Consideremos o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$ Matriz de ordem **m por n** de elementos a_{ij}

Matrizes Conceitos Básicos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{3x5}$$

$a_{13} = \mathbf{2}$

$a_{34} = \mathbf{7}$

$A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$ Matriz de ordem **m por n** de elementos a_{ij}

$A_{\mathbf{mxn}} = [a_{\mathbf{ij}}]_{\mathbf{mxn}}$

As matrizes podem ser classificadas segundo:

A forma

A natureza dos elementos

Segundo a forma em: $A_{\mathbf{mxn}} = [a_{\mathbf{ij}}]_{\mathbf{mxn}}$

Rectangular

Se o número de linhas é diferente do número de colunas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 5}$$

Quadrada

Se o número de linhas é igual do número de colunas

Uma matriz quadrada do tipo m por m diz-se de ordem m

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Linha

Se o número de linhas é igual a um

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

Coluna

Se o número de colunas é igual a um

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Segundo a natureza dos elementos em: $A_{\mathbf{mxn}} = [a_{\mathbf{ij}}]_{\mathbf{mxn}}$

Real se todos os seus elementos são reais

$\forall\, a_{ij} \in A: \quad a_{ij} \in \Re$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Complexa se pelo menos um dos seus elementos é complexo

$\exists\, a_{ij} \in A: \quad a_{ij} \in C$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

Nula se todos os seus elementos são nulos

$\forall\, a_{ij} \in A: \quad a_{ij} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Segundo a natureza dos elementos em: $A_{\mathbf{mxn}} = [a_{\mathbf{ij}}]_{\mathbf{mxn}}$

Triangular Superior uma matriz quadrada em que os elementos abaixo da diagonal principal são nulos

$\forall\, a_{ij} \in A: \; i > j \quad a_{ij} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Triangular Inferior uma matriz quadrada em que os elementos acima da diagonal principal são nulos

$\forall\, a_{ij} \in A: \; i < j \quad a_{ij} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Segundo a natureza dos elementos em: $A_{\mathbf{mxn}} = [a_{\mathbf{ij}}]_{\mathbf{mxn}}$

Diagonal uma matriz quadrada em que os elementos não principais são nulos

$$\forall\, a_{ij} \in A:\ i \neq j \quad a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Escalar uma matriz diagonal em que os elementos principais são iguais

$$\forall\, a_{ij} \in A:\ i \neq j \quad a_{ij} = 0$$
$$i = j \quad a_{ij} = \lambda$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizes Conceitos Básicos

Segundo a natureza dos elementos em: $A_{\mathbf{mxn}} = [a_{\mathbf{ij}}]_{\mathbf{mxn}}$

Simétrica se os elementos a_{ij} são iguais aos a_{ji}

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Densa se a maioria dos seus elementos são não nulos

Dispersa se a maioria dos seus elementos são nulos

Soma de Matrizes

Sejam A e B duas matrizes **do mesmo tipo** denomina-se soma de A com B a uma matriz C do mesmo tipo que se obtêm somando os elementos da matriz A com os elementos da matriz B da mesma posição.

$$\forall\ A,B \in M_{m\times n}\quad \exists C \in M_{m\times n} : C = A + B$$
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ ;\ i = 1,\ldots,m \wedge j = 1,\ldots,n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c = A + B = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$$

A soma de matrizes do mesmo tipo goza das seguintes propriedades:

Comutativa

$$\forall\ A,B \in M_{m\times n}\quad A+B=B+A$$

Associativa

$$\forall\ A,B,C \in M_{m\times n}\quad (A+B)+C=A+(B+C)$$

Tem elemento neutro

$$\forall\ A \in M_{m\times n}\quad \exists O \in M_{m\times n} : A+O=A$$

Todos os elementos têm inversa

$$\forall\ A \in M_{m\times n}\quad \exists B \in M_{m\times n} : A+B=O$$

A soma de matrizes do mesmo tipo goza das seguintes propriedades:

Comutativa

Associativa

Assim o conjunto M $_{mxn}$ forma um Grupo Aditivo Comutativo

Tem elemento neutro

Todos os elementos têm inversa

Produto por um escalar

Sejam A uma matriz e λ um escalar

O produto de λ por A é uma matriz C do mesmo tipo de A

que se obtêm de A multiplicando todos os seus elementos por λ

$$\forall\ A \in M_{m\times n} \quad \lambda A \in M_{m\times n} : C = \lambda\ A$$

$$c_{ij} = \lambda\ a_{ij}\ ;\ i = 1,\ldots,m \wedge j = 1,\ldots,n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad 3\,A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 15 & 3 & 0 \\ 6 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes A e B do mesmo tipo

e os escalares λ e μ as seguintes propriedades são válidas:

$$(\lambda\ \mu)A = \lambda\,(\mu\ A)$$

$$(\lambda + \mu)\ A = \lambda\ A + \mu\ A$$

$$\lambda\,(A + B) = \lambda\ A + \lambda\ B$$

$$1A = A$$

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$ Matriz de ordem m por n de elementos a_{ij}

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2x3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}_{2x3}$$

$=$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 2 \quad 5 \quad 3 \end{bmatrix}_{2x3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 5 & 3 \\ \boxed{1} & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} \boxed{8} & & \\ & & \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 2 \quad 5 \quad 3 \end{bmatrix}_{2x3} \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 2 & \boxed{5} & 3 \\ 1 & \boxed{0} & 2 \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} 8 & \boxed{12} & \\ & & \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 2 \quad 5 \quad 3 \end{bmatrix}_{2x3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & 5 & \boxed{3} \\ 1 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & \boxed{15} \\ & & \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$\underset{2x3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2 \quad 5 \quad 3} \end{bmatrix}} \underset{3x3}{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ \boxed{15} & & \end{bmatrix}}$$

$$\underset{2x3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2 \quad 5 \quad 3} \end{bmatrix}} \underset{3x3}{\begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & \boxed{29} & \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2 \quad 5 \quad 3} \end{bmatrix}_{2\text{x}3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & 5 & \boxed{3} \\ 1 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}_{3\text{x}3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & 29 & \boxed{27} \end{bmatrix}_{2\text{x}3}$$

<u>Produto de Matrizes</u>

Seja A uma matriz de tipo mx**n** e B uma matriz do tipo **n**xp.

O produto de A por B é uma matriz C do tipo mxp

cujos elementos são dados por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, b_{kj}$$

e escreve-se C=AB.

O produto de matrizes não é comutativo

Dadas as matrizes A, B e C, e α um escalar.

Então, se todos os produtos a seguir indicados **forem definidos**, as seguintes propriedades são válidas:

$$(AB)C = A(B\ C)$$

$$(A+B)\ C = A\ C + B\ C$$

$$A\ (B + C) = A\ B + A\ C$$

$$\alpha\ (AB) = (\alpha\ A)B = A(\alpha\ B)$$

Transposição de Matrizes

Seja A uma matriz de tipo **mxn**.
Denomina-se **transposta de A** a uma matriz B do tipo **nxm** tal que:

$$b_{i\,j} = a_{i\,j} \qquad (i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots.m)$$

e escreve-se B=**A^T**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times5} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times3}$$

Dadas as matrizes A e B e α um escalar.

Então, se todos as operações a seguir indicados **forem definidas**, as seguintes propriedades são válidas:

$$\left(A^T\right)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$\left(\alpha\ A^T\right) = (\alpha\ A)^T$$

$$(AB)^T = B^T\ A^T$$