

Конспект лекций по математическому анализу
СПбГУ, МКН, 1 курс

Лектор: Храбров Александр Игоревич

Составили: Андрей [K-dizzled](#) Козырев
Никита [muldrik](#) Митцев
Максим [maxmartynov08](#) Мартынов
Семен [SmnTin](#) Паненков

осень 2020

Оглавление

1	Первый семестр. Первая четверть	3
1	Множества	3
2	Отношения	4
3	Аксиомы вещественных чисел	5
4	Принцип математической индукции	7
5	Супремум и инфимум	8
6	Теорема о вложенных отрезках	10
7	Метрические пространства и подпространства	10
8	Открытые множества	13
9	Внутренние точки. Внутренность множества	14
10	Замкнутые множества. Замыкание множества	15
11	Предельные точки. Связь с замыканием множества	17
12	Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве	18
13	Предел числовой последовательности и предел последовательности в метрическом пространстве	18
14	Связь между пределами и предельными точками	20
15	Предельный переход в неравенствах	20
16	Теорема о двух милиционерах	21
17	Монотонные последовательности	21
18	Топологическое пространство	22
19	Векторное пространство. Пространство R^d . Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского	22
20	Норма	23
21	Арифметические свойства пределов последовательности	24
22	Покоординатная сходимость в \mathbb{R}^d	26
23	Бесконечные пределы	27
24	Бесконечно большие и малые последовательности	29
25	Арифметические действия в $\overline{\mathbb{R}}$	29
26	Неравенство Бернулли	31
27	Определение экспоненты	31
28	Свойства экспоненты	33
29	Формула для экспоненты суммы	34
30	Сравнение скорости возрастания последовательностей	34
31	Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$)	35
32	Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{0}{0}$)	37
33	Подпоследовательности (определение и простейшие свойства). Теорема о стягивающихся отрезках)	38

34	Теорема Больцано-Вейерштрасса в \mathbb{R}	39
35	Аналог теоремы Больцано-Вейерштрасса для неограниченной последовательности. Частичные пределы. Теорема о характеристике частичных пределов.	40
36	Фундаментальные последовательности. Свойства. Критерий Коши.	41
37	Теорема Больцано-Вейерштрасса в \mathbb{R}^d . Полнота \mathbb{R}^d	42
38	Верхний и нижний пределы. Определение и теорема существования. Связь между частичными пределами и верхним и нижним пределами.	43
39	Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и ε . Сохранение неравенств.	44
40	Сходимость рядов. Необходимое условие сходимости рядов. Примеры.	45

Глава 1

Первый семестр. Первая четверть

1 Множества

Определение. Множество - набор уникальных элементов

Множества - большие буквы A, B, \dots

Элементы множеств - маленькие буквы a, b, \dots

$x \in A$ - x принадлежит A

$x \notin A$ - x не принадлежит A

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

\mathbb{R} - вещественные числа

\mathbb{C} - комплексные числа

Теорема. *Правила Де Моргана*

$$A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$$

$$A \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$$

Доказательство. Докажем для первой формулы. Вторая доказывается аналогично.

$$x \in A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_{\alpha} \text{ при всех } \alpha \end{cases} \iff x \in A \setminus B_{\alpha} \text{ при всех } \alpha$$
$$\alpha \in I \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha}) \quad \blacksquare$$

Теорема. Операции над множествами

- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Замечание - Δ, \cup, \cap - коммутативны, ассоциативны

Определение. Декартово произведение множеств $A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A; b \in B\}$

Теорема.

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha})$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_{\alpha})$$

Доказательство. $x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in B_{\alpha} \text{ для некоторых } \alpha \in I \end{cases} \iff$

$$x \in A \cap B_{\alpha} \text{ для некоторых } \alpha \in I \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha}) \quad \blacksquare$$

Определение. Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ - пара “пронумерованных” элементов

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff$$

1

$$((a == c) \ \&\& \ (b == d))$$

2 Отношения

Определение. Область определения: $\delta_R = \{x \in A : \exists y \in B, \text{ т.ч. } \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}\}$

Определение. Область значений: $\rho_R = \{y \in B : \exists x \in A, \text{ т.ч. } \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}\}$

$$\delta_{R^{-1}} = \rho_R$$

$$\rho_{R^{-1}} = \delta_R$$

Определение. Композиция отношений

$$R_1 \subset A \times B, \quad R_2 \subset B \times C, \quad R_1 \circ R_2 \subset A \times C$$

Пример

- $\langle x, y \rangle \in R$, если x — отец y
- $\langle x, y \rangle \in R \circ R$, если x — дед y
- $\langle x, y \rangle \in R^{-1} \circ R$, если x — брат y

- δR — все, у кого есть сыновья

Определение. Бинарным отношением R называется подмножество элементов декартова произведения двух множеств $R \subset A \times B$

Элементы $x \in A, y \in B$ находятся в отношении, если $\langle x, y \rangle \in R$ (то же, что xRy)

Обратное отношение $R^{-1} \subset B \times A$

Определение. Отношение называется:

- Рефлексивным, если $xRx \forall x$
- Симметричным, если $xRy \implies yRx$
- Транзитивным, если $xRy, yRz \implies xRz$
- Иррефлексивным, если $\neg xRx \forall x$
- Антисимметричным, если $xRy, yRx \implies x = y$

Определение. R является отношением

1. Эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно
2. Нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно
3. Нестрогого полного порядка, если выполняется п. 2 + $\forall x, y$ либо xRy , либо yRx
4. Строгого частичного порядка, если оно иррефлексивно и транзитивно
5. Строгого полного порядка, если выполняется п. 4 + $\forall x, y$ либо xRy , либо yRx

Пример

- $x \equiv y \pmod{m}$ — отношение эквивалентности
- X - множество, 2^X — множество всех его подмножеств
- $\forall x, y \in 2^X : \langle x, y \rangle \in R$, если $x \subsetneq y$ — отношение строгого частичного порядка
- Лексикографический порядок на множестве пар натуральных чисел — отношение нестрогого полного порядка

Определение. Отображение $f : A \longrightarrow B$

- инъективно, если $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$
- сюръективно, если $\rho_f = B$
- биективно, если f инъективно и сюръективно

3 Аксиомы вещественных чисел

Определение. Вещественные числа - алгебраическая структура, над которой определены операции сложения “+” и умножения “.” ($\mathbb{R} * \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$)

Определение. Аксиомы вещественных чисел:

A_1 Ассоциативность сложения

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

A_2 Коммутативность сложения

$$x + y = y + x$$

A_3 Существование нуля

$$\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \ x + 0 = x$$

A_4 Существование обратного элемента по сложению

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$$

M_1 Ассоциативность умножения

$$x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$$

M_2 Коммутативность умножения

$$xy = yx$$

M_3 Существование единицы

$$\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \ x \cdot 1 = x$$

M_4 Существование обратного элемента по умножению

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$$

M_A Дистрибутивность

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Вышеперечисленные аксиомы образуют поле

Бинарное отношение “ \leq ”

Аксиомы порядка, задающие отношение порядка на множестве вещественных чисел:

$$O_1 \ x \leq x \quad \forall x$$

$$O_2 \ x \leq y \text{ и } y \leq x \implies x = y$$

$$O_3 \ x \leq y \text{ и } y \leq z \implies x \leq z$$

$$O_4 \ \forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \text{ или } y \leq x$$

$$O_4 \ x \leq y \implies x + z \leq y + z \quad \forall z$$

$$O_4 \ 0 \leq x \text{ и } 0 \leq y \implies 0 \leq xy$$

Теорема. Аксиома полноты

$$A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, \forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$$

$$\text{Тогда } \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$$

Теорема. Принцип Архимеда

$$\text{Согласно принципу Архимеда: } \forall x \in \mathbb{R} \text{ и } \forall y_{>0} \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : x < ny$$

Доказательство.

$A = \{a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : a < ny\}, A \neq \emptyset$ т.к. $0 \in A$

$B = \mathbb{R} \setminus A$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$, тогда $B \neq \emptyset$. Покажем, что $a \leq b$, если $a \in A, b \in B$

Пойдем от противного. Если $b < a < ny \Rightarrow b < ny \Rightarrow b \in A$ - противоречие

Таким образом, по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

Предположим, что $c \in A$. Тогда $c < ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c + y < (n + 1)y \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c + y \leq c \Rightarrow y \leq 0$. Это противоречит условию.

Пусть $c \in B$. Так как $y > 0, c - y < c$. Так как B - дополнение A и $c - y \neq c, c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n + 1)y \Rightarrow c \in A$. Снова пришли к противоречию.

Значит $c \notin A, c \notin B \Rightarrow c$ не существует $\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow A = \mathbb{R}$ ■

Следствие:

$$\forall \varepsilon_{>0} \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Доказательство.

$$x = 1, y = \varepsilon \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : 1 < n\varepsilon$$
 ■

4 Принцип математической индукции

Определение. Принцип математической индукции

P_n -последовательность утверждений

1. P_1 - верно
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ из P_n следует P_{n+1}

Тогда P_n верно при всех $n \in \mathbb{N}$

Теорема. В конечном множестве вещественных чисел есть наибольший и наименьший элемент

Доказательство.

Докажем для максимума. Для минимума рассуждения аналогичны

Будем доказывать утверждение по индукции

Для $n = 1$ - очевидно

Переход $X_n \rightarrow x_{n+1}$

Рассмотрим произвольное множество из n элементов $X_n = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, где максимальным элементом является x_i . Пусть в наше множество был добавлен элемент X_{n+1} . В таком случае, если $X_{n+1} > X_i$, то новый максимум равен X_{n+1} , иначе - максимумом по-прежнему является X_i . Таким образом, в любом конечном множестве вещественных чисел существует минимальный элемент. ■

Следствия:

1. Во всяком непустом множестве натуральных чисел есть наименьший элемент

Доказательство.

Пусть A - множество натуральных чисел, не содержащее наименьшего элемента. Докажем по индукции, что для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем $\mathbb{N}_n \cap A = \emptyset$

$$\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$$

Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Переход $n \rightarrow n + 1$

Предположим для $\mathbb{N}_n \cap A = \emptyset$

Тогда если для $\mathbb{N}_{n+1} \cap A \neq \emptyset$, то наименьший элемент множества A - это $n + 1$

Значит $\mathbb{N}_{n+1} \cap A = \emptyset$ ■

2. Во всяком конечном непустом множестве натуральных чисел есть наибольший элемент

Доказательство.

Из натуральных чисел строим целые. Множество чисел $A \subseteq \mathbb{Z}$ называется ограниченным сверху и имеет наибольший элемент если $\exists c > a, \forall a \in A, c \in \mathbb{Z}$ ■

Рациональные и иррациональные числа в интервале

1. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Доказательство.

Пусть $x < 0, y > 0$. Тогда $\exists r = 0 \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Пусть $x \geq 0, y > 0, \varepsilon = x - y$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

По принципу Архимеда найдется такое число m , что $\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}$

Предположим, что $\frac{m-1}{n} \leq x < y \leq \frac{m}{n}$. Тогда мы получим, что $\frac{1}{n} \geq y - x = \varepsilon$. Пришли к противоречию

Следовательно, $\exists m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n} < y$

Случай $y \leq 0$ аналогичен предыдущему ■

2. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то существует иррациональное число $r : x < r < y$

Доказательство.

$x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \implies \exists R \in \mathbb{Q} \in (x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}) \implies x < R + \sqrt{2} < y$ (Предыдущий пункт) \implies
 r - иррациональное ■

3. Если $x \geq 1$, то $\exists n \in \mathbb{N} : x - 1 < n \leq x$

5 Супремум и инфимум

Определение.

x - верхняя граница множества A , если $\forall a \in A : a \leq x$

y - нижняя граница множества A , если $\forall a \in A : y \leq a$

Множество ограничено снизу, если существует какая-нибудь нижняя граница

Множество ограничено сверху, если существует какая-нибудь верхняя граница

Определение.

Пусть A - ограниченное сверху множество, тогда $\sup A$ - наименьшая из его верхних границ

Определение.

Пусть A - ограниченное снизу множество, тогда $\inf A$ - наибольшая из его нижних границ

Теорема.

1. Если $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ и A ограничено снизу, то существует единственный $\inf A$
2. Если $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ и A ограничено сверху, то существует единственный $\sup A$

Доказательство.

Докажем (2)

Пусть B - множество всех верхних границ множества A , т.е. $\forall a \in A, b \in B : a \leq b$

Тогда по аксиоме полноты всегда найдется такой $c : a \leq c \leq b$

$c = \sup A$ по определению

Докажем, что c - единственный

Пусть $\exists c_1, c_2 = \sup A$

Тогда если $c_1 < c_2$, то $c_2 \neq \sup A$

Если $c_1 > c_2$, то $c_1 \neq \sup A$

Следовательно, $c_1 = c_2 = \sup A \implies \sup A$ - единственный



Следствие:

1. $B \subset A, B \neq \emptyset$ и A ограничено снизу. Тогда $\inf B \geq \inf A$
2. $B \subset A, B \neq \emptyset$ и A ограничено сверху. Тогда $\sup B \leq \sup A$

Доказательство.

Докажем (1)

Пусть $a = \inf A$. Тогда a - нижняя граница $A \implies \forall x \in A : a \leq x \implies \forall x \in B : a \leq x \implies$

a - нижняя граница $B \implies a \leq \inf B$



Замечание - Теорема неверна без аксиомы полноты

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \implies$ в множестве рациональных чисел у A нет супремума

Теорема.

$$1. a = \inf A \iff \begin{cases} a \leq x & \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A : x < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$2. b = \sup A \iff \begin{cases} b \geq x & \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A : x > b - \varepsilon \end{cases}$$

Замечание

- Если A неограничено сверху, то $\sup A = +\infty$
- Если A неограничено снизу, то $\inf A = -\infty$

6 Теорема о вложенных отрезках

Теорема.

Если $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$

То $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n] \forall n \in \mathbb{N}$



Доказательство.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

$$a_i \leq b_j, \forall i, j \in \mathbb{N}$$

$$\forall i \leq j : a_i \leq a_j \leq b_j \leq b_i, \forall i \geq j : a_i \geq a_j \geq b_j \geq b_i$$

$$\text{По аксиоме полноты } \forall i, j \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R} : a_i \leq c \leq b_j \implies \forall i \in \mathbb{N} : a_i \leq c \leq b_i$$



Замечание

1. Теорема неверна для полуинтервалов

$$\text{Пример: } \bigcap_{n=1}^{\infty} (0; \frac{1}{n}] = \emptyset$$

2. Теорема неверна для лучей

$$\text{Пример: } \bigcap_{n=1}^{\infty} (n; +\infty) = \emptyset$$

3. Теорема неверна без аксиомы полноты

Пример: число π

$$[3; 4] \supset [3, 1; 3, 2] \supset [3, 14; 3, 15] \supset \dots$$

Пересечение не содержит рациональных чисел

7 Метрические пространства и подпространства

Определение. X - множество $\rho : X \times X \longrightarrow [0; +\infty)$ - метрика(расстояние) если:

1. $\rho(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$
2. если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$

3. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$
4. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z) \quad \forall x, y, z \in X$

Примеры

1. Дискретная метрика

$$\rho(x, x) = 0$$

$$\rho(x, y) = 1, \text{ если } x \neq y$$

2. $\mathbb{R} \quad \rho(x, y) = |x - y|$

3. \mathbb{R}^2 — обычное расстояние

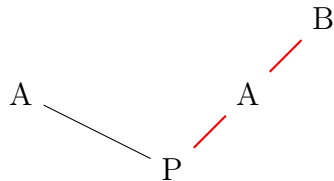
4. Манхэттенская метрика

$$(x', y') = A'$$

$$(x, y) = A$$

$$\rho(A, A') = |x - x'| + |y - y'|$$

5. Французская железнодорожная метрика



Если P, A и B на луче, то $\rho(AB) = AB$
 Если нет, то $\rho(A, B) = \rho(AP) + \rho(B, P)$

6. Расстояние на сфере

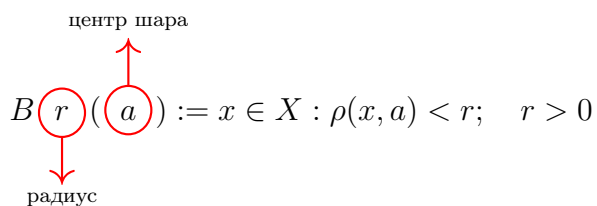
Определение. Метрическое пространство (X, ρ) , X - множество, ρ - метрика на нем

Определение. Подпространство метрического пространства.

(X, ρ) - метрическое пространство, $Y \subset X$

$(Y, \rho|_{Y \times Y})$ - подпространство метрического пространства (X, ρ) , где Y - подмножество X , а $\rho|_{Y \times Y}$ - сужение ρ на $Y \times Y$

Определение. Открытый шар



Определение. Замкнутый шар

$$\overline{B_r}(a) := \{x \in X : \rho(x, a) \leq r; \quad r \geq 0\}$$

$$B_r(a) \subset \overline{B_r}(a)$$

- Окрестность точки a - открытый шар $Br(a)$

Примеры

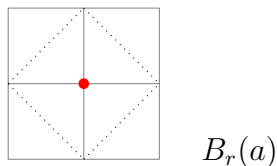
1. Дискретная метрика на X

$$B_{1/2}(a) = a$$

$$B_2(a) = X$$

2. $\rho(x, y) = |x - y|$ $B_r(a) = (a - r, a + r)$

3. Манхэттенская метрика



Свойства

1. $B_r(a) \cap B_R(a) = B_{\min\{r,R\}}(a)$
2. Если $x \neq y$, то найдется $r > 0$, такой, что $\overline{B_r}(x) \cap \overline{B_r}(y) = \emptyset$

Доказательство.

$r := \frac{\rho(x,y)}{3}$. Пойдем от противного

Пусть $c \in \overline{B_r}(x) \cap \overline{B_r}(y) \implies \begin{cases} \rho(x,c) \leq r \\ \rho(y,c) \leq r \end{cases} \implies \rho(x,y) \leq \rho(x,c) + \rho(y,c) \leq 2r = \frac{2}{3}\rho(x,y)$ - противоречие ■

8 Открытые множества

Определение. Множество A называется открытым, если $A \subset$ метрическому пространству X и $\forall a \in A \exists r_{>0} : B_r(a) \subset A$

Теорема. Свойства открытых множеств:

1. \emptyset, X - открытые множества
2. Объединение любого количества открытых множеств - открытое множество
3. Пересечение конечного числа открытых множеств - открытое множество
4. Открытый шарик - открытое множество

Доказательство.

1. $B_r(a) \subset X$; Для пустого множества нечего проверять, так как там даже точек то нет
2. $A_\alpha \alpha \in I$ - открытые множества. $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$
Возьмем $a \in A$. Тогда $a \in A_\beta$ для какого-то $\beta \in I \implies A_\beta$ - открытое множество $\implies B_r(a) \subset A_\beta$ для некоторого $r_{>0} \implies B_r(a) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A$
3. A_1, A_2, \dots, A_n - открытые множества. $A = \bigcap_{k=1}^n A_k$ Возьмем $a \in A$. Тогда $a \in A_k$ при $k = \{1, 2, \dots, n\} \implies B_{r_k}(a) \subset A_k$ для некоторого $r_k > 0$
 $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_k\} \implies B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k = A$
4. Рассмотрим $B_R(a)$. Возьмем $b \in B_R(a)$
 $r := R - \rho(a,b) > 0$. Докажем, что $x \in B_r(b)$:
 $\rho(x,b) < r \implies \rho(x,a) \leq \rho(x,b) + \rho(b,a) < r + \rho(b,a) = R$ ■

Замечание

В пункте №3 конечность существенна $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1/n}(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}) = \{0\}$ Интервал $(-r; r)$

Пример

$$\mathbb{R} \quad \rho(x, y) = |x - y|$$

$$Y = [0; 2)$$

Шары в (Y, ρ) :

$$\begin{array}{c} \text{---} [\text{-----}) \text{---} \\ 0 \qquad \qquad \qquad 2 \end{array}$$

$$B_1^Y(0) = \{x \in [0; 2) : |x - 0| < 1\} = [0; 1)$$

9 Внутренние точки. Внутренность множества

Определение. (X, β) - метрическое пространство $A \subset X$

$a \in A$, a - внутренняя точка множества, если $B_r(a) \subset A$ для некоторого $r > 0$ (Открытое множество - такое множество, у которого все точки внутренние)

Внутренность множества - множество всех его внутренних точек. Обозначается как $IntA$

Теорема. Свойства внутренности:

1. $IntA \subset A$
2. $IntA = \bigcup \{G : G \subset A \text{ и } G - \text{открытое}\} =: B$

Доказательство.

- $IntA \supset B$

Возьмем $b \in B$. Тогда найдется открытое $G_o \subset A$, такое, что $b \in G_o \implies$

$\exists r_{>0}$, такой, что $B_r(b) \subset G_o \subset A \implies b$ - внутренняя точка A

- $IntA \subset B$

Возьмем $a \in IntA \implies a$ - внутренняя точка \implies открытое множество $B_r(a) \subset A$ для некоторого $r_{>0} \implies a \in B_r(a) \subset A$

$$a \in B_r(a) \subset B \implies a \in B$$

■

3. $IntA$ - самое большое (по включению) открытое множество, содержащееся в A
4. $IntA$ - открытое множество
5. $IntA = A \iff A$ - открытое
6. $A \subset B \implies IntA \subset IntB$

Доказательство. Пусть $a \in IntA \implies B_r(a) \subset A$ для некоторого $r_{>0} \implies a$ - внутренняя точка B

■

7. $Int(A \cap B) = IntA \cap IntB$

Доказательство.

“ \subset ” : $A \cap B \subset A \implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}A$. Это следует из предыдущего пункта. Аналогично для B

“ \supset ” : Пусть $c \in \text{Int}A \cap \text{Int}B \implies \begin{cases} c - \text{внутренняя точка } A \\ c - \text{внутренняя точка } B \end{cases} \implies \begin{cases} B_{r_1}(c) \subset A \\ B_{r_2}(c) \subset B \end{cases}$

для некоторых $r_1, r_2 > 0 \implies B_r(c) \subset A \cap B$, где $r = \min\{r_1, r_2\} \implies c - \text{внутренняя точка } A \cap B$ ■

8. $\text{Int}(\text{Int}A) = \text{Int}A$

Доказательство. $\text{Int}A$ - открытое множество, а внутренность открытого множества совпадает с ним ■

10 Замкнутые множества. Замыкание множества

Определение. (X, β) - метрическое пространство $A \subset X$
 $A \subset X$ - замкнутое, если $X \setminus A$ - открытое

Теорема. Свойства замкнутых множеств:

1. \emptyset, X - замкнутое множества
2. Пересечение любого количества замкнутых множеств - замкнутое множество
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств - замкнутое множество
4. Замкнутый шарик - замкнутое множество

Доказательство.

2. $A_\alpha \ \alpha \in I$ - замкнутые множества. $A \stackrel{?}{\implies} \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ - замкнутое

$\implies \begin{matrix} \searrow & & \nearrow \\ X \setminus A - \text{открытое} \implies \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) = X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha - \text{открытое множество} \end{matrix}$

3. A_1, A_2, \dots, A_n - замкнутые множества. $\implies X \setminus A_1, X \setminus A_2, \dots, X \setminus A_n$ - открытые множества
 $\implies \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$ - открытое множество

$\bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k) = X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k \implies \bigcup_{k=1}^n A_k$ - замкнутое

4. $\overline{B_R}(a)$ - замкнутый шар
 Докажем, что $X \setminus \overline{B_R}(a)$ - открыто

Доказательство.

$\overline{B_R}(a) = \{x \in X : \rho(x, a) \leq R\}$

Возьмем $b \in X \setminus \overline{B_R}(a) \implies \rho(b, a) > R$

$r := \rho(b, a) - R$

Докажем, что $B_r \subset X \setminus B_R(a) \iff B_r(b) \cap \overline{B_R(a)} = \emptyset$

От противного. Пусть есть общая точка $c \in B_r(b) \cap \overline{B_R(a)} \implies \begin{cases} \rho(c, b) < r \\ \rho(c, a) \leq R \end{cases} \implies$

$$\rho(c, b) \leq \rho(a, c) \leq \rho(c, b) < R + r = \rho(a, b) \quad (\text{Так как } \rho(a, c) \leq R \text{ и } \rho(c, b) < r)$$

Противоречие. ■

Замечание

В пункте №3 конечность существенна $\bigcup_{n=1}^{\infty} [-1 + \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}] = (-1; 1)$

Интервал $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Определение. Замыкание множества A - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A . Обозначается как ClA

$$ClA = \bigcap \{F : F - \text{замкнутое и } F \supset A\}$$

Теорема.

$$X \setminus ClA = Int(X \setminus A)$$

$$X \setminus IntA = Cl(X \setminus A)$$

Доказательство.

$$x \in X \setminus ClA \iff x \notin ClA \iff x \notin F_{\circ}, \text{ где } F_{\circ} \supset A$$

$$\iff \begin{cases} x \in X \setminus F_{\circ} =: G_{\circ} - \text{открытое} \\ G_{\circ} \subset X \setminus A \end{cases} \iff x \in Int(X \setminus A) \quad \blacksquare$$

Следствие:

$$ClA = X \setminus Int(X \setminus A)$$

$$IntA = X \setminus Cl(X \setminus A)$$

Теорема. Свойства замыкания

1. ClA - замкнутое множество

2. $ClA \supset A$

3. A - замкнуто $\iff A = ClA$

$$\text{Доказательство. } A - \text{замкнуто} \iff X \setminus A \iff X \setminus A = Int(X \setminus A) \iff A = \underbrace{X \setminus Int(X \setminus A)}_{ClA} \quad \blacksquare$$

4. Если $A \subset B$, то $ClA \subset ClB$

$$\text{Доказательство. } A \subset B \iff X \setminus A \supset X \setminus B \implies Int(X \setminus A) \supset Int(X \setminus B) \implies \underbrace{X \setminus Int(X \setminus A)}_{ClA} \subset \underbrace{X \setminus Int(X \setminus B)}_{ClB} \quad \blacksquare$$

5. $Cl(A \cup B) = ClA \cup ClB$

Доказательство. $Cl(A \cup B) = X \setminus \underbrace{Int(X \setminus (A \cup B))}_{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)} = X \setminus Int((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) =$

$X \setminus (Int(X \setminus A) \cap Int(X \setminus B)) = (X \setminus Int(X \setminus A)) \cup (X \setminus Int(X \setminus B)) = ClA \cup ClB$ ■

6. $ClClA = ClA$

Доказательство. ClA - замкнуто + замыкание замкнутого множества - само множество ■

Теорема. $x \in ClA \iff$ для любого $r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \emptyset$

Доказательство. $x \in ClA \iff x \in X \setminus Int(X \setminus A) \iff x \notin Int(X \setminus A) \iff$ для любого $r > 0 : B_r(x)$ не целиком содержится в $X \setminus A \iff$ для любого $r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ ■

Следствие: Если \mathcal{U} - открытое и $\mathcal{U} \cap A = \emptyset$, то $\mathcal{U} \cap ClA = \emptyset$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{U} \cap ClA \implies x \in \mathcal{U}$ - открытое $\exists r > 0 : B_r(x) \subset \mathcal{U}$
 $x \in \mathcal{U} \cap ClA \implies x \in ClA \implies B_r(x) \cap A \neq \emptyset \implies \mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$ - противоречие ■

11 Предельные точки. Связь с замыканием множества

Определение. Проколота окрестность точки $a - B_r(a) \setminus a$
 Обозначается как $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_a$

Определение. Предельная точка множества

a - предельная точка множества A , если любая $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_a \cap A \neq \emptyset$
 A' - множество предельных точек A

Теорема. Свойства:

1. $Cl(A) = A \cup A'$

Доказательство. $x \in Cl(A) \iff B_r(x) \cap A \neq \emptyset \forall r > 0$ (*)

Пусть $x \notin A$. Тогда (*) равносильно $B_r(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset \iff x \in A'$ ■

2. $A \subset B \implies A' \subset B'$

Доказательство. $x \in A' \implies B_r(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset \implies B_r(x) \setminus \{x\} \cap B \neq \emptyset \implies x \in B'$ ■

3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Доказательство. $A \cup B \supset A \implies (A \cup B)' \supset A' \implies (A \cup B) \supset A' \cup B'$

Обратное включение. Пусть $x \in (A \cup B)'$ и $x \notin B' \implies (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \implies (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ИЛИ $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap B \neq \emptyset$.

Второе неверно из $x \notin B'$, следовательно $x \in A'$ ■

4. A замкнуто $\implies A \supset A'$

Доказательство. A - замкнуто $\implies A = Cl(A) = A \cup A' \iff A \supset A'$ ■

12 Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве

Теорема. (X, d) - метр пространство $Y \subset X$. Тогда:

1. $A \subset Y$ открыто в $Y \iff$ найдется открытое множество $G \subset X$, т.ч. $A = G \cap Y$

Доказательство. $a \in A \implies \exists r_a > 0 : B_{r_a}^Y(a)$ (т.е. шары в Y) $\subset A$. Далее

$$G := \bigcup_{a \in A} B_{r_a}^X(a) = \bigcup_{a \in A} \{x \in X : d(x, a) < r_a\} \implies$$

G - открытое (объединение любого числа открытых - открытое) Доказать: $G \cap Y = A$
 $G \supset A, Y \supset A \implies G \cap Y \supset A$. Докажем обратное включение.

$$\begin{aligned} B_{r_a}^X(a) \cap Y &= B_{r_a}^Y(a) \subset A \\ G \cap Y &= \bigcup_{a \in A} (B_{r_a}^X(a) \cap Y) \subset A \implies G \cap Y \subset A \end{aligned}$$

Доказали " \implies ". Теперь докажем " \impliedby "

G - открыто в Y . Доказать, что $A := G \cap Y$ - открыто в Y $a \in A \implies a \in G$, G - открыто $\implies \exists r > 0 : B_r^X(a) \subset G \implies B_r^X(a) \cap Y = B_r^Y(a) \subset G \cap Y$, то есть A открыто в Y . ■

2. $A \subset Y$ замкнутое в $Y \iff$ найдется замкнутое множество $F \in X$, т. ч $A = F \cap Y$

Доказательство. A - замкнуто в $Y \iff Y \setminus A$ - открыто в $Y \iff$

\exists открытое $G \in X : Y \setminus A = G \cap Y \iff$

$F := X \setminus G$ - замкнутое в X , при этом $A = Y \setminus (G \cap Y) = Y \cap (X \setminus G)$

С первого взгляда неочевидный переход, но следует из вложенности Y и G в $X = Y \cap F$. ■

13 Предел числовой последовательности и предел последовательности в метрическом пространстве

Определение. Предел числовой последовательности

$x_1, x_2, x_3 \dots \in R$. $a = \lim x_n$ если вне любого интервала, содержащего a , содержится лишь конечное число членов последовательности.

Замечание - Можно рассматривать симметричные интервалы (если есть несимметричный, для удобства его можно расширить или сузить до симметричного)

Определение. Предел последовательности в метрическом пространстве (X, d) - метрическое пространство, $x_1, x_2, \dots \in X$. $a = \lim x_n$ если вне любого шара $B_\varepsilon(a)$ содержится лишь конечное число членов последовательности.

Замечание - Верно также для любого открытого множества, содержащего a

Замечание - Существование предела зависит от пространства (в $R_+ x_n = 1/n$ не имеет предела)

Теорема. Свойства:

1. Если $a = \lim x_n$ и из x_n выкинули какое-то число членов так, чтобы осталось бесконечное число членов, то у оставшейся последовательности тот же предел
2. Если $a = \lim x_n$ и к последовательности добавить конечное число членов, то a - все еще предел
3. Добавление, замена или выкидывание конечного количества членом не меняет предел и его наличие (то же самое другими словами)
4. Перестановка членов не влияет на предел последовательности
5. Если $a = \lim x_n$ и $a = \lim y_n$, то если их перемешать, то у новой последовательности тоже предел a
6. Если $a = \lim x_n$, тогда у последовательности, в которой x_n встречается с конечной кратностью, тот же предел (написать один и тот же элемент много раз подряд)

Определение. $a = \lim x_n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N d(x_n, a) < \varepsilon$$

Определение. $A \subset X, (X, d)$ - метрическое пространство A - ограничено, если A целиком содержится в каком-нибудь шаре

Теорема.

1. Предел единственный

Доказательство.

Пусть $a \neq b \implies \exists B_{r_1}(a), B_{r_2}(b) : B_{r_1} \cap B_{r_2} = \emptyset$.

Вне $B_{r_1}(a)$ конечное число членов

Вне $B_{r_2}(b)$ конечное число членов

Тогда в последовательности конечное число членов. Противоречие. ■

2. Если последовательность имеет предел, то она ограничена

Доказательство.

Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N : \forall n \geq N x_n \in B_1(a)$.

Тогда $r := \max\{d(a, x_1), d(a, x_2), \dots, d(a, x_N)\} + 1$ ■

3. $a = \lim x_n \iff \lim d(x_n, a) = 0$

Доказательство.

$$\lim d(x_n, a) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N d(x_n, a) < \varepsilon \iff \lim x_n = a$$

■

4. Если $a = \lim x_n$ и $b = \lim y_n$, то $\lim d(x_n, y_n) = d(a, b)$

Доказательство.

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, b) \quad d(x_n, y_n) \leq d(a, x_n) + d(a, b) + d(b, y_n) \implies |d(x_n, y_n) - d(a, b)| \leq d(x_n, a) + d(y_n, b)$$

Справа каждая меньше $\varepsilon/2$, тогда слева стремится к нулю

■

14 Связь между пределами и предельными точками

Теорема. a - предельная точка $A \iff$ найдется последовательность точек $x \neq a \in A : \lim x_n = a$. Супер очевидно из соответствующих определений, но распишу

Доказательство.

“ \Leftarrow ”: Пусть $x_n \in A$ и $\lim x_n = a$.

Тогда в $B_r(a) \setminus \{a\}$ содержится бесконечное количество точек из x_n , так как $\exists N : \forall n \geq N x_n \in B_r(a)$

“ \Rightarrow ”: $r_1 = 1 \implies \exists x_1 \in B_1(a), r_2 = \min\{1/2, d(a, x_1)\}, r_3 = \min\{1/3, d(a, x_2)\} \dots$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : 1/N < \varepsilon \implies \forall n \geq N d(x_n, a) < 1/n \leq 1/N < \varepsilon$$

■

Теорема. Если $x_n \in A$ и $a = \lim x_n$, то $a \in Cl(A)$

Доказательство. Либо $a \in A$, тогда $a \in Cl(A)$, иначе $x_n \neq a$, тогда по теореме 1. $a \in A' \implies a \in Cl(A)$

■

15 Предельный переход в неравенствах

Теорема. Предельный переход в неравенстве. $x_n, y_n \in \mathbb{R}$

$$x_n \leq y_n \quad \forall n, a = \lim x_n, b = \lim y_n \implies a \leq b$$

Доказательство. Пусть $a > b$

$$\varepsilon = \frac{a+b}{2}$$

$$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

$$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 y_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

$$n := \max\{N_1, N_2\}$$

$$y_n \leq x_n. \text{ Противоречие}$$

■

Замечание - неверно для строгого знака $(-1/n, 1/n)$

Следствие: Если $x_n \leq b \forall n, \lim x_n = a \implies a \leq b$

Доказательство. $y_n := b$, далее из теоремы 1

■

Следствие: Если $x_n \geq a \forall n, \lim x_n = b \implies a \leq b$

Доказательство. $y_n := a$, далее из теоремы 1 ■

Следствие: $x_n \in [a, b], \lim x_n = c \implies c \in [a, b]$. Следует из предыдущих

16 Теорема о двух милиционерах

Теорема. Теорема о сжатой последовательности (о двух милиционерах)

$x_n \leq y_n \leq z_n \forall n \in N, \lim x_n = \lim z_n = a \implies \lim y_n = a$

Доказательство.

$$\left. \begin{array}{l} \lim x_n = a \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ \lim z_n = a \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{array} \right\} \implies x_n > a - \varepsilon, z_n < a + \varepsilon$$

При $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \implies a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ ■

Следствие: $|y_n| \leq z_n \forall n, \lim z_n = 0 \implies \lim y_n = 0$

Доказательство. $x_n := -z_n \implies x_n \leq |y_n| \leq z_n, x_n \rightarrow 0, z_n \rightarrow 0 \implies y_n \rightarrow 0$ ■

17 Монотонные последовательности

Определение.

x_n монотонно возрастает(убывает), если $\forall n x_n \leq (\geq) x_{n+1}$

x_n монотонна, если она монотонно возрастает или монотонно убывает

Теорема. Если последовательность монотонно возрастает(убывает) и ограничена сверху(снизу), то она имеет предел.

Доказательство. x_n такова, что $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots$ и ограничена сверху. Тогда у нее есть $\sup := S$. Докажем, что $\lim x_n = S$.

$\forall \varepsilon > 0$ $S - \varepsilon$ не является верхней границей $\implies \exists x_N > S - \varepsilon \implies \forall n \geq N S - \varepsilon < x_n < S + \varepsilon \implies S$ - предел ■

Следствие: Если последовательность монотонна, то она имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена.

“ \Leftarrow ” По доказанной теореме

“ \Rightarrow ” Из свойств предела

18 Топологическое пространство

Определение. X - множество. Топология, это набор подмножеств $\Omega \subset X$, называемых открытыми, таких что:

1. \emptyset, X - открытые
2. Объединение любого количества открытых - открыто
3. Пересечение конечного числа открытых - открыто

Примеры

$$\{\emptyset, X\}$$

$$X = [0, +\infty), \Omega = (a, +\infty), a \geq 0\}$$

Определение. Замкнутое множество - дополнение открытого

Определение. a - внутренняя точка множества A , если существует открытое множество U , т. ч. $a \in U, U \subset A$

Определение. Внутренность $Int A$ - объединение всех открытых множеств, содержащихся в A . Равносильно - множество всех внутренних точек

Определение. Замыкание $Cl A$ - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A

Определение. $a = \lim x_n$, если вне любого открытого множества, содержащего точку a находится лишь конечное число членов последовательности

$$\forall U \ni a \exists N \forall n \geq N x_n \in U$$

Определение. Хаусдорфовость

$\forall a, b \in X \exists U, V$ - открытые множества, такие что $a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$.

Определение. Если хаусдорфовость выполняется, то предел единственный.

Доказательство. Если a, b - пределы, то $\exists U, V : a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset \implies$ Вне U лежит конечное количество членов, вне V тоже, тогда и в X конечное число членов. Противоречие ■

19 Векторное пространство. Пространство R^d . Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского

Определение. X - векторное пространство (над полем \mathbb{R}), если: Определены операции "+": $X \times X \rightarrow X$ "*" : $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$

1. Сложение коммутативно и ассоциативно
2. Существует $\vec{0}$
3. Существует обратный элемент $x + (-x) = \vec{0}$

4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X$
5. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Определение.

$$R^d = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_d \rangle : x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\langle x_1, \dots, x_d \rangle + \langle y_1, \dots, y_d \rangle = \langle x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d \rangle$$

$$\alpha \langle x_1, \dots, x_d \rangle = \langle \alpha x_1, \dots, \alpha x_d \rangle$$

Определение. Скалярное произведение $\langle \bullet, \bullet \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
4. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

Определение. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

Доказательство. $f(t) := \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x + ty \rangle + \langle ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + t \langle x, y \rangle + t \langle y, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \geq 0$. Это всегда неотрицательно, тогда дискриминант неположителен.

$$4t^2 \langle x, y \rangle^2 - 4t^2 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0 \implies \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

■

20 Норма

Определение. Норма $\|\bullet\| : X \rightarrow \mathbb{R}$

1. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| * \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Примеры

$$X = \mathbb{R}, \quad \|x\| := |x|$$

$$X = \mathbb{R}^d, \quad \|x\| := |x_1| + |x_2| + \dots + |x_d|$$

Теорема. Если $\langle \bullet, \bullet \rangle$ - скалярное произведение в X , то $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ - норма.

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \implies \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{?}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| * \|y\| + \|y\|^2$$

$$2\langle x, y \rangle \leq 2\|x\| * \|y\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad - \text{ верно по неравенству Коши Буняковского}$$

Теорема. Свойства норм:

$$1. \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

$$2. d(x, y) := \|x - y\| \quad - \text{ метрика}$$

$$3. \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|$$

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

$$\|x - y\| \geq -(\|x\| - \|y\|)$$

Теорема. X - нормированное пространство. Тогда норма порождена некоторым скалярным произведением тогда и только тогда, когда

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \quad - \text{ тождество параллелограмма.}$$

Доказательства не будет. Автор принял Линал

21 Арифметические свойства пределов последовательности

X - нормированное пространство

$$x_n, y_n \in X \quad \lambda_n \in \mathbb{R}$$

$$\lim x_n = x_0 \quad \lim y_n = y_0 \quad \lim \lambda_n = \lambda_0$$

Теорема. Арифметические свойства пределов в нормированном пространстве

$$1. \lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$$

Доказательство.

$$\|x_n + y_n - (x_0 + y_0)\| = \|(x_n - x_0) + (y_n - y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\|$$

$$\lim x_n = x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \quad \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim y_n = y_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \quad \|y_n - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда при } n \geq \max\{N_1, N_2\} \quad \|x_n + y_n - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

$$2. \lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$$

Доказательство. Аналогично первому пункту. \blacksquare

$$3. \lim \lambda_n x_n = \lambda_0 x_0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} ||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| &= ||(\lambda_n x_n - \lambda_n x_0) + (\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0)|| \leq \\ &\leq ||\lambda_n x_n - \lambda_n x_0|| + ||\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0|| = |\lambda_n| * ||x_n - x_0|| + |\lambda_n - \lambda_0| * ||x_0|| \end{aligned}$$

Так как у λ_n есть предел, она ограничена, то есть $|\lambda_n| \leq M$.

Итого получаем:

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| \leq M * ||x_n - x_0|| + ||x_0|| * |\lambda_n - \lambda_0|$$

$$\begin{aligned} \lim x_n = x_0 &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \quad ||x_n - x_0|| < \frac{\varepsilon}{2M} \\ \lim \lambda_n = \lambda_0 &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \quad |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2||x_0|| + 1} \end{aligned}$$

При $n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| \leq M * ||x_n - x_0|| + ||x_0|| * |\lambda_n - \lambda_0| < M * \frac{\varepsilon}{2M} + ||x_0|| * \frac{\varepsilon}{2||x_0|| + 1} < \varepsilon$$

■

4. $\lim ||x_n|| = ||x_0||$

Доказательство.

$$||x_n|| - ||x_0|| = ||(x_n - x_0) + x_0|| - ||x_0|| \leq ||x_n - x_0|| + ||x_0|| - ||x_0|| = ||x_n - x_0|| \rightarrow 0$$

■

5. Если в X есть скалярное произведение, то $\lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle &= \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_0 \rangle + \langle x_n, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle = \\ &= \langle x_n, y_n - y_0 \rangle + \langle x_n - x_0, y_0 \rangle \\ | \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle | &\leq | \langle x_n, y_n - y_0 \rangle | + | \langle x_n - x_0, y_0 \rangle | \leq \\ &\leq ||x_n|| * ||y_n - y_0|| + ||x_n - x_0|| * ||y_0|| \end{aligned}$$

Так как у x_n есть предел, она ограничена, то есть $||x_n|| \leq M$.

Итого получаем:

$$| \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle | \leq M * \underbrace{||y_n - y_0||}_{\rightarrow 0} + ||y_0|| * \underbrace{||x_n - x_0||}_{\rightarrow 0}$$

■

Теорема. Арифметические свойства пределов числовых последовательностей

$$x_n, y_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = x_0 \quad \lim y_n = y_0$$

1. $\lim(x_n \pm y_n) = x_0 \pm y_0$
2. $\lim(x_n y_n) = x_0 y_0$
3. $\lim |x_n| = |x_0|$
4. Если $y_0 \neq 0$ и $y_n \neq 0 \ \forall n$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

Доказательство. Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$:

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|}$$

Так как $y_0 = \lim y_n$, найдется такое N_1 , что $\forall n \geq N_1 \quad |y_n| \in (\frac{|y_0|}{2}, \frac{3|y_0|}{2}) \Rightarrow |y_n| > \frac{|y_0|}{2}$
 При $n \geq N_1$ получаем, что

$$\frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|}$$

$$\lim y_n = y_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \quad |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon * y_0^2}{2}$$

Тогда если $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, то $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}| < \varepsilon$. Теперь, когда мы знаем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$, доказать исходное равенство легко:

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim(x_n * \frac{1}{y_n}) = \lim x_n * \lim \frac{1}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$$

■

22 Покоординатная сходимость в \mathbb{R}^d

$$x_n = \langle x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)} \rangle$$

x_n покоординатно сходится к x_0 , если

$$\begin{cases} \lim x_n^{(1)} = x_0^{(1)} \\ \dots \\ \lim x_n^{(d)} = x_0^{(d)} \end{cases}$$

Теорема.

x_n покоординатно сходится к $x_0 \iff x_n$ сходится к x_0 по норме в \mathbb{R}^d

$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_d^2}$ - норма

Доказательство.

$$\|x_n - x_0\| = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2}$$

Заметим следующее:

$$\sqrt{(x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2} \geq \sqrt{(x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2} = |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}|$$

$$\sqrt{(x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2} \leq |x_n^{(1)} - x_0^{(1)}| + \dots + |x_n^{(d)} - x_0^{(d)}|$$

Итого получаем

$$|x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \leq \|x_n - x_0\| \leq |x_n^{(1)} - x_0^{(1)}| + \dots + |x_n^{(d)} - x_0^{(d)}|$$

Докажем " \Rightarrow ":

$$\lim x_n = x_0 \Rightarrow \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim x_n^{(k)} = x_0^{(k)}$$

Докажем " \Leftarrow ":

$$\lim x_n^{(k)} = x_0^{(k)} \Rightarrow |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^d |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim x_n = x_0$$

■

23 Бесконечные пределы

- $x_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = +\infty$

Вне любого луча $(u, +\infty)$ находится лишь конечное число членов.

$$\forall u \quad \exists N : \forall n \geq N \quad x_n > u$$

- $x_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = -\infty$

Вне любого луча $(-\infty, u)$ находится лишь конечное число членов.

$$\forall u \quad \exists N : \forall n \geq N \quad x_n < u$$

- $x_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = \infty$

В любом интервале (u, v) находится лишь конечное число членов.

$$\forall u \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n| > u$$

Замечание 1: Если $\lim x_n = +\infty$ или $\lim x_n = -\infty$, то $\lim x_n = \infty$. Обратное неверно (контрпример - $x_n = (-1)^n n$).

Замечание 2: Если $\lim x_n = \infty$, то x_n не ограничена. Обратное неверно (контрпример - $x_n = n$ (если n четно) и $x_n = 0$ иначе).

Теорема. Единственность предела в $\overline{\mathbb{R}}$

Если $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\lim x_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, то $a = b$.

Доказательство. Пусть $a < b$.

Если $a, b \in \mathbb{R}$, то $a = b$ (должно быть доказано где-то раньше).

Если $a \in \mathbb{R}$ и $b = +\infty$, то в $(a - 1, a + 1)$ и $(a + 1, +\infty)$ должно содержаться бесконечное число членов последовательности, но это невозможно.

Аналогично для случая $a = -\infty$ и $b \in \mathbb{R}$.

Если $a = \infty$ и $b = \infty$, то либо $a = b = +\infty$, либо $a = b = -\infty$. ■

Теорема. О стабилизации знака в $\overline{\mathbb{R}}$

Если $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, x_n и a одного знака.

Доказательство. Не, ну это очевидно. ■

Теорема. О предельном переходе в неравенстве в $\overline{\mathbb{R}}$

1. Если $\lim x_n = +\infty$ и $x_n \leq y_n \forall n$, то $\lim y_n = +\infty$.

Доказательство. Мы знаем что,

$$\forall u \quad \exists N : \forall n \geq N \quad x_n > u$$

Так как $x_n \leq y_n \forall n$, то нам подойдет тоже N :

$$\forall n \geq N \quad y_n \geq x_n > u$$
 ■

2. Если $\lim y_n = -\infty$ и $x_n \leq y_n \forall n$, то $\lim x_n = -\infty$.

Доказательство. Аналогично первому пункту. ■

3. Если $x_n \leq y_n \forall n$ и $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, то $a \leq b$

Доказательство.

- $a, b \in \mathbb{R}$, доказано ранее
 - $a = -\infty$, то $a \leq b$ всегда
 - $a = +\infty$, то по первому пункту $b = +\infty$
 - $b = +\infty$, то $a \leq b$ всегда
 - $b = -\infty$, то по второму пункту $a = -\infty$
-

24 Бесконечно большие и малые последовательности

- x_n называется бесконечно большой, если $\lim x_n = \infty$
- x_n называется бесконечно малой, если $\lim x_n = 0$
- x_n называется сходящейся, если она имеет конечный предел

Теорема. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми

$$x_n \neq 0 \quad \forall n$$

$$x_n - \text{б.б.} \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} - \text{б.м.}$$

$$\text{Доказательство. } x_n - \text{б.б.} \Leftrightarrow \forall u > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n| > u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} - \text{б.м.} \quad \blacksquare$$

Теорема. О действиях с бесконечно малыми

1. Сумма / разность б.м. это б.м.

Доказательство. Предел суммы / разности это сумма / разность пределов. \blacksquare

2. Произведение б.м. и ограниченной это б.м.

$$\text{Доказательство. } y_n - \text{ограниченная} \Rightarrow |y_n| \leq M$$

$$x_n - \text{б.м.} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$|x_n y_n| \leq M |x_n| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

25 Арифметические действия в $\overline{\mathbb{R}}$

Теорема. Об арифметических операциях с ∞

1. $x_n \rightarrow +\infty$, y_n - ограниченная снизу $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$

$$\text{Доказательство. } y_n - \text{ограниченная снизу} \Rightarrow y_n \geq a$$

$$x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \forall u \quad \exists N : \forall n \geq N \quad x_n > u - a$$

$$\Rightarrow x_n + y_n > u - a + a = u \quad \blacksquare$$

2. $x_n \rightarrow -\infty$, y_n - ограниченная сверху $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow -\infty$

Доказательство. Аналогично предыдущему пункту. \blacksquare

3. $x_n \rightarrow \infty$, y_n - ограниченная $\Rightarrow x_n \pm y_n \rightarrow \infty$

Доказательство. Аналогично первому пункту. \blacksquare

4. $x_n \rightarrow \pm\infty, y_n \geq c > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \pm\infty$

Доказательство. $x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \forall u \quad \exists N : \forall n \geq N \quad x_n > \frac{u}{c}$

$y_n \geq c > 0 \Rightarrow x_n y_n \geq c x_n > u$

Случай $x_n \rightarrow -\infty$ рассматривается аналогично. ■

5. $x_n \rightarrow \pm\infty, y_n \leq c < 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \mp\infty$

Доказательство. Аналогично предыдущему пункту. ■

6. $x_n \rightarrow \infty, |y_n| \geq c > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \infty$

Доказательство. Аналогично четвертому пункту. ■

7. $x_n \rightarrow a \neq 0, y_n \neq 0 \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

Доказательство. $\lim \frac{y_n}{x_n} = 0 \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} - \text{б.м.} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} - \text{б.б.} \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$ ■

8. x_n - ограниченная, $y_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$

Доказательство. $y_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{y_n} - \text{б.м.} \Rightarrow x_n * \frac{1}{y_n} - \text{б.м.}$ ■

9. $x_n \rightarrow \infty, y_n \neq 0$ - ограниченная $\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

Доказательство. y_n - ограниченная $\Rightarrow |y_n| \leq M$

$x_n \rightarrow \infty \Rightarrow \forall u > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n| > uM \Rightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} \right| \geq \frac{|x_n|}{M} > u$ ■

Запрещенные операции:

- $+\infty \pm (\mp\infty)$
- $-\infty \pm (\pm\infty)$
- $\pm\infty * 0$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Почему эти операции запрещенные? Разберем на примере:

$\lim x_n = \lim y_n = +\infty$

$x_n - y_n$ может иметь любой предел в $\overline{\mathbb{R}}$, а может его вообще не иметь:

- $x_n = n + a, y_n = n \Rightarrow x_n - y_n = a \rightarrow a$
- $x_n = 2n, y_n = n \Rightarrow x_n - y_n = n \rightarrow +\infty$
- $x_n = n + (-1)^n, y_n = n \Rightarrow x_n - y_n = (-1)^n$ - предела не имеет

26 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x > -1, n \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Индукция по n .

База $n = 1 : (1+x) = 1+x$

Переход $n \rightarrow n+1 : (1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{>0} \underbrace{(1+x)^n}_{\text{assumption}} \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ ■

Замечание 1: В неравенстве Бернулли почти всегда строгий знак, равенство достигается только в случаях, когда $n = 1$ или $x = 0$.

Замечание 2: $(1+x)^p \geq 1+px \quad x > -1$ верно при всех $p \geq 1$ и $p \leq 0$. Какая-то жесткая тема. Дали без доказательства.

Следствие.

1. Если $a > 1$, то $\lim a^n = +\infty$.

Доказательство. $a > 1 \Rightarrow a = 1+x \quad x > -1$

$$a^n = (1+x)^n \geq 1+nx \rightarrow +\infty$$
 ■

2. Если $|a| < 1$, то $\lim a^n = 0$.

Доказательство. Считаем, что $a \neq 0$.

$$|\frac{1}{a}| > 1 \Rightarrow \lim |\frac{1}{a}|^n = +\infty \Rightarrow |\frac{1}{a}|^n - \text{б.б.} \Rightarrow |a^n| - \text{б.м.} \Rightarrow a^n - \text{б.м.}$$
 ■

27 Определение экспоненты

Рассмотрим последовательность $x_n = (1 + \frac{a}{n})^n$, где $a \in \mathbb{R}$

Теорема. x_n монотонно возрастает, начиная с $n > -a$ и ограничена сверху

Доказательство.

1. Монотонное возрастание (если $a < 0$, то с номера $n = -a + 1$)

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n-1}} &= \frac{(1 + \frac{a}{n})^n}{(1 + \frac{a}{n-1})^{n-1}} \\
&= \frac{\frac{(n+a)^n}{n^n}}{\frac{(n-1+a)^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} \\
&= \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} * \frac{(n+a)^n}{(n-1+a)^{n-1}} \\
&= \frac{(n-1)^n * (n+a)^n}{n^n * (n-1+a)^n} * \frac{n-1+a}{n-1} \\
&= (\frac{n^2 - n + an - a}{n^2 - n + an})^n * \frac{n-1+a}{n-1} \\
&= \underbrace{\left(1 - \frac{a}{n(n-1+a)}\right)^n}_{\geq 1 - \frac{na}{n(n-1+a)} \text{ by Bernoulli's inequality}} * \frac{n-1+a}{n-1} \\
&\geq \frac{n-1}{n-1+a} * \frac{n-1+a}{a} = 1
\end{aligned}$$

2. Ограниченность сверху

$y_n = (1 - \frac{a}{n})^n$ монотонно возрастает при $n > a$

$$x_n y_n = (1 + \frac{a}{n})^n * (1 - \frac{a}{n})^n = (1 - (\frac{a}{n})^2)^n \leq 1$$

$y_n \geq c > 0$, начиная с некоторого номера $\Rightarrow 1 \geq x_n y_n \geq c x_n \Rightarrow x_n \leq \frac{1}{c}$, начиная с некоторого номера $\Rightarrow x_n$ - ограниченная

■

Следствие. Существует конечный $\lim(1 + \frac{a}{n})^n$

Определение.

1. $\exp a := \lim(1 + \frac{a}{n})^n$

2. $e := \lim(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,71828$

Замечание: Последовательность $x_n = (1 + \frac{a}{n})^n$ при $a \neq 0$ строго монотонно возрастает с $n > -a$. В доказательстве пользовались неравенством Бернулли, при $a \neq 0$ в нем строгий знак.

Следствие. Последовательность $z_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ строго убывает и стремится к e

Доказательство. $z_n = \underbrace{(1 + \frac{1}{n})}_{\rightarrow 1} * \underbrace{(1 + \frac{1}{n})^n}_{\rightarrow e} \rightarrow e$

$$z_n = \frac{n+1}{n}^{n+1} = \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}}$$

Последовательность $(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$ строго возрастает, следовательно, обратная к ней строго убывает. ■

28 Свойства экспоненты

1. Для любого $a \in \mathbb{R}$ $\exp a > 0$
2. $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$
3. Если $a \leq b$, то $\exp a \leq \exp b$

Доказательство. $0 < 1 + \frac{a}{n} \leq 1 + \frac{b}{n}$ при $n > -a \Rightarrow \underbrace{(1 + \frac{a}{n})^n}_{\rightarrow \exp a} \leq \underbrace{(1 + \frac{b}{n})^n}_{\rightarrow \exp b}$ при $n > -a$ ■

4. $\exp a \geq 1 + a$

Доказательство. По неравенству Бернулли:

$$\underbrace{(1 + \frac{a}{n})^n}_{\rightarrow \exp a} \geq 1 + n * \frac{a}{n} = 1 + a \text{ при } n > -a \quad \blacksquare$$

5. $\exp a * \exp(-a) \leq 1$

Доказательство. $\underbrace{(1 + \frac{a}{n})^n}_{\rightarrow \exp a} * \underbrace{(1 - \frac{a}{n})^n}_{\rightarrow \exp(-a)} = (1 - (\frac{a}{n})^2)^n \leq 1$ ■

6. $\exp a \leq \frac{1}{1-a}$ при $a < 1$

Доказательство. С помощью двух предыдущих пунктов

$$\exp a \leq \frac{1}{\exp(-a)} \leq \frac{1}{1-a} \quad \blacksquare$$

7. $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ при всех n

Доказательство. $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \leq \underbrace{(1 + \frac{1}{m})^m}_{\rightarrow e}$ при $m \geq n+1 \Rightarrow (1 + \frac{1}{n})^n < e$

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2} \geq \underbrace{(1 + \frac{1}{m})^{m+1}}_{\rightarrow e} \text{ при } m \geq n+1 \Rightarrow (1 + \frac{1}{n})^{n+1} > e \quad \blacksquare$$

В частности, подставив $n = 1$ и $n = 5$ получаем, что $2 < e < 3$

29 Формула для экспоненты суммы

Лемма. Если $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, то $\lim(1 + \frac{a_n}{n})^n = \exp a$

Доказательство. Последовательность a_n ограничена $\Rightarrow a_n \leq M$, $a \leq M$ и $M > 0$

$$A := 1 + \frac{a}{n} \leq 1 + \frac{M}{n} \quad B := 1 + \frac{a_n}{n} \leq 1 + \frac{M}{n}$$

Надо доказать, что $\lim(A^n - B^n) = 0$

$$\begin{aligned} |A^n - B^n| &= |A - B|(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1}) \\ &\leq |A - B|n(1 + \frac{M}{n})^{n-1} \\ &\leq |A - B|n(1 + \frac{M}{n})^n \\ &= \frac{|a - a_n|}{n}n(1 + \frac{M}{n})^n \\ &= |a - a_n|(1 + \frac{M}{n})^n \leq \underbrace{|a - a_n|}_{\rightarrow 0} * \exp M \end{aligned}$$

■

Теорема. $\exp(a + b) = \exp a * \exp b$

Доказательство.

$$\underbrace{(1 + \frac{a}{n})^n}_{\rightarrow \exp a} * \underbrace{(1 + \frac{b}{n})^n}_{\rightarrow \exp b} = (1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2})^n = \underbrace{(1 + \frac{a+b + \frac{ab}{n}}{n})^n}_{a+b+\frac{ab}{n} := a_n \rightarrow a+b} = \underbrace{(1 + \frac{a_n}{n})^n}_{\rightarrow \exp(a+b)}$$

■

30 Сравнение скорости возрастания последовательностей

Теорема. Пусть $x_n > 0$ и $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $x_n \rightarrow 0$

Доказательство.

$l := \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Начиная с некоторого номера m $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1+l}{2} =: q < 1$

При $n \geq m$

$$0 < x_n < \frac{x_n}{x_{n-1}} * \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} * \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} * \dots * \frac{x_{m+1}}{x_m} * x_m < q^{n-m} x_m = q^n * \frac{x_m}{q^m}$$

$$0 < x_n < q^n * \frac{x_m}{q^m} \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

■

Следствие.

1. $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ при $a > 1$ (показательная функция растёт быстрее полиномиальной)

Доказательство. $x_n = \frac{n^k}{a^n}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k a^n}{a^{n+1} n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k * \frac{a^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} * \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \rightarrow \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

■

2. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ (факториал растёт быстрее показательной)

Доказательство. $x_n = \frac{a^n}{n!}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1} n!}{(n+1)! a^n} = a \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

■

3. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

Доказательство. $x_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

■

31 Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$)

Теорема 1. Штольца № 1

Пусть (y_n) строго возрастает и $\lim y_n = +\infty$. Тогда если $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$.

Доказательство. Ключевой случай $l = 0$:

Пусть

$$\varepsilon_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow 0$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём m , т.ч. $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ при $n \geq m$.

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k \cdot (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| \cdot (y_k - y_{k-1}) < \sum_{k=m+1}^n \varepsilon \cdot (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon \cdot \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon \cdot (y_n - y_m) < \varepsilon y_n$$

Можно считать, что $y_m > 0$ (по теореме о стабилизации знака).

Заметим, что $|x_m|$ фиксировано, а $y_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim \frac{|x_m|}{y_n} = 0$ и $\frac{|x_m|}{y_n} < \varepsilon$, начиная с некоторого номера.

$$|x_n| \leq |x_m| + |x_n - x_m| < |x_m| + \varepsilon y_n \Rightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \frac{|x_m|}{y_n} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

начиная с некоторого номера $\Rightarrow \lim \left| \frac{x_n}{y_n} \right| = 0 = l$.

Случай $l \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_n &:= x_n - l \cdot y_n, \widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1} = x_n - x_{n-1} - l \cdot (y_n - y_{n-1}) \\ \frac{\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} &= \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \rightarrow 0 \xrightarrow{l=0} \frac{\widetilde{x}_n}{y_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{x}_n}{y_n} = \frac{x_n - l \cdot y_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} - l \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow l \end{aligned}$$

Случай $l = +\infty$:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$$

начиная с некоторого номера

$\Rightarrow x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \Rightarrow x_n$ строго возрастает с нек. номера $m \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n - x_m > y_n - y_m \Rightarrow x_n > y_n + (x_m - y_m) \rightarrow +\infty \Rightarrow x_n \rightarrow +\infty$

Рассмотрим

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \rightarrow 0 \xrightarrow{l=0} \frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow +\infty$$

(а не ∞ , т.к. $x_n > 0, y_n > 0$ с нек. номера)

Случай $l = -\infty$

Пусть $\widetilde{x}_n := -x_n$.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = -\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty \Rightarrow -\frac{x_n}{y_n} = \frac{\widetilde{x}_n}{y_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow -\infty$$

■

Следствие.

Если $\lim a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$

Доказательство.

$$x_n := \sum_{k=1}^n a_k, \quad y_n := n \nearrow +\infty$$

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim a_n n - (n-1) = \lim a_n = a \Rightarrow \lim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$$

■

Пример. Найти предел:

$$m \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n^{m+1}} \cdot \sum_{k=1}^n k^m$$

$$x_n := \sum_{k=1}^n k^m, \quad y_n := n^{m+1} \nearrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} &= \lim \frac{n^{m+1} - (n-1)^{m+1}}{n^m} = \lim \frac{n^{m+1} - (n^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1} (C_{m+1}^k (-1)^k n^{m+1-k}))}{n^m} = \\ &= \lim \sum_{k=1}^{m+1} ((-1)^{k+1} \cdot \frac{C_{m+1}^k}{n^{k-1}}) = \lim C_{m+1}^1 + \lim \sum_{k=2}^{m+1} ((-1)^{k+1} \cdot \frac{C_{m+1}^k}{n^{k-1}}) = (m+1) + 0 = m+1 \end{aligned}$$

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{m+1} \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{m+1}$$

32 Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{0}{0}$)

Теорема 2. *Штольца № 2*

$0 < y_n < y_{n-1}$ и $\lim x_n = \lim y_n = 0$ Тогда если $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство. Случай $l = 0$:

Пусть

$$\varepsilon_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow 0$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём m , т.ч. $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ при $n \geq m$.

$$\begin{aligned} x_n - x_m &= \sum_{k=m+1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k (y_k - y_{k-1}) \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_k - y_{k-1}) < \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_m - y_n) \\ &(x_n - x_m) < \varepsilon (y_m - y_n) \end{aligned}$$

Устремим n к $+\infty \Rightarrow |x_n - x_m| \rightarrow |x_m| = x_m, \quad \varepsilon (y_m - y_n) \rightarrow \varepsilon y_m \Rightarrow$

\Rightarrow по пред. переходу в нер., при $m \geq$ нек. $N \quad |x_m| < \varepsilon y_m \Rightarrow \left| \frac{x_m}{y_m} \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim \frac{x_m}{y_m} = 0$

Случай $l \in \overline{\mathbb{R}}$: Так же, как в теореме Штольца № 1

$$\widetilde{x_n} := x_n - l \cdot y_n, \quad \widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}} = x_n - x_{n-1} - l \cdot (y_n - y_{n-1})$$

$$\frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \rightarrow 0 \xrightarrow{l=0} \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} = \frac{x_n - l \cdot y_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} - l \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow l$$

Случай $l = +\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty &\Rightarrow \frac{x_{n-1} - x_n}{y_{n-1} - y_n} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \text{ начиная с некоторого номера} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{n-1} - x_n > y_{n-1} - y_n > 0 \Rightarrow x_n \text{ строго убывает} \Rightarrow \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \xrightarrow{l=0} \lim \frac{y_n}{x_n} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = +\infty \end{aligned}$$

Случай $l = -\infty$: Так же, как в теореме Штольца № 1

Пусть $\widetilde{x_n} := -x_n$.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = -\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty \Rightarrow -\frac{x_n}{y_n} = \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow -\infty$$

■

33 Подпоследовательности (определение и простейшие свойства). Теорема о стягивающихся отрезках)

Определение. Последовательность (x_n) , $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ Тогда (x_{n_k}) - подпоследовательность.

Замечание. $n_k \geq k$ (по индукции)

Свойства:

1. Если последовательность имеет предел, то подпоследовательность имеет тот же предел.
2. Пусть две подпоследовательности в объединении дают исходную последовательность. Если подпоследовательности имеют одинаковый предел, то исходная последовательность имеет тот же предел.

Теорема 3. *О стягивающихся отрезках.*

$$\text{Пусть } [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots \text{ и } \lim(b_n - a_n) = 0$$

Тогда существует единственная точка c , принадлежащая всем отрезкам и $\lim a_n = \lim b_n = c$.

$$\text{Т.е. } \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] = c$$

Доказательство. По теореме о вложенных отрезках $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$.

Пусть $c, d \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] \Rightarrow c, d \in [a_n; b_n] \forall n$; НУО, $d \geq c$

$0 \leq d - c \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow c = d$, иначе $\exists n : b_n - a_n < \varepsilon = d - c$

$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \xrightarrow{2 \text{ мил.}} c - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim a_n = c$

$0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \xrightarrow{2 \text{ мил.}} b_n - c \rightarrow 0 \Rightarrow \lim b_n = c$

■

34 Теорема Больцано-Вейерштрасса в \mathbb{R}

Теорема 4. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. x_n ограничено $\Rightarrow x_n \in [a; b]$

В каком-то из отрезков $[a; \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}; b]$ содержится бесконечное число членов послед. Назовём этот отрезок $[a_1; b_1]$.

В каком-то из отрезков $[a_1; \frac{a_1+b_1}{2}]$ и $[\frac{a_1+b_1}{2}; b_1]$ содержится бесконечное число членов послед. Назовём этот отрезок $[a_2; b_2]$.

В каком-то из отрезков $[a_2; \frac{a_2+b_2}{2}]$ и $[\frac{a_2+b_2}{2}; b_2]$ содержится бесконечное число членов послед. Назовём этот отрезок $[a_3; b_3]$.

...

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots$$

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0$$

Тогда по теореме о стягивающихся отрезках $\lim a_n = \lim b_n = c$

Выберем подпоследовательность. Берём $[a_1; b_1]$, в нём есть какой-то член последовательности, назовём его x_{n_1} .

В $[a_2; b_2]$ содержится бесконечное число членов последовательности \Rightarrow есть член последовательности с номером, большим n_1 . Обозначим его x_{n_2} , тогда $n_2 > n_1$.

...

$x_{n_k} \in [a_k; b_k], n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, значит построили подпоследовательность.

$$a_k \rightarrow c, b_k \rightarrow c \quad a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \xrightarrow{2 \text{ мил.}} \lim x_{n_k} = c$$

■

35 Аналог теоремы Больцано–Вейерштрасса для неограниченной последовательности. Частичные пределы. Теорема о характеристике частичных пределов.

Теорема 5.

1. Неограниченная монотонная последовательность стремится к $+\infty$ или к $-\infty$.
2. Из любой неограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ или к $-\infty$.

Доказательство.

1. Пусть (x_n) возрастает. (x_n) неограничена \Rightarrow никакое u не является верхней границей $\Rightarrow \exists m : x_m > u \Rightarrow u < x_m \leq x_{m+1} \leq x_{m+2} \leq \dots \Rightarrow x_n > u$, начиная с некоторого номера $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$

2. Пусть (x_n) неограничена сверху.

1 не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_{n_1} > 1$;

$\max\{2, x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$ не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_{n_2} > \max\{\dots\} \Rightarrow x_{n_2} > 2$,
 $n_2 > n_1$;

$\max\{3, x_1, x_2, \dots, x_{n_2}\}$ не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_{n_3} > \max\{\dots\} \Rightarrow x_{n_3} > 3$,
 $n_3 > n_2$;

и т.д.

Итого, $x_{n_k} > k$ и $n_1 < n_2 < \dots \Rightarrow (x_{n_k})$ – подпоследовательность (x_n) и $\lim x_{n_k} = +\infty$ по предельному переходу в неравенстве.

■

Определение. a – частичный предел последовательности (x_n) , если найдётся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow a$.

Теорема 6. a – частичный предел последовательности \Leftrightarrow в любой окрестности точки a найдётся бесконечное число членов последовательности.

Доказательство.

” \Rightarrow ”:

Если $a = \lim x_{n_k}$ и U_a – окрестность точки a , то все x_{n_k} кроме конечного числа лежат в $U_a \Rightarrow$ в U_a лежит бесконечное число членов последовательности (x_n) .

” \Leftarrow ”:

Будем строить подпоследовательность, имеющую предел a .

В $B_1(a)$ найдётся бесконечное число членов последовательности, возьмём какой-то и назовём его x_{n_1} .

В $B_{1/2}(a)$ найдётся бесконечное число членов последовательности, значит найдётся член (x_n) с индексом, большим n_1 , назовём его x_{n_2} .

В $B_{1/3}(a)$ найдётся бесконечное число членов последовательности, значит найдётся член (x_n) с индексом, большим n_2 , назовём его x_{n_3} .

...

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

$$x_{n_k} \in B_{1/k}(a) \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k} \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) \rightarrow 0 \Rightarrow \lim x_{n_k} = a$$

■

36 Фундаментальные последовательности. Свойства. Критерий Коши.

Определение. Фундаментальная последовательность (сходящаяся в себе, последовательность Коши)

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. $x_n \in X$. x_n – фундаментальная последовательность, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Свойства:

1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

Доказательство:

Пусть $\lim x_n = a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N :$

$$\forall n \geq N \rho(x_n, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\forall m \geq N \rho(x_m, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \varepsilon$$

2. Фундаментальная последовательность ограничена

Доказательство:

Берём $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N : \forall n, m \geq N \rho(x_n, x_m) < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall n \geq N \rho(x_n, x_N) < 1 \Leftrightarrow x_n \in B_1(x_N)$$

$$R := \max\{\rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} \Rightarrow \forall n x_n \in B_R(x_N)$$

3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то фундаментальная последовательность имеет тот же предел.

Доказательство:

Пусть $\lim x_{n_k} = a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

$$\exists K : \forall k \geq K \rho(x_k, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\exists N : \forall n, m \geq N \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Возьмём $N \geq 0$ и подберём такое k , что $k \geq N$

и $n_k \geq N$ (например, $k \geq \max N, K$ подходит)

$$\text{Тогда } \rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ (т.к. } n_k \geq N)$$

$$\text{И тогда } \rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ (т.к. } k \geq K)$$

$$\Rightarrow \rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \Rightarrow \lim x_n = a$$

Теорема 7. Критерий Коши

Числовая последовательность имеет предел \Leftrightarrow она фундаментальна.

Доказательство.

" \Rightarrow ":

По свойству 1.

" \Leftarrow ":

фундаментальность $\xrightarrow{\text{св-во 2}}$ ограниченность $\xrightarrow{\text{Больцано–Вейерштрасса}}$
 \Rightarrow сущ. сходящаяся подпослед. $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{фундаментальность} \\ \text{фундаментальность} \end{matrix}} \right\} \xrightarrow{\text{св-во 3}}$ существует конечный предел.

■

37 Теорема Больцано–Вейерштрасса в \mathbb{R}^d . Полнота \mathbb{R}^d

Определение. Полнота метрического пространства

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. X – полное, если любая фундаментальная последовательность в нём имеет предел.

Теорема 8. \mathbb{R}^d – полное пространство.

Доказательство.

Возьмём фундаментальную последовательность (x_n) . $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)})$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}| &\leq \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + (x_n^{(2)} - x_m^{(2)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{числовая послед. } x_n^{(k)} &\text{ фундаментальна} \Rightarrow \text{у неё есть конечный предел} \\ \lim x_n^{(k)} = a_k &\Rightarrow \lim x_n = a, \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \end{aligned}$$

Т.к. в \mathbb{R}^d покомпонентная и сходимость по метрике – одно и то же.

■

Теорема 9. Больцано–Вейерштрасса в \mathbb{R}^d .

Доказательство. Пусть векторная последовательность $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)})$ ограничена. Это равносильно тому, что все её координатные последовательности ограничены.

Выделим из первой координатной последовательности сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_{1,k}}^{(1)})$. Тогда получим подпоследовательность $(x_{n_{1,k}})$, первая координатная последовательность которой сходится, а остальные ограничены.

Тогда в ней можно выделить такую подпоследовательность $(x_{n_{2,k}})$ так, чтобы вторая координатная последовательность сходилась.

Повторим так ещё $d - 2$ раз и получим то, что в векторной подпоследовательности (x_{n_k}) , где $n_k = n_{d,k}$, любая координатная последовательность сходится $\Rightarrow (x_{n_k})$ тоже сходится, т.к. в \mathbb{R}^d покомпонентная и сходимость по метрике – одно и то же.

■

38 Верхний и нижний пределы. Определение и теорема существования. Связь между частичными пределами и верхним и нижним пределами.

Определение. Нижний и верхний пределы

x_n - числовая последовательность.

$\underline{\lim} x_n := \liminf x_n := \liminf_{k \geq n} x_k$ - нижний предел.

$\overline{\lim} x_n := \limsup x_n := \limsup_{k \geq n} x_k$ - верхний предел.

$y_n := \inf_{k \geq n} x_k = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \quad y_n \leq y_{n+1}$

$z_n := \sup_{k \geq n} x_k = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \quad z_n \geq z_{n+1}$

Теорема 10. $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$ существуют в \mathbb{R} и $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$

Доказательство.

Про $\underline{\lim}$: $y_n \leq y_{n+1} \Rightarrow (y_n)$ - возрастающая последовательность \Rightarrow у неё есть предел в $\overline{\mathbb{R}}$.

Про $\overline{\lim}$: $z_n \geq z_{n+1} \Rightarrow (z_n)$ - убывающая последовательность \Rightarrow у неё есть предел в $\overline{\mathbb{R}}$.

Про неравенство $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$: $y_n \leq z_n, y_n \rightarrow \underline{\lim}, z_n \rightarrow \overline{\lim} \Rightarrow$ по предельному переходу в неравенстве $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$. ■

Теорема 11.

1. $\overline{\lim}$ - наибольший частичный предел
2. $\underline{\lim}$ - наименьший частичный предел
3. $\exists \lim \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$ и в этом случае $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

Доказательство.

1. $a := \overline{\lim} x_n$

Рассмотрим **случай** $a \in \mathbb{R}$

Докажем, что a - частичный предел.

$$a = \lim z_n, z_n = \sup_{k \geq n} x_k, z_n \searrow a$$

Будем строить некоторую подпоследовательность (x_{n_k}) .

Найдётся $n_k \geq n_{k-1} : x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$. Пусть не нашлось $\Rightarrow x_n \leq a - \frac{1}{k} \forall n \geq n_{k-1} \Rightarrow \sup\{x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-1}+1}, \dots\} \leq a - \frac{1}{k} \Rightarrow a \leq z_{n_{k-1}} \leq a - \frac{1}{k}$. Противоречие

$$a - \frac{1}{k} \rightarrow a, z_{n_k} \rightarrow a, a - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k} \xrightarrow{2 \text{ мил.}} x_{n_k} \rightarrow a$$

Докажем, что a - наибольший частичный предел.

Пусть b - частичный предел $\Rightarrow b = \lim x_{n_k}$. Но $x_{n_k} \rightarrow b, z_{n_k} \rightarrow a \Rightarrow$ по предельному переходу $b \leq a$.

Рассмотрим **случай** $a = -\infty$.

Тогда $z_n \rightarrow -\infty$, но $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \geq x_n \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$.

Рассмотрим **случай** $a = +\infty$.

Тогда $z_n = +\infty \Rightarrow \sup x_1, x_2, \dots = +\infty \Rightarrow x_n$ не ограничена сверху \Rightarrow в ней найдётся подпоследовательность, стремящаяся к $+\infty$.

2. Доказывается аналогично

3. " \Rightarrow ":

Если $a = \lim x_n$, то все подпоследовательности стремятся к $a \Rightarrow$ все частичные пределы равны $a \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = \lim x_n = a$.

" \Leftarrow ":

$$y_n \rightarrow a, z_n \rightarrow a, y_n \leq x_n \leq z_n \xrightarrow{2 \text{ мил.}} x_n \rightarrow a \Rightarrow \lim x_n = \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = a$$

■

Замечание. Арифметики для верхних и нижних пределов нет.

Пример.

$$x_n = (-1)^n, \quad y_n = (-1)^{n+1} \Rightarrow \underline{\lim} x_n = \underline{\lim} y_n = -1$$

$$x_n + y_n = 0 \Rightarrow \underline{\lim} (x_n + y_n) = \underline{\lim} (x_n + y_n) = 0$$

$$\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n = -2 < 0 = \underline{\lim} (x_n + y_n)$$

39 Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и ε . Сохранение неравенств.

Теорема 12.

1. $a = \underline{\lim} x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : x_n < a + \varepsilon \end{cases}$
2. $b = \overline{\lim} x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \ x_n < b + \varepsilon & \textcircled{1} \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon & \textcircled{2} \end{cases}$

Доказательство.

2. Докажем $\textcircled{1} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : z_N < b + \varepsilon$

" \Rightarrow ":

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \ x_n < b + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \ x_n < b + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_N = \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} \leq b + \frac{\varepsilon}{2} < b + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : z_N < b + \varepsilon$$

" \Leftarrow ":

Зафиксируем $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N : z_N < b + \varepsilon \Leftrightarrow \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} < b + \varepsilon \Rightarrow x_n < b + \varepsilon \forall n \geq N$

Докажем $\textcircled{2} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall N z_N > b - \varepsilon$

" \Rightarrow ":

$\forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon$ при этом $z_N = \sup\{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall N z_N > b - \varepsilon$

" \Leftarrow ":

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $N \Rightarrow z_N > b - \varepsilon \Leftrightarrow \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} > b - \varepsilon \Rightarrow \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon$,

иначе $\forall n \geq N : x_n \leq b - \varepsilon$ и тогда $\sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} \leq b - \varepsilon \Leftrightarrow z_N \leq b - \varepsilon$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : z_N < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N z_N > b - \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \text{т.к. } z_n \searrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N z_n < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N z_N > b - \varepsilon \end{cases}$$

Это и есть определение предела $\Rightarrow b = \overline{\lim} x_n$

В обратную сторону, первая строка следует из определения предела, вторая строка следует из того, что $(z_n) \searrow$. Более того, $(z_n) \searrow, \lim z_n = b \Rightarrow z_n \geq b$

■

Теорема 13.

Если $x_n \leq y_n$, то $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n$ и $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$

Доказательство.

$x_n \leq y_n \Rightarrow \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \leq \inf\{y_n, y_{n+1}, \dots\} \Rightarrow$ по пред. переходу $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n$

Аналогично для $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$.

■

40 Сходимость рядов. Необходимое условие сходимости рядов. Примеры.

Определение. Ряд

$x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ – ряд.

Определение. Частичная сумма ряда

$S_n := \sum_{k=1}^n x_k$

Определение. Сумма ряда

Сумма ряда – $\lim S_n$, если он существует.

Определение. Сходимость ряда

Ряд сходится, если $\exists \lim S_n \in \mathbb{R}$

В противном случае ряд расходится.

Теорема 14. *Необходимое условие сходимости*

Если $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ сходится, то $\lim x_n = 0$.

Доказательство. Если ряд сходится, то $S := \lim S_n \in \mathbb{R}$. Тогда $x_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim x_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$ ■

Примеры:

1. Геометрическая прогрессия $1 + q + q^2 + \dots \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

При $|q| < 1$ $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow \frac{1}{1-q}$

При $|q| > 1$ ряд расходящийся, т.к. не выполнено необходимое условие.

2. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$S_{2n} = 0, S_{2n+1} = 1 \Rightarrow$ предела нет.

3. Гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ – гармонические числа. H_n монотонно возрастает.

$$H_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{> 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}} >$$

$$> 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n \text{ шт.}} = 1 + \frac{n}{2} \Rightarrow \text{частичные суммы сколь угодно большие} \Rightarrow \lim H_n = +\infty$$

Гармонический ряд – расходящийся ряд, члены которого стремятся к 0.

- 4.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$