Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância) 1ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**2,0**] Considere o conjunto $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}\subset\mathbb{R}^4$, tais que $\vec{u}_1=(1,k,k,0)$, $\vec{u}_2=(0,k,k,k)$, $\vec{u}_3=(k,0,0,-1)$ e $\vec{u}_4=(1,4,2,k+1)$. Calcule os valores de *k*, de modo que U seja um conjunto linearmente independente.

2. [**6,0**] Sejam o conjunto $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}\subset\mathbb{R}^4$, em que $\vec{a}=(1,1,3,1)$, $\vec{b}=(1,1,2,0)$ e $\vec{c}=(-1,2,2,1)$, e o subespaço de $\mathbb{R}^4$, $H=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : w-x-y=0\}$.

a) Calcule o subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$. Indique uma base para o subespaço obtido e conclua em relação à sua dimensão. Será o conjunto S linearmente dependente? Justifique.

b) Será o conjunto $\mathrm{Q}=\{(1,1,0,2),(-1,2,0,1),(-1,2,1,1)\}$ uma base para o subespaço *H*? Justifique.

c) Obtenha uma base ortogonal, W, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que contenha o maior número possível de elementos de $L(\mathrm{S})$.

3. [**1,5**] Sejam a reta $r\ :\ X(\alpha)=A+\alpha\vec{u}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ e os pontos *P* e *Q* exteriores à reta *r*. Mostre que se *C* e *D* são, respetivamente, os pontos de *r* mais próximos de *P* e *Q*, então:

a) $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}\right|$, em que $\vec{v}=\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$.

b) $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|\geq\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$.

....***(continua no verso)***

GRUPO II

4. [**2,5**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 4$, $\|\vec{b}+\vec{c}\| = 2\sqrt{5}$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = 45°$, $\|2\vec{a}\times(2\vec{b}+\vec{c})\| = 8$, $\vec{d} = \vec{a}+\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b}$ e $\vec{a}$ e $\vec{c}$ têm a mesma direção e sentido. Calcule:

a) A norma de $\vec{d}$.

b) O ângulo entre $\vec{d}$ e $\vec{c}$.

c) A norma de $\|\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\|$.

GRUPO III

5. [**1,0**] Sejam, no espaço $\mathbb{R}^n$, o conjunto de vetores $\mathrm{S} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ e o vetor não nulo $\vec{a}$, tal que $\vec{a}\cdot\vec{s}_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,k$. Mostre que se S é linearmente independente, então o conjunto $\mathrm{T} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k, \vec{a}\}$ é linearmente independente.

6. [**4,6**] Sejam o ponto $A = (2,1,-1)$, o plano $M : 2x - y + 2z = 3$ e a reta, *r*, de equações cartesianas $x = z-1 \wedge y = 3z-2$. Determine:

a) O ponto, *I*, de interseção de *r* com *M* e a distância de *A* a *r*.

b) A equação vetorial de uma reta, *h*, que é perpendicular a *r*, é paralela a *M* e passa num ponto, *R*, da reta *r* situado à distância de 1 unidade de *M*.

7. [**2,4**] Obtenha as retas que passam no ponto $P = (0,0,-1)$, são complanares com a reta $s : X(u) = Q + u\vec{a}$, $u \in \mathbb{R}$, com $Q = (1,-1,1)$ e $\vec{a} = (2,1,1)$, e fazem com *s* um ângulo de $30°$.