Конспект лекций по математическому анализу

Храбров Александр Игоревич

Первый курс, первый семестр 2020

Оглавление

Глава 1

Введение

1 Множества

Определение 1. *Множество - набор уникальных элементов*

Множества - большие буквы $A, B, \dots$
Элементы множеств - маленькие буквы $a, b, \dots$
$x \in A - x$ пренадлежит A
$x \notin A - x$ не пренадлежит A
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{R}$ - вещественные числа
$\mathbb{R}$ - комплексные числа

Теорема 2. *Правила Де Моргана*

$$A \ \setminus \ (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$A \ \setminus \ (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

Доказательство. Докажем для первой формулы. Вторая доказывается аналогично.

$x \in A \ \setminus \ (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \text{ при всех } \alpha \end{cases} \iff x \in A \ \setminus \ B_\alpha$ при всех $\alpha \in I \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$ ■

Теорема 3. *Операции над множествами*

- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Замечание: $\triangle, \cup, \cap$ - комммутативны, ассоциативны

Определение 4. *Декартово произведение множеств* $A \times B = \{\langle a, b\rangle : a \in A; b \in B\}$

Теорема 5.

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$
$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

Доказательство. $x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \text{ для некоторых } \alpha \in I \end{cases} \Longleftrightarrow$ $x \in A \cap B_\alpha$ для некоторых $\alpha \in I \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$ ■

Определение 6. *Упорядоченная пара* $\langle a, b\rangle$ *- пара "пронумерованных" элементов*

$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Leftrightarrow$

```
((a == c) && (b == d))
```

2 Отношения

Определение 7. *Область определения:* $\delta_R = \{x \in A : \exists y \in B,$ *т.ч.*$\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}\}$

Определение 8. *Область значений:* $\rho_R = \{y \in B : \exists x \in A,$ *т.ч.*$\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}\}$

$\delta_{R-1} = \rho_R$
$\rho R - 1 = \delta_R$

Определение 9. *Композиция отношений*

$$R_1 \subset A \times B, \quad R_2 \subset B \times C, \quad R_1 \circ R_2 \subset A \times C$$

Пример

- $\langle x, y\rangle \in R$, если x — отец y
- $\langle x, y\rangle \in R \circ R$, если x — дед y
- $\langle x, y\rangle \in R^{-1} \circ R$, если x — брат y
- δR — все, у кого есть сыновья

Определение 10. *Бинарным отношением R называется подмножество элементов декартова произведения двух множеств $R \subset A \times B$*

Элементы $x \in A, y \in B$ находятся в отношении, если $\langle x, y \rangle \in R$ (то же, что xRy)

Обратное отношение $R^{-1} \subset B \times A$

Определение 11. *Отношение называется:*

- Рефлексивным, если $xRx \ \forall x$
- Симметричным, если $xRy \Longrightarrow yRx$
- Транзитивным, если $xRy, yRz \Longrightarrow xRz$
- Иррефлексивным, если $\neg xRx \forall x$
- Антисимметричным, если $xRy, yRx \Longrightarrow x = y$

Определение 12. *R является отношением*

1. Эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно
2. Нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно
3. Нестрогого полного порядка, если выполняется п. $2 + \forall x, y$ либо xRy, либо yRx
4. Строгого частичного порядка, если оно иррефлексивно и транзитивно
5. Строгого полного порядка, если выполняется п. $4 + \forall x$, у либо xRy, либо yRx

Пример

- $x \equiv y \ (mod \ m)$ — отношение эквивалентности
- X - множество, 2^x — множество всех его подмножеств
- $\forall x, y \in 2^x : \langle x, y \rangle \in R$, если $x \subsetneq y$ — отношение строгого частичного порядка
- Лексикографический порядок на множестве пар натуральных чисел — отношение нестрогого полного порядка

Определение 13. $f : A \longrightarrow B$

- инъективно, если $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- сюръективно, если $\rho_f = B$
- биективно, если f инъективно и сюръективно