Universidade do Minho
Departamento de Matemática MIECiv

Análise Matemática para Engenharia

folha de exercícios 3 — 2021/2022

- **Derivadas parciais**

1. Usando a definição de derivada parcial, determine

(a) $f_x(0,0)$ e $f_y(1,2)$, sendo $f(x,y) = x^2y$.

(b) $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$, sendo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$, sendo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & \text{se} \quad x+y \neq 0 \\ x & \text{se} \quad x+y = 0 \end{cases}$

2. Determine as derivadas parciais de primeira ordem de $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

(a) $f(x,y) = x^3y + 7x^2 - 2y^3 - 1$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{3x+y^2}{7x+y}$;

(c) $f(x,y) = \sin\left(1 + e^{xy}\right)$;

(d) $f(x,y) = (x^3 - y^2)^2$;

(e) $f(x,y) = xe^y + y \operatorname{sen} x$;

(f) $f(s,t) = e^s \ln(st)$;

(g) $f(x,y) = x \cos \dfrac{x}{y}$;

(h) $f(x,y) = e^{2xy^3}$;

(i) $f(x,y) = xe^{\sqrt{xy}}$;

(j) $f(x,y) = x^y$;

(k) $f(x,y,z) = xe^{xy} \sin(yz)$;

(l) $f(x,y,z) = xyze^{xyz}$;

(m) $f(x,y,z) = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$;

(n) $f(r,u,v) = 1 + u + v - \operatorname{sen}(r^2)$;

(o) $f(x,y,z) = e^x \operatorname{sen}(x+y) + \cos(z - 3y)$;

(p) $f(m,v,r) = \dfrac{mv^2}{r}$;

(q) $f(x,y,z) = \ln(e^z + x^y)$;

3. Mostre que a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

possui derivadas parciais em $(0,0)$, embora seja descontínua nesse ponto.

- **Derivadas parciais de ordem superiors**

4. Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem das funções seguintes:

(a) $f(x,y) = x^4y^3$

(b) $f(x,y) = \log(x+y) + \log(x-y)$

(c) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$

(d) $f(x,y,z) = xe^{yz} + y\ln z$

5. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcule o valor das derivadas parciais $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$

6. Verifique que $w_{xy} = w_{yx}$ para:

(a) $w = xy^4 - 2x^2y^3 + 4x^2 - 3y$; (b) $w = x^3e^{-2y} + y^{-2}\cos x$; (c) $w = x^2\cos\dfrac{z}{y}$.

7. Se $w = r^4s^3t - 3s^2e^{rt}$, verifique que $w_{rrs} = w_{rsr} = w_{srr}$.

8. Uma função f de x e y diz-se *harmónica* se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Prove que as funções seguintes são harmónicas.

(a) $f(x,y) = e^{kx}\cos(ky)\,,\ k \in \mathbb{R}$

(b) $f(x,y) = 3x^2y - y^3$