DETERMINANTES

6. Usando a regra dos produtos cruzados, calcule o determinante das seguintes matrizes de ordem 2.

a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\theta & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\theta \end{bmatrix}$

d) $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix}$

8. Usando a regra de Sarrus, calcule o determinante das seguintes matrizes de ordem 3.

a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

d) $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

e) $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

10. Recorrendo às propriedades dos determinantes, mostre que o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -6 & 2 \\ -3 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -9 & 1 \\ -5 & 0 & 5 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

é nulo; sugestão: comece por adicionar à 3ª coluna, as 1ª e 5ª colunas e o simétrico do dobro da 2ª coluna.

13. Considere as matrizes reais

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 & 24 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ -1 & -4 & -3 & -8 \\ 4 & 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Aplicando as propriedades dos determinantes, exprima $|\boldsymbol{B}|$ em função de $|\boldsymbol{A}|$ e obtenha o valor de $q = |\boldsymbol{A}|/|\boldsymbol{B}|$.

14. Começando por aplicar a propriedade aditiva dos determinantes à 1ª coluna de Δ e usando, sempre que possível, as propriedades dos determinantes, mostre que

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & x & y & z \\ 4 & 4x+4 & 4y+2 & 4z \\ 9 & 3x+3 & 3y+6 & 3z+3 \end{vmatrix} = 2x \text{, em que } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

16. Considere as matrizes reais

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 2-b\\ 1 & a & 2 & 2\\ 2 & 3 & 3 & b\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 2 & a & 1\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 2 & b\\ 1 & 1 & a & 1\end{bmatrix}\ \text{e}\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & -a & 3\\ 1 & 2 & a-1 & 1 & a+2\\ -1 & 0 & 2 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 3 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

Calcule os seus determinantes adoptando os seguintes processos:
i. Método da condensação da matriz;
ii. Método misto.

17. Calcule os determinantes do exercício anterior considerando:
i. Desenvolvimento laplaceano ao longo de uma das linhas do determinante;
ii. Desenvolvimento laplaceano ao longo de uma das colunas do determinante.

20. Calcule o determinante da matriz

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -2 & -1\\ -1 & 5 & 4-a & 10 & 4\\ -1 & a+3 & 5 & 2a+4 & 4\\ 2 & 2 & -4 & -2 & -2\\ 3 & 2 & -4 & -4 & -3\end{bmatrix}$$

21. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n e não singular. Mostre que:

a) $(\boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Cof}\,(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

b) $|\boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

22. Obtenha os valores de x, reais ou imaginários, que são solução da equação $\left| \boldsymbol{A} - x\,\boldsymbol{I} \right| = 0$, onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade.

a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

d) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

e) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

23. Determine os valores de y que são solução da equação

$$\begin{vmatrix} y+1 & 6 & 3 \\ -7 & -y-6 & -y-3 \\ y+2 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 12$$

24. Determine o valor de q, tal que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & q & 8 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & 5 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

25. Sejam as matrizes reais

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Determine $|\boldsymbol{A}|$, $|\boldsymbol{B}|$ e $|\boldsymbol{C}|$.

b) Determine $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ e $|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{C}|$.

c) Será $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$? Justifique.

d) Determine $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|$, $|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})|$ e $\left|(1/5\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})\,\boldsymbol{B}\right|$.

26. Seja a matriz quadrada de ordem n

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} y & w & w & \cdots & w & w \\ w & y & w & \cdots & w & w \\ w & w & y & \cdots & w & w \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ w & w & w & \cdots & y & w \\ w & w & w & \cdots & w & w \end{bmatrix}$$

Mostre que $|\boldsymbol{F}| = w(y-w)^{n-1}$.

28. Seja a matriz quadrada de ordem n

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} k+x & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} \\ x & k & 0 & \cdots & 0 \\ x & k & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & k & k & \cdots & k \end{bmatrix}$$

Mostre que $|\boldsymbol{G}| = k^n + xk^{n-2}(k-g_{12})$.

29. Seja a matriz quadrada de ordem n

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 1-n & 1 \end{bmatrix}$$

Mostre que $|\,\boldsymbol{H}\,| = (n+1)!/2$.

32. Considere as matrizes ortogonais

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{D} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2\sqrt{5} \\ -6 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & -5 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Verifique que o módulo do determinante de todas elas é igual a 1.

33. Considere as matrizes reais

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Recorrendo ao determinante verifique se as matrizes dadas são não singulares.

b) Para os casos em que tal é possível e usando a matriz adjunta, obtenha a respectiva matriz inversa e comprove o resultado obtido.

34. Considere a matriz

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

e seja ***G*** uma matriz da mesma ordem de ***F***, tal que $|\, \boldsymbol{G} \,| = 80$.

a) Identifique todos os termos de ***F*** que possuam o elemento f_{13} da matriz e indique os respectivos sinais.

b) Será $f_{24}\ f_{13}\ f_{22}\ f_{31}$ um dos termos da matriz? Justifique.

c) Identifique os menores de ***F*** situados nas duas primeiras linhas da matriz e que incluam elementos da 3ª coluna; obtenha os respectivos cofactores.

d) Calcule o determinante da matriz ***F***.

e) Calcule o determinante das matrizes $(4\,\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{G}^{-1})^{\mathrm{T}}$ e $(1/2\,\boldsymbol{F}^{-1}\,\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})^{-1}$; justifique de modo adequado todos os cálculos efectuados.

36. Considere as matrizes reais

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} a & b & 4 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & c & d \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{Cof\ U} = \begin{bmatrix} e & -1 & f \\ 4 & -1 & -5 \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 3 & j & -4 & 3 \\ -2 & 2j & 8 & -7 \\ k & jk & k^2 & -k \\ -1 & -j & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcule o valor do determinante da matriz ***V***.

b) Identifique as matrizes ***U*** e ***Cof U*** e determine a matriz $\boldsymbol{U}^{-1}$.

40. Calcule o determinante da matriz diagonal por blocos

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

41. Calcule o determinante da matriz triangular superior por blocos

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$