Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo A

MIECIV, MIEEIC

2011/2012

Adaptado de Ana Jacinta Soares

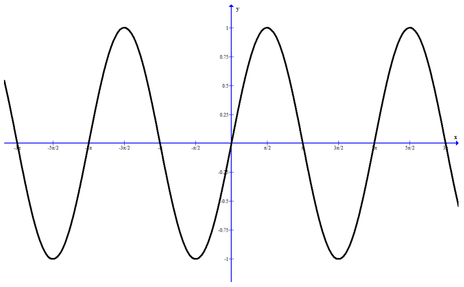
Funções trigonométricas directas e inversas

A. Funções trigonométricas directas

As funções *seno*, *cosseno*, *tangente* e *cotangente* são contínuas e periódicas nos respectivos domínios. Todas elas são funções não injectivas e, portanto, não possuem inversa.

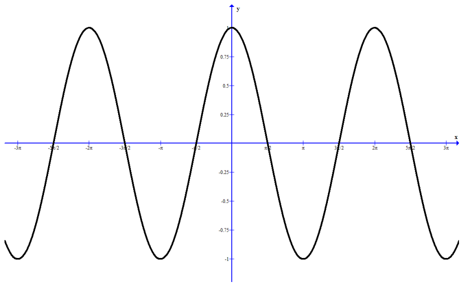
Seno

$y = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{CD}_{\mathrm{sen}} = [-1, 1]$



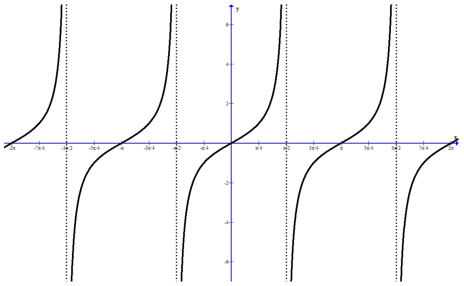
Cosseno

$y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{CD}_{\cos} = [-1, 1]$



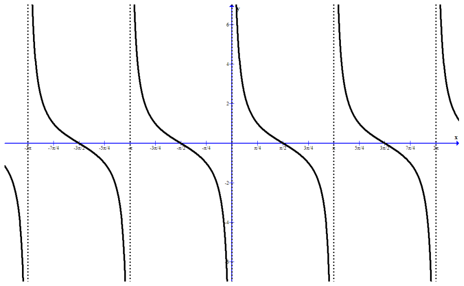
Tangente

$y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\mathrm{CD}_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R}$



Cotangente

$y = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$
$\mathrm{CD}_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{R}$



B. Funções trigonométricas inversas

Considerando restrições adequadas das funções trigonométricas, obtemos funções contínuas e bijectivas definidas em intervalos. A injectividade será conseguida excluindo do domínio todos os pontos onde a função se repete. A sobrejectividade será obtida eliminando do conjunto de chegada todos os pontos que a função não assume. As inversas das restrições assim definidas serão também contínuas.

B.1 Arco-seno

Relativamente à função seno, convencionamos considerar a restrição bijectiva

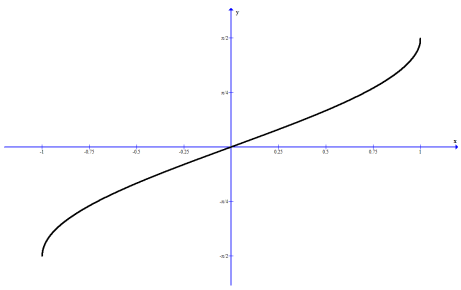
$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sen}\colon & \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sen} x\,. \end{array} \tag{1}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-seno* – lê-se *arco (cujo) seno* – é a a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arcsen}: & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arcsen} y\,, \end{array} \tag{2}$$

onde $\operatorname{arcsen} y$ indica o único arco do intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é igual a y. Assim,

$$x = \operatorname{arcsen} y\,,\ y\in[-1,1] \iff y = \operatorname{sen} x\,,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]. \tag{3}$$



$y = \operatorname{arcsen} x$, $x \in [-1,1]$, $\mathrm{CD}_{\mathrm{arcsen}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Pelo facto de as funções (1) e (2) serem inversas uma da outra, tem-se

$$\begin{aligned} &\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x, \quad \forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ &\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} y) = y, \quad \forall y \in [-1,1]. \end{aligned} \tag{4}$$

No entanto, apesar de fazer sentido calcular $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} z)$, para $z\in\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} z) \neq z\,, \quad \forall z \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \tag{5}$$

uma vez que $\mathrm{CD}_{\mathrm{arcsen}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemplo 1

(a) $\operatorname{arcsen} 1 = \dfrac{\pi}{2}\,, \quad \operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}\,, \quad \operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}\,.$

De facto, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$ e $-\dfrac{\pi}{3}$ são os únicos arcos do intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ onde o seno é, respectivamente, igual a 1, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Tem-se, por exemplo, $\operatorname{sen}(3\pi) = 0$ e $\operatorname{sen}(8\pi) = 0$, mas $\operatorname{arcsen} 0 = 0$.

Porque 0 é o único arco do intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ onde o seno é igual a 0. ■

B.2 Arco-cosseno

Relativamente à função cosseno, convencionou-se considerar a restrição bijectiva

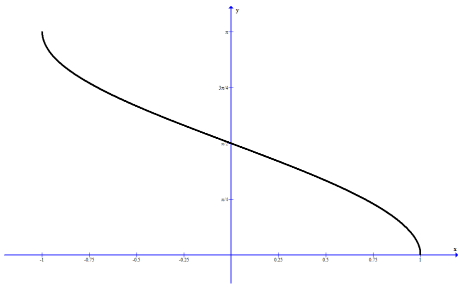
$$\begin{array}{rccc} \cos: & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x\,. \end{array} \tag{6}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-cosseno* – lê-se *arco (cujo) cosseno* – é a função

$$\begin{array}{rccc} \arccos: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & y & \longmapsto & \arccos\,, \end{array} \tag{7}$$

onde $\arccos y$ indica o único arco do intervalo $[0,\pi]$ cujo cosseno é igual a y. Assim

$$x = \arccos y\,,\ y\in[-1,1] \iff y = \cos x\,,\ x \in [0,\pi]\,. \tag{8}$$



$y = \arccos x$, $x \in [-1,1]$, $\mathrm{CD}_{\arccos} = [0,\pi]$

Atendendo a que as funções (6) e (7) são inversas uma da outra, tem-se

$$\begin{aligned} &\arccos(\cos x) = x\,, \quad \forall x \in [0,\pi]\,, \\ &\cos(\arccos y) = y\,, \quad \forall y \in [-1,1]\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Por outro lado, uma vez que $\mathrm{CD}_{\arccos} = [0,\pi]$, tem-se

$$\arccos(\cos z) \neq z\,, \quad \forall z \notin [0,\pi]\,. \tag{10}$$

Exemplo 2

(a) $\arccos 1 = 0\ ,\quad \arccos(-1) = \pi\ ,\quad \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}\ .$

(b) $\arccos(\cos 5\pi) = \arccos(-1) = \pi\ ,\quad \arccos\left(\cos\dfrac{25\pi}{4}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}\ .$ ■

Exemplo 3

Considere a função real de variável real definida por

$$p(x) = \frac{\pi}{3} - 2\arccos(x+1).$$

a) Calcule: $p(-1) - p(-\frac{3}{2})$.

b) Determine o domínio e o contradomínio da função dada p.

c) Calcule caso existam, os zeros de p.

d) Caracterize a função inversa de p.

e) Resolva a seguinte inequação: $p(x) \leq -\frac{\pi}{3}$.

Resolução:

a)

$$\begin{aligned} p(-1) - p(-\frac{3}{2}) &= \frac{\pi}{3} - 2\arccos(0) - \frac{\pi}{3} + 2\arccos(-\frac{3}{2}+1) \\ &= \frac{\pi}{3} - 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\arccos(-\frac{1}{2}) \\ &= \frac{\pi}{3} - 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\frac{\pi}{3} = -\pi + 2\times\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} D_p &= \{x \in \mathbb{R} : x+1 \in [-1,1]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x+1 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 0\} = [-2,0] \end{aligned}$$

Sabe-se que $\arccos(x+1) \in D'_{arccos} = [0,\pi]$. Então, deduz-se que:

$$\begin{gathered} 0 \leq \arccos(x+1) \leq \pi \\ -2\pi \leq -2\arccos(x+1) \leq 0 \\ \frac{\pi}{3} - 2\pi \leq \underbrace{\frac{\pi}{3} - 2\arccos(x+1)}_{p(x)} \leq \frac{\pi}{3} \end{gathered}$$

Logo

$$D'_p = \left[-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

c)

$$\begin{aligned} p(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - 2\arccos(x+1) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x+1) = \frac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow x+1 = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \cos\frac{\pi}{6} - 1 = \frac{\sqrt{3}-2}{2} \in D_p \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} y = \frac{\pi}{3} - 2\arccos(x+1) &\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - \frac{y}{2} = \arccos(x+1) \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{y}{2}\right) = x+1 \Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{3\pi - y}{6}\right) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} p^{-1} : \left[-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] & \rightarrow & [-2, 0] \\ y & \mapsto & \cos\left(\frac{3\pi - y}{6}\right) - 1 \end{array}$$

e)

$$\begin{aligned} p(x) \leq -\frac{\pi}{3} &\Leftrightarrow -2\arccos(x+1) \leq -\frac{2\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow \arccos(x+1) \geq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arccos(x+1) \geq \arccos(\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Como $\arccos y$ é uma função decrescente, então

$$x + 1 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

e

$$S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cap D_p = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cap [0, 2] = \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$$

■

B.3 Arco-tangente

Relativamente à função *tangente*, consideramos a restrição bijectiva

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{tg}: & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{tg} x\,. \end{array} \tag{11}$$

A sua inversa, designada por *arco-tangente* – lê-se *arco (cuja) tangente* – é a função

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{arctg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & y & \longmapsto & \operatorname{arctg} y, \end{array} \tag{12}$$

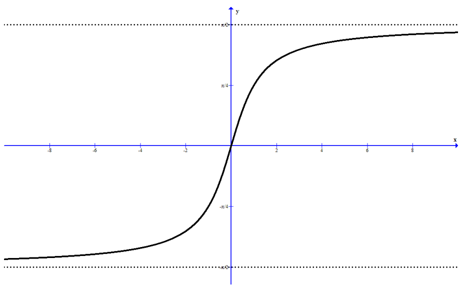
onde $\operatorname{arctg} y$ indica o único arco do intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente é igual a y.

Assim,

$$x = \operatorname{arctg} y, \quad \text{com} \quad y \in \mathbb{R}$$

se e só se

$$y = \operatorname{tg} x\,, \; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$



$y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{CD}_{\text{arccos}} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

B.4 Arco-cotangente

Relativamente à função *co-tangente*, consideramos a restrição bijectiva

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{tg}: &]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{cotg} x, \end{array} \tag{13}$$

cuja inversa é a função *arco-cotangente* – lê-se *arco (cuja) cotangente* – definida por

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{arccotg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,\pi[\\ & y & \longmapsto & \operatorname{arccotg} y, \end{array} \tag{14}$$

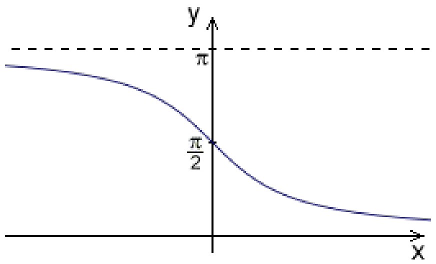
onde $\operatorname{arccotg} y$ indica o único arco do intervalo $]0, \pi[$ cuja cotangente é igual a y.

Então,

$$x = \operatorname{arccotg} y, \quad \text{com} \quad y \in \mathbb{R}$$

se e só se

$$y = \operatorname{cotg} x\,, \; x \in \,]0, \pi[\,.$$



$y = \operatorname{arccotg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{CD}_{\mathrm{arccos}} =]0, \pi[$

B.5 Derivadas das funções trigonométricas inversas

Acabámos de definir as funções trigonométricas inversas mas não obtivemos as suas expressões designatórias envolvendo uma variável independente, digamos x. Definimos estas funções precisamente como as inversas de certas restrições das funções trigonométricas directas. Para o cálculo das derivadas correspondentes, vamos recorrer à regra de derivação da função inversa, que passamos a recordar.

[Regra da derivada da função inversa]
Seja $f\colon I \longrightarrow J$, com I e J intervalos de $\mathbb{R}$, uma função bijectiva e $f^{-1}\colon J \longrightarrow I$ a sua inversa. Se f é derivável no ponto $a \in I$, sendo $f'(a) \neq 0$, e f^{-1} é contínua em $b = f(a)$, então f^{-1} é derivável em b, tendo-se

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,. \tag{15}$$

A fórmula (15) significa que a derivada da função inversa é o inverso da derivada da função directa, com cada uma delas calculada num ponto adequado. ■

Usando a regra da derivada da função inversa, vamos verificar que

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \in\,]-1, 1[\,. \tag{16}$$

A função directa é $f(x) = \cos x$, com $x \in [0, \pi]$, e a função inversa é $f^{-1}(y) = \arccos y$, com $y \in [-1, 1]$. Tem-se $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $x \in [0, \pi]$, sendo $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in]0, \pi[$. Como $f(0) = 1$ e $f(\pi) = -1$, a regra anterior é aplicável em $]-1, 1[$, dando

$$\arccos' y = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos y)} = \frac{-1}{\operatorname{sen}(\arccos y)}\,, \quad y \in\,]-1, 1[. \tag{17}$$

Resta agora simplificar o denominador da última expressão. Para tal, repare-se que

$$y \in\,]-1, 1[\; \Longrightarrow \; \arccos y \in]0, \pi[\;\text{ e }\; \operatorname{sen}(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$$

porque $\operatorname{sen}^2(\arccos y) + \cos^2(\arccos y) = 1$, ou seja, $\operatorname{sen}^2(\arccos y) + y^2 = 1$, sendo o seno positivo em $]0, \pi[$. Fica então justificada a fórmula (16).

Sendo u uma função derivável de x, a regra da derivada da função composta dá

$$(\arccos u)'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}} \tag{18}$$

nos pontos onde a derivada existe. ■

Procedendo de maneira semelhante com as outras funções trigonométricas inversas, iríamos obter as restantes expressões das derivadas. Poderíamos, assim, construir a seguinte tabela. Sendo u uma função derivável, tem-se (nos pontos onde a derivada existe):

$$(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2} \qquad (\operatorname{arccotg} u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$$