Конспект лекций по математическому анализу

Храбров Александр Игоревич

Первый курс, первый семестр 2020

Оглавление

1 Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$)

Теорема 1. *Штольца № 1*

Пусть (y_n) строго возрастает и $\lim y_n = +\infty$. Тогда если $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$.

Доказательство. Ключевой случай $l = 0$:

Пусть

$$\varepsilon_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to 0$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём m, т.ч. $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ при $n \geq m$.

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_{m+1} - x_m) = \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k \cdot (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\varepsilon_k| \cdot (y_k - y_{k-1}) < \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon \cdot (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon \cdot \sum_{k=m+1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon \cdot (y_n - y_m) < \varepsilon y_n$$

Можно считать, что $y_m > 0$ (по теореме о стабилизации знака).

Заметим, что $|x_m|$ фиксировано, а $y_n \to +\infty \Rightarrow \lim \frac{|x_m|}{y_n} = 0$ и $\frac{|x_m|}{y_n} < \varepsilon$, начиная с некоторого номера.

$$|x_n| \leq |x_m| + |x_n - x_m| < |x_m| + \varepsilon y_n \Rightarrow \left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{|x_m|}{y_n} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

начиная с некоторого номера $\Rightarrow \lim\left|\frac{x_n}{y_n}\right| = 0 = l$.

Случай $l \in \mathbb{R}$:

$$\widetilde{x_n} := x_n - l \cdot y_n, \widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}} = x_n - x_{n-1} - l \cdot (y_n - y_{n-1})$$

$$\frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \to 0 \xRightarrow{l=0} \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} = \frac{x_n - l \cdot y_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} - l \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to l$$

Случай $l = +\infty$:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$$

начиная с некоторого номера
$\Rightarrow x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \Rightarrow x_n$ строго возрастает с нек. номера $m \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n - x_m > y_n - y_m \Rightarrow x_n > y_n + (x_m - y_m) \to +\infty \Rightarrow x_n \to +\infty$

Рассмотрим

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \to 0 \xRightarrow{l=0} \frac{y_n}{x_n} \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to +\infty$$

(а не ∞, т.к. $x_n > 0, y_n > 0$ с нек. номера)

Случай $l = -\infty$

Пусть $\widetilde{x_n} := -x_n$.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to -\infty \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = -\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - yn - 1} \to +\infty \Rightarrow -\frac{x_n}{y_n} = \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to -\infty$$

$\blacksquare$

Следствие.

$$\text{Если } \lim a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \lim \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a$$

Доказательство.

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad y_n := n \nearrow +\infty$$

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim a_n n - (n-1) = \lim a_n = a \Rightarrow \lim \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a$$

$\blacksquare$

Пример. Найти предел:

$$m \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n^{m+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^m$$

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} k^m, \quad y_n := n^{m+1} \nearrow +\infty$$

$$\lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \lim \frac{n^{m+1} - (n-1)^{m+1}}{n^m} = \lim \frac{n^{m+1} - (n^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1}(C_{m+1}^k(-1)^k n^{m+1-k})}{n^m}) =$$
$$= \lim \sum_{k=1}^{m+1}((-1)^{k+1} \cdot \frac{C_{m+1}^k}{n^{k-1}}) = \lim C_{m+1}^1 + \lim \sum_{k=2}^{m+1}((-1)^{k+1} \cdot \frac{C_{m+1}^k}{n^{k-1}}) = (m+1) + 0 = m+1$$

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{m+1} \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{m+1}$$

2 Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{0}{0}$)

Теорема 2. *Штольца № 2*

$$0 < y_n < y_{n-1} \text{ и } \lim x_n = \lim y_n = 0 \text{ Тогда если } \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \lim \frac{x_n}{y_n} = l$$

Доказательство. Случай $l = 0$:

Пусть

$$\varepsilon_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to 0$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём m, т.ч. $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ при $n \geq m$.

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k (y_k - y_{k-1}) \Rightarrow |x_n - x_m| \leq$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} -|\varepsilon_k|(y_k - y_{k-1}) < \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon(y_m - y_n)$$

$$(x_n - x_m) < \varepsilon(y_m - y_n)$$

$$\text{Устремим } n \text{ к } +\infty \Rightarrow |x_n - x_m| \to |-x_m| = x_m, \quad \varepsilon(y_m - y_n) \to \varepsilon y_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по пред. переходу в нер., при } m \geq \text{нек. } N \quad |x_m| < \varepsilon y_m \Rightarrow \left|\frac{x_m}{y_m}\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim \frac{x_m}{y_m} = 0$$

Случай $l \in \overline{\mathbb{R}}$: Так же, как в теореме Штольца № 1

$$\widetilde{x_n} := x_n - l \cdot y_n, \widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}} = x_n - x_{n-1} - l \cdot (y_n - y_{n-1})$$

$$\frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \to 0 \xRightarrow{l=0} \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} = \frac{x_n - l \cdot y_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} - l \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to l$$

Случай $l = +\infty$:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_{n-1} - x_n}{y_{n-1} - y_n} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \text{ начиная с некоторого номера} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{n-1} - x_n > y_{n-1} - y_n > 0 \Rightarrow x_n \text{ строго убывает} \Rightarrow \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \xRightarrow{l=0} \lim \frac{y_n}{x_n} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = +\infty$$

Случай $l = -\infty$: Так же, как в теореме Штольца № 1

Пусть $\widetilde{x_n} := -x_n$.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to -\infty \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = -\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - yn - 1} \to +\infty \Rightarrow -\frac{x_n}{y_n} = \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to -\infty$$

■

3 Подпоследовательности (определение и простейшие свойства). Теорема о стягивающихся отрезках)

Определение 3. *Последовательность (x_n), $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ Тогда (x_{n_k}) - подпоследовательность.*

Замечание. $n_k \geq k$ (по индукции)

Свойства:

1. Если последовательность имеет предел, то подпоследовательность имеет тот же предел.
2. Пусть две подпоследовательности в объединении дают исходную последовательность. Если подпоследовательности имеют одинаковый предел, то исходная последовательность имеет тот же предел.

Теорема 4. *О стягивающихся отрезках.*

$$\text{Пусть } [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset ... \text{ и } \lim(b_n - a_n) = 0$$

Тогда существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам и $\lim a_n = \lim b_n = c$.

$$\text{Т.е. } \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] = c$$

Доказательство. По теореме о вложенных отрезках $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] \neq \varnothing$.

$$\text{Пусть } c, d \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] \Rightarrow c, d \in [a_n; b_n] \forall n; \text{ НУО, } d \geq c$$

$$0 \leq d - c \leq b_n - a_n \to 0 \Rightarrow c = d, \text{ иначе } \exists n : b_n - a_n < \varepsilon = d - c$$

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \to 0 \xRightarrow{\text{2 мил.}} c - a_n \to 0 \Rightarrow \lim a_n = c$$

$$0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \to 0 \xRightarrow{\text{2 мил.}} b_n - c \to 0 \Rightarrow \lim b_n = c$$

■

4 Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}$

Теорема 5. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. x_n ограничено $\Rightarrow x_n \in [a; b]$

В каком-то из отрезков $[a; \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}; b]$ содержится бесконечное число членов послед.
Назовём этот отрезок $[a_1; b_1]$.

В каком-то из отрезков $[a_1; \frac{a_1+b_1}{2}]$ и $[\frac{a_1+b_1}{2}; b_1]$ содержится бесконечное число членов послед.
Назовём этот отрезок $[a_2; b_2]$.

В каком-то из отрезков $[a_2; \frac{a_2+b_2}{2}]$ и $[\frac{a_2+b_2}{2}; b_2]$ содержится бесконечное число членов послед. Назовём этот отрезок $[a_3; b_3]$.

...

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset ...$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$$

Тогда по теореме о стягивающихся отрезках $\lim a_n = \lim b_n = c$

Выберем подпоследовательность. Берём $[a_1; b_1]$, в нём есть какой-то член последовательности, назовём его x_{n_1}.

В $[a_2; b_2]$ содержится бесконечное число членов последовательности $\Rightarrow$ есть член последовательности с номером, большим n_1. Обозначим его x_{n_2}, тогда $n_2 > n_1$.

...

$x_{n_k} \in [a_k; b_k], n_1 < n_2 < n_3 < ...$, значит построили подпоследовательность.

$$a_k \to c,\ b_k \to c \quad a_k \le x_{n_k} \le b_k \xRightarrow{\text{2 мил.}} \lim x_{n_k} = c$$

■

5 Аналог теоремы Больцано–Вейерштрасса для неограниченной последовательности. Частичные пределы. Теорема о характеристике частичных пределов.

Теорема 6.

1. Неограниченная монотонная последовательность стремится к $+\infty$ или к $-\infty$.
2. Из любой неограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ или к $-\infty$.

Доказательство. .

1. Пусть (x_n) возрастает. (x_n) неограничена $\Rightarrow$ никакое u не является верхней границей $\Rightarrow$ $\exists m : x_m x_m > u \Rightarrow u < x_m \le x_{m+1} \le x_{m+2} \le \dots \Rightarrow x_n > u$, начиная с некоторого номера $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$
2. Пусть (x_n) неограничена сверху.

   1 не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_{n_1} > 1$;
   $\max\{2, x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$ не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_{n_2} > \max\{\dots\} \Rightarrow x_{n_2} > 2$, $n_2 > n_1$;
   $\max\{3, x_1, x_2, \dots, x_{n_2}\}$ не является верхней границей $\Rightarrow \exists x_{n_3} > \max\{\dots\} \Rightarrow x_{n_3} > 3$, $n_3 > n_2$;
   и т.д.

Итого, $x_{n_k} > k$ и $n_1 < n_2 < \dots \Rightarrow (x_{n_k})$ – подпоследовательность (x_n) и $\lim x_{n_k} = +\infty$ по предельному переходу в неравенстве.

■

Определение 7. *a – частичный предел последовательности (x_n), если найдётся подпоследовательность $x_{n_k} \to a$.*

Теорема 8. *a – частичный предел последовательности $\Leftrightarrow$ в любой окрестности точки a найдётся бесконечное число членов последовательности.*

Доказательство.

"$\Longrightarrow$":

Если $a = \lim x_{n_k}$ и U_a – окрестность точки a, то все x_{n_k} кроме конечного числа лежат в $U_a \Rightarrow$ в U_a лежит бесконечное число членов последовательности (x_n).

"$\Longleftarrow$":

Будем строить подпоследовательность, имеющую предел a.

В $B_1(a)$ найдётся бесконечное число членов последовательности, возьмём какой-то и назовём его x_{n_1}.
В $B_{1/2}(a)$ найдётся бесконечное число членов последовательности, значит найдётся член (x_n) с индексом, большим n_1, назовём его x_{n_2}.
В $B_{1/3}(a)$ найдётся бесконечное число членов последовательности, значит найдётся член (x_n) с индексом, большим n_2, назовём его x_{n_3}.
...

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$
$x_{n_k} \in B_{1/k}(a) \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k} \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) \to 0 \Rightarrow \lim x_{n_k} = a$

■

6 Фундаментальные последовательности. Свойства. Критерий Коши.

Определение 9. *Фундаментальная последовательность (сходящаяся в себе, последовательность Коши)*

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. $x_n \in X$. x_n – фундаментальная последовательность, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m \geq N\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Свойства:

1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

   Доказательство:
   Пусть $\lim x_n := a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N :$
   $\forall n \geq N\ \ \rho(x_n, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$

$\forall m \geq N \;\; \rho(x_m, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$
$\Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \varepsilon$

2. Фундаментальная последовательность ограничена

   Доказательство:
   Берём $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N : \forall n, m \geq N \;\; \rho(x_n, x_m) < 1 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \forall n \geq N \;\; \rho(x_n, x_N) < 1 \Leftrightarrow x_n \in B_1(x_N)$
   $R := \max\{\rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), \ldots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} \Rightarrow \forall n \; x_n \in B_R(x_N)$

3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то фундаментальная последовательность имеет тот же предел.

   Доказательство:
   Пусть $\lim x_{n_k} = a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.
   $\exists K : \forall k \geq K \quad \rho(x_k, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$
   $\exists N : \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$
   Возьмём $N \geq 0$ и подберём такое k, что $k \geq N$
   и $n_k \geq N$ (например, $k \geq \max N, K$ подходит)
   Тогда $\rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2}\varepsilon$ (т.к. $n_k \geq N$)
   И тогда $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$ (т.к. $k \geq K$)
   $\Rightarrow \rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \Rightarrow \lim x_n = a$

Теорема 10. *Критерий Коши*

Числовая последовательность имеет предел $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.

Доказательство.

"$\Longrightarrow$":
По свойству 1.

"$\Longleftarrow$":
фундаментальность $\xRightarrow{\text{св-во 2}}$ ограниченность $\xRightarrow{\text{Больцано–Вейерштрасса}}$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow \text{сущ. сходящаяся подпосл.} \\ \text{фундаментальность}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{св-во 3}} \text{существует конечный предел.}$$

∎

7 Теорема Больцано–Вейерштрасса в $\mathbb{R}^d$. Полнота $\mathbb{R}^d$

Определение 11. *Полнота метрического пространства*

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. X - полное, если любая фундаментальная последовательность в нём имеет предел.

Теорема 12. $\mathbb{R}^d$ *- полное пространство.*

Доказательство.

Возьмём фундаментальную последовательность (x_n). $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(d)})$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m \geq N\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|x_n^{(k)} - x_m^{(k)}\right| \leq \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + (x_n^{(2)} - x_m^{(2)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{числовая послед. } x_n^{(k)} \text{ фундаментальна } \Rightarrow \text{у неё есть конечный предел}$$

$$\lim x_n^{(k)} = a_k \Rightarrow \lim x_n = a, \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$$

Т.к. в $\mathbb{R}^d$ покоординатная и сходимость по метрике – одно и то же.

■

Теорема 13. *Больцано–Вейерштрасса в* $\mathbb{R}^d$.

Доказательство. Пусть векторная последовательность $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)})$ ограничена. Это равносильно тому, что все её координатные последовательности ограничены.

Выделим из первой координатной последовательности сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_{1,k}}^{(1)})$. Тогда получим подпоследовательность $(x_{n_{1,k}})$, первая координатная последовательность которой сходится, а остальные ограничены.

Тогда в ней можно выделить такую подпоследовательность $(x_{n_{2,k}})$ так, чтобы вторая координатная последовательность сходилась.

Повторим так ещё $d-2$ раз и получим то, что в векторной подпоследовательности (x_{n_k}), где $n_k = n_{d,k}$, любая координатная последовательность сходится $\Rightarrow$ (x_{n_k}) тоже сходится, т.к. в $\mathbb{R}^d$ покоординатная и сходимость по метрике – одно и то же.

■

8 Верхний и нижний пределы. Определение и теорема существования. Связь между частичными пределами и верхним и нижним пределами.

Определение 14. *Нижний и верхний пределы*

x_n - числовая последовательность.

$\underline{\lim} x_n := \liminf x_n := \lim \inf_{k \geq n} x_k$ – нижний предел.

$\overline{\lim} x_n := \limsup x_n := \lim \sup_{k \geq n} x_k$ – верхний предел.

$y_n := \inf_{k \geq n} x_k = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \quad y_n \leq y_{n+1}$
$z_n := \sup_{k \geq n} x_k = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \quad z_n \geq z_{n+1}$

Теорема 15. $\underline{\lim}$ *и* $\overline{\lim}$ *существуют в* $\overline{\mathbb{R}}$ *и* $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$

Доказательство.

Про $\underline{\lim}$: $y_n \leq y_{n+1} \Rightarrow (y_n)$ – возрастающая последовательность $\Rightarrow$ у неё есть предел в $\overline{\mathbb{R}}$.

Про $\overline{\lim}$: $z_n \geq z_{n+1} \Rightarrow (z_n)$ – убывающая последовательность $\Rightarrow$ у неё есть предел в $\overline{\mathbb{R}}$.

Про неравенство $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$: $y_n \leq z_n$, $y_n \to \underline{\lim}$, $z_n \to \overline{\lim} \Rightarrow$ по предельному переходу в неравенстве $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$. ■

Теорема 16.

1. $\overline{\lim}$ – наибольший частичный предел
2. $\underline{\lim}$ – наименьший частичный предел
3. $\exists \lim \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$ и в этом случае $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

Доказательство.

1. $a := \overline{\lim}\, x_n$

   Рассмотрим **случай** $a \in \mathbb{R}$

   Докажем, что a – частичный предел.

   $a = \lim z_n$, $z_n = \sup_{k \geq n} x_k$, $z_n \searrow a$

   Будем строить некоторую подпоследовательность (x_{n_k}).
   Найдётся $n_k \geq n_{k-1} : x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$. Пусть не нашлось $\Rightarrow x_n \leq a - \frac{1}{k} \forall n \geq n_{k-1} \Rightarrow$ $\sup\{x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-1}+1}, \dots\} \leq a - \frac{1}{k} \Rightarrow a \leq z_{n_{k-1}} \leq a - \frac{1}{k}$. Противоречие

   $a - \frac{1}{k} \to a$, $z_{n_k} \to a$, $a - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k} \xRightarrow{\text{2 мил.}} x_{n_k} \to a$

   Докажем, что a – наибольший частичный предел.

   Пусть b - частичный предел $\Rightarrow b = \lim x_{n_k}$. Но $x_{n_k} \to b$, $z_{n_k} \to a \Rightarrow$ по предельному переходу $b \leq a$.

   Рассмотрим **случай** $a = -\infty$.

   Тогда $z_n \to -\infty$, но $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \geq x_n \Rightarrow x_n \to -\infty$.

   Рассмотрим **случай** $a = +\infty$.

   Тогда $z_n = +\infty \Rightarrow \sup x_1, x_2, \dots = +\infty \Rightarrow x_n$ не ограничена сверху $\Rightarrow$ в ней найдётся подпоследовательность, стремящаяся к $+\infty$.

2. Доказывается аналогично

3. "$\Longrightarrow$":

   Если $a = \lim x_n$, то все подпоследовательности стремятся к $a \Rightarrow$ все частичные пределы равны $a \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = \lim x_n = a$.

   "$\Longleftarrow$":

   $y_n \to a$, $z_n \to a$, $y_n \leq x_n \leq z_n \xRightarrow{\text{2 мил.}} x_n \to a \Rightarrow \lim x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = a$

■

Замечание. Арифметики для верхних и нижних пределов нет.

Пример.

$$x_n = (-1)^n, \quad y_n = (-1)^{n+1} \Rightarrow \underline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, y_n = -1$$

$$x_n + y_n = 0 \Rightarrow \underline{\lim}\,(x_n + y_n) = \underline{\lim}\,(x_n + y_n) = 0$$

$$\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n = -2 < 0 = \underline{\lim}\,(x_n + y_n)$$

9 Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и ε. Сохранение неравенств.

Теорема 17.

1. $a = \underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N : x_n < a + \varepsilon \end{cases}$

2. $b = \overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ x_n < b + \varepsilon & (1) \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon & (2) \end{cases}$

Доказательство.

2. Докажем (1) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : z_N < b + \varepsilon$

"$\Longrightarrow$":

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ x_n < b + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ x_n < b + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_N = \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} \leq b + \frac{\varepsilon}{2} < b + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : z_N < b + \varepsilon$$

"$\Longleftarrow$":

$$\text{Зафиксируем } \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N : z_N < b + \varepsilon \Leftrightarrow \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} < b + \varepsilon \Rightarrow x_n < b + \varepsilon\ \forall n \geq N$$

Докажем (2) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ z_N > b - \varepsilon$

"$\Longrightarrow$":

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon \text{ при этом } z_N = \sup\{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ z_N > b - \varepsilon$$

"$\Longleftarrow$":

$$\text{Зафиксируем } \varepsilon > 0 \text{ и } N \Rightarrow z_N > b - \varepsilon \Leftrightarrow \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} > b - \varepsilon \Rightarrow \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon,$$

$$\text{иначе } \forall n \geq N : x_n \leq b - \varepsilon \text{ и тогда } \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} \leq b - \varepsilon \Leftrightarrow z_N \leq b - \varepsilon$$

$$(1) + (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N : z_N < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ z_N > b - \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \text{т.к. } z_n \searrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ z_n < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ z_N > b - \varepsilon \end{cases}$$

Это и есть определение предела $\Rightarrow b = \overline{\lim}\, x_n$

В обратную сторону, первая строка следует из определения предела, вторая строка следует из того, что $(z_n) \searrow$. Более того, $(z_n) \searrow$, $\lim z_n = b \Rightarrow z_n \geq b$

■

Теорема 18.

Если $x_n \leq y_n$, то $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, y_n$ и $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$

Доказательство.

$x_n \leq y_n \Rightarrow \inf\{x_n, x_{n+1}, ...\} \leq \inf\{y_n, y_{n+1}, ...\} \Rightarrow$ по пред. переходу $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, y_n$

Аналогично для $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$. ■

10 Сходимость рядов. Необходимое условие сходимости рядов. Примеры.

Определение 19. *Ряд*

$x_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ – ряд.

Определение 20. *Частичная сумма ряда*

$S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$

Определение 21. *Сумма ряда*

Сумма ряда – $\lim S_n$, если он существует.

Определение 22. *Сходимость ряда*

Ряд сходится, если $\exists \lim S_n \in \mathbb{R}$
В противном случае ряд расходится.

Теорема 23. *Необходимое условие сходимости*

Если $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ сходится, то $\lim x_n = 0$.

Доказательство. Если ряд сходится, то $S := \lim S_n \in \mathbb{R}$. Тогда $x_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim x_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$ ■

Примеры:

1. Геометрическая прогрессия $1 + q + q^2 + \dots \; \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

   При $|q| < 1$ $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$

   При $|q| > 1$ ряд расходящийся, т.к. не выполнено необходимое условие.

2. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

   $S_{2n} = 0, \; S_{2n+1} = 1 \Rightarrow$ предела нет.

3. Гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

   $H_n := \sum_{k=1} n\frac{1}{k}$ – гармонические числа. H_n монотонно возрастает.

$$H_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{>2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}} >$$

$$> 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{n \text{ шт.}} = 1 + \frac{n}{2} \Rightarrow \text{ частичные суммы сколь угодно большие } \Rightarrow \lim H_n = +\infty$$

   Гармонический ряд – расходящийся ряд, члены которого стремятся к 0.

4.
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

11 Простейшие свойства сходящихся рядов.

1. Сумма ряда единственна

   Доказательство. Утверждение про единственность предела частичных сумм ■

2. Расстановка скобок не меняет суммы ряда (если она была)

   Доказательство. $\underset{S_1}{x_1} + (x_2 + x_3 + \underset{S_4}{x_4}) + (x_5 + \underset{S_6}{x_6}) + (x_7 + x_8 + \underset{S_9}{x_9})\ldots$

   Т.е. из последовательности частичных сумм просто выбрали другую подпоследовательность, ну таким образом, если предел был, то он такой же и остался. ■

   Замечание. Он расстановки скобок сумма ряда могла появиться.

   Пример. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ расходится. Но при расстановке следующим образом скобок: $(1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$ получаем, что ряд имеет сумму 0.

3. Добавление/отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость, но влияет на сумму.

   Доказательство. Рассмотрим отбрасывание.

   Ряд $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$, частичная сумма которого S_n, переделали в $x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3} + \dots$, частичная сумма которого $\widetilde{S}_n := x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_{k+n} = S_{k+n} - S_k$. Т.к. k фиксировано отсюда видно, что если S_n (не) имеет предел, то и $\widetilde{S}_n$ (не) имеет предел, и наоборот.

   Добавление - просто обратная операция. ■

4. Если $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся, то $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n)$ сходится и $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$
5. Если $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ сходится и $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n = c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$