightarrow B_r(x) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow U \cap Cl(A) \neq \varnothing$ - противоречие.

4. Свойства
1) $Cl(A) = A \cup A'$
2) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$
4) A замкнутно $\Rightarrow A \supset A'$

Д-во 1) $x \in Cl(A) \Leftrightarrow B_r(x) \cap A \neq \varnothing \forall r > 0$ (*)
Пусть $x \notin A$. Тогда (*) равносильно $B_r(x)\backslash\{x\} \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow x \in A'$

Д-во 2) $x \in A' \Rightarrow B_r(x)\backslash\{x\} \cap A \neq \varnothing \Rightarrow B_r(x)\backslash\{x\} \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x \in B'$

Д-во 3) $A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A' \Rightarrow (A \cup B) \supset A' \cup B'$
Обратное включение. Пусть $x \in (A \cup B)'$ и $x \notin B' \Rightarrow (B_r(x)\backslash\{x\}) \cap (A \cup B) \neq \varnothing \Rightarrow (B_r(x)\backslash\{x\}) \cap A \neq \varnothing$ ИЛИ $(B_r(x)\backslash\{x\}) \cap B \neq \varnothing$. Второе неверно из $x \notin B'$, следовательно $x \in A'$

Д-во 4) A - замкнуто $\Rightarrow A = Cl(A) = A \cup A' \Leftrightarrow A \supset A'$

Вопрос 12. Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве.

1. Теорема. (X, d) -метр пространство $Y \subset X$. Тогда

1) $A \subset Y$ открыто в $Y \Leftrightarrow$ найдется открытое множество $G \subset X$, т.ч. $A = G \cap Y$
2) $A \subset Y$ замкнутое в $Y \Leftrightarrow$ найдется замкнутое множество $F \in X$, т. ч $A = F \cap Y$

Д-во 1) $a \in A \Rightarrow \exists r_a > 0 : B^Y_{r_a}(a)$ (т.е. шары в Y) $\subset A$. Далее

$$G := \underset{a \in A}{\cup} B^X_{r_a}(a) = \underset{a \in A}{\cup} \{x \in X : d(d, a) < r_a\} \Rightarrow$$

G - открытое (объединение любого числа открытых - открытое)
Доказать: $G \cap Y = A$
$G \supset A, Y \supset A \Rightarrow G \cap Y \supset A$. Докажем обратное включение.

$$B^X_{r_a}(a) \cap Y = B^Y_{r_a} \subset A$$

$$G \cap Y = \underset{a \in A}{\cup} (B^X_{r_a}(a) \cap Y) \subset A \Rightarrow G \cap Y \subset A$$

. Доказали для (1) "$\Rightarrow$". Теперь докажем "$\Leftarrow$"

G - открыто в Y. Доказать, что $A := G \cap Y$ - открыто в Y
$a \in A \Rightarrow a \in G$, G - открыто$\Rightarrow \exists r > 0 : B^X_r(a) \subset G \Rightarrow B^X_r(a) \cap Y = B^Y_r(a) \subset G \cap Y$, то есть A открыто в Y.

Д-во 2) A - замкнуто в $Y \Leftrightarrow Y \backslash A$ - открыто в $Y \Leftrightarrow \exists$ открытое $G \in X : Y \backslash A = G \cap Y \Leftrightarrow F := X \backslash G$ - замкнутое в X, при этом $A = Y \backslash (G \cap Y) = Y \cap (X \backslash G)$ //С первого взгляда неочевидный переход, но следует из вложенности Y и G в $X) = Y \cap F$.

Вопрос 13. Предел числовой последовательности и предел последовательности в метрическом пространтстве. Определение и основные понятия.

1. Предел числовой последовательности
$x_1, x_2, x_3... \in R$. $a = \lim x_n$ если вне любого интервала, содержащего a, содержится лишь конечное число членов последовательности.
Замечание: можно рассматривать симметричные интервалы (если есть несимметричный, для удобства его можно расширить или сузить до симметричного)

2. Предел последовательности в метрическом пространстве
(X, d) - метрическое пространство, $x_1, x_2... \in X$. $a = \lim x_n$ если вне любого шара $B_\varepsilon(a)$ содержится лишь конечное число членов последовательности.
Замечание: верно также для любого открытого множества, содержащего a
Замечание: существование предела зависит от пространства (в $R_+ x_n = 1/n$ не имеет предела)

Свойства: 1) Если $a = \lim x_n$ и из x_n выкинули какое-то число членок так, чтобы осталось бесконечное число членов, то у оставшейся последовательности тот же предел.

2) Если $a = \lim x_n$ и к последовательности добавить конечное число членов, то a - все еще предел.

3) Добавление, замена или выкидывание конечного количества членом не меняет предел и его наличие (то же самое другими словами)

4) Перестановка членов не влияет на предел последовательности

5) Если $a = \lim x_n$ и $a = \lim y_n$, то если их перемешать, то у новой последовательности тоже предел a

6) Если $a = \lim x_n$, тогда у последовательности, в которой x_n встречается с конечной кратностью, тот же предел (написать один и тот же элемент много раз подряд)

3. Опр. $a = \lim x_n$, если
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N d(x_n, a) < \varepsilon$$
4. Опр. $A \subset X, (X, d)$ - метрическое пространство
A - ограничено, если A целиком содержится в каком-нибудь шаре

5. Теорема.
1) Предел единственный
2) Если последовательность имеет предел, то она ограничена
3) $a = \lim x_n \Leftrightarrow \lim d(x_n, a) = 0$
4) Если $a = \lim x_n$ и $b = \lim y_n$, то $\lim d(x_n, y_n) = d(a, b)$

Д-во 1) Пусть $a \neq b \Rightarrow \exists B_{r_1}(a), B_{r_2}(b) : B_{r_1} \cap B_{r,2} = \varnothing$.

Вне $B_{r_1}(a)$ конечное число членов
Вне $B_{r_2}(b)$ конечное число членов
Тогда в последовательности конечное число членов. Противоречие.

Д-во 2) Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N : \forall n \geq N\ x_n \in B_1(a)$. Тогда $r := \max\{d(a, x_1), d(a, x_2), ..., d(a, x_N)\} + 1$

Д-во 3) $\lim d(x_n, a) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N d(x_n, a) < \varepsilon \Leftrightarrow \lim x_n = a$

Д-во 4) $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, b)$
$d(x_n, y_n) \leq d(a, x_n) + d(a, b) + d(b, y_n) \Rightarrow$
$|d(x_n, y_n) - d(a, b)| \leq d(x_n, a) + d(y_n, b)$ Справа каждая меньше $\varepsilon/2$, тогда слева стремится к нулю

Вопрос 14. Связь между пределами и предельными точками.

1. Теорема. a - предельная точка $A \Leftrightarrow$ найдется последовательность точек $x \neq a \in A : \lim x_n = a$. Супер очевидно из соответствующих определений, но распишу
$" \Leftarrow "$ - пусть $x_n \in A$ и $\lim x_n = a$. Тогда в $B_r(a) \backslash \{a\}$ содержится бесконечное количество точек из x_n, так как $\exists N : \forall n \geq N x_n \in B_r(a)$

$" \Rightarrow "$
$r_1 = 1 \Rightarrow \exists x_1 \in B_1(a), r_2 = \min\{1/2, d(a, x_1)\}, r_3 = \min\{1/3, d(a, x_2)\}...$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : 1/N < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N \ d(x_n, a) < 1/n \leq 1/N < \varepsilon$

2. Если $x_n \in A$ и $a = \lim x_n$, то $a \in Cl(A)$
Либо $a \in A$, тогда $a \in Cl(A)$, иначе $x_n \neq a$, тогда по теореме 1. $a \in A' \Rightarrow a \in Cl(A)$

Вопрос 15. Предльный переход в неравенствах

1. Теорема. Предельный переход в неравенстве. $x_n, y_n \in \mathbb{R}$
$x_n \le y_n \ \forall n, a = \lim x_n, b = \lim y_n \Rightarrow a \le b$

Д-во. Пусть $a > b$
$\varepsilon = \frac{a+b}{2}$
$\exists N_1 : \forall n \ge N_1 \ x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
$\exists N_2 : \forall n \ge N_2 \ y_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$
$n := \max\{N_1, N_2\}$
$y_n \le x_n$. Противоречие
Замечание - неверно для строгого знака $(-1/n, 1/n)$

Следствие 1. Если $x_n \le b \forall n, \lim x_n = a \Rightarrow a \le b$
Д-во: $y_n := b$, далее из теоремы 1

Следствие 2. Если $x_n \ge a \forall n, \lim x_n = b \Rightarrow a \le b$
Д-во: $y_n := a$, далее из теоремы 1

Следствие 3. $x_n \in [a, b], \lim x_n = c \Rightarrow c \in [a, b]$.
Следует из предыдущих

Вопрос 16. Теорема о сжатой последовательности (о двух милиционерах) и ее следствия.

1. Теорема о сжатой последовательности (о двух милиционерах)
$x_n \le y_n \le z_n\ \forall n \in N, \lim x_n = \lim z_n = a \Rightarrow \lim y_n = a$

Д-во

$$\left.\begin{array}{l} \lim x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \\ \lim z_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : z_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow x_n > a-\varepsilon, z_n < a+\varepsilon$$

При $n \ge \max\{N_1, N_2\}$ $a-\varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a+\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon$

2. Следствие $|y_n| \le z_n\ \forall n, \lim z_n = 0 \Rightarrow \lim y_n = 0$
Доказательство: $x_n := -z_n \Rightarrow x_n \le |y_n| \le z_n,\ x_n \to 0,\ z_n \to 0 \Rightarrow y_n \to 0$

Вопрос 17. Монотонные последовательности. Предел монотонной последовательности.

1. Опр. x_n монотонно возрастает(убывает), если $\forall n\ x_n \leq (\geq) x_{n+1}$
x_n монотонна, если она монотонно возрастает или монотонно убывает

2. Теорема. Если последовательность монотонно возрастает(убывает) и ограничена сверху(снизу), то она имеет предел.

Д-во. x_n такоева, что $x_1 \leq x_2 \leq x_3 ...$ и ограничена сверху. Тогда у нее есть $sup := S$. Докажем, что $\lim x_n = S$.
$\forall \varepsilon > 0\ \ S - \varepsilon$ не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_N > s - \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N\ S - \varepsilon < x_n < S + \varepsilon \Rightarrow$ S - предел

Следствие. Если последовательность монотонна, то она имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена.
$" \Leftarrow "$ По доказанной теореме
$" \Rightarrow "$ Из свойств предела

Вопрос 18. Топологическое пространство. Определение и примеры. Открытые и замкнутые множества в топологическом пространстве. Определение предела. Единственность предела.

1. Опр. X - множество. Топология, это набор подмножеств $\Omega \subset X$, называющихся открытыми, таких что:
1) $\varnothing, X$ - открытые
2) Объединение любого количество открытых - открыто
3) Пересечение конечного числа открытых - открыто

Примеры
$\{\varnothing, X\}$
$X = [0, +\infty), \Omega = (a, +\infty), a \geq 0\}$

2. Опр. Замкнутое множество - дополнение открытого

3. Опр. a - внутренняя точка множетсва A, если существует открытое множество U, т. ч. $a \in U, U \subset A$

4. Опр. Внутренность $Int\ A$ - объединение всех открытых множеств, содержащихся в A. Равносильно - множество всех внутренних точек

5. Опр. Замыкание $Cl\ A$ - пересечение всех замкнутых множеств, содержищих A

6. Опр. $a = \lim x_n$, если вне любого открытого множества, содержащего точку a находится лишь конечное число членов последовательности
$\forall U \ni a\ \exists N\ \forall n \geq N\ x_n \in U$

7. Опр. Хаусдорфовость
$\forall a, b \in X\ \exists U, V$ - открытые множества, такие что $a \in U,\ b \in V,\ U \cap V = \varnothing$.

8. Если хаусдорфовость выполняется, то предел единственный. Доказательство:
Если a, b - пределы, то $\exists U, V : a \in U,\ b \in V,\ U \cap V = \varnothing \Rightarrow$ Вне U лежит конечное количество членов, вне V тоже, тогда и в X конечное число членов. Противоречие

Вопрос 19. Векторное пространство. Пространство R^d. Скалярное произведение. Примеры. Неравенство Коши-Буняковского.

1. Опр. X - векторное пространство (над полем $\mathbb{R}$), если
Определена операции "+": $X \times X \to X$
"*": $\mathbb{R} \times X \to X$
1) Сложение коммутативно и ассоциативно
2) Существует $\overrightarrow{0}$
3) Существует обратный элемент $x + (-x) = \overrightarrow{0}$
4) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in X$
5) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

2. $R^d = \{\langle x_1, x_2, ..., x_d\rangle\} : x_i \in \mathbb{R}$
$\langle x_1, ..., x_d\rangle + \langle y_1, ..., y_d\rangle = \langle x_1 + y_1, ..., x_d + y_d\rangle$
$\alpha\langle x_1, ..., x_d\rangle = \langle \alpha x_1, ..., \alpha x_d\rangle$

3. Опр. Скалярное произведение $\langle \bullet, \bullet\rangle X \times X \to \mathbb{R}$

1) $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \overrightarrow{0}$
2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
3) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
4) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

4. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$
Доказательство:

$f(t) := \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x + ty\rangle + \langle ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t\langle y, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle \geq 0$. Это всегда неотрицательно, тогда дискриминант неположителен.

$$4t^2\langle x, y\rangle^2 - 4t^2\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Вопрос 20. Норма. Определение и примеры. Свойства. Норма в пространстве со скалярным произведением.

1. Опр. Норма $||\bullet|| : X \to \mathbb{R}$

1)$||x|| \geq 0$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \overleftarrow{0}$

2)$||\alpha x|| = |\alpha| * ||x||$

3) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

Примеры.
$X = \mathbb{R},\ ||x|| := |x|$
$X = \mathbb{R}^d,\ ||x|| := |x_1| + |x_2| + ... + |x_d|$
2. Теорема. Если $\langle \bullet, \bullet \rangle$ - скалярное произведение в X, то $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ - норма.

$||\alpha x|| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \Rightarrow ||x||^2 + 2\langle x, y \rangle + ||y||^2 \overset{?}{\leq} ||x||^2 + 2||x|| * ||y|| + ||y||^2$

$2\langle x, y \rangle \leq 2||x|| * ||y|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}$ - верно по неравенству Коши Буняковского

Свойства норм.
1)$||x-y|| = ||(x-z) + (z-y)|| \leq ||x-z|| + ||z-y||$

2) $d(x,y) := ||x-y||$ - метрика

3) $|\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x-y||$
$||x|| = ||(x-y) + y|| \leq ||x-y|| + ||y||$
$||y|| = ||(y-x) + x|| \leq ||y-x|| + ||x|| = ||x-y|| + ||x||$
$||x-y|| \geq ||x|| - ||y||$
$||x-y|| \geq -(||x|| - ||y||)$

Теорема. X - нормированное пространство. Тогда норма порождена некоторым скалярным произведением тогда и только тогда, когда
$2(||x||^2 + ||y||^2) = ||x+y||^2 + ||x-y||^2$ - тождество параллелограмма.
Доказательства не будет