ESPAÇOS EUCLIDIANOS

Produto interno

Definição [2.3]: Produto interno em espaços lineares reais
Seja V um espaço linear real ($\Omega = \mathbb{R}$), sendo 0_V o seu elemento zero. Um *produto interno* em V é uma aplicação que associa a cada par de elementos *x* e *y* de V um único escalar de $\mathbb{R}$, representado por $\langle x, y \rangle$, satisfazendo os seguintes *axiomas***:**

Axioma 1) *Comutatividade ou simetria*

$$\forall x, y \in \mathrm{V} \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

Axioma 2) *Distributividade ou linearidade*

$$\forall x, y, z \in \mathrm{V} \quad \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

Axioma 3) *Associatividade ou homogeneidade*

$$\forall x, y \in \mathrm{V} \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle$$

Axioma 4) *Positividade*

$$\forall x \in \mathrm{V} \quad \langle x, x \rangle > 0 \ \text{ , se } \ x \neq 0_V$$

Exemplo 1 [2.15]: O produto escalar definido para o espaço linear (vectorial) $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

é um *produto interno*.

Definição [2.4]: **Produto interno em espaços lineares complexos**
Seja V um espaço linear complexo ($\Omega = \mathbb{C}$), sendo 0_V o seu elemento zero. Um *produto interno* em V é uma aplicação que associa a cada par de elementos *x* e *y* de V um único escalar de $\mathbb{C}$, representado por $\langle x, y \rangle$, satisfazendo os seguintes *axiomas*:

Axioma 1) *Simetria hermiteana*

$$\forall x, y \in \text{V} \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

Axioma 2) *Distributividade ou linearidade*

$$\forall x, y, z \in \text{V} \quad \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

Axioma 3) *Associatividade ou homogeneidade*

$$\forall x, y \in \text{V} \ \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle$$

Axioma 4) *Positividade*

$$\forall x \in \text{V} \quad \langle x, x \rangle > 0 \ \ , \ \text{se} \ \ x \neq 0_V$$

Refira-se que $\overline{\langle y, x \rangle}$ representa o *complexo conjugado* de $\langle y, x \rangle$.

- Um espaço linear munido com a operação produto interno é chamado *espaço linear com produto interno*.

Espaço euclidiano

Definição [2.5]: **Espaço euclidiano**
Designa-se por *espaço euclidiano*, um espaço linear V sobre um corpo Ω no qual se define uma operação *produto interno*.

- Convém realçar o seguinte:

  i) Se $\Omega = \mathbb{R}$, então V é um *espaço euclidiano real*;

  ii) Se $\Omega = \mathbb{C}$, então V é um *espaço euclidiano complexo* ou *espaço unitário*.

Exemplo 2 **[2.13]**: O conjunto $\mathbb{R}$ é um *espaço euclidiano real*, em que a multiplicação de dois números reais é um produto interno

Exemplo 3 **[2.14;15]**: O espaço linear $\mathbb{R}^n$ do **exemplo 1** é um *espaço euclidiano real*; o mesmo acontece com os espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 4 **[2.16]**: Seja $\mathrm{C}[a,b]$ o espaço linear (vectorial) de todas as funções reais de variável real contínuas no intervalo $[a,b]$. A operação

$$\forall f,g \in \mathrm{C}[a,b] \quad \langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\ dt$$

é um *produto interno*. O espaço $\mathrm{C}[a,b]$ é um *espaço euclidiano real*.

Teorema **[2.14]**: Seja V um *espaço euclidiano real*, em que 0_V é o seu *elemento zero*. Então:

a) $\forall x \in \mathrm{V} \ \ \langle x, 0_\mathrm{V}\rangle = \langle 0_\mathrm{V}, x\rangle = 0$

b) $\forall x, y \in \mathrm{V}\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \alpha\langle x,y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle$

c) $\forall x,y,z \in \mathrm{V} \ \ \langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

d) Se $\langle x,y\rangle = \langle x,z\rangle \ \forall x,y,z \in \mathrm{V}$, então $y = z$

e) $\forall x \in \mathrm{V} \ \ \langle x,x\rangle = 0$, se e só se $x = 0_\mathrm{V}$

Teorema **[2.15]**: Seja V um *espaço euclidiano complexo*, em que 0_V é o seu *elemento zero*. Então:

a) $\forall x \in V \quad \langle x, 0_V \rangle = \overline{\langle 0_V, x \rangle} = 0$

b) $\forall x, y \in V \; \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \overline{\alpha}\langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$

Além disso, mantêm-se válidas as propriedades expostas nas alíneas **c**), **d**) e **e**) do teorema anterior.

Exemplo 5 **[2.19;23;26;28]**: Considere o *espaço euclidiano real* $C[0,1]$, constituído pelas funções reais de variável real contínuas no intervalo $[0,1]$, em que o *produto interno* é definido por

$$\forall f, g \in C[0,1] \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \, dx$$

Sejam as funções $f(x) = x$, $g(x) = -3x$ e $h(x) = \sqrt{2 - x^2}$ de $C[0,1]$.

a) Calcule $\langle f, f \rangle$ e $\langle g, h \rangle$.

b) Determine a *norma* de cada uma das funções dadas.

c) Obtenha o *ângulo* formado pelas funções $g(x)$ e $h(x)$.

d) Decomponha a função $f(x)$ na direcção da função $h(x)$ e na direcção ortogonal a esta última.

Solução:

a) $\langle f, f \rangle = \langle x, x \rangle = \int_0^1 x^2 \, dx = \dfrac{1}{3}$

$$\langle g, h \rangle = \left\langle -3x, \sqrt{2 - x^2} \right\rangle = -\int_0^1 3x \left(2 - x^2\right)^{1/2} dx = 1 - 2\sqrt{2}$$

b) $\|f\| = \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\|g\| = \|-3x\| = |-3|\|x\| = \sqrt{3}$

$\|h\| = \left\|\sqrt{2-x^2}\right\| = \left\langle \sqrt{2-x^2}, \sqrt{2-x^2}\right\rangle^{1/2} = \left(\int_0^1 (2-x^2)\ dx\right)^{1/2} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

c) Designando por $\theta = \measuredangle(g,h)$ o ângulo pretendido, obtém-se

$$\cos\theta = \frac{\langle g,h\rangle}{\|g\|\|h\|} = \frac{3(1-2\sqrt{2})}{\sqrt{3}\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{5}\right)$$

d) Sabendo que

$$\langle f,h\rangle = \left\langle x, \sqrt{2-x^2}\right\rangle = \int_0^1 x\left(2-x^2\right)^{1/2} dx = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \quad \text{e} \quad \|h\|^2 = \frac{5}{3}$$

a *projecção ortogonal de* $f(x)$ *sobre* $h(x)$ é

$$f_{\|} = \text{proj}_h\ f = \frac{\langle f,h\rangle}{\|h\|^2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{5}\sqrt{2-x^2}$$

enquanto a *componente de* $f(x)$ *ortogonal a* $h(x)$ é

$$f_{\perp} = f - f_{\|} = f - \text{proj}_h\ f = x - \frac{2\sqrt{2}-1}{5}\sqrt{2-x^2}$$