isec
Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
dfm
Dep. Física e Matemática

Exercícios de Apoio às aulas PL de

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Licenciatura em Engenharia Biomédica, 2011/2012

1 Matrizes. Sistemas de Equações Lineares

1.1 Matrizes

1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Indique o tipo de cada matriz.

   (b) Diga quais das matrizes são quadradas.

   (c) Diga quais das matrizes são triangulares inferiores e quais são diagonais.

2. Considere as matrizes de elementos reais $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$

   Calcule a matriz $2(A+B) - AB$.

3. Para cada um dos seguintes pares de matrizes A e B determine, quando estiverem definidas, as matrizes $A + 2B$, $A - B$, A^2, B^2, AB e BA.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

   (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Apresente todas as ordenações possíveis por forma a que o produto das quatro matrizes esteja definido.

5. Calcule:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2.$

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3.$

   (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3.$

   (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2.$

6. Para cada uma das seguintes matrizes obtenha uma expressão para A^n, com $n \in \mathbb{N}$.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

   (e) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$

7. Considere as matrizes de elementos reais

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\2&3&1\\1&2&0\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\1&3&2\\0&2&1\end{bmatrix}.$$

(a) Calcule AB e A_2B. Que mudança se dá no produto se efectuarmos uma permutação de linhas na matriz da esquerda?

(b) Calcule AB e AB_2. Que mudança se dá no produto se efectuarmos uma permutação de colunas na matriz da direita?

8. Considere as matrizes de elementos reais $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&2&1\\2&2&7\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-4&8&4\\-3&6&3\\2&-4&-2\end{bmatrix}$. Determine AB e BA.

9. Sejam $A=\begin{bmatrix}1&1&2&-1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\\3\end{bmatrix}$. Determine AB e BA.

10. Considere as matrizes de elementos reais

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&2&1\\2&2&7\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}0&5&4\\-1&2&4\\2&1&0\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}4&-3&0\\2&-4&1\\0&5&2\end{bmatrix}.$$

Verifique que $AB_1=AB_2$ mas $B_1\neq B_2$. O que pode concluir?

11. Sempre que possível, apresente exemplos de matrizes quadradas A e B de entradas reais nas condições indicadas. Caso não seja possível, justifique porquê.

(a) $AB=BA\neq 0$.

(b) $AB\neq BA$.

(c) $AB=0\wedge A,B\neq 0$.

(d) $(A+B)^2=A^2+B^2\wedge A,B\neq 0$.

(e) $AB=I\wedge BA\neq I$.

(f) $A^4+8A^2+16I=0$.

12. Justifique, apresentando contra-exemplos, que são falsas as afirmações que se seguem. Em cada caso, corrija-as por forma a obter proposições verdadeiras.

(a) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

(b) $AB=AC\Rightarrow B=C$.

13. Sejam $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$. Determine $X\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $X+A=2(X-B)$.

14. Determine a característica de cada uma das seguintes matrizes em função dos parâmetros α e β:

(a) $A=\begin{bmatrix}1&2&3&\alpha\\1&2&2&0\\1&3&-1&\alpha\\1&4&1&2\alpha\end{bmatrix}$.

(b) $B=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\1&1&0&1\\\alpha&1&-1&2\end{bmatrix}$.

(c) $C=\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\1&1&0&-1\\\alpha&1&1&0\\0&1&\alpha&1\end{bmatrix}$.

(d) $D=\begin{bmatrix}0&0&\alpha\\0&\beta&2\\3&0&1\end{bmatrix}$.

(e) $E=\begin{bmatrix}1&2\alpha+\beta&\alpha+\beta\\1&\alpha+\beta&\beta\\-1&\alpha&\alpha\end{bmatrix}$.

15. Classifique quanto à simetria cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\5&4\end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix}0&1&4\\-1&0&-1\\-4&1&0\end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&3&7\\-1&7&4\end{bmatrix}$.

16. Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1&-2\\3&0\end{bmatrix}$.

(a) Calcule a matriz $(A^t)^t$ e compare-a com A.

(b) Calcule as matrizes $(AB)^t$ e B^tA^t e compare-as.

17. Seja $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine $x^t x$ e $x x^t$. Generalize o resultado para um vector $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ qualquer.

18. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ reais e simétricas. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras. No caso de uma afirmação ser falsa, indique um contra-exemplo.
    (a) $A + B$ é simétrica.
    (b) $A + A^t$ é simétrica.
    (c) AB é simétrica.
    (d) Se $AB = BA$ então AB é simétrica.
    (e) $AB = BA$.
    (f) A^k é simétrica para todo o número natural k.

19. Mostre que se A e B são simétricas e comutam, então AB é simétrica.

20. Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Mostre que a matriz AA^t é simétrica.

21. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B, C \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$. Mostre que $[A(B + C)]^t = B^t A^t + C^t A^t$.

22. Uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, com característica n, diz-se **ortogonal** se $AA^t = A^t A = I_n$ [1].
    Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ é ortogonal.

23. Verifique se as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ são ortogonais.

24. Para que valores de $k \in \mathbb{R}$ é que a matriz $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & k \\ k & k \end{bmatrix}$ é ortogonal?

1.2 Sistemas de Equações Lineares. Matriz Inversa

25. Discuta e, quando possível, resolva os seguintes sistemas de equações lineares:

(a) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + z = -1 \\ 3x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$;

(e) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;

(f) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$;

(g) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$;

(h) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$;

(i) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$;

(j) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5 \\ -3x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$.

26. Resolva, pelo método de eliminação de Gauss, os seguintes sistemas lineares $Ax = b$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 8 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

27. (a) Efectue os seguintes produtos de matrizes:

i. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ii. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

iii. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

[1] Veremos posteriormente que esta definição é equivalente à seguinte: $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ *diz-se ortogonal se for invertível e* $A^{-1} = A^t$.

iv. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Usando a alínea anterior indique um sistema de equações lineares

i. com três equações e três incógnitas que tenha $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t$ como solução.
ii. com duas equações e três incógnitas que tenha $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^t$ como solução.
iii. com três equações e três incógnitas que tenha $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$ como solução.
iv. com três equações e duas incógnitas que tenha $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^t$ como solução.

28. (a) Determine a solução geral do sistema $\left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & & -x_3 & = & 2 \end{array} \right.$.

(b) Apresente duas soluções particulares do sistema da alínea (a).

(c) Escreva a solução geral do sistema da alínea (a) como soma de uma solução particular com a solução geral do sistema homogéneo associado.

(d) Determine a solução geral do sistema $\left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & & -x_3 & = & 0 \end{array} \right.$.

29. Determine os coeficientes a, b, c por forma a que a parábola $f(x) = ax^2+bx+c$ passe pelos pontos $(-1, -2), (0, -1), (1, -2)$.

30. Determine todos os polinómios de grau menor do que ou igual a dois tais que $p(1) = 1$, $p(2) = 0$ e $p(3) = -1$.

31. Determine todos os polinómios de grau menor do que ou igual a três, tais que $p(1) = p'(1) = p''(1) = 1$.

32. Será que as rectas $2x + 3y = -1$, $6x + 5y = 0$ e $2x - 5y = 7$ têm algum ponto em comum?

33. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$. Resolva a equação $A^t x - b^t = 0$.

34. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Sem resolver o sistema $Ax = b$, mostre que:

i. $(-1, 1, 1, 3)$ é solução do sistema.
ii. $(1, 0, 1, 0)$ não é solução do sistema.

(b) i. Resolva o sistema.
ii. Indique uma solução particular do sistema, diferente da dada em (a) i.

35. Sem efectuar cálculos, diga quantas soluções tem o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} 14x_1 & +0.001x_2 & +134x_3 & -e^{\pi}x_4 & +2^6x_5 & = & -19.56 \\ & e^e x_2 & -15x_3 & -x_4 & -6x_5 & = & \pi^2 \\ & & -10^{100}x_3 & -10^{-100}x_4 & +x_5 & = & e^{-\pi} \\ & & & 2^{-15}x_4 & -3^{-16}x_5 & = & -1000 \\ & & & & 9500x_5 & = & 9501 \end{array} \right. .$$

36. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & -1 & \beta+1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e o sistema de equações lineares $Ax = b$.

(a) Determine os valores de α e β para os quais o sistema é:

i. Possível e determinado;
ii. Impossível.

(b) Resolva o sistema para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

37. Considere o sistema de equações nos parâmetros a, b e c, $\left\{ \begin{array}{rrrcl} ax_1 & +bx_2 & & = & c \\ & bx_2 & -x_3 & = & 1 \\ x_1 & & +x_3 & = & 2 \end{array} \right.$.

Determine a relação entre a, b e c por forma a que o sistema só tenha uma incógnita livre.

38. Considere a matriz ampliada de um sistema $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 4 & 5 & b \\ 0 & 2 & b & c \end{array}\right]$.

(a) Escolha os parâmetros reais a, b, c por forma a obter como conjunto solução:

i. O conjunto vazio;

ii. Um conjunto de várias soluções.

(b) Quais os parâmetros que não têm influência na classificação do sistema?

39. Discuta a existência e unicidade de solução dos seguintes sistemas de equações lineares, em termos dos parâmetros reais α e β:

(a) $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +\alpha x_4 & = & \beta \end{array}\right.$;

(b) $\left\{\begin{array}{cccccc} x & +2y & -\alpha z & = & 1 \\ 2x & -y & -z & = & \beta \\ 9x & -2y & +z & = & -1 \end{array}\right.$;

(c) $\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & +z & = & -2 \\ x & -y & +z & = & 3 \\ x & & +z & = & \frac{1}{2} \\ 3x & -y & +3z & = & \alpha \end{array}\right.$;

(d) $\left\{\begin{array}{cccccc} 2x & +4y & +3z & = & 10 \\ 2x & +7y & -2z & = & 10 \\ x & +5y & +\alpha z & = & \beta \end{array}\right.$;

(e) $\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & +14x_4 & = & 4 \\ & & 2x_3 & +\alpha x_4 & = & \beta \end{array}\right.$.

40. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & k \\ 1 & -1 & -2 & k+1 \\ 1 & 5 & t & k-1 \\ 0 & 3 & 1-t & -k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ k+t \\ 1-k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Discuta, em função de t e k, o sistema $Ax = b$.

(b) Faça $k = t = 0$ e resolva o sistema $Ax = b$.

41. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere o sistema de equações lineares $\left\{\begin{array}{ccccc} x & +\alpha y & +\beta z & = & 1 \\ & \alpha(\beta-1)y & & = & \alpha \\ x & +\alpha y & +z & = & \beta^2 \end{array}\right.$.

(a) Discuta o sistema dado em função de α e β.

(b) Faça $\alpha = \beta = 2$.

i. Mostre que o sistema tem uma só solução.

ii. Mostre que a matriz dos coeficientes do sistema é invertível.

iii. Determine a solução do sistema usando a inversa da matriz da alínea (ii).

42. Construa um sistema de equações lineares de coeficientes reais, de quatro equações e três incógnitas que seja:

(a) Possível e determinado;

(b) Possível e indeterminado;

(c) Impossível.

43. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Qual o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações?

(A) O sistema $Ax = b$ é possível para todo o $b \in \mathbb{R}^2$;

(B) O sistema $A^t y = c$ é possível para todo o $c \in \mathbb{R}^4$;

(C) O sistema $A^t y = 0$ é possível e indeterminado;

(D) O sistema $Ax = 0$ é possível e determinado.

44. Sempre que possível, determine a inversa de cada uma das seguintes matrizes quadradas (no que se segue, i representa, como usualmente, a unidade imaginária: $i = \sqrt{-1}$):

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$;

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(f) $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

(g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(h) $H = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}$;

(i) $J = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ 1+i & -1 & 1 \\ 1 & i & -1 \end{bmatrix}$.

45. Retome o exercício 44. Resolva o sistema $Ex = (3, 3, 1, 2)$ usando explicitamente a matriz E^{-1}.

46. Estabeleça condições para que a matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$ seja invertível. Sob essas condições, a que é igual D^{-1}?

47. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

(a) Calcule AB;

(b) Determine a inversa de A.

48. Sejam A e B duas matrizes quadradas $n \times n$ tais que $AB = I_n$. Determine a matriz $BA^2 - A$.

49. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a inversa de A.

(b) Calcule $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$, usando a igualdade $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.

50. Sendo A e B duas matrizes $n \times n$ invertíveis, diga, justificando, quais das seguintes matrizes são necessariamente invertíveis, indicando nesses casos a expressão da matriz inversa.

(a) AB;

(b) $A + B$;

(c) AB^{-1};

(d) $-A$;

(e) αA, para $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

51. Sendo A e B duas matrizes $n \times n$, será verdade que se o produto de A por B se anula, então se tem $A = 0$ ou $B = 0$? O que pode concluir no caso em que A é uma matriz invertível?

52. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diz-se **nilpotente** se $A^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Seja A uma matriz nilpotente. Pode afirmar-se que:

(A) A é uma matriz nula;

(B) A partir de certa ordem, nenhuma das potências de A é invertível;

(C) A é a matriz identidade;

(D) A é sempre invertível.

53. Retome o exercício 25 (alíneas (a), (b), (c) e (d)). Se possível, calcule a inversa da matriz dos coeficientes de cada um dos sistemas apresentados, e confirme a resposta então obtida quando usou o método de eliminação de Gauss.

54. Mostre que:

(a) O produto de duas matrizes ortogonais é ainda uma matriz ortogonal.

(b) A inversa de uma matriz ortogonal é ainda uma matriz ortogonal (recorde o exercício 22).

2 Determinantes

2.1 Propriedades e Cálculo

55. Suponha que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3$. Determine o valor de

   (a) $\begin{vmatrix} a_1+2b_1-3c_1 & a_2+2b_2-3c_2 & a_3+2b_3-3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$;

   (b) $\begin{vmatrix} a_1-\frac{1}{2}a_3 & a_2 & a_3 \\ b_1-\frac{1}{2}b_3 & b_2 & b_3 \\ c_1-\frac{1}{2}c_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$;

   (c) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 4a_3-2a_2 \\ b_1 & b_2 & 4b_3-2b_2 \\ \frac{1}{2}c_1 & \frac{1}{2}c_2 & 2c_3-c_2 \end{vmatrix}$.

56. Usando um processo à sua escolha, calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$;

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$;

   (c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

   (d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

   (e) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

   (f) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

   (g) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

57. Verifique que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

58. Sendo $\det(A) = 2$, indique o valor de $\det(A^5)$.

59. Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   (a) Será que $\det(AB) = \det(BA)$? Porquê?

   (b) Se $\det(AB) = 0$, será que $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$? Justifique.

   (c) Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, a que é igual o determinante da matriz αA?

   (d) Suponha que $A = A^{-1}$. Mostre que $\det(A) = \pm 1$.

   (e) Se $A^2 = A$, quais os possíveis valores para o determinante de A?

   (f) Suponha que $AB = AC$ e que $\det A \neq 0$. Mostre que, nestas condições, se tem $B = C$.

60. Usando determinantes, diga quais das matrizes do exercício 56:

   (a) são singulares;

   (b) admitem característica máxima.

2.2 Regra de Cramer

61. Resolva, sempre que possível, cada um dos sistemas $Ax = b$ seguintes usando a regra de Cramer:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3 Valores e Vectores Próprios

3.1 Introdução

62. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Suponha que λ é um valor próprio de A e que v é um vector próprio de A associado a λ. Mostre que λ^k ($k \in \mathbb{N}$) é um valor próprio de A^k. Qual o vector próprio de A que lhe está associado?

63. Usando o exercício anterior, determine os valores e vectores próprios da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^3$.

64. Seja A uma matriz tal que $A^k = 0$ (matriz nula) para algum número inteiro positivo k. Mostre que $\lambda = 0$ é o único valor próprio de A.

65. Para cada uma das matrizes A que se seguem, indique os valores próprios (e vectores próprios associados) e o polinómio característico:
    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;
    (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;
    (e) $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; (f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3.2 Dependência e Independência Linear de Vectores

66. Quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes?
    (a) $\{(1,0),(0,1)\}$;
    (b) $\{(2,2),(3,3)\}$;
    (c) $\{(1,1,1),(0,1,1),(1,2,1)\}$;
    (d) $\{(1,1,1),(0,1,1),(2,3,3)\}$;
    (e) $\{(1,1,1,1,1),(1,-1,1,-1,1),(2,1,2,1,2)\}$.

67. Prove que se u e v são dois vectores linearmente independentes, então $u+v$ e $u-v$ também o são.

3.3 Diagonalização

68. Determine uma matriz 3×3 não diagonal com valores próprios -2, -2 e 3 e vectores próprios associados $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente.

69. Seja A uma matriz 3×3 com valores próprios -3, 4 e 4, e vectores próprios associados $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente. Sem efectuar cálculos, indique uma matriz diagonal D e uma matriz não singular P tais que $P^{-1}AP = D$.

70. Verifique se cada uma das matrizes seguintes é ou não diagonalizável. Em caso afirmativo, indique duas matrizes diagonalizantes diferentes.
    (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$;
    (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;
    (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$; (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;
    (g) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; (h) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

71. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule A^9.

72. Seja $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Mostre que o polinómio característico de A é dado por $p(\lambda) = \lambda^2 -$ tr $(A)\lambda +$ det (A).

73. O teorema de **Cayley-Hamilton** afirma que uma matriz quadrada satisfaz a sua equação característica. Por outras palavras, se A é uma matriz $n \times n$ com polinómio característico

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0,$$

então

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0.$$

(a) Verifique este teorema para as seguintes matrizes:

i. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

ii. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(b) Seja A uma matriz 2×2 invertível. Utilize o teorema de Cayley-Hamilton para mostrar que

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A + a_1 I_2).$$

Use este resultado para obter a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Usando o teorema de Cayley-Hamilton, obtenha uma expressão que lhe permita calcular a inversa de uma matriz 3×3. Generalize o resultado para o caso $n \times n$.

4 Tópicos de Geometria Analítica

Rectas e planos. Posição relativa de rectas e planos no espaço

74. Calcule o produto interno — $(u|v)$ — e o produto externo — $u \times v$ — dos seguintes vectores:

    (a) $u = (1, 2, 3)$, $v = (-2, 1, 0)$;

    (b) $u = (-1, 3, 5)$, $v = (2, 2, 3)$.

75. Determine uma representação vectorial e uma representação cartesiana dos

    (a) eixos OX, OY e OZ;

    (b) planos XOY, XOZ e YOZ.

76. Considere a recta r definida pelos pontos $A = (1, -1, 0)$ e $B = (1, 0, 3)$. Determine:

    (a) uma equação vectorial de r;

    (b) um sistema de equações paramétricas de r;

    (c) um sistema de equações normais e um sistema de equações reduzidas de r.

77. Determine uma representação paramétrica da recta r que passa pelo ponto $A = (1, 2, 3)$ e é paralela à recta de equação $x - 2 = \frac{y+1}{2} = z + 2$.

78. Determine uma representação paramétrica e uma representação cartesiana do plano que

    (a) passa pelos pontos $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, 2)$ e $C = (0, 4, 3)$;

    (b) passa pelo ponto $A = (2, 3, -4)$ e é paralelo ao plano de equação $3x - y - 3z = 5$;

    (c) passa pelo ponto $A = (0, 4, 3)$ e é perpendicular ao vector $(2, 2, 1)$.

79. Seja π o plano que passa pelo ponto $P = (2, 2, 1)$ e que contem a recta r definida pelo sistema de equações não paramétricas $\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & -z & = & 2 \\ x & -y & +z & = & 0 \end{array}\right.$. Determine

    (a) uma equação vectorial de r;

    (b) uma equação vectorial e uma equação geral do plano π;

    (c) um sistema de equações normais da recta s que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano π;

    (d) uma equação vectorial do plano φ que passa na origem do sistema de eixos e contem a recta s.

80. Considere a recta r definida pelo sistema de equações normais $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z$.

    (a) Determine uma equação vectorial do plano π que passa pelo ponto $P = (1, 2, 0)$ e é perpendicular à recta r;

    (b) Verifique se a recta s que passa pelo ponto $A = (0, 0, 8)$ e tem a direcção do vector $u = (1, -1, 1)$ está contida no plano π.

81. Mostre que as rectas $r_1 : \frac{x+5}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z+2}{-2}$ e $r_2 : \frac{x-3}{6} = \frac{y+5}{5} = \frac{7z-14}{7}$ são perpendiculares.

82. Mostre que as rectas $r_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+\alpha \\ y & = & 1+2\alpha \\ z & = & 1-2\alpha \end{array}\right.$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2\beta \\ y & = & -1+4\beta \\ z & = & 3-4\beta \end{array}\right.$, $\beta \in \mathbb{R}$, são coincidentes.

83. Mostre que as rectas $r_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{-z}{2}$ e $r_2 : 2 - x = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$ são concorrentes. De seguida, determine uma equação do plano por elas definido.

84. Determine a posição relativa dos planos seguintes:

    (a) $\pi_1 : x + 2y + z = 0$, $\pi_2 : x - 2y - 8z = 0$ e $\pi_3 : x + y + z - 3 = 0$;

    (b) $\pi_1 : x - y + 3z = 0$, $\pi_2 : 2x + 3y = 3$ e $\pi_3 : 2x + 9y - z = 0$;

    (c) $\pi_1 : x - y + 3z = 0$, $\pi_2 : y + z = 2$ e $\pi_3 : 2x - 5y + 5z + 3 = 0$.

85. Determine a posição relativa da recta $\left\{\begin{array}{lcl} 3x - z & = & 11 \\ 3y & = & 4z + 11 \end{array}\right.$ e do plano $x + 2y - z + 7 = 0$.