FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso: MIEM / MIEGI   Data: / 12 / 20

Disciplina: Álgebra Linear e Geometria Analítica   Ano: 1º   Semestre: 1º

Nome: José Augusto Trigo Barbosa

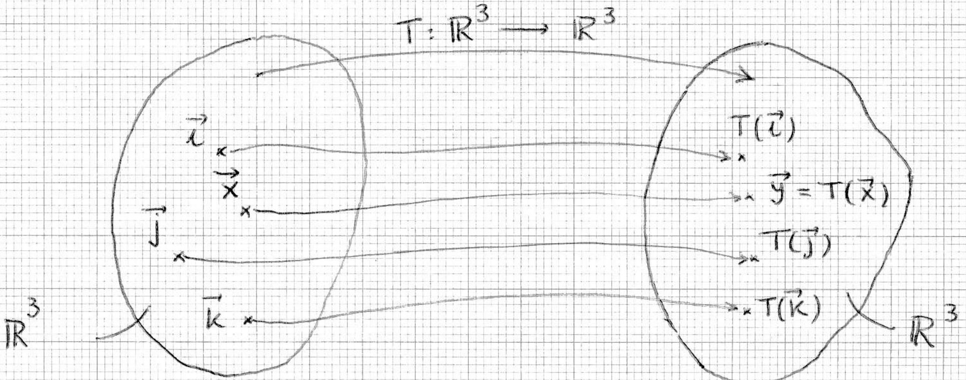
Espaço reservado para o avaliador

Notas de apoio ao Capítulo 3 do manual: "Noções sobre Álgebra Linear".

Representação matricial de transformações lineares

Exemplo: Seja a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (x+z,\ y+z,\ x+y)$$



$$\boxed{E} \xrightarrow{\quad m(T) \quad} \boxed{E}$$

Base $E = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ Base $E = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$

Seja o vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ (domínio) cujas coordenadas na base E (domínio) são

$$\vec{x} = (x, y, z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

A sua imagem $\vec{y} = T(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$ (conjunto de chegada) é

$$\vec{y} = T(\vec{x}) = T(x,y,z) = T(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) =$$

$$= x\,T(\vec{i}) + y\,T(\vec{j}) + z\,T(\vec{k})$$

As imagens $T(\vec{i})$, $T(\vec{j})$, $T(\vec{k})$ têm coordenadas na base E (conjunto de chegada)

$$T(\vec{i}) = T(1,0,0) = (1,0,1) = \vec{i} + \vec{k}$$
$$T(\vec{j}) = T(0,1,0) = (0,1,1) = \vec{j} + \vec{k}$$
$$T(\vec{k}) = T(0,0,1) = (1,1,0) = \vec{i} + \vec{j}$$

A imagem $\vec{y} = T(\vec{x})$ é dada por

$$\vec{y} = T(x,y,z) = x\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+z\\y+z\\x+y\end{bmatrix} = m(T)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

e está expressa na base E (conjunto de chegada).

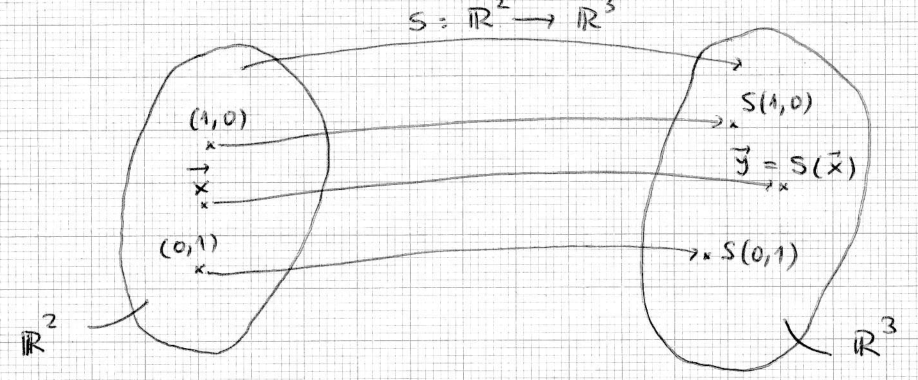
A matriz $m(T) = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ é a representação matricial da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ em relação à base E (domínio e conjunto de chegada).

Dado um elemento $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ (domínio) expresso na base E, a representação matricial $m(T)$ permite obter a sua imagem $\vec{y} = T(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$ e expressá-la na base E (conjunto de chegada).

O número de linhas e de colunas da matriz $m(T)$ é igual à dimensão de $\mathbb{R}^3$ (domínio / conjunto de chegada).

<u>Exemplo</u>: Seja a transformação linear

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longrightarrow (x+y,\ 2x+3y,\ x+2y)$$



$$\boxed{E_2} \longrightarrow \boxed{m(S)} \longrightarrow \boxed{E_3}$$

Base $E_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ — Base $E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

Seja o vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ (domínio) cujas coordenadas na base E_2 (domínio) são

$$\vec{x} = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

A sua imagem $\vec{y} = S(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$ (conjunto de chegada) é

$$\vec{y} = S(\vec{x}) = S(x,y) = S(x(1,0) + y(0,1)) =$$
$$= x\,S(1,0) + y\,S(0,1)$$

As imagens $S(1,0)$, $S(0,1)$ têm coordenadas na base E_3 (conjunto de chegada)

$$S(1,0) = (1,2,1) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$
$$S(0,1) = (1,3,2) = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

A imagem $\vec{y} = S(\vec{x})$ é dada por

$$\vec{y} = S(x,y) = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x+3y \\ x+2y \end{bmatrix} = m(S) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e está expressa na base E_3 (conjunto de chegada).

A matriz $m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é a representação matricial

da transformação linear $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ em relação às bases E_2 (domínio) e E_3 (conjunto de chegada).

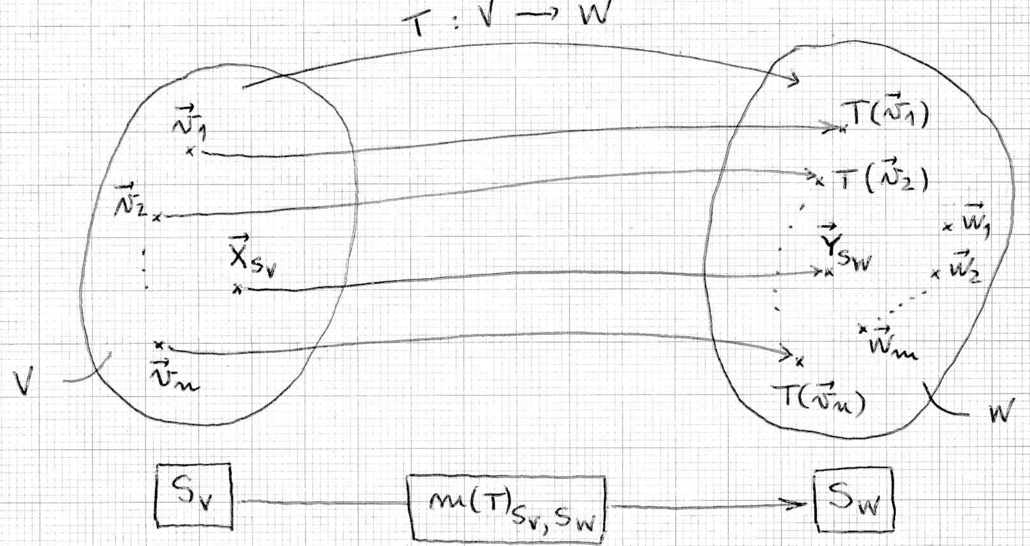
Dado um elemento $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ (domínio) expresso na base E_2, a representação matricial $m(S)$ permite obter a sua imagem $\vec{y} = S(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$ e expressá-la na base E_3 (conjunto de chegada).

O número de colunas de $m(S)$ é igual à dimensão de $\mathbb{R}^2$ (domínio) e o seu número de linhas é igual à dimensão de $\mathbb{R}^3$ (conjunto de chegada).

<u>NOTA</u>: A representação matricial de uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$, em que <u>$\dim V = n$</u> e <u>$\dim W = m$</u> é uma <u>matriz do tipo $m \times n$</u>, e dependerá das bases que forem escolhidas para os espaços V e W.

Representação matricial - formulação

Seja a transformação linear $T : V \longrightarrow W$ em que $\dim V = n$ e $\dim W = m$.



- Escolha de uma base para V (domínio)

$$S_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$$

Todos os elementos $\vec{x} \in V$ serão expressos (coordenadas) na base S_V.

- Escolha de uma base para W (conjunto de chegada)

$$S_W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\} \subset W$$

Todos os elementos $\vec{Y} \in W$ (imagens, através de T, dos elementos $\vec{x} \in V$) serão expressos (coordenadas) na base S_W:

$$\vec{Y}_{S_W} = T(\vec{x}_{S_V}) \quad , \quad \vec{x}_{S_V} \in V$$

pág. 33

- Obtenção das imagens dos elementos que formam a base S_V (domínio), que deverão ser expressas na base S_W (conjunto de chegada).

$$T(\vec{v}_1)_{S_W} = (t_{11}, t_{21}, \dots, t_{m1})_{S_W} = t_{11}\vec{w}_1 + t_{21}\vec{w}_2 + \dots + t_{m1}\vec{w}_m$$

$$T(\vec{v}_2)_{S_W} = (t_{12}, t_{22}, \dots, t_{m2})_{S_W} = t_{12}\vec{w}_1 + t_{22}\vec{w}_2 + \dots + t_{m2}\vec{w}_m$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$T(\vec{v}_n)_{S_W} = (t_{1n}, t_{2n}, \dots, t_{mn})_{S_W} = t_{1n}\vec{w}_1 + t_{2n}\vec{w}_2 + \dots + t_{mn}\vec{w}_m$$

- Cálculo da imagem do elemento $\vec{X}_{S_V} \in V$ através de T.

Seja

$$\vec{X}_{S_V} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{S_V} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n$$

$$T(\vec{X}_{S_V}) = T(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n) =$$

$$= x_1 T(\vec{v}_1)_{S_W} + x_2 T(\vec{v}_2)_{S_W} + \dots + x_n T(\vec{v}_n)_{S_W} =$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{m1} \end{bmatrix}_{S_W} + x_2 \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{m2} \end{bmatrix}_{S_W} + \dots + x_n \begin{bmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{mn} \end{bmatrix}_{S_W} =$$

$$= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{bmatrix}_{S_V,S_W} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{S_V} \iff$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ T(\vec{v}_1)_{S_W} & T(\vec{v}_2)_{S_W} & T(\vec{v}_n)_{S_W} \end{array}$$

pág. 34

$$\Leftrightarrow \quad \vec{Y}_{S_W} = T(\vec{X}_{S_V}) = m(T)_{S_V,S_W}\,\vec{X}_{S_V}$$

- A matriz $m(T)_{S_V,S_W}$ (matriz do tipo $m \times n$) é a representação matricial da transformação linear $T : V \longrightarrow W$ em relação às bases S_V (domínio) e S_W (conjunto de chegada).

- A representação matricial da transformação linear $T : V \longrightarrow W$ não é única, variando com a escolha das bases para os espaços V e W.

- $m(T)_{S_V,S_W} \in M_{(m,n)}(\Omega)$ em que:

  i) número de linhas : $m = \dim(W)$

  ii) número de colunas : $n = \dim(V)$

pág. 35

Exemplo 29 [3.50]

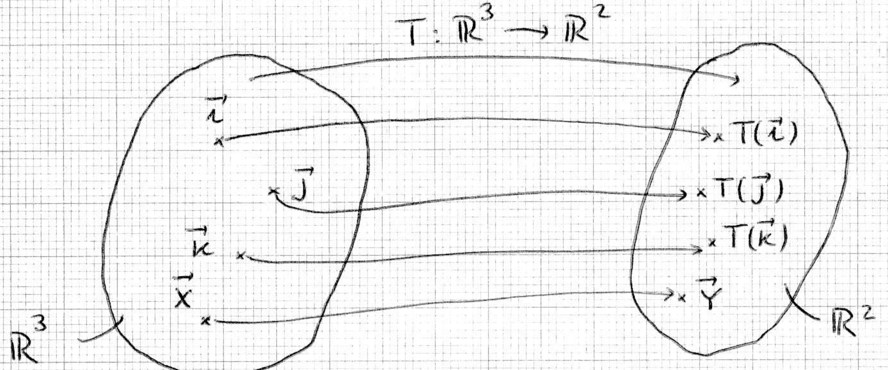
Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$
\begin{aligned}
T(\vec{i}) &= T(1,0,0) = (3,0) \\
T(\vec{j}) &= T(0,1,0) = (0,1) \qquad\qquad (1) \\
T(\vec{k}) &= T(0,0,1) = (-2,1)
\end{aligned}
$$

a) Sejam as bases canónicas:

$$E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \; : \; \mathbb{R}^3$$

$$E_2 = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\} = \{(1,0), (0,1)\} \; : \; \mathbb{R}^2$$



$$\boxed{E_3} \longrightarrow \boxed{m(T)} \longrightarrow \boxed{E_2}$$

Atendendo a (1)

$$m(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Designando $\vec{x} = (x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, então

$$\vec{Y} = T(\vec{x}) = m(T)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3x - 2z \\ y + z \end{bmatrix}$$

pág. 38/39

Tem-se então

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (3x-2z, y+z) \qquad (3)$$

b) Sejam as bases para o espaço $\mathbb{R}^3$:

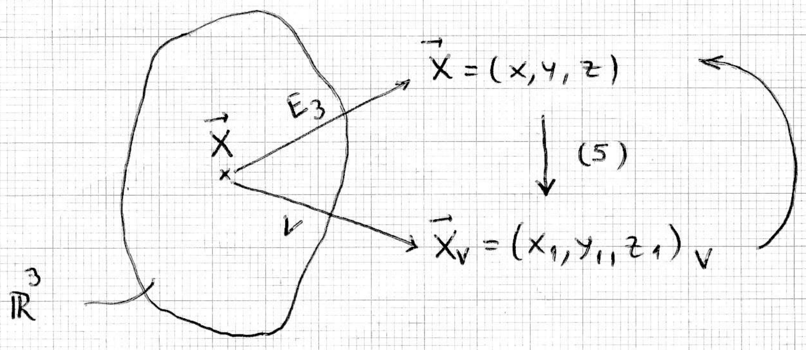
$E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ (canónica)

$V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,-1,0), (0,1,1), (1,0,-1)\}$

Designe-se por

$\vec{x} = (x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (coordenadas de $\vec{x}$ em relação à base E_3)

$\vec{x}_V = (x_1,y_1,z_1)_V = x_1\vec{v}_1 + y_1\vec{v}_2 + z_1\vec{v}_3$ (coordenadas de $\vec{x}$ em relação à base V)



Considerando

$$x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x_1(1,-1,0) + y_1(0,1,1) + z_1(1,0,-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (x_1+z_1, -x_1+y_1, y_1-z_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + z_1 \\ y = -x_1 + y_1 \\ z = y_1 - z_1 \end{cases} \quad (4)$$

Expressões de mudança de coordenadas da base V para a base E_3: $V \to E_3$

pág 38/39

Resolvendo o sistema (2) em ordem a x_1, y_1, z_1 obtém-se

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(x-y+z) \\ y_1 = \frac{1}{2}(x+y+z) \\ z_1 = \frac{1}{2}(x+y-z) \end{cases} \quad (5)$$

Expressões de mudança de coordenadas da base E_3 para a base V : $E_3 \rightarrow V$

pág 39/40

c) Sejam as bases para o espaço $\mathbb{R}^2$:

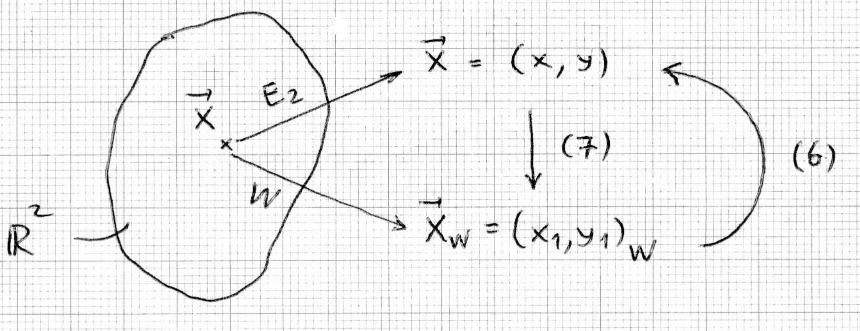
$E_2 = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\} = \{(1,0),(0,1)\}$ (canónica)

$W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = \{(1,1),(1,-1)\}$

Designe-se por

$\vec{x} = (x, y) = x\,\vec{i}_1 + y\,\vec{j}_1$ (coordenadas de $\vec{x}$ em relação à base E_2)

$\vec{x}_W = (x_1, y_1)_W = x_1\vec{w}_1 + y_1\vec{w}_2$ (coordenadas de $\vec{x}$ em relação à base W)



Considerando

$x(1,0) + y(0,1) = x_1(1,1) + y_1(1,-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x, y) = (x_1 + y_1, x_1 - y_1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + y_1 \\ y = x_1 - y_1 \end{cases} \quad (6)$$

Expressões de mudança de coordenadas da base W para a base E_2 : $W \rightarrow E_2$

pág. 40

Resolvendo o sistema (4) em ordem a x_1, y_1 obtém-se

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(x+y) \\ y_1 = \frac{1}{2}(x-y) \end{cases} \quad (7)$$

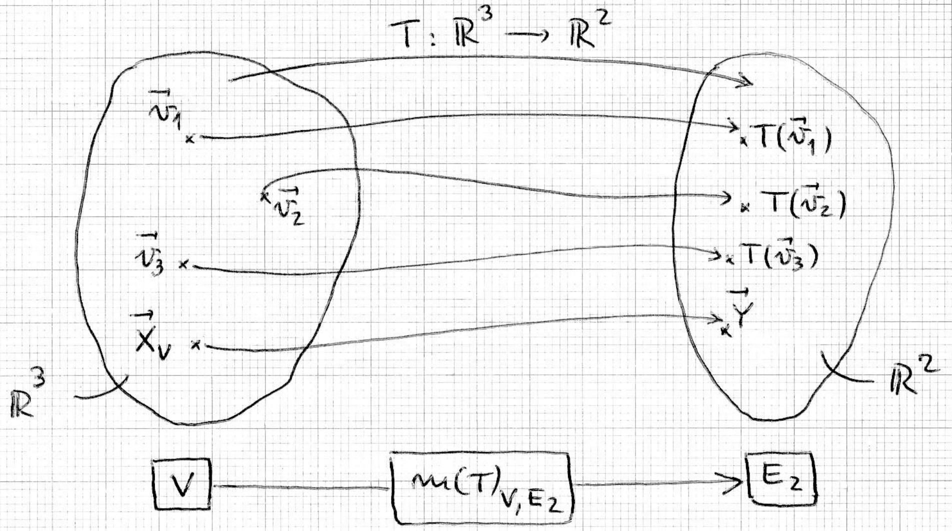
Expressões de mudança de coordenadas da base E_2 para a base W : $E_2 \to W$

pág. 40

d) Sejam as bases

$V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,-1,0), (0,1,1), (1,0,-1)\}$: $\mathbb{R}^3$

$E_2 = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\} = \{(1,0), (0,1)\}$: $\mathbb{R}^2$ (canónica)



Recorrendo a (2) ou (3) verifica-se

$$\begin{aligned} T(\vec{v}_1) &= T(1,-1,0) = (3,-1) \\ T(\vec{v}_2) &= T(0,1,1) = (-2,2) \\ T(\vec{v}_3) &= T(1,0,-1) = (5,-1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$m(T)_{V,E_2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{V,E_2} \quad (9)$$

pág. 41

Wnj

$$\vec{Y} = T(\vec{X}_V) = m(T)_{V,E_2}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_V =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{V,E_2}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2y_1 + 5z_1 \\ -x_1 + 2y_1 - z_1 \end{bmatrix}$$

Tem-se então

$$\begin{aligned} T :\ & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, y_1, z_1)_V \longrightarrow (3x_1 - 2y_1 + 5z_1,\ -x_1 + 2y_1 - z_1) \end{aligned} \tag{10}$$

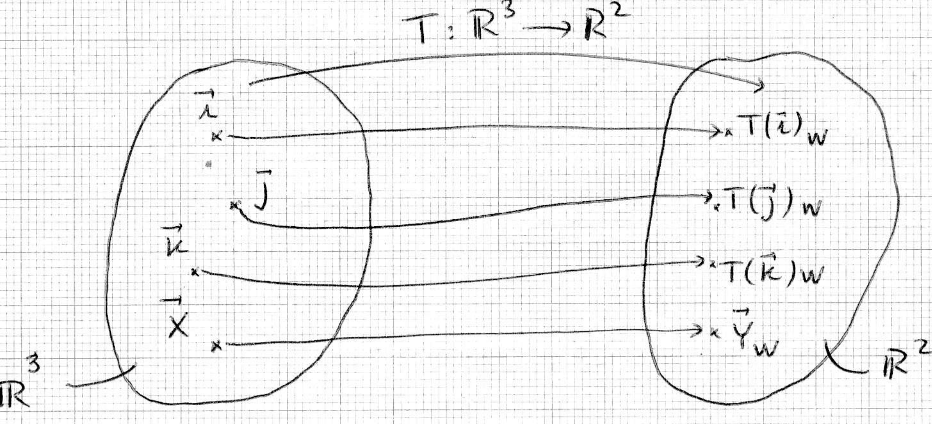
pág 41/42

e) Sejam as bases

$E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$: $\mathbb{R}^3$ (canónica)

$W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = \{(1,1), (1,-1)\}$: $\mathbb{R}^2$

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$



$$\boxed{E_3} \longrightarrow \boxed{m(T)_{E_3,W}} \longrightarrow \boxed{W}$$

Recorrendo a (1) e a (7) verifica-se

$T(\vec{i}) = T(1,0,0) = (3,0) \Rightarrow T(\vec{i})_W = (3/2, 3/2)_W$

$T(\vec{j}) = T(0,1,0) = (0,1) \Rightarrow T(\vec{j})_W = (1/2, -1/2)_W$

$T(\vec{k}) = T(0,0,1) = (-2,1) \Rightarrow T(\vec{k})_W = (-1/2, -3/2)_W$ pág. 42

$$m(T)_{E_3,W} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}_{E_3,W} \qquad (11)$$

$$\vec{Y}_W = T(\vec{X}) = m(T)_{E_3,W} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}_{E_3,W} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} \\ \frac{3x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{3z}{2} \end{bmatrix}_W$$

Tem-se então

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

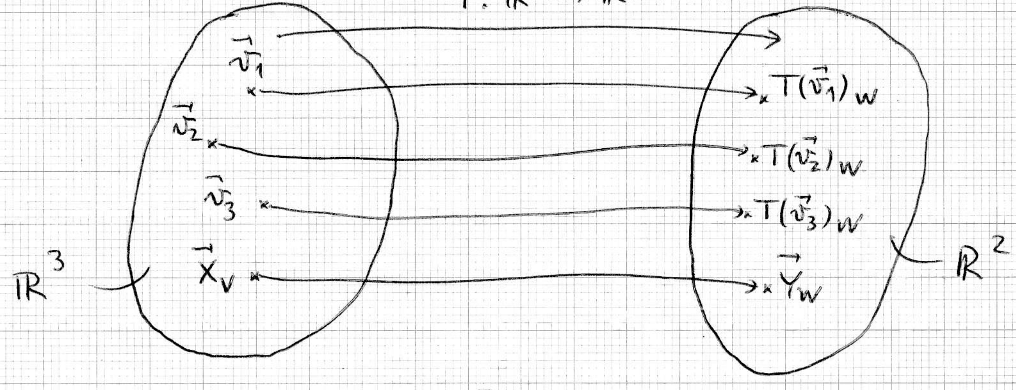
$$(x,y,z) \longrightarrow \left(\frac{3x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2}, \frac{3x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{3z}{2} \right)_W \qquad (12)$$

~~pág. 42~~

f) Sejam as bases

$$V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,-1,0), (0,1,1), (1,0,-1)\} : \mathbb{R}^3$$

$$W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = \{(1,1), (1,-1)\} : \mathbb{R}^2$$



$$\boxed{V} \longrightarrow \boxed{m(T)_{V,W}} \longrightarrow \boxed{W}$$

pág. 43

Recorrendo a (8) e a (7) verifica-se

$$T(\vec{v}_1) = T(1,-1,0) = (3,-1) \Rightarrow T(\vec{v}_1)_W = (1,2)_W$$

$$T(\vec{v}_2) = T(0,1,1) = (-2,2) \Rightarrow T(\vec{v}_2)_W = (0,-2)_W$$

$$T(\vec{v}_3) = T(1,0,-1) = (5,-1) \Rightarrow T(\vec{v}_3)_W = (2,3)_W$$

$$m(T)_{V,W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{V,W} \qquad (13)$$

$$\vec{Y}_W = T(\vec{X}_V) = m(T)_{V,W} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_V =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{V,W} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix} x_1 + 2z_1 \\ 2x_1 - 2y_1 + 3z_1 \end{bmatrix}_W$$

Tem-se então

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1,y_1,z_1)_V \longrightarrow (x_1+2z_1, 2x_1-2y_1+3z_1)_W \qquad (14)$$

pág. 43

g) O vector $\vec{g} = (1,2,-1)$ tem coordenadas relativas à base canónica E_3 para o espaço $\mathbb{R}^3$.

Atendendo a (5) as suas coordenadas em relação à base V para o espaço $\mathbb{R}^3$ são

$$\vec{g}_V = (-1,1,2)_V$$

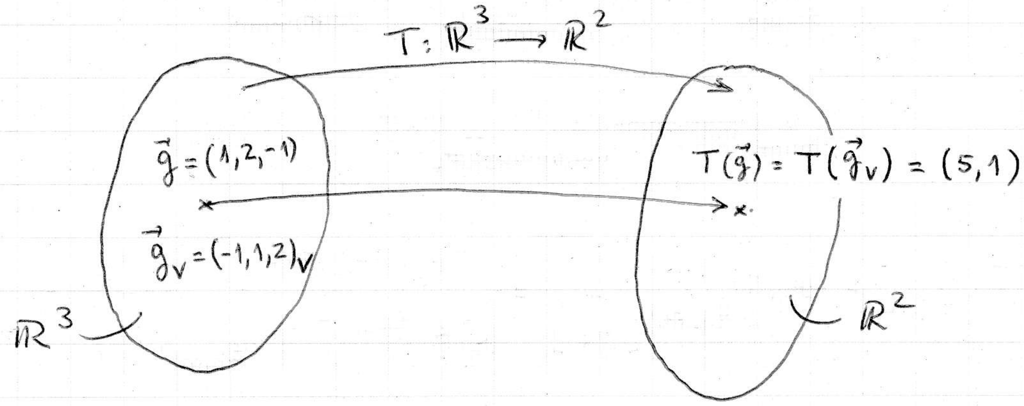
pág. 43

Papel 100% Reciclado

A imagem do vector $\vec{g}$, através de T, expressa na base E_2 para o espaço $\mathbb{R}^2$ pode ser obtida a partir das representações matriciais:

$m(T)$ definida em (2)

$m(T)_{V,E_2}$ definida em (9)



$$\begin{tikzcd}
\boxed{E_3} \arrow[rr, "m(T)"] & & \boxed{E_2} \\
\boxed{V} \arrow[rru, "m(T)_{V,E_2}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$T(\vec{g}) = m(T)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{g}_V) = m(T)_{V,E_2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{V,E_2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A imagem do vector $\vec{g}$, através de T, expressa na base W para o espaço $\mathbb{R}^2$ pode ser obtida a partir das representações matriciais:

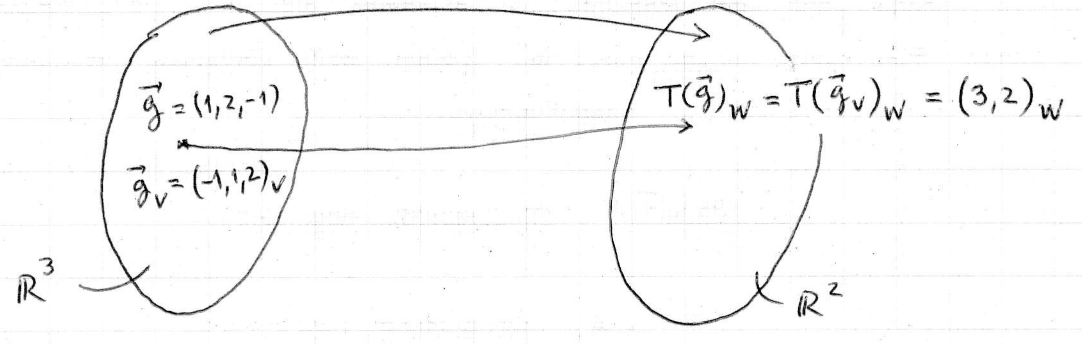
$m(T)_{E_3,W}$ definida em (11)

$m(T)_{V,W}$ definida em (13)

pág. 43/44

Wmj

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$



$$\begin{tikzcd}
\boxed{E_3} \arrow[r, "m(T)_{E_3,W}"] & \boxed{W} \\
\boxed{V} \arrow[ur, "m(T)_{V,W}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$T(\vec{g})_W = m(T)_{E_3,W} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}_{E_3,W} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_W$$

$$T(\vec{g}_V)_W = m(T)_{V,W} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{V,W} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_W$$

As expressões de mudanças de coordenadas definidas em (6) e (7) permitem verificar que as imagens obtidas atrás representam o mesmo elemento do espaço $\mathbb{R}^2$, estando apenas definidas em relação a bases distintas, ou seja,

$$(3,2)_W = (5,1)$$

ou, ainda,

$$3\,\vec{w}_1 + 2\,\vec{w}_2 = 5\,\vec{i}_1 + \vec{j}_1$$

pág. 44/45

<u>Exemplo</u>: Recorrendo à formulação matricial mostre que a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (x+z,\ y+z,\ x+y)$$

é injectiva e obtenha a sua função inversa (ver exemplo 25).

Considerando a base canónica

$$E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

para o espaço $\mathbb{R}^3$, e notando que

$$T(\vec{i}) = T(1,0,0) = (1,0,1)$$
$$T(\vec{j}) = T(0,1,0) = (0,1,1)$$
$$T(\vec{k}) = T(0,0,1) = (1,1,0)$$

a representação matricial de T em relação a base E para o espaço $\mathbb{R}^3$ é

$$m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A transformação linear T é injectiva, se e só se m(T) for uma matriz não singular:

$$|m(T)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Conclui-se que m(T) é uma matriz não singular, pelo que a transformação linear é injectiva.

<u>pág. 48</u>

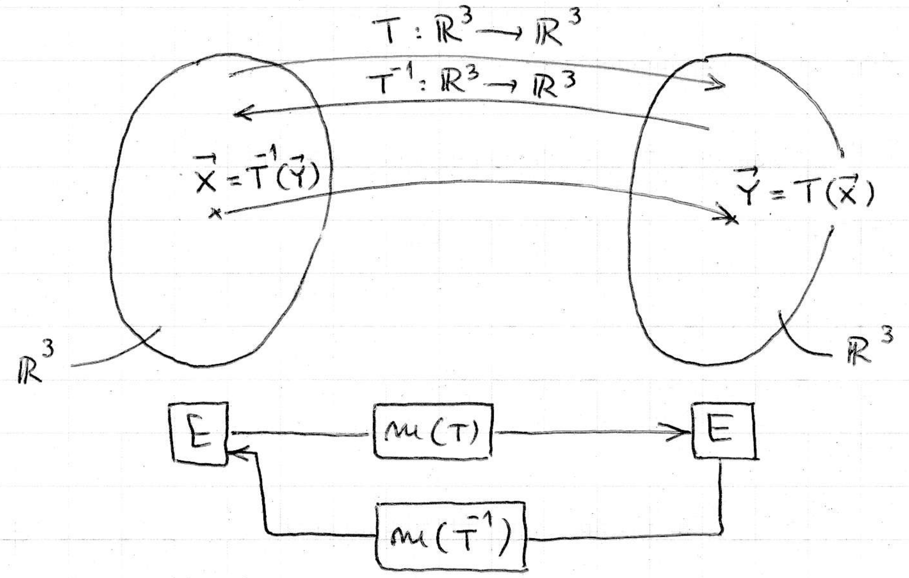
Papel 100% Reciclado

Notando, ainda, que

$$|m(T)| \neq 0 \Rightarrow r\left[m(T)\right] = 3 = \dim T(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3$$

conclui-se que $T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$, ou seja, T é sobrejectiva e, ainda, bijectiva. Nestas condições pode-se escrever

$$T^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$



Sabe-se que

$$m(T^{-1}) = m^{-1}(T)$$

em que

$$m^{-1}(T) = \frac{1}{|m(T)|}\left[\operatorname{Cof} m(T)\right]^T =$$

$$= \frac{1}{(-2)}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

pág. 48

Designando $\vec{Y} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, então

$$\vec{X} = T^{-1}(\vec{Y}) = m(T^{-1}) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a/2 - b/2 + c/2 \\ -a/2 + b/2 + c/2 \\ a/2 + b/2 - c/2 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$T^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(a,b,c) \longrightarrow \left(\frac{a-b+c}{2}, \frac{-a+b+c}{2}, \frac{a+b-c}{2} \right)$$

é a transformação linear inversa de T. (confirme-se o resultado encontrado no exemplo 25).

pág. 48

Wraj