Конспект лекций по математическому анализу

Храбров Александр Игоревич

Первый курс, первый семестр 2020

Оглавление

Глава 1

Введение

1 Арифметические свойства пределов последовательности

X - нормированное пространство
$x_n,\ y_n \in X \quad \lambda_n \in \mathbb{R}$
$\lim x_n = x_0 \quad \lim y_n = y_0 \quad \lim \lambda_n = \lambda_0$

Теорема 1. *Арифметические свойства пределов в нормированном пространстве*

1. $lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$

   Доказательство.

$$||x_n + y_n - (x_0 + y_0)|| = ||(x_n - x_0) + (y_n - y_0)|| \leqslant ||x_n - x_0|| + ||y_n - y_0||$$
$$\lim x_n = x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \quad ||x_n - x_0|| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\lim y_n = y_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \quad ||y_n - y_0|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Тогда при $n \geqslant max\{N_1, N_2\} \quad ||x_n + y_n - (x_0 + y_0)|| \leqslant ||x_n - x_0|| + ||y_n - y_0|| < \varepsilon$ ■

2. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

   Доказательство. Аналогично первому пункту. ■

3. $\lim \lambda_n x_n = \lambda_0 x_0$

   Доказательство.

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| = ||(\lambda_n x_n - \lambda_n x_0) + (\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0)|| \leqslant$$
$$\leqslant ||\lambda_n x_n - \lambda_n x_0|| + ||\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0|| = |\lambda_n| * ||x_n - x_0|| + |\lambda_n - \lambda_0| * ||x_0||$$

   Так как у λ_n есть предел, она ограничена, то есть $|\lambda_n| \leqslant M$.
   Итого получаем:

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| \leqslant M * ||x_n - x_0|| + ||x_0|| * |\lambda_n - \lambda_0||$$

$$\lim x_n = x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \quad ||x_n - x_0|| < \frac{\varepsilon}{2M}$$
$$\lim \lambda_n = \lambda_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \quad |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2||x_0|| + 1}$$

При $n \geqslant max\{N_1, N_2\}$

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| \leqslant M * ||x_n - x_0|| + ||x_0|| * |\lambda_n - \lambda_0|| < M * \frac{\varepsilon}{2M} + ||x_0|| * \frac{\varepsilon}{2||x_0|| + 1} < \varepsilon$$

■

4. $\lim ||x_n|| = ||x_0||$

   Доказательство.

$$||x_n|| - ||x_0|| = ||(x_n - x_0) + x_0|| - ||x_0|| \leqslant ||x_n - x_0|| + ||x_0|| - ||x_0|| = ||x_n - x_0|| \to 0$$

■

5. Если в X есть скалярное произведение, то $\lim < x_n, y_n > = < x_0, y_0 >$

   Доказательство.

$$< x_n, y_n > - < x_0, y_0 > = < x_n, y_n > - < x_n, y_0 > + < x_n, y_0 > - < x_0, y_0 > =$$
$$= < x_n, y_n - y_0 > + < x_n - x_0, y_0 >$$
$$| < x_n, y_n > - < x_0, y_0 > | \leqslant | < x_n, y_n - y_0 > | + | < x_n - x_0, y_0 > | \leqslant$$
$$\leqslant ||x_n|| * ||y_n - y_0|| + ||x_n - x_0|| * ||y_0||$$

   Так как у x_n есть предел, она ограничена, то есть $||x_n|| \leqslant M$.
   Итого получаем:

$$| < x_n, y_n > - < x_0, y_0 > | \leqslant M * \underbrace{||y_n - y_0||}_{\to 0} + ||y_0|| * \underbrace{||x_n - x_0||}_{\to 0}$$

■

Теорема 2. *Арифметические свойства пределов числовых последовательностей*

$x_n,\ y_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = x_0 \quad \lim y_n = y_0$

1. $\lim(x_n \pm y_n) = x_0 \pm y_0$
2. $\lim(x_n y_n) = x_0 y_0$
3. $\lim |x_n| = |x_0|$
4. Если $y_0 \neq 0$ и $y_n \neq 0 \ \ \forall n$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

Доказательство. Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$:

$$|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|}$$

Так кая $y_0 = \lim y_n$, найдется такое N_1, что $\forall n \geqslant N_1 \quad |y_n| \in (\frac{|y_0}{2}, \frac{3|y_0|}{2}) \Rightarrow |y_n| > \frac{|y_0|}{2}$
При $n >= N_1$ получаем, что

$$\frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|}$$

$$lim y_n = y_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \quad |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon * y_0^2}{2}$$

Тогда если $n \geqslant max\{N_1, N_2\}$, то $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}| < \varepsilon$. Теперь, когда мы знаем, что $lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$, доказать исходное равенство легко:

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim(x_n * \frac{1}{y_n}) = \lim x_n * \lim \frac{1}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$$

∎

2 Покоординатная сходимость в $\mathbb{R}^d$

$$x_n =< x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)} >$$

x_n покоординатно сходится к x_0, если

$$\begin{cases} \lim x_n^{(1)} = x_0^{(1)} \\ \dots \\ \lim x_n^{(d)} = x_0^{(d)} \end{cases}$$

Теорема 3.

x_n покоординатно сходится к $x_0 \Longleftrightarrow$x$_n$ сходится к x_0 по норме в $\mathbb{R}^d$

$||a|| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_d^2}$ - норма

Доказательство.

$$||x_n - x_0|| = \sqrt{(x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2}$$

Заметим следующее:

$$\sqrt{(x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2} \geqslant \sqrt{(x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2} = |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}|$$

$$\sqrt{(x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2} \leqslant |x_n^{(1)} - x_0^{(1)}| + \dots + |x_n^{(d)} - x_0^{(d)}|$$

Итого получаем

$$|x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \leqslant ||x_n - x_0|| \leqslant |x_n^{(1)} - x_0^{(1)}| + \dots + |x_n^{(d)} - x_0^{(d)}|$$

Докажем " $\Rightarrow$ ":

$$\lim x_n = x_0 \Rightarrow ||x_n - x_0|| \to 0 \Rightarrow |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \to 0 \Rightarrow \lim x_n^{(k)} = x_0^{(k)}$$

Докажем " $\Leftarrow$ ":

$$\lim x_n^{(k)} = x_0^{(k)} \Rightarrow |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \to 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{d} |x_n^{(k)} - x_0^{(k)}| \to 0 \Rightarrow ||x_n - x_0|| \to 0 \Rightarrow \lim x_n = x_0$$

■

3 Бесконечные пределы

- $x_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = +\infty$

  Вне любого луча $(u, +\infty)$ находится лишь конечное число членов.

  $\forall u \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n > u$

- $x_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = -\infty$

  Вне любого луча $(-\infty, u)$ находится лишь конечное число членов.

  $\forall u \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n < u$

- $x_n \in \mathbb{R} \quad \lim x_n = \infty$

  В любом интервале (u, v) находится лишь конечное число членов.

  $\forall u \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad |x_n| > u$

Замечание 1: Если $\lim x_n = +\infty$ или $\lim x_n = -\infty$, то $\lim x_n = \infty$. Обратное неверно (контрпример - $x_n = (-1)^n n$).

Замечание 2: Если $\lim x_n = \infty$, то x_n не ограничена. Обратное неверно (контрпример - $x_n = n$(если n четно) и $x_n = 0$ иначе).

Теорема 4. *Единственность предела в* $\overline{\mathbb{R}}$

Если $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\lim x_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, то $a = b$.

Доказательство. Пусть $a < b$.

Если $a,\ b \in \mathbb{R}$, то $a = b$ (должно быть доказано где-то раньше).

Если $a \in \mathbb{R}$ и $b = +\infty$, то в $(a-1, a+1)$ и $(a+1, +\infty)$ должно содержаться бесконечное число членов последовательности, но это невозможно.

Аналогично для случая $a = -\infty$ и $b \in \mathbb{R}$.

Если $a = \infty$ и $b = \infty$, то либо $a = b = +\infty$, либо $a = b = -\infty$. ■

Теорема 5. *О стабилизации знака в* $\overline{\mathbb{R}}$

Если $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, x_n и a одного знака.

Доказательство. Не, ну это очевидно. ■

Теорема 6. *О предельном переходе в неравенстве в* $\overline{\mathbb{R}}$

1. Если $\lim x_n = +\infty$ и $x_n \leqslant y_n \; \forall n$, то $\lim y_n = +\infty$.

   Доказательство. Мы знаем что,

   $$\forall u \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n > u$$

   Так как $x_n \leqslant y_n \; \forall n$, то нам подойдет тоже N:

   $$\forall n \geqslant N \quad y_n \geqslant x_n > u$$

   ■

2. Если $\lim y_n = -\infty$ и $x_n \leqslant y_n \; \forall n$, то $\lim x_n = -\infty$.

   Доказательство. Аналогично первому пункту. ■

3. Если $x_n \leqslant y_n \; \forall n$ и $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim y_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, то $a \leqslant b$

   Доказательство.

   - $a, b \in R$, доказано ранее
   - $a = -\infty$, то $a \leqslant b$ всегда
   - $a = +\infty$, то по первому пункту $b = +\infty$
   - $b = +\infty$, то $a \leqslant b$ всегда
   - $b = -\infty$, то по второму пункту $a = -\infty$

   ■

4 Бесконечно большие и малые последовательности

- x_n называется бесконечно большой, если $\lim x_n = \infty$
- x_n называется бесконечно малой, если $\lim x_n = 0$
- x_n называется сходящайся, если она имеет конечный предел

Теорема 7. *Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми*

$x_n \neq 0 \; \forall n$
x_n - б.б. $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - б.м.

Доказательство. x_n - б.б. $\Leftrightarrow \forall u > 0 \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad |x_n| > u \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad |x_n| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - б.м. ■

Теорема 8. *О действиях с бесконечно малыми*

1. Сумма / разность б.м. это б.м.

   Доказательство. Предел суммы / разности это сумма / разность пределов. ■

2. Произведение б.м. и ограниченной это б.м.

   Доказательство. y_n - ограниченная $\Rightarrow |y_n| \leqslant M$

   x_n - б.м. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

   $|x_n y_n| \leqslant M|x_n| < \varepsilon$ ■

5 Арифметические действия в $\overline{\mathbb{R}}$

Теорема 9. *Об арифметических операциях с* ∞

1. $x_n \to +\infty, \ y_n$ - ограниченная снизу $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$

   Доказательство. y_n - ограниченная снизу $\Rightarrow y_n \geqslant a$

   $x_n \to +\infty \Rightarrow \forall u \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n > u - a$

   $\Rightarrow x_n + y_n > u - a + a = u$ ■

2. $x_n \to -\infty, \ y_n$ - ограниченная сверху $\Rightarrow x_n + y_n \to -\infty$

   Доказательство. Аналогично предыдущему пункту. ■

3. $x_n \to \infty, \ y_n$ - ограниченная $\Rightarrow x_n \pm y_n \to \infty$

   Доказательство. Аналогично первому пункту. ■

4. $x_n \to \pm\infty, \ y_n \geqslant c > 0 \Rightarrow x_n y_n \to \pm\infty$

   Доказательство. $x_n \to +\infty \Rightarrow \forall u \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n > \frac{u}{c}$

   $y_n \geqslant c > 0 \Rightarrow x_n y_n \geqslant c x_n > u$

   Случай $x_n \to -\infty$ рассматривается аналогично. ■

5. $x_n \to \pm\infty, \ y_n \leqslant c < 0 \Rightarrow x_n y_n \to \mp\infty$

   Доказательство. Аналогично предыдущему пункту. ■

6. $x_n \to \infty, \ |y_n| \geqslant c > 0 \Rightarrow x_n y_n \to \infty$

Доказательство. Аналогично четвертому пункту. ■

7. $x_n \to a \neq 0,\ y_n \neq 0 \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

   Доказательство. $\lim \frac{y_n}{x_n} = 0 \Rightarrow \frac{y_n}{x_n}$ - б.м. $\Rightarrow \frac{x_n}{y_n}$ - б.б. $\Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$ ■

8. x_n - ограниченная, $y_n \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$

   Доказательство. $y_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{y_n}$ - б.м. $\Rightarrow x_n * \frac{1}{y_n}$ - б.м. ■

9. $x_n \to \infty,\ y_n \neq 0$ - ограниченная $\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

   Доказательство. y_n - ограниченная $\Rightarrow |y_n| \leqslant M$

   $x_n \to \infty \Rightarrow \forall u > 0 \quad \exists N : \forall n \geqslant N \quad |x_n| > uM \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n}| \geqslant |\frac{x_n}{M}| > u$ ■

Запрещенные операции:

- $+\infty \pm (\mp\infty)$
- $-\infty \pm (\pm\infty)$
- $\pm\infty * 0$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Почему эти операции запрещенные? Разберем на примере:

$\lim x_n = \lim y_n = +\infty$
$x_n - y_n$ может иметь любой предел в $\overline{\mathbb{R}}$, а может его вообще не иметь:

- $x_n = n + a,\ y_n = n \Rightarrow x_n - y_n = a \to a$
- $x_n = 2n,\ y_n = n \Rightarrow x_n - y_n = n \to +\infty$
- $x_n = n + (-1)^n,\ y_n = n \Rightarrow x_n - y_n = (-1)^n$ - предела не имеет

6 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad x > -1,\ n \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Индукция по n.

База $n = 1 : (1+x) = 1 + x$

Переход $n \to n+1 : (1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{>0}\underbrace{(1+x)^n}_{assumption} \geqslant (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$ ■

Замечание 1: В неравенсте Бернулли почти всегда строгий знак, равенство достигается только в случаях, когда $n = 1$ или $x = 0$.

Замечание 2: $(1+x)^p \geqslant 1 + px \quad x > -1$ верно при всех $p \geqslant 1$ и $p \leqslant 0$. Какая-то жесткая тема. Дали без доказателства.

Следствие.

1. Если $a > 1$, то $\lim a^n = +\infty$.

   Доказательство. $a > 1 \Rightarrow a = 1 + x \quad x > -1$

   $a^n = (1+x)^n \geqslant 1 + xn \to +\infty$ ■

2. Если $|a| < 1$, то $\lim a^n = 0$.

   Доказательство. Считаем, что $a \neq 0$.

   $|\frac{1}{a}| > 1 \Rightarrow \lim |\frac{1}{a}|^n = +\infty \Rightarrow |\frac{1}{a}|^n$ - б.б. $\Rightarrow |a^n|$ - б.м. $\Rightarrow a^n$ - б.м. ■

7 Определение экспоненты

Рассмотрим последовательность $x_n = (1 + \frac{a}{n})^n$, где $a \in \mathbb{R}$

Теорема 10. *x_n монотонно возрастает, начиная с $n > -a$ и ограничена сверху*

Доказательство.

1. Монотонное возрастание (если $a < 0$, то с номера $n = -a + 1$)

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n-1}} &= \frac{(1+\frac{a}{n})^n}{(1+\frac{a}{n-1})^{n-1}} \\
&= \frac{\frac{(n+a)^n}{n^n}}{\frac{(n-1+a)^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} \\
&= \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} * \frac{(n+a)^n}{(n-1+a)^{n-1}} \\
&= \frac{(n-1)^n * (n+a)^n}{n^n * (n-1+a)^n} * \frac{n-1+a}{n-1} \\
&= (\frac{n^2 - n + an - a}{n^2 - n + an})^n * \frac{n-1+a}{n-1} \\
&= \underbrace{(1 - \frac{a}{n(n-1+a)})^n}_{\geqslant 1 - \frac{na}{n(n-1+a)} \textit{ by Bernoulli's inequality}} * \frac{n-1+a}{n-1} \\
&\geqslant \frac{n-1}{n-1+a} * \frac{n-1+a}{a} = 1
\end{aligned}$$

2. Ограниченность сверху

   $y_n = (1 - \frac{a}{n})^n$ монотонно возрастает при $n > a$

   $x_n y_n = (1 + \frac{a}{n})^n * (1 - \frac{a}{n})^n = (1 - (\frac{a}{n})^2)^n \leqslant 1$

   $y_n \geqslant c > 0$, начиная с некоторого номера $\Rightarrow 1 \geqslant x_n y_n \geqslant c x_n \Rightarrow x_n \leqslant \frac{1}{c}$, начиная с некоторого номера $\Rightarrow x_n$ - ограниченная

■

Следствие. Существует конечный $\lim(1 + \frac{a}{n})^n$

Определение 11.

1. $exp\, a := \lim(1 + \frac{a}{n})^n$
2. $e := \lim(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,71828$

Замечание: Последовательность $x_n = (1 + \frac{a}{n})^n$ при $a \neq 0$ строго монотонно возрастает с $n > -a$. В доказателсьстве пользовались неравенством Бернулли, при $a \neq 0$ в нем строгий знак.

Следствие. Последовательность $z_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ строго убывает и стремиться к e

Доказательство. $z_n = \underbrace{(1 + \frac{1}{n})}_{\to 1} * \underbrace{(1 + \frac{1}{n})^n}_{\to e} \to e$

$z_n = \frac{n+1}{n}^{n+1} = \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}}$

Последовательность $(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$ строго возрастает, следовательно, обратная к ней строго убывает. ■

8 Свойства экспоненты

1. Для любого $a \in \mathbb{R} \quad exp\, a > 0$
2. $exp\, 0 = 1,\ exp\, 1 = e$
3. Если $a \leqslant b$, то $exp\, a \leqslant exp\, b$

   Доказательство. $0 < 1 + \frac{a}{n} \leqslant 1 + \frac{b}{n}$ при $n > -a \Rightarrow \underbrace{(1 + \frac{a}{n})^n}_{\to exp\, a} \leqslant \underbrace{(1 + \frac{b}{n})^n}_{\to exp\, b}$ при $n > -a$ ■

4. $exp\, a \geqslant 1 + a$

   Доказательство. По неравенству Бернулли:

$\underbrace{(1+\dfrac{a}{n})^n}_{\to exp\,a} \geqslant 1 + n * \frac{a}{n} = 1 + a$ при $n > -a$ ∎

5. $exp\,a * exp\,(-a) \leqslant 1$

   Доказательство. $\underbrace{(1+\dfrac{a}{n})^n}_{\to exp\,a} * \underbrace{(1-\dfrac{a}{n})^n}_{\to exp\,(-a)} = (1-(\frac{a}{n})^2)^n \leqslant 1$ ∎

6. $exp\,a \leqslant \frac{1}{1-a}$ при $a < 1$

   Доказательство. С помощью двух предыдущих пунктов

   $exp\,a \leqslant \frac{1}{exp\,(-a)} \leqslant \frac{1}{1-a}$ ∎

7. $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ при всех n

   Доказательство. $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \leqslant \underbrace{(1+\dfrac{1}{m})^m}_{\to e}$ при $m \geqslant n+1 \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n < e$

   $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} \geqslant \underbrace{(1+\dfrac{1}{m})^{m+1}}_{\to e}$ при $m \geqslant n+1 \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^{n+1} > e$ ∎

   В частности, подставив $n = 1$ и $n = 5$ получаем, что $2 < e < 3$

9 Формула для экспоненты суммы

Лемма. Если $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, то $\lim(1+\frac{a_n}{n})^n = exp\,a$

Доказательство. Последовательность a_n ограничена $\Rightarrow a_n \leqslant M,\ a \leqslant M$ и $M > 0$

$A := 1 + \frac{a}{n} \leqslant 1 + \frac{M}{n} \quad B := 1 + \frac{a_n}{n} \leqslant 1 + \frac{M}{n}$

Надо доказать, что $\lim(A^n - B^n) = 0$

$$\begin{aligned}
|A^n - B^n| &= |A-B|(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1}) \\
&\leqslant |A-B|n(1+\frac{M}{n})^{n-1} \\
&\leqslant |A-B|n(1+\frac{M}{n})^{n} \\
&= \frac{|a-a_n|}{n}n(1+\frac{M}{n})^{n} \\
&= |a-a_n|(1+\frac{M}{n})^{n} \leqslant \underbrace{|a-a_n|}_{\to 0} * exp\,M
\end{aligned}$$

∎

Теорема 12. $exp\,(a+b) = exp\,a * exp\,b$

Доказательство.

$$\underbrace{(1+\frac{a}{n})^n}_{\to exp\,a} * \underbrace{(1+\frac{b}{n})^n}_{\to exp\,b} = (1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2})^n = \underbrace{(1+\frac{a+b+\frac{ab}{n}}{n})^n}_{a+b+\frac{ab}{n}:=a_n\to a+b} = \underbrace{(1+\frac{a_n}{n})^n}_{\to exp\,(a+b)}$$

■

10 Сравнение скорости возрастания последовательностей

Теорема 13. *Пусть* $x_n > 0$ *и* $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$*. Тогда* $x_n \to 0$

Доказательство.

$l := \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Начиная с некоторого номера m $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1+l}{2} =: q < 1$

При $n \geqslant m$

$$0 < x_n < \frac{x_n}{x_{n-1}} * \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} * \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} * \cdots * \frac{x_{m+1}}{x_m} * x_m < q^{n-m}x_m = q^n * \frac{x_m}{q^m}$$

$$0 < x_n < q^n * \frac{x_m}{q^m} \to 0 \Rightarrow x_n \to 0$$

■

Следствие.

1. $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ при $a > 1$ (показательная функция растет быстрее полиномиальной)

   Доказательство. $x_n = \frac{n^k}{a^n}$

   $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k a^n}{a^{n+1}n^k} = (\frac{n+1}{n})^k * \frac{a^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} * (1+\frac{1}{n})^k \to \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow x_n \to 0$$

   ■

2. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ (факториал растет быстрее показательной)

   Доказательство. $x_n = \frac{a^n}{n!}$

   $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}n!}{(n+1)!a^n} = a\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow x_n \to 0$$

   ■

3. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

Доказательство. $x_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow x_n \to 0$$

$\blacksquare$