Конспект лекций по математическому анализу [1]

Храбров Александр Игоревич

Первый курс, первый семестр 2020

[1]Атворы: maxmartynov08, K-dizzled, SmnTin, muldrik

Оглавление

Глава 1

Введение

1 Множества

Определение 1. *Множество - набор уникальных элементов*

Множества - большие буквы $A, B, \dots$
Элементы множеств - маленькие буквы $a, b, \dots$
$x \in A - x$ пренадлежит A
$x \notin A - x$ не пренадлежит A
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{R}$ - вещественные числа
$\mathbb{R}$ - комплексные числа

Теорема. *Правила Де Моргана*

$$A \ \setminus \ (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$
$$A \ \setminus \ (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

Доказательство. Докажем для первой формулы. Вторая доказывается аналогично.
$x \in A \ \setminus \ (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \text{ при всех } \alpha \end{cases} \Longleftrightarrow x \in A \ \setminus \ B_\alpha$ при всех $\alpha \in I \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$ ∎

Теорема. *Операции над множествами*

- $A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$
- $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Замечание: $\bigtriangleup, \cup, \cap$ - комммутативны, ассоциативны

Определение 2. *Декартово произведение множеств* $A \times B = \{\langle a, b\rangle : a \in A; b \in B\}$

Теорема.

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

Доказательство. $x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \text{ для некоторых } \alpha \in I \end{cases} \iff$

$x \in A \cap B_\alpha$ для некоторых $\alpha \in I \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$ ■

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\langle a, b\rangle$ *- пара "пронумерованных" элементов*

$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Leftarrow\!\!\Rightarrow$

```
    ((a == c) && (b == d))
```

2 Отношения

Определение 4. *Область определения:* $\delta_R = \{x \in A : \exists y \in B,$ *т.ч.*$\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}\}$

Определение 5. *Область значений:* $\rho_R = \{y \in B : \exists x \in A,$ *т.ч.*$\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}\}$

$\delta_{R-1} = \rho_R$
$\rho R - 1 = \delta_R$

Определение 6. *Композиция отношений*

$$R_1 \subset A \times B, \quad R_2 \subset B \times C, \quad R_1 \circ R_2 \subset A \times C$$

Пример

- $\langle x, y\rangle \in R$, если x — отец y
- $\langle x, y\rangle \in R \circ R$, если x — дед y
- $\langle x, y\rangle \in R^{-1} \circ R$, если x — брат y

- δR — все, у кого есть сыновья

Определение 7. *Бинарным отношением R называется подмножество элементов декартова произведения двух множеств $R \subset A \times B$*

Элементы $x \in A, y \in B$ находятся в отношении, если $\langle x, y \rangle \in R$ (то же, что xRy)

Обратное отношение $R^{-1} \subset B \times A$

Определение 8. *Отношение называется:*

- Рефлексивным, если $xRx \ \forall x$
- Симметричным, если $xRy \Longrightarrow yRx$
- Транзитивным, если $xRy, yRz \Longrightarrow xRz$
- Иррефлексивным, если $\neg xRx \forall x$
- Антисимметричным, если $xRy, yRx \Longrightarrow x = y$

Определение 9. *R является отношением*

1. Эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно
2. Нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно
3. Нестрогого полного порядка, если выполняется п. $2 + \forall x, y$ либо xRy, либо yRx
4. Строгого частичного порядка, если оно иррефлексивно и транзитивно
5. Строгого полного порядка, если выполняется п. $4 + \forall x$, у либо xRy, либо yRx

Пример

- $x \equiv y \ (mod \ m)$ — отношение эквивалентности
- X - множество, 2^X — множество всех его подмножеств
- $\forall x, y \in 2^x : \langle x, y \rangle \in R$, если $x \subsetneq y$ — отношение строгого частичного порядка
- Лексикографический порядок на множестве пар натуральных чисел — отношение нестрогого полного порядка

Определение 10. *Отображение $f : A \longrightarrow B$*

- инъективно, если $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- сюръективно, если $\rho_f = B$
- биективно, если f инъективно и сюръективно

3 Аксиомы вещественных чисел

Определение 11. *Вещественные числа - алгебраическая структура, над которой определены операции сложения "+" и умножения "·"* $(\mathbb{R} * \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

Определение 12. *Аксиомы вещественных чисел:*

- A_1 Ассоциативность сложения
  $x + (y + z) = (x + y) + z$
- A_2 Коммутативность сложения
  $x + y = y + x$
- A_3 Существование нуля
  $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}\ x + 0 = x$
- A_4 Существование обратного элемента по сложению
  $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$
- M_1 Ассоциативность умножения
  $x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$
- M_2 Коммутативность умножения
  $xy = yx$
- M_3 Существование единицы
  $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}\ x \cdot 1 = x$
- M_4 Существование обратного элемента по умножению
  $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$
- M_A Дистрибутивность
  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Замечание - Вышеперечисленные аксиомы бразуют поле

Бинарное отношение "$\leqslant$"
Аксиомы порядка, задающие отношение порядка на множестве вещественных чисел:

- O_1 $x \leqslant x \quad \forall x$
- O_2 $x \leqslant y$ и $y \leqslant x \Longrightarrow x = y$
- O_3 $x \leqslant y$ и $y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$
- O_4 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y$ или $y \leqslant x$
- O_4 $x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z \quad \forall z$
- O_4 $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y \Longrightarrow 0 \leqslant xy$

Теорема. *Аксиома полноты*

$A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, \forall a \in A\ \forall b \in B\ a \leqslant b$
Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b\ \forall a \in A\ \forall b \in B$

Теорема. *Принцип Архимеда*

Согласно принципу Архимеда: $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall y_{>0} \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < ny$

Доказательство.
$A = \{a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : a < ny\}, A \neq \varnothing$ т.к. $0 \in A$
$B = \mathbb{R} \setminus A$
Пусть $A \neq \mathbb{R}$, тогда $B \neq \varnothing$ Покажем, что $a \leqslant b$, если $a \in A, b \in B$
Пойдем от противного. Если $b < a < ny \Longrightarrow b < ny \Longrightarrow b \in A$ - противоречие
Таким образом, по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$
Предположим, что $c \in A$. Тогда $c < ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow c + y < (n+1)y \Longrightarrow$ $c + y \in A \Longrightarrow c + y \leqslant c \Longrightarrow y \leqslant 0$. Это противоречит условию.
Пусть $c \in B$. Так как $y > 0, c - y < c$. Так как B - дополненние A и $c - y \neq c$, $c - y \in A \Longrightarrow$ $c - y < ny \Longrightarrow c < (n+1)y \Longrightarrow c \in A$. Снова пришли к противоречию.
Значит $c \notin A, c \notin B \Longrightarrow c$ не существует $\Longrightarrow B = \varnothing \Longrightarrow A = \mathbb{R}$ ■

Следствие:

1. $\forall \varepsilon_{>0} \, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

   Доказательство.
   $x = 1, y = \varepsilon \Longrightarrow \exists n \in N : 1 < n\varepsilon$ ■

2. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

   Доказательство.
   Пусть $x < 0, y > 0$. Тогда $\exists r = 0 \in \mathbb{Q} : x < r < y$
   Пусть $x \geqslant 0, y > 0, \varepsilon = x - y$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$
   По принципу Архимеда найдется такое число m, что $\frac{m-1}{n} \leqslant x < \frac{m}{n}$
   Предположим, что $\frac{m-1}{n} \leqslant x < y \leqslant \frac{m}{n}$. Тогда мы получим, что $\frac{1}{n} \geqslant y - x = \varepsilon$. Пришли к противоречию
   Следовательно, $\exists m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n} < y$
   Случай $y \leqslant 0$ аналогичен предыдущему ■

3. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то существует иррациональное число $r : x < r < y$

   Доказательство.
   $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Longrightarrow \exists R \in (x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}) \Longrightarrow x < R + \sqrt{2} < y$ (Предыдущий пункт) $\Longrightarrow$ r - иррациональное ■

4. Если $x \geqslant 1$, то $\exists n \in \mathbb{N} : x - 1 < n \leqslant x$