Конспект лекций по математическому анализу

Храбров Александр Игоревич

Первый курс, первый семестр 2020

Оглавление

1 Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$) 2
2 Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{0}{0}$) 3
3 Подпоследовательности (определение и простейшие свойства). Теорема о стягивающихся отрезках) 5
4 Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}$ 5
5 Аналог теоремы Больцано–Вейерштрасса для неограниченной последовательности. Частичные пределы. Теорема о характеристике частичных пределов. 6
6 Фундаментальные последовательности. Свойства. Критерий Коши. 7
7 Теорема Больцано–Вейерштрасса в $\mathbb{R}^d$. Полнота $\mathbb{R}^d$ 8

1 Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$)

Теорема 1. *Штольца № 1*

Пусть (y_n) строго возрастает и $\lim y_n = +\infty$. Тогда если $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$.

Доказательство. Ключевой случай $l = 0$:

Пусть
$$\varepsilon_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to 0$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём m, т.ч. $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ при $n \geq m$.

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_{m+1} - x_m) = \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k \cdot (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\varepsilon_k| \cdot (y_k - y_{k-1}) < \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon \cdot (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon \cdot \sum_{k=m+1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon \cdot (y_n - y_m) < \varepsilon y_n$$

Можно считать, что $y_m > 0$ (по теореме о стабилизации знака).

Заметим, что $|x_m|$ фиксировано, а $y_n \to +\infty \Rightarrow \lim \frac{|x_m|}{y_n} = 0$ и $\frac{|x_m|}{y_n} < \varepsilon$, начиная с некоторого номера.

$$|x_n| \leq |x_m| + |x_n - x_m| < |x_m| + \varepsilon y_n \Rightarrow \left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{|x_m|}{y_n} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

начиная с некоторого номера $\Rightarrow \lim\left|\frac{x_n}{y_n}\right| = 0 = l$.

Случай $l \in \mathbb{R}$:

$$\widetilde{x_n} := x_n - l \cdot y_n, \widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}} = x_n - x_{n-1} - l \cdot (y_n - y_{n-1})$$
$$\frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \to 0 \xRightarrow{l=0} \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} = \frac{x_n - l \cdot y_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} - l \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to l$$

Случай $l = +\infty$:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$$

начиная с некоторого номера
$\Rightarrow x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \Rightarrow x_n$ строго возрастает с нек. номера $m \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n - x_m > y_n - y_m \Rightarrow x_n > y_n + (x_m - y_m) \to +\infty \Rightarrow x_n \to +\infty$

Рассмотрим
$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \to 0 \xRightarrow{l=0} \frac{y_n}{x_n} \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to +\infty$$

(а не ∞, т.к. $x_n > 0, y_n > 0$ с нек. номера)

Случай $l = -\infty$

Пусть $\widetilde{x_n} := -x_n$.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to -\infty \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = -\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - yn - 1} \to +\infty \Rightarrow -\frac{x_n}{y_n} = \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to -\infty$$

$\blacksquare$

Следствие.

$$\text{Если } \lim a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \lim \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a$$

Доказательство.

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad y_n := n \nearrow +\infty$$

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim a_n n - (n-1) = \lim a_n = a \Rightarrow \lim \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a$$

$\blacksquare$

Пример. Найти предел:

$$m \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n^{m+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^m$$

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} k^m, \quad y_n := n^{m+1} \nearrow +\infty$$

$$\lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \lim \frac{n^{m+1} - (n-1)^{m+1}}{n^m} = \lim \frac{n^{m+1} - (n^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1}(C_{m+1}^k (-1)^k n^{m+1-k})}{n^m}) =$$
$$= \lim \sum_{k=1}^{m+1} ((-1)^{k+1} \cdot \frac{C_{m+1}^k}{n^{k-1}}) = \lim C_{m+1}^1 + \lim \sum_{k=2}^{m+1} ((-1)^{k+1} \cdot \frac{C_{m+1}^k}{n^{k-1}}) = (m+1) + 0 = m+1$$

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{m+1} \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{m+1}$$

2 Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{0}{0}$)

Теорема 2. *Штольца № 2*

$$0 < y_n < y_{n-1} \text{ и } \lim x_n = \lim y_n = 0 \text{ Тогда если } \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \lim \frac{x_n}{y_n} = l$$

Доказательство. Случай $l = 0$:

Пусть

$$\varepsilon_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to 0$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём m, т.ч. $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ при $n \geq m$.

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k (y_k - y_{k-1}) \Rightarrow |x_n - x_m| \leq$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} -|\varepsilon_k|(y_k - y_{k-1}) < \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon(y_m - y_n)$$

$$(x_n - x_m) < \varepsilon(y_m - y_n)$$

$$\text{Устремим } n \text{ к } +\infty \Rightarrow |x_n - x_m| \to |-x_m| = x_m, \quad \varepsilon(y_m - y_n) \to \varepsilon y_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по пред. переходу в нер., при } m \geq \text{нек. } N \quad |x_m| < \varepsilon y_m \Rightarrow \left|\frac{x_m}{y_m}\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim \frac{x_m}{y_m} = 0$$

Случай $l \in \overline{\mathbb{R}}$: Так же, как в теореме Штольца № 1

$$\widetilde{x_n} := x_n - l \cdot y_n, \widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}} = x_n - x_{n-1} - l \cdot (y_n - y_{n-1})$$

$$\frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \to 0 \xRightarrow{l=0} \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} = \frac{x_n - l \cdot y_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} - l \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to l$$

Случай $l = +\infty$:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_{n-1} - x_n}{y_{n-1} - y_n} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \text{ начиная с некоторого номера} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{n-1} - x_n > y_{n-1} - y_n > 0 \Rightarrow x_n \text{ строго убывает} \Rightarrow \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \xRightarrow{l=0} \lim \frac{y_n}{x_n} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = +\infty$$

Случай $l = -\infty$: Так же, как в теореме Штольца № 1

Пусть $\widetilde{x_n} := -x_n$.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to -\infty \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = -\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - yn - 1} \to +\infty \Rightarrow -\frac{x_n}{y_n} = \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to -\infty$$

■

3 Подпоследовательности (определение и простейшие свойства). Теорема о стягивающихся отрезках)

Определение 3. *Последовательность* (x_n), $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *Тогда* (x_{n_k}) *- подпоследовательность.*

Замечание. $n_k \geq k$ (по индукции)

Свойства:

1. Если последовательность имеет предел, то подпоследовательность имеет тот же предел.
2. Пусть две подпоследовательности в объединении дают исходную последовательность. Если подпоследовательности имеют одинаковый предел, то исходная последовательность имеет тот же предел.

Теорема 4. *О стягивающихся отрезках.*

$$\text{Пусть } [a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset [a_3;b_3] \supset \ldots \text{ и } \lim(b_n - a_n) = 0$$

Тогда существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам и $\lim a_n = \lim b_n = c$.

$$\text{Т.е. } \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n;b_n] = c$$

Доказательство. По теореме о вложенных отрезках $\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n;b_n] \neq \varnothing$.

$$\text{Пусть } c,d \in \bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n;b_n] \Rightarrow c,d \in [a_n;b_n] \forall n; \text{ НУО, } d \geq c$$

$$0 \leq d - c \leq b_n - a_n \to 0 \Rightarrow c = d, \text{ иначе } \exists n : b_n - a_n < \varepsilon = d - c$$

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \to 0 \xRightarrow{\text{2 мил.}} c - a_n \to 0 \Rightarrow \lim a_n = c$$

$$0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \to 0 \xRightarrow{\text{2 мил.}} b_n - c \to 0 \Rightarrow \lim b_n = c$$

■

4 Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}$

Теорема 5. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. x_n ограничено $\Rightarrow x_n \in [a;b]$

В каком-то из отрезков $[a;\frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2};b]$ содержится бесконечное число членов послед.
Назовём этот отрезок $[a_1;b_1]$.

В каком-то из отрезков $[a_1;\frac{a_1+b_1}{2}]$ и $[\frac{a_1+b_1}{2};b_1]$ содержится бесконечное число членов послед.
Назовём этот отрезок $[a_2;b_2]$.

В каком-то из отрезков $[a_2; \frac{a_2+b_2}{2}]$ и $[\frac{a_2+b_2}{2}; b_2]$ содержится бесконечное число членов послед. Назовём этот отрезок $[a_3; b_3]$.

...

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset ...$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$$

Тогда по теореме о стягивающихся отрезках $\lim a_n = \lim b_n = c$

Выберем подпоследовательность. Берём $[a_1; b_1]$, в нём есть какой-то член последовательности, назовём его x_{n_1}.

В $[a_2; b_2]$ содержится бесконечное число членов последовательности $\Rightarrow$ есть член последовательности с номером, большим n_1. Обозначим его x_{n_2}, тогда $n_2 > n_1$.

...

$x_{n_k} \in [a_k; b_k], n_1 < n_2 < n_3 < ...$, значит построили подпоследовательность.

$$a_k \to c,\; b_k \to c \quad a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \xRightarrow{\text{2 мил.}} \lim x_{n_k} = c$$

■

5 Аналог теоремы Больцано–Вейерштрасса для неограниченной последовательности. Частичные пределы. Теорема о характеристике частичных пределов.

Теорема 6.

1. Неограниченная монотонная последовательность стремится к $+\infty$ или к $-\infty$.
2. Из любой неограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ или к $-\infty$.

Доказательство. .

1. Пусть (x_n) возрастает. (x_n) неограничена $\Rightarrow$ никакое u не является верхней границей $\Rightarrow$ $\exists m : x_m x_m > u \Rightarrow u < x_m \leq x_{m+1} \leq x_{m+2} \leq \dots \Rightarrow x_n > u$, начиная с некоторого номера $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$
2. Пусть (x_n) неограничена сверху.

   1 не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_{n_1} > 1$;
   $\max\{2, x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$ не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_{n_2} > \max\{\dots\} \Rightarrow x_{n_2} > 2$, $n_2 > n_1$;
   $\max\{3, x_1, x_2, \dots, x_{n_2}\}$ не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_{n_3} > \max\{\dots\} \Rightarrow x_{n_3} > 3$, $n_3 > n_2$;
   и т.д.

Итого, $x_{n_k} > k$ и $n_1 < n_2 < \dots \Rightarrow (x_{n_k})$ – подпоследовательность (x_n) и $\lim x_{n_k} = +\infty$ по предельному переходу в неравенстве.

$\blacksquare$

Определение 7. *a – частичный предел последовательности (x_n), если найдётся подпоследовательность $x_{n_k} \to a$.*

Теорема 8. *a – частичный предел последовательности $\Leftrightarrow$ в любой окрестности точки a найдётся бесконечное число членов последовательности.*

Доказательство.

"$\Longrightarrow$":

Если $a = \lim x_{n_k}$ и U_a – окрестность точки a, то все x_{n_k} кроме конечного числа лежат в $U_a \Rightarrow$ в U_a лежит бесконечное число членов последовательности (x_n).

"$\Longleftarrow$":

Будем строить подпоследовательность, имеющую предел a.

В $B_1(a)$ найдётся бесконечное число членов последовательности, возьмём какой-то и назовём его x_{n_1}.
В $B_{1/2}(a)$ найдётся бесконечное число членов последовательности, значит найдётся член (x_n) с индексом, большим n_1, назовём его x_{n_2}.
В $B_{1/3}(a)$ найдётся бесконечное число членов последовательности, значит найдётся член (x_n) с индексом, большим n_2, назовём его x_{n_3}.
...

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$
$x_{n_k} \in B_{1/k}(a) \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k} \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) \to 0 \Rightarrow \lim x_{n_k} = a$

$\blacksquare$

6 Фундаментальные последовательности. Свойства. Критерий Коши.

Определение 9. *Фундаментальная последовательность (сходящаяся в себе, последовательность Коши)*

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. $x_n \in X$. x_n – фундаментальная последовательность, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n, m \geq N \;\; \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Свойства:

1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

   Доказательство:
   Пусть $\lim x_n := a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N :$
   $\forall n \geq N \;\; \rho(x_n, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$

$\forall m \geq N \;\; \rho(x_m, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$
$\Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \varepsilon$

2. Фундаментальная последовательность ограничена

   Доказательство:
   Берём $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N : \forall n, m \geq N \;\; \rho(x_n, x_m) < 1 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \forall n \geq N \;\; \rho(x_n, x_N) < 1 \Leftrightarrow x_n \in B_1(x_N)$
   $R := \max\{\rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} \Rightarrow \forall n \;\; x_n \in B_R(x_N)$

3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то фундаментальная последовательность имеет тот же предел.

   Доказательство:
   Пусть $\lim x_{n_k} = a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.
   $\exists K : \forall k \geq K \quad \rho(x_k, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$
   $\exists N : \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$
   Возьмём $N \geq 0$ и подберём такое k, что $k \geq N$
   и $n_k \geq N$ (например, $k \geq \max N, K$ подходит)
   Тогда $\rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2}\varepsilon$ (т.к. $n_k \geq N$)
   И тогда $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$ (т.к. $k \geq K$)
   $\Rightarrow \rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \Rightarrow \lim x_n = a$

Теорема 10. *Критерий Коши*

Числовая последовательность имеет предел $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.

Доказательство.

"$\Longrightarrow$":
По свойству 1.

"$\Longleftarrow$":
фундаментальность $\xRightarrow{\text{св-во 2}}$ ограниченность $\xRightarrow{\text{Больцано–Вейерштрасса}}$

$$\left.\begin{array}{c} \Rightarrow \text{сущ. сходящаяся подпосл.} \\ \text{фундаментальность} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{св-во 3}} \text{существует конечный предел.}$$

$\blacksquare$

7 Теорема Больцано–Вейерштрасса в $\mathbb{R}^d$. Полнота $\mathbb{R}^d$