

Конспект лекций по математическому анализу ¹

Храбров Александр Игоревич

Первый курс, первый семестр 2020

¹Атторы: [maxmartynov08](#), [K-dizzled](#), [SmnTin](#), [muldrik](#)

Оглавление

1	Введение	2
1	Множества	2
2	Отношения	3
3	Аксиомы вещественных чисел	4
4	Принцип математической индукции	6
4.1	Рациональные и иррациональные числа в интервале	7
5	Супремум и инфимум	7
6	Теорема о вложенных отрезках	9
2	Последовательности вещественных чисел	10
1	Метрические пространства и подпространства	10
2	Открытые множества	12
3	Внутренние точки. Внутренность множества	13
4	Замкнутые множества. Замыкание множества	14

Глава 1

Введение

1 Множества

Определение 1. *Множество - набор уникальных элементов*

Множества - большие буквы A, B, \dots

Элементы множеств - маленькие буквы a, b, \dots

$x \in A$ - x принадлежит A

$x \notin A$ - x не принадлежит A

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

\mathbb{R} - вещественные числа

\mathbb{C} - комплексные числа

Теорема. *Правила Де Моргана*

$$A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$$

$$A \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$$

Доказательство. Докажем для первой формулы. Вторая доказывается аналогично.

$$x \in A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_{\alpha} \text{ при всех } \alpha \end{cases} \iff x \in A \setminus B_{\alpha} \text{ при всех } \alpha$$

$\alpha \in I \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$ ■

Теорема. Операции над множествами

- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Замечание - Δ, \cup, \cap - коммутативны, ассоциативны

Определение 2. Декартово произведение множеств $A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A; b \in B\}$

Теорема.

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha})$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_{\alpha})$$

$$\text{Доказательство. } x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in B_{\alpha} \text{ для некоторых } \alpha \in I \end{cases} \iff$$

$$x \in A \cap B_{\alpha} \text{ для некоторых } \alpha \in I \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha}) \quad \blacksquare$$

Определение 3. Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ - пара "пронумерованных" элементов

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff$$

1

$$((a == c) \ \&\& \ (b == d))$$

2 Отношения

Определение 4. Область определения: $\delta_R = \{x \in A : \exists y \in B, \text{ т.ч. } \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}\}$

Определение 5. Область значений: $\rho_R = \{y \in B : \exists x \in A, \text{ т.ч. } \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}\}$

$$\delta_{R^{-1}} = \rho_R$$

$$\rho_{R^{-1}} = \delta_R$$

Определение 6. Композиция отношений

$$R_1 \subset A \times B, \quad R_2 \subset B \times C, \quad R_1 \circ R_2 \subset A \times C$$

Пример

- $\langle x, y \rangle \in R$, если x — отец y
- $\langle x, y \rangle \in R \circ R$, если x — дед y
- $\langle x, y \rangle \in R^{-1} \circ R$, если x — брат y

- δR — все, у кого есть сыновья

Определение 7. Бинарным отношением R называется подмножество элементов декартова произведения двух множеств $R \subset A \times B$

Элементы $x \in A, y \in B$ находятся в отношении, если $\langle x, y \rangle \in R$ (то же, что xRy)

Обратное отношение $R^{-1} \subset B \times A$

Определение 8. Отношение называется:

- Рефлексивным, если $xRx \forall x$
- Симметричным, если $xRy \implies yRx$
- Транзитивным, если $xRy, yRz \implies xRz$
- Иррефлексивным, если $\neg xRx \forall x$
- Антисимметричным, если $xRy, yRx \implies x = y$

Определение 9. R является отношением

1. Эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно
2. Нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно
3. Нестрогого полного порядка, если выполняется п. 2 + $\forall x, y$ либо xRy , либо yRx
4. Строгого частичного порядка, если оно иррефлексивно и транзитивно
5. Строгого полного порядка, если выполняется п. 4 + $\forall x, y$ либо xRy , либо yRx

Пример

- $x \equiv y \pmod{m}$ — отношение эквивалентности
- X - множество, 2^X — множество всех его подмножеств
- $\forall x, y \in 2^X : \langle x, y \rangle \in R$, если $x \subsetneq y$ — отношение строгого частичного порядка
- Лексикографический порядок на множестве пар натуральных чисел — отношение нестрогого полного порядка

Определение 10. Отображение $f : A \longrightarrow B$

- инъективно, если $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- сюръективно, если $\rho_f = B$
- биективно, если f инъективно и сюръективно

3 Аксиомы вещественных чисел

Определение 11. Вещественные числа - алгебраическая структура, над которой определены операции сложения “+” и умножения “.” ($\mathbb{R} * \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

Определение 12. *Аксиомы вещественных чисел:*

A_1 Ассоциативность сложения

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

A_2 Коммутативность сложения

$$x + y = y + x$$

A_3 Существование нуля

$$\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \ x + 0 = x$$

A_4 Существование обратного элемента по сложению

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$$

M_1 Ассоциативность умножения

$$x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$$

M_2 Коммутативность умножения

$$xy = yx$$

M_3 Существование единицы

$$\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \ x \cdot 1 = x$$

M_4 Существование обратного элемента по умножению

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$$

M_A Дистрибутивность

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Вышеперечисленные аксиомы образуют поле

Бинарное отношение “ \leq ”

Аксиомы порядка, задающие отношение порядка на множестве вещественных чисел:

$$O_1 \ x \leq x \quad \forall x$$

$$O_2 \ x \leq y \text{ и } y \leq x \implies x = y$$

$$O_3 \ x \leq y \text{ и } y \leq z \implies x \leq z$$

$$O_4 \ \forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \text{ или } y \leq x$$

$$O_4 \ x \leq y \implies x + z \leq y + z \quad \forall z$$

$$O_4 \ 0 \leq x \text{ и } 0 \leq y \implies 0 \leq xy$$

Теорема. *Аксиома полноты*

$$A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, \forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$$

$$\text{Тогда } \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$$

Теорема. *Принцип Архимеда*

Согласно принципу Архимеда: $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall y_{>0} \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : x < ny$

Доказательство.

$A = \{a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : a < ny\}, A \neq \emptyset$ т.к. $0 \in A$

$B = \mathbb{R} \setminus A$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$, тогда $B \neq \emptyset$. Покажем, что $a \leq b$, если $a \in A, b \in B$

Пойдем от противного. Если $b < a < ny \Rightarrow b < ny \Rightarrow b \in A$ - противоречие

Таким образом, по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

Предположим, что $c \in A$. Тогда $c < ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c + y < (n + 1)y \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c + y \leq c \Rightarrow y \leq 0$. Это противоречит условию.

Пусть $c \in B$. Так как $y > 0, c - y < c$. Так как B - дополнение A и $c - y \neq c, c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n + 1)y \Rightarrow c \in A$. Снова пришли к противоречию.

Значит $c \notin A, c \notin B \Rightarrow c$ не существует $\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow A = \mathbb{R}$ ■

Следствие:

$$\forall \varepsilon_{>0} \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Доказательство.

$$x = 1, y = \varepsilon \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : 1 < n\varepsilon$$
 ■

4 Принцип математической индукции

Определение 13. *Принцип математической индукции*

P_n -последовательность утверждений

1. P_1 - верно
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ из P_n следует P_{n+1}

Тогда P_n верно при всех $n \in \mathbb{N}$

Теорема. *В конечном множестве вещественных чисел есть наибольший и наименьший элемент*

Доказательство.

Докажем для максимума. Для минимума рассуждения аналогичны

Будем доказывать утверждение по индукции

Для $n = 1$ - очевидно

Переход $X_n \rightarrow x_{n+1}$

Рассмотрим произвольное множество из n элементов $X_n = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, где максимальным элементом является x_i . Пусть в наше множество был добавлен элемент X_{n+1} . В таком случае, если $X_{n+1} > X_i$, то новый максимум равен X_{n+1} , иначе - максимумом по-прежнему является X_i . Таким образом, в любом конечном множестве вещественных чисел существует минимальный элемент. ■

Следствия:

1. Во всяком непустом множестве натуральных чисел есть наименьший элемент

Доказательство.

Пусть A - множество натуральных чисел, не содержащее наименьшего элемента. Докажем по индукции, что для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем $\mathbb{N}_n \cap A = \emptyset$

$$\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$$

Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Переход $n \rightarrow n + 1$

Предположим для $\mathbb{N}_n \cap A = \emptyset$

Тогда если для $\mathbb{N}_{n+1} \cap A \neq \emptyset$, то наименьший элемент множества A - это $n + 1$

Значит $\mathbb{N}_{n+1} \cap A = \emptyset$ ■

2. Во всяком конечном непустом множестве натуральных чисел есть наибольший элемент

Доказательство.

Из натуральных чисел строим целые. Множество чисел $A \subseteq \mathbb{Z}$ называется ограниченным сверху и имеет наибольший элемент если $\exists c > a, \forall a \in A, c \in \mathbb{Z}$ ■

4.1 Рациональные и иррациональные числа в интервале

1. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Доказательство.

Пусть $x < 0, y > 0$. Тогда $\exists r = 0 \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Пусть $x \geq 0, y > 0, \varepsilon = x - y$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

По принципу Архимеда найдется такое число m , что $\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}$

Предположим, что $\frac{m-1}{n} \leq x < y \leq \frac{m}{n}$. Тогда мы получим, что $\frac{1}{n} \geq y - x = \varepsilon$. Пришли к противоречию

Следовательно, $\exists m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n} < y$

Случай $y \leq 0$ аналогичен предыдущему ■

2. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то существует иррациональное число $r : x < r < y$

Доказательство.

$x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \implies \exists R \in \mathbb{Q} \in (x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}) \implies x < R + \sqrt{2} < y$ (Предыдущий пункт) \implies
 r - иррациональное ■

3. Если $x \geq 1$, то $\exists n \in \mathbb{N} : x - 1 < n \leq x$

5 Супремум и инфимум

Определение 14.

x - верхняя граница множества A , если $\forall a \in A : a \leq x$

y - нижняя граница множества A , если $\forall a \in A : y \leq a$

Множество ограничено снизу, если существует какая-нибудь нижняя граница

Множество ограничено сверху, если существует какая-нибудь верхняя граница

Определение 15.

Пусть A - ограниченное сверху множество, тогда $\sup A$ - наименьшая из его верхних границ

Определение 16.

Пусть A - ограниченное снизу множество, тогда $\inf A$ - наибольшая из его нижних границ

Теорема.

1. Если $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ и A ограничено снизу, то существует единственный $\inf A$
2. Если $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ и A ограничено сверху, то существует единственный $\sup A$

Доказательство.

Докажем (2)

Пусть B - множество всех верхних границ множества A , т.е. $\forall a \in A, b \in B : a \leq b$

Тогда по аксиоме полноты всегда найдется такой $c : a \leq c \leq b$

$c = \sup A$ по определению

Докажем, что c - единственный

Пусть $\exists c_1, c_2 = \sup A$

Тогда если $c_1 < c_2$, то $c_2 \neq \sup A$

Если $c_1 > c_2$, то $c_1 \neq \sup A$

Следовательно, $c_1 = c_2 = \sup A \implies \sup A$ - единственный



Следствие:

1. $B \subset A, B \neq \emptyset$ и A ограничено снизу. Тогда $\inf B \geq \inf A$
2. $B \subset A, B \neq \emptyset$ и A ограничено сверху. Тогда $\sup B \leq \sup A$

Доказательство.

Докажем (1)

Пусть $a = \inf A$. Тогда a - нижняя граница $A \implies \forall x \in A : a \leq x \implies \forall x \in B : a \leq x \implies$

a - нижняя граница $B \implies a \leq \inf B$



Замечание - Теорема неверна без аксиомы полноты

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \implies$ в множестве рациональных чисел у A нет супремума

Теорема.

$$1. a = \inf A \iff \begin{cases} a \leq x & \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A : x < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$2. b = \sup A \iff \begin{cases} b \geq x & \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A : x > b - \varepsilon \end{cases}$$

Замечание

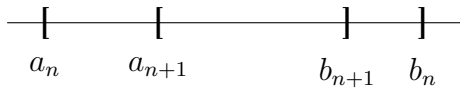
- Если A неограничено сверху, то $\sup A = +\infty$
- Если A неограничено снизу, то $\inf A = -\infty$

6 Теорема о вложенных отрезках

Теорема.

Если $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$

То $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n] \forall n \in \mathbb{N}$



Доказательство.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

$$a_i \leq b_j, \forall i, j \in \mathbb{N}$$

$$\forall i \leq j : a_i \leq a_j \leq b_j \leq b_i, \forall i \geq j : a_i \geq a_j \geq b_j \geq b_i$$

По аксиоме полноты $\forall i, j \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R} : a_i \leq c \leq b_j \implies \forall i \in \mathbb{N} : a_i \leq c \leq b_i$



Замечание

1. Теорема неверна для полуинтервалов

Пример: $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0; \frac{1}{n}] = \emptyset$

2. Теорема неверна для лучей

Пример: $\bigcap_{n=1}^{\infty} (n; +\infty) = \emptyset$

3. Теорема неверна без аксиомы полноты

Пример: число π

$$[3; 4] \supset [3, 1; 3, 2] \supset [3, 14; 3, 15] \supset \dots$$

Пересечение не содержит рациональных чисел

Глава 2

Последовательности вещественных чисел

1 Метрические пространства и подпространства

Определение 17. X - множество $\rho : X \times X \longrightarrow [0; +\infty)$ - метрика (расстояние) если:

1. $\rho(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$
2. если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$
4. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z) \quad \forall x, y, z \in X$

Примеры

1. Дискретная метрика

$$\rho(x, x) = 0$$

$$\rho(x, y) = 1, \text{ если } x \neq y$$

2. $\mathbb{R} \quad \rho(x, y) = |x - y|$

3. \mathbb{R}^2 обычное расстояние

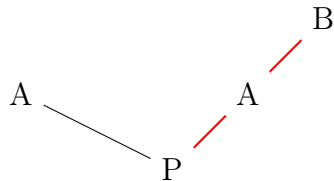
4. Манхэттенская метрика

$$(x', y') = A'$$

$$(x, y) = A$$

$$\rho(A, A') = |x - x'| + |y - y'|$$

5. Французская железнодорожная метрика



Если P, A и B на луче, то $\rho(AB) = AB$
 Если нет, то $\rho(A, B) = \rho(AP) + \rho(B, P)$

6. Расстояние на сфере

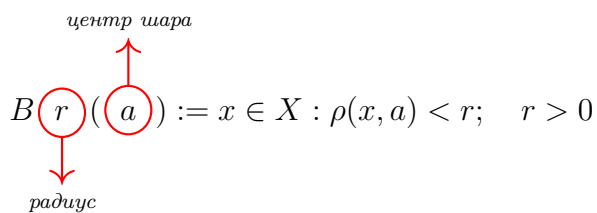
Определение 18. Метрическое пространство (X, ρ) , X - множество, ρ - метрика на нем

Определение 19. Подпространство метрического пространства.

(X, ρ) - метрическое пространство, $Y \subset X$

$(Y, \rho|_{Y \times Y})$ - подпространство метрического пространства (X, ρ) , где Y - подмножество X , а $\rho|_{Y \times Y}$ - сужение ρ на $Y \times Y$

Определение 20. Открытый шар



Определение 21. Замкнутый шар

$$\overline{B_r}(a) := \{x \in X : \rho(x, a) \leq r; \quad r \geq 0\}$$

$$B_r(a) \subset \overline{B_r}(a)$$

- Окрестность точки a - открытый шар $B_r(a)$

Примеры

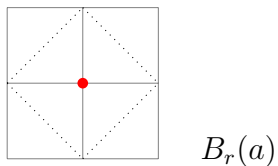
1. Дискретная метрика на X

$$B_{1/2}(a) = a$$

$$B_2(a) = X$$

$$2. \quad \rho(x, y) = |x - y| \quad B_r(a) = (a - r, a + r)$$

3. Манхэттенская метрика



Свойства

1. $B_r(a) \cap B_R(a) = B_{\min\{r,R\}}(a)$
2. Если $x \neq y$, то найдется $r > 0$, такой, что $\overline{B_r}(x) \cap \overline{B_r}(y) = \emptyset$

Доказательство.

$r := \frac{\rho(x,y)}{3}$. Пойдем от противного

Пусть $c \in \overline{B_r}(x) \cap \overline{B_r}(y) \implies \begin{cases} \rho(x,c) \leq r \\ \rho(y,c) \leq r \end{cases} \implies \rho(x,y) \leq \rho(x,c) + \rho(y,c) \leq 2r = \frac{2}{3}\rho(x,y)$ - противоречие ■

2 Открытые множества

Определение 22. Множество A называется открытым, если $A \subset$ метрическому пространству X и $\forall a \in A \exists r_{>0} : B_r(a) \subset A$

Теорема. Свойства открытых множеств:

1. \emptyset, X - открытые множества
2. Объединение любого количества открытых множеств - открытое множество
3. Пересечение конечного числа открытых множеств - открытое множество
4. Открытый шарик - открытое множество

Доказательство.

1. $B_r(a) \subset X$; Для пустого множества нечего проверять, так как там даже точек то нет
2. $A_\alpha \alpha \in I$ - открытые множества. $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$
Возьмем $a \in A$. Тогда $a \in A_\beta$ для какого-то $\beta \in I \implies A_\beta$ - открытое множество $\implies B_r(a) \subset A_\beta$ для некоторого $r_{>0} \implies B_r(a) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A$
3. A_1, A_2, \dots, A_n - открытые множества. $A = \bigcap_{k=1}^n A_k$ Возьмем $a \in A$. Тогда $a \in A_k$ при $k = \{1, 2, \dots, n\} \implies B_{r_k}(a) \subset A_k$ для некоторого $r_k > 0$
 $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_k\} \implies B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k = A$
4. Рассмотрим $B_R(a)$. Возьмем $b \in B_R(a)$
 $r := R - \rho(a,b) > 0$. Докажем, что $x \in B_r(b)$:
 $\rho(x,b) < r \implies \rho(x,a) \leq \rho(x,b) + \rho(b,a) < r + \rho(b,a) = R$ ■

Замечание

В пункте №3 конечность существенна $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1/n}(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}) = \{0\}$ Интервал $(-r; r)$

Пример

$$\mathbb{R} \quad \rho(x, y) = |x - y|$$

$$Y = [0; 2)$$

Шары в (Y, ρ) :

$$\begin{array}{c} \text{---} [\text{-----}) \text{---} \\ 0 \qquad \qquad \qquad 2 \end{array}$$

$$B_1^Y(0) = \{x \in [0; 2) : |x - 0| < 1\} = [0; 1)$$

3 Внутренние точки. Внутренность множества

Определение 23. (X, β) - метрическое пространство $A \subset X$

$a \in A$, a - внутренняя точка множества, если $B_r(a) \subset A$ для некоторого $r > 0$ (Открытое множество - такое множество, у которого все точки внутренние)

Внутренность множества - множество всех его внутренних точек. Обозначается как $IntA$

Теорема. Свойства внутренности:

1. $IntA \subset A$
2. $IntA = \bigcup \{G : G \subset A \text{ и } G - \text{открытое}\} =: B$

Доказательство.

- $IntA \supset B$

Возьмем $b \in B$. Тогда найдется открытое $G_o \subset A$, такое, что $b \in G_o \implies$

$\exists r_{>0}$, такой, что $B_r(b) \subset G_o \subset A \implies b$ - внутренняя точка A

- $IntA \subset B$

Возьмем $a \in IntA \implies a$ - внутренняя точка \implies открытое множество $B_r(a) \subset A$ для некоторого $r_{>0} \implies a \in B_r(a) \subset A$

$a \in B_r(a) \subset B \implies a \in B$ ■

3. $IntA$ - самое большое (по включению) открытое множество, содержащееся в A
4. $IntA$ - открытое множество
5. $IntA = A \iff A$ - открытое
6. $A \subset B \implies IntA \subset IntB$

Доказательство. Пусть $a \in IntA \implies B_r(a) \subset A$ для некоторого $r_{>0} \implies a$ - внутренняя точка B ■

7. $Int(A \cap B) = IntA \cap IntB$

Доказательство.

“ \subset ” : $A \cap B \subset A \implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}A$. Это следует из предыдущего пункта. Аналогично для B

“ \supset ” : Пусть $c \in \text{Int}A \cap \text{Int}B \implies \begin{cases} c - \text{внутренняя точка } A \\ c - \text{внутренняя точка } B \end{cases} \implies \begin{cases} B_{r_1}(c) \subset A \\ B_{r_2}(c) \subset B \end{cases}$

для некоторых $r_1, r_2 > 0 \implies B_r(c) \subset A \cap B$, где $r = \min\{r_1, r_2\} \implies c - \text{внутренняя точка } A \cap B$ ■

8. $\text{Int}(\text{Int}A) = \text{Int}A$

Доказательство. $\text{Int}A$ - открытое множество, а внутренность открытого множества совпадает с ним ■

4 Замкнутые множества. Замыкание множества

Определение 24. (X, β) - метрическое пространство $A \subset X$
 $A \subset X$ - замкнутое, если $X \setminus A$ - открытое

Теорема. Свойства замкнутых множеств:

1. \emptyset, X - замкнутое множества
2. Пересечение любого количества замкнутых множеств - замкнутое множество
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств - замкнутое множество
4. Замкнутый шарик - замкнутое множество

Доказательство.

2. $A_\alpha \ \alpha \in I$ - замкнутые множества. $A \stackrel{?}{\implies} \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ - замкнутое
 \implies $X \setminus A$ - открытое $\implies \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) = X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ - открытое множество \implies
3. A_1, A_2, \dots, A_n - замкнутые множества. $\implies X \setminus A_1, X \setminus A_2, \dots, X \setminus A_n$ - открытые множества
 $\implies \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$ - открытое множество
 $\bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k) = X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k \implies \bigcup_{k=1}^n A_k$ - замкнутое
4. $\overline{B_R}(a)$ - замкнутый шар
 Докажем, что $X \setminus \overline{B_R}(a)$ - открыто

Доказательство.

$\overline{B_R}(a) = \{x \in X : \rho(x, a) \leq R\}$

Возьмем $b \in X \setminus \overline{B_R}(a) \implies \rho(b, a) > R$

$r := \rho(b, a) - R$

Докажем, что $B_r \subset X \setminus B_R(a) \iff B_r(b) \cap \overline{B_R(a)} = \emptyset$

От противного. Пусть есть общая точка $c \in B_r(b) \cap \overline{B_R(a)} \implies \begin{cases} \rho(c, b) < r \\ \rho(c, a) \leq R \end{cases} \implies$

$$\rho(c, b) \leq \rho(a, c) \leq \rho(c, b) < R + r = \rho(a, b) \quad (\text{Так как } \rho(a, c) \leq R \text{ и } \rho(c, b) < r)$$

Противоречие. ■

Замечание

В пункте №3 конечность существенна $\bigcup_{n=1}^{\infty} [-1 + \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}] = (-1; 1)$

Интервал $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Определение 25. Замыкание множества A - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A . Обозначается как ClA

$$ClA = \bigcap \{F : F - \text{замкнутое и } F \supset A\}$$

Теорема.

$$X \setminus ClA = Int(X \setminus A)$$

$$X \setminus IntA = Cl(X \setminus A)$$

Доказательство.

$$x \in X \setminus ClA \iff x \notin ClA \iff x \notin F_{\circ}, \text{ где } F_{\circ} \supset A$$

$$\iff \begin{cases} x \in X \setminus F_{\circ} =: G_{\circ} - \text{открытое} \\ G_{\circ} \subset X \setminus A \end{cases} \iff x \in Int(X \setminus A) \quad \blacksquare$$

Следствие:

$$ClA = X \setminus Int(X \setminus A)$$

$$IntA = X \setminus Cl(X \setminus A)$$

Теорема. Свойства замыкания

1. ClA - замкнутое множество

2. $ClA \supset A$

3. A - замкнуто $\iff A = ClA$

$$\text{Доказательство. } A - \text{замкнуто} \iff X \setminus A \iff X \setminus A = Int(X \setminus A) \iff A = \underbrace{X \setminus Int(X \setminus A)}_{ClA} \quad \blacksquare$$

4. Если $A \subset B$, то $ClA \subset ClB$

$$\text{Доказательство. } A \subset B \iff X \setminus A \supset X \setminus B \implies Int(X \setminus A) \supset Int(X \setminus B) \implies \underbrace{X \setminus Int(X \setminus A)}_{ClA} \subset \underbrace{X \setminus Int(X \setminus B)}_{ClB} \quad \blacksquare$$

5. $Cl(A \cup B) = ClA \cup ClB$

Доказательство. $Cl(A \cup B) = X \setminus \underbrace{Int(X \setminus (A \cup B))}_{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)} = X \setminus Int((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) =$

$X \setminus (Int(X \setminus A) \cap Int(X \setminus B)) = (X \setminus Int(X \setminus A)) \cup (X \setminus Int(X \setminus B)) = ClA \cup ClB$ ■

6. $ClClA = ClA$

Доказательство. ClA - замкнуто + замыкание замкнутого множества - само множество ■

Теорема. $x \in ClA \iff$ для любого $r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \emptyset$

Доказательство. $x \in ClA \iff x \in X \setminus Int(X \setminus A) \iff x \notin Int(X \setminus A) \iff$ для любого $r > 0 : B_r(x)$ не целиком содержится в $X \setminus A \iff$ для любого $r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ ■

Следствие: Если \mathcal{U} - открытое и $\mathcal{U} \cap A = \emptyset$, то $\mathcal{U} \cap ClA = \emptyset$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{U} \cap ClA \implies x \in \mathcal{U}$ - открытое $\exists r > 0 \quad B_r(x) \subset \mathcal{U}$
 $x \in \mathcal{U} \cap ClA \implies x \in ClA \implies B_r(x) \cap A \neq \emptyset \implies \mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$ - противоречие ■

Определение 26. Проколота́я окрестность точки a — $B_r(a) \setminus a$
 Обозначается как $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_a$