There's a house, away there to the left.
Let's go.- said Sylvie
It looks a very comfable house!- said Bruno
Alice's Adventures in Wonderland, Lewis Carroll

4. Espaços Vectoriais

- O Espaço $\mathbb{R}^n$.
- Definição de Espaço Vectorial
- Subespaço Vectorial
- Combinação linear
- Subespaço Gerado
- Independência Linear
- Base e dimensão
- Espaço das colunas de A, $R(A)$
- Espaço nulo ou núcleo, $N(A)$

Seja n um nº natural ($n \in \mathbb{N}$).
Recorde-se que: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n, \in \mathbb{R}\}$
é o conjunto das sequências ordenadas de n números reais.

Conjunto *algebrizado* com uma operação de:

- **adição** - dados $x, y \in \mathbb{R}^n$,
  sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots y_n)$ com $x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$,

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \text{com} \ \ x + y \in \mathbb{R}^n,$$

- **multiplicação por um escalar** - dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
  sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n), \quad \text{com} \ \ \alpha x \in \mathbb{R}^n,$$

Estas operações gozam das propriedades sintetizadas no teorema seguinte.

Teorema

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && x + y = y + x,\\
&\text{(ii)} && x + (y + z) = (x + y) + z,\\
&\text{(iii)} && x + 0 = 0 + x = x,\\
&\text{(iv)} && x + (-x) = (-x) + x = 0,\\
&\text{(v)} && \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,\\
&\text{(vi)} && (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,\\
&\text{(vii)} && (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),\\
&\text{(viii)} && \mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x,
\end{aligned}
$$

Diz-se que $\mathbb{R}^n$ é um **espaço vectorial real**.

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ chamam-se vectores e, são normalmente representados por matrizes, tendo-se o

vector coluna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Demonstração: Demonstração apenas de (v)

Denotando $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$) e tendo-se $\alpha \in \mathbb{R}$, deduz-se

$$\begin{aligned}
\alpha(x+y) &= \alpha(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \\
&= (\alpha(x_1+y_1), \alpha(x_2+y_2), \ldots, \alpha(x_n+y_n)) \\
&= (\alpha x_1+\alpha y_1, \alpha x_2+\alpha y_2, \ldots, \alpha x_n+\alpha y_n) \\
&= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n) \\
&= \alpha x + \alpha y \qquad \square
\end{aligned}$$

- conjunto das matrizes de ordem $m \times n$,
- conjunto das matrizes colunas $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$,
- conjunto dos polinómios de coeficientes reais,
$$P = \{p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}\}$$
- conjunto das funções reais e contínuas,
- $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
- $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$
- $C = \{(x, y, z) : x = y = z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Definição de Espaço Vectorial

Seja V um conjunto.

Diz-se que V é um espaço vectorial real se estão definidas duas operações:

- **adição**, $+$, que associa a $x, y \in V$ um elemento $x + y \in V$,
- **multiplicação por um escalar**, **.**, que associa a $\alpha \in \mathbb{R}$, e a cada $x \in V$ um elemento $\alpha x \in V$,

que gozam das seguintes propriedades:

Propriedades

Sejam x, y, z elementos quaisquer de V e α, β números reais. Então:

(i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V,$ [comutatividade da $+$]

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \ \forall x, y, z \in V,$[associatividade da $+$]

(iii) existe um único elemento, representado por $\mathbf{0}$, em V, tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V,$ [0 é el$^{\text{to}}$ neutro para $+$]

(iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V, representado por **-x** tal que:
$x + (-x) = (-x) + x = 0, \ \forall x \in V,$ [$-x$ é el$^{\text{to}}$ simétrico de x]

(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$

(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

(vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

(viii) $\mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x, \quad \forall x \in V,$ [1 é el$^{\text{to}}$ neutro para $\cdot$]

outros importantes espaços vectoriais reais

$$R^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$R^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$\hookrightarrow$ Verificar que R^2 e R^3 são espaços vectoriais reais.

$\hookrightarrow$ Verificar que alguns dos espaços vectoriais apresentados anteriormente são de facto espaços vectoriais.

Propriedade - Unicidade do elementro neutro e do simétrico).

Seja V um espaço vectorial. Então:

1. o elemento neutro para a adição é único;
2. cada elemento de V tem um único simétrico.

Demonstração:

1. Suponhamos que existem dois elementos neutros para a adição $z, z' \in V$, tais que, para todo o $v \in V$, se tem;

$$z + v = v + z = v \quad \text{e} \quad z' + v = v + z' = v$$

Considerando $v = z'$ na primeira equaçãoo, vem $z + z' = z'$.
Por outro lado, considerando $v = z$ na segunda equação, tem-se $z + z' = z$.
Assim tem-se $z = z'$.

2. Suponhamos que $v \in V$ tem dois simétricos v' e v'', ou seja, que

$$v + v' = v' + v = z \quad \text{e} \quad v + v'' = v'' + v = z$$

onde z é o neutro para a adição. Então,
$v' = v' + z = v' + (v + v'') = (v' + v) + v'' = z + v'' = v''$.

Definição

Seja U um subconjunto de um espaço vectorial real V.
U diz-se um **subespaço vectorial** de V, se:

- U um subconjunto, não vazio,
- $x + y \in U, \quad \forall x, y \in U,$ [U é fechado para $+$]
- $\alpha x \in U, \quad \forall x \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$ [U é fechado para $\cdot$]

Exemplos

• O conj$^{\text{to}}$ dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de $\mathbb{R}^2$.

• O conj$^{\text{to}}$ dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de $\mathbb{R}^3$.

... um conjunto que é um subespaço vectorial

Teorema

A intersecção de subespaços vectoriais de um espaço vectorial V é um subespaço de V.

(consideremos somente a intersecção de 2 subespaços; do mesmo modo se demonstrava para mais do 2 subespaços)

• Sejam X e Y dois subespaços de V, então, uma vez que X e Y são subespaços contêm o vector nulo, ou seja, $0 \in X$ e $0 \in Y$, logo $0 \in X \cap Y$; donde $X \cap Y \neq \varnothing$.

• Sejam $x, y \in (X \cap Y)$. Então $x, y \in X$ e $x, y \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $x + y \in X$ e $x + y \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $x + y \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.

• Seja $x \in (X \cap Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $x \in X$ e $x \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $\alpha x \in X$ e $\alpha x \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $\alpha x \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.

... um conjunto que não é um subespaço vectorial

Em $\mathbb{R}^2$, sejam X be Y dois subespaços reais definidos por:

$$X = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) : y = 0 \right\}$$

$$Y = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) : x = 0 \right\}$$

O conjunto $X \cup Y$ não é um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^2$.
Note-se que, por exemplo,

$$a = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \in X$$

e $b = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \in Y$,

mas $a + b = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) \notin X \cup Y$

$X \cup Y$ não é fechado relativamente à adição.

... uma definição muito importante

Em $\mathbb{R}^2$ sejam $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Note-se que:

$$x = 5e_1 + 7e_2.$$

Diz-se que x é **combinação linear dos vectores** e_1 e e_2.

Definição

Sejam $x_1, x_2 \ldots x_n$ vectores de um espaço vectorial real V. Diz-se que $x \in V$ é **combinação linear** dos vectores dos $x_1, x_2 \ldots x_n$ se

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Exemplo Se $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ tem-se que:

$$x = \frac{1}{2} f_1 + \frac{7}{2} f_2,$$

ou seja

x é combinação linear dos vectores f_1 e f_2.

... uma muito importante observação

Se $x_1, x_2, \ldots x_n$ vectores de um espaço vectorial V.
Então U, o conjunto formado por todas as combinações lineares destes vectores, é um subespaço de V.

- U não é vazio, $0 = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$
- se $u, v \in U$ tem-se

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \qquad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

então

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

Logo $u + v$ é combinação linear de $x_1, x_2, \ldots x_n$, logo $u + v$ pertence a U.

- Tem-se também que

$$\alpha u = (\alpha\alpha_1)x_1 + (\alpha\alpha_2)x_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n)x_n$$

donde $\alpha u \in U$.

U é um subespaço vectorial de V
é o subespaço gerado por $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$U = < x_1, x_2, \ldots x_n >$$

Exemplo

O espaço gerado pelo vector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

subespaço de $\mathbb{R}^2$ cujos vectores têm a segunda componente nula.

Escrevemos: $U =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$

Que vectores constituem um sistema de geradores de $\mathbb{R}^2$?

Seja $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$
temos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

logo
$\mathbb{R}^2 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >=< e_1, e_2 >$
considerando $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Que subespaço geram os vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$S =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

tendo-se$S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

Teorema

Se $a_1, a_2, \dots a_n$ são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de $a_1, a_2, \dots a_n$, então o subespaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \dots a_n$ coincide com o espaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \dots a_n, b$.

Demonstração:

Seja $U =< a_1, a_2, \dots a_n >$ e $U' =< a_1, a_2, \dots a_n, b >$.

Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

- $U \subset U'$

seja $x \in U$ então

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \\ &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + 0b \end{aligned}$$

logo $x \in U'$.

Seja $U =< a_1, a_2, \ldots a_n >$ e $U' =< a_1, a_2, \ldots a_n, b >$.

• $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$

mas b é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$,
ou seja $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$

donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x = & \quad \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1}(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) \\ = & \quad (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2) a_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n) a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

Exemplo Em $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$< (1,0,0),(1,2,3),(3,4,6) > = < (1,0,0),(1,2,3) >$$

uma vez que se tem: $(3,4,6) = (1,0,0) + 2(1,2,3)$

... uma definição mesmo muito importante.

Definição
Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um espaço vectorial V são linearmente independentes se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_V$$

se verifica apenas quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Exemplo Os vectores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes.

Exemplo Os vectores $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ **não** são linearmente independentes.

Note-se que : $-2f_1 - 3f_2 + f_3 = \bar{0}$.

$\hookrightarrow$ Os vectores de um espaço vectorial que não sejam linearmente independentes dizem-se linearmente dependentes.
Isto é, os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dizem-se linearmente dependentes se existem escalares reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos tais que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots, \alpha_n x_n = 0$.

Exemplo

1. Os vectores e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes.
De facto, tem-se para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0 \quad & \Rightarrow \quad \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0\end{aligned}$$

2. Os vectores e_1, e_2 e $f = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes.
De facto, tem-se $2e_1 - 5e_2 - f = \bar{0}$

Teorema

Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um espaço vectorial V são linearmente dependentes se e só se um dos vectores pode ser escrito como combinação linear dos restantes.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vectores linearmente dependentes. Então tem-se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

com, pelo menos um, dos coeficientes diferente de zero.
Suponhamos que $\alpha_1 \neq 0$.
Então podemos escrever:

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

logo x_1 é combinação linear dos restantes vectores.

($\Leftarrow$)
Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ vectores e, consideremos que pelo menos um deles, por exemplo x_1 é combinação linear dos restantes vectores; isto é:

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

tendo-se então

$$x_1 - \alpha_2 x_2 - \cdots - \alpha_n x_n = 0$$

donde, se tem uma combinação linear nula com pelo menos um dos coeficientes (o de x_1) não nulo. Os vectores $x_1, x_2, \dots, x_n$ são portanto linearmente dependentes.

algumas observações importantes.

1. Qualquer conjunto de vectores $\{0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, que contenha o vector nulo, é linearmente dependente uma vez que

$$0 = 1{\cdot}0 + 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n.$$

2. Um vector x é linearmente independente se e só se $x \neq 0$.

3 . Se $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é um conjunto de vectores linearmente independentes, então qualquer subconjunto de A é também linearmente independente.

4 . Se $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é um conjunto de vectores linearmente dependentes, então qualquer conjunto contendo A é também linearmente dependente.

algumas observações importantes.

Para matrizes $m \times n$, em escada de linhas tem-se:

1. as linhas não nulas são linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$,

2. o número de linhas independentes e o número de colunas independentes são ambos iguais à característica da matriz.

Procurando combinar as noções de conjunto de vectores linearmente independentes e geradores obtemos a seguinte definição.

Definição

Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um espaço vectorial V formam uma base de V se são linearmente independentes e geram V.

Exemplos:

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^2$.

  Os vectores constituem a base canónica de $\mathbb{R}^2$

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

  Os vectores constituem a base canónica de $\mathbb{R}^3$

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^2$.

Se um espaço vectorial V possui uma base com um número finito de elementos, então todas as bases de V têm o mesmo número de elementos.

Ao número de vectores de uma base de um espaço V, chama-se dimensão do espaço V e denota-se por $dim(V)$.

- $dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- $dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- $dim(\mathbb{R}^n) = n$
- se $V = \{0\}$ então $dim(V) = 0$.
- se $V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ então $dim(V) = 2$.

note-se que $V = < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} >$
e que a e b, com $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, são linearmente independentes.

O próximo resultado mostra que, ao indicar uma base de um espaço vectorial, pode interessar também a ordem em que os vectores aparecem.

Teorema:

Seja $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ uma base ordenada de um espaço vectorial real V. Cada vector $v \in V$ pode ser escrito de uma única forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

como combinação linear dos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são chamados as coordenadas de v relativamente à base $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Demonstração: Seja $v \in V$ Como $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é uma base de V, tem-se $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = V$ e, consequentemente,$v \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.
Suponhamos que
$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$. Então

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$

e, dado que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente, conclui-se que $(\alpha_i - \beta_i) = 0$ para todo o $i = 1, \ldots, n$. Portanto $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

Exemplo:

1. As coordenadas do vector $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ relativamente à base canónica (e_1, e_2) de R^2 são $-2, 7$. Por outro lado, as coordenadas de v em relação à base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ são 9, -11.

2. As coordenadas do vector $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ relativamente à base canónica $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ são $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Note-se que dada uma base de um espaço vectorial V, qualquer vector de V fica bem determinado se conhecermos as suas coordenadas relativamente a essa base.

Teorema:

Seja V um espaço vectorial real de dimensão $n > 0$.

(i) Se $v_1, \ldots, v_n$ são vectores linearmente independentes de V, então $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V.

[Ou seja, qualquer conjunto de n vectores linearmente independentes de V constitui uma base de V.]

(ii) Se $v_1, \ldots, v_k$ são vectores linearmente independentes de V em que $k \neq n$, então $k < n$ e existem vectores $v_{k+1}, \ldots, v_n$ tais que $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ é uma base de V.

[Em V, todo o conjunto de vectores linearmente independentes pode ser estendido a uma base.]

(iii) Se $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$, então $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V.

[Qualquer conjunto de n vectores que geram V é uma base de V.]

(iv)Se $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = V$ em que $k \neq n$, então $k > n$ e existe um subconjunto próprio B de $\{v_1, \ldots, v_k\}$ tal que B é uma base de V.

[Em V, todo o conjunto de geradores pode ser reduzido a uma base.]

Espaço das Linhas e Espaço das Colunas de uma matriz

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$ e designemos por $c_1, c_2, \ldots, c_n$ as colunas da matriz A e por $l_1, l_2, \ldots, l_m$ as linhas de A.

Definição:

Designa-se por espaço das colunas da matriz A, R(A), o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas da matriz A, isto é

$$R(A) = \langle c_1, c_2, \ldots c_n \rangle$$

O espaço das linhas de A é o subespaço de R^n gerado por $l_1, l_2, \ldots, l_m$. Note-se que o espaço das linhas de A é o espaço das colunas da matriz transposta de A e, por isso, é representado por $R(A^T)$. Portanto

$$R(A^T) = \langle l_1, l_2, \ldots, l_m \rangle.$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ matriz de ordem 3×4.

O espaço das colunas de A é o subespaço de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$
\begin{aligned}
R(A) &= \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle \\
&= \langle c_1, c_3 \rangle \quad \text{pois} \quad c_2 = -2c_1 \quad \text{e} \quad c_4 = c_1 + c_3 \\
&= \{\alpha c_1 + \beta c_3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ 4\alpha \\ -2\alpha + \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

Note-se que $dim(R(A)) = 2$ (c_1, c_3 são l.i. e por isso formam uma base de $R(A)$).

Teorema

Dada uma matriz A, seja U a matriz em escada que se obtém quando se aplica a A o algoritmo de eliminação de Gauss. Então,

- $dim(R(A)) = dim(R(A^T)) = dim(R(U)) = dim(R(U^T)) = c(A) = c(A^T)$
- Uma base de $R(A)$ é formada pelas colunas de A correspondentes às colunas de U que contêm os pivots.
- Uma base de $R(A^T)$ é formada pelas linhas não nulas de U.

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a matriz do exemplo anterior e U, a matriz em escada obtida de A dada por $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Dado que os pivots de U estão na primeira e terceira colunas, conclui-se que uma base de $R(A)$, subespaço de $\mathbb{R}^3$, é formada pelas primeira e terceira colunas de A, como vimos no exemplo anterior.

- As linhas não nulas de U são a primeira e a segunda. Logo, uma base de $R(A^T)$, subespaço de $\mathbb{R}^4$, é $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

- $dim(R(A)) = dim(R(A^T) = c(A) = 2$.

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Designa-se por espaço nulo , ou *nulidade* de A, o espaço das soluções do sistema homogéneo $Ax = 0$.

Teorema

Seja $Ax = 0$ um sistema homogéneo de m equações a n incógnitas. O con$^{\text{junto}}$ das soluções deste sistema, ou núcleo de A, constitui um subespaço linear de R^n.

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n.

(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.
Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.
(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao con junto das soluções do sistema homogéneo.
(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao con junto das soluções do sistema homogéneo.

Tem-se então válido o seguinte teorema:

Teorema

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. A soma da característica de A com a dimensão do núcleo ou espaço nulo de A é igual a n isto é:

$$n = dim(N(A)) + c(A)$$

Exemplo

Consideremos o sistema homogéneo $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

obtemos: $\begin{cases} x_2 = \frac{-1}{2}x_3 = -0.5x_3 \\ x_1 = -0.5x_3 - x_4 \end{cases}$

Escolhendo valores para x_3 e x_4, por exemplo $x_3 = \alpha$ e $x_4 = \beta$ temos:

$$\begin{cases} x_1 = -0.5\alpha - \beta \\ x_2 = -0.5\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

donde, qualquer solução do sistema dado pode escrever-se como combinação linear dos vectores **a** e **b**.

Estes vectores, **a** e **b** são linearmente independentes, são por isso base, sendo a dimensão do subespaço das soluções do sistema homogéneo 2.

Teorema

Seja $Ax = b$ um sistema de equações lineares, sendo A uma matriz de ordem $m \times n$. Então são válidas as seguintes afirmações:

- O sistema $Ax = b$ é impossível se e só se b não pertence ao espaço das colunas de A,
- O sistema $Ax = b$ é indeterminado se e só se b pertence ao espaço das colunas de A e estas são linearmente dependentes, isto é, a característica de A é inferior a n;
- O sistema $Ax = b$ tem solução única se e só se b pertence ao espaço das colunas de A e estas são linearmente independentes, isto é, a característica de A é igual a n.

Proposição

Seja A uma matriz de ordem $n \times n$. então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A é invertível,

(ii) a característica de A é máxima (igual a n),

(iiii) as colunas de A geram $\mathbb{R}^n$,

(iv) as colunas de A são independentes,

(v) as linhas de A geram R^n,

(vi) as linhas de A são independentes.

(vii) $N(A) = \{0\}$;

(viii) O sistema $Ax = 0$ é possível e determinado.