Конспект лекций по математическому анализу [1]

Храбров Александр Игоревич

Первый курс, первый семестр 2020

[1]Атворы: maxmartynov08, K-dizzled, SmnTin, muldrik

Оглавление

Глава 1

Введение

1 Множества

Определение 1. *Множество - набор уникальных элементов*

Множества - большие буквы $A, B, \dots$
Элементы множеств - маленькие буквы $a, b, \dots$
$x \in A - x$ пренадлежит A
$x \notin A - x$ не пренадлежит A
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{R}$ - вещественные числа
$\mathbb{C}$ - комплексные числа

Теорема. *Правила Де Моргана*

$$A \ \setminus \ (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$
$$A \ \setminus \ (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

Доказательство. Докажем для первой формулы. Вторая доказывается аналогично.
$x \in A \ \setminus \ (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \text{ при всех } \alpha \end{cases} \iff x \in A \ \setminus \ B_\alpha$ при всех $\alpha \in I \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$ ■

Теорема. *Операции над множествами*

- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$
- $A \ \setminus \ B = \{x : x \in A, x \notin B\}$
- $A \bigtriangleup B = (A \ \setminus \ B) \cup (B \ \setminus \ A)$

Замечание - $\bigtriangleup, \cup, \cap$ - коммутативны, ассоциативны

Определение 2. *Декартово произведение множеств* $A \times B = \{\langle a, b\rangle : a \in A; b \in B\}$

Теорема.

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

Доказательство. $x \in A \cap \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \text{ для некоторых } \alpha \in I \end{cases} \Longleftrightarrow$

$x \in A \cap B_\alpha$ для некоторых $\alpha \in I \Longleftrightarrow x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$ ■

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\langle a, b\rangle$ *- пара "пронумерованных" элементов*

$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Longleftrightarrow$

```
    ((a == c) && (b == d))
```

2 Отношения

Определение 4. *Область определения:* $\delta_R = \{x \in A : \exists y \in B,$ *т.ч.*$\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}\}$

Определение 5. *Область значений:* $\rho_R = \{y \in B : \exists x \in A,$ *т.ч.*$\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}\}$

$\delta_{R^{-1}} = \rho_R$
$\rho_{R^{-1}} = \delta_R$

Определение 6. *Композиция отношений*

$$R_1 \subset A \times B, \quad R_2 \subset B \times C, \quad R_1 \circ R_2 \subset A \times C$$

Пример

- $\langle x, y\rangle \in R$, если x — отец y
- $\langle x, y\rangle \in R \circ R$, если x — дед y
- $\langle x, y\rangle \in R^{-1} \circ R$, если x — брат y

- δR — все, у кого есть сыновья

Определение 7. *Бинарным отношением R называется подмножество элементов декартова произведения двух множеств $R \subset A \times B$*

Элементы $x \in A, y \in B$ находятся в отношении, если $\langle x, y \rangle \in R$ (то же, что xRy)

Обратное отношение $R^{-1} \subset B \times A$

Определение 8. *Отношение называется:*

- Рефлексивным, если $xRx\ \forall x$
- Симметричным, если $xRy \Longrightarrow yRx$
- Транзитивным, если $xRy, yRz \Longrightarrow xRz$
- Иррефлексивным, если $\neg xRx \forall x$
- Антисимметричным, если $xRy, yRx \Longrightarrow x = y$

Определение 9. *R является отношением*

1. Эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно
2. Нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно
3. Нестрогого полного порядка, если выполняется п. $2 + \forall x, y$ либо xRy, либо yRx
4. Строгого частичного порядка, если оно иррефлексивно и транзитивно
5. Строгого полного порядка, если выполняется п. $4 + \forall x$, у либо xRy, либо yRx

Пример

- $x \equiv y\ (mod\ m)$ — отношение эквивалентности
- X - множество, 2^X — множество всех его подмножеств
- $\forall x, y \in 2^x : \langle x, y \rangle \in R$, если $x \subsetneq y$ — отношение строгого частичного порядка
- Лексикографический порядок на множестве пар натуральных чисел — отношение нестрогого полного порядка

Определение 10. *Отображение $f : A \longrightarrow B$*

- инъективно, если $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- сюръективно, если $\rho_f = B$
- биективно, если f инъективно и сюръективно

3 Аксиомы вещественных чисел

Определение 11. *Вещественные числа - алгебраическая структура, над которой определены операции сложения “$+$” и умножения “$\cdot$”* $(\mathbb{R} * \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

Определение 12. *Аксиомы вещественных чисел:*

- A_1 Ассоциативность сложения
  $x + (y + z) = (x + y) + z$
- A_2 Коммутативность сложения
  $x + y = y + x$
- A_3 Существование нуля
  $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}\ x + 0 = x$
- A_4 Существование обратного элемента по сложению
  $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$
- M_1 Ассоциативность умножения
  $x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$
- M_2 Коммутативность умножения
  $xy = yx$
- M_3 Существование единицы
  $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}\ x \cdot 1 = x$
- M_4 Существование обратного элемента по умножению
  $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$
- M_A Дистрибутивность
  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Вышеперечисленные аксиомы бразуют поле

Бинарное отношение "$\leqslant$"
Аксиомы порядка, задающие отношение порядка на множестве вещественных чисел:

- O_1 $x \leqslant x \quad \forall x$
- O_2 $x \leqslant y$ и $y \leqslant x \Longrightarrow x = y$
- O_3 $x \leqslant y$ и $y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$
- O_4 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y$ или $y \leqslant x$
- O_4 $x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z \quad \forall z$
- O_4 $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y \Longrightarrow 0 \leqslant xy$

Теорема. *Аксиома полноты*

$A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, \forall a \in A\ \forall b \in B\ a \leqslant b$
Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b\ \forall a \in A\ \forall b \in B$

Теорема. *Принцип Архимеда*

Согласно принципу Архимеда: $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall y_{>0} \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < ny$

Доказательство.
$A = \{a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : a < ny\}, A \neq \varnothing$ т.к. $0 \in A$
$B = \mathbb{R} \setminus A$
Пусть $A \neq \mathbb{R}$, тогда $B \neq \varnothing$ Покажем, что $a \leqslant b$, если $a \in A, b \in B$
Пойдем от противного. Если $b < a < ny \Longrightarrow b < ny \Longrightarrow b \in A$ - противоречие
Таким образом, по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$
Предположим, что $c \in A$. Тогда $c < ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow c + y < (n+1)y \Longrightarrow$
$c + y \in A \Longrightarrow c + y \leqslant c \Longrightarrow y \leqslant 0$. Это противоречит условию.
Пусть $c \in B$. Так как $y > 0, c - y < c$. Так как B - дополненние A и $c - y \neq c$, $c - y \in A \Longrightarrow$
$c - y < ny \Longrightarrow c < (n+1)y \Longrightarrow c \in A$. Снова пришли к противоречию.
Значит $c \notin A, c \notin B \Longrightarrow c$ не существует $\Longrightarrow B = \varnothing \Longrightarrow A = \mathbb{R}$ ■

Следствие:

$\forall \varepsilon_{>0} \, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

Доказательство.
$x = 1, y = \varepsilon \Longrightarrow \exists n \in N : 1 < n\varepsilon$ ■

4 Принцип математической индукции

Определение 13. *Принцип математической индукции*

P_n -последовательность утверждений

1. P_1 - верно
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ из P_n следует P_{n+1}

Тогда P_n верно при всех $n \in \mathbb{N}$

Теорема. *В конечном множестве вещественных чисел есть наибольший и наименбший элемент*

Доказательство.
Докажем для максимума. Для минимума рассуждения аналогичны
Будем доказывать утверждение по индукции
Для $n = 1$ - очевидно
Переход $X_n \longrightarrow x_{n+1}$
Рассмотрим произвольное множество из n элементов $X_n = \{x_1, x_2, x_3, \dots x_n\}$, где максимальным элементом является x_i. Пусть в наше множество был добавлен элемент X_{n+1}. В таком случае, если $X_{n+1} > X_i$, то новый максимум равен X_{n+1}, иначе - максимумом по-прежнему является X_i. Таким образом, в любом конечном множестве вещественных чисел существует минимальный элемент. ■

Следствия:

1. Во всяком непустом множестве натуральных чисел есть наименьший элемент

   Доказательство.
   Пусть A - множество натуральных чисел, не содержащее наименьшего элемента. Докажем по индукции, что для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем $\mathbb{N}_n \cap A = \varnothing$
   $\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leqslant \mathbb{N}\}$
   Для $n = 1$ утверждение очевидно.
   Переход $n \longrightarrow n + 1$
   Предположим для $\mathbb{N}_n \cap A = \varnothing$
   Тогда если для $\mathbb{N}_{n+1} \cap A \neq \varnothing$, то наименьший элемент множества A - это $n + 1$
   Значит $\mathbb{N}_{n+1} \cap A = \varnothing$ ■

2. Во всяком конечном непустом множестве натуральных чисел есть наибольший элемент

   Доказательство.
   Из натуральных чисел строим целые. Множество чисел $A \subseteq \mathbb{Z}$ называется огианиченным сверху и имеет наибольший элемент если $\exists c > a, \forall a \in A, c \in \mathbb{Z}$ ■

4.1 Рациональные и иррациональные числа в интервале

1. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

   Доказательство.
   Пусть $x < 0, y > 0$. Тогда $\exists r = 0 \in \mathbb{Q} : x < r < y$
   Пусть $x \geqslant 0, y > 0, \varepsilon = x - y$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$
   По принципу Архимеда найдется такое число m, что $\frac{m-1}{n} \leqslant x < \frac{m}{n}$
   Предположим, что $\frac{m-1}{n} \leqslant x < y \leqslant \frac{m}{n}$. Тогда мы получим, что $\frac{1}{n} \geqslant y - x = \varepsilon$. Пришли к противоречию
   Следовательно, $\exists m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n} < y$
   Случай $y \leqslant 0$ аналогичен предыдущему ■

2. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то существует иррациональное число $r : x < r < y$

   Доказательство.
   $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Longrightarrow \exists R \in (x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}) \Longrightarrow x < R + \sqrt{2} < y$ (Предыдущий пункт) $\Longrightarrow$ r - иррациональное ■

3. Если $x \geqslant 1$, то $\exists n \in \mathbb{N} : x - 1 < n \leqslant x$

5 Супремум и инфимум

Определение 14.

x - верхняя граница множества A, если $\forall a \in A : a \leqslant x$

y - верхняя граница множества A, если $\forall a \in A : y \leqslant a$

Множество ограничено снизу, если существует какая-нибудь нижняя граница

Множество ограничено сверху, если существует какая-нибудь верхняя граница

Определение 15.
Пусть A - ограниченное сверху множество, тогда $supA$ - наименьшая из его верхних границ

Определение 16.
Пусть A - ограниченное снизу множество, тогда $infA$ - наибольшая из его нижних границ

Теорема.

1. *Если $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ и A ограничено снизу, то существует единсвтенный $infA$*
2. *Если $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ и A ограничено сверху, то существует единсвтенный $supA$*

Доказательство.
Докажем (2)
Пусть B - множество всех верхних границ множества A, т.е. $\forall a \in A, b \in B : a \leqslant b$
Тогда по аксиоме полноты всегда найдется такой $c : a \leqslant c \leqslant b$
$c - supA$ по определению
Докажем, что c - единсвтенный
Пусть $\exists c_1, c_2 - supA$
Тогда если $c_1 < c_2$, то $c_2 \neq supA$
Если $c_1 > c_2$,то $c_1 \neq supA$
Следовательно, $c_1 = c_2 = supA \Longrightarrow supA$ - единсвтенный ■

Следствие:

1. $B \subset A, B \neq \varnothing$ и A ограничено снизу. Тогда $infB \geqslant infA$
2. $B \subset A, B \neq \varnothing$ и A ограничено сверху. Тогда $supB \leqslant supA$

Доказательство.
Докажем (1)
Пусть $a = infA$. Тогда a - нижняя граница $A \Longrightarrow \forall x \in A : a \leqslant x \Longrightarrow \forall x \in B : a \leqslant x \Longrightarrow$
a - нижняя граница $B \Longrightarrow a \leqslant infB$ ■

Замечание - Теорема неверна без аксиомы полноты

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \Longrightarrow \text{в множестве рациональных чисел у } A \text{ нет супремума}$$

Теорема.

1. $a = infA \Longleftrightarrow \begin{cases} a \leqslant x \quad \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : x < a + \varepsilon \end{cases}$

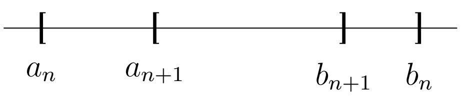
2. $b = supA \iff \begin{cases} b \geqslant x \quad \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : x > b - \varepsilon \end{cases}$

Замечание

- Если A неограничено сверху, то $supA = +\infty$
- Если A неограничено снизу, то $infA = -\infty$

6 Теорема о вложенных отрезках

Теорема.
Если $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$
То $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n] \forall n \in \mathbb{N}$



Доказательство.
$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
$b = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$
$a_i \leqslant b_j, \forall i, j \in \mathbb{N}$
$\forall i \leqslant j : a_i \leqslant a_j \leqslant b_j \leqslant b_i, \forall i \geqslant j : a_i \geqslant a_j \geqslant b_j \geqslant b_i$
По аксиоме полноты $\forall i, j \in \mathbb{N}\ \exists c \in \mathbb{R} : a_i \leqslant c \leqslant b_j \implies \forall i \in \mathbb{N} : a_i \leqslant c \leqslant b_i$

■

Замечание

1. Теорема неверна для полуинтервалов
   Пример: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (0; \frac{1}{n}] = \varnothing$
2. Теорема неверна для лучей
   Пример: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (n; +\infty) = \varnothing$
3. Теорема неверна без аксиомы полноты
   Пример: число π
   $[3;\ 4] \supset [3,1;\ 3,2] \supset [3,14;\ 3,15] \supset \dots$
   Пересечение не содержит рациональных чисел

Глава 2

Последовательности вещественных чисел

1 Метрические пространства и подпространства

Определение 17. X - *множество* $\rho : X \times X \longrightarrow [0; +\infty)$ - *метрика(расстояние) если:*

1. $\rho(x,x) = 0 \quad \forall x \in X$
2. *если* $\rho(x,y) = 0$, *то* $x = y$
3. $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall x, y \in X$
4. $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geqslant \rho(x,z) \quad \forall x, y, z \in X$

Примеры

1. Дискретная метрика

   $\rho(x,x) = 0$

   $\rho(x,y) = 1$, если $x \neq y$

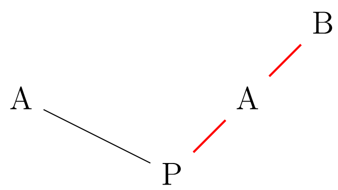
2. $\mathbb{R} \quad \rho(x,y) = (x - y)$
3. $\mathbb{R}^2$ обычное расстрояние
4. Манхэттенская метрика

   $(x', y') = A'$

   $(x, y) = A$

   $\rho(A, A') = |x - x'| + |y - y'|$

5. Французская железнодорожная метрика



Если P, A и B на луче, то $\rho(AB) = AB$
Если нет, то $\rho(A, B) = \rho(AP) + \rho(B, P)$

6. Расстояние на сфере

Определение 18. *Метрическое пространство* $(X, \rho), X$ *- множество,* ρ *- метрика на нем*

Определение 19. *Подпространство метрического пространства.*
(X, ρ) *- метрическое пространство,* $Y \subset X$
$(Y, \rho|_{Y\times Y})$ *- подпространство метрического пространства* (X, ρ)*, где* Y *- подмножество* X*, а* $\rho|_{Y\times Y}$ *- сужение* ρ *на* $Y \times Y$

Определение 20. *Открытый шар*

центр шара

$B r (a) := x \in X : \rho(x, a) < r; \quad r > 0$

радиус

Определение 21. *Замкнутый шар*

$\overline{B_r}(a) := x \in X : \rho(x, a) \leqslant r; \quad r \geqslant 0$
$B_r(a) \subset \overline{B_r}(a)$

- Окрестность точки a - открытый шар $Br(a)$

Примеры

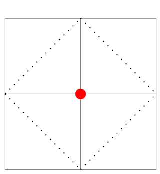
1. Дискретная метрика на X

   $B_{1/2}(a) = a$

   $B = (a) = X$

2. $\rho(x, y) = |x - y| \quad B_r(a) = (a - r, a + r)$

3. Манхэттенская метрика



$B_r(a)$

Свойства

1. $B_r(a) \cap B_R(a) = B_{min\{r,R\}}(a)$

2. Если $x \neq y$, то найдется $r > 0$, такой, что $\overline{Br}(x) \cap \overline{Br}(y) \neq \varnothing$

   Доказательство.
   $r := \frac{\rho(x,y)}{3}$. Пойдем от противного

   Пусть $c \in \overline{Br}(x) \cap \overline{Br}(y) \Longrightarrow \begin{cases} \rho(x,c) \leqslant r \\ \rho(y,c) \leqslant r \end{cases} \Longrightarrow \rho(x,y) \leqslant \rho(x,c) + \rho(y,c) \leqslant 2r = \frac{2}{3}\rho(x,y)$ - противоречие ■

2 Открытые множества

Определение 22. *Множество A называется открытым, если $A \subset$ метрическому пространству X и $\forall a \in A\ \exists r_{>0} : B_r(a) \subset A$*

Теорема. *Свойства открытых множеств:*

1. *$\varnothing, X$ - открытые множества*

2. *Объединение любого количества открытых множеств - открытое множество*

3. *Пересечение конечного числа открытых множеств - открытое множество*

4. *Открытый шарик - открытое множество*

Доказательство.

1. $B_r(a) \subset X$; Для пустого множества нечего проверять, так как там даже точек то нет

2. $A_\alpha\ \alpha \in I$ - открытые множества. $A = \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$
   Возьмем $a \in A$. Тогда $a \in A_\beta$ для какого-то $\beta \in I \Longrightarrow A_\beta$ - открытое множество $\Longrightarrow$
   $B_r(a) \subset A_\beta$ для некоторого $r_{>0} \Longrightarrow$
   $B_r(a) \subset A_\beta \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = A$

3. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - открытые множества. $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ Возьмем $a \in A$. Тогда $a \in A_k$ при $k = \{1, 2, \ldots, n\} \Longrightarrow B_{r_k}(a) \subset A_k$ для некоторого $r_k > 0$
   $r := min\{r_1, r_2, \ldots, r_k\} \Longrightarrow B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \Longrightarrow B_r(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = A$

4. Рассмотрим $B_R(a)$. Возьмем $b \in B_R(a)$
   $r := R - \rho(a,b) > 0$. Докажем, что $x \in B_r(b)$:
   $\rho(x,b) < r \Longrightarrow \rho(x,a) \leqslant \rho(x,b) + \rho(b,a) < r + \rho(b,a) = R$

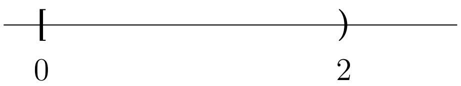
■

Замечание

В пункте №3 конечность существенна $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{1/n}(0) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}) = \{0\}$ *Интервал* $(-r;\ r)$

Пример

$\mathbb{R} \quad \rho(x, y) = |x - y|$
$Y = [0;\ 2)$
Шары в (Y, ρ):



$B_1^Y(0) = \{x \in [0;\ 2) : |x - 0| < 1\} = [0;\ 1)$

3 Внутренние точки. Внутренность множества

Определение 23. (X, β) *- метрическое пространство* $A \subset X$
$a \in A$, a *- внутренняя точка множества, если* $B_r(a) \subset A$ *для некоторого* $r > 0$ *(Открытое множество - такое множество, у которого все точки внутренние)*
Внутренность множества - множество всех его внутренних точек. Обозначается как $IntA$

Теорема. *Свойства внутренности:*

1. $IntA \subset A$
2. $IntA = \bigcup\{G : G \subset A$ *и* G *- открытое*$\} =: B$

   Доказательство.
   • $IntA \supset B$
   Возьмем $b \in B$. Тогда найдется открытое $G_\circ \subset A$, такое, что $b \in G_\circ \Longrightarrow$
   $\exists r_{>0}$, такой, что $B_r(b) \subset G_\circ \subset A \Longrightarrow b$ - внутренняя точка A
   • $IntA \subset B$
   Возьмем $a \in IntA \Longrightarrow a$ - внутренняя точка $\Longrightarrow$ открытое множество $B_r(a) \subset A$ для некоторого $r_{>0} \Longrightarrow a \in B_r(a) \subset A$
   $a \in B_r(a) \subset B \Longrightarrow a \in B$ ■

3. $IntA$ *- самое большое (по включению) открытое множество, содержащееся в* A
4. $IntA$ *- открытое множество*
5. $IntA = A \Longleftrightarrow A$ *- открытое*
6. $A \subset B \Longrightarrow IntA \subset IntB$

   Доказательство. Пусть $a \in IntA \Longrightarrow B_r(a) \subset A$ для некоторого $r_{>0} \Longrightarrow a$ - внутренняя точка B ■

7. $Int(A \cap B) = IntA \cap B$

Доказательство.
"$\subset$" : $A \cap B \subset A \Longrightarrow Int(A \cap B) \subset IntA$. Это следует из предыдущего пункта. Аналогично для B
"$\supset$" : Пусть $c \in IntA \cap B \Longrightarrow \begin{cases} c \text{ - внутренняя точка } A \\ c \text{ - внутренняя точка } B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_{r_1}(c) \subset A \\ B_{r_2}(c) \subset B \end{cases}$
для некоторых $r_1, r_2 > 0 \Longrightarrow B_r(c) \subset A \cap B$, где $r = min\{r_1,\ r_2\} \Longrightarrow$
c - внутренняя точка $A \cap B$ ■

8. $Int(IntA) = IntA$

Доказательство. $IntA$ - открытое множество, а внутренность открытого множества совпадает с ним ■

4 Замкнутые множества. Замыкание множества

Определение 24. (X, β) - *метрическое пространство* $A \subset X$
$A \subset X \quad A$ - *замкнутое, если* $X \ \setminus \ A$ - *открытое*

Теорема. *Свойства замкнутых множеств:*

1. $\varnothing, X$ - *замкнутое множества*
2. *Пересечение любого количества замкнутых множеств - замкнутое множество*
3. *Объединение конечного числа замкнутых множеств - замкнутое множество*
4. *Замкнутый шарик - замкнутое множество*

Доказательство.

2. $A_\alpha \ \alpha \in I$ - замкнутые множества. $A \overset{?}{\Longrightarrow} \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ - замкнутое
$\Searrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Nearrow$
$X \ \setminus \ A$ - открытое $\Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} (X \ \setminus \ A_\alpha) = X \ \setminus \ \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ - открытое множество
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - замкнутые множества. $\Longrightarrow X \setminus A_1, X \setminus A_2, \ldots, X \ \setminus \ A_n$ - открытые множества $\Longrightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$ - открытое множество
$\bigcap\limits_{k=1}^{n} (X \setminus A_k) = X \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \Longrightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ - замкнутое
4. $\overline{B_R}(a)$ - замкнутый шар
Докажем, что $X \ \setminus \ \overline{B_R}(a)$ - открыто

   Доказательство.
   $\overline{B_R}(a) = \{x \in X : \rho(x, a) > R\}$
   Возьмем $b \in X \ \setminus \ \overline{B_R}(a) \Longrightarrow \rho(b, a) > R$
   $r := \rho(b, a) - R$

Докажем, что $B_r \subset X \ \setminus \ B_R(a) \Longleftrightarrow B_r(b) \cap \overline{B_R}(a) = \varnothing$

От противного. Пусть есть общая точка $c \in B_r(b) \cap \overline{B_R}(a) \Longrightarrow \begin{cases} \rho(c,b) < r \\ \rho(c,a) \leqslant R \end{cases} \Longrightarrow$

$\rho(c,b) \leqslant \rho(a,c) \leqslant \rho(c,b) < R + r = \rho(a,b)$ (Так как $\rho(a,c) \leqslant R$ и $\rho(c,b) < r$)
Противоречие. ■

■

Замечание

В пункте №3 конечность существенна $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[-1+\frac{1}{n}; 1-\frac{1}{n}] = (-1;1)$

Интервал $(-\infty;\ -1] \cup [1; +\infty)$

Определение 25. *Замыкание множества A - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Обозначаетя как ClA*
$ClA = \bigcap\{F : F$ *- замкнутое и* $F \supset A\}$

Теорема.
$X \setminus ClA = Int(X \setminus A)$
$X \setminus IntA = Cl(X \setminus A)$

Доказательство.
$x \in X \setminus ClA \Longleftrightarrow x \notin ClA \Longleftrightarrow x \notin F_\circ$, где $F_\circ \supset A$
$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in X \setminus F_\circ =: G \text{ - открытое} \\ G_\circ \subset X \setminus A \end{cases} \Longleftrightarrow x \in Int(X \setminus A)$ ■

Следствие:
$ClA = X \setminus Int(X \setminus A)$
$IntA = X \setminus Cl(X \setminus A)$

Теорема. *Свойства замыкания*

1. *ClA - замкнутое множество*
2. *$ClA \supset A$*
3. *A - замкнуто $\Longleftrightarrow A = ClA$*

   Доказательство. A - замкнуто $\Longleftrightarrow X \setminus A \Longleftrightarrow X \setminus A = Int(X \setminus A) \Longleftrightarrow$
   $A = \underbrace{X \setminus Int(X \setminus A)}_{ClA}$ ■

4. *Если $A \subset B$, то $ClA \subset ClB$*

   Доказательство. $A \subset B \Longleftrightarrow X \setminus A \supset X \setminus B \Longrightarrow Int(X \setminus A) \supset Int(X \setminus B) \Longrightarrow$
   $\underbrace{X \setminus Int(X \setminus A)}_{ClA} \subset \underbrace{X \setminus Int(X \setminus B)}_{ClB}$ ■

5. $Cl(A \cup B) = ClA \cup ClB$

   Доказательство. $Cl(A \cup B) = X \setminus Int(\underbrace{X \setminus (A \cup B)}_{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)}) = X \setminus Int((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) =$

   $X \setminus (Int(X \setminus A) \cap Int(X \setminus B)) = (X \setminus Int(X \setminus A) \cup (X \setminus Int(X \setminus B) = ClA \cup ClB$ ■

6. $ClClA = ClA$

   Доказательство. ClA - замкнуто + замыкание замкнутого множества - само множество ■

Теорема. *$x \in ClA \iff$ для любого $r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \varnothing$*

Доказательство. $x \in ClA \iff x \in X \setminus Int(X \setminus A) \iff x \notin Int(X \setminus A) \iff$ для любого $r > 0 : B_r(x)$ не целиком содержится в $X \setminus A \iff$ для любого $r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \varnothing$ ■

Следствие: Если U - открытое и $\mathcal{U} \cap A = \varnothing$, то $\mathcal{U} \cap ClA = \varnothing$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{U} \cap ClA \Longrightarrow x \in \mathcal{U}$ - открытое $\exists r > 0 \quad B_r(x) \subset \mathcal{U}$
$x \in \mathcal{U} \cap ClA \Longrightarrow x \in ClA \Longrightarrow B_r(x) \cap A \neq \varnothing \Longrightarrow \mathcal{U} \cap A \neq \varnothing$ - противоречие ■

Определение 26. *Проколотая окрестность точки $a - B_r(a) \setminus a$*
Обозначается как $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_a$