ÁLGEBRA VECTORIAL

2. Verifique se é, ou não, verdadeira a proposição seguinte relativa aos vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in \mathbb{R}^n$: se $\vec{u}\neq\vec{0}$ e $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$, então $\vec{v}=\vec{w}$.

10. Sejam os vectores de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}=(2,4,-6)$, $\vec{v}=(-2,6,2)$ e $\vec{w}=(3,-4,5)$. Calcule:

a) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$.

b) $\vec{v}\cdot(3\vec{u}-2\vec{w})$.

c) $4\vec{v}/(\vec{u}\cdot\vec{w})$.

d) $\vec{v}\cdot(2\vec{u}-\vec{v}/3+\vec{w}/2)$.

11. Admita que os pontos $A=(3,1,-2)$, $B=(1,2,-2)$ e $C=(4,0,-1)$ são três dos vértices de um paralelogramo. Determine:

a) Todos os pontos possíveis, *D*, que poderão ser o vértice restante do referido polígono.

b) A área do triângulo $[ABC]$ e a área dos vários paralelogramos definidos na alínea anterior.

13. Determine para que valores de α o ângulo formado pelos vectores de $\mathbb{R}^3$ $\vec{u}=(1-\alpha,2,-2)$ e $\vec{v}=(2,-\alpha,5)$ é obtuso.

14. No espaço linear $\mathbb{R}^3$, calcule os valores de α para os quais $(-4,1-\alpha,2)\perp(\alpha,-2\alpha,-4)$.

15. Obtenha os valores de α para os quais o ângulo formado pelos vectores de $\mathbb{R}^3$ $(1,-\alpha,1)$ e $(1,1,-\alpha)$ é $\pi/3$.

18. Obtenha os vectores não nulos, $\vec{r}$, de $\mathbb{R}^3$, tais que $\vec{r}\cdot\vec{u}=\vec{r}\cdot\vec{v}=0$, sendo que $\vec{u}=(3,0,2)$ e $\vec{v}=(4,-2,3)$.

21. Sendo $\vec{a}=(2,1,2)$ e $\vec{c}=(1,-1,-2)$, determine os vectores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ de $\mathbb{R}^3$, tais que $\vec{a}=\vec{r}+\vec{s}$, $\vec{c}\cdot\vec{s}=0$ e $\vec{r}$ é paralelo a $\vec{c}$.

27. Determine o vector $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, com norma $\sqrt{10}$ e com os ângulos directores $\pi/4$, $\pi/2$ e $3\pi/4$.

28. Sejam os pontos $A=(1,1,1)$ e $B=(-3,3,-3)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine todos os pontos *C*, de forma que o triângulo $[ABC]$ seja rectângulo:

a) No vértice *A*.

b) No vértice *B*.

c) No vértice *C*.

32. Sejam os vectores não nulos $\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$, tais que $\vec{z}$ é paralelo a $\vec{x}$, $\vec{w}$ é perpendicular a $\vec{x}$ e $\vec{y}=2\vec{z}-3\vec{w}$. Mostre que $\vec{x}$ não é perpendicular a $\vec{y}$.

33. Sejam os vectores $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$. Tendo em atenção que $\|\vec{x}\|=4$, $\|\vec{x}+\vec{y}\|=7$ e que $\vec{x}$ e $\vec{x}+\vec{y}$ formam um ângulo de $60°$, obtenha $\vec{x}\cdot\vec{y}$.

35. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vectores de $\mathbb{R}^n$, tais que $\|\vec{v}\|=2$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{13}$ e $\measuredangle(\vec{u},\vec{v})=\pi/6$. Calcule $\|\vec{u}\|$.

36. Considere os vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in\mathbb{R}^n$, tais que $\|\vec{a}\|=\sqrt{3}$, $\|\vec{b}\|=\sqrt{6}$, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}$ é paralelo a $\vec{a}$ e $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\pi/4$. Determine:

a) A norma do vector $\vec{c}$.

b) O ângulo, β, formado pelos vectores $\vec{c}$ e $\vec{d}$.

38. Relativamente aos vectores $\vec{u} = (1, 2, -2, 3)$ e $\vec{v} = (2, -1, 3, 1)$ de $\mathbb{R}^4$, calcule o vector projecção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

45. Considere o conjunto $\mathrm{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de vectores do espaço linear $\mathbb{R}^3$, em que $\vec{u}_1 = (0, 1, 0)$ e $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

a) Mostre que U é um conjunto ortonormal.

b) Obtenha uma base ortonormal, W, para $\mathbb{R}^3$ que inclua os elementos de U.

47. Seja o vector $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$ do espaço linear $\mathbb{R}^3$. Determine:

a) Uma base ortogonal, U, para $\mathbb{R}^3$ a partir do vector $\vec{u}_1$.

b) Uma base ortonormal, W, para $\mathbb{R}^3$ a partir dos elementos da base U.

49. Seja o conjunto $\mathrm{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ de vectores do espaço linear $\mathbb{R}^3$, em que $\vec{u}_1 = (-2, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, -1, 1)$ e $\vec{u}_4 = (-3, 2, 1)$.

a) Será o conjunto U linearmente independente? Justifique.

b) Calcule o subespaço $L(\mathrm{U})$ gerado por U e conclua em relação à sua dimensão.

c) Obtenha uma base ortogonal, W, para $L(\mathrm{U})$.

d) Obtenha uma base ortonormal, V, para $L(\mathrm{U})$ a partir dos elementos da base W.

50. Seja o conjunto $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}$ de vectores do espaço linear $\mathbb{R}^4$, tal que $\vec{u}_1=(2,1,1,-2)$, $\vec{u}_2=(0,1,2,1)$, $\vec{u}_3=(1,-1,2,2)$ e $\vec{u}_4=(0,1,0,-1)$. Considere, ainda, o subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$H=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : w-x-y=0 \ \wedge \ z+x+y=0\right\}$$

a) Calcule o subespaço $L(U)$ gerado por U e conclua em relação à sua dimensão. Obtenha uma base para $L(U)$.

b) Será o conjunto U linearmente independente? Justifique a sua resposta.

c) Determine uma base ortogonal, W, para o subespaço H.

d) Construa uma base ortogonal, V, para o espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ que contenha o máximo número possível de elementos de U e um elemento de H.

e) Obtenha as coordenadas do vector $\vec{u}_1=(2,1,1,-2)$ em relação à base ordenada V.

51. Seja o vector $\vec{u}_1=(1,2,-1,1)$ do espaço linear $\mathbb{R}^4$. Determine:

a) Uma base ortogonal, U, para $\mathbb{R}^4$ a partir do vector $\vec{u}_1$.

b) As coordenadas do vector $\vec{s}=(2,-1,1,-3)$ em relação à base ordenada U.

54. Sejam os vectores do espaço linear $\mathbb{R}^4$, $\vec{u}_1=(2,-2,1,1)$, $\vec{u}_2=(1,-1,2,-1)$, $\vec{v}_1=(1,-2,1,1)$ e $\vec{v}_2=(1,1,-2,1)$.

a) Determine os subespaços gerados pelos conjuntos $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ e $V=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$.

b) Obtenha uma base ortogonal para cada um dos subespaços encontrados em a).

c) Calcule um vector não nulo, $\vec{g}$, que pertença simultaneamente aos subespaços $L(U)$ e $L(V)$ e exprima-o com combinação linear dos vectores das bases obtidas em b).

55. Considere o conjunto $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}$ de vectores do espaço linear $\mathbb{R}^4$, em que $\vec{u}_1=(1,-1,0,0)$, $\vec{u}_2=(1,0,2,-1)$, $\vec{u}_3=(0,1,0,1)$ e $\vec{u}_4=(1,0,1,0)$. Seja o subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathrm{H}=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : z=x+y\right\}$$

a) Calcule o subespaço $L(\mathrm{U})$ gerado por U e conclua em relação à sua dimensão. Obtenha uma base para $L(\mathrm{U})$.

b) Será o conjunto U linearmente dependente? Justifique a sua resposta.

c) Obtenha uma base ortogonal, W, para o subespaço $L(\mathrm{U})$ que contenha o maior número possível de elementos de U.

d) Determine uma base ortonormal, Q, para o subespaço $L(\mathrm{U})$ a partir dos elementos da base W.

e) Obtenha uma base ortogonal, V, para o espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ que contenha dois elementos do subespaço $L(\mathrm{U})\cap\mathrm{H}$.

f) Encontre uma base ortonormal, T, para o espaço $\mathbb{R}^4$ a partir dos elementos da base V.

g) Obtenha as coordenadas do vector $\vec{s}=(2,-1,1,-3)$ em relação às bases ordenadas V e T.

56. Considere o conjunto $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ de vectores do espaço linear $\mathbb{R}^4$, em que $\vec{u}_1=(1,0,-1,1)$, $\vec{u}_2=(0,1,1,0)$ e $\vec{u}_3=(2,-1,0,1)$.

a) Determine o subespaço $L(\mathrm{U})$ gerado por U e conclua em relação à sua dimensão.

b) Seja o vector $\vec{a}=(-1,1,\beta,-1)$. Obtenha β de modo que $\vec{a}\in L(\mathrm{U})$.

c) Obtenha uma base ortogonal, V, para o subespaço $L(\mathrm{U})$ que contenha os vectores $\vec{u}_2$ e $\vec{p}=(2,1,-1,\alpha)$. Comece por condicionar o valor de α.

d) Determine uma base ortogonal, W, para $\mathbb{R}^4$ que seja uma extensão de V.

e) A partir dos elementos da base W encontre uma base ortonormal, S, para $\mathbb{R}^4$.

f) Obtenha as coordenadas do vector $\vec{g}=(0,2,5,-1)$ em relação às bases ordenadas W e S.

57. Considere o conjunto de vectores $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}\subset\mathbb{R}^4$, tal que $\vec{u}_1=(-1,0,1,2)$, $\vec{u}_2=(2,1,0,-3)$, $\vec{u}_3=(3,2,1,-4)$ e $\vec{u}_4=(-3,-1,1,5)$. Seja, ainda, o subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathrm{H}=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : z=x-2w\right\}$$

a) Calcule o subespaço, $L(\mathrm{U})$, gerado por U e conclua em relação à sua dimensão. Obtenha uma base para $L(\mathrm{U})$. Será o conjunto U linearmente dependente? Justifique a resposta.

b) Obtenha uma base ortogonal, W, para o subespaço $L(\mathrm{U})$, que contenha o vector $\vec{u}_1$.

c) Determine qual dos vectores $\vec{a}_1=(0,1,2,-1)$ e $\vec{a}_2=(-1,1,3,3)$ é combinação linear dos elementos da base W e obtenha, nesse caso, a respectiva combinação linear.

d) Construa uma base, V, para o espaço linear $\mathbb{R}^4$, que inclua os vectores $\vec{v}_1=(1,0,1,0)$ e $\vec{v}_2=(0,0,2,-1)$ do subespaço H.

e) Obtenha uma base ortogonal, Q, para o espaço linear $\mathbb{R}^4$, que inclua dois vectores de $L(\mathrm{U})$ e um vector do subespaço H.

f) Calcule as coordenadas do vector $\vec{r}=(2,1,-1,3)$ em relação às bases ordenadas V e Q.

58. Seja o conjunto de vectores $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}$ do espaço linear $\mathbb{R}^4$, em que $\vec{u}_1=(0,1,1,0)$, $\vec{u}_2=(1,-1,0,0)$, $\vec{u}_3=(0,1,0,1)$ e $\vec{u}_4=(1,1,1,1)$.

a) Determine o subespaço, $L(\mathrm{U})$, gerado por U e conclua em relação à sua dimensão. Indique uma base para $L(\mathrm{U})$.

b) Obtenha uma base, W, para o subespaço $L(\mathrm{U})$, que inclua dois elementos do conjunto U e cujos elementos tenham norma igual a $\sqrt{2}$ e façam, entre si, ângulos de $60°$.