# Álgebra Linear e Geometria Analítica

EGI+EIC

Exame da 1ª chamada da Época Normal – ano lectivo 2005/2006 – 18 de Janeiro de 2006

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia – Guimarães – Universidade do Minho

Curso: Nome: Número: Classificação:

A prova tem a duração de 120 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. Durante a realização da prova os telemóveis devem estar desligados e só se pode abandonar a sala passados 20 minutos do seu início. A prova é constituído por três grupos e termina com a palavra "Fim". No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 200.

## Grupo I — Indique, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas usando para tal os caracteres "V" ou "F", respectivamente. Cotações — resposta certa: 5; resposta em branco: 0; resposta errada: -5, sendo 0 é cotação mínima neste grupo.

I.1 ☐ Sejam $X$ um espaço vectorial real e $S$ um subconjunto de $X$. Se $X = L(S)$, então $S$ é uma base de $X$.

I.2 ☐ Seja a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (0, -x)$. Então, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

I.3 ☐ $\{(x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

I.4 ☐ $A(B + C) + B(C - A) - (A + B)C = \underline{0}$, em que $A$, $B$ e $C$ são matrizes de ordem $n \in \mathbb{N}$ e $\underline{0}$ é a matriz nula de ordem $n$.

I.5 ☐ Seja $A$ uma matriz triangular inferior. Então, $A$ é uma matriz não-singular.

I.6 ☐ No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, tem-se que $\langle(1, 1, 0), (0, 0, 0)\rangle = \langle(2, 2, 0)\rangle$.

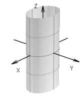
I.7 ☐ A matriz $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{20\times 20}(\mathbb{R})$, $b_{ij} = j$, é simétrica.

I.8 ☐ Seja $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que $f(x, y) = (y, x)$. Então, $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

## Grupo II — Complete, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, as seguintes frases de modo a obter proposições verdadeiras. Cotações — resposta certa: 5; resposta em branco ou errada: 0.

II.1 À quádrica $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ chama-se ☐ .

II.2 Considere, em $\mathbb{R}^3$, a recta $r$ cujas equações cartesianas são $x = y = 2z$. Então, ☐ é o vector director de $r$.

II.3 Considere o cilindro elíptico cuja representação gráfica é  . Então, ______ e ______ são duas possíveis equações para o descrever.

II.4 Diz-se que $X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz tridiagonal se $|i-j| > 1 \Rightarrow x_{ij} = 0$. Então, a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $A =$ ______ é uma matriz tridiagonal mas não é diagonal.

**Grupo III** — Responda, nas folhas que lhe foram distribuídas e por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar, bem como as respectivas justificações. Cotações: 20+20+(10+10)+20+(8+12)+20+20.

III.1 Sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = nA$. Mostre que $(I_n - A)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1}A$.

III.2 Considere o conjunto $V = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ munido das operações $(x, x^2) \oplus (y, y^2) = (x+y, (x+y)^2)$ e $\alpha \odot (x, x^2) = (\alpha x, \alpha^2 x^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Verifique se é válida a afirmação: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \underline{x}, \underline{y} \in V : \alpha \odot (\underline{x} \oplus \underline{y}) = \alpha \odot \underline{x} \oplus \alpha \odot \underline{y}$.

III.3 Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ e o vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre, sem o resolver, que o sistema de equações lineares dado é possível e determinado.

(b) Considere o seguinte teorema, conhecido por Regra de Cramer: " Seja $Ax = b$ um sistema de $n$ equações lineares a $n$ incógnitas. Se o sistema é possível e determinado então $x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}, i = 1, \ldots, n$, em que $\Delta_i$ é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz $A$, na qual se substitui a coluna $i$ pelo vector $b$."

Resolva o sistema de equações lineares dado através da Regra de Cramer.

III.4 Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ e o vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Resolva-o através do método de Gauss e do método de Gauss-Jordan.

III.5 Seja $A_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz associada a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

(a) Determine $f(0, 1, 1)$.

(b) Determine duas bases de $\mathrm{Im}(f)$.

III.6 Determine o espectro da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, bem como o conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio de menor módulo.

III.7 Considere, em $\mathbb{R}^3$, o plano $\alpha$ definido pela equação cartesiana $x - y + z = 0$ e o plano $\beta$ definido pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ e $C = (1, 1, 1)$. Determine o ângulo formado pelos planos $\alpha$ e $\beta$.

Fim.