

Конспект лекций по математическому анализу ¹

Храбров Александр Игоревич

Первый курс, первый семестр 2020

¹Атторы: [maxmartynov08](#), [K-dizzled](#), [SmnTin](#), [muldrik](#)

Оглавление

1	Введение	2
1	Множества	2
2	Отношения	3
3	Аксиомы вещественных чисел	4
4	Принцип математической индукции	6
4.1	Рациональные и иррациональные числа в интервале	7
5	Супремум и инфимум	7
6	Теорема о вложенных отрезках	9

Глава 1

Введение

1 Множества

Определение 1. *Множество - набор уникальных элементов*

Множества - большие буквы A, B, \dots

Элементы множеств - маленькие буквы a, b, \dots

$x \in A$ - x принадлежит A

$x \notin A$ - x не принадлежит A

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

\mathbb{R} - вещественные числа

\mathbb{C} - комплексные числа

Теорема. *Правила Де Моргана*

$$A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$$

$$A \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$$

Доказательство. Докажем для первой формулы. Вторая доказывается аналогично.

$$x \in A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_{\alpha} \text{ при всех } \alpha \end{cases} \iff x \in A \setminus B_{\alpha} \text{ при всех } \alpha$$
$$\alpha \in I \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha}) \quad \blacksquare$$

Теорема. Операции над множествами

- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Замечание - Δ, \cup, \cap - коммутативны, ассоциативны

Определение 2. Декартово произведение множеств $A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A; b \in B\}$

Теорема.

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha})$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_{\alpha})$$

Доказательство. $x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in B_{\alpha} \text{ для некоторых } \alpha \in I \end{cases} \iff$

$$x \in A \cap B_{\alpha} \text{ для некоторых } \alpha \in I \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha}) \quad \blacksquare$$

Определение 3. Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ - пара “пронумерованных” элементов

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff$$

1

$$((a == c) \ \&\& \ (b == d))$$

2 Отношения

Определение 4. Область определения: $\delta_R = \{x \in A : \exists y \in B, \text{ т.ч. } \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}\}$

Определение 5. Область значений: $\rho_R = \{y \in B : \exists x \in A, \text{ т.ч. } \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}\}$

$$\delta_{R^{-1}} = \rho_R$$

$$\rho_{R^{-1}} = \delta_R$$

Определение 6. Композиция отношений

$$R_1 \subset A \times B, \quad R_2 \subset B \times C, \quad R_1 \circ R_2 \subset A \times C$$

Пример

- $\langle x, y \rangle \in R$, если x — отец y
- $\langle x, y \rangle \in R \circ R$, если x — дед y
- $\langle x, y \rangle \in R^{-1} \circ R$, если x — брат y

- δR — все, у кого есть сыновья

Определение 7. Бинарным отношением R называется подмножество элементов декартова произведения двух множеств $R \subset A \times B$

Элементы $x \in A, y \in B$ находятся в отношении, если $\langle x, y \rangle \in R$ (то же, что xRy)

Обратное отношение $R^{-1} \subset B \times A$

Определение 8. Отношение называется:

- Рефлексивным, если $xRx \forall x$
- Симметричным, если $xRy \implies yRx$
- Транзитивным, если $xRy, yRz \implies xRz$
- Иррефлексивным, если $\neg xRx \forall x$
- Антисимметричным, если $xRy, yRx \implies x = y$

Определение 9. R является отношением

1. Эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно
2. Нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно
3. Нестрогого полного порядка, если выполняется п. 2 + $\forall x, y$ либо xRy , либо yRx
4. Строгого частичного порядка, если оно иррефлексивно и транзитивно
5. Строгого полного порядка, если выполняется п. 4 + $\forall x, y$ либо xRy , либо yRx

Пример

- $x \equiv y \pmod{m}$ — отношение эквивалентности
- X - множество, 2^X — множество всех его подмножеств
- $\forall x, y \in 2^X : \langle x, y \rangle \in R$, если $x \subsetneq y$ — отношение строгого частичного порядка
- Лексикографический порядок на множестве пар натуральных чисел — отношение нестрогого полного порядка

Определение 10. Отображение $f : A \longrightarrow B$

- инъективно, если $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- сюръективно, если $\rho_f = B$
- биективно, если f инъективно и сюръективно

3 Аксиомы вещественных чисел

Определение 11. Вещественные числа - алгебраическая структура, над которой определены операции сложения “+” и умножения “.” ($\mathbb{R} * \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

Определение 12. *Аксиомы вещественных чисел:*

A_1 Ассоциативность сложения

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

A_2 Коммутативность сложения

$$x + y = y + x$$

A_3 Существование нуля

$$\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \ x + 0 = x$$

A_4 Существование обратного элемента по сложению

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$$

M_1 Ассоциативность умножения

$$x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$$

M_2 Коммутативность умножения

$$xy = yx$$

M_3 Существование единицы

$$\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \ x \cdot 1 = x$$

M_4 Существование обратного элемента по умножению

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$$

M_A Дистрибутивность

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Вышеперечисленные аксиомы образуют поле

Бинарное отношение “ \leq ”

Аксиомы порядка, задающие отношение порядка на множестве вещественных чисел:

$$O_1 \ x \leq x \quad \forall x$$

$$O_2 \ x \leq y \text{ и } y \leq x \implies x = y$$

$$O_3 \ x \leq y \text{ и } y \leq z \implies x \leq z$$

$$O_4 \ \forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \text{ или } y \leq x$$

$$O_4 \ x \leq y \implies x + z \leq y + z \quad \forall z$$

$$O_4 \ 0 \leq x \text{ и } 0 \leq y \implies 0 \leq xy$$

Теорема. *Аксиома полноты*

$$A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, \forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$$

$$\text{Тогда } \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$$

Теорема. *Принцип Архимеда*

Согласно принципу Архимеда: $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall y_{>0} \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : x < ny$

Доказательство.

$A = \{a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : a < ny\}$, $A \neq \emptyset$ т.к. $0 \in A$

$B = \mathbb{R} \setminus A$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$, тогда $B \neq \emptyset$. Покажем, что $a \leq b$, если $a \in A, b \in B$

Пойдем от противного. Если $b < a < ny \Rightarrow b < ny \Rightarrow b \in A$ - противоречие

Таким образом, по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

Предположим, что $c \in A$. Тогда $c < ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c + y < (n + 1)y \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c + y \leq c \Rightarrow y \leq 0$. Это противоречит условию.

Пусть $c \in B$. Так как $y > 0, c - y < c$. Так как B - дополнение A и $c - y \neq c, c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n + 1)y \Rightarrow c \in A$. Снова пришли к противоречию.

Значит $c \notin A, c \notin B \Rightarrow c$ не существует $\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow A = \mathbb{R}$ ■

Следствие:

$$\forall \varepsilon_{>0} \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Доказательство.

$$x = 1, y = \varepsilon \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : 1 < n\varepsilon$$
 ■

4 Принцип математической индукции

Определение 13. *Принцип математической индукции*

P_n - последовательность утверждений

1. P_1 - верно
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ из P_n следует P_{n+1}

Тогда P_n верно при всех $n \in \mathbb{N}$

Теорема. *В конечном множестве вещественных чисел есть наибольший и наименьший элемент*

Доказательство.

Докажем для максимума. Для минимума рассуждения аналогичны

Будем доказывать утверждение по индукции

Для $n = 1$ - очевидно

Переход $X_n \rightarrow x_{n+1}$

Рассмотрим произвольное множество из n элементов $X_n = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, где максимальным элементом является x_i . Пусть в наше множество был добавлен элемент X_{n+1} . В таком случае, если $X_{n+1} > X_i$, то новый максимум равен X_{n+1} , иначе - максимумом по-прежнему является X_i . Таким образом, в любом конечном множестве вещественных чисел существует минимальный элемент. ■

Следствия:

1. Во всяком непустом множестве натуральных чисел есть наименьший элемент

Доказательство.

Пусть A - множество натуральных чисел, не содержащее наименьшего элемента. Докажем по индукции, что для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем $\mathbb{N}_n \cap A = \emptyset$

$$\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$$

Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Переход $n \rightarrow n + 1$

Предположим для $\mathbb{N}_n \cap A = \emptyset$

Тогда если для $\mathbb{N}_{n+1} \cap A \neq \emptyset$, то наименьший элемент множества A - это $n + 1$

Значит $\mathbb{N}_{n+1} \cap A = \emptyset$ ■

2. Во всяком конечном непустом множестве натуральных чисел есть наибольший элемент

Доказательство.

Из натуральных чисел строим целые. Множество чисел $A \subseteq \mathbb{Z}$ называется ограниченным сверху и имеет наибольший элемент если $\exists c > a, \forall a \in A, c \in \mathbb{Z}$ ■

4.1 Рациональные и иррациональные числа в интервале

1. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Доказательство.

Пусть $x < 0, y > 0$. Тогда $\exists r = 0 \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Пусть $x \geq 0, y > 0, \varepsilon = x - y$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

По принципу Архимеда найдется такое число m , что $\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}$

Предположим, что $\frac{m-1}{n} \leq x < y \leq \frac{m}{n}$. Тогда мы получим, что $\frac{1}{n} \geq y - x = \varepsilon$. Пришли к противоречию

Следовательно, $\exists m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n} < y$

Случай $y \leq 0$ аналогичен предыдущему ■

2. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то существует иррациональное число $r : x < r < y$

Доказательство.

$x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \implies \exists R \in (x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}) \implies x < R + \sqrt{2} < y$ (Предыдущий пункт) \implies
 r - иррациональное ■

3. Если $x \geq 1$, то $\exists n \in \mathbb{N} : x - 1 < n \leq x$

5 Супремум и инфимум

Определение 14.

x - верхняя граница множества A , если $\forall a \in A : a \leq x$

y - верхняя граница множества A , если $\forall a \in A : y \leq a$

Множество ограничено снизу, если существует какая-нибудь нижняя граница

Множество ограничено сверху, если существует какая-нибудь верхняя граница

Определение 15.

Пусть A - ограниченное сверху множество, тогда $\sup A$ - наименьшая из его верхних границ

Определение 16.

Пусть A - ограниченное снизу множество, тогда $\inf A$ - наибольшая из его нижних границ

Теорема.

1. Если $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ и A ограничено снизу, то существует единственный $\inf A$
2. Если $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ и A ограничено сверху, то существует единственный $\sup A$

Доказательство.

Докажем (2)

Пусть B - множество всех верхних границ множества A , т.е. $\forall a \in A, b \in B : a \leq b$

Тогда по аксиоме полноты всегда найдется такой $c : a \leq c \leq b$

$c = \sup A$ по определению

Докажем, что c - единственный

Пусть $\exists c_1, c_2 = \sup A$

Тогда если $c_1 < c_2$, то $c_2 \neq \sup A$

Если $c_1 > c_2$, то $c_1 \neq \sup A$

Следовательно, $c_1 = c_2 = \sup A \implies \sup A$ - единственный



Следствие:

1. $B \subset A, B \neq \emptyset$ и A ограничено снизу. Тогда $\inf B \geq \inf A$
2. $B \subset A, B \neq \emptyset$ и A ограничено сверху. Тогда $\sup B \leq \sup A$

Доказательство.

Докажем (1)

Пусть $a = \inf A$. Тогда a - нижняя граница $A \implies \forall x \in A : a \leq x \implies \forall x \in B : a \leq x \implies$

a - нижняя граница $B \implies a \leq \inf B$



Замечание - Теорема неверна без аксиомы полноты

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \implies$ в множестве рациональных чисел у A нет супремума

Теорема 17.

$$1. a = \inf A \iff \begin{cases} a \leq x & \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A : x < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$2. \ b = \sup A \iff \begin{cases} b \geq x & \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A : x > b - \varepsilon \end{cases}$$

Замечание

- Если A неограничено сверху, то $\sup A = +\infty$
- Если A неограничено снизу, то $\inf A = -\infty$

6 Теорема о вложенных отрезках

Теорема 18.

Если $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$

То $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n] \forall n \in \mathbb{N}$

