КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

СПбГУ, МКН, СП, 1 курс
ЛЕКТОР: ХРАБРОВ АЛЕКСАНДР ИГОРЕВИЧ

СОСТАВИТЕЛИ:

АНДРЕЙ K-dizzled **КОЗЫРЕВ, НИКИТА** muldrik **МИТЦЕВ**
МАКСИМ maxmartynov08 **МАРТЫНОВ, СЕМЕН** SmnTin **ПАНЕНКОВ**

ОСЕНЬ 2020

Оглавление

Глава 1

Первый семестр. Первая четверть

1 Множества

Определение. Множество - набор уникальных элементов

Множества - большие буквы $A, B, \dots$
Элементы множеств - маленькие буквы $a, b, \dots$
$x \in A - x$ пренадлежит A
$x \notin A - x$ не пренадлежит A
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{R}$ - вещественные числа
$\mathbb{C}$ - комплексные числа

Теорема. *Правила Де Моргана*

$$A \ \setminus \ (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$A \ \setminus \ (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

Доказательство. Докажем для первой формулы. Вторая доказывается аналогично.
$x \in A \ \setminus \ (\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \text{ при всех } \alpha \end{cases} \iff x \in A \ \setminus \ B_\alpha$ при всех $\alpha \in I \iff x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$ ■

Теорема. *Операции над множествами*

- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Замечание - $\triangle, \cup, \cap$ - комммутативны, ассоциативны

Определение. Декартово произведение множеств $A \times B = \{\langle a, b\rangle : a \in A; b \in B\}$

Теорема.

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

Доказательство. $x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \text{ для некоторых } \alpha \in I \end{cases} \iff$

$x \in A \cap B_\alpha$ для некоторых $\alpha \in I \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$ ■

Определение. Упорядоченная пара $\langle a, b\rangle$ - пара "пронумерованных" элементов

$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Searrow$

```
    ((a == c) && (b == d))
```

2 Отношения

Определение. Область определения: $\delta_R = \{x \in A : \exists y \in B, \text{ т.ч.} \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}\}$

Определение. Область значений: $\rho_R = \{y \in B : \exists x \in A, \text{ т.ч.} \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}\}$

$\delta_{R^{-1}} = \rho_R$
$\rho_{R^{-1}} = \delta_R$

Определение. Композиция отношений

$$R_1 \subset A \times B, \quad R_2 \subset B \times C, \quad R_1 \circ R_2 \subset A \times C$$

Пример

- $\langle x, y\rangle \in R$, если x — отец y
- $\langle x, y\rangle \in R \circ R$, если x — дед y
- $\langle x, y\rangle \in R^{-1} \circ R$, если x — брат y

- δR — все, у кого есть сыновья

Определение. Бинарным отношением R называется подмножество элементов декартова произведения двух множеств $R \subset A \times B$

Элементы $x \in A, y \in B$ находятся в отношении, если $\langle x, y \rangle \in R$ (то же, что xRy)

Обратное отношение $R^{-1} \subset B \times A$

Определение. Отношение называется:

- Рефлексивным, если $xRx \; \forall x$
- Симметричным, если $xRy \Longrightarrow yRx$
- Транзитивным, если $xRy, yRz \Longrightarrow xRz$
- Иррефлексивным, если $\neg xRx \forall x$
- Антисимметричным, если $xRy, yRx \Longrightarrow x = y$

Определение. R является отношением

1. Эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно
2. Нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно
3. Нестрогого полного порядка, если выполняется п. $2 + \forall x, y$ либо xRy, либо yRx
4. Строгого частичного порядка, если оно иррефлексивно и транзитивно
5. Строгого полного порядка, если выполняется п. $4 + \forall x$, у либо xRy, либо yRx

Пример

- $x \equiv y \; (mod \; m)$ — отношение эквивалентности
- X - множество, 2^X — множество всех его подмножеств
- $\forall x, y \in 2^x : \langle x, y \rangle \in R$, если $x \subsetneq y$ — отношение строгого частичного порядка
- Лексикографический порядок на множестве пар натуральных чисел — отношение нестрогого полного порядка

Определение. Отображение $f : A \longrightarrow B$

- инъективно, если $f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2$
- сюръективно, если $\rho_f = B$
- биективно, если f инъективно и сюръективно

3 Аксиомы вещественных чисел

Определение. Вещественные числа - алгебраическая структура, над которой определены операции сложения “+” и умножения “$\cdot$” ($\mathbb{R} * \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$)

Определение. Аксиомы вещественных чисел:

A_1 Ассоциативность сложения
$x + (y + z) = (x + y) + z$

A_2 Коммутативность сложения
$x + y = y + x$

A_3 Существование нуля
$\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}\ x + 0 = x$

A_4 Существование обратного элемента по сложению
$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$

M_1 Ассоциативность умножения
$x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$

M_2 Коммутативность умножения
$xy = yx$

M_3 Существование единицы
$\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}\ x \cdot 1 = x$

M_4 Существование обратного элемента по умножению
$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$

M_A Дистрибутивность
$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Вышеперечисленные аксиомы бразуют поле

Бинарное отношение "$\leqslant$"
Аксиомы порядка, задающие отношение порядка на множестве вещественных чисел:

O_1 $x \leqslant x \quad \forall x$

O_2 $x \leqslant y$ и $y \leqslant x \Longrightarrow x = y$

O_3 $x \leqslant y$ и $y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$

O_4 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y$ или $y \leqslant x$

O_4 $x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z \quad \forall z$

O_4 $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y \Longrightarrow 0 \leqslant xy$

Теорема. *Аксиома полноты*

$A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, \forall a \in A\ \forall b \in B\ a \leqslant b$
Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b\ \forall a \in A\ \forall b \in B$

Теорема. *Принцип Архимеда*

Согласно принципу Архимеда: $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall y_{>0} \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < ny$

Доказательство.
$A = \{a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : a < ny\}, A \neq \varnothing$ т.к. $0 \in A$
$B = \mathbb{R} \setminus A$
Пусть $A \neq \mathbb{R}$, тогда $B \neq \varnothing$ Покажем, что $a \leqslant b$, если $a \in A, b \in B$
Пойдем от противного. Если $b < a < ny \Longrightarrow b < ny \Longrightarrow b \in A$ - противоречие
Таким образом, по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$
Предположим, что $c \in A$. Тогда $c < ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow c + y < (n+1)y \Longrightarrow$ $c + y \in A \Longrightarrow c + y \leqslant c \Longrightarrow y \leqslant 0$. Это противоречит условию.
Пусть $c \in B$. Так как $y > 0, c - y < c$. Так как B - дополненние A и $c - y \neq c$, $c - y \in A \Longrightarrow$ $c - y < ny \Longrightarrow c < (n+1)y \Longrightarrow c \in A$. Снова пришли к противоречию.
Значит $c \notin A, c \notin B \Longrightarrow c$ не существует $\Longrightarrow B = \varnothing \Longrightarrow A = \mathbb{R}$ ■

Следствие:

$\forall \varepsilon_{>0} \, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

Доказательство.
$x = 1, y = \varepsilon \Longrightarrow \exists n \in N : 1 < n\varepsilon$ ■

4 Принцип математической индукции

Определение. Принцип математической индукции

P_n -последовательность утверждений

1. P_1 - верно
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ из P_n следует P_{n+1}

Тогда P_n верно при всех $n \in \mathbb{N}$

Теорема. *В конечном множестве вещественных чисел есть наибольший и наименбший элемент*

Доказательство.
Докажем для максимума. Для минимума рассуждения аналогичны
Будем доказывать утверждение по индукции
Для $n = 1$ - очевидно
Переход $X_n \longrightarrow x_{n+1}$
Рассмотрим произвольное множество из n элементов $X_n = \{x_1, x_2, x_3, \dots x_n\}$, где максимальным элементом является x_i. Пусть в наше множество был добавлен элемент X_{n+1}. В таком случае, если $X_{n+1} > X_i$, то новый максимум равен X_{n+1}, иначе - максимумом по-прежнему является X_i. Таким образом, в любом конечном множестве вещественных чисел существует максимальный элемент. ■

Следствия:

1. Во всяком непустом множестве натуральных чисел есть наименьший элемент

   Доказательство.
   Пусть A - множество натуральных чисел, не содержащее наименьшего элемента. Докажем по индукции, что для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем $\mathbb{N}_n \cap A = \varnothing$
   $\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leqslant n\}$
   Для $n = 1$ утверждение очевидно.
   Переход $n \longrightarrow n + 1$
   Предположим для $\mathbb{N}_n \cap A = \varnothing$
   Тогда если для $\mathbb{N}_{n+1} \cap A \neq \varnothing$, то наименьший элемент множества A - это $n + 1$
   Значит $\mathbb{N}_{n+1} \cap A = \varnothing$ ∎

2. Во всяком конечном непустом множестве натуральных чисел есть наибольший элемент

   Доказательство.
   Из натуральных чисел строим целые. Множество чисел $A \subseteq \mathbb{Z}$ называется ограниченным сверху и имеет наибольший элемент если $\exists c > a, \forall a \in A, c \in \mathbb{Z}$ ∎

Рациональные и иррациональные числа в интервале

1. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

   Доказательство.
   Пусть $x < 0, y > 0$. Тогда $\exists r = 0 \in \mathbb{Q} : x < r < y$
   Пусть $x \geqslant 0, y > 0, \varepsilon = x - y$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$
   По принципу Архимеда найдется такое число m, что $\frac{m-1}{n} \leqslant x < \frac{m}{n}$
   Предположим, что $\frac{m-1}{n} \leqslant x < y \leqslant \frac{m}{n}$. Тогда мы получим, что $\frac{1}{n} \geqslant y - x = \varepsilon$. Пришли к противоречию
   Следовательно, $\exists m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n} < y$
   Случай $y \leqslant 0$ аналогичен предыдущему ∎

2. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то существует иррациональное число $r : x < r < y$

   Доказательство.
   $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Longrightarrow \exists R_{\in \mathbb{Q}} \in (x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}) \Longrightarrow x < R + \sqrt{2} < y$ (Предыдущий пункт) $\Longrightarrow$ r - иррациональное ∎

3. Если $x \geqslant 1$, то $\exists n \in \mathbb{N} : x - 1 < n \leqslant x$

5 Супремум и инфимум

Определение.

x - верхняя граница множества A, если $\forall a \in A : a \leqslant x$

y - нижняя граница множества A, если $\forall a \in A : y \leqslant a$

Множество ограничено снизу, если существует какая-нибудь нижняя граница

Множество ограничено сверху, если существует какая-нибудь верхняя граница

Определение.
Пусть A - ограниченное сверху множество, тогда $supA$ - наименьшая из его верхних границ

Определение.
Пусть A - ограниченное снизу множество, тогда $infA$ - наибольшая из его нижних границ

Теорема.

1. *Если $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ и A ограничено снизу, то существует единственный $infA$*
2. *Если $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ и A ограничено сверху, то существует единственный $supA$*

Доказательство.
Докажем (2)
Пусть B - множество всех верхних границ множества A, т.е. $\forall a \in A, b \in B : a \leqslant b$
Тогда по аксиоме полноты всегда найдется такой $c : a \leqslant c \leqslant b$
$c - supA$ по определению
Докажем, что c - единсвтенный
Пусть $\exists c_1, c_2 - supA$
Тогда если $c_1 < c_2$, то $c_2 \neq supA$
Если $c_1 > c_2$,то $c_1 \neq supA$
Следовательно, $c_1 = c_2 = supA \Longrightarrow supA$ - единсвтенный ■

Следствие:

1. $B \subset A, B \neq \varnothing$ и A ограничено снизу. Тогда $infB \geqslant infA$
2. $B \subset A, B \neq \varnothing$ и A ограничено сверху. Тогда $supB \leqslant supA$

Доказательство.
Докажем (1)
Пусть $a = infA$. Тогда a - нижняя граница $A \Longrightarrow \forall x \in A : a \leqslant x \Longrightarrow \forall x \in B : a \leqslant x \Longrightarrow$
a - нижняя граница $B \Longrightarrow a \leqslant infB$ ■

Замечание - Теорема неверна без аксиомы полноты

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \Longrightarrow$ в множестве рациональных чисел у A нет супремума

Теорема.

1. $a = infA \Longleftrightarrow \begin{cases} a \leqslant x \quad \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : x < a + \varepsilon \end{cases}$

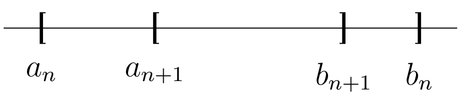
2. $b = supA \Longleftrightarrow \begin{cases} b \geqslant x \quad \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : x > b - \varepsilon \end{cases}$

Замечание

- Если A неограничено сверху, то $supA = +\infty$
- Если A неограничено снизу, то $infA = -\infty$

6 Теорема о вложенных отрезках

Теорема.
Если $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$
То $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n] \forall n \in \mathbb{N}$



Доказательство.
$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$
$a_i \leqslant b_j, \forall i, j \in \mathbb{N}$
$\forall i \leqslant j : a_i \leqslant a_j \leqslant b_j \leqslant b_i, \forall i \geqslant j : a_i \geqslant a_j \geqslant b_j \geqslant b_i$
По аксиоме полноты $\forall i, j \in \mathbb{N}\ \exists c \in \mathbb{R} : a_i \leqslant c \leqslant b_j \Longrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : a_i \leqslant c \leqslant b_i$

$\blacksquare$

Замечание

1. Теорема неверна для полуинтервалов
   Пример: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (0; \frac{1}{n}] = \varnothing$
2. Теорема неверна для лучей
   Пример: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (n; +\infty) = \varnothing$
3. Теорема неверна без аксиомы полноты
   Пример: число π
   $[3;\ 4] \supset [3,1;\ 3,2] \supset [3,14;\ 3,15] \supset \dots$
   Пересечение не содержит рациональных чисел

7 Метрические пространства и подпространства

Определение. X - множество $\rho : X \times X \longrightarrow [0; +\infty)$ - метрика(расстояние) если:

1. $\rho(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$
2. если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$

3. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$
4. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z) \quad \forall x, y, z \in X$

Примеры

1. Дискретная метрика

   $\rho(x, x) = 0$

   $\rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$

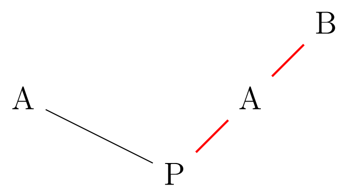
2. $\mathbb{R} \quad \rho(x, y) = |x - y|$
3. $\mathbb{R}^2$ обычное расстрояние
4. Манхэттенская метрика

   $(x', y') = A'$

   $(x, y) = A$

   $\rho(A, A') = |x - x'| + |y - y'|$

5. Французская железнодорожная метрика



Если P, A и B на луче, то $\rho(AB) = AB$

Если нет, то $\rho(A, B) = \rho(AP) + \rho(B, P)$

6. Расстояние на сфере

Определение. Метрическое пространство $(X, \rho), X$ - множество, ρ - метрика на нем

Определение. Подпространство метрического пространства.
(X, ρ) - метрическое пространство, $Y \subset X$
$(Y, \rho|_{Y \times Y})$ - подпространство метрического пространства (X, ρ), где Y - подмножество X, а $\rho|_{Y \times Y}$ - сужение ρ на $Y \times Y$

Определение. Открытый шар

центр шара

$$B\, r\, (a) := x \in X : \rho(x, a) < r; \quad r > 0$$

радиус

Определение. Замкнутый шар

$\overline{B_r}(a) := \underline{x} \in X : \rho(x, a) \leqslant r; \quad r \geqslant 0$
$B_r(a) \subset \overline{B_r}(a)$

- <u>Окрестность</u> точки a - открытый шар $B_r(a)$

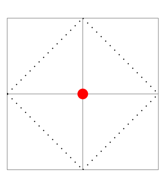
Примеры

1. Дискретная метрика на X

   $B_{1/2}(a) = a$

   $B_2(a) = X$

2. $\rho(x, y) = |x - y| \quad B_r(a) = (a - r, a + r)$
3. Манхэттенская метрика

   $B_r(a)$

Свойства

1. $B_r(a) \cap B_R(a) = B_{min\{r,R\}}(a)$
2. Если $x \neq y$, то найдется $r > 0$, такой, что $\overline{B_r}(x) \cap \overline{B_r}(y) = \varnothing$

   Доказательство.
   $r := \frac{\rho(x,y)}{3}$. Пойдем от противного
   Пусть $c \in \overline{B_r}(x) \cap \overline{B_r}(y) \Longrightarrow \begin{cases} \rho(x,c) \leqslant r \\ \rho(y,c) \leqslant r \end{cases} \Longrightarrow \rho(x,y) \leqslant \rho(x,c) + \rho(y,c) \leqslant 2r = \frac{2}{3}\rho(x,y)$ - противоречие ■

8 Открытые множества

Определение. Множество A называется открытым, если $A \subset$ метрическому пространству X и $\forall a \in A\ \exists r_{>0} : B_r(a) \subset A$

Теорема. *Свойства открытых множеств:*

1. *$\varnothing, X$ - открытые множества*
2. *Объединение любого количества открытых множеств - открытое множество*
3. *Пересечение конечного числа открытых множеств - открытое множество*
4. *Открытый шарик - открытое множество*

Доказательство.

1. $B_r(a) \subset X$; Для пустого множества нечего проверять, так как там даже точек то нет
2. $A_\alpha\ \alpha \in I$ - открытые множества. $A = \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$
   Возьмем $a \in A$. Тогда $a \in A_\beta$ для какого-то $\beta \in I \Longrightarrow A_\beta$ - открытое множество $\Longrightarrow$ $B_r(a) \subset A_\beta$ для некоторого $r_{>0} \Longrightarrow$
   $B_r(a) \subset A_\beta \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = A$
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - открытые множества. $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ Возьмем $a \in A$. Тогда $a \in A_k$ при $k = \{1, 2, \ldots, n\} \Longrightarrow B_{r_k}(a) \subset A_k$ для некоторого $r_k > 0$
   $r := min\{r_1, r_2, \ldots, r_k\} \Longrightarrow B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \Longrightarrow B_r(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = A$
4. Рассмотрим $B_R(a)$. Возьмем $b \in B_R(a)$
   $r := R - \rho(a,b) > 0$. Докажем, что $x \in B_r(b)$:
   $\rho(x,b) < r \Longrightarrow \rho(x,a) \leqslant \rho(x,b) + \rho(b,a) < r + \rho(b,a) = R$

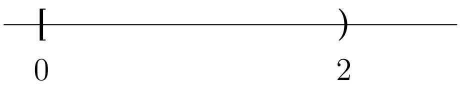
■

Замечание

В пункте №3 конечность существенна $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{1/n}(0) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n};\frac{1}{n}) = \{0\}$ *Интервал* $(-r;\ r)$

Пример

$\mathbb{R} \quad \rho(x,y) = |x-y|$
$Y = [0;\ 2)$
Шары в (Y, ρ):



$B_1^Y(0) = \{x \in [0;\ 2) : |x-0| < 1\} = [0;\ 1)$

9 Внутренние точки. Внутренность множества

Определение. (X, β) - метрическое пространство $A \subset X$
$a \in A,\ a$ - внутренняя точка множества, если $B_r(a) \subset A$ для некоторого $r > 0$ (Открытое множество - такое множество, у которого все точки внутренние)
Внутренность множества - множество всех его внутренних точек. Обозначается как $IntA$

Теорема. *Свойства внутренности:*

1. $IntA \subset A$
2. $IntA = \bigcup\{G : G \subset A$ *и* G *- открытое*$\} =: B$

   Доказательство.
   - $IntA \supset B$
   Возьмем $b \in B$. Тогда найдется открытое $G_\circ \subset A$, такое, что $b \in G_\circ \Longrightarrow$
   $\exists r_{>0}$, такой, что $B_r(b) \subset G_\circ \subset A \Longrightarrow b$ - внутренняя точка A
   - $IntA \subset B$
   Возьмем $a \in IntA \Longrightarrow a$ - внутренняя точка $\Longrightarrow$ открытое множество $B_r(a) \subset A$ для некоторого $r_{>0} \Longrightarrow a \in B_r(a) \subset A$
   $a \in B_r(a) \subset B \Longrightarrow a \in B$ ∎

3. $IntA$ *- самое большое (по включению) открытое множество, содержащееся в* A
4. $IntA$ *- открытое множество*
5. $IntA = A \Longleftrightarrow A$ *- открытое*
6. $A \subset B \Longrightarrow IntA \subset IntB$

   Доказательство. Пусть $a \in IntA \Longrightarrow B_r(a) \subset A$ для некоторого $r_{>0} \Longrightarrow a$ - внутренняя точка B ∎

7. $Int(A \cap B) = IntA \cap IntB$

Доказательство.
"$\subset$" : $A \cap B \subset A \Longrightarrow Int(A \cap B) \subset IntA$. Это следует из предыдущего пункта. Аналогично для B
"$\supset$" : Пусть $c \in IntA \cap IntB \Longrightarrow \begin{cases} c \text{ - внутренняя точка } A \\ c \text{ - внутренняя точка } B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_{r_1}(c) \subset A \\ B_{r_2}(c) \subset B \end{cases}$
для некоторых $r_1, r_2 > 0 \Longrightarrow B_r(c) \subset A \cap B$, где $r = min\{r_1,\ r_2\} \Longrightarrow$
c - внутренняя точка $A \cap B$ ■

8. *$Int(IntA) = IntA$*

   Доказательство. $IntA$ - открытое множество, а внутренность открытого множества совпадает с ним ■

10 Замкнутые множества. Замыкание множества

Определение. (X, β) - метрическое пространство $A \subset X$
$A \subset X \quad A$ - замкнутое, если $X \ \setminus \ A$ - открытое

Теорема. *Свойства замкнутых множеств:*

1. *$\varnothing, X$ - замкнутое множества*
2. *Пересечение любого количества замкнутых множеств - замкнутое множество*
3. *Объединение конечного числа замкнутых множеств - замкнутое множество*
4. *Замкнутый шарик - замкнутое множество*

Доказательство.

2. A_α $\alpha \in I$ - замкнутые множества. $A \overset{?}{\Longrightarrow} \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ - замкнутое
   $\Searrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Nearrow$
   $X \ \setminus \ A$ - открытое $\Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} (X \ \setminus \ A_\alpha) = X \ \setminus \ \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ - открытое множество
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - замкнутые множества. $\Longrightarrow X \setminus A_1, X \setminus A_2, \ldots, X \ \setminus \ A_n$ - открытые множества
   $\Longrightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$ - открытое множество
   $\bigcap\limits_{k=1}^{n} (X \setminus A_k) = X \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \Longrightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ - замкнутое
4. $\overline{B_R}(a)$ - замкнутый шар
   Докажем, что $X \ \setminus \ \overline{B_R}(a)$ - открыто

   Доказательство.
   $\overline{B_R}(a) = \{x \in X : \rho(x, a) \leqslant R\}$
   Возьмем $b \in X \ \setminus \ \overline{B_R}(a) \Longrightarrow \rho(b, a) > R$
   $r := \rho(b, a) - R$

Докажем, что $B_r(b) \subset X \ \setminus \ B_R(a) \Longleftrightarrow B_r(b) \cap \overline{B_R}(a) = \varnothing$

От противного. Пусть есть общая точка $c \in B_r(b) \cap \overline{B_R}(a) \Longrightarrow \begin{cases} \rho(c,b) < r \\ \rho(c,a) \leqslant R \end{cases} \Longrightarrow$

$\rho(c,b) \leqslant \rho(a,c) \leqslant \rho(c,b) < R + r = \rho(a,b)$ (Так как $\rho(a,c) \leqslant R$ и $\rho(c,b) < r$)
Противоречие. ■

■

Замечание

В пункте №3 конечность существенна $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [-1 + \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}] = (-1; 1)$

Интервал $(-\infty;\ -1] \cup [1; +\infty)$

Определение. Замыкание множества A - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Обозначаетя как ClA
$ClA = \bigcap \{F : F$ - замкнутое и $F \supset A\}$

Теорема.
$X \setminus ClA = Int(X \setminus A)$
$X \setminus IntA = Cl(X \setminus A)$

Доказательство.
$x \in X \setminus ClA \Longleftrightarrow x \notin ClA \Longleftrightarrow x \notin F_\circ$ - замкнутое, где $F_\circ \supset A$
$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in X \setminus F_\circ =: G_\circ \text{ - открытое} \\ G_\circ \subset X \setminus A \end{cases} \Longleftrightarrow x \in Int(X \setminus A)$ ■

Следствие:
$ClA = X \setminus Int(X \setminus A)$
$IntA = X \setminus Cl(X \setminus A)$

Теорема. *Свойства замыкания*

1. ClA *- замкнутое множество*
2. $ClA \supset A$
3. A *- замкнуто* $\Longleftrightarrow A = ClA$

   Доказательство. A - замкнуто $\Longleftrightarrow X \setminus A \Longleftrightarrow X \setminus A = Int(X \setminus A) \Longleftrightarrow$
   $A = \underbrace{X \setminus Int(X \setminus A)}_{ClA}$ ■

4. *Если* $A \subset B$, *то* $ClA \subset ClB$

   Доказательство. $A \subset B \Longleftrightarrow X \setminus A \supset X \setminus B \Longrightarrow Int(X \setminus A) \supset Int(X \setminus B) \Longrightarrow$
   $\underbrace{X \setminus Int(X \setminus A)}_{ClA} \subset \underbrace{X \setminus Int(X \setminus B)}_{ClB}$ ■

5. $Cl(A \cup B) = ClA \cup ClB$

   Доказательство. $Cl(A \cup B) = X \setminus Int(\underbrace{X \setminus (A \cup B)}_{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)}) = X \setminus Int((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) =$

   $X \setminus (Int(X \setminus A) \cap Int(X \setminus B)) = (X \setminus Int(X \setminus A) \cup (X \setminus Int(X \setminus B) = ClA \cup ClB$ ■

6. $ClClA = ClA$

   Доказательство. ClA - замкнуто + замыкание замкнутого множества - само множество ■

Теорема. $x \in ClA \iff$ *для любого* $r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \varnothing$

Доказательство. $x \in ClA \iff x \in X \setminus Int(X \setminus A) \iff x \notin Int(X \setminus A) \iff$ для любого $r > 0 : B_r(x)$ не целиком содержится в $X \setminus A \iff$ для любого $r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \varnothing$ ■

Следствие: Если $\mathcal{U}$ - открытое и $\mathcal{U} \cap A = \varnothing$, то $\mathcal{U} \cap ClA = \varnothing$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{U} \cap ClA \Longrightarrow x \in \mathcal{U}$ - открытое $\exists r > 0 \quad B_r(x) \subset \mathcal{U}$
$x \in \mathcal{U} \cap ClA \Longrightarrow x \in ClA \Longrightarrow B_r(x) \cap A \neq \varnothing \Longrightarrow \mathcal{U} \cap A \neq \varnothing$ - противоречие ■

11 Предельные точки. Связь с замыканием множества

Определение. Проколотая окрестность точки $a - B_r(a) \setminus a$
Обозначается как $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_a$

Определение. Предельная точка множества
a - предельная точка множества A, если любая $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_a \cap A \neq \varnothing$
A' - множество предельных точек A

Теорема. *Свойства:*

1. $Cl(A) = A \cup A'$

   Доказательство. $x \in Cl(A) \iff B_r(x) \cap A \neq \varnothing \forall r > 0$ (*)
   Пусть $x \notin A$. Тогда (*) равносильно $B_r(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \varnothing \iff x \in A'$ ■

2. $A \subset B \Longrightarrow A' \subset B'$

   Доказательство. $x \in A' \Longrightarrow B_r(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \varnothing \Longrightarrow B_r(x) \setminus \{x\} \cap B \neq \varnothing \Longrightarrow x \in B'$ ■

3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   Доказательство. $A \cup B \supset A \Longrightarrow (A \cup B)' \supset A' \Longrightarrow (A \cup B) \supset A' \cup B'$
   Обратное включение. Пусть $x \in (A \cup B)'$ и $x \notin B' \Longrightarrow (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \varnothing \Longrightarrow$ $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$ ИЛИ $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap B \neq \varnothing$.
   Второе неверно из $x \notin B'$, следовательно $x \in A'$ ■

4. *A замкнутно $\Longrightarrow A \supset A'$*

   Доказательство. A - замкнуто $\Longrightarrow A = Cl(A) = A \cup A' \Longleftrightarrow A \supset A'$ ■

12 Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве

Теорема. (X, d) *-метр пространство $Y \subset X$. Тогда:*

1. *$A \subset Y$ открыто в $Y \Longleftrightarrow$ найдется открытое множество $G \subset X$, т.ч. $A = G \cap Y$*

   Доказательство. $a \in A \Longrightarrow \exists r_a > 0 : B^Y_{r_a}(a)$ (т.е. шары в Y) $\subset A$. Далее

   $$G := \bigcup_{a \in A} B^X_{r_a}(a) = \bigcup_{a \in A} \{x \in X : d(x, a) < r_a\} \Longrightarrow$$

   G - открытое (объединение любого числа открытых - открытое) Доказать: $G \cap Y = A$
   $G \supset A, Y \supset A \Longrightarrow G \cap Y \supset A$. Докажем обратное включение.

   $$B^X_{r_a}(a) \cap Y = B^Y_{r_a} \subset A$$
   $$G \cap Y = \bigcup_{a \in A} (B^X_{r_a}(a) \cap Y) \subset A \Longrightarrow G \cap Y \subset A$$

   Доказали "$\Longrightarrow$". Теперь докажем "$\Longleftarrow$"
   G - открыто в Y. Доказать, что $A := G \cap Y$ - открыто в Y $a \in A \Longrightarrow a \in G$, G - открыто$\Longrightarrow$
   $\exists r > 0 : B^X_r(a) \subset G \Longrightarrow B^X_r(a) \cap Y = B^Y_r(a) \subset G \cap Y$, то есть A открыто в Y. ■

2. *$A \subset Y$ замкнутое в $Y \Longleftrightarrow$ найдется замкнутое множество $F \in X$, т. ч $A = F \cap Y$*

   Доказательство. A - замкнуто в $Y \Longleftrightarrow Y \setminus A$ - открыто в $Y \Longleftrightarrow$
   $\exists$ открытое $G \in X : Y \setminus A = G \cap Y \Longleftrightarrow$
   $F := X \setminus G$ - замкнутое в X, при этом $A = Y \setminus (G \cap Y) = Y \cap (X \setminus G)$

С первого взгляда неочевидный переход, но следует из вложенности Y и G в $X = Y \cap F$.

   ■

13 Предел числовой последовательности и предел последовательности в метрическом пространтстве

Определение. Предел числовой последовательности
$x_1, x_2, x_3 ... \in R$. $a = \lim x_n$ если вне любого интервала, содержащего a, содержится лишь конечное число членов последовательности.

Замечание - Можно рассматривать симметричные интервалы (если есть несимметричный, для удобства его можно расширить или сузить до симметричного)

Определение. Предел последовательности в метрическом пространстве (X, d) - метрическое пространство, $x_1, x_2 ... \in X$. $a = \lim x_n$ если вне любого шара $B_\varepsilon(a)$ содержится лишь конечное число членов последовательности.

Замечание - Верно также для любого открытого множества, содержащего a

Замечание - Существование предела зависит от пространства (в $R_+ x_n = 1/n$ не имеет предела)

Теорема. *Свойства:*

1. *Если $a = \lim x_n$ и из x_n выкинули какое-то число членок так, чтобы осталось бесконечное число членов, то у оставшейся последовательности тот же предел*
2. *Если $a = \lim x_n$ и к последовательности добавить конечное число членов, то a - все еще предел*
3. *Добавление, замена или выкидывание конечного количества членом не меняет предел и его наличие (то же самое другими словами)*
4. *Перестановка членов не влияет на предел последовательности*
5. *Если $a = \lim x_n$ и $a = \lim y_n$, то если их перемешать, то у новой последовательности тоже предел a*
6. *Если $a = \lim x_n$, тогда у последовательности, в которой x_n встречается с конечной кратностью, тот же предел (написать один и тот же элемент много раз подряд)*

Определение. $a = \lim x_n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N d(x_n, a) < \varepsilon$$

Определение. $A \subset X, (X, d)$ - метрическое пространство A - ограничено, если A целиком содержится в каком-нибудь шаре

Теорема.

1. *Предел единственный*

   Доказательство.
   Пусть $a \neq b \Longrightarrow \exists B_{r_1}(a), B_{r_2}(b) : B_{r_1} \cap B_{r,2} = \varnothing$.
   Вне $B_{r_1}(a)$ конечное число членов
   Вне $B_{r_2}(b)$ конечное число членов
   Тогда в последовательности конечное число членов. Противоречие. ∎

2. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена*

   Доказательство.
   Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N : \forall n \geq N \ x_n \in B_1(a)$.
   Тогда $r := \max\{d(a, x_1), d(a, x_2), ..., d(a, x_N)\} + 1$ ∎

3. $a = \lim x_n \Longleftrightarrow \lim d(x_n, a) = 0$

Доказательство.
$\lim d(x_n, a) = 0 \iff \forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N d(x_n, a) < \varepsilon \iff \lim x_n = a$ ■

4. *Если $a = \lim x_n$ и $b = \lim y_n$, то $\lim d(x_n, y_n) = d(a, b)$*

   Доказательство.
   $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, b)$ $d(x_n, y_n) \leq d(a, x_n) + d(a, b) + d(b, y_n) \implies |d(x_n, y_n) - d(a, b)| \leq d(x_n, a) + d(y_n, b)$
   Справа каждая меньше $\varepsilon/2$, тогда слева стремится к нулю ■

14 Связь между пределами и предельными точками

Теорема. *a - предельная точка $A \iff$ найдется последовательность точек $x \neq a \in A$: $\lim x_n = a$. Супер очевидно из соответствующих определений, но распишу*

Доказательство.
"$\Longleftarrow$": Пусть $x_n \in A$ и $\lim x_n = a$.
Тогда в $B_r(a) \setminus \{a\}$ содержится бесконечное количество точек из x_n, так как $\exists N : \forall n \geq N x_n \in B_r(a)$
"$\Longrightarrow$": $r_1 = 1 \implies \exists x_1 \in B_1(a), r_2 = \min\{1/2, d(a, x_1)\}, r_3 = \min\{1/3, d(a, x_2)\}...$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N : 1/N < \varepsilon \implies \forall n \geq N\ d(x_n, a) < 1/n \leq 1/N < \varepsilon$ ■

Теорема. *Если $x_n \in A$ и $a = \lim x_n$, то $a \in Cl(A)$*

Доказательство. Либо $a \in A$, тогда $a \in Cl(A)$, иначе $x_n \neq a$, тогда по теореме 1. $a \in A' \implies a \in Cl(A)$ ■

15 Предльный переход в неравенствах

Теорема. *Предельный переход в неравенстве. $x_n, y_n \in \mathbb{R}$*
$x_n \leq y_n\ \forall n, a = \lim x_n, b = \lim y_n \implies a \leq b$

Доказательство. Пусть $a > b$
$\varepsilon = \frac{a+b}{2}$
$\exists N_1 : \forall n \geq N_1\ x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
$\exists N_2 : \forall n \geq N_2\ y_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$
$n := \max\{N_1, N_2\}$
$y_n \leq x_n$. Противоречие ■

<u>*Замечание*</u> - неверно для строгого знака $(-1/n, 1/n)$

Следствие: Если $x_n \leq b \forall n, \lim x_n = a \implies a \leq b$

Доказательство. $y_n := b$, далее из теоремы 1 ■

Следствие: Если $x_n \geq a \forall n, \lim x_n = b \Longrightarrow a \leq b$

Доказательство. $y_n := a$, далее из теоремы 1 ■

Следствие: $x_n \in [a, b], \lim x_n = c \Longrightarrow c \in [a, b]$. Следует из предыдущих

16 Теорема о двух милиционерах

Теорема. *Теорема о сжатой последовательности (о двух милиционерах)*
$x_n \leq y_n \leq z_n \ \forall n \in N, \lim x_n = \lim z_n = a \Longrightarrow \lim y_n = a$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} \lim x_n = a \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 : x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ \lim z_n = a \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 : z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n > a - \varepsilon, z_n < a + \varepsilon$$

При $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Longrightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$

■

Следствие: $|y_n| \leq z_n \ \forall n, \lim z_n = 0 \Longrightarrow \lim y_n = 0$

Доказательство. $x_n := -z_n \Longrightarrow x_n \leq |y_n| \leq z_n, \ x_n \to 0, \ z_n \to 0 \Longrightarrow y_n \to 0$ ■

17 Монотонные последовательности

Определение.

x_n монотонно возрастает(убывает), если $\forall n \ x_n \leq (\geq) x_{n+1}$

x_n монотонна, если она монотонно возрастает или монотонно убывает

Теорема. *Если последовательность монотонно возрастает(убывает) и ограничена сверху(снизу), то она имеет предел.*

Доказательство. x_n такова, что $x_1 \leq x_2 \leq x_3 ...$ и ограничена сверху. Тогда у нее есть $sup := S$.
Докажем, что $\lim x_n = S$.
$\forall \varepsilon > 0 \ \ S - \varepsilon$ не является верхней границей $\Longrightarrow \exists x_N > s - \varepsilon \Longrightarrow \forall n \geq N \ S - \varepsilon < x_n < S + \varepsilon \Longrightarrow$ S - предел ■

Следствие: Если последовательность монотонна, то она имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена.

“$\Longleftarrow$” По доказанной теореме
“$\Longrightarrow$” Из свойств предела

18 Топологическое пространство

Определение. X - множество. Топология, это набор подмножеств $\Omega \subset X$, называющихся открытыми, таких что:

1. $\varnothing, X$ - открытые
2. Объединение любого количество открытых - открыто
3. Пересечение конечного числа открытых - открыто

Примеры

$\{\varnothing, X\}$

$X = [0, +\infty), \Omega = (a, +\infty), a \geq 0\}$

Определение. Замкнутое множество - дополнение открытого

Определение. a - внутренняя точка множетсва A, если существует открытое множество U, т. ч. $a \in U, U \subset A$

Определение. Внутренность $Int\ A$ - объединение всех открытых множеств, содержащихся в A. Равносильно - множество всех внутренних точек

Определение. Замыкание $Cl\ A$ - пересечение всех замкнутых множеств, содержищих A

Определение. $a = \lim x_n$, если вне любого открытого множества, содержащего точку a находится лишь конечное число членов последовательности
$\forall U \ni a\ \exists N\ \forall n \geq N\ x_n \in U$

Определение. Хаусдорфовость
$\forall a, b \in X\ \exists U, V$ - открытые множества, такие что $a \in U,\ b \in V,\ U \cap V = \varnothing$.

Определение. Если хаусдорфовость выполняется, то предел единственный.

Доказательство. Если a, b - пределы, то $\exists U, V : a \in U,\ b \in V,\ U \cap V = \varnothing \implies$ Вне U лежит конечное количество членов, вне V тоже, тогда и в X конечное число членов. Противоречие ■

19 Векторное пространство. Пространство R^d. Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского

Определение. X - векторное пространство (над полем $\mathbb{R}$), если: Определена операции "+": $X \times X \to X$ "*": $\mathbb{R} \times X \to X$

1. Сложение коммутативно и ассоциативно
2. Существует $\overrightarrow{0}$
3. Существует обратный элемент $x + (-x) = \overrightarrow{0}$

4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in X$
5. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Определение.
$R^d = \{\langle x_1, x_2, ..., x_d\rangle\} : x_i \in \mathbb{R}$

$\langle x_1, ..., x_d\rangle + \langle y_1, ..., y_d\rangle = \langle x_1 + y_1, ..., x_d + y_d\rangle$

$\alpha\langle x_1, ..., x_d\rangle = \langle \alpha x_1, ..., \alpha x_d\rangle$

Определение. Скалярное произведение $\langle \bullet, \bullet\rangle X \times X \to \mathbb{R}$

1. $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = \overrightarrow{0}$
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
3. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
4. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

Определение. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$

Доказательство. $f(t) := \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x + ty\rangle + \langle ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t\langle y, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle \geq 0$. Это всегда неотрицательно, тогда дискриминант неположителен.

$$4t^2\langle x, y\rangle^2 - 4t^2\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0 \Longrightarrow \langle x, x\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

■

20 Норма

Определение. Норма $|| \bullet || : X \to \mathbb{R}$

1. $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \iff x = \overleftarrow{0}$
2. $||\alpha x|| = |\alpha| * ||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Примеры

$X = \mathbb{R},\ ||x|| := |x|$

$X = \mathbb{R}^d,\ ||x|| := |x_1| + |x_2| + ... + |x_d|$

Теорема. *Если $\langle \bullet, \bullet \rangle$ - скалярное произведение в X, то $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ - норма.*
$||\alpha x|| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}$
$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \Longrightarrow ||x||^2 + 2\langle x, y \rangle + ||y||^2 \overset{?}{\leq} ||x||^2 + 2||x|| * ||y|| + ||y||^2$

$2\langle x, y \rangle \leq 2||x|| * ||y|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}$ - *верно по неравенству Коши Буняковского*

Теорема. *Свойства норм:*

1. $||x - y|| = ||(x - z) + (z - y)|| \leq ||x - z|| + ||z - y||$
2. $d(x, y) := ||x - y||$ - *метрика*
3. $|\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x - y||$
   $|x|| = ||(x - y) + y|| \leq ||x - y|| + ||y||$
   $||y|| = ||(y - x) + x|| \leq ||y - x|| + ||x|| = ||x - y|| + ||x||$
   $||x - y|| \geq ||x|| - ||y||$
   $||x - y|| \geq -(||x|| - ||y||)$

Теорема. *X - нормированное пространство. Тогда норма порождена некоторым скалярным произведением тогда и только тогда, когда*

$2(||x||^2 + ||y||^2) = ||x + y||^2 + ||x - y||^2$ - *тождество параллелограмма.*

Доказательства не будет. Автор принял Линал

21 Арифметические свойства пределов последовательности

X - нормированное пространство
$x_n,\ y_n \in X \quad \lambda_n \in \mathbb{R}$
$\lim x_n = x_0 \quad \lim y_n = y_0 \quad \lim \lambda_n = \lambda_0$

Теорема. *Арифметические свойства пределов в нормированном пространстве*

1. $lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$

   Доказательство.

$$||x_n + y_n - (x_0 + y_0)|| = ||(x_n - x_0) + (y_n - y_0)|| \leqslant ||x_n - x_0|| + ||y_n - y_0||$$
$$\lim x_n = x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \quad ||x_n - x_0|| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\lim y_n = y_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \quad ||y_n - y_0|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Тогда при $n \geqslant max\{N_1, N_2\} \quad ||x_n + y_n - (x_0 + y_0)|| \leqslant ||x_n - x_0|| + ||y_n - y_0|| < \varepsilon$ ■

2. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

   Доказательство. Аналогично первому пункту. ■

3. $\lim \lambda_n x_n = \lambda_0 x_0$

Доказательство.

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| = ||(\lambda_n x_n - \lambda_n x_0) + (\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0)|| \leqslant$$
$$\leqslant ||\lambda_n x_n - \lambda_n x_0|| + ||\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0|| = |\lambda_n| * ||x_n - x_0|| + |\lambda_n - \lambda_0| * ||x_0||$$

Так как у λ_n есть предел, она ограничена, то есть $|\lambda_n| \leqslant M$.
Итого получаем:

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| \leqslant M * ||x_n - x_0|| + ||x_0|| * |\lambda_n - \lambda_0||$$

$$\lim x_n = x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \quad ||x_n - x_0|| < \frac{\varepsilon}{2M}$$
$$\lim \lambda_n = \lambda_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \quad |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2||x_0|| + 1}$$

При $n \geqslant max\{N_1, N_2\}$

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| \leqslant M * ||x_n - x_0|| + ||x_0|| * |\lambda_n - \lambda_0|| < M * \frac{\varepsilon}{2M} + ||x_0|| * \frac{\varepsilon}{2||x_0|| + 1} < \varepsilon$$

■

4. $\lim ||x_n|| = ||x_0||$

   Доказательство.

$$||x_n|| - ||x_0|| = ||(x_n - x_0) + x_0|| - ||x_0|| \leqslant ||x_n - x_0|| + ||x_0|| - ||x_0|| = ||x_n - x_0|| \to 0$$

■

5. Если в X есть скалярное произведение, то $\lim < x_n, y_n >=< x_0, y_0 >$

   Доказательство.

$$< x_n, y_n > - < x_0, y_0 >=< x_n, y_n > - < x_n, y_0 > + < x_n, y_0 > - < x_0, y_0 >=$$
$$=< x_n, y_n - y_0 > + < x_n - x_0, y_0 >$$
$$| < x_n, y_n > - < x_0, y_0 > | \leqslant | < x_n, y_n - y_0 > | + | < x_n - x_0, y_0 > | \leqslant$$
$$\leqslant ||x_n|| * ||y_n - y_0|| + ||x_n - x_0|| * ||y_0||$$

Так как у x_n есть предел, она ограничена, то есть $||x_n|| \leqslant M$.
Итого получаем:

$$| < x_n, y_n > - < x_0, y_0 > | \leqslant M * \underbrace{||y_n - y_0||}_{\to 0} + ||y_0|| * \underbrace{||x_n - x_0||}_{\to 0}$$

■

Теорема. *Арифметические свойства пределов числовых последовательностей*

$x_n,\ y_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = x_0 \quad \lim y_n = y_0$

1. $\lim(x_n \pm y_n) = x_0 \pm y_0$
2. $\lim(x_n y_n) = x_0 y_0$
3. $\lim |x_n| = |x_0|$
4. Если $y_0 \neq 0$ и $y_n \neq 0 \ \ \forall n$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

   Доказательство. Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$:

   $$|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|}$$

   Так кая $y_0 = \lim y_n$, найдется такое N_1, что $\forall n \geqslant N_1 \quad |y_n| \in (\frac{|y_0|}{2}, \frac{3|y_0|}{2}) \Rightarrow |y_n| > \frac{|y_0|}{2}$
   При $n >= N_1$ получаем, что

   $$\frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|}$$

   $$lim y_n = y_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \quad |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon * y_0^2}{2}$$

   Тогда если $n \geqslant max\{N_1, N_2\}$, то $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}| < \varepsilon$. Теперь, когда мы знаем, что $lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$, доказать исходное равенство легко:

   $$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim(x_n * \frac{1}{y_n}) = \lim x_n * \lim \frac{1}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$$

   ■

22 Покоординатная сходимость в $\mathbb{R}^d$

$$x_n =< x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)} >$$

x_n покоординатно сходится к x_0, если

$$\begin{cases} \lim x_n^{(1)} = x_0^{(1)} \\ \dots \\ \lim x_n^{(d)} = x_0^{(d)} \end{cases}$$

Теорема.

x_n покоординатно сходится к $x_0 \iff x_n$ сходится к x_0 по норме в $\mathbb{R}^d$

$||a|| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_d^2}$ - норма

Доказательство.

$$||x_n - x_0|| = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2}$$

Заметим следующее:

$$\sqrt{(x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2} \geqslant \sqrt{(x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2} = |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}|$$

$$\sqrt{(x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2} \leqslant |x_n^{(1)} - x_0^{(1)}| + \dots + |x_n^{(d)} - x_0^{(d)}|$$

Итого получаем

$$|x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \leqslant ||x_n - x_0|| \leqslant |x_n^{(1)} - x_0^{(1)}| + \dots + |x_n^{(d)} - x_0^{(d)}|$$

Докажем " $\Leftarrow$ ":

$$\lim x_n = x_0 \Rightarrow ||x_n - x_0|| \to 0 \Rightarrow |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \to 0 \Rightarrow \lim x_n^{(k)} = x_0^{(k)}$$

Докажем " $\Rightarrow$ ":

$$\lim x_n^{(k)} = x_0^{(k)} \Rightarrow |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \to 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{d} |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \to 0 \Rightarrow ||x_n - x_0|| \to 0 \Rightarrow \lim x_n = x_0$$

■

23 Бесконечные пределы

- $\underline{x_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = +\infty}$

  Вне любого луча $(u, +\infty)$ находится лишь конечное число членов.

  $\forall u \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n > u$

- $\underline{x_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = -\infty}$

  Вне любого луча $(-\infty, u)$ находится лишь конечное число членов.

  $\forall u \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n < u$

- $\underline{x_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = \infty}$

  В любом интервале (u, v) находится лишь конечное число членов.

  $\forall u \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad |x_n| > u$

Замечание 1: Если $\lim x_n = +\infty$ или $\lim x_n = -\infty$, то $\lim x_n = \infty$. Обратное неверно (контрпример - $x_n = (-1)^n n$).

Замечание 2: Если $\lim x_n = \infty$, то x_n не ограничена. Обратное неверно (контрпример - $x_n = n$(если n четно) и $x_n = 0$ иначе).

Теорема. *Единственность предела в* $\overline{\mathbb{R}}$

Если $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\lim x_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, то $a = b$.

Доказательство. Пусть $a < b$.

Если $a,\ b \in \mathbb{R}$, то $a = b$ (должно быть доказано где-то раньше).

Если $a \in \mathbb{R}$ и $b = +\infty$, то в $(a-1, a+1)$ и $(a+1, +\infty)$ должно содержаться бесконечное число членов последовательности, но это невозможно.

Аналогично для случая $a = -\infty$ и $b \in \mathbb{R}$.

Если $a = \infty$ и $b = \infty$, то либо $a = b = +\infty$, либо $a = b = -\infty$. ■

Теорема. *О стабилизации знака в* $\overline{\mathbb{R}}$

Если $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, x_n и a одного знака.

Доказательство. Не, ну это очевидно. ■

Теорема. *О предельном переходе в неравенстве в* $\overline{\mathbb{R}}$

1. Если $\lim x_n = +\infty$ и $x_n \leqslant y_n\ \forall n$, то $\lim y_n = +\infty$.

   Доказательство. Мы знаем что,

   $$\forall u \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n > u$$

   Так как $x_n \leqslant y_n\ \forall n$, то нам подойдет тоже N:

   $$\forall n \geqslant N \quad y_n \geqslant x_n > u$$

   ■

2. Если $\lim y_n = -\infty$ и $x_n \leqslant y_n\ \forall n$, то $\lim x_n = -\infty$.

   Доказательство. Аналогично первому пункту. ■

3. Если $x_n \leqslant y_n\ \forall n$ и $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}},\ \lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, то $a \leqslant b$

   Доказательство.

   - $a, b \in R$, доказано ранее
   - $a = -\infty$, то $a \leqslant b$ всегда
   - $a = +\infty$, то по первому пункту $b = +\infty$
   - $b = +\infty$, то $a \leqslant b$ всегда
   - $b = -\infty$, то по второму пункту $a = -\infty$

   ■

24 Бесконечно большие и малые последовательности

- x_n называется бесконечно большой, если $\lim x_n = \infty$
- x_n называется бесконечно малой, если $\lim x_n = 0$
- x_n называется сходящайся, если она имеет конечный предел

Теорема. *Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми*

$x_n \neq 0 \; \forall n$
x_n - б.б. $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - б.м.

Доказательство. x_n - б.б. $\Leftrightarrow \forall u > 0 \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad |x_n| > u \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad |x_n| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - б.м. ■

Теорема. *О действиях с бесконечно малыми*

1. Сумма / разность б.м. это б.м.

   Доказательство. Предел суммы / разности это сумма / разность пределов. ■

2. Произведение б.м. и ограниченной это б.м.

   Доказательство. y_n - ограниченная $\Rightarrow |y_n| \leqslant M$

   x_n - б.м. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

   $|x_n y_n| \leqslant M|x_n| < \varepsilon$ ■

25 Арифметические действия в $\overline{\mathbb{R}}$

Теорема. *Об арифметических операциях с* ∞

1. $x_n \to +\infty,\ y_n$ - ограниченная снизу $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$

   Доказательство. y_n - ограниченная снизу $\Rightarrow y_n \geqslant a$

   $x_n \to +\infty \Rightarrow \forall u \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n > u - a$

   $\Rightarrow x_n + y_n > u - a + a = u$ ■

2. $x_n \to -\infty,\ y_n$ - ограниченная сверху $\Rightarrow x_n + y_n \to -\infty$

   Доказательство. Аналогично предыдущему пункту. ■

3. $x_n \to \infty,\ y_n$ - ограниченная $\Rightarrow x_n \pm y_n \to \infty$

   Доказательство. Аналогично первому пункту. ■

4. $x_n \to \pm\infty,\ y_n \geqslant c > 0 \Rightarrow x_n y_n \to \pm\infty$

   Доказательство. $x_n \to +\infty \Rightarrow \forall u \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n > \frac{u}{c}$

   $y_n \geqslant c > 0 \Rightarrow x_n y_n \geqslant c x_n > u$

   Случай $x_n \to -\infty$ рассматривается аналогично. ■

5. $x_n \to \pm\infty,\ y_n \leqslant c < 0 \Rightarrow x_n y_n \to \mp\infty$

   Доказательство. Аналогично предыдущему пункту. ■

6. $x_n \to \infty,\ |y_n| \geqslant c > 0 \Rightarrow x_n y_n \to \infty$

   Доказательство. Аналогично четвертому пункту. ■

7. $x_n \to a \neq 0,\ y_n \neq 0 \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

   Доказательство. $\lim \frac{y_n}{x_n} = 0 \Rightarrow \frac{y_n}{x_n}$ - б.м. $\Rightarrow \frac{x_n}{y_n}$ - б.б. $\Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$ ■

8. x_n - ограниченная, $y_n \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$

   Доказательство. $y_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{y_n}$ - б.м. $\Rightarrow x_n * \frac{1}{y_n}$ - б.м. ■

9. $x_n \to \infty,\ y_n \neq 0$ - ограниченная $\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

   Доказательство. y_n - ограниченная $\Rightarrow |y_n| \leqslant M$

   $x_n \to \infty \Rightarrow \forall u > 0 \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad |x_n| > uM \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n}| \geqslant |\frac{x_n}{M}| > u$ ■

Запрещенные операции:

- $+\infty \pm (\mp\infty)$
- $-\infty \pm (\pm\infty)$
- $\pm\infty * 0$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Почему эти операции запрещенные? Разберем на примере:

$\lim x_n = \lim y_n = +\infty$
$x_n - y_n$ может иметь любой предел в $\overline{\mathbb{R}}$, а может его вообще не иметь:

- $x_n = n + a,\ y_n = n \Rightarrow x_n - y_n = a \to a$
- $x_n = 2n,\ y_n = n \Rightarrow x_n - y_n = n \to +\infty$
- $x_n = n + (-1)^n,\ y_n = n \Rightarrow x_n - y_n = (-1)^n$ - предела не имеет

26 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \quad x>-1,\ n \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Индукция по n.

База $n=1:(1+x)=1+x$

Переход $n \to n+1 : (1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{>0}\underbrace{(1+x)^n}_{assumption} \geqslant (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$ ■

Замечание 1: В неравенсте Бернулли почти всегда строгий знак, равенство достигается только в случаях, когда $n=1$ или $x=0$.

Замечание 2: $(1+x)^p \geqslant 1+px \quad x>-1$ верно при всех $p \geqslant 1$ и $p \leqslant 0$. Какая-то жесткая тема. Дали без доказателства.

Следствие.

1. Если $a>1$, то $\lim a^n = +\infty$.

   Доказательство. $a>1 \Rightarrow a=1+x \quad x>-1$

   $a^n=(1+x)^n \geqslant 1+xn \to +\infty$ ■

2. Если $|a|<1$, то $\lim a^n = 0$.

   Доказательство. Считаем, что $a \neq 0$.

   $|\frac{1}{a}|>1 \Rightarrow \lim|\frac{1}{a}|^n=+\infty \Rightarrow |\frac{1}{a}|^n$ - б.б. $\Rightarrow |a^n|$ - б.м. $\Rightarrow a^n$ - б.м. ■

27 Определение экспоненты

Рассмотрим последовательность $x_n=(1+\frac{a}{n})^n$, где $a \in \mathbb{R}$

Теорема. *x_n монотонно возрастает, начиная с $n>-a$ и ограничена сверху*

Доказательство.

1. Монотонное возрастание (если $a < 0$, то с номера $n = [-a] + 1$)

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n-1}} &= \frac{(1+\frac{a}{n})^n}{(1+\frac{a}{n-1})^{n-1}} \\
&= \frac{\frac{(n+a)^n}{n^n}}{\frac{(n-1+a)^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} \\
&= \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} * \frac{(n+a)^n}{(n-1+a)^{n-1}} \\
&= \frac{(n-1)^n * (n+a)^n}{n^n * (n-1+a)^n} * \frac{n-1+a}{n-1} \\
&= (\frac{n^2 - n + an - a}{n^2 - n + an})^n * \frac{n-1+a}{n-1} \\
&= \underbrace{(1 - \frac{a}{n(n-1+a)})^n}_{\geqslant 1 - \frac{na}{n(n-1+a)} \; by \; Bernoulli's \; inequality} * \frac{n-1+a}{n-1} \\
&\geqslant \frac{n-1}{n-1+a} * \frac{n-1+a}{n-1} = 1
\end{aligned}$$

2. Ограниченность сверху

   $y_n = (1 - \frac{a}{n})^n$ монотонно возрастает при $n > a$

   $x_n y_n = (1 + \frac{a}{n})^n * (1 - \frac{a}{n})^n = (1 - (\frac{a}{n})^2)^n \leqslant 1$

   $y_n \geqslant c > 0$, начиная с некоторого номера $\Rightarrow 1 \geqslant x_n y_n \geqslant c x_n \Rightarrow x_n \leqslant \frac{1}{c}$, начиная с некоторого номера $\Rightarrow x_n$ - ограниченная

■

Следствие. Существует конечный $\lim(1 + \frac{a}{n})^n$

Определение.

1. $exp\, a := \lim(1 + \frac{a}{n})^n$
2. $e := \lim(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,71828$

Замечание: Последовательность $x_n = (1 + \frac{a}{n})^n$ при $a \neq 0$ строго монотонно возрастает с $n > -a$. В доказателсьстве пользовались неравенством Бернулли, при $a \neq 0$ в нем строгий знак.

Следствие. Последовательность $z_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ строго убывает и стремиться к e

Доказательство. $z_n = \underbrace{(1 + \frac{1}{n})}_{\to 1} * \underbrace{(1 + \frac{1}{n})^n}_{\to e} \to e$

$z_n = (\frac{n+1}{n})^{n+1} = \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}}$

Последовательность $(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$ строго возрастает, следовательно, обратная к ней строго убывает. ■

28 Свойства экспоненты

1. Для любого $a \in \mathbb{R} \quad exp\, a > 0$
2. $exp\, 0 = 1,\ exp\, 1 = e$
3. Если $a \leqslant b$, то $exp\, a \leqslant exp\, b$

   Доказательство. $0 < 1 + \frac{a}{n} \leqslant 1 + \frac{b}{n}$ при $n > -a \Rightarrow \underbrace{(1+\dfrac{a}{n})^n}_{\to exp\, a} \leqslant \underbrace{(1+\dfrac{b}{n})^n}_{\to exp\, b}$ при $n > -a$ ■

4. $exp\, a \geqslant 1 + a$

   Доказательство. По неравенству Бернулли:

   $\underbrace{(1+\dfrac{a}{n})^n}_{\to exp\, a} \geqslant 1 + n * \frac{a}{n} = 1 + a$ при $n > -a$ ■

5. $exp\, a * exp\,(-a) \leqslant 1$

   Доказательство. $\underbrace{(1+\dfrac{a}{n})^n}_{\to exp\, a} * \underbrace{(1-\dfrac{a}{n})^n}_{\to exp\,(-a)} = (1-(\frac{a}{n})^2)^n \leqslant 1$ ■

6. $exp\, a \leqslant \frac{1}{1-a}$ при $a < 1$

   Доказательство. С помощью двух предыдущих пунктов

   $exp\, a \leqslant \frac{1}{exp\,(-a)} \leqslant \frac{1}{1-a}$ ■

7. $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ при всех n

   Доказательство. $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \leqslant \underbrace{(1+\dfrac{1}{m})^m}_{\to e}$ при $m \geqslant n+1 \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n < e$

   $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} \geqslant \underbrace{(1+\dfrac{1}{m})^{m+1}}_{\to e}$ при $m \geqslant n+1 \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^{n+1} > e$ ■

   В частности, подставив $n = 1$ и $n = 5$ получаем, что $2 < e < 3$

29 Формула для экспоненты суммы

Лемма. Если $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, то $\lim(1 + \frac{a_n}{n})^n = exp\, a$

Доказательство. Последовательность a_n ограничена $\Rightarrow a_n \leqslant M,\ a \leqslant M$ и $M > 0$

$A := 1 + \frac{a}{n} \leqslant 1 + \frac{M}{n} \quad B := 1 + \frac{a_n}{n} \leqslant 1 + \frac{M}{n}$

Надо доказать, что $\lim(A^n - B^n) = 0$

$$\begin{aligned}
|A^n - B^n| &= |A - B|(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1}) \\
&\leqslant |A - B| n (1 + \frac{M}{n})^{n-1} \\
&\leqslant |A - B| n (1 + \frac{M}{n})^{n} \\
&= \frac{|a - a_n|}{n} n (1 + \frac{M}{n})^{n} \\
&= |a - a_n| (1 + \frac{M}{n})^{n} \leqslant \underbrace{|a - a_n|}_{\to 0} * exp\, M
\end{aligned}$$

∎

Теорема. $exp\,(a + b) = exp\, a * exp\, b$

Доказательство.

$$\underbrace{(1 + \frac{a}{n})^n}_{\to exp\, a} * \underbrace{(1 + \frac{b}{n})^n}_{\to exp\, b} = (1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2})^n = \underbrace{(1 + \frac{a + b + \frac{ab}{n}}{n})^n}_{a+b+\frac{ab}{n} := a_n \to a+b} = \underbrace{(1 + \frac{a_n}{n})^n}_{\to exp\,(a+b)}$$

∎

30 Сравнение скорости возрастания последовательностей

Теорема. *Пусть* $x_n > 0$ *и* $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. *Тогда* $x_n \to 0$

Доказательство.

$l := \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Начиная с некоторого номера m $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1+l}{2} =: q < 1$

При $n \geqslant m$

$$0 < x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} * \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} * \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} * \dots * \frac{x_{m+1}}{x_m} * x_m < q^{n-m} x_m = q^n * \frac{x_m}{q^m}$$

$$0 < x_n < q^n * \frac{x_m}{q^m} \to 0 \Rightarrow x_n \to 0$$

∎

Следствие.

1. $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ при $a > 1$ (показательная функция растет быстрее полиномиальной)

   Доказательство. $x_n = \frac{n^k}{a^n}$

   $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k a^n}{a^{n+1} n^k} = (\frac{n+1}{n})^k * \frac{a^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} * (1 + \frac{1}{n})^k \to \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow x_n \to 0$$

   ■

2. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ (факториал растет быстрее показательной)

   Доказательство. $x_n = \frac{a^n}{n!}$

   $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1} n!}{(n+1)! a^n} = a\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow x_n \to 0$$

   ■

3. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

   Доказательство. $x_n = \frac{n!}{n^n}$

   $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow x_n \to 0$$

   ■

31 Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$)

Теорема. *Штольца № 1*

Пусть (y_n) строго возрастает и $\lim y_n = +\infty$. Тогда если $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$.

Доказательство. Ключевой случай $l = 0$:

Пусть

$$\varepsilon_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to 0$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём m, т.ч. $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ при $n \geq m$.

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_{m+1} - x_m) = \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k \cdot (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\varepsilon_k| \cdot (y_k - y_{k-1}) < \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon \cdot (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon \cdot \sum_{k=m+1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon \cdot (y_n - y_m) < \varepsilon y_n$$

Можно считать, что $y_m > 0$ (по теореме о стабилизации знака).

Заметим, что $|x_m|$ фиксировано, а $y_n \to +\infty \Rightarrow \lim \frac{|x_m|}{y_n} = 0$ и $\frac{|x_m|}{y_n} < \varepsilon$, начиная с некоторого номера.

$$|x_n| \le |x_m| + |x_n - x_m| < |x_m| + \varepsilon y_n \Rightarrow \left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{|x_m|}{y_n} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

начиная с некоторого номера $\Rightarrow \lim\left|\frac{x_n}{y_n}\right| = 0 = l$.

Случай $l \in \mathbb{R}$:

$$\widetilde{x_n} := x_n - l \cdot y_n, \widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}} = x_n - x_{n-1} - l \cdot (y_n - y_{n-1})$$

$$\frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \to 0 \xRightarrow{l=0} \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} = \frac{x_n - l \cdot y_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} - l \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to l$$

Случай $l = +\infty$:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$$

начиная с некоторого номера
$\Rightarrow x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \Rightarrow x_n$ строго возрастает с нек. номера $m \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n - x_m > y_n - y_m \Rightarrow x_n > y_n + (x_m - y_m) \to +\infty \Rightarrow x_n \to +\infty$

Рассмотрим

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \to 0 \xRightarrow{l=0} \frac{y_n}{x_n} \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to +\infty$$

(а не ∞, т.к. $x_n > 0, y_n > 0$ с нек. номера)

Случай $l = -\infty$

Пусть $\widetilde{x_n} := -x_n$.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to -\infty \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = -\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - yn - 1} \to +\infty \Rightarrow -\frac{x_n}{y_n} = \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to -\infty$$

■

Следствие.

$$\text{Если } \lim a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \lim \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a$$

Доказательство.

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad y_n := n \nearrow +\infty$$

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim a_n n - (n-1) = \lim a_n = a \Rightarrow \lim \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a$$

■

Пример. Найти предел:

$$m \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n^{m+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^m$$

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} k^m, \quad y_n := n^{m+1} \nearrow +\infty$$

$$\lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \lim \frac{n^{m+1} - (n-1)^{m+1}}{n^m} = \lim \frac{n^{m+1} - (n^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1}(C_{m+1}^k(-1)^k n^{m+1-k})}{n^m}) =$$
$$= \lim \sum_{k=1}^{m+1}((-1)^{k+1} \cdot \frac{C_{m+1}^k}{n^{k-1}}) = \lim C_{m+1}^1 + \lim \sum_{k=2}^{m+1}((-1)^{k+1} \cdot \frac{C_{m+1}^k}{n^{k-1}}) = (m+1) + 0 = m+1$$

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{m+1} \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{m+1}$$

32 Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{0}{0}$)

Теорема. *Штольца № 2*

$$0 < y_n < y_{n-1} \text{ и } \lim x_n = \lim y_n = 0 \text{ Тогда если } \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \lim \frac{x_n}{y_n} = l$$

Доказательство. Случай $l = 0$:

Пусть

$$\varepsilon_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to 0$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём m, т.ч. $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ при $n \geq m$.

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k(y_k - y_{k-1}) \Rightarrow |x_n - x_m| \leq$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} -|\varepsilon_k|(y_k - y_{k-1}) < \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n}(y_k - y_{k-1}) = \varepsilon(y_m - y_n)$$
$$(x_n - x_m) < \varepsilon(y_m - y_n)$$
$$\text{Устремим } n \text{ к } +\infty \Rightarrow |x_n - x_m| \to |-x_m| = x_m, \quad \varepsilon(y_m - y_n) \to \varepsilon y_m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{по пред. переходу в нер., при } m \geq \text{нек. } N \quad |x_m| < \varepsilon y_m \Rightarrow \left|\frac{x_m}{y_m}\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim \frac{x_m}{y_m} = 0$$

Случай $l \in \overline{\mathbb{R}}$: Так же, как в теореме Штольца № 1

$$\widetilde{x_n} := x_n - l \cdot y_n, \widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}} = x_n - x_{n-1} - l \cdot (y_n - y_{n-1})$$

$$\frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \to 0 \overset{l=0}{\Longrightarrow} \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} = \frac{x_n - l \cdot y_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} - l \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to l$$

Случай $l = +\infty$:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_{n-1} - x_n}{y_{n-1} - y_n} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \text{ начиная с некоторого номера} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{n-1} - x_n > y_{n-1} - y_n > 0 \Rightarrow x_n \text{ строго убывает} \Rightarrow \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \overset{l=0}{\Longrightarrow} \lim \frac{y_n}{x_n} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = +\infty$$

Случай $l = -\infty$: Так же, как в теореме Штольца № 1

Пусть $\widetilde{x_n} := -x_n$.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to -\infty \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = -\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - yn - 1} \to +\infty \Rightarrow -\frac{x_n}{y_n} = \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to -\infty$$

■

33 Подпоследовательности. Теорема о стягивающихся отрезках

Определение. Последовательность (x_n), $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ Тогда (x_{n_k}) - подпоследовательность.

Замечание. $n_k \geq k$ (по индукции)

Свойства:

1. Если последовательность имеет предел, то подпоследовательность имеет тот же предел.
2. Пусть две подпоследовательности в объединении дают исходную последовательность. Если подпоследовательности имеют одинаковый предел, то исходная последовательность имеет тот же предел.

Теорема. *О стягивающихся отрезках.*

$$\text{Пусть } [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset ... \text{ и } \lim(b_n - a_n) = 0$$

Тогда существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам и $\lim a_n = \lim b_n = c$.

$$\text{Т.е. } \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] = c$$

Доказательство. По теореме о вложенных отрезках $\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n;b_n] \neq \varnothing$.

$$\text{Пусть } c,d \in \bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n;b_n] \Rightarrow c,d \in [a_n;b_n]\forall n;\ \text{НУО, } d \geq c$$

$$0 \leq d-c \leq b_n - a_n \to 0 \Rightarrow c = d, \text{ иначе } \exists n : b_n - a_n < \varepsilon = d - c$$

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \to 0 \xrightarrow{\text{2 мил.}} c - a_n \to 0 \Rightarrow \lim a_n = c$$

$$0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \to 0 \xrightarrow{\text{2 мил.}} b_n - c \to 0 \Rightarrow \lim b_n = c$$

■

34 Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}$

Теорема. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. x_n ограничено $\Rightarrow x_n \in [a;b]$

В каком-то из отрезков $[a;\frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2};b]$ содержится бесконечное число членов послед. Назовём этот отрезок $[a_1;b_1]$.

В каком-то из отрезков $[a_1;\frac{a_1+b_1}{2}]$ и $[\frac{a_1+b_1}{2};b_1]$ содержится бесконечное число членов послед. Назовём этот отрезок $[a_2;b_2]$.

В каком-то из отрезков $[a_2;\frac{a_2+b_2}{2}]$ и $[\frac{a_2+b_2}{2};b_2]$ содержится бесконечное число членов послед. Назовём этот отрезок $[a_3;b_3]$.

...

$$[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset [a_3;b_3] \supset ...$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$$

Тогда по теореме о стягивающихся отрезках $\lim a_n = \lim b_n = c$

Выберем подпоследовательность. Берём $[a_1;b_1]$, в нём есть какой-то член последовательности, назовём его x_{n_1}.

В $[a_2;b_2]$ содержится бесконечное число членов последовательности $\Rightarrow$ есть член последовательности с номером, большим n_1. Обозначим его x_{n_2}, тогда $n_2 > n_1$.

...

$x_{n_k} \in [a_k;b_k], n_1 < n_2 < n_3 < ...$, значит построили подпоследовательность.

$$a_k \to c,\ b_k \to c \quad a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \xrightarrow{\text{2 мил.}} \lim x_{n_k} = c$$

■

35 Аналог теоремы Больцано–Вейерштрасса для неограниченной последовательности. Частичные пределы. Теорема о характеристике частичных пределов.

Теорема.

1. Неограниченная монотонная последовательность стремится к $+\infty$ или к $-\infty$.
2. Из любой неограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ или к $-\infty$.

Доказательство. .

1. Пусть (x_n) возрастает. (x_n) неограничена $\Rightarrow$ никакое u не является верхней границей $\Rightarrow$ $\exists m : x_m x_m > u \Rightarrow u < x_m \leq x_{m+1} \leq x_{m+2} \leq \dots \Rightarrow x_n > u$, начиная с некоторого номера $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$
2. Пусть (x_n) неограничена сверху.

   1 не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_{n_1} > 1$;
   $\max\{2, x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$ не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_{n_2} > \max\{\dots\} \Rightarrow x_{n_2} > 2$,
   $n_2 > n_1$;
   $\max\{3, x_1, x_2, \dots, x_{n_2}\}$ не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_{n_3} > \max\{\dots\} \Rightarrow x_{n_3} > 3$,
   $n_3 > n_2$;
   и т.д.

   Итого, $x_{n_k} > k$ и $n_1 < n_2 < \dots \Rightarrow (x_{n_k})$ – подпоследовательность (x_n) и $\lim x_{n_k} = +\infty$ по предельному переходу в неравенстве.

■

Определение. a – частичный предел последовательности (x_n), если найдётся подпоследовательность $x_{n_k} \to a$.

Теорема. *a – частичный предел последовательности $\Leftrightarrow$ в любой окрестности точки a найдётся бесконечное число членов последовательности.*

Доказательство.

"$\Longrightarrow$":

Если $a = \lim x_{n_k}$ и U_a – окрестность точки a, то все x_{n_k} кроме конечного числа лежат в $U_a \Rightarrow$ в U_a лежит бесконечное число членов последовательности (x_n).

"$\Longleftarrow$":

Будем строить подпоследовательность, имеющую предел a.

В $B_1(a)$ найдётся бесконечное число членов последовательности, возьмём какой-то и назовём его x_{n_1}.
В $B_{1/2}(a)$ найдётся бесконечное число членов последовательности, значит найдётся член (x_n) с индексом, большим n_1, назовём его x_{n_2}.

В $B_{1/3}(a)$ найдётся бесконечное число членов последовательности, значит найдётся член (x_n) с индексом, большим n_2, назовём его x_{n_3}.
...

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$
$x_{n_k} \in B_{1/k}(a) \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k} \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) \to 0 \Rightarrow \lim x_{n_k} = a$

■

36 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Определение. Фундаментальная последовательность (сходящаяся в себе, последовательность Коши)

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. $x_n \in X$. x_n – фундаментальная последовательность, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m \geq N\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Свойства:

1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

   Доказательство:
   Пусть $\lim x_n := a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N :$
   $\forall n \geq N\ \ \rho(x_n, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$
   $\forall m \geq N\ \ \rho(x_m, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$
   $\Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \varepsilon$

2. Фундаментальная последовательность ограничена

   Доказательство:
   Берём $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N : \forall n, m \geq N\ \rho(x_n, x_m) < 1 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \forall n \geq N\ \rho(x_n, x_N) < 1 \Leftrightarrow x_n \in B_1(x_N)$
   $R := \max\{\rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} \Rightarrow \forall n\ x_n \in B_R(x_N)$

3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то фундаментальная последовательность имеет тот же предел.

   Доказательство:
   Пусть $\lim x_{n_k} = a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.
   $\exists K : \forall k \geq K \quad \rho(x_k, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$
   $\exists N : \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$
   Возьмём $N \geq 0$ и подберём такое k, что $k \geq N$
   и $n_k \geq N$ (например, $k \geq \max N, K$ подходит)
   Тогда $\rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2}\varepsilon$ (т.к. $n_k \geq N$)
   И тогда $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$ (т.к. $k \geq K$)
   $\Rightarrow \rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \Rightarrow \lim x_n = a$

Теорема. *Критерий Коши*

Числовая последовательность имеет предел $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.

Доказательство.

"$\Longrightarrow$":
По свойству 1.

"$\Longleftarrow$":
фундаментальность $\xRightarrow{\text{св-во 2}}$ ограниченность $\xRightarrow{\text{Больцано–Вейерштрасса}}$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \text{сущ. сходящаяся подпосл.}\\ \quad\text{фундаментальность}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{св-во 3}} \text{существует конечный предел.}$$

■

37 Теорема Больцано–Вейерштрасса в $\mathbb{R}^d$. Полнота $\mathbb{R}^d$

Определение. Полнота метрического пространства

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. X - полное, если любая фундаментальная последовательность в нём имеет предел.

Теорема. $\mathbb{R}^d$ - *полное пространство.*

Доказательство.

Возьмём фундаментальную последовательность (x_n). $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)})$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n, m \geq N \; \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|x_n^{(k)} - x_m^{(k)}\right| \leq \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + (x_n^{(2)} - x_m^{(2)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{числовая послед. } x_n^{(k)} \text{ фундаментальна } \Rightarrow \text{у неё есть конечный предел}$$
$$\lim x_n^{(k)} = a_k \Rightarrow \lim x_n = a, \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$$

Т.к. в $\mathbb{R}^d$ покоординатная и сходимость по метрике – одно и то же.

■

Теорема. *Больцано–Вейерштрасса в* $\mathbb{R}^d$*.*

Доказательство. Пусть векторная последовательность $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)})$ ограничена. Это равносильно тому, что все её координатные последовательности ограничены.

Выделим из первой координатной последовательности сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_{1,k}}^{(1)})$. Тогда получим подпоследовательность $(x_{n_{1,k}})$, первая координатная последовательность которой сходится, а остальные ограничены.

Тогда в ней можно выделить такую подпоследовательность $(x_{n_{2,k}})$ так, чтобы вторая координатная последовательность сходилась.

Повторим так ещё $d-2$ раз и получим то, что в векторной подпоследовательности (x_{n_k}), где $n_k = n_{d,k}$, любая координатная последовательность сходится $\Rightarrow$ (x_{n_k}) тоже сходится, т.к. в $\mathbb{R}^d$ покоординатная и сходимость по метрике – одно и то же.

■

38 Верхний и нижний пределы. Связь между частичными пределами и верхним и нижним пределами.

Определение. Нижний и верхний пределы

x_n - числовая последовательность.

$\underline{\lim} x_n := \liminf x_n := \lim \inf_{k \geq n} x_k$ – нижний предел.

$\overline{\lim} x_n := \limsup x_n := \lim \sup_{k \geq n} x_k$ – верхний предел.

$y_n := \inf_{k \geq n} x_k = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \quad y_n \leq y_{n+1}$
$z_n := \sup_{k \geq n} x_k = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \quad z_n \geq z_{n+1}$

Теорема. $\underline{\lim}$ *и* $\overline{\lim}$ *существуют в* $\overline{\mathbb{R}}$ *и* $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$

Доказательство.

Про $\underline{\lim}$: $y_n \leq y_{n+1} \Rightarrow (y_n)$ – возрастающая последовательность $\Rightarrow$ у неё есть предел в $\overline{\mathbb{R}}$.

Про $\overline{\lim}$: $z_n \geq z_{n+1} \Rightarrow (z_n)$ – убывающая последовательность $\Rightarrow$ у неё есть предел в $\overline{\mathbb{R}}$.

Про неравенство $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$: $y_n \leq z_n$, $y_n \to \underline{\lim}$, $z_n \to \overline{\lim} \Rightarrow$ по предельному переходу в неравенстве $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$. ■

Теорема.

1. $\overline{\lim}$ – наибольший частичный предел
2. $\underline{\lim}$ – наименьший частичный предел
3. $\exists \lim \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$ и в этом случае $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

Доказательство.

1. $a := \overline{\lim}\, x_n$

   Рассмотрим **случай** $a \in \mathbb{R}$

   Докажем, что a – частичный предел.

   $a = \lim z_n$, $z_n = \sup_{k \geq n} x_k$, $z_n \searrow a$

   Будем строить некоторую подпоследовательность (x_{n_k}).
   Найдётся $n_k \geq n_{k-1} : x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$. Пусть не нашлось $\Rightarrow x_n \leq a - \frac{1}{k} \forall n \geq n_{k-1} \Rightarrow \sup\{x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-1}+1}, \dots\} \leq a - \frac{1}{k} \Rightarrow a \leq z_{n_{k-1}} \leq a - \frac{1}{k}$. Противоречие

   $a - \frac{1}{k} \to a$, $z_{n_k} \to a$, $a - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k} \xRightarrow{\text{2 мил.}} x_{n_k} \to a$

   Докажем, что a – наибольший частичный предел.

   Пусть b - частичный предел $\Rightarrow b = \lim x_{n_k}$. Но $x_{n_k} \to b$, $z_{n_k} \to a \Rightarrow$ по предельному переходу $b \leq a$.

   Рассмотрим **случай** $a = -\infty$.

Тогда $z_n \to -\infty$, но $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \geq x_n \Rightarrow x_n \to -\infty$.

Рассмотрим **случай** $a = +\infty$.

Тогда $z_n = +\infty \Rightarrow \sup x_1, x_2, \dots = +\infty \Rightarrow x_n$ не ограничена сверху $\Rightarrow$ в ней найдётся подпоследовательность, стремящаяся к $+\infty$.

2. Доказывается аналогично

3. "$\Longrightarrow$":

   Если $a = \lim x_n$, то все подпоследовательности стремятся к $a \Rightarrow$ все частичные пределы равны $a \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = \lim x_n = a$.

   "$\Longleftarrow$":

   $y_n \to a$, $z_n \to a$, $y_n \leq x_n \leq z_n \xrightarrow{\text{2 мил.}} x_n \to a \Rightarrow \lim x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = a$

$\blacksquare$

Замечание. Арифметики для верхних и нижних пределов нет.

Пример.

$$x_n = (-1)^n, \quad y_n = (-1)^{n+1} \Rightarrow \underline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, y_n = -1$$

$$x_n + y_n = 0 \Rightarrow \underline{\lim}\,(x_n + y_n) = \underline{\lim}\,(x_n + y_n) = 0$$

$$\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n = -2 < 0 = \underline{\lim}\,(x_n + y_n)$$

39 Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и ε. Сохранение неравенств.

Теорема.

1. $a = \underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N : x_n < a + \varepsilon \end{cases}$

2. $b = \overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ x_n < b + \varepsilon & 1 \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon & 2 \end{cases}$

Доказательство.

2. Докажем 1 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : z_N < b + \varepsilon$

"$\Longrightarrow$":

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ x_n < b + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ x_n < b + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_N = \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} \leq b + \frac{\varepsilon}{2} < b + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : z_N < b + \varepsilon$$

"$\Longleftarrow$":

Зафиксируем $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N : z_N < b + \varepsilon \Leftrightarrow \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} < b + \varepsilon \Rightarrow x_n < b + \varepsilon\ \forall n \geq N$

Докажем $\textcircled{2} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ z_N > b - \varepsilon$

"$\Longrightarrow$":

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon \text{ при этом } z_N = \sup\{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ z_N > b - \varepsilon$$

"$\Longleftarrow$":

$$\text{Зафиксируем } \varepsilon > 0 \text{ и } N \Rightarrow z_N > b - \varepsilon \Leftrightarrow \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} > b - \varepsilon \Rightarrow \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon,$$

$$\text{иначе } \forall n \geq N : x_n \leq b - \varepsilon \text{ и тогда } \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} \leq b - \varepsilon \Leftrightarrow z_N \leq b - \varepsilon$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N : z_N < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ z_N > b - \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \text{т.к. } z_n \searrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ z_n < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ z_N > b - \varepsilon \end{cases}$$

Это и есть определение предела $\Rightarrow b = \overline{\lim}\, x_n$

В обратную сторону, первая строка следует из определения предела, вторая строка следует из того, что $(z_n) \searrow$. Более того, $(z_n) \searrow$, $\lim z_n = b \Rightarrow z_n \geq b$

■

Теорема.

Если $x_n \leq y_n$, то $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, y_n$ и $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$

Доказательство.

$x_n \leq y_n \Rightarrow \inf\{x_n, x_{n+1}, ...\} \leq \inf\{y_n, y_{n+1}, ...\} \Rightarrow$ по пред. переходу $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, y_n$

Аналогично для $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$. ■

40 Сходимость рядов. Необходимое условие сходимости рядов. Примеры.

Определение. Ряд

$x_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ – ряд.

Определение. Частичная сумма ряда

$S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$

Определение. Сумма ряда

Сумма ряда – $\lim S_n$, если он существует.

Определение. Сходимость ряда

Ряд сходится, если $\exists \lim S_n \in \mathbb{R}$
В противном случае ряд расходится.

Теорема. *Необходимое условие сходимости*

Если $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ сходится, то $\lim x_n = 0$.

Доказательство. Если ряд сходится, то $S := \lim S_n \in \mathbb{R}$. Тогда $x_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim x_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$ ■

Примеры:

1. Геометрическая прогрессия $1 + q + q^2 + \dots \ \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

   При $|q| < 1$ $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$

   При $|q| > 1$ ряд расходящийся, т.к. не выполнено необходимое условие.

2. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

   $S_{2n} = 0,\ S_{2n+1} = 1 \Rightarrow$ предела нет.

3. Гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

   $H_n := \sum_{k=1} n\frac{1}{k}$ – гармонические числа. H_n монотонно возрастает.

   $$H_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{>2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}} >$$

   $$> 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2}}_{n \text{ шт.}} = 1 + \frac{n}{2} \Rightarrow \text{ частичные суммы сколь угодно большие } \Rightarrow \lim H_n = +\infty$$

   Гармонический ряд – расходящийся ряд, члены которого стремятся к 0.

4. $$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

   $$\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

41 Простейшие свойства сходящихся рядов.

1. Сумма ряда единственна

   Доказательство. Утверждение про единственность предела частичных сумм ■

2. Расстановка скобок не меняет суммы ряда (если она была)

   Доказательство. $\underset{S_1}{x_1} + (x_2 + x_3 + \underset{S_4}{x_4}) + (x_5 + \underset{S_6}{x_6}) + (x_7 + x_8 + \underset{S_9}{x_9})...$

   Т.е. из последовательности частичных сумм просто выбрали другую подпоследовательность, ну таким образом, если предел был, то он такой же и остался. ■

Замечание. Он расстановки скобок сумма ряда могла появиться.

Пример. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ расходится. Но при расстановке следующим образом скобок: $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$ получаем, что ряд имеет сумму 0.

3. Добавление/отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость, но влияет на сумму.

   Доказательство. Рассмотрим отбрасывание.

   Ряд $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$, частичная сумма которого S_n, переделали в $x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3} + \dots$, частичная сумма которого $\widetilde{S}_n := x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_{k+n} = S_{k+n} - S_k$. Т.к. k фиксировано отсюда видно, что если S_n (не) имеет предел, то и $\widetilde{S}_n$ (не) имеет предел, и наоборот.

   Добавление - просто обратная операция. ■

4. Если $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся, то $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n)$ сходится и $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n) =$
   $= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$
5. Если $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ сходится и $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n = c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$