

Конспект лекций по математическому анализу

Храбров Александр Игоревич

Первый курс, первый семестр 2020

Оглавление

1	Введение	2
1	Множества	2
2	Отношения	3

Глава 1

Введение

1 Множества

Определение 1. *Множество - набор уникальных элементов*

Множества - большие буквы A, B, \dots

Элементы множеств - маленькие буквы a, b, \dots

$x \in A$ - x принадлежит A

$x \notin A$ - x не принадлежит A

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

\mathbb{R} - вещественные числа

\mathbb{C} - комплексные числа

Теорема 2. *Правила Де Моргана*

$$A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$$

$$A \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$$

Доказательство. Докажем для первой формулы. Вторая доказывается аналогично.

$$x \in A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_{\alpha} \text{ при всех } \alpha \end{cases} \iff x \in A \setminus B_{\alpha} \text{ при всех } \alpha$$

$\alpha \in I \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$ ■

Теорема 3. Операции над множествами

- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Замечание: \triangle, \cup, \cap - коммутативны, ассоциативны

Определение 4. Декартово произведение множеств $A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A; b \in B\}$

Теорема 5.

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha})$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_{\alpha})$$

Доказательство. $x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in B_{\alpha} \text{ для некоторых } \alpha \in I \end{cases} \iff$
 $x \in A \cap B_{\alpha} \text{ для некоторых } \alpha \in I \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha})$ ■

Определение 6. Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ - пара “пронумерованных” элементов

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff$$

1 `((a == c) && (b == d))`

2 Отношения

Определение 7. Область определения: $\delta_R = \{x \in A : \exists y \in B, \text{ т.ч. } \langle x, y \rangle \in R\}$

Определение 8. Область значений: $\rho_R = \{y \in B : \exists x \in A, \text{ т.ч. } \langle x, y \rangle \in R\}$

$$\delta_{R^{-1}} = \rho_R$$

$$\rho_{R^{-1}} = \delta_R$$

Определение 9. Композиция отношений

$$R_1 \subset A \times B, \quad R_2 \subset B \times C, \quad R_1 \circ R_2 \subset A \times C$$

Определение 10. Бинарным отношением R называется подмножество элементов декартова произведения двух множеств $R \subset A \times B$

Элементы $x \in A, y \in B$ находятся в отношении, если $\langle x, y \rangle \in R$ (то же, что xRy)

Обратное отношение $R^{-1} \subset B \times A$