

# Конспект лекций по математическому анализу

## СПбГУ, МКН, 1 курс

Лектор: Храбров Александр Игоревич

Составили: Андрей [K-dizzled](#) Козырев  
Никита [muldrik](#) Митцев  
Максим [maxmartynov08](#) Мартынов  
Семен [SmnTin](#) Паненков

осень 2020

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Первый семестр. Первая четверть</b>	<b>3</b>
1	Множества . . . . .	3
2	Отношения . . . . .	4
3	Аксиомы вещественных чисел . . . . .	5
4	Принцип математической индукции . . . . .	7
5	Супремум и инфимум . . . . .	8
6	Теорема о вложенных отрезках . . . . .	10
7	Метрические пространства и подпространства . . . . .	10
8	Открытые множества . . . . .	13
9	Внутренние точки. Внутренность множества . . . . .	14
10	Замкнутые множества. Замыкание множества . . . . .	15
11	Предельные точки. Связь с замыканием множества . . . . .	17
12	Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве . . . . .	18
13	Предел числовой последовательности и предел последовательности в метрическом пространстве . . . . .	18
14	Связь между пределами и предельными точками . . . . .	20
15	Предельный переход в неравенствах . . . . .	20
16	Теорема о двух милиционерах . . . . .	21
17	Монотонные последовательности . . . . .	21
18	Топологическое пространство . . . . .	22
19	Векторное пространство. Пространство $R^d$ . Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского . . . . .	22
20	Норма . . . . .	23
21	Арифметические свойства пределов последовательности . . . . .	24
22	Покоординатная сходимость в $\mathbb{R}^d$ . . . . .	26
23	Бесконечные пределы . . . . .	27
24	Бесконечно большие и малые последовательности . . . . .	29
25	Арифметические действия в $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	29
26	Неравенство Бернулли . . . . .	31
27	Определение экспоненты . . . . .	31
28	Свойства экспоненты . . . . .	33
29	Формула для экспоненты суммы . . . . .	34
30	Сравнение скорости возрастания последовательностей . . . . .	34
31	Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ ) . . . . .	35
32	Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{0}{0}$ ) . . . . .	37
33	Подпоследовательности (определение и простейшие свойства). Теорема о стягивающихся отрезках) . . . . .	38

34	Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}$ . . . . .	39
35	Аналог теоремы Больцано-Вейерштрасса для неограниченной последовательности. Частичные пределы. Теорема о характеристике частичных пределов. . . . .	40
36	Фундаментальные последовательности. Свойства. Критерий Коши. . . . .	41
37	Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^d$ . Полнота $\mathbb{R}^d$ . . . . .	42
38	Верхний и нижний пределы. Определение и теорема существования. Связь между частичными пределами и верхним и нижним пределами. . . . .	43
39	Характеристика верхних и нижних пределов с помощью $N$ и $\varepsilon$ . Сохранение неравенств. . . . .	44
40	Сходимость рядов. Необходимое условие сходимости рядов. Примеры. . . . .	45
41	Простейшие свойства сходящихся рядов. . . . .	46

# Глава 1

## Первый семестр. Первая четверть

### 1 Множества

**Определение.** Множество - набор уникальных элементов

Множества - большие буквы  $A, B, \dots$

Элементы множеств - маленькие буквы  $a, b, \dots$

$x \in A$  -  $x$  принадлежит  $A$

$x \notin A$  -  $x$  не принадлежит  $A$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{R}$  - вещественные числа

$\mathbb{C}$  - комплексные числа

**Теорема.** *Правила Де Моргана*

$$A \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$$

$$A \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$$

**Доказательство.** Докажем для первой формулы. Вторая доказывается аналогично.

$$x \in A \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_{\alpha} \text{ при всех } \alpha \end{cases} \iff x \in A \setminus B_{\alpha} \text{ при всех } \alpha$$
$$\alpha \in I \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha}) \quad \blacksquare$$

**Теорема.** Операции над множествами

- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Замечание -  $\Delta, \cup, \cap$  - коммутативны, ассоциативны

**Определение.** Декартово произведение множеств  $A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A; b \in B\}$

**Теорема.**

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha})$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_{\alpha})$$

**Доказательство.**  $x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in B_{\alpha} \text{ для некоторых } \alpha \in I \end{cases} \iff$

$$x \in A \cap B_{\alpha} \text{ для некоторых } \alpha \in I \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha}) \quad \blacksquare$$

**Определение.** Упорядоченная пара  $\langle a, b \rangle$  - пара “пронумерованных” элементов

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff$$

1

$$((a == c) \ \&\& \ (b == d))$$

## 2 Отношения

**Определение.** Область определения:  $\delta_R = \{x \in A : \exists y \in B, \text{ т.ч. } \langle x, y \rangle \in R\}$

**Определение.** Область значений:  $\rho_R = \{y \in B : \exists x \in A, \text{ т.ч. } \langle x, y \rangle \in R\}$

$$\delta_{R^{-1}} = \rho_R$$

$$\rho_{R^{-1}} = \delta_R$$

**Определение.** Композиция отношений

$$R_1 \subset A \times B, \quad R_2 \subset B \times C, \quad R_1 \circ R_2 \subset A \times C$$

**Пример**

- $\langle x, y \rangle \in R$ , если  $x$  — отец  $y$
- $\langle x, y \rangle \in R \circ R$ , если  $x$  — дед  $y$
- $\langle x, y \rangle \in R^{-1} \circ R$ , если  $x$  — брат  $y$

- $\delta R$  — все, у кого есть сыновья

**Определение.** Бинарным отношением  $R$  называется подмножество элементов декартова произведения двух множеств  $R \subset A \times B$

Элементы  $x \in A, y \in B$  находятся в отношении, если  $\langle x, y \rangle \in R$  (то же, что  $xRy$ )

Обратное отношение  $R^{-1} \subset B \times A$

**Определение.** Отношение называется:

- Рефлексивным, если  $xRx \forall x$
- Симметричным, если  $xRy \implies yRx$
- Транзитивным, если  $xRy, yRz \implies xRz$
- Иррефлексивным, если  $\neg xRx \forall x$
- Антисимметричным, если  $xRy, yRx \implies x = y$

**Определение.**  $R$  является отношением

1. Эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно
2. Нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно
3. Нестрогого полного порядка, если выполняется п. 2 +  $\forall x, y$  либо  $xRy$ , либо  $yRx$
4. Строгого частичного порядка, если оно иррефлексивно и транзитивно
5. Строгого полного порядка, если выполняется п. 4 +  $\forall x, y$  либо  $xRy$ , либо  $yRx$

## Пример

- $x \equiv y \pmod{m}$  — отношение эквивалентности
- $X$  - множество,  $2^X$  — множество всех его подмножеств
- $\forall x, y \in 2^X : \langle x, y \rangle \in R$ , если  $x \subsetneq y$  — отношение строгого частичного порядка
- Лексикографический порядок на множестве пар натуральных чисел — отношение нестрогого полного порядка

**Определение.** Отображение  $f : A \longrightarrow B$

- инъективно, если  $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$
- сюръективно, если  $\rho_f = B$
- биективно, если  $f$  инъективно и сюръективно

## 3 Аксиомы вещественных чисел

**Определение.** Вещественные числа - алгебраическая структура, над которой определены операции сложения “+” и умножения “.” ( $\mathbb{R} * \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$ )

**Определение.** Аксиомы вещественных чисел:

$A_1$  Ассоциативность сложения

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$A_2$  Коммутативность сложения

$$x + y = y + x$$

$A_3$  Существование нуля

$$\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \ x + 0 = x$$

$A_4$  Существование обратного элемента по сложению

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$$

$M_1$  Ассоциативность умножения

$$x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$$

$M_2$  Коммутативность умножения

$$xy = yx$$

$M_3$  Существование единицы

$$\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \ x \cdot 1 = x$$

$M_4$  Существование обратного элемента по умножению

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$$

$M_A$  Дистрибутивность

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Вышеперечисленные аксиомы образуют поле

**Бинарное отношение “ $\leq$ ”**

Аксиомы порядка, задающие отношение порядка на множестве вещественных чисел:

$$O_1 \ x \leq x \quad \forall x$$

$$O_2 \ x \leq y \text{ и } y \leq x \implies x = y$$

$$O_3 \ x \leq y \text{ и } y \leq z \implies x \leq z$$

$$O_4 \ \forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \text{ или } y \leq x$$

$$O_4 \ x \leq y \implies x + z \leq y + z \quad \forall z$$

$$O_4 \ 0 \leq x \text{ и } 0 \leq y \implies 0 \leq xy$$

**Теорема.** Аксиома полноты

$$A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, \forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$$

$$\text{Тогда } \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$$

**Теорема.** Принцип Архимеда

Согласно принципу Архимеда:  $\forall x \in \mathbb{R}$  и  $\forall y_{>0} \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : x < ny$

**Доказательство.**

$A = \{a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : a < ny\}$ ,  $A \neq \emptyset$  т.к.  $0 \in A$

$B = \mathbb{R} \setminus A$

Пусть  $A \neq \mathbb{R}$ , тогда  $B \neq \emptyset$ . Покажем, что  $a \leq b$ , если  $a \in A, b \in B$

Пойдем от противного. Если  $b < a < ny \Rightarrow b < ny \Rightarrow b \in A$  - противоречие

Таким образом, по аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

Предположим, что  $c \in A$ . Тогда  $c < ny$  для некоторого  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c + y < (n + 1)y \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c + y \leq c \Rightarrow y \leq 0$ . Это противоречит условию.

Пусть  $c \in B$ . Так как  $y > 0, c - y < c$ . Так как  $B$  - дополнение  $A$  и  $c - y \neq c, c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n + 1)y \Rightarrow c \in A$ . Снова пришли к противоречию.

Значит  $c \notin A, c \notin B \Rightarrow c$  не существует  $\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow A = \mathbb{R}$  ■

**Следствие:**

$$\forall \varepsilon_{>0} \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

**Доказательство.**

$$x = 1, y = \varepsilon \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : 1 < n\varepsilon$$
 ■

## 4 Принцип математической индукции

**Определение.** Принцип математической индукции

$P_n$  - последовательность утверждений

1.  $P_1$  - верно
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$  из  $P_n$  следует  $P_{n+1}$

Тогда  $P_n$  верно при всех  $n \in \mathbb{N}$

**Теорема.** В конечном множестве вещественных чисел есть наибольший и наименьший элемент

**Доказательство.**

Докажем для максимума. Для минимума рассуждения аналогичны

Будем доказывать утверждение по индукции

Для  $n = 1$  - очевидно

Переход  $X_n \rightarrow x_{n+1}$

Рассмотрим произвольное множество из  $n$  элементов  $X_n = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ , где максимальным элементом является  $x_i$ . Пусть в наше множество был добавлен элемент  $X_{n+1}$ . В таком случае, если  $X_{n+1} > X_i$ , то новый максимум равен  $X_{n+1}$ , иначе - максимумом по-прежнему является  $X_i$ . Таким образом, в любом конечном множестве вещественных чисел существует минимальный элемент. ■



### Следствия:

1. Во всяком непустом множестве натуральных чисел есть наименьший элемент

#### Доказательство.

Пусть  $A$  - множество натуральных чисел, не содержащее наименьшего элемента. Докажем по индукции, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  мы имеем  $\mathbb{N}_n \cap A = \emptyset$

$$\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$$

Для  $n = 1$  утверждение очевидно.

Переход  $n \rightarrow n + 1$

Предположим для  $\mathbb{N}_n \cap A = \emptyset$

Тогда если для  $\mathbb{N}_{n+1} \cap A \neq \emptyset$ , то наименьший элемент множества  $A$  - это  $n + 1$

Значит  $\mathbb{N}_{n+1} \cap A = \emptyset$  ■

2. Во всяком конечном непустом множестве натуральных чисел есть наибольший элемент

#### Доказательство.

Из натуральных чисел строим целые. Множество чисел  $A \subseteq \mathbb{Z}$  называется ограниченным сверху и имеет наибольший элемент если  $\exists c > a, \forall a \in A, c \in \mathbb{Z}$  ■

## Рациональные и иррациональные числа в интервале

1. Если  $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ , то  $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

#### Доказательство.

Пусть  $x < 0, y > 0$ . Тогда  $\exists r = 0 \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Пусть  $x \geq 0, y > 0, \varepsilon = x - y$ . Тогда  $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

По принципу Архимеда найдется такое число  $m$ , что  $\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}$

Предположим, что  $\frac{m-1}{n} \leq x < y \leq \frac{m}{n}$ . Тогда мы получим, что  $\frac{1}{n} \geq y - x = \varepsilon$ . Пришли к противоречию

Следовательно,  $\exists m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n} < y$

Случай  $y \leq 0$  аналогичен предыдущему ■

2. Если  $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ , то существует иррациональное число  $r : x < r < y$

#### Доказательство.

$x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \implies \exists R \in \mathbb{Q} \in (x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}) \implies x < R + \sqrt{2} < y$  (Предыдущий пункт)  $\implies$   
 $r$  - иррациональное ■

3. Если  $x \geq 1$ , то  $\exists n \in \mathbb{N} : x - 1 < n \leq x$

## 5 Супремум и инфимум

### Определение.

$x$  - верхняя граница множества  $A$ , если  $\forall a \in A : a \leq x$

$y$  - нижняя граница множества  $A$ , если  $\forall a \in A : y \leq a$

Множество ограничено снизу, если существует какая-нибудь нижняя граница

Множество ограничено сверху, если существует какая-нибудь верхняя граница

**Определение.**

Пусть  $A$  - ограниченное сверху множество, тогда  $\sup A$  - наименьшая из его верхних границ

**Определение.**

Пусть  $A$  - ограниченное снизу множество, тогда  $\inf A$  - наибольшая из его нижних границ

**Теорема.**

1. Если  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  и  $A$  ограничено снизу, то существует единственный  $\inf A$
2. Если  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  и  $A$  ограничено сверху, то существует единственный  $\sup A$

**Доказательство.**

Докажем (2)

Пусть  $B$  - множество всех верхних границ множества  $A$ , т.е.  $\forall a \in A, b \in B : a \leq b$

Тогда по аксиоме полноты всегда найдется такой  $c : a \leq c \leq b$

$c = \sup A$  по определению

Докажем, что  $c$  - единственный

Пусть  $\exists c_1, c_2 = \sup A$

Тогда если  $c_1 < c_2$ , то  $c_2 \neq \sup A$

Если  $c_1 > c_2$ , то  $c_1 \neq \sup A$

Следовательно,  $c_1 = c_2 = \sup A \implies \sup A$  - единственный



**Следствие:**

1.  $B \subset A, B \neq \emptyset$  и  $A$  ограничено снизу. Тогда  $\inf B \geq \inf A$
2.  $B \subset A, B \neq \emptyset$  и  $A$  ограничено сверху. Тогда  $\sup B \leq \sup A$

**Доказательство.**

Докажем (1)

Пусть  $a = \inf A$ . Тогда  $a$  - нижняя граница  $A \implies \forall x \in A : a \leq x \implies \forall x \in B : a \leq x \implies$

$a$  - нижняя граница  $B \implies a \leq \inf B$



Замечание - Теорема неверна без аксиомы полноты

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \implies$  в множестве рациональных чисел у  $A$  нет супремума

**Теорема.**

$$1. a = \inf A \iff \begin{cases} a \leq x & \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A : x < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$2. b = \sup A \iff \begin{cases} b \geq x & \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A : x > b - \varepsilon \end{cases}$$

#### Замечание

- Если  $A$  неограничено сверху, то  $\sup A = +\infty$
- Если  $A$  неограничено снизу, то  $\inf A = -\infty$

## 6 Теорема о вложенных отрезках

### Теорема.

Если  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$

То  $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n] \forall n \in \mathbb{N}$



### Доказательство.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

$$a_i \leq b_j, \forall i, j \in \mathbb{N}$$

$$\forall i \leq j : a_i \leq a_j \leq b_j \leq b_i, \forall i \geq j : a_i \geq a_j \geq b_j \geq b_i$$

$$\text{По аксиоме полноты } \forall i, j \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R} : a_i \leq c \leq b_j \implies \forall i \in \mathbb{N} : a_i \leq c \leq b_i$$



#### Замечание

1. Теорема неверна для полуинтервалов

$$\text{Пример: } \bigcap_{n=1}^{\infty} (0; \frac{1}{n}] = \emptyset$$

2. Теорема неверна для лучей

$$\text{Пример: } \bigcap_{n=1}^{\infty} (n; +\infty) = \emptyset$$

3. Теорема неверна без аксиомы полноты

Пример: число  $\pi$

$$[3; 4] \supset [3, 1; 3, 2] \supset [3, 14; 3, 15] \supset \dots$$

Пересечение не содержит рациональных чисел

## 7 Метрические пространства и подпространства

**Определение.**  $X$  - множество  $\rho : X \times X \longrightarrow [0; +\infty)$  - метрика(расстояние) если:

1.  $\rho(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$
2. если  $\rho(x, y) = 0$ , то  $x = y$

3.  $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$
4.  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z) \quad \forall x, y, z \in X$

## Примеры

1. Дискретная метрика

$$\rho(x, x) = 0$$

$$\rho(x, y) = 1, \text{ если } x \neq y$$

2.  $\mathbb{R} \quad \rho(x, y) = |x - y|$

3.  $\mathbb{R}^2$     обычное расстройство

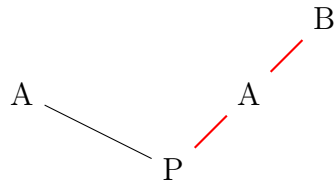
4. Манхэттенская метрика

$$(x', y') = A'$$

$$(x, y) = A$$

$$\rho(A, A') = |x - x'| + |y - y'|$$

## 5. Французская железнодорожная метрика



Если  $P, A$  и  $B$  на луче, то  $\rho(AB) = AB$   
 Если нет, то  $\rho(A, B) = \rho(AP) + \rho(B, P)$

## 6. Расстояние на сфере

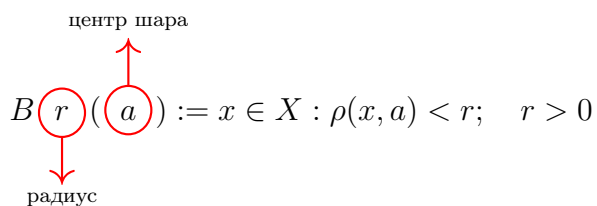
**Определение.** Метрическое пространство  $(X, \rho)$ ,  $X$  - множество,  $\rho$  - метрика на нем

**Определение.** Подпространство метрического пространства.

$(X, \rho)$  - метрическое пространство,  $Y \subset X$

$(Y, \rho|_{Y \times Y})$  - подпространство метрического пространства  $(X, \rho)$ , где  $Y$  - подмножество  $X$ , а  $\rho|_{Y \times Y}$  - сужение  $\rho$  на  $Y \times Y$

**Определение.** Открытый шар



**Определение.** Замкнутый шар

$$\overline{B_r}(a) := \{x \in X : \rho(x, a) \leq r; \quad r \geq 0\}$$

$$B_r(a) \subset \overline{B_r}(a)$$

- Окрестность точки  $a$  - открытый шар  $Br(a)$

## Примеры

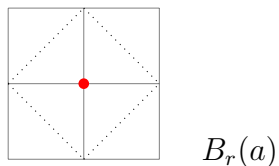
1. Дискретная метрика на  $X$

$$B_{1/2}(a) = a$$

$$B_2(a) = X$$

2.  $\rho(x, y) = |x - y|$   $B_r(a) = (a - r, a + r)$

3. Манхэттенская метрика



## Свойства

1.  $B_r(a) \cap B_R(a) = B_{\min\{r,R\}}(a)$
2. Если  $x \neq y$ , то найдется  $r > 0$ , такой, что  $\overline{B_r}(x) \cap \overline{B_r}(y) = \emptyset$

**Доказательство.**

$r := \frac{\rho(x,y)}{3}$ . Пойдем от противного

Пусть  $c \in \overline{B_r}(x) \cap \overline{B_r}(y) \implies \begin{cases} \rho(x,c) \leq r \\ \rho(y,c) \leq r \end{cases} \implies \rho(x,y) \leq \rho(x,c) + \rho(y,c) \leq 2r = \frac{2}{3}\rho(x,y)$  - противоречие ■

## 8 Открытые множества

**Определение.** Множество  $A$  называется открытым, если  $A \subset$  метрическому пространству  $X$  и  $\forall a \in A \exists r_{>0} : B_r(a) \subset A$

**Теорема.** Свойства открытых множеств:

1.  $\emptyset, X$  - открытые множества
2. Объединение любого количества открытых множеств - открытое множество
3. Пересечение конечного числа открытых множеств - открытое множество
4. Открытый шарик - открытое множество

**Доказательство.**

1.  $B_r(a) \subset X$ ; Для пустого множества нечего проверять, так как там даже точек то нет
2.  $A_\alpha \alpha \in I$  - открытые множества.  $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$   
Возьмем  $a \in A$ . Тогда  $a \in A_\beta$  для какого-то  $\beta \in I \implies A_\beta$  - открытое множество  $\implies B_r(a) \subset A_\beta$  для некоторого  $r_{>0} \implies B_r(a) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A$
3.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - открытые множества.  $A = \bigcap_{k=1}^n A_k$  Возьмем  $a \in A$ . Тогда  $a \in A_k$  при  $k = \{1, 2, \dots, n\} \implies B_{r_k}(a) \subset A_k$  для некоторого  $r_k > 0$   
 $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_k\} \implies B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k = A$
4. Рассмотрим  $B_R(a)$ . Возьмем  $b \in B_R(a)$   
 $r := R - \rho(a,b) > 0$ . Докажем, что  $x \in B_r(b)$  :  
 $\rho(x,b) < r \implies \rho(x,a) \leq \rho(x,b) + \rho(b,a) < r + \rho(b,a) = R$  ■

### Замечание

В пункте №3 конечность существенна  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1/n}(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}) = \{0\}$  Интервал  $(-r; r)$

### Пример

$$\mathbb{R} \quad \rho(x, y) = |x - y|$$

$$Y = [0; 2)$$

Шары в  $(Y, \rho)$ :

$$\begin{array}{c} \text{---} [ \text{-----} ) \text{---} \\ 0 \qquad \qquad \qquad 2 \end{array}$$

$$B_1^Y(0) = \{x \in [0; 2) : |x - 0| < 1\} = [0; 1)$$

## 9 Внутренние точки. Внутренность множества

**Определение.**  $(X, \beta)$  - метрическое пространство  $A \subset X$

$a \in A$ ,  $a$  - внутренняя точка множества, если  $B_r(a) \subset A$  для некоторого  $r > 0$  (Открытое множество - такое множество, у которого все точки внутренние)

Внутренность множества - множество всех его внутренних точек. Обозначается как  $IntA$

**Теорема.** Свойства внутренности:

1.  $IntA \subset A$
2.  $IntA = \bigcup \{G : G \subset A \text{ и } G - \text{открытое}\} =: B$

**Доказательство.**

- $IntA \supset B$

Возьмем  $b \in B$ . Тогда найдется открытое  $G_o \subset A$ , такое, что  $b \in G_o \implies$

$\exists r_{>0}$ , такой, что  $B_r(b) \subset G_o \subset A \implies b$  - внутренняя точка  $A$

- $IntA \subset B$

Возьмем  $a \in IntA \implies a$  - внутренняя точка  $\implies$  открытое множество  $B_r(a) \subset A$  для некоторого  $r_{>0} \implies a \in B_r(a) \subset A$

$$a \in B_r(a) \subset B \implies a \in B$$

■

3.  $IntA$  - самое большое (по включению) открытое множество, содержащееся в  $A$
4.  $IntA$  - открытое множество
5.  $IntA = A \iff A$  - открытое
6.  $A \subset B \implies IntA \subset IntB$

**Доказательство.** Пусть  $a \in IntA \implies B_r(a) \subset A$  для некоторого  $r_{>0} \implies a$  - внутренняя точка  $B$

■

7.  $Int(A \cap B) = IntA \cap IntB$

**Доказательство.**

“ $\subset$ ” :  $A \cap B \subset A \implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}A$ . Это следует из предыдущего пункта. Аналогично для  $B$

“ $\supset$ ” : Пусть  $c \in \text{Int}A \cap \text{Int}B \implies \begin{cases} c - \text{внутренняя точка } A \\ c - \text{внутренняя точка } B \end{cases} \implies \begin{cases} B_{r_1}(c) \subset A \\ B_{r_2}(c) \subset B \end{cases}$

для некоторых  $r_1, r_2 > 0 \implies B_r(c) \subset A \cap B$ , где  $r = \min\{r_1, r_2\} \implies c - \text{внутренняя точка } A \cap B$  ■

8.  $\text{Int}(\text{Int}A) = \text{Int}A$

**Доказательство.**  $\text{Int}A$  - открытое множество, а внутренность открытого множества совпадает с ним ■

## 10 Замкнутые множества. Замыкание множества

**Определение.**  $(X, \beta)$  - метрическое пространство  $A \subset X$   
 $A \subset X$  - замкнутое, если  $X \setminus A$  - открытое

**Теорема.** Свойства замкнутых множеств:

1.  $\emptyset, X$  - замкнутое множества
2. Пересечение любого количества замкнутых множеств - замкнутое множество
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств - замкнутое множество
4. Замкнутый шарик - замкнутое множество

**Доказательство.**

2.  $A_\alpha \ \alpha \in I$  - замкнутые множества.  $A \stackrel{?}{\implies} \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  - замкнутое

$\implies \begin{matrix} \searrow & & \nearrow \\ X \setminus A - \text{открытое} \implies \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) = X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha - \text{открытое множество} \end{matrix}$

3.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - замкнутые множества.  $\implies X \setminus A_1, X \setminus A_2, \dots, X \setminus A_n$  - открытые множества  
 $\implies \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$  - открытое множество

$\bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k) = X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k \implies \bigcup_{k=1}^n A_k$  - замкнутое

4.  $\overline{B_R}(a)$  - замкнутый шар  
 Докажем, что  $X \setminus \overline{B_R}(a)$  - открыто

**Доказательство.**

$\overline{B_R}(a) = \{x \in X : \rho(x, a) \leq R\}$

Возьмем  $b \in X \setminus \overline{B_R}(a) \implies \rho(b, a) > R$

$r := \rho(b, a) - R$



Докажем, что  $B_r \subset X \setminus B_R(a) \iff B_r(b) \cap \overline{B_R(a)} = \emptyset$

От противного. Пусть есть общая точка  $c \in B_r(b) \cap \overline{B_R(a)} \implies \begin{cases} \rho(c, b) < r \\ \rho(c, a) \leq R \end{cases} \implies$

$$\rho(c, b) \leq \rho(a, c) \leq \rho(c, b) < R + r = \rho(a, b) \quad (\text{Так как } \rho(a, c) \leq R \text{ и } \rho(c, b) < r)$$

Противоречие. ■

#### Замечание

В пункте №3 конечность существенна  $\bigcup_{n=1}^{\infty} [-1 + \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}] = (-1; 1)$

Интервал  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

**Определение.** Замыкание множества  $A$  - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ . Обозначается как  $ClA$

$$ClA = \bigcap \{F : F - \text{замкнутое и } F \supset A\}$$

#### **Теорема.**

$$X \setminus ClA = Int(X \setminus A)$$

$$X \setminus IntA = Cl(X \setminus A)$$

#### **Доказательство.**

$$x \in X \setminus ClA \iff x \notin ClA \iff x \notin F_{\circ}, \text{ где } F_{\circ} \supset A$$

$$\iff \begin{cases} x \in X \setminus F_{\circ} =: G_{\circ} - \text{открытое} \\ G_{\circ} \subset X \setminus A \end{cases} \iff x \in Int(X \setminus A) \quad \blacksquare$$

#### **Следствие:**

$$ClA = X \setminus Int(X \setminus A)$$

$$IntA = X \setminus Cl(X \setminus A)$$

#### **Теорема.** Свойства замыкания

1.  $ClA$  - замкнутое множество

2.  $ClA \supset A$

3.  $A$  - замкнуто  $\iff A = ClA$

$$\text{Доказательство. } A - \text{замкнуто} \iff X \setminus A \iff X \setminus A = Int(X \setminus A) \iff A = \underbrace{X \setminus Int(X \setminus A)}_{ClA} \quad \blacksquare$$

4. Если  $A \subset B$ , то  $ClA \subset ClB$

$$\text{Доказательство. } A \subset B \iff X \setminus A \supset X \setminus B \implies Int(X \setminus A) \supset Int(X \setminus B) \implies \underbrace{X \setminus Int(X \setminus A)}_{ClA} \subset \underbrace{X \setminus Int(X \setminus B)}_{ClB} \quad \blacksquare$$

5.  $Cl(A \cup B) = ClA \cup ClB$

**Доказательство.**  $Cl(A \cup B) = X \setminus \underbrace{Int(X \setminus (A \cup B))}_{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)} = X \setminus Int((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) =$

$X \setminus (Int(X \setminus A) \cap Int(X \setminus B)) = (X \setminus Int(X \setminus A)) \cup (X \setminus Int(X \setminus B)) = ClA \cup ClB$  ■

6.  $ClClA = ClA$

**Доказательство.**  $ClA$  - замкнуто + замыкание замкнутого множества - само множество ■

**Теорема.**  $x \in ClA \iff$  для любого  $r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \emptyset$

**Доказательство.**  $x \in ClA \iff x \in X \setminus Int(X \setminus A) \iff x \notin Int(X \setminus A) \iff$  для любого  $r > 0 : B_r(x)$  не целиком содержится в  $X \setminus A \iff$  для любого  $r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \emptyset$  ■

**Следствие:** Если  $\mathcal{U}$  - открытое и  $\mathcal{U} \cap A = \emptyset$ , то  $\mathcal{U} \cap ClA = \emptyset$

**Доказательство.** Пусть  $x \in \mathcal{U} \cap ClA \implies x \in \mathcal{U}$  - открытое  $\exists r > 0 : B_r(x) \subset \mathcal{U}$   
 $x \in \mathcal{U} \cap ClA \implies x \in ClA \implies B_r(x) \cap A \neq \emptyset \implies \mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$  - противоречие ■

## 11 Предельные точки. Связь с замыканием множества

**Определение.** Проколота окрестность точки  $a - B_r(a) \setminus a$   
 Обозначается как  $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_a$

**Определение.** Предельная точка множества

$a$  - предельная точка множества  $A$ , если любая  $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_a \cap A \neq \emptyset$   
 $A'$  - множество предельных точек  $A$

**Теорема.** Свойства:

1.  $Cl(A) = A \cup A'$

**Доказательство.**  $x \in Cl(A) \iff B_r(x) \cap A \neq \emptyset \forall r > 0$  (\*)

Пусть  $x \notin A$ . Тогда (\*) равносильно  $B_r(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset \iff x \in A'$  ■

2.  $A \subset B \implies A' \subset B'$

**Доказательство.**  $x \in A' \implies B_r(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset \implies B_r(x) \setminus \{x\} \cap B \neq \emptyset \implies x \in B'$  ■

3.  $(A \cup B)' = A' \cup B'$

**Доказательство.**  $A \cup B \supset A \implies (A \cup B)' \supset A' \implies (A \cup B) \supset A' \cup B'$

Обратное включение. Пусть  $x \in (A \cup B)'$  и  $x \notin B' \implies (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \implies (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$  ИЛИ  $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap B \neq \emptyset$ .

Второе неверно из  $x \notin B'$ , следовательно  $x \in A'$  ■

4.  $A$  замкнуто  $\implies A \supset A'$

**Доказательство.**  $A$  - замкнуто  $\implies A = Cl(A) = A \cup A' \iff A \supset A'$  ■

## 12 Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве

**Теорема.**  $(X, d)$  - метр пространство  $Y \subset X$ . Тогда:

1.  $A \subset Y$  открыто в  $Y \iff$  найдется открытое множество  $G \subset X$ , т.ч.  $A = G \cap Y$

**Доказательство.**  $a \in A \implies \exists r_a > 0 : B_{r_a}^Y(a)$  (т.е. шары в  $Y$ )  $\subset A$ . Далее

$$G := \bigcup_{a \in A} B_{r_a}^X(a) = \bigcup_{a \in A} \{x \in X : d(x, a) < r_a\} \implies$$

$G$  - открытое (объединение любого числа открытых - открытое) Доказать:  $G \cap Y = A$   
 $G \supset A, Y \supset A \implies G \cap Y \supset A$ . Докажем обратное включение.

$$\begin{aligned} B_{r_a}^X(a) \cap Y &= B_{r_a}^Y(a) \subset A \\ G \cap Y &= \bigcup_{a \in A} (B_{r_a}^X(a) \cap Y) \subset A \implies G \cap Y \subset A \end{aligned}$$

Доказали " $\implies$ ". Теперь докажем " $\impliedby$ "

$G$  - открыто в  $Y$ . Доказать, что  $A := G \cap Y$  - открыто в  $Y$   $a \in A \implies a \in G$ ,  $G$  - открыто  $\implies \exists r > 0 : B_r^X(a) \subset G \implies B_r^X(a) \cap Y = B_r^Y(a) \subset G \cap Y$ , то есть  $A$  открыто в  $Y$ . ■

2.  $A \subset Y$  замкнутое в  $Y \iff$  найдется замкнутое множество  $F \in X$ , т. ч  $A = F \cap Y$

**Доказательство.**  $A$  - замкнуто в  $Y \iff Y \setminus A$  - открыто в  $Y \iff$

$\exists$  открытое  $G \in X : Y \setminus A = G \cap Y \iff$

$F := X \setminus G$  - замкнутое в  $X$ , при этом  $A = Y \setminus (G \cap Y) = Y \cap (X \setminus G)$

С первого взгляда неочевидный переход, но следует из вложенности  $Y$  и  $G$  в  $X = Y \cap F$ . ■

## 13 Предел числовой последовательности и предел последовательности в метрическом пространстве

**Определение.** Предел числовой последовательности

$x_1, x_2, x_3 \dots \in R$ .  $a = \lim x_n$  если вне любого интервала, содержащего  $a$ , содержится лишь конечное число членов последовательности.

Замечание - Можно рассматривать симметричные интервалы (если есть несимметричный, для удобства его можно расширить или сузить до симметричного)

**Определение.** Предел последовательности в метрическом пространстве  $(X, d)$  - метрическое пространство,  $x_1, x_2, \dots \in X$ .  $a = \lim x_n$  если вне любого шара  $B_\varepsilon(a)$  содержится лишь конечное число членов последовательности.

Замечание - Верно также для любого открытого множества, содержащего  $a$

Замечание - Существование предела зависит от пространства (в  $R_+ x_n = 1/n$  не имеет предела)

**Теорема. Свойства:**

1. Если  $a = \lim x_n$  и из  $x_n$  выкинули какое-то число членов так, чтобы осталось бесконечное число членов, то у оставшейся последовательности тот же предел
2. Если  $a = \lim x_n$  и к последовательности добавить конечное число членов, то  $a$  - все еще предел
3. Добавление, замена или выкидывание конечного количества членом не меняет предел и его наличие (то же самое другими словами)
4. Перестановка членов не влияет на предел последовательности
5. Если  $a = \lim x_n$  и  $a = \lim y_n$ , то если их перемешать, то у новой последовательности тоже предел  $a$
6. Если  $a = \lim x_n$ , тогда у последовательности, в которой  $x_n$  встречается с конечной кратностью, тот же предел (написать один и тот же элемент много раз подряд)

**Определение.**  $a = \lim x_n$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N d(x_n, a) < \varepsilon$$

**Определение.**  $A \subset X, (X, d)$  - метрическое пространство  $A$  - ограничено, если  $A$  целиком содержится в каком-нибудь шаре

**Теорема.**

1. Предел единственный

**Доказательство.**

Пусть  $a \neq b \implies \exists B_{r_1}(a), B_{r_2}(b) : B_{r_1} \cap B_{r_2} = \emptyset$ .

Вне  $B_{r_1}(a)$  конечное число членов

Вне  $B_{r_2}(b)$  конечное число членов

Тогда в последовательности конечное число членов. Противоречие. ■

2. Если последовательность имеет предел, то она ограничена

**Доказательство.**

Возьмем  $\varepsilon = 1$ . Тогда  $\exists N : \forall n \geq N x_n \in B_1(a)$ .

Тогда  $r := \max\{d(a, x_1), d(a, x_2), \dots, d(a, x_N)\} + 1$  ■

3.  $a = \lim x_n \iff \lim d(x_n, a) = 0$

**Доказательство.**

$$\lim d(x_n, a) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N d(x_n, a) < \varepsilon \iff \lim x_n = a$$

■

4. Если  $a = \lim x_n$  и  $b = \lim y_n$ , то  $\lim d(x_n, y_n) = d(a, b)$

**Доказательство.**

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, b) \quad d(x_n, y_n) \leq d(a, x_n) + d(a, b) + d(b, y_n) \implies |d(x_n, y_n) - d(a, b)| \leq d(x_n, a) + d(y_n, b)$$

Справа каждая меньше  $\varepsilon/2$ , тогда слева стремится к нулю

■

## 14 Связь между пределами и предельными точками

**Теорема.**  $a$  - предельная точка  $A \iff$  найдется последовательность точек  $x \neq a \in A : \lim x_n = a$ . Супер очевидно из соответствующих определений, но распишу

**Доказательство.**

“ $\Leftarrow$ ”: Пусть  $x_n \in A$  и  $\lim x_n = a$ .

Тогда в  $B_r(a) \setminus \{a\}$  содержится бесконечное количество точек из  $x_n$ , так как  $\exists N : \forall n \geq N x_n \in B_r(a)$

“ $\Rightarrow$ ”:  $r_1 = 1 \implies \exists x_1 \in B_1(a), r_2 = \min\{1/2, d(a, x_1)\}, r_3 = \min\{1/3, d(a, x_2)\} \dots$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : 1/N < \varepsilon \implies \forall n \geq N d(x_n, a) < 1/n \leq 1/N < \varepsilon$$

■

**Теорема.** Если  $x_n \in A$  и  $a = \lim x_n$ , то  $a \in Cl(A)$

**Доказательство.** Либо  $a \in A$ , тогда  $a \in Cl(A)$ , иначе  $x_n \neq a$ , тогда по теореме 1.  $a \in A' \implies a \in Cl(A)$

■

## 15 Предельный переход в неравенствах

**Теорема.** Предельный переход в неравенстве.  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$

$$x_n \leq y_n \quad \forall n, a = \lim x_n, b = \lim y_n \implies a \leq b$$

**Доказательство.** Пусть  $a > b$

$$\varepsilon = \frac{a+b}{2}$$

$$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

$$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 y_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

$$n := \max\{N_1, N_2\}$$

$$y_n \leq x_n. \text{ Противоречие}$$

■

Замечание - неверно для строгого знака  $(-1/n, 1/n)$

**Следствие:** Если  $x_n \leq b \forall n, \lim x_n = a \implies a \leq b$

**Доказательство.**  $y_n := b$ , далее из теоремы 1

■

**Следствие:** Если  $x_n \geq a \forall n, \lim x_n = b \implies a \leq b$

**Доказательство.**  $y_n := a$ , далее из теоремы 1 ■

**Следствие:**  $x_n \in [a, b], \lim x_n = c \implies c \in [a, b]$ . Следует из предыдущих

## 16 Теорема о двух милиционерах

**Теорема.** Теорема о сжатой последовательности (о двух милиционерах)

$x_n \leq y_n \leq z_n \forall n \in N, \lim x_n = \lim z_n = a \implies \lim y_n = a$

**Доказательство.**

$$\left. \begin{array}{l} \lim x_n = a \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ \lim z_n = a \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{array} \right\} \implies x_n > a - \varepsilon, z_n < a + \varepsilon$$

При  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$   $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \implies a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$  ■

**Следствие:**  $|y_n| \leq z_n \forall n, \lim z_n = 0 \implies \lim y_n = 0$

**Доказательство.**  $x_n := -z_n \implies x_n \leq |y_n| \leq z_n, x_n \rightarrow 0, z_n \rightarrow 0 \implies y_n \rightarrow 0$  ■

## 17 Монотонные последовательности

**Определение.**

$x_n$  монотонно возрастает(убывает), если  $\forall n x_n \leq (\geq) x_{n+1}$

$x_n$  монотонна, если она монотонно возрастает или монотонно убывает

**Теорема.** Если последовательность монотонно возрастает(убывает) и ограничена сверху(снизу), то она имеет предел.

**Доказательство.**  $x_n$  такова, что  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots$  и ограничена сверху. Тогда у нее есть  $\sup := S$ . Докажем, что  $\lim x_n = S$ .

$\forall \varepsilon > 0$   $S - \varepsilon$  не является верхней границей  $\implies \exists x_N > S - \varepsilon \implies \forall n \geq N S - \varepsilon < x_n < S + \varepsilon \implies S$  - предел ■

**Следствие:** Если последовательность монотонна, то она имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена.

“ $\Leftarrow$ ” По доказанной теореме

“ $\Rightarrow$ ” Из свойств предела

## 18 Топологическое пространство

**Определение.**  $X$  - множество. Топология, это набор подмножеств  $\Omega \subset X$ , называемых открытыми, таких что:

1.  $\emptyset, X$  - открытые
2. Объединение любого количества открытых - открыто
3. Пересечение конечного числа открытых - открыто

### Примеры

$$\{\emptyset, X\}$$

$$X = [0, +\infty), \Omega = (a, +\infty), a \geq 0\}$$

**Определение.** Замкнутое множество - дополнение открытого

**Определение.**  $a$  - внутренняя точка множества  $A$ , если существует открытое множество  $U$ , т. ч.  $a \in U, U \subset A$

**Определение.** Внутренность  $Int A$  - объединение всех открытых множеств, содержащихся в  $A$ . Равносильно - множество всех внутренних точек

**Определение.** Замыкание  $Cl A$  - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$

**Определение.**  $a = \lim x_n$ , если вне любого открытого множества, содержащего точку  $a$  находится лишь конечное число членов последовательности

$$\forall U \ni a \exists N \forall n \geq N x_n \in U$$

**Определение.** Хаусдорфовость

$\forall a, b \in X \exists U, V$  - открытые множества, такие что  $a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$ .

**Определение.** Если хаусдорфовость выполняется, то предел единственный.

**Доказательство.** Если  $a, b$  - пределы, то  $\exists U, V : a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset \implies$  Вне  $U$  лежит конечное количество членов, вне  $V$  тоже, тогда и в  $X$  конечное число членов. Противоречие ■

## 19 Векторное пространство. Пространство $R^d$ . Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского

**Определение.**  $X$  - векторное пространство (над полем  $\mathbb{R}$ ), если: Определены операции "+":  $X \times X \rightarrow X$  "\*" :  $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$

1. Сложение коммутативно и ассоциативно
2. Существует  $\vec{0}$
3. Существует обратный элемент  $x + (-x) = \vec{0}$

4.  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X$
5.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
6.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

**Определение.**

$$R^d = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_d \rangle : x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\langle x_1, \dots, x_d \rangle + \langle y_1, \dots, y_d \rangle = \langle x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d \rangle$$

$$\alpha \langle x_1, \dots, x_d \rangle = \langle \alpha x_1, \dots, \alpha x_d \rangle$$

**Определение.** Скалярное произведение  $\langle \bullet, \bullet \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
4.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

**Определение.** Неравенство Коши-Буняковского:  $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

**Доказательство.**  $f(t) := \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x + ty \rangle + \langle ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + t \langle x, y \rangle + t \langle y, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \geq 0$ . Это всегда неотрицательно, тогда дискриминант неположителен.

$$4t^2 \langle x, y \rangle^2 - 4t^2 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0 \implies \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

■

## 20 Норма

**Определение.** Норма  $\|\bullet\| : X \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| * \|x\|$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Примеры**

$$X = \mathbb{R}, \quad \|x\| := |x|$$

$$X = \mathbb{R}^d, \quad \|x\| := |x_1| + |x_2| + \dots + |x_d|$$



**Теорема.** Если  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  - скалярное произведение в  $X$ , то  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  - норма.

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \implies \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{?}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| * \|y\| + \|y\|^2$$

$$2\langle x, y \rangle \leq 2\|x\| * \|y\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad - \text{ верно по неравенству Коши Буняковского}$$

**Теорема.** Свойства норм:

$$1. \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

$$2. d(x, y) := \|x - y\| \quad - \text{ метрика}$$

$$3. \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|$$

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

$$\|x - y\| \geq -(\|x\| - \|y\|)$$

**Теорема.**  $X$  - нормированное пространство. Тогда норма порождена некоторым скалярным произведением тогда и только тогда, когда

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \quad - \text{ тождество параллелограмма.}$$

Доказательства не будет. Автор принял Линал

## 21 Арифметические свойства пределов последовательности

$X$  - нормированное пространство

$$x_n, y_n \in X \quad \lambda_n \in \mathbb{R}$$

$$\lim x_n = x_0 \quad \lim y_n = y_0 \quad \lim \lambda_n = \lambda_0$$

**Теорема.** Арифметические свойства пределов в нормированном пространстве

$$1. \lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$$

**Доказательство.**

$$\|x_n + y_n - (x_0 + y_0)\| = \|(x_n - x_0) + (y_n - y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\|$$

$$\lim x_n = x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \quad \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim y_n = y_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \quad \|y_n - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда при } n \geq \max\{N_1, N_2\} \quad \|x_n + y_n - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

$$2. \lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$$

**Доказательство.** Аналогично первому пункту. \blacksquare

$$3. \lim \lambda_n x_n = \lambda_0 x_0$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} ||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| &= ||(\lambda_n x_n - \lambda_n x_0) + (\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0)|| \leq \\ &\leq ||\lambda_n x_n - \lambda_n x_0|| + ||\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0|| = |\lambda_n| * ||x_n - x_0|| + |\lambda_n - \lambda_0| * ||x_0|| \end{aligned}$$

Так как у  $\lambda_n$  есть предел, она ограничена, то есть  $|\lambda_n| \leq M$ .

Итого получаем:

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| \leq M * ||x_n - x_0|| + ||x_0|| * |\lambda_n - \lambda_0|$$

$$\begin{aligned} \lim x_n = x_0 &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \quad ||x_n - x_0|| < \frac{\varepsilon}{2M} \\ \lim \lambda_n = \lambda_0 &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \quad |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2||x_0|| + 1} \end{aligned}$$

При  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| \leq M * ||x_n - x_0|| + ||x_0|| * |\lambda_n - \lambda_0| < M * \frac{\varepsilon}{2M} + ||x_0|| * \frac{\varepsilon}{2||x_0|| + 1} < \varepsilon$$

■

4.  $\lim ||x_n|| = ||x_0||$

**Доказательство.**

$$||x_n|| - ||x_0|| = ||(x_n - x_0) + x_0|| - ||x_0|| \leq ||x_n - x_0|| + ||x_0|| - ||x_0|| = ||x_n - x_0|| \rightarrow 0$$

■

5. Если в  $X$  есть скалярное произведение, то  $\lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle &= \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_0 \rangle + \langle x_n, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle = \\ &= \langle x_n, y_n - y_0 \rangle + \langle x_n - x_0, y_0 \rangle \\ | \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle | &\leq | \langle x_n, y_n - y_0 \rangle | + | \langle x_n - x_0, y_0 \rangle | \leq \\ &\leq ||x_n|| * ||y_n - y_0|| + ||x_n - x_0|| * ||y_0|| \end{aligned}$$

Так как у  $x_n$  есть предел, она ограничена, то есть  $||x_n|| \leq M$ .

Итого получаем:

$$| \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle | \leq M * \underbrace{||y_n - y_0||}_{\rightarrow 0} + ||y_0|| * \underbrace{||x_n - x_0||}_{\rightarrow 0}$$

■

**Теорема.** Арифметические свойства пределов числовых последовательностей

$$x_n, y_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = x_0 \quad \lim y_n = y_0$$

1.  $\lim(x_n \pm y_n) = x_0 \pm y_0$
2.  $\lim(x_n y_n) = x_0 y_0$
3.  $\lim |x_n| = |x_0|$
4. Если  $y_0 \neq 0$  и  $y_n \neq 0 \ \forall n$ , то  $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

**Доказательство.** Докажем, что  $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$ :

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|}$$

Так как  $y_0 = \lim y_n$ , найдется такое  $N_1$ , что  $\forall n \geq N_1 \quad |y_n| \in (\frac{|y_0|}{2}, \frac{3|y_0|}{2}) \Rightarrow |y_n| > \frac{|y_0|}{2}$   
 При  $n \geq N_1$  получаем, что

$$\frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|}$$

$$\lim y_n = y_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \quad |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon * y_0^2}{2}$$

Тогда если  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ , то  $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}| < \varepsilon$ . Теперь, когда мы знаем, что  $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$ , доказать исходное равенство легко:

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim(x_n * \frac{1}{y_n}) = \lim x_n * \lim \frac{1}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$$

■

## 22 Покоординатная сходимость в $\mathbb{R}^d$

$$x_n = \langle x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)} \rangle$$

$x_n$  покоординатно сходится к  $x_0$ , если

$$\begin{cases} \lim x_n^{(1)} = x_0^{(1)} \\ \dots \\ \lim x_n^{(d)} = x_0^{(d)} \end{cases}$$

**Теорема.**

$x_n$  покоординатно сходится к  $x_0 \iff x_n$  сходится к  $x_0$  по норме в  $\mathbb{R}^d$

$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_d^2}$  - норма

**Доказательство.**

$$\|x_n - x_0\| = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2}$$

Заметим следующее:

$$\sqrt{(x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2} \geq \sqrt{(x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2} = |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}|$$

$$\sqrt{(x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2} \leq |x_n^{(1)} - x_0^{(1)}| + \dots + |x_n^{(d)} - x_0^{(d)}|$$

Итого получаем

$$|x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \leq \|x_n - x_0\| \leq |x_n^{(1)} - x_0^{(1)}| + \dots + |x_n^{(d)} - x_0^{(d)}|$$

Докажем "  $\Rightarrow$  ":

$$\lim x_n = x_0 \Rightarrow \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim x_n^{(k)} = x_0^{(k)}$$

Докажем "  $\Leftarrow$  ":

$$\lim x_n^{(k)} = x_0^{(k)} \Rightarrow |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^d |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim x_n = x_0$$

■

## 23 Бесконечные пределы

- $x_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = +\infty$

Вне любого луча  $(u, +\infty)$  находится лишь конечное число членов.

$$\forall u \quad \exists N : \forall n \geq N \quad x_n > u$$

- $x_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = -\infty$

Вне любого луча  $(-\infty, u)$  находится лишь конечное число членов.

$$\forall u \quad \exists N : \forall n \geq N \quad x_n < u$$

- $x_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = \infty$

В любом интервале  $(u, v)$  находится лишь конечное число членов.

$$\forall u \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n| > u$$

Замечание 1: Если  $\lim x_n = +\infty$  или  $\lim x_n = -\infty$ , то  $\lim x_n = \infty$ . Обратное неверно (контрпример -  $x_n = (-1)^n n$ ).

Замечание 2: Если  $\lim x_n = \infty$ , то  $x_n$  не ограничена. Обратное неверно (контрпример -  $x_n = n$  (если  $n$  четно) и  $x_n = 0$  иначе).

**Теорема.** Единственность предела в  $\overline{\mathbb{R}}$

Если  $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $\lim x_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $a = b$ .

**Доказательство.** Пусть  $a < b$ .

Если  $a, b \in \mathbb{R}$ , то  $a = b$  (должно быть доказано где-то раньше).

Если  $a \in \mathbb{R}$  и  $b = +\infty$ , то в  $(a - 1, a + 1)$  и  $(a + 1, +\infty)$  должно содержаться бесконечное число членов последовательности, но это невозможно.

Аналогично для случая  $a = -\infty$  и  $b \in \mathbb{R}$ .

Если  $a = \infty$  и  $b = \infty$ , то либо  $a = b = +\infty$ , либо  $a = b = -\infty$ . ■

**Теорема.** О стабилизации знака в  $\overline{\mathbb{R}}$

Если  $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $a \neq 0$ , то, начиная с некоторого номера,  $x_n$  и  $a$  одного знака.

**Доказательство.** Не, ну это очевидно. ■

**Теорема.** О предельном переходе в неравенстве в  $\overline{\mathbb{R}}$

1. Если  $\lim x_n = +\infty$  и  $x_n \leq y_n \forall n$ , то  $\lim y_n = +\infty$ .

**Доказательство.** Мы знаем что,

$$\forall u \quad \exists N : \forall n \geq N \quad x_n > u$$

Так как  $x_n \leq y_n \forall n$ , то нам подойдет тоже  $N$ :

$$\forall n \geq N \quad y_n \geq x_n > u$$
 ■

2. Если  $\lim y_n = -\infty$  и  $x_n \leq y_n \forall n$ , то  $\lim x_n = -\infty$ .

**Доказательство.** Аналогично первому пункту. ■

3. Если  $x_n \leq y_n \forall n$  и  $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $a \leq b$

**Доказательство.**

- $a, b \in \mathbb{R}$ , доказано ранее
  - $a = -\infty$ , то  $a \leq b$  всегда
  - $a = +\infty$ , то по первому пункту  $b = +\infty$
  - $b = +\infty$ , то  $a \leq b$  всегда
  - $b = -\infty$ , то по второму пункту  $a = -\infty$
-

## 24 Бесконечно большие и малые последовательности

- $x_n$  называется бесконечно большой, если  $\lim x_n = \infty$
- $x_n$  называется бесконечно малой, если  $\lim x_n = 0$
- $x_n$  называется сходящейся, если она имеет конечный предел

**Теорема.** Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми

$$x_n \neq 0 \quad \forall n$$

$$x_n - \text{б.б.} \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} - \text{б.м.}$$

$$\text{Доказательство. } x_n - \text{б.б.} \Leftrightarrow \forall u > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n| > u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} - \text{б.м.} \quad \blacksquare$$

**Теорема.** О действиях с бесконечно малыми

1. Сумма / разность б.м. это б.м.

**Доказательство.** Предел суммы / разности это сумма / разность пределов. \blacksquare

2. Произведение б.м. и ограниченной это б.м.

$$\text{Доказательство. } y_n - \text{ограниченная} \Rightarrow |y_n| \leq M$$

$$x_n - \text{б.м.} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$|x_n y_n| \leq M |x_n| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

## 25 Арифметические действия в $\overline{\mathbb{R}}$

**Теорема.** Об арифметических операциях с  $\infty$

1.  $x_n \rightarrow +\infty$ ,  $y_n$  - ограниченная снизу  $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$

$$\text{Доказательство. } y_n - \text{ограниченная снизу} \Rightarrow y_n \geq a$$

$$x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \forall u \quad \exists N : \forall n \geq N \quad x_n > u - a$$

$$\Rightarrow x_n + y_n > u - a + a = u \quad \blacksquare$$

2.  $x_n \rightarrow -\infty$ ,  $y_n$  - ограниченная сверху  $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow -\infty$

**Доказательство.** Аналогично предыдущему пункту. \blacksquare

3.  $x_n \rightarrow \infty$ ,  $y_n$  - ограниченная  $\Rightarrow x_n \pm y_n \rightarrow \infty$

**Доказательство.** Аналогично первому пункту. \blacksquare

4.  $x_n \rightarrow \pm\infty, y_n \geq c > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \pm\infty$

**Доказательство.**  $x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \forall u \quad \exists N : \forall n \geq N \quad x_n > \frac{u}{c}$

$y_n \geq c > 0 \Rightarrow x_n y_n \geq c x_n > u$

Случай  $x_n \rightarrow -\infty$  рассматривается аналогично. ■

5.  $x_n \rightarrow \pm\infty, y_n \leq c < 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \mp\infty$

**Доказательство.** Аналогично предыдущему пункту. ■

6.  $x_n \rightarrow \infty, |y_n| \geq c > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \infty$

**Доказательство.** Аналогично четвертому пункту. ■

7.  $x_n \rightarrow a \neq 0, y_n \neq 0 \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

**Доказательство.**  $\lim \frac{y_n}{x_n} = 0 \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} - \text{б.м.} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} - \text{б.б.} \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$  ■

8.  $x_n$  - ограниченная,  $y_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$

**Доказательство.**  $y_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{y_n} - \text{б.м.} \Rightarrow x_n * \frac{1}{y_n} - \text{б.м.}$  ■

9.  $x_n \rightarrow \infty, y_n \neq 0$  - ограниченная  $\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

**Доказательство.**  $y_n$  - ограниченная  $\Rightarrow |y_n| \leq M$

$x_n \rightarrow \infty \Rightarrow \forall u > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n| > uM \Rightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} \right| \geq \frac{|x_n|}{M} > u$  ■

Запрещенные операции:

- $+\infty \pm (\mp\infty)$
- $-\infty \pm (\pm\infty)$
- $\pm\infty * 0$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Почему эти операции запрещенные? Разберем на примере:

$\lim x_n = \lim y_n = +\infty$

$x_n - y_n$  может иметь любой предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ , а может его вообще не иметь:

- $x_n = n + a, y_n = n \Rightarrow x_n - y_n = a \rightarrow a$
- $x_n = 2n, y_n = n \Rightarrow x_n - y_n = n \rightarrow +\infty$
- $x_n = n + (-1)^n, y_n = n \Rightarrow x_n - y_n = (-1)^n$  - предела не имеет

## 26 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x > -1, n \in \mathbb{N}$$

**Доказательство.** Индукция по  $n$ .

База  $n = 1 : (1+x) = 1+x$

Переход  $n \rightarrow n+1 : (1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{>0} \underbrace{(1+x)^n}_{\text{assumption}} \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$  ■

Замечание 1: В неравенстве Бернулли почти всегда строгий знак, равенство достигается только в случаях, когда  $n = 1$  или  $x = 0$ .

Замечание 2:  $(1+x)^p \geq 1+px \quad x > -1$  верно при всех  $p \geq 1$  и  $p \leq 0$ . Какая-то жесткая тема. Дали без доказательства.

**Следствие.**

1. Если  $a > 1$ , то  $\lim a^n = +\infty$ .

**Доказательство.**  $a > 1 \Rightarrow a = 1+x \quad x > -1$

$$a^n = (1+x)^n \geq 1+nx \rightarrow +\infty$$
 ■

2. Если  $|a| < 1$ , то  $\lim a^n = 0$ .

**Доказательство.** Считаем, что  $a \neq 0$ .

$$|\frac{1}{a}| > 1 \Rightarrow \lim |\frac{1}{a}|^n = +\infty \Rightarrow |\frac{1}{a}|^n - \text{б.б.} \Rightarrow |a^n| - \text{б.м.} \Rightarrow a^n - \text{б.м.}$$
 ■

## 27 Определение экспоненты

Рассмотрим последовательность  $x_n = (1 + \frac{a}{n})^n$ , где  $a \in \mathbb{R}$

**Теорема.**  $x_n$  монотонно возрастает, начиная с  $n > -a$  и ограничена сверху

**Доказательство.**



1. Монотонное возрастание (если  $a < 0$ , то с номера  $n = -a + 1$ )

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n-1}} &= \frac{(1 + \frac{a}{n})^n}{(1 + \frac{a}{n-1})^{n-1}} \\
&= \frac{\frac{(n+a)^n}{n^n}}{\frac{(n-1+a)^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} \\
&= \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} * \frac{(n+a)^n}{(n-1+a)^{n-1}} \\
&= \frac{(n-1)^n * (n+a)^n}{n^n * (n-1+a)^n} * \frac{n-1+a}{n-1} \\
&= (\frac{n^2 - n + an - a}{n^2 - n + an})^n * \frac{n-1+a}{n-1} \\
&= \underbrace{(1 - \frac{a}{n(n-1+a)})^n}_{\geq 1 - \frac{na}{n(n-1+a)} \text{ by Bernoulli's inequality}} * \frac{n-1+a}{n-1} \\
&\geq \frac{n-1}{n-1+a} * \frac{n-1+a}{a} = 1
\end{aligned}$$

2. Ограниченность сверху

$y_n = (1 - \frac{a}{n})^n$  монотонно возрастает при  $n > a$

$$x_n y_n = (1 + \frac{a}{n})^n * (1 - \frac{a}{n})^n = (1 - (\frac{a}{n})^2)^n \leq 1$$

$y_n \geq c > 0$ , начиная с некоторого номера  $\Rightarrow 1 \geq x_n y_n \geq c x_n \Rightarrow x_n \leq \frac{1}{c}$ , начиная с некоторого номера  $\Rightarrow x_n$  - ограниченная

■

**Следствие.** Существует конечный  $\lim(1 + \frac{a}{n})^n$

**Определение.**

1.  $\exp a := \lim(1 + \frac{a}{n})^n$

2.  $e := \lim(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,71828$

Замечание: Последовательность  $x_n = (1 + \frac{a}{n})^n$  при  $a \neq 0$  строго монотонно возрастает с  $n > -a$ . В доказательстве пользовались неравенством Бернулли, при  $a \neq 0$  в нем строгий знак.

**Следствие.** Последовательность  $z_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  строго убывает и стремится к  $e$

**Доказательство.**  $z_n = \underbrace{(1 + \frac{1}{n})}_{\rightarrow 1} * \underbrace{(1 + \frac{1}{n})^n}_{\rightarrow e} \rightarrow e$

$$z_n = \frac{n+1}{n}^{n+1} = \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}}$$

Последовательность  $(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$  строго возрастает, следовательно, обратная к ней строго убывает. ■

## 28 Свойства экспоненты

1. Для любого  $a \in \mathbb{R}$   $\exp a > 0$
2.  $\exp 0 = 1$ ,  $\exp 1 = e$
3. Если  $a \leq b$ , то  $\exp a \leq \exp b$

**Доказательство.**  $0 < 1 + \frac{a}{n} \leq 1 + \frac{b}{n}$  при  $n > -a \Rightarrow \underbrace{(1 + \frac{a}{n})^n}_{\rightarrow \exp a} \leq \underbrace{(1 + \frac{b}{n})^n}_{\rightarrow \exp b}$  при  $n > -a$  ■

4.  $\exp a \geq 1 + a$

**Доказательство.** По неравенству Бернулли:

$$\underbrace{(1 + \frac{a}{n})^n}_{\rightarrow \exp a} \geq 1 + n * \frac{a}{n} = 1 + a \text{ при } n > -a \quad \blacksquare$$

5.  $\exp a * \exp(-a) \leq 1$

**Доказательство.**  $\underbrace{(1 + \frac{a}{n})^n}_{\rightarrow \exp a} * \underbrace{(1 - \frac{a}{n})^n}_{\rightarrow \exp(-a)} = (1 - (\frac{a}{n})^2)^n \leq 1$  ■

6.  $\exp a \leq \frac{1}{1-a}$  при  $a < 1$

**Доказательство.** С помощью двух предыдущих пунктов

$$\exp a \leq \frac{1}{\exp(-a)} \leq \frac{1}{1-a} \quad \blacksquare$$

7.  $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  при всех  $n$

**Доказательство.**  $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \leq \underbrace{(1 + \frac{1}{m})^m}_{\rightarrow e}$  при  $m \geq n+1 \Rightarrow (1 + \frac{1}{n})^n < e$

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2} \geq \underbrace{(1 + \frac{1}{m})^{m+1}}_{\rightarrow e} \text{ при } m \geq n+1 \Rightarrow (1 + \frac{1}{n})^{n+1} > e \quad \blacksquare$$

В частности, подставив  $n = 1$  и  $n = 5$  получаем, что  $2 < e < 3$

## 29 Формула для экспоненты суммы

**Лемма.** Если  $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ , то  $\lim(1 + \frac{a_n}{n})^n = \exp a$

**Доказательство.** Последовательность  $a_n$  ограничена  $\Rightarrow a_n \leq M$ ,  $a \leq M$  и  $M > 0$

$$A := 1 + \frac{a}{n} \leq 1 + \frac{M}{n} \quad B := 1 + \frac{a_n}{n} \leq 1 + \frac{M}{n}$$

Надо доказать, что  $\lim(A^n - B^n) = 0$

$$\begin{aligned} |A^n - B^n| &= |A - B|(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1}) \\ &\leq |A - B|n(1 + \frac{M}{n})^{n-1} \\ &\leq |A - B|n(1 + \frac{M}{n})^n \\ &= \frac{|a - a_n|}{n}n(1 + \frac{M}{n})^n \\ &= |a - a_n|(1 + \frac{M}{n})^n \leq \underbrace{|a - a_n|}_{\rightarrow 0} * \exp M \end{aligned}$$

■

**Теорема.**  $\exp(a + b) = \exp a * \exp b$

**Доказательство.**

$$\underbrace{(1 + \frac{a}{n})^n}_{\rightarrow \exp a} * \underbrace{(1 + \frac{b}{n})^n}_{\rightarrow \exp b} = (1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2})^n = \underbrace{(1 + \frac{a+b + \frac{ab}{n}}{n})^n}_{a+b+\frac{ab}{n} := a_n \rightarrow a+b} = \underbrace{(1 + \frac{a_n}{n})^n}_{\rightarrow \exp(a+b)}$$

■

## 30 Сравнение скорости возрастания последовательностей

**Теорема.** Пусть  $x_n > 0$  и  $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ . Тогда  $x_n \rightarrow 0$

**Доказательство.**

$l := \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$ . Начиная с некоторого номера  $m$   $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1+l}{2} =: q < 1$

При  $n \geq m$

$$0 < x_n < \frac{x_n}{x_{n-1}} * \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} * \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} * \dots * \frac{x_{m+1}}{x_m} * x_m < q^{n-m} x_m = q^n * \frac{x_m}{q^m}$$

$$0 < x_n < q^n * \frac{x_m}{q^m} \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

■

**Следствие.**

1.  $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$  при  $a > 1$  (показательная функция растёт быстрее полиномиальной)

**Доказательство.**  $x_n = \frac{n^k}{a^n}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k a^n}{a^{n+1} n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k * \frac{a^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} * \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \rightarrow \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

■

2.  $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$  (факториал растёт быстрее показательной)

**Доказательство.**  $x_n = \frac{a^n}{n!}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1} n!}{(n+1)! a^n} = a \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

■

3.  $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

**Доказательство.**  $x_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

■

## 31 Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ )

**Теорема 1. Штольца № 1**

Пусть  $(y_n)$  строго возрастает и  $\lim y_n = +\infty$ . Тогда если  $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$ .

**Доказательство. Ключевой случай  $l = 0$ :**

Пусть

$$\varepsilon_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow 0$$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и найдём  $m$ , т.ч.  $|\varepsilon_n| < \varepsilon$  при  $n \geq m$ .

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k \cdot (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| \cdot (y_k - y_{k-1}) < \sum_{k=m+1}^n \varepsilon \cdot (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon \cdot \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon \cdot (y_n - y_m) < \varepsilon y_n$$

Можно считать, что  $y_m > 0$  (по теореме о стабилизации знака).

Заметим, что  $|x_m|$  фиксировано, а  $y_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim \frac{|x_m|}{y_n} = 0$  и  $\frac{|x_m|}{y_n} < \varepsilon$ , начиная с некоторого номера.

$$|x_n| \leq |x_m| + |x_n - x_m| < |x_m| + \varepsilon y_n \Rightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \frac{|x_m|}{y_n} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

начиная с некоторого номера  $\Rightarrow \lim \left| \frac{x_n}{y_n} \right| = 0 = l$ .

**Случай  $l \in \mathbb{R}$ :**

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_n &:= x_n - l \cdot y_n, \widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1} = x_n - x_{n-1} - l \cdot (y_n - y_{n-1}) \\ \frac{\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} &= \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \rightarrow 0 \xrightarrow{l=0} \frac{\widetilde{x}_n}{y_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{x}_n}{y_n} = \frac{x_n - l \cdot y_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} - l \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow l \end{aligned}$$

**Случай  $l = +\infty$ :**

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$$

начиная с некоторого номера

$\Rightarrow x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \Rightarrow x_n$  строго возрастает с нек. номера  $m \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n - x_m > y_n - y_m \Rightarrow x_n > y_n + (x_m - y_m) \rightarrow +\infty \Rightarrow x_n \rightarrow +\infty$

Рассмотрим

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \rightarrow 0 \xrightarrow{l=0} \frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow +\infty$$

(а не  $\infty$ , т.к.  $x_n > 0, y_n > 0$  с нек. номера)

**Случай  $l = -\infty$**

Пусть  $\widetilde{x}_n := -x_n$ .

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = -\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty \Rightarrow -\frac{x_n}{y_n} = \frac{\widetilde{x}_n}{y_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow -\infty$$

■

**Следствие.**

Если  $\lim a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\lim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$

**Доказательство.**

$$x_n := \sum_{k=1}^n a_k, \quad y_n := n \nearrow +\infty$$

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim a_n n - (n-1) = \lim a_n = a \Rightarrow \lim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$$

■

Пример. Найти предел:

$$m \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n^{m+1}} \cdot \sum_{k=1}^n k^m$$

$$x_n := \sum_{k=1}^n k^m, \quad y_n := n^{m+1} \nearrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} &= \lim \frac{n^{m+1} - (n-1)^{m+1}}{n^m} = \lim \frac{n^{m+1} - (n^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1} (C_{m+1}^k (-1)^k n^{m+1-k}))}{n^m} = \\ &= \lim \sum_{k=1}^{m+1} ((-1)^{k+1} \cdot \frac{C_{m+1}^k}{n^{k-1}}) = \lim C_{m+1}^1 + \lim \sum_{k=2}^{m+1} ((-1)^{k+1} \cdot \frac{C_{m+1}^k}{n^{k-1}}) = (m+1) + 0 = m+1 \end{aligned}$$

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{m+1} \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{m+1}$$

## 32 Теорема Штольца (для неопределённости $\frac{0}{0}$ )

**Теорема 2.** *Штольца № 2*

$0 < y_n < y_{n-1}$  и  $\lim x_n = \lim y_n = 0$  Тогда если  $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$

**Доказательство. Случай  $l = 0$ :**

Пусть

$$\varepsilon_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow 0$$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и найдём  $m$ , т.ч.  $|\varepsilon_n| < \varepsilon$  при  $n \geq m$ .

$$\begin{aligned} x_n - x_m &= \sum_{k=m+1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k (y_k - y_{k-1}) \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_k - y_{k-1}) < \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_m - y_n) \\ &(x_n - x_m) < \varepsilon (y_m - y_n) \end{aligned}$$

Устремим  $n$  к  $+\infty \Rightarrow |x_n - x_m| \rightarrow |x_m| = x_m, \quad \varepsilon (y_m - y_n) \rightarrow \varepsilon y_m \Rightarrow$

$\Rightarrow$  по пред. переходу в нер., при  $m \geq$  нек.  $N \quad |x_m| < \varepsilon y_m \Rightarrow \left| \frac{x_m}{y_m} \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim \frac{x_m}{y_m} = 0$

**Случай  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ :** Так же, как в теореме Штольца № 1

$$\widetilde{x_n} := x_n - l \cdot y_n, \quad \widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}} = x_n - x_{n-1} - l \cdot (y_n - y_{n-1})$$

$$\frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \rightarrow 0 \xrightarrow{l=0} \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} = \frac{x_n - l \cdot y_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} - l \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow l$$

**Случай  $l = +\infty$ :**

$$\begin{aligned} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty &\Rightarrow \frac{x_{n-1} - x_n}{y_{n-1} - y_n} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \text{ начиная с некоторого номера} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{n-1} - x_n > y_{n-1} - y_n > 0 \Rightarrow x_n \text{ строго убывает} \Rightarrow \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \xrightarrow{l=0} \lim \frac{y_n}{x_n} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = +\infty \end{aligned}$$

**Случай  $l = -\infty$ :** Так же, как в теореме Штольца № 1

Пусть  $\widetilde{x_n} := -x_n$ .

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n-1}}}{y_n - y_{n-1}} = -\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty \Rightarrow -\frac{x_n}{y_n} = \frac{\widetilde{x_n}}{y_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow -\infty$$

■

### 33 Подпоследовательности (определение и простейшие свойства). Теорема о стягивающихся отрезках)

**Определение.** Последовательность  $(x_n)$ ,  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  Тогда  $(x_{n_k})$  - подпоследовательность.

**Замечание.**  $n_k \geq k$  (по индукции)

**Свойства:**

1. Если последовательность имеет предел, то подпоследовательность имеет тот же предел.
2. Пусть две подпоследовательности в объединении дают исходную последовательность. Если подпоследовательности имеют одинаковый предел, то исходная последовательность имеет тот же предел.

**Теорема 3.** *О стягивающихся отрезках.*

$$\text{Пусть } [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots \text{ и } \lim(b_n - a_n) = 0$$

Тогда существует единственная точка  $c$ , принадлежащая всем отрезкам и  $\lim a_n = \lim b_n = c$ .

$$\text{Т.е. } \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] = c$$

**Доказательство.** По теореме о вложенных отрезках  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$ .

Пусть  $c, d \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] \Rightarrow c, d \in [a_n; b_n] \forall n$ ; НУО,  $d \geq c$

$0 \leq d - c \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow c = d$ , иначе  $\exists n : b_n - a_n < \varepsilon = d - c$

$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \xrightarrow{2 \text{ мил.}} c - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim a_n = c$

$0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \xrightarrow{2 \text{ мил.}} b_n - c \rightarrow 0 \Rightarrow \lim b_n = c$

■

## 34 Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}$

**Теорема 4.** Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство.**  $x_n$  ограничено  $\Rightarrow x_n \in [a; b]$

В каком-то из отрезков  $[a; \frac{a+b}{2}]$  и  $[\frac{a+b}{2}; b]$  содержится бесконечное число членов послед. Назовём этот отрезок  $[a_1; b_1]$ .

В каком-то из отрезков  $[a_1; \frac{a_1+b_1}{2}]$  и  $[\frac{a_1+b_1}{2}; b_1]$  содержится бесконечное число членов послед. Назовём этот отрезок  $[a_2; b_2]$ .

В каком-то из отрезков  $[a_2; \frac{a_2+b_2}{2}]$  и  $[\frac{a_2+b_2}{2}; b_2]$  содержится бесконечное число членов послед. Назовём этот отрезок  $[a_3; b_3]$ .

...

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots$$

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0$$

Тогда по теореме о стягивающихся отрезках  $\lim a_n = \lim b_n = c$

Выберем подпоследовательность. Берём  $[a_1; b_1]$ , в нём есть какой-то член последовательности, назовём его  $x_{n_1}$ .

В  $[a_2; b_2]$  содержится бесконечное число членов последовательности  $\Rightarrow$  есть член последовательности с номером, большим  $n_1$ . Обозначим его  $x_{n_2}$ , тогда  $n_2 > n_1$ .

...

$x_{n_k} \in [a_k; b_k], n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , значит построили подпоследовательность.

$$a_k \rightarrow c, b_k \rightarrow c \quad a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \xrightarrow{2 \text{ мил.}} \lim x_{n_k} = c$$

■



## 35 Аналог теоремы Больцано–Вейерштрасса для неограниченной последовательности. Частичные пределы. Теорема о характеристике частичных пределов.

**Теорема 5.**

1. Неограниченная монотонная последовательность стремится к  $+\infty$  или к  $-\infty$ .
2. Из любой неограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к  $+\infty$  или к  $-\infty$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $(x_n)$  возрастает.  $(x_n)$  неограничена  $\Rightarrow$  никакое  $u$  не является верхней границей  $\Rightarrow \exists m : x_m > u \Rightarrow u < x_m \leq x_{m+1} \leq x_{m+2} \leq \dots \Rightarrow x_n > u$ , начиная с некоторого номера  $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$

2. Пусть  $(x_n)$  неограничена сверху.

1 не является верхней границей  $\Rightarrow \exists x_{n_1} > 1$ ;

$\max\{2, x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$  не является верхней границей  $\Rightarrow \exists x_{n_2} > \max\{\dots\} \Rightarrow x_{n_2} > 2$ ,  
 $n_2 > n_1$ ;

$\max\{3, x_1, x_2, \dots, x_{n_2}\}$  не является верхней границей  $\Rightarrow \exists x_{n_3} > \max\{\dots\} \Rightarrow x_{n_3} > 3$ ,  
 $n_3 > n_2$ ;

и т.д.

Итого,  $x_{n_k} > k$  и  $n_1 < n_2 < \dots \Rightarrow (x_{n_k})$  – подпоследовательность  $(x_n)$  и  $\lim x_{n_k} = +\infty$  по предельному переходу в неравенстве.

■

**Определение.**  $a$  – частичный предел последовательности  $(x_n)$ , если найдётся подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow a$ .

**Теорема 6.**  $a$  – частичный предел последовательности  $\Leftrightarrow$  в любой окрестности точки  $a$  найдётся бесконечное число членов последовательности.

**Доказательство.**

” $\Rightarrow$ ”:

Если  $a = \lim x_{n_k}$  и  $U_a$  – окрестность точки  $a$ , то все  $x_{n_k}$  кроме конечного числа лежат в  $U_a \Rightarrow$  в  $U_a$  лежит бесконечное число членов последовательности  $(x_n)$ .

” $\Leftarrow$ ”:

Будем строить подпоследовательность, имеющую предел  $a$ .

В  $B_1(a)$  найдётся бесконечное число членов последовательности, возьмём какой-то и назовём его  $x_{n_1}$ .

В  $B_{1/2}(a)$  найдётся бесконечное число членов последовательности, значит найдётся член  $(x_n)$  с индексом, большим  $n_1$ , назовём его  $x_{n_2}$ .

В  $B_{1/3}(a)$  найдётся бесконечное число членов последовательности, значит найдётся член  $(x_n)$  с индексом, большим  $n_2$ , назовём его  $x_{n_3}$ .

...

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

$$x_{n_k} \in B_{1/k}(a) \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k} \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) \rightarrow 0 \Rightarrow \lim x_{n_k} = a$$

■

## 36 Фундаментальные последовательности. Свойства. Критерий Коши.

**Определение.** Фундаментальная последовательность (сходящаяся в себе, последовательность Коши)

Пусть  $(X, \rho)$  – метрическое пространство.  $x_n \in X$ .  $x_n$  – фундаментальная последовательность, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

**Свойства:**

1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

**Доказательство:**

Пусть  $\lim x_n = a$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\exists N :$

$$\forall n \geq N \rho(x_n, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\forall m \geq N \rho(x_m, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \varepsilon$$

2. Фундаментальная последовательность ограничена

**Доказательство:**

Берём  $\varepsilon = 1$ . Тогда  $\exists N : \forall n, m \geq N \rho(x_n, x_m) < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall n \geq N \rho(x_n, x_N) < 1 \Leftrightarrow x_n \in B_1(x_N)$$

$$R := \max\{\rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} \Rightarrow \forall n \ x_n \in B_R(x_N)$$

3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то фундаментальная последовательность имеет тот же предел.

**Доказательство:**

Пусть  $\lim x_{n_k} = a$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists K : \forall k \geq K \rho(x_k, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\exists N : \forall n, m \geq N \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Возьмём  $N \geq 0$  и подберём такое  $k$ , что  $k \geq N$

и  $n_k \geq N$  (например,  $k \geq \max N, K$  подходит)

$$\text{Тогда } \rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ (т.к. } n_k \geq N)$$

$$\text{И тогда } \rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ (т.к. } k \geq K)$$

$$\Rightarrow \rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \Rightarrow \lim x_n = a$$

**Теорема 7. Критерий Коши**

Числовая последовательность имеет предел  $\Leftrightarrow$  она фундаментальна.

**Доказательство.**

" $\Rightarrow$ ":

По свойству 1.

" $\Leftarrow$ ":

фундаментальность  $\xrightarrow{\text{св-во 2}}$  ограниченность  $\xrightarrow{\text{Больцано–Вейерштрасса}}$   
 $\Rightarrow$  сущ. сходящаяся подпослед.  $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{фундаментальность} \\ \text{фундаментальность} \end{matrix}} \right\} \xrightarrow{\text{св-во 3}}$  существует конечный предел.

■

## 37 Теорема Больцано–Вейерштрасса в $\mathbb{R}^d$ . Полнота $\mathbb{R}^d$

**Определение.** Полнота метрического пространства

Пусть  $(X, \rho)$  – метрическое пространство.  $X$  – полное, если любая фундаментальная последовательность в нём имеет предел.

**Теорема 8.**  $\mathbb{R}^d$  – полное пространство.

**Доказательство.**

Возьмём фундаментальную последовательность  $(x_n)$ .  $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)})$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}| \leq \sqrt{(x_n^{(1)} - x_m^{(1)})^2 + (x_n^{(2)} - x_m^{(2)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_m^{(d)})^2} < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{числовая послед. } x_n^{(k)} \text{ фундаментальна} \Rightarrow \text{у неё есть конечный предел} \\ \lim x_n^{(k)} = a_k \Rightarrow \lim x_n = a, \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \end{aligned}$$

Т.к. в  $\mathbb{R}^d$  покомпонентная и сходимость по метрике – одно и то же.

■

**Теорема 9.** Больцано–Вейерштрасса в  $\mathbb{R}^d$ .

**Доказательство.** Пусть векторная последовательность  $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)})$  ограничена. Это равносильно тому, что все её координатные последовательности ограничены.

Выделим из первой координатной последовательности сходящуюся подпоследовательность  $(x_{n_{1,k}}^{(1)})$ . Тогда получим подпоследовательность  $(x_{n_{1,k}})$ , первая координатная последовательность которой сходится, а остальные ограничены.

Тогда в ней можно выделить такую подпоследовательность  $(x_{n_{2,k}})$  так, чтобы вторая координатная последовательность сходилась.

Повторим так ещё  $d - 2$  раз и получим то, что в векторной подпоследовательности  $(x_{n_k})$ , где  $n_k = n_{d,k}$ , любая координатная последовательность сходится  $\Rightarrow (x_{n_k})$  тоже сходится, т.к. в  $\mathbb{R}^d$  покомпонентная и сходимость по метрике – одно и то же.

■

### 38 Верхний и нижний пределы. Определение и теорема существования. Связь между частичными пределами и верхним и нижним пределами.

**Определение.** Нижний и верхний пределы

$x_n$  - числовая последовательность.

$\underline{\lim} x_n := \liminf x_n := \liminf_{k \geq n} x_k$  - нижний предел.

$\overline{\lim} x_n := \limsup x_n := \limsup_{k \geq n} x_k$  - верхний предел.

$y_n := \inf_{k \geq n} x_k = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \quad y_n \leq y_{n+1}$

$z_n := \sup_{k \geq n} x_k = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \quad z_n \geq z_{n+1}$

**Теорема 10.**  $\underline{\lim}$  и  $\overline{\lim}$  существуют в  $\mathbb{R}$  и  $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$

**Доказательство.**

Про  $\underline{\lim}$ :  $y_n \leq y_{n+1} \Rightarrow (y_n)$  - возрастающая последовательность  $\Rightarrow$  у неё есть предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Про  $\overline{\lim}$ :  $z_n \geq z_{n+1} \Rightarrow (z_n)$  - убывающая последовательность  $\Rightarrow$  у неё есть предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Про неравенство  $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$ :  $y_n \leq z_n, y_n \rightarrow \underline{\lim}, z_n \rightarrow \overline{\lim} \Rightarrow$  по предельному переходу в неравенстве  $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$ . ■

**Теорема 11.**

1.  $\overline{\lim}$  - наибольший частичный предел
2.  $\underline{\lim}$  - наименьший частичный предел
3.  $\exists \lim \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$  и в этом случае  $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

**Доказательство.**

1.  $a := \overline{\lim} x_n$

Рассмотрим **случай**  $a \in \mathbb{R}$

Докажем, что  $a$  - частичный предел.

$a = \lim z_n, z_n = \sup_{k \geq n} x_k, z_n \searrow a$

Будем строить некоторую подпоследовательность  $(x_{n_k})$ .

Найдётся  $n_k \geq n_{k-1} : x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$ . Пусть не нашлось  $\Rightarrow x_n \leq a - \frac{1}{k} \forall n \geq n_{k-1} \Rightarrow \sup\{x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-1}+1}, \dots\} \leq a - \frac{1}{k} \Rightarrow a \leq z_{n_{k-1}} \leq a - \frac{1}{k}$ . Противоречие

$a - \frac{1}{k} \rightarrow a, z_{n_k} \rightarrow a, a - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k} \xrightarrow{2 \text{ мил.}} x_{n_k} \rightarrow a$

Докажем, что  $a$  - наибольший частичный предел.

Пусть  $b$  - частичный предел  $\Rightarrow b = \lim x_{n_k}$ . Но  $x_{n_k} \rightarrow b, z_{n_k} \rightarrow a \Rightarrow$  по предельному переходу  $b \leq a$ .

Рассмотрим **случай**  $a = -\infty$ .

Тогда  $z_n \rightarrow -\infty$ , но  $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \geq x_n \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$ .

Рассмотрим **случай**  $a = +\infty$ .

Тогда  $z_n = +\infty \Rightarrow \sup x_1, x_2, \dots = +\infty \Rightarrow x_n$  не ограничена сверху  $\Rightarrow$  в ней найдётся подпоследовательность, стремящаяся к  $+\infty$ .

2. Доказывается аналогично

3. " $\Rightarrow$ ":

Если  $a = \lim x_n$ , то все подпоследовательности стремятся к  $a \Rightarrow$  все частичные пределы равны  $a \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = \lim x_n = a$ .

" $\Leftarrow$ ":

$$y_n \rightarrow a, z_n \rightarrow a, y_n \leq x_n \leq z_n \xrightarrow{2 \text{ мил.}} x_n \rightarrow a \Rightarrow \lim x_n = \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = a$$

■

**Замечание.** Арифметики для верхних и нижних пределов нет.

Пример.

$$x_n = (-1)^n, \quad y_n = (-1)^{n+1} \Rightarrow \underline{\lim} x_n = \underline{\lim} y_n = -1$$

$$x_n + y_n = 0 \Rightarrow \underline{\lim} (x_n + y_n) = \underline{\lim} (x_n + y_n) = 0$$

$$\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n = -2 < 0 = \underline{\lim} (x_n + y_n)$$

## 39 Характеристика верхних и нижних пределов с помощью $N$ и $\varepsilon$ . Сохранение неравенств.

**Теорема 12.**

1.  $a = \underline{\lim} x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : x_n < a + \varepsilon \end{cases}$
2.  $b = \overline{\lim} x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \ x_n < b + \varepsilon & \textcircled{1} \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon & \textcircled{2} \end{cases}$

**Доказательство.**

2. Докажем  $\textcircled{1} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : z_N < b + \varepsilon$

" $\Rightarrow$ ":

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \ x_n < b + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \ x_n < b + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_N = \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} \leq b + \frac{\varepsilon}{2} < b + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : z_N < b + \varepsilon$$

" $\Leftarrow$ ":

Зафиксируем  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N : z_N < b + \varepsilon \Leftrightarrow \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} < b + \varepsilon \Rightarrow x_n < b + \varepsilon \forall n \geq N$

Докажем  $\textcircled{2} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall N z_N > b - \varepsilon$

" $\Rightarrow$ ":

$\forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon$  при этом  $z_N = \sup\{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall N z_N > b - \varepsilon$

" $\Leftarrow$ ":

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и  $N \Rightarrow z_N > b - \varepsilon \Leftrightarrow \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} > b - \varepsilon \Rightarrow \exists n \geq N : x_n > b - \varepsilon$ ,

иначе  $\forall n \geq N : x_n \leq b - \varepsilon$  и тогда  $\sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} \leq b - \varepsilon \Leftrightarrow z_N \leq b - \varepsilon$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : z_N < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N z_N > b - \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \text{т.к. } z_n \searrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N z_n < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N z_N > b - \varepsilon \end{cases}$$

Это и есть определение предела  $\Rightarrow b = \overline{\lim} x_n$

В обратную сторону, первая строка следует из определения предела, вторая строка следует из того, что  $(z_n) \searrow$ . Более того,  $(z_n) \searrow, \lim z_n = b \Rightarrow z_n \geq b$

■

### Теорема 13.

Если  $x_n \leq y_n$ , то  $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n$  и  $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$

**Доказательство.**

$x_n \leq y_n \Rightarrow \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \leq \inf\{y_n, y_{n+1}, \dots\} \Rightarrow$  по пред. переходу  $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n$

Аналогично для  $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$ .

■

## 40 Сходимость рядов. Необходимое условие сходимости рядов. Примеры.

**Определение.** Ряд

$x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  – ряд.

**Определение.** Частичная сумма ряда

$S_n := \sum_{k=1}^n x_k$

**Определение.** Сумма ряда

Сумма ряда –  $\lim S_n$ , если он существует.

**Определение.** Сходимость ряда

Ряд сходится, если  $\exists \lim S_n \in \mathbb{R}$

В противном случае ряд расходится.

**Теорема 14.** *Необходимое условие сходимости*

Если  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  сходится, то  $\lim x_n = 0$ .

**Доказательство.** Если ряд сходится, то  $S := \lim S_n \in \mathbb{R}$ . Тогда  $x_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim x_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$  ■

**Примеры:**

1. Геометрическая прогрессия  $1 + q + q^2 + \dots \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

При  $|q| < 1$   $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow \frac{1}{1-q}$

При  $|q| > 1$  ряд расходящийся, т.к. не выполнено необходимое условие.

2.  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$S_{2n} = 0, S_{2n+1} = 1 \Rightarrow$  предела нет.

3. Гармонический ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  – гармонические числа.  $H_n$  монотонно возрастает.

$$H_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{> 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}} > \\ > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n \text{ шт.}} = 1 + \frac{n}{2} \Rightarrow \text{частичные суммы сколь угодно большие} \Rightarrow \lim H_n = +\infty$$

Гармонический ряд – расходящийся ряд, члены которого стремятся к 0.

- 4.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

## 41 Простейшие свойства сходящихся рядов.

1. Сумма ряда единственна

**Доказательство.** Утверждение про единственность предела частичных сумм ■

2. Расстановка скобок не меняет суммы ряда (если она была)

**Доказательство.** 
$$\underbrace{x_1}_{S_1} + (\underbrace{x_2 + x_3 + x_4}_{S_4}) + (\underbrace{x_5 + x_6}_{S_6}) + (\underbrace{x_7 + x_8 + x_9}_{S_9}) \dots$$

Т.е. из последовательности частичных сумм просто выбрали другую подпоследовательность, ну таким образом, если предел был, то он такой же и остался. ■

**Замечание.** Он расстановки скобок сумма ряда могла появиться.

Пример. Ряд  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  расходится. Но при расстановке следующим образом скобок:  $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$  получаем, что ряд имеет сумму 0.

3. Добавление/отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость, но влияет на сумму.

**Доказательство.** Рассмотрим отбрасывание.

Ряд  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ , частичная сумма которого  $S_n$ , переделали в  $x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3} + \dots$ , частичная сумма которого  $\tilde{S}_n := x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_{k+n} = S_{k+n} - S_k$ . Т.к.  $k$  фиксировано отсюда видно, что если  $S_n$  (не) имеет предел, то и  $\tilde{S}_n$  (не) имеет предел, и наоборот.

Добавление - просто обратная операция. ■

4. Если  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  сходятся, то  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n)$  сходится и  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$
5. Если  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, то  $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$  сходится и  $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n = c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$