Álgebra Linear B

Sebenta da Unidade Curricular

Engenharia de Comunicações (1º ano/1º semestre)

Engenharia Mecânica (1º ano/1º semestre)

Gaspar José Brandão Queiroz Azevedo Machado

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia

Universidade do Minho

2006/2007

Índice

Capítulo 1

Matrizes

1.1 Apontamentos sobre Matrizes

1.1def (a) ⟦produto cartesiano de dois conjuntos⟧ Sejam A e B conjuntos. Chama-se produto cartesiano de A e B, que se representa por $A \times B$, ao conjunto

$$\{(a,b)|a \in A, b \in B\}.$$

(b) ⟦produto cartesiano de um número finito de conjuntos⟧ Sejam $n \in \mathbb{N}$ e os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Chama-se produto cartesiano de A e B, que se representa por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, ao conjunto

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n)|a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n, \}.$$

(c) ⟦potência cartesiana de um conjunto⟧ Sejam $n \in \mathbb{N}$ e X um conjunto. Chama-se potência cartesiana de ordem n do conjunto X, que se representa por X^n, ao conjunto

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)|x_1, x_2, \ldots, x_n \in X\},$$

identificando-se X^1 com X.

1.2exe Explicite $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}^3$.

res $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{C}^3 = \{(z_1, z_2, z_3)|z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\}$.

1.3def (a) ⟦matriz, tipo de uma matriz, matriz real, matriz complexa⟧ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ (lê-se "m por n") a uma função com domínio $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 | i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ e com conjunto de chegada $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dizendo-se que é uma matriz real ou complexa, respectivamente.

(b) ⟦$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$⟧ Representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais do tipo $m \times n$.

(c) ⟦$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$⟧ Representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes complexas do tipo $m \times n$.

1.4obs (a) É possível considerar matrizes cujos elementos não são nem números reais, nem números complexos (*e.g.*, polinómios), mas neste curso apenas aqueles casos são os com interesse.

(b) Quando não é relevante destinguir o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) do conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$), usa-se o símbolo $\mathbb{K}$, tendo-se a seguinte definição:

1.5def ⟦$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$⟧ Representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$, independentemente de serem reais ou complexas.

1.6def ⟦escalar⟧ Chama-se escalar a um elemento de $\mathbb{K}$.

$\boxed{\text{1.7def}}$ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $i \in \{1,\ldots,m\}$ e $j \in \{1,\ldots,n\}$.

(a) [[elemento de uma matriz]] Chama-se elemento da linha i e da coluna j da matriz A, que se representa por $a_{i,j}$ ou $(A)_{i,j}$, a $A(i,j)$. (Se não houver ambiguidade relativamente ao índice da linha e ao índice da coluna representa-se por a_{ij} ou $(A)_{ij}$.)

(b) [[linha de uma matriz]] Chama-se linha i da matriz A, que se representa por $\ell_{i,A}$, a $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. (Se não houver ambiguidade relativamente à matriz representa-se por ℓ_i.)

(c) [[coluna de uma matriz]] Chama-se coluna j da matriz A, que se representa por $c_{j,A}$, a $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$. (Se não houver ambiguidade relativamente à matriz representa-se por c_j.)

$\boxed{\text{1.8obs}}$ (a) Regra geral usam-se letras maiúsculas para representar matrizes.

(b) Representa-se por $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

em que $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{K}$.

(c) A letra "i" aparece neste curso quer como a unidade imaginária dos números complexos, quer como a letra usual para representar a linha de uma matriz. No entanto, o contexto será sempre suficiente para identificar o significado correcto.

(d) Quando se está perante matrizes do conjunto $\mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{K})$, o contexto será suficiente para distinguir se se está a fazer referência à matriz ou ao único elemento que a constitui.

1.9exe Dê um exemplo de uma matriz pertencente a $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

res $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -4 \\ \sqrt{2} & 0 & \pi \end{bmatrix}$.

1.10exe Explicite a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = j - i$.

res $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.11exe Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

(a) Indique o elemento que está na segunda linha e na terceira coluna da matriz A.

(b) Indique a segunda linha da matriz A.

(c) Indique a terceira coluna da matriz A.

res (a) $a_{23} = 7$.

(b) $\ell_2 = (5, 6, 7, 8)$.

(c) $c_3 = (3, 7)$.

1.12def Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(a) ⟦matriz coluna⟧ Diz-se que A é uma matriz coluna se $n = 1$.

(b) ⟦matriz linha⟧ Diz-se que A é uma matriz linha se $m = 1$.

1.13obs É habitual representar matrizes linha e matrizes coluna por letras minúsculas e os seus elementos apenas com um índice. Assim, e usando esta notação, as formas da matriz coluna x com m linhas e da matriz linha y com n colunas são:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}.$$

1.14exe

(a) Dê um exemplo de uma matriz coluna complexa com 2 elementos.

(b) Dê um exemplo de uma matriz linha real com 3 elementos.

(c) Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "Há matrizes que são simultaneamente matrizes linha e matrizes coluna".

res

(a) $p = \begin{bmatrix} 1+2i \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $q = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) Proposição verdadeira pois as matrizes que pertencem ao conjunto $\mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{K})$ são matrizes linha pois só têm uma coluna e são matrizes coluna pois só têm uma linha.

1.15def

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(a) ⟦matriz rectangular⟧ Diz-se que A é uma matriz rectangular se $m \neq n$.

(b) ⟦matriz quadrada, ordem de uma matriz⟧ Diz-se que A é uma matriz quadrada se $m = n$, dizendo-se neste caso que A é uma matriz de ordem n.

1.16exe

(a) Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz rectangular."

(b) Dê um exemplo de uma matriz real de ordem 2.

res

(a) A proposição é verdadeira pois o número de linhas da matriz, que é 2, é diferente do número de colunas da matriz, que é 3.

(b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

1.17def Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) [[diagonal principal ou diagonal de uma matriz]] Chama-se diagonal principal da matriz A ou diagonal da matriz A ao elemento $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ de $\mathbb{K}^n$.

(b) [[diagonal secundária de uma matriz]] Chama-se diagonal secundária da matriz A ao elemento $(a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1})$ de $\mathbb{K}^n$.

(c) [[matriz diagonal]] A diz-se uma matriz diagonal se $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

(d) [[matriz escalar]] A diz-se uma matriz escalar se é uma matriz diagonal com $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$.

(e) [[matriz triangular superior]] A diz-se uma matriz triangular superior se $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

(f) [[matriz triangular inferior]] A diz-se uma matriz triangular inferior se $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

1.18obs (a) As definições anteriores só se aplicam a matrizes quadradas.

(b) A é uma matriz diagonal se todos os elementos fora da diagonal são zeros.

(c) A é uma matriz triangular superior se todos os elementos "abaixo" da diagonal são zeros.

(d) A é uma matriz triangular inferior se todos os elementos "acima" da diagonal são zeros.

1.19exe (a) Dê um exemplo de uma matriz diagonal de ordem 4.

(b) Dê um exemplo de uma matriz escalar de ordem 3.

(c) Dê um exemplo de uma matriz triangular superior de ordem 2.

(d) Dê um exemplo de uma matriz triangular inferior de ordem 3 e indique a sua diagonal principal e diagonal secundária.

(e) Dê um exemplo de uma matriz simultaneamente triangular superior e triangular inferior de ordem 2.

res (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1.20def (a) ⟦matriz nula, $0_{m\times n}$, $\underline{0}$⟧ Chama-se matriz nula a uma matriz cujos elementos são todos iguais a 0. Representa-se a matriz nula do tipo $m \times n$ por $0_{m\times n}$ ou por $\underline{0}$ se não houver ambuiguidade relativamente ao tipo.

(b) ⟦matriz identidade, I_n, I⟧ Chama-se matriz identidade à matriz escalar cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1. Representa-se a matriz identidade de ordem n por I_n ou por I se não houver ambuiguidade relativamente à ordem.

1.21exe (a) Indique a matriz nula do tipo 2×4.

(b) Indique a matriz identidade de ordem 3.

res (a) $0_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.22def ⟦matrizes iguais⟧ Sejam as matrizes $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. Diz-se que A e B são matrizes iguais se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

$\boxed{1.23\text{obs}}$ Usa-se esta definição em algumas demonstrações relativas a matrizes.

$\boxed{1.24\text{def}}$ ⟦soma de matrizes⟧ Sejam as matrizes $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se soma das matrizes A e B à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $z_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, escrevendo-se $Z = A + B$.

$\boxed{1.25\text{def}}$ ⟦produto de uma matriz por um escalar⟧ Sejam a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$. Chama-se produto da matriz A pelo escalar α à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $z_{ij} = \alpha a_{ij}$, escrevendo-se $Z = \alpha A$.

$\boxed{1.26\text{obs}}$

(a) Só se pode somar matrizes do mesmos tipo.

(b) É sempre possível multiplicar uma matriz por um escalar.

(c) Seja a matriz A. Então, em vez de $(-1)A$ escreve-se $-A$.

(d) Sejam as matrizes A e B do mesmo tipo. Então, tendo em consideração a alínea anterior, em vez de $A+(-B)$ escreve-se $A-B$.

(e) A matriz nula é o elemento neutro da soma de matrizes.

$\boxed{1.27\text{exe}}$ Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $A + B$.

(b) Calcule $2A$.

(c) Calcule $\frac{1}{2}A - 3B$.

$\boxed{\text{res}}$

(a) $A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(b) $2A = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$.

(c) $\frac{1}{2}A - 3B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19/2 & 1 & -11/2 \\ -3 & 7/2 & -8 \end{bmatrix}$.

1.28teo

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : A + B = B + A$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (A + B) + C = A + (B + C)$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : A + 0_{m\times n} = A$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : A + (-A) = 0_{m\times n}$.

(e) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

(g) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

(h) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : 1A = A$.

dem

(a) Como, por definição de soma de matrizes, as matrizes $A + B$ e $B + A$ são do tipo $m \times n$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}(A + B)_{ij} &= (A)_{ij} + (B)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes}\\ &= (B)_{ij} + (A)_{ij} && \text{pela propriedade comutativa dos escalares}\\ &= (B + A)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes},\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $A + B$ e $B + A$ são iguais.

(b) Como, por definição de soma de matrizes, as matrizes $(A+B)+C$ e $A + (B + C)$ são do tipo $m \times n$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}((A + B) + C)_{ij} &= (A + B)_{ij} + (C)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes}\\ &= ((A)_{ij} + (B)_{ij}) + (C)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes}\\ &= (A)_{ij} + ((B)_{ij} + (C)_{ij}) && \text{pela propriedade associativa dos escalares}\\ &= (A)_{ij} + (B + C)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes},\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $(A + B) + C$ e $A + (B + C)$ são iguais.

(c) Como, por definição de soma de matrizes, as matrizes $A + 0_{m\times n}$ e A são do tipo $m \times n$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
(A+0)_{ij} &= (A)_{ij} + (0_{m\times n})_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes}\\
&= (A)_{ij} + 0 && \text{por definição de matriz nula}\\
&= (A)_{ij} && \text{0 é o elemento neutro da soma de escalares},
\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $A + B$ e $B + A$ são iguais.

(d) Como, por definição de soma de matrizes, as matrizes $A + B$ e $B+A$ são do tipo $m \times n$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
(A+(-A))_{ij} &= (A)_{ij} + (-A)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes}\\
&= (A)_{ij} - (A)_{ij} && \text{por } \boxed{\text{1.26obs}} \text{ (c)}\\
&= 0 && \text{pois são escalares simétricos},
\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $A + (-A)$ e $0_{m\times n}$ são iguais.

(e) Exercício.

(f) Exercício.

(g) Exercício.

(h) Exercício.

$\boxed{\text{1.29def}}$ [[produto ou multiplicação de matrizes]] Sejam as matrizes $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Chama-se produto ou multiplicação da matriz A pela matriz B à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$, $z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, escrevendo-se $Z = AB$.

$\boxed{\text{1.30obs}}$ (a) Só se pode efectuar a multiplicação da matriz A pela matriz B se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B. Neste caso, o número de linhas da matriz resultante é igual ao número de linhas da matriz A e o número de colunas da matriz resultante é igual ao número de colunas da matriz B. Em notação simplificada, tem-se: $A_{m\times n}B_{n\times p} = Z_{m\times p}$.

(b) Sejam as matrizes $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$. Então, como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efectuar a operação AB. Por exemplo o elemento $(AB)_{23}$ obtém-se considerando $\ell_{2,A}$ e $c_{2,B}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * \\ \boxed{2 \quad 1} \\ * & * \end{bmatrix}}_{A=[a_{ij}]\in\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}} & * \\ * & * & & * \end{bmatrix}}_{B=[b_{ij}]\in\mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})} = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & \boxed{13} & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{AB\in\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})}$$

$$(AB)_{23} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k}b_{k3} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 2\times 4 + 1\times 5 = 13.$$

$\boxed{1.31\text{exe}}$ Considere as matrizes $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Efectue, se possível, as seguintes operações:

(a) AB.

(b) BA.

(c) BI_3.

(d) I_2B.

$\boxed{\text{res}}$ (a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efectuar a operação AB, tendo-se

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Como o número de colunas da matriz B, que é 3, é diferente do número de linhas da matriz A, que é 2, não é possível efectuar a operação BA.

(c) Como o número de colunas da matriz B é igual ao número de linhas da matriz I_3, é possível efectuar a operação BI_3, tendo-se

$$BI_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Como o número de colunas da matriz I_2 é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efectuar a operação I_2B, tendo-se

$$I_2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.32teo (a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K}) : (AB)C = A(BC)$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) : (A+B)C = AC + BC$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) : A(B+C) = AB + AC$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : I_mA = AI_n = A$.

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) : \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

dem Exercício.

1.33obs (a) A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

(b) Sejam A, B e C matrizes do mesmo tipo. Então, tem-se que a expressão $A + B + C$ não resulta ambígua devido à propriedade associativa da soma de matrizes.

(c) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. Então, tem-se que a expressão ABC não resulta ambígua devido à propriedade associativa da multiplicação de matrizes, fazendo sentido a seguinte definição:

1.34def [[potência de uma matriz]] Sejam $p \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada. Chama-se p-ésima potência da matriz A, que se representa por A^p, a $\prod_{k=1}^{p} A$.

1.35obs A multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa. Faz, pois, sentido a seguinte definição:

1.36def [[matrizes comutáveis]] Sejam A e B matrizes da mesma ordem. Diz-se que as matrizes A e B são comutáveis se $AB = BA$.

1.37exe Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem. Então, simplifique a expressão $(A+B)^2 - (A-B)(A+B) - 2B^2$.

res $(A+B)^2 - (A-B)(A+B) - 2B^2 = (A+B)(A+B) - (A-B)(A+B) - 2B^2 = A^2 + AB + BA + B^2 - A^2 - AB + BA + B^2 - 2B^2 = 2BA$.

1.38exe Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule A^3.

res Como A é uma matriz quadrada, é possível determinar A^3, tendo-se

$$A^3 = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nota: como a multiplicação de matrizes é associativa, também se tem $A^3 = A(AA)$.

1.39obs Não se define a operação “divisão de matrizes”.

1.40def ⟦matriz invertível ou não-singular, matriz não-invertível ou singular⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é uma matriz invertível ou não-singular se existir uma matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $AZ = ZA = I_n$. Caso contrário, diz-se que A é uma matriz não-invertível ou singular.

1.41teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que é uma matriz invertível. Então, existe uma e uma só matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $ZA = AZ = I_n$.

dem Sejam $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$AX = I_n \overset{(1)}{=} XA,$$
$$AY \overset{(2)}{=} I_n = YA.$$

Então,

$$\begin{aligned}
X &= XI_n && \text{I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes}\\
&= X(AY) && \text{por (2)}\\
&= (XA)Y && \text{a multiplicação de matrizes é associativa}\\
&= I_nY && \text{por (1)}\\
&= Y, && \text{I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes,}
\end{aligned}$$

i.e., existe uma única matriz que satisfaz a condição de invertibilidade.

1.42def ⟦matriz inversa⟧ Seja A uma matriz de ordem n invertível. Chama-se matriz inversa da matriz A, que se representa por A^{-1}, à única matriz Z tal que $AZ = ZA = I_n$.

1.43teo Sejam A e B duas matrizes quadrada da mesma ordem. Então, $AB = I \Rightarrow A^{-1} = B$.

$\boxed{\text{1.44obs}}$ (a) Se A é a matriz inversa da matriz B, então B é a matriz inversa da matriz A.

(b) Sejam A e B duas matrizes quadrada da mesma ordem. Então, $AB = I \Leftrightarrow BA = I$. Assim, basta verificar $AB = I$ ou $BA = I$ para se concluir que as matrizes A e B são invertíveis com $A^{-1} = B$ e $B^{-1} = A$.

$\boxed{\text{1.45teo}}$ (a) Seja A uma matriz invertível. Então, A^{-1} também é uma matriz invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Sejam $A, B\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes invertíveis. Então, AB também é uma matriz invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$\boxed{\text{dem}}$ (a) Como A é uma matriz invertível, tem-se que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Logo, A^{-1} é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(b) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes invertíveis. Então, existem $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$AA^{-1} \overset{(1)}{=} I_n = AA^{-1},$$

$$BB^{-1} = I_n \overset{(2)}{=} BB^{-1},$$

pelo que

$$\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} && \text{a multiplicação de matrizes é associativa}\\
&= AI_nA^{-1} && \text{por (2)}\\
&= AA^{-1} && I \text{ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes}\\
&= I_n, && \text{por (1)}
\end{aligned}$$

pelo que AB é invertível com $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ uma vez que a inversa de uma matriz é única.

1.46obs (a) Há matrizes quadradas que não admitem inversa.

(b) Apresenta-se no final deste capítulo uma condição para caracterizar matrizes invertíveis e um método geral para cálcular inversas.

1.47exe Sejam as matrizes $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine AB.

(b) O que pode concluir da alínea anterior?

(c) As matrizes A e B são comutáveis?

res (a) $AB = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) As matrizes são invertíveis com $A^{-1} = B$ e $B^{-1} = A$.

(c) Sim, pois $AB = BA = I_2$.

1.48def [[matriz transposta]] Seja a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se transposta da matriz A à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, $z_{ij} = a_{ji}$, escrevendo-se $Z = A^T$.

1.49obs (a) É sempre possível calcular a matriz transposta de uma matriz.

(b) Calcular a transposta de uma matriz corresponde a trocar linhas com colunas.

1.50exe Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule A^T.

(b) Calcule $\frac{AA^T}{u^Tu}$.

res (a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\frac{AA^T}{u^Tu} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & -2 \\ -2 & 5/2 \end{bmatrix}$.

Nota: relembrar 1.8obs (d).

$\boxed{1.51\text{teo}}$ (a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : \left(A^T\right)^T = A$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (A+B)^T = A^T + B^T$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (\alpha A)^T = \alpha A^T$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) : (AB)^T = B^T A^T$.

(e) $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) : \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

$\boxed{\text{dem}}$ (a) Exercício.

(b) Exercício.

(c) Exercício.

(d) Como, por definição da transposta de uma matriz e da multiplicação de matrizes, as matrizes $(AB)^T$ e $B^T A^T$ são do tipo $p \times m$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\left((AB)^T\right)_{ij} &= (AB)_{ji} && \text{pela definição de matriz transposta}\\
&= \sum_{k=1}^{n} (A)_{jk}(B)_{ki} && \text{pela definição de produto de matrizes}\\
&= \sum_{k=1}^{n} (B)_{ki}(A)_{jk} && \text{pela propriedade comutativa dos escalares}\\
&= \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik}(A^T)_{kj} && \text{pela definição de matriz transposta}\\
&= (B^T A^T)_{ij}, && \text{pela definição de produto de matrizes,}
\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $(AB)^T$ e $B^T A^T$ são iguais.

(e) Exercício.

$\boxed{1.52\text{def}}$ [[matriz simétrica]] Seja A uma matriz quadrada. Diz-se que A é uma matriz simétrica se $A = A^T$.

1.53exe Dê um exemplo de uma matriz simétrica de ordem 3.

res $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

1.54def [[matriz ortogonal]] Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é uma matriz ortogonal se $AA^T = A^TA = I_n$.

1.55obs Se A é uma matriz ortogonal, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^T$.

1.56exe Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

res Como

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

i.e., $AA^T = I_2$, tem-se que A é uma matriz ortogonal.

1.57obs Recorde: seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Chama-se conjugado de z, que se representa por $\overline{z}$, a $a - bi \in \mathbb{C}$.

1.58def Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

(a) [[matriz conjugada]] Chama-se matriz conjugada de A à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $z_{ij} = \overline{a}_{ij}$, escrevendo-se $Z = \overline{A}$.

(b) [[matriz transconjugada]] Chama-se matriz transconjugada de A à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $z_{ij} = \overline{a}_{ji}$ (onde $\overline{a}_{ji}$ representa o conjugado de a_{ji}), escrevendo-se $Z = A^H$.

1.59obs

(a) É sempre possível calcular a matriz conjugada e a matriz transconjugada de uma matriz.

(b) Calcular a matriz conjugada de uma matriz corresponde a conjugar os seus elementos.

(c) Calcular a matriz transconjugada de uma matriz corresponde a conjugar os seus elementos e a trocar depois linhas com colunas.

1.60exe Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então, determine A^T, $\overline{A}$ e A^H.

res $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-i & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix}$, $\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2+i & -i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2+i & 0 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$.

1.61teo

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) : \left(A^H\right)^H = A$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) : (A+B)^H = A^H + B^H$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) : (\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C}) : (AB)^H = B^H A^H$.

(e) $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) : \left(A^H\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^H$.

dem Exercício.

1.62def ⟦matriz hermítica⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Diz-se que A é uma matriz hermítica se $A = A^H$.

1.63exe Dê um exemplo de uma matriz hermítica de ordem 3.

res $A = \begin{bmatrix} 0 & 1-i & 2 \\ 1+i & 2 & 3+2i \\ 2 & 3-2i & 1 \end{bmatrix}$.

1.64def ⟦matriz unitária⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Diz-se que A é uma matriz unitária se $AA^H = A^H A = I_n$.

1.65obs Se A é uma matriz unitária, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^H$.

1.66exe Verifique que a matriz $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -i \end{bmatrix}$ é unitária.

res Como

$$\begin{aligned} AA^H &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -i & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

i.e., $AA^H = I_2$, tem-se que A é uma matriz unitária.

1.67def Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(a) ⟦linha nula⟧ Diz-se que ℓ_i é uma linha nula da matriz A se $a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0$.

(b) ⟦coluna nula⟧ Diz-se que c_j é uma coluna nula da matriz A se $a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{mj} = 0$.

(c) ⟦pivô⟧ Chama-se pivô ao elemento diferente de zero mais à esquerda de uma linha não-nula.

(d) ⟦coluna pivô⟧ Chama-se coluna pivô a uma coluna da matriz se existe um elemento pivô nessa coluna.

1.68exe Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Identifique os pivôs e as colunas pivô da matriz A.

res Pivôs: a_{15}, a_{22} e a_{32}.

Colunas pivô: c_2 e c_5.

$\boxed{\text{1.69def}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(a) ⟦matriz em escada⟧ Diz-se que A é uma matriz em escada se o número de elementos nulos que precedem o pivô aumenta de linha para linha até que, possivelmente, sobrem apenas linhas nulas.

(b) ⟦matriz em escada reduzida⟧ Diz-se que A é uma matriz em escada reduzida se é uma matriz em escada, se todos os pivôs são iguais a um e se estes são os únicos elementos não-nulos nas colunas pivô.

$\boxed{\text{1.70exe}}$ Indique quais das seguintes matrizes são matrizes em escada e em escada reduzida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{res}}$ Matrizes em escada: A, B, C, F, G, H, u.

Matrizes em escada reduzida: A, C, F, H, u.

1.71def Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $\beta \in \mathbb{K}$.

(a) [[operação elementar do tipo I nas linhas de uma matriz]] Dá-se o nome de operação elementar do tipo I nas linhas da matriz A, que se representa por $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$, à troca de duas linhas.

(b) [[operação elementar do tipo II nas linhas de uma matriz]] Dá-se o nome de operação elementar do tipo II nas linhas da matriz A, que se representa por $\ell_i \leftarrow \alpha\ell_i$, à substituição de uma linha por um seu múltiplo não-nulo.

(c) [[operação elementar do tipo III nas linhas de uma matriz]] Dá-se o nome de operação elementar do tipo III nas linhas da matriz A, que se representa por $\ell_i \leftarrow \ell_i + \beta\ell_j$, à substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha.

1.72obs Na definição anterior apenas se consideram operações sobre linhas, apesar de também ser possível definir operações sobre colunas. Fazendo este curso apenas faz referência a operações elementares sobre linhas, estas passarão a ser referenciadas apenas por "operações elementares".

1.73def [[matrizes equivalentes, $A \longleftrightarrow B$]] Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A e B são matrizes equivalentes, escrevendo-se $A \longleftrightarrow B$, se se pode obter uma a partir da outra através duma sequência (finita) de operações elementares com linhas.

1.74exe Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Efectue a seguinte sequência de operações na matriz A: $\ell_1 \leftrightarrow \ell_2$, $\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1$, $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3$, $\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2$ e $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2$.

res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{1.75teo}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então, existe uma única matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz A.

$\boxed{\text{1.76obs}}$ Seja A uma matriz não-nula. Então, existe uma infinidade de matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.

$\boxed{\text{1.77def}}$ Seja A uma matriz.

(a) $[\![\mathrm{fe}(A)]\!]$ Representa-se por $\mathrm{fe}(A)$ o conjunto das matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.

(b) $[\![\mathrm{fer}(A)]\!]$ Representa-se por $\mathrm{fer}(A)$ a única matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz A.

$\boxed{\text{1.78obs}}$ Seja A uma matriz.

(a) Note-se que $\mathrm{fe}(A)$ é um conjunto de matrizes e que $\mathrm{fer}(A)$ é uma matriz.

(b) Em $\boxed{\text{1.79obs}}$ apresenta-se um algoritmo para determinar um elemento de $\mathrm{fe}(A)$ e em $\boxed{\text{1.80obs}}$ apresenta-se um algoritmo para determinar $\mathrm{fer}(A)$.

$\boxed{1.79\text{obs}}$ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, o seguinte algoritmo determina um elemento de $\mathrm{fe}(A)$:

Passo 1 [inicializar o algoritmo]

$i \leftarrow 1$

$j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz A

Passo 2 [seleccionar elemento pivô]

se $a_{ij} = 0$ **então**

$k \leftarrow \min\{q \in \{i+1, \ldots, m\} | a_{qj} \neq 0\}$

$\ell_i \leftrightarrow \ell_k$

fimse

Passo 3 [anular os elementos abaixo do pivô]

para $p \leftarrow i+1$ **até** m **fazer**

$\ell_p \leftarrow \ell_p - \frac{a_{pj}}{a_{ij}}\ell_i$

fimpara

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada **então**

terminar

senão

$i \leftarrow i+1$

$j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz que se obtém eliminando na matriz A as linhas $\ell_1, \ldots, \ell_{i-1}$

ir para o Passo 2

fimse

1.80obs Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, o seguinte algoritmo determina fer(A):

Passo 1 [inicializar o algoritmo]

determinar $A' = [a'_{ij}] \in \mathrm{fe}(A)$

$i \leftarrow$ índice da última linha não-nula da matriz A'

$j \leftarrow$ índice da coluna pivô da linha i

Passo 2 [colocar elemento pivô a um]

se $a'_{ij} \neq 1$ **então**

$\ell'_i \leftarrow \dfrac{1}{a'_{ij}}\ell'_i$

fimse

Passo 3 [anular os elementos acima do pivô]

para $p \leftarrow 1$ **até** $i-1$ **fazer**

$\ell'_p \leftarrow \ell'_p - a'_{pj}\ell'_i$

fimpara

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada reduzida **então**

terminar

senão

$i \leftarrow i-1$

$j \leftarrow$ índice da coluna pivô da linha i

ir para o Passo 2

fimse

$\boxed{1.81\text{exe}}$ Seja a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Determine um elemento de $\text{fe}(A)$ e $\text{fer}(A)$.

$\boxed{\text{res}}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{A' \in \text{fe}(A)}$$

$$\xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \frac{1}{3}\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{fer}(A)}.$$

1.82def [[matriz elementar]] Seja $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que E é uma matriz elementar se se pode obter através de uma operação elementar sobre a matriz I_n.

1.83exe A partir de I_4, determine as matrizes elementares obtidas através das seguintes operações elementares:

(a) $\ell_2 \leftrightarrow \ell_4$.

(b) $\ell_3 \leftarrow 2\ell_3$.

(c) $\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1$.

res (a)

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_4]{} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

(b)

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow 2\ell_3]{} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

(c)

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{1.84teo}}$ As matrizes elementares são invertíveis e as suas inversas são matrizes elementares.

$\boxed{\text{1.85teo}}$ Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ tais que $A \longleftrightarrow B$. Então, existe um número finito de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tais que $B = E_1 E_2 \cdots E_k A$.

$\boxed{\text{1.86teo}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Então, existe um número finito de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tais que $\operatorname{fer}(A) = E_1 E_2 \cdots E_k A$.

$\boxed{\text{1.87teo}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Então, A é invertível se e só se A é o produto de matrizes elementares.

$\boxed{\text{1.88obs}}$

(a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Então, A é invertível se e só se $\operatorname{fer}(A) = I_n$.

(b) Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. Então, existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$I_n = E_k \cdots E_2 E_1 A,$$

pelo que

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n,$$

ou ainda

$$\begin{aligned} A^{-1} &= I_n \left(E_k^{-1}\right)^{-1} \cdots \left(E_2^{-1}\right)^{-1} \left(E_1^{-1}\right)^{-1} \\ &= E_k \cdots E_2 E_1 I_n, \end{aligned}$$

i.e., A^{-1} obtém-se a partir de I_n através das mesmas operações elementares que transformam A em I_n.

$\boxed{1.89\text{exe}}$ Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{smallmatrix}\right]$ é invertível e determine a sua inversa.

$\boxed{\text{res}}$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A|I_3} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{I_3|A^{-1}}.$$

Assim, A é uma matriz invertível pois $\operatorname{fer}(A) = I_3$ com $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Calcule-se, apenas para efeito de verificação, que $AA^{-1} = I_3$:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2 Exercícios sobre Matrizes

$\boxed{1.1\text{exe}}$ Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & i \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Indique as matrizes rectangulares e o seu tipo.

(b) Indique as matrizes quadradas e a sua ordem.

(c) Indique as matrizes linha.

(d) Indique as matrizes coluna.

(e) Indique as matrizes diagonais.

(f) Indique as matrizes escalares.

(g) Indique as matrizes triangulares superiores.

(h) Indique as matrizes triangulares inferiores.

$\boxed{1.2\text{exe}}$ Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ b_{ij} = i - j,$$

$$C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i < j, \\ (-1)^{i+1} & \text{se} \quad i = j, \\ 1 & \text{se} \quad i > j, \end{cases} \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indique se estão bem definidas as seguintes expressões, efectuando as operações nesses casos:

(a) $A+2B$.

(b) $A-C$.

(c) AC.

(d) CA.

(e) C^3.

(f) $\dfrac{AB^T+BA^T}{2}$.

(g) $(CBA^TC)^2$.

(h) uu^T.

(i) u^Tu.

(j) u^TA^TBu.

1.3exe Determine os valores $a,b,c \in \mathbb{C}$, para que a matriz $S=\left[\begin{smallmatrix}1&a&b\\1&2&3\\2&c&3\end{smallmatrix}\right]$ seja simétrica.

1.4exe Indique quais das seguintes matrizes são ortogonais:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{bmatrix}.$$

1.5exe Determine os valores $a,b,c \in \mathbb{C}$, para que a matriz $T=\left[\begin{smallmatrix}0&a&b\\1&c&i\\2i&-i&3\end{smallmatrix}\right]$ seja hermítica.

1.6exe Mostre que $B=\frac{1}{5}\left[\begin{smallmatrix}3&4i\\-4&3i\end{smallmatrix}\right]$ é uma matriz unitária.

1.7exe Considere a matriz $D=\left[\begin{smallmatrix}i&0&2i\\2&-1&0\end{smallmatrix}\right]$. Mostre que está bem definida a expressão $\overline{D}D^HDD^T$ e determine o seu valor.

1.8exe Mostre que o produto de uma matriz pela sua transposta é uma matriz simétrica.

1.9exe Mostre que se A e B são matrizes comutáveis e B é uma matriz invertível, então $AB^{-1}=B^{-1}A$.

1.10exe Sejam A e B matrizes comutáveis e invertíveis. Então, mostre que $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$.

$\boxed{1.11\text{exe}}$ Uma matriz real e quadrada A diz-se anti-simétrica se $A^T = -A$. Mostre que, dada qualquer matriz real e quadrada B, a matriz $B - B^T$ é anti-simétrica.

$\boxed{1.12\text{exe}}$ Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais ainda é uma matriz ortogonal.

$\boxed{1.13\text{exe}}$ Seja A uma matriz quadrada tal que $A^p = \underline{0}$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Então, mostre que $(I - A)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{p-1} A^k$.

$\boxed{1.14\text{exe}}$ Determine, para cada uma das seguintes matrizes, uma matriz equivalente que seja uma matriz em escada e a matriz equivalente que seja uma matriz em escada reduzida.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

(g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(h) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$\boxed{1.15\text{exe}}$ Calcule, se possível, as matrizes inversas das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{1.16exe}}$ Sabendo que as matrizes $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis, resolva em ordem a X a equação matricial $C^{-1}(A + X)B^{-1} = I_n$.

1.3 Soluções dos Exercícios sobre Matrizes

$\boxed{1.1\text{sol}}$ (a) $A_{2\times 3}$, $c_{3\times 1}$, $D_{3\times 2}$, $E_{1\times 4}$.

(b) B — ordem 2, F — ordem 2, g — ordem 1, H — ordem 2.

(c) e, g.

(d) c, g.

(e) B, g, H.

(f) g, H.

(g) B, F, g, H.

(h) B, g, H.

$\boxed{1.2\text{sol}}$ (a) $A + 2B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) a expressão $A - C$ não está bem definida.

(c) a expressão AC não está bem definida.

(d) $CA = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(e) $C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(f) $\dfrac{AB^T + BA^T}{2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(g) $(CBA^TC)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(h) $uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) $u^Tu = [\,5\,]$.

(j) $u^TA^TBu = [\,-2\,]$.

$\boxed{1.3\text{sol}}$ $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

$\boxed{1.4\text{sol}}$ A e C.

$\boxed{1.5\text{sol}}$ $a = 1$, $b = -2i$, $c \in \mathbb{R}$.

$\boxed{1.7\text{sol}}$ $\overline{D}D^H DD^T = \begin{bmatrix} 29 & -20i \\ 20i & 29 \end{bmatrix}$.

$\boxed{1.14\text{sol}}$ Nota: associada a cada matriz não-nula, existe uma infinidade de matrizes que lhe são equivalentes e que estão na forma em escada. As soluções que a seguir se apresentam, resultam da aplicação do algoritmo apresentado em $\boxed{1.79\text{obs}}$.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(A), \text{fer}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(B), \text{fer}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \text{fe}(C), \text{fer}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \in \text{fe}(D), \text{fer}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(E), \text{fer}(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \in \text{fe}(F), \text{fer}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

(g) $G \in \text{fe}(G), \text{fer}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(h) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(x), \text{fer}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{1.15\text{sol}}$ (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

(b) A matriz B é singular.

(c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{1.16\text{sol}}$ $X = CB - A$.

Capítulo 2

Determinantes

2.1 Apontamentos sobre Determinantes

2.1def ⟦matriz complementar de um elemento de uma matriz⟧ Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\xi, \eta \in \{1, \ldots, n\}$. Chama-se matriz complementar do elemento $a_{\xi\eta}$, que se representa por $\widetilde{A}_{\xi\eta}$, a

$$\widetilde{A}_{\xi\eta} = \begin{cases} [1] & \text{se} \quad n = 1, \\ \text{matriz que se obtém a partir da matriz } A \text{ eliminando } \ell_\xi \text{ e } c_\eta & \text{se} \quad n > 1. \end{cases}$$

2.2exe Seja a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Determine a matriz complementar do elemento $(A)_{12}$.

(b) Determine $\widetilde{A}_{33}$.

res (a) $\widetilde{A}_{12} = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) $\widetilde{A}_{33} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

2.3def ⟦determinante de uma matriz⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se determinante da matriz A, que se representa por $\det(A)$, $|A|$ ou

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

ao escalar definido recursivamente por

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & se \quad n = 1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(\widetilde{A}_{1j}) & se \quad n > 1. \end{cases}$$

2.4obs Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{K})$. Note-se que quando se escreve $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$, $|\cdot|$ não representa o valor absoluto mas sim o determinante. O contexto será sempre suficiente para interpretar o significado correcto de $|\cdot|$.

2.5exe Seja $X = \left[\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

(a) Determine $\widetilde{X}_{11}$ e $\widetilde{X}_{12}$.

(b) Calcule $|X|$.

res (a) $\widetilde{X}_{11} = [\, x_{22} \,]$ e $\widetilde{X}_{12} = [\, x_{21} \,]$.

(b)

$$
\begin{aligned}
\det(X) &= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{2} x_{1j}(-1)^{1+j} \det(\widetilde{X}_{1j}) \\
&= x_{11}(-1)^{1+1} \det(\widetilde{X}_{11}) + x_{12}(-1)^{1+2} \det(\widetilde{X}_{12}) \\
&= x_{11} \times 1 \times x_{22} + x_{12} \times (-1) \times x_{21} \\
&= x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{2.6obs}}$ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Então, $\det(A)$ pode-se calcular atendendo a

$$
\begin{array}{cc}
+ & + \\
\\
\begin{tikzcd} a_{11} \arrow[dr] & a_{12} \arrow[dl] \\ a_{21} & a_{22} \end{tikzcd}
\end{array}
$$

tendo-se

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$\boxed{\text{2.7exe}}$ Determine $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right|$.

$\boxed{\text{res}}$ $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right| = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

$\boxed{\text{2.8exe}}$ Seja $Y = [y_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$. Calcule $|Y|$.

$\boxed{\text{res}}$ Seja $Y = \left[\begin{smallmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{smallmatrix}\right]$. Então,

$$
\begin{aligned}
\det(Y) &= \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{3} y_{1j}(-1)^{1+j}\det(\widetilde{Y}_{1j}) \\
&= y_{11}(-1)^{1+1}\det(\widetilde{Y}_{11}) \\
&\quad + y_{12}(-1)^{1+2}\det(\widetilde{Y}_{12}) \\
&\quad + y_{13}(-1)^{1+3}\det(\widetilde{Y}_{13}) \\
&= y_{11} \times 1 \times \begin{vmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + y_{12} \times (-1) \times \begin{vmatrix} y_{21} & y_{23} \\ y_{31} & y_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + y_{13} \times 1 \times \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{vmatrix} \\
&= y_{11}(y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32}) \\
&\quad - y_{12}(y_{21}y_{33} - y_{23}y_{31}) \\
&\quad + y_{13}(y_{21}y_{32} - y_{22}y_{31}) \\
&= y_{11}y_{22}y_{33} + y_{12}y_{23}y_{31} + y_{13}y_{21}y_{32} \\
&\quad - y_{11}y_{23}y_{32} - y_{12}y_{21}y_{33} - y_{13}y_{22}y_{31}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{2.9obs}}$ "Regra de Sarrus" (apenas se aplica a matrizes de ordem 3): seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$. Então, $\det(A)$ pode-se calcular atendendo a

$$\begin{tikzcd}
+ & a_{11} \arrow[dr] & a_{12} & a_{13} \arrow[dl] & - \\
+ & a_{21} \arrow[dr] & a_{22} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{23} \arrow[dl] & - \\
+ & a_{31} \arrow[dr] & a_{32} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{33} \arrow[dl] & - \\
 & a_{11} & a_{12} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{13} & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} &
\end{tikzcd}$$

tem-se que

$$\begin{aligned}\det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21},\end{aligned}$$

ou, atendendo a

$$\begin{tikzcd}
+ & + & + & & \\
a_{11} \arrow[dr] & a_{12} \arrow[dr] & a_{13} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{11} \arrow[dl] & a_{12} \arrow[dl] \\
a_{21} & a_{22} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{23} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{21} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{tikzcd}$$

tem-se que

$$\begin{aligned}\det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

2.10exe Seja $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$.

res Atendendo a

$$\begin{array}{ccc} 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \det(A) &= 9 \times 4 \times 8 + 3 \times 7 \times 2 + 6 \times 1 \times 5 \\ &\quad - 2 \times 4 \times 6 - 5 \times 7 \times 9 - 8 \times 1 \times 3 = -27, \end{aligned}$$

ou atendendo a

$$\begin{array}{ccccc} 9 & 1 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 6 & 7 \end{array}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \det(A) &= 9 \times 4 \times 8 + 1 \times 5 \times 6 + 2 \times 3 \times 4 \\ &\quad - 2 \times 4 \times 6 - 9 \times 5 \times 7 - 1 \times 3 \times 8 = -27. \end{aligned}$$

2.11def [[co-factor de um elemento de uma matriz ou complemento algébrico de um elemento de uma matriz]] Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se co-factor ou complemento algébrico do elemento a_{ij}, que se representa por A_{ij}, a $(-1)^{i+j}\det(\widetilde{A}_{ij})$.

2.12exe Seja a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -4 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Determine o co-factor do elemento a_{11}.

(b) Determine o complemento algébrico do elemento a_{12}.

(c) Determine A_{21}.

(d) Determine A_{22}.

res (a) $A_{11} = (-1)^{1+1}\det(\widetilde{A}_{11}) = 1 \times |-4| = -4$.

(b) $A_{12} = (-1)^{1+2}\det(\widetilde{A}_{12}) = -1 \times |3| = -3$.

(c) $A_{21} = (-1)^{2+1}\det(\widetilde{A}_{21}) = -1 \times |-2| = 2$.

(d) $A_{22} = (-1)^{2+2}\det(\widetilde{A}_{22}) = 1 \times |-5| = -5$.

2.13teo (Teorema de Laplace) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Então,

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(A)_{\xi j}A_{\xi j}}_{\substack{\text{desenvolvimento} \\ \text{através da linha } \xi, \\ \forall \xi \in \{1,2,\ldots,n\}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(A)_{i\eta}A_{i\eta}}_{\substack{\text{desenvolvimento} \\ \text{através da coluna } \eta, \\ \forall \eta \in \{1,2,\ldots,n\}}}.$$

2.14obs (a) Notar que a definição 2.3def consiste no cálculo do determinante através do desenvolvimento segundo a primeira linha.

(b) Como regra prática para calcular determinantes através do teorema de Laplace, deve-se fazer o desenvolvimento a partir da linha ou coluna que tiver mais zeros.

$\boxed{2.15\text{teo}}$ Sejam $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então,

(a) se A for uma matriz diagonal ou triangular (inferior ou superior): $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(b) Se todos os elementos de uma linha A são nulos: $\det(A) = 0$.

(c) Se A tem duas linhas iguais: $\det(A) = 0$.

(d) Se B resulta de A por troca de duas linhas (operação elementar do tipo I): $\det(B) = -\det(A)$.

(e) Se B resulta de A por multiplicação dos elementos de uma linha de A por α (operação elementar do tipo II): $\det(B) = \alpha \det(A)$.

(f) Se B resulta de A adicionando a uma linha um múltiplo de outra linha (operação elementar do tipo III): $\det(B) = \det(A)$.

(g) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

(h) $\det(A^T) = \det(A)$.

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(j) A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$.

(k) Se A é uma matriz invertível, então, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

$\boxed{2.16\text{obs}}$ (a) $\det(I) = 1$.

(b) Todas as propriedades do teorema anterior que se referem a linhas também são aplicáveis a colunas.

(c) Sejam $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que $B \in \text{fe}(A)$ e que se obteve a partir da matriz A através das operações elementares do tipo I e II (por exemplo, por aplicação do algoritmo apresentado em $\boxed{1.79\text{obs}}$). Então, $\det(A) = (-1)^s \prod_{i=1}^{n} b_{ii}$, em que s é o número de trocas de linhas realizadas.

2.17exe Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K}) \text{ tal que } P \text{ é uma matriz invertível.}$$

Usando as propriedades dos determinantes, calcule:

(a) $\det(A)$.

(b) $\det(B)$.

(c) $\det(C)$.

(d) $\det(D)$.

(e) $\det(-2A)$.

(f) $-2\det(A)$.

(g) $\det(A^3)$.

(h) $\det(2A^T AA^T)$.

(i) $\det(A^T A^{-1} B^T)$.

(j) $\det(A^{-1}DA)$.

(k) $\det(ABCD)$.

(l) $\det(P^{-1}AP)$.

res

(a) Sendo A uma matriz triangular (superior), tem-se que $\det(A) = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

(b) Sendo $\ell_{1,B} = \ell_{2,B}$, tem-se que $\det(B) = 0$.

(c) Sendo $\ell_{2,C}$ uma linha nula, tem-se que $\det(C) = 0$.

(d) Sendo D uma matriz diagonal, tem-se que $\det(D) = (-1) \times 1 = -1$.

(e) $\det(-2A) = (-2)^3 \det(A) = -8 \times 6 = -48$.

(f) $-2\det(A) = -2 \times 6 = -12$.

(g) $\det(A^3) = (\det(A))^3 = 6^3 = 216$.

(h) $\det(2A^TAA^T) = \det(2A^T)\det(A)\det(A^T) = \det(2A)\det(A)\det(A) = 2^3 \times 6 \times 6 \times 6 = 1728$.

(i) $\det(A^TA^{-1}B^T) = \det(A^T)\det(A^{-1})\det(B^T) = \det(A)\frac{1}{\det(A)}\det(B) = \det(B) = 0$.

(j) $\det(A^{-1}DA) = \det(A^{-1})\det(D)\det(A) = \frac{1}{\det(A)}\det(D)\det(A) = \det(D) = -1$.

(k) $\det(ABCD) = \det(A)\det(B)\det(C)\det(D) = 6 \times 0 \times 0 \times (-1) = 0$.

(l) $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A) = 6$.

2.18exe Considere as matrizes A, B, C e D do exercíco anterior. Indique as que são invertíveis.

res As matrizes A e D são invertíveis pois os seus determinantes são diferentes de zero.

2.19exe Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $\det(A)$ através da definição (podendo usar qualquer processo para calcular determinantes de matrizes de ordem 3).

(b) Calcule $\det(A)$ por aplicação do teorema de Laplace através do desenvolvimento a partir da terceira coluna (podendo usar qualquer processo para calcular determinantes de matrizes de ordem 3).

(c) Calcule $\det(A)$ através de 2.16obs (c).

res (a)

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{4}(A)_{1j}(-1)^{1+j}\det(\widetilde{A}_{1j})\\ &= (A)_{11}(-1)^{1+1}\det(\widetilde{A}_{11}) + (A)_{12}(-1)^{1+2}\det(\widetilde{A}_{12})\\ &\quad + (A)_{13}(-1)^{1+3}\det(\widetilde{A}_{13}) + (A)_{14}(-1)^{1+4}\det(\widetilde{A}_{14})\\ &= 0 + 1\times(-1)\times\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} + 0 + 2\times(-1)\times\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}\\ &= 0 + 1\times(-1)\times 10 + 0 + 2\times(-1)\times 2\\ &= -14.\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

$\left|\begin{smallmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{smallmatrix}\right| = 1\times(0\times1-3\times0)-2\times(1\times1-3\times2)+0\times(1\times0-0\times2) = 10.$

$\left|\begin{smallmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{smallmatrix}\right| = 1\times(0\times0-0\times1)-1\times(1\times0-0\times2)+2\times(1\times1-0\times2) = 2.$

(b)

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^{4}(A)_{i3}(-1)^{i+3}\det(\widetilde{A}_{i3})\\ &= (A)_{13}(-1)^{1+3}\det(\widetilde{A}_{13}) + (A)_{23}(-1)^{2+3}\det(\widetilde{A}_{23})\\ &\quad + (A)_{33}(-1)^{3+3}\det(\widetilde{A}_{33}) + (A)_{43}(-1)^{4+3}\det(\widetilde{A}_{43})\\ &= 0 + 2\times(-1)\times\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix} + 0 + 0\\ &= 2\times(-1)\times 7\\ &= -14.\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\times(0\times1-3\times1)-1\times(1\times1-3\times2)+2\times(1\times1-0\times2) = 7.$

(c)

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} && \ell_1 \leftrightarrow \ell_2 \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} && \begin{matrix} \\ \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - 2\ell_1 \end{matrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} && \begin{matrix} \\ \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + \ell_2 \end{matrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} && \begin{matrix} \\ \\ \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - 2\ell_3 \end{matrix} \\
&= -(1 \times 1 \times (-2) \times (-7)) \\
&= -14.
\end{aligned}$$

2.20obs Pedindo-se o determinante de uma matriz, se não for explicitado no enunciado o processo de cálculo, este pode ser feito por um método qualquer, nomeadamente aquele que se achar mais simples.

2.21def ⟦matriz adjunta⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se matriz adjunta de A à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $z_{ij} = A_{ji}$, escrevendo-se $Z = \operatorname{adj}(A)$.

2.22obs A matriz adjunta é a transposta da matriz dos co-factores.

2.23exe (a) Determine a matriz adjunta da matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -4 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) Determine a matriz adjunta da matriz $X = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$.

res (a) Atendendo a 2.12exe, tem-se que $\operatorname{adj}(A) = \left[\begin{smallmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -5 \end{smallmatrix}\right]^T = \left[\begin{smallmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -5 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) Atendendo a

$X_{11} = (-1)^{1+1} \det(\widetilde{X}_{11}) = 1 \times |d| = d$,

$X_{12} = (-1)^{1+2} \det(\widetilde{X}_{12}) = -1 \times |c| = -c$,

$X_{21} = (-1)^{2+1} \det(\widetilde{X}_{21}) = -1 \times |b| = -b$,

$X_{22} = (-1)^{2+2} \det(\widetilde{X}_{22}) = 1 \times |a| = a$,

tem-se que $\operatorname{adj}(X) = \left[\begin{smallmatrix} d & -c \\ -b & a \end{smallmatrix}\right]^T = \left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$.

2.24teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. Então, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$.

2.25exe Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Verifique que a matriz A é invertível.

(b) Determine a inversa da matriz A pelo método da adjunta.

res (a) Como $\det(A) = 3 \times 0 - (-2) \times 1 = 2 \neq 0$, A é uma matriz invertível.

(b) $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 3/2 \end{smallmatrix}\right]$.

Calcule-se, apenas para efeito de verificação, que $AA^{-1} = I_2$:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2 Exercícios sobre Determinantes

2.1exe Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ por dois processos distintos.

2.2exe Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3exe Sejam A uma matriz quadrada tal que $|A| = 2$ e $B = 2A^T$. Mostre que a proposição "A matriz B é invertível." é verdadeira.

2.4exe Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $\det(A)$.

(b) Determine $\operatorname{adj}(A)$.

(c) Determine A^{-1} pelo método da adjunta.

2.5exe Sejam $p \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada tal que $A^p = \underline{0}$. Mostre que A é uma matriz singular.

2.6exe Seja A uma matriz ortogonal. Mostre que $\det(A) = \pm 1$.

2.7exe Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $a_{ij} = 1$. Mostre que $\det(A - nI_n) = 0$.

$\boxed{\text{2.8exe}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Mostre que $|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}$.

(b) Mostre que se A é uma matriz invertível e $n \geqslant 2$, então $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = |A|^{n-2}A$.

2.3 Soluções dos Exercícios sobre Determinantes

$\boxed{2.1\text{sol}}$ $\det(A) = -1$.

$\boxed{2.2\text{sol}}$ $\det(A) = 15$, $\det(B) = 1$, $\det(C) = 0$, $\det(D) = 0$, $\det(E) = 1$, $\det(F) = 2$.

$\boxed{2.4\text{sol}}$

(a) $\det(A) = 1$.

(b) $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Capítulo 3

Sistemas de Equações Lineares

3.1 Apontamentos sobre Sistemas de Equações Lineares

3.1def ⟦sistema de equações lineares, matriz dos coeficientes, vector dos termos independentes, vector das incógnitas, matriz aumentada ou matriz ampliada, conjunto solução⟧ Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $b = [b_i] \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Diz-se que (S) é um sistema de m equações lineares nas n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ com matriz dos coeficientes A e vector dos termos independentes b se (S) é o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

Chama-se vector das incógnitas do sistema (S) à matriz coluna $x = [x_i] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Chama-se matriz aumentada ou matriz ampliada do sistema (S), que se representa por $A|b$, à matriz

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Chama-se conjunto solução do sistema (S), que se representa por $\mathrm{CS}_{(S)}$, ao conjunto

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n | A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b\}.$$

3.2obs Note-se que o sistema (S) da definição anterior pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ou, em notação matricial, como $Ax = b$.

3.3def ⟦sistema de equações não lineares⟧ Chama-se sistema de equações não lineares a um sistema de equações que não é um sistema de equações lineares.

3.4exe
(a) Dê um exemplo de um sistema de duas equações lineares a três incógnitas.
(b) Dê um exemplo de um sistema de duas equações não lineares a duas incógnitas.

res (a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 0. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + x\,\mathrm{sen}(y) = 1 \\ x - e^y = 0. \end{cases}$

3.5def Seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$.

(a) ⟦sistema homogéneo⟧ Diz-se que (S) é um sistema homogéneo se $b = \underline{0}$.

(b) ⟦sistema homogéneo associado⟧ Se $b \neq \underline{0}$, chama-se sistema homogéneo associado ao sistema (S) ao sistema $Ax = \underline{0}$.

3.6exe (a) Dê um exemplo de um sistema homogéneo de duas equações a três incógnitas.

(b) Identifique o sistema homogéneo associado ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 0. \end{cases}$$

res (a) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0. \end{cases}$

3.7def Seja (S) um sistema de equações lineares.

(a) ⟦sistema possível⟧ Diz-se que (S) é um sistema possível se $CS_{(S)} \neq \emptyset$.

(b) ⟦sistema possível e determinado⟧ Diz-se que (S) é um sistema possível e determinado se $\#CS_{(S)} = 1$.

(c) ⟦sistema possível e indeterminado⟧ Diz-se que (S) é um sistema possível e indeterminado se $\#CS_{(S)} > 1$.

(d) ⟦sistema impossível⟧ Diz-se que (S) é um sistema impossível se $CS_{(S)} = \emptyset$.

3.8def ⟦característica de uma matriz⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se característica da matriz A, que se representa por $c(A)$, ao número de linhas não nulas de uma matriz em escada que seja equivalente à matriz A.

3.9teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Então, A é uma matriz invertível se e só se $c(A) = n$.

3.10teo Seja (S) o sistema de equações lineares de m equações nas n incógnitas $Ax = b$. Então,

$$\begin{cases} c(A) = c(A|b) & : \text{sistema possível} \\ c(A) = c(A|b) = n & : \text{sistema possível e determinado} \\ c(A) = c(A|b) < n & : \text{sistema possível e indeterminado} \\ c(A) < c(A|b) & : \text{sistema impossível.} \end{cases}$$

3.11obs Seja (S) o sistema de equações lineares de m equações nas n incógnitas $Ax = b$. Então, se $n > m$ o sistema não pode ser possível e determinado.

3.12def ⟦variável pivô, variável livre⟧ Sejam $Ax = b$ um sistema de equações lineares e $A' \in \text{fe}(A)$. Se $c_{j,A'}$ é uma coluna pivô, diz-se que x_j é uma variável pivô. Caso contrário, diz-se que é uma variável livre.

$\boxed{3.13\text{exe}}$ Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Determine um elemento de $\mathrm{fe}(A|b)$.

(b) Identifique as colunas pivô do sistema (S).

(c) Identifique as variáveis pivô do sistema (S).

(d) Identifique as variáveis livres do sistema (S).

$\boxed{\text{res}}$ (a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right]}_{\in \mathrm{fe}(A|b)}.$$

(b) Colunas pivô de (S): c_1 e c_3.

(c) Variáveis pivô de (S): x_1 e x_3.

(d) Variáveis livres de (S) x_2 e x_4.

$\boxed{3.14\text{teo}}$ Método de Gauss para a resolução de sistemas de equações lineares: seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$. Então, o seguinte algoritmo determina $CS_{(S)}$:

Passo 1 determinar um elemento de $\mathrm{fe}(A|b)$.

Passo 2 identificar as variáveis livres.

Passo 3 aplicar método de substituição de trás para a frente.

$\boxed{3.15\text{teo}}$ Método de Gauss-Jordan para a resolução de sistemas de equações lineares: seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$. Então, o seguinte algoritmo determina $CS_{(S)}$:

Passo 1 determinar fer$(A|b)$.

Passo 2 identificar as variáveis livres.

Passo 3 aplicar método de substituição de trás para a frente.

3.16exe

(a) Dê um exemplo de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas possível e determinado, resolva-o através do Método de Gauss e faça a sua interpretação geométrica.

(b) Dê um exemplo de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas possível e indeterminado, resolva-o através do Método de Gauss e faça a sua interpretação geométrica.

(c) Dê um exemplo de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas impossível, resolva-o através do Método de Gauss e faça a sua interpretação geométrica.

res

(a) Seja (S_1) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, *i.e.*,

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Resolução de (S_1) através do método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

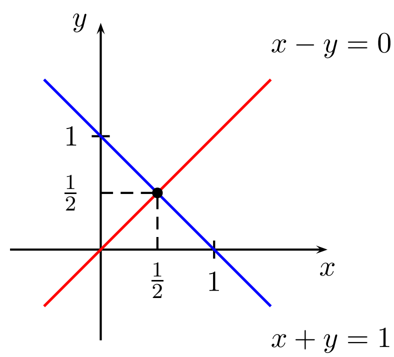
Como $c(A) = 2$, $c(A|b) = 2$ e $n = 2$ (número de incógnitas) — $c(A) = c(A|b) = n$ —, (S_1) é um sistema possível e determinado equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x & + & y & = & 1 \\ & - & 2y & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ou seja,

$$CS_{(S_1)} = \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}.$$

$CS_{(S_1)}$ pode ser geometricamente interpretado como sendo os pontos de intersecção das rectas $x + y = 1$ e $x - y = 0$ (que neste caso é um só):



(b) Seja (S_2) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$, *i.e.*,

$$(S_2) \quad \begin{cases} x & + & y & = & 1 \\ -2x & - & 2y & = & -2. \end{cases}$$

Resolução de (S_2) através do método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $c(A) = 1$, $c(A|b) = 1$ e $n = 2$ (número de incógnitas) — $c(A) = c(A|b) < n$ —, (S_2) é um sistema possível e indeterminado equivalente ao sistema de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ & & 0 & = & 0. \end{array}\right.$$

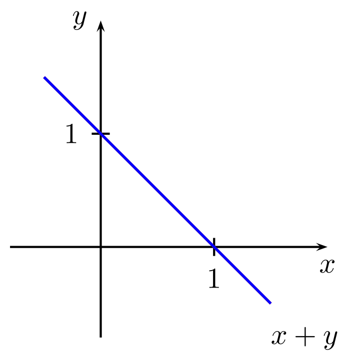
Sendo y uma variável livre, tem-se

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - \alpha \\ y = \alpha \in \mathbb{K} \end{array}\right.$$

ou seja,

$$CS_{(S_2)} = \{(1 - \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

$CS_{(S_2)}$ pode ser geometricamente interpretado como sendo os pontos de intersecção das rectas $x + y = 1$ e $-2x - 2y = -2$ (que neste caso são uma infinidade):



$x + y = 1 \equiv -2x - 2y = -2$

(c) Seja (S_3) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$, *i.e.*,

$$(S_3) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2. \end{array} \right.$$

Resolução de (S_3) através do método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

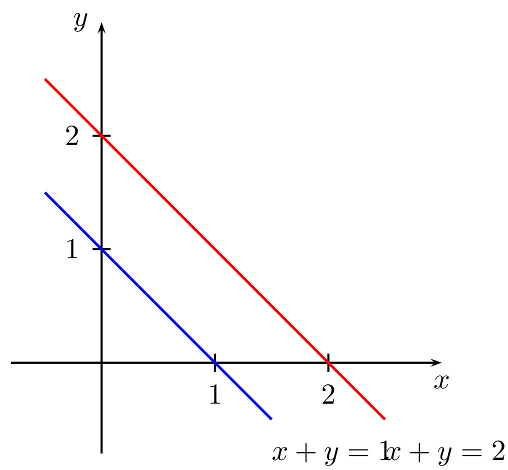
Como $c(A) = 1$ e $c(A|b) = 2$ — $c(A) < c(A|b)$ —, (S_3) é um sistema impossível equivalente ao sistema de equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ & & 0 & = & 1 \end{array} \right.$$

tendo-se

$$CS_{(S_3)} = \emptyset.$$

$CS_{(S_3)}$ pode ser geometricamente interpretado como sendo os pontos de intersecção das rectas $x+y=1$ e $x+y=2$ (que neste caso não existem):



$\boxed{\text{3.17exe}}$ Considere os sistemas de equações lineares

$$(S_1)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3, \end{array}\right.$$

$$(S_2)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 2. \end{array}\right.$$

(a) Resolva (S_1) através do métodos de Gauss.

(b) Resolva (S_1) através do métodos de Gauss-Jordon.

(c) Resolva (S_2) através do métodos de Gauss.

(d) Resolva (S_2) através do métodos de Gauss-Jordon.

$\boxed{\text{res}}$ (a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{1}{2}\ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Assim, (S_1) é um sistema equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 3z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1-1+1}{1} = 1 \\ y = \frac{0+2\times 1}{2} = 1 \\ z = \frac{3}{3} = 1 \end{array}\right.$$

ou seja,

$$CS_{(S_1)} = \{(1,1,1)\}.$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{1}{2}\ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\ell_3 \leftarrow \frac{1}{3}\ell_3}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{\ell_1 \leftarrow \ell_1 + \ell_3 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 + 2\ell_3}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, (S_1) é um sistema equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$CS_{(S_1)} = \{(1, 1, 1)\}.$$

(c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Assim, (S_2) é um sistema equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & & & = & 1. \end{array}\right.$$

Sendo z uma variável livre, tem-se

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - (-1) - \alpha = 2 - \alpha \\ y = -1 \\ z = \alpha \in \mathbb{K} \end{array}\right.$$

ou seja,

$$CS_{(S_2)} = \{(2 - \alpha, -1, \alpha)\}.$$

(d)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$\xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow -\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Assim, (S_2) é um sistema equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & & & = & -1. \end{array}\right.$$

Sendo z uma variável livre, tem-se

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - (-1) - \alpha = 2 - \alpha \\ y = -1 \\ z = \alpha \in \mathbb{K} \end{array}\right.$$

ou seja,

$$CS_{(S_2)} = \{(2-\alpha, -1, \alpha)\}.$$

$\boxed{3.18\text{exe}}$ Discuta o seguinte sistema de equações lineares em função dos parâmetros reais α e β:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = \beta \\ 2x_1 + (\alpha+2)x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ (\alpha+1)x_1 + 2x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{res}}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & \beta \\ 2 & \alpha+2 & 2 & -1 & 0 \\ \alpha+1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longleftarrow\!\!\longrightarrow \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - (\alpha+1)\ell_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & -1-\alpha & \alpha & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longleftarrow\!\!\longrightarrow \\ \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \frac{\alpha}{2}\ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + \frac{1-\alpha}{2}\ell_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & \frac{\alpha\beta}{2} \\ 0 & 0 & -1-\alpha & 1 & \frac{(1-\alpha)\beta}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} \longleftarrow\!\!\longrightarrow \\ \\ \\ \ell_3 \leftrightarrow \ell_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & -1-\alpha & 1 & \frac{(1-\alpha)\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & \frac{\alpha\beta}{2} \end{array}\right]$$

$\alpha = 1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{2} \end{array}\right]$$

- $\alpha \neq -1$: $c(A) = 4$, $c(A|b) = 4$ e $n = 4$ (número de incógnitas) — $c(A) = c(A|b) = n$ —, pelo que o sistema é possível e determinado.
- $\alpha = -1$ e $\beta = 0$: $c(A) = 3$, $c(A|b) = 3$ e $n = 4$ (número de incógnitas) — $c(A) = c(A|b) < n$ —, pelo que o sistema é possível e indeterminado.
- $\alpha = -1$ e $\beta \neq 0$: $c(A) = 3$ e $c(A|b) = 4$ — $c(A) < c(A|b)$ —, pelo que o sistema é impossível.

3.19teo (Regra de Cramer) Seja $Ax = b$ um sistema de n equações lineares a n incógnitas possível e determinado. Então, $x = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)\,b$, *i.e.*, $x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}, i = 1, \ldots, n$, em que Δ_i é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A, na qual se substitui a i-ésima coluna pelo vector dos termos independentes, b.

3.20exe Seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$, com $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{smallmatrix}\right]$ e $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Mostre que (S) é um sistema possível e determinado.

(b) Determine o conjunto solução de (S) através da Regra de Cramer.

res

(a) Como $\det(A) = 1 \times 6 - 2 \times (-3) = 12 \neq 0$, $c(A) = 2$, $c(A|b) = 2$ e $n = 2$ (número de incógnitas) — $c(A) = c(A|b) = n$ —, pelo que (S) é um sistema possível e determinado.

(b)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{5}{12}.$$

Assim, $CS_{(S)} = \{(\frac{1}{6}, \frac{5}{12})\}$.

3.2 Exercícios sobre Sistemas de Equações Lineares

3.1exe Classifique quanto ao número de soluções e determine o conjunto solução dos seguintes sistemas de equações lineares:

(a) (S_a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_2 = 6. \end{cases}$

(b) (S_b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 0x_2 = 2. \end{cases}$

(c) (S_c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_2 + 5x_3 = 23. \end{cases}$

(d) (S_d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$

3.2exe Resolva pelo método de Gauss, pelo método de Gauss-Jordan e pela regra de Cramer os seguintes sistemas de equações lineares:

$$(S_a) \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x - y + z - w = 5 \\ y - w = 0 \\ x - w = 2. \end{cases}$$

$$(S_b) \begin{cases} x + y + z + 2w = 1 \\ 2x - y + z - w = -1 \\ y + 3w = 1 \\ 2x - 2y + 2z - w = -2. \end{cases}$$

$\boxed{3.3\text{exe}}$ Considere os seguintes sistemas de equações lineares:

$$(S_a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$(S_b) \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$(S_c) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$(S_d) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Responda às seguintes questões para cada um destes sistemas de equações lineares:

(a) identifique a matriz dos coeficientes A, o vector dos termos independentes b, o vector das incógnitas x e a matriz ampliada $A|b$.

(b) Classifique o sistema quanto ao número de soluções e determine o seu conjunto solução.

(c) Classifique o sistema homogéneo associado quanto ao número de soluções e determine o seu conjunto solução.

$\boxed{3.4\text{exe}}$ Dê exemplos de sistemas de m equações lineares a n incógnitas possíveis e determinados, possíveis e indeterminados e impossíveis para $m > n$, $m = n$ e $m < n$, sempre que tal seja possível.

3.5exe Discuta os seguintes sistemas de equações lineares $Ax = b$ em função dos respectivos parâmetros reais:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & k & -1 \\ 1 & 2 & k \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & c \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{bmatrix}$.

3.6exe Determine, por dois processos distintos, para que valores de α a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ é invertível.

3.7exe Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule A^{-1}.

(b) Mostre que o sistema $Ax = b$ é possível e determinado, qualquer que seja o vector dos termos independentes $b \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{K})$.

(c) Usando a alínea (a), resolva o sistema $Ax = b$, em que $b = [b_i] \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{K})$, $b_i = i$.

3.8exe Considere o seguinte sistema não linear nas incógnitas α, β e γ.

$$\begin{cases} 2\operatorname{sen}\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\operatorname{sen}\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 10 \\ 6\operatorname{sen}\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9. \end{cases}$$

Mostre que, neste caso, é possível concluir que o sistema é impossível recorrendo ao método de Gauss.

3.9exe Determine a equação da parábola que passa nos pontos $(1, 2)$, $(-1, 6)$ e $(2, 3)$.

3.3 Soluções dos Exercícios sobre Sistemas de Equações Lineares

3.1sol

(a) PD. $\mathrm{CS}_{(S_a)} = \{(1,2)\}$.

(b) Imp. $\mathrm{CS}_{(S_b)} = \emptyset$.

(c) PI. $\mathrm{CS}_{(S_c)} = \{(\frac{5-\alpha}{2}, \frac{23-5\alpha}{4}, \alpha) | \alpha \in \mathbb{K}\}$.

(d) PI. $\mathrm{CS}_{(S_d)} = \{(-s, 1-t, s, t) | t, s \in \mathbb{K}\}$.

3.2sol

(a) $\mathrm{CS}_{(S_a)} = \{(1,-1,1,-1)\}$.

(b) $\mathrm{CS}_{(S_b)} = \{(0,1,0,0)\}$.

3.3sol

(S_1) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A|b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) PD. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(1,1,1)\}$.

(c) PD. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(0,0,0)\}$.

(S_2) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A|b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(2-t, t, t) | t \in \mathbb{K}\}$.

(c) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(-t, t, t) | t \in \mathbb{K}\}$.

(S_3) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A|b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Imp. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \emptyset$.

(c) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(-s, s, 0) | s \in \mathbb{K}\}$.

(S_4) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A|b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(1+s-t, s, t) | s, t \in \mathbb{K}\}$.

(c) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(s-t, s, t) | s, t \in \mathbb{K}\}$.

3.5sol

(a) PD: $\alpha \neq 3$. PI: $\alpha = 3$. Imp: nunca.

(b) PD: $k \neq 2 \wedge k \neq -5$. PI: $k = 2$. Imp: $k = -5$.

(c) PD: nunca. PI: $c \neq 3 \vee t = 3$. Imp: $c = 3 \wedge t \neq 3$.

(d) PD: nunca. PI: $a \neq -1 \vee t = -1$. Imp: $a = -1 \wedge t \neq -1$.

$\boxed{\text{3.6sol}}$ $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{-2, 1\}$.

$\boxed{\text{3.7sol}}$ (a) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(0, 1, 2)\}$.

$\boxed{\text{3.9sol}}$ $x^2 - 2x + 3$.

Capítulo 4

Espaços Vectoriais

4.1 Apontamentos sobre Espaços Vectoriais

4.1obs Apresenta-se na definição que se segue a generalização da noção de "vector" entendido como uma entidade com um tamanho e uma direcção. O estudo genérico de um espaço vectorial permite-nos estabelecer propriedades válidas para um conjunto alargado de entidades matemáticas.

4.2def ⟦espaço vectorial⟧ Sejam V um conjunto não vazio e as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (x,y) & \longmapsto & x \oplus y, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot: & \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ & (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha \odot x. \end{array}$$

Diz-se que o sêxtuplo $(V, \oplus, \odot, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é um espaço vectorial se:

(a) $\forall x, y \in V : x \oplus y = y \oplus x$.

(b) $\forall x, y, z \in V : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

(c) $\exists^1$ elemento de V (representado por 0_V), $\forall x \in V : x \oplus 0_V = x$.

(d) $\forall x \in V, \exists^1$ elemento de V (representado por $-x$) : $x \oplus (-x) = 0_V$.

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$.

(g) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V : (\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$.

(h) $\forall x \in V : 1 \odot x = x$.

4.3def Seja o espaço vectorial definido por $(V, \oplus, \odot, \mathbb{K}, +, \cdot)$.

(a) ⟦escalar⟧ Chama-se escalares aos elementos de $\mathbb{K}$.

(b) ⟦vector⟧ Chama-se vectores aos elementos de V.

(c) ⟦soma de vectores⟧ Chama-se soma de vectores à operação $\oplus$. ⟦multiplicação de um escalar por um vector⟧ Chama-se multiplicação de um escalar por um vector à operação $\odot$.

(d) ⟦espaço vectorial real⟧ Diz-se que V é um espaço vectorial real se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(e) ⟦espaço vectorial complexo⟧ Diz-se que V é um espaço vectorial complexo se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4.4obs (a) Para simplificar a linguagem, em vez de "seja o espaço vectorial definido por $(V, \oplus, \odot, \mathbb{K}, +, \cdot)$" diz-se "seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$" quando as operações de soma de vectores e de multiplicação de um escalar por um vector estiverem subentendidas.

(b) Se não causar confusão, em vez de $x \oplus y$ escreve-se $x + y$, em vez de $x \oplus (-y)$ escreve-se $x - y$ e em vez de $\alpha \odot x$ escreve-se αx.

4.5obs Na definição que se segue, relembram-se ou introduzem-se conjuntos e as respectivas operações usuais, que serão usados na apresentação de exemplos de espaços vectoriais.

4.6def (a) ⟦$\mathbb{K}^n$⟧ Seja $n \in \mathbb{N}$. Representa-se por $\mathbb{K}^n$ o conjunto dos n-tuplos com elementos em $\mathbb{K}$, *i.e.*,

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\}.$$

As operações usuais neste conjunto são:

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ &\qquad (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\ &\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

(b) ⟦$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$⟧ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes com m linhas e n colunas com elementos em $\mathbb{K}$, *i.e.*,

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \{A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}\}.$$

As operações usuais neste conjunto são:

$$[(A+B)_{ij}] = [(A)_{ij} + (B)_{ij}],$$
$$[(\alpha A)_{ij}] = [\alpha (A)_{ij}].$$

(c) $[\![\mathbb{K}_n[x]]\!]$ Seja $n \in \mathbb{N}$. Representa-se por $\mathbb{K}_n[x]$ o conjunto dos polinómios na variável x com coeficientes em $\mathbb{K}$ e que têm grau menor ou igual a n, *i.e.*,

$$\mathbb{K}_n[x] = \{a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n | a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{K}\}.$$

As operações usuais neste conjunto são:

$$(a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n) + (b_0x^n + \cdots + b_{n-1}x + b_n) =$$
$$(a_0 + b_0)x^n + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x + (a_n + b_n),$$
$$\alpha(a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n) =$$
$$(\alpha a_0)x^n + \cdots + (\alpha a_{n-1})x + (\alpha a_n).$$

(d) $[\![\mathbb{K}[x]]\!]$ Representa-se por $\mathbb{K}[x]$ o conjunto dos polinómios na variável x de qualquer grau com coeficientes em $\mathbb{K}$. As operações usuais neste conjunto são idênticas às definidas no conjunto $\mathbb{K}_n[x]$.

(e) $[\![C(a,b),\ C^k(a,b),\ C^\infty(a,b)]\!]$ Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $k \in \mathbb{N}$. Representa-se por $C(a,b)$ o conjunto das funções reais de variável real contínuas em (a,b), por $C^k(a,b)$ o conjunto das funções reais de variável real tais que existem todas as derivadas de f até à ordem k (inclusivé) e f e todas as derivadas de f até à ordem k (inclusivé) são contínuas em (a,b), e por $C^\infty(a,b)$ o conjunto das funções reais de variável real tais que existem todas as derivadas de f e f e todas as derivadas de f são contínuas em (a,b), *i.e.*,

$$C(a,b) = \{f : (a,b) \to \mathbb{K} | f \text{ é contínua em } (a,b)\},$$
$$C^k(a,b) = \{f : (a,b) \to \mathbb{K} | f \in C(a,b) \text{ e } \tfrac{d^p f}{dx^p} \in C(a,b), p = 1, \ldots, k\},$$
$$C^\infty(a,b) = \{f : (a,b) \to \mathbb{K} | f \in C(a,b) \text{ e } \tfrac{d^p f}{dx^p} \in C(a,b), \forall p \in \mathbb{N}\}.$$

As operações usuais nestes conjuntos são:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

4.7exe Mostre que $\mathbb{R}^2$ com as operações usuais é um espaço vectorial real.

res As operações usuais em $\mathbb{R}^2$ são

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

com $x_1, x_2, y_1, y_2, \alpha \in \mathbb{R}$ (como já se disse, quando estão em causa as operações usuais, em vez de $x \oplus y$ escreve-se $x + y$ e em vez de $\alpha \odot x$ escreve-se αx).

No que se segue, verificam-se as oito propriedades de 4.2def.

Propriedade (a)

Definição geral:

$\forall x, y \in V : x \oplus y = y \oplus x.$

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : x + y = y + x.$

$$
\begin{aligned}
x + y &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \\
&\overset{(1)}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2). \qquad \text{(a.1)} \\
y + x &= (y_1, y_2) + (x_1, x_2) \\
&\overset{(1)}{=} (y_1 + x_1, y_2 + x_2) \\
&\overset{(2)}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2). \qquad \text{(a.2)}
\end{aligned}
$$

(1) por definição da operação soma de vectores.

(2) pela propriedade comutativa da soma de números reais.

Como as expressões (a.1) e (a.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Definição geral:

$\forall x, y, z \in V : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : (x + y) + z = x + (y + x).$

$$\begin{aligned}
(x+y)+z &= ((x_1,x_2)+(y_1,y_2))+(z_1,z_2) \\
&\overset{(1)}{=} (x_1+y_1,x_2+y_2)+(z_1,z_2) \\
&\overset{(1)}{=} ((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2) \\
&\overset{(2)}{=} (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2). \qquad \text{(b.1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x+(y+z) &= (x_1,x_2)+((y_1,y_2)+(z_1,z_2)) \\
&\overset{(1)}{=} (x_1,x_2)+(y_1+z_1,y_2+z_2) \\
&\overset{(1)}{=} (x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2)) \\
&\overset{(2)}{=} (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2). \qquad \text{(b.2)}
\end{aligned}$$

(1) por definição da operação soma de vectores.

(2) pela propriedade associativa da soma de números reais.

Como as expressões (b.1) e (b.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (b) é válida.

Propriedade (c)

Definição geral:

$\exists^1$ elemento de V (representado por 0_V), $\forall x \in V : x \oplus 0_V = x$.

Exemplo presente:

$\exists^1 0_{\mathbb{R}^2} = (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x + 0_{\mathbb{R}^2} = x$.

$$\begin{aligned} x + 0_{\mathbb{R}^2} = x &\Leftrightarrow (x_1, x_2) + (a, b) = (x_1, x_2) \\ &\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (x_1 + a, x_2 + b) = (x_1, x_2) \\ &\overset{(2)}{\Leftrightarrow} x_1 + a = x_1 \wedge x_2 + b = x_2 \\ &\overset{(3)}{\Leftrightarrow} a = 0 \wedge b = 0. \end{aligned}$$

(1) por definição da operação soma de vectores.

(2) pela definição da igualdade de dois elementos de $\mathbb{R}^2$.

(3) pelas propriedades dos números reais.

Assim, conclui-se que $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ é o elemento neutro da soma de vectores, sendo a propriedade (c) válida.

Propriedade (d)

Definição geral:

$\forall x \in V, \exists^1$ elemento de V (representado por $-x$) : $x \oplus (-x) = 0_V$.

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \exists^1 - x = (a, b) \in \mathbb{R}^2 : x + (-x) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

$$\begin{aligned} x + (-x) = 0_{\mathbb{R}^2} &\Leftrightarrow (x_1, x_2) + (a, b) = (0, 0) \\ &\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (x_1 + a, x_2 + b) = (0, 0) \\ &\overset{(2)}{\Leftrightarrow} x_1 + a = 0 \wedge x_2 + b = 0 \\ &\overset{(3)}{\Leftrightarrow} a = -x_1 \wedge b = -x_2. \end{aligned}$$

(1) por definição da operação soma de vectores.

(2) igualdade de dois elementos de $\mathbb{R}^2$.

(3) pelas propriedades dos números reais.

Assim, conclui-se que $-x = (-x_1, -x_2)$ é o elemento simétrico do elemento $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, sendo a propriedade (d) válida.

Propriedade (e)

Definição geral:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y.$

Exemplo presente:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$

$$\begin{aligned}
\alpha(x+y) &= \alpha((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\
&\overset{(1)}{=} \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\
&\overset{(2)}{=} (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2)) \\
&\overset{(3)}{=} (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2). \qquad \text{(e.1)} \\
\alpha x + \alpha y &= \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2) \\
&\overset{(2)}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) \\
&\overset{(1)}{=} (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2). \qquad \text{(e.2)}
\end{aligned}$$

(1) por definição da operação soma de vectores.

(2) por definição da operação multiplicação de um vector por um escalar.

(3) pela propriedade distributiva da multiplicação relativamente à soma em $\mathbb{R}$.

Como as expressões (e.1) e (e.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (e) é válida.

Propriedade (f)

Definição geral:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x.$

Exemplo presente:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)x &= (\alpha + \beta)(x_1, x_2) \\
&\overset{(1)}{=} ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) \\
&\overset{(2)}{=} (\alpha x_1 \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2). \qquad \text{(f.1)} \\
\alpha x + \beta x &= \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2) \\
&\overset{(1)}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) \\
&\overset{(3)}{=} (\alpha x_1 + \beta x_, \alpha x_2 + \beta x_2). \qquad \text{(f.2)}
\end{aligned}$$

(1) por definição da operação multiplicação de um vector por um escalar.

(2) pela propriedade distributiva da multiplicação relativamente à soma em $\mathbb{R}$.

(3) por definição da operação soma de vectores.

Como as expressões (f.1) e (f.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (f) válida.

Propriedade (g)

Definição geral:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$.

Exemplo presente:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)x &= (\alpha\beta)(x_1, x_2) \\
&\overset{(1)}{=} ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2) \\
&\overset{(2)}{=} (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2). \qquad \text{(g.1)} \\
\alpha(\beta x) &= \alpha(\beta(x_1, x_2)) \\
&\overset{(1)}{=} \alpha(\beta x_1, \beta x_2) \\
&\overset{(1)}{=} (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2)) \\
&\overset{(2)}{=} (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2). \qquad \text{(g.2)}
\end{aligned}$$

(1) por definição da operação multiplicação de um vector por um escalar.

(2) pela propriedade associativa da multiplicação de números reais.

Como as expressões (g.1) e (g.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (g) válida.

Propriedade (h)

Definição geral:

$\forall x \in V : 1 \odot x = x$.

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1x = x$.

$$\begin{aligned} 1x &= 1(x_1, x_2) \\ &\overset{(1)}{=} (1x_1, 1x_2) \\ &\overset{(2)}{=} (x_1, x_2) \\ &= x. \end{aligned}$$

(1) por definição da operação multiplicação de um vector por um escalar.

(2) 1 é o elemento neutro da multiplicação de reais.

Assim, conclui-se que a propriedade (h) é válida.

Assim, uma vez que as oito propriedades da definição $\boxed{\text{4.2def}}$ de espaço vectorial são verificadas, conclui-se que o conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações usuais é um espaço vectorial real.

$\boxed{\text{4.8exe}}$ Mostre que os seguintes conjuntos com as operações usuais são espaços vectoriais reais:

(a) $\mathbb{K}^n$.

(b) $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(c) $\mathbb{K}[x]$.

(d) $C(a, b)$.

$\boxed{\text{res}}$ (a) Exercício.

(b) Exercício.

(c) Exercício.

(d) Exercício.

$\boxed{\text{4.9exe}}$ Mostre que o conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ & (A,B) & \longmapsto & A \oplus B = A^T + B^T \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot : & \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ & (\alpha,A) & \longmapsto & \alpha \odot A = \alpha A, \end{array}$$

não define um espaço vectorial real.

$\boxed{\text{res}}$ Para resolver este exercício é necessário identificar (pelo menos) uma propriedade da definição $\boxed{\text{4.2def}}$ que não é satisfeita. No entanto, e por questões didácticas, vai-se verificar todas as propriedades (apesar de não se explicitar na resolução deste exercício, esta faz uso das propriedades das operações com matrizes).

Note-se que neste exercício, uma vez que a definição de uma das operações não é a usual — soma de elementos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ —, usa-se a notação $x \oplus y$ e $\alpha \odot x$.

Propriedade (a)

Definição geral:

$\forall x, y \in V : x \oplus y = y \oplus x.$

Exemplo presente:

$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \oplus B = B \oplus A.$

$$A \oplus B = A^T + B^T. \qquad \text{(a.1)}$$

$$\begin{aligned} B \oplus A &= B^T + A^T \\ &= A^T + B^T. \qquad \text{(a.2)} \end{aligned}$$

Como as expressões (a.1) e (a.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Definição geral:

$\forall x, y, z \in V : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

Exemplo presente:

$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

$$\begin{aligned}
(A \oplus B) \oplus C &= (A^T + B^T) \oplus C \\
&= (A^T + B^T)^T + C^T \\
&= ((A^T)^T + (B^T)^T) + C^T \\
&= A + B + C^T. \qquad \text{(b.1)} \\
A \oplus (B \oplus C) &= A \oplus (B^T + C^T) \\
&= A^T + (B^T + C^T)^T \\
&= A^T + ((B^T)^T + (C^T)^T) \\
&= A^T + B + C. \qquad \text{(b.2)}
\end{aligned}$$

Como existem elementos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que produzem expressões diferentes para (b.1) e (b.2), conclui-se que a propriedade (b) não é válida.

Propriedade (c)

Definição geral:

$\exists^1$ elemento de V (representado por 0_V), $\forall x \in V : x \oplus 0_V = x$.

Exemplo presente:

$\exists^1$ elemento de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (representado por $\overline{0}$), $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \oplus \overline{0} = A$.

$$\begin{aligned} A \oplus \overline{0} = A &\Leftrightarrow A^T + \overline{0}^T = A \\ &\Leftrightarrow \overline{0}^T = A - A^T \\ &\Leftrightarrow \overline{0} = (A - A^T)^T \\ &\Leftrightarrow \overline{0} = A^T - A. \end{aligned}$$

Assim, uma vez que $\overline{0}$ não é independente de A, conclui-se que a propriedade (c) não é válida.

Propriedade (d)

Definição geral:

$\forall x \in V, \exists^1$ elemento de V (representado por $-x$) : $x \oplus (-x) = 0_V$.

Exemplo presente:

Esta propriedade não faz sentido verificar, uma vez que não existe elemento neutro da soma (ver propriedade anterior).

Propriedade (e)

Definição geral:

$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

Exemplo presente:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \alpha \odot (A \oplus B) = \alpha \odot A \oplus \alpha \odot B$.

$$\begin{aligned}\alpha \odot (A \oplus B) &= \alpha \odot (A^T + B^T) \\ &= \alpha(A^T + B^T) \\ &= \alpha A^T + \alpha B^T. \qquad \text{(e.1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \odot A \oplus \alpha \odot B &= \alpha A \oplus \alpha B \\ &= (\alpha A)^T + (\alpha B)^T \\ &= \alpha A^T + \alpha B^T. \qquad \text{(e.2)}\end{aligned}$$

Como as expressões (e.1) e (e.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (e) é válida.

Propriedade (f)

Definição geral:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x.$

Exemplo presente:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : (\alpha + \beta) \odot A = \alpha \odot A \oplus \beta \odot A.$

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \odot A &= (\alpha + \beta)A \\ &= \alpha A + \beta A. \qquad \text{(f.1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \odot A \oplus \beta \odot A &= \alpha A \oplus \beta A \\ &= (\alpha A)^T + (\beta A)^T \\ &= \alpha A^T + \beta A^T. \qquad \text{(f.2)}\end{aligned}$$

Como existem elementos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que produzem expressões diferentes para (f.1) e (f.2), conclui-se que a propriedade (f) não é válida.

Propriedade (g)

Definição geral:

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\forall x\in V:(\alpha\cdot\beta)\odot x=\alpha\odot(\beta\odot x).$

Exemplo presente:

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}):(\alpha\cdot\beta)\odot A=\alpha\odot(\beta\odot A).$

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot\beta)\odot A&=(\alpha\beta)\odot A\\&=\alpha\beta A.\qquad\text{(g.1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\odot(\beta\odot A)&=\alpha\odot(\beta A)\\&=\alpha\beta A.\qquad\text{(g.2)}\end{aligned}$$

Como as expressões (g.1) e (g.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (g) é válida.

Propriedade (h)

Definição geral:

$\forall x\in V:1\odot x=x.$

Exemplo presente:

$\forall A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}):1A=A.$

$$1A=A.$$

Assim, conclui-se que a propriedade (h) é válida.

Como as propriedades (b), (c), (d) e (f) da definição $\boxed{4.2\text{def}}$ não são válidas, conclui-se que o conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com as operações dadas não é um espaço vectorial real (volta-se a frisar que bastava uma propriedade falhar para se concluir que não se estava perante um espaço vectorial).

$\boxed{4.10\text{exe}}$ Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações

$$\begin{array}{cccc} \oplus: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (a,b)\oplus(c,d) = (0, b+d), \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \odot: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\alpha,(a,b)) & \longmapsto & \alpha\odot(a,b) = (2\alpha a, 2\alpha b), \end{array}$$

não define um espaço vectorial real.

$\boxed{\text{res}}$ Para resolver este exercício é necessário identificar (pelo menos) uma propriedade da definição $\boxed{4.2\text{def}}$ que não é satisfeita. No entanto, e por questões didácticas, vai-se verificar todas as propriedades.

Note-se que neste exercício, uma vez que a definição das duas operações não é a usual, usa-se a notação $x \oplus y$ e $\alpha \odot x$.

Apesar de não se explicitar na resolução deste exercício, esta faz uso das propriedades dos números reais.

Propriedade (a)

Definição geral:

$\forall x, y \in V : x \oplus y = y \oplus x.$

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : x \oplus y = y \oplus x.$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) \\ &= (0, x_2 + y_2). \qquad \text{(a.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \oplus x &= (y_1, y_2) \oplus (x_1, x_2) \\ &= (0, y_2 + x_2) \\ &= (0, x_2 + y_2). \qquad \text{(a.2)} \end{aligned}$$

Como as expressões (a.1) e (a.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Definição geral:

$\forall x, y, z \in V : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$

$$
\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z &= ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) \oplus (z_1, z_2) \\
&= (0, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) \\
&= (0, (x_2 + y_2) + z_2) \\
&= (0, x_2 + y_2 + z_2). \qquad \text{(b.1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \oplus (y \oplus z) &= (x_1, x_2) \oplus ((y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2)) \\
&= (x_1, x_2) + (0, y_2 + z_2) \\
&= (0, x_2 + (y_2 + z_2)) \\
&= (0, x_2 + y_2 + z_2). \qquad \text{(b.2)}
\end{aligned}
$$

Como as expressões (b.1) e (b.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (b) é válida.

Propriedade (c)

Definição geral:

$\exists^1$ elemento de V (representado por 0_V), $\forall x \in V : x \oplus 0_V = x$.

Exemplo presente:

$\exists^1$ elemento de $\mathbb{R}^2$ (representado por $\overline{0} = (a, b)$), $\forall x \in \mathbb{R}^2 : x \oplus \overline{0} = x$.

$$
\begin{aligned}
x \oplus \overline{0} = x &\Leftrightarrow (x_1, x_2) \oplus (a, b) = (x_1, x_2) \\
&\Leftrightarrow (0, x_2 + b) = (x_1, x_2) \\
&\Leftrightarrow 0 = x_1 \wedge x_2 + b = x_2 \\
&\Leftrightarrow x_1 = 0 \wedge b = 0.
\end{aligned}
$$

Assim, conclui-se que a propriedade (c) não é satisfeita, pois não só o vector $\overline{0}$ não é único, como não é possível que a relação fosse satisfeita para qualquer elemento de $x \in \mathbb{R}^2$.

Propriedade (d)

Definição geral:

$\forall x \in V, \exists^1$ elemento de V (representado por $-x$) : $x \oplus (-x) = 0_V$.

Exemplo presente:

Esta propriedade não faz sentido verificar, uma vez que não existe elemento neutro da soma (ver propriedade anterior).

Propriedade (e)

Definição geral:

$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

Exemplo presente:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$

$$\begin{aligned} \alpha \odot (x \oplus y) &= \alpha \odot ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) \\ &= \alpha \odot (0, x_2 + y_2) \\ &= (0, 2\alpha(x_2 + y_2)) \\ &= (0, 2\alpha x_2 + 2\alpha y_2). \qquad \text{(e.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y &= \alpha \odot (x_1, x_2) \oplus \alpha \odot (y_1, y_2) \\ &= (2\alpha x_1, 2\alpha x_2) \oplus (2\alpha y_1, 2\alpha y_2) \\ &= (0, 2\alpha x_2 + 2\alpha y_2). \qquad \text{(e.2)} \end{aligned}$$

Como as expressões (e.1) e (e.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (e) é válida.

Propriedade (f)

Definição geral:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x.$

Exemplo presente:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x.$

$$
\begin{aligned}
(\alpha + \beta) \odot x &= (\alpha + \beta) \odot (x_1, x_2) \\
&= (2(\alpha + \beta)x_1, 2(\alpha + \beta)x_2) \\
&= (2\alpha x_1 + 2\beta x_1, 2\alpha x_2 + 2\beta x_2). \qquad \text{(f.1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha \odot \oplus x\beta \odot x &= \alpha \odot (x_1, x_2) \oplus \beta \odot (x_1, x_2) \\
&= (2\alpha x_1, 2\alpha x_2) \oplus (2\beta x_1, 2\beta x_2) \\
&= (0, 2\alpha x_2 + 2\beta x_2). \qquad \text{(f.2)}
\end{aligned}
$$

Como existem elementos de $\mathbb{R}^2$ tais que produzem expressões diferentes para (f.1) e (f.2), conclui-se que a propriedade (f) não é válida.

Propriedade (g)

Definição geral:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V : (\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x).$

Exemplo presente:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x).$

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot \beta) \odot x &= (\alpha \cdot \beta) \odot (x_1, x_2)\\ &= (2(\alpha\beta)x_1, 2(\alpha\beta)x_2)\\ &= (2\alpha\beta x_1, 2\alpha\beta x_2). \qquad \text{(g.1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \odot (\beta \odot x) &= \alpha \odot (\beta \odot (x_1, x_2))\\ &= \alpha \odot (2\beta x_1, 2\beta x_2)\\ &= (2\alpha(2\beta x_1), 2\alpha(2\beta x_2))\\ &= (4\alpha\beta x_1, 4\alpha\beta x_2). \qquad \text{(g.2)}\end{aligned}$$

Como existem elementos de $\mathbb{R}^2$ tais que produzem expressões diferentes para (g.1) e (g.2), conclui-se que a propriedade (g) não é válida.

Propriedade (h)

Definição geral:

$\forall x \in V : 1 \odot x = x.$

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \odot x = x.$

$$\begin{aligned}1x &= 1(x_1, x_2)\\ &= (2x_1, 2x_2)\\ &\neq (x_1, x_2)\\ &= x.\end{aligned}$$

Assim, conclui-se que a propriedade (h) não é válida.

Como as propriedades (c), (d), (f), (g) e (h) da definição 4.2def não são satisfeitas, conclui-se que o conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações dadas não é um espaço vectorial real (volta-se a frisar que bastava uma propriedade não se verificar para se concluir que não se estava perante um espaço vectorial).

4.11teo Seja V um espaço vectorial. Então,

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha 0_V = 0_V$.

(b) $\forall x \in V : 0x = 0_V$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in V : -(\alpha x) = (-\alpha)x$ e $(-\alpha)(-x) = \alpha x$.

(d) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in V : \alpha x = 0_V \Rightarrow (\alpha = 0 \vee x = 0_V)$.

(e) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V \setminus \{0_V\} : \alpha x = \beta x \Rightarrow \alpha = \beta$.

(f) $\forall x_1, x_2 \in V : x_1 + x = x_2 \Rightarrow x = x_2 - x_1$.

(g) $\forall x, x_1, x_2 \in V : x + x_1 = x + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

4.12def ⟦subespaço⟧ Sejam o espaço vectorial $(V, \oplus, \odot, \mathbb{K}, +, \cdot)$ e F um subconjunto não-vazio de V. Diz-se que F é um subespaço V se $(F, \oplus, \odot, \mathbb{K}, +, \cdot)$ ainda for espaço vectorial.

4.13teo Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $F \subset V$. Então, F é um subespaço de V se e só se:

(a) $0_V \in F$.

(b) $\forall x, y \in F : x + y \in F$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F : \alpha x \in F$.

4.14obs Note-se que o teorema 4.13teo é um processo mais prático de verificar se um subconjunto de um espaço vectorial é um subespaço do que a definição 4.12def.

4.15exe Mostre que $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

res Sendo $F \subset \mathbb{R}^2$, verifiquem-se as três propriedades do teorema 4.13teo:

Propriedade (a)

$0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in F$, pelo que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Sejam $x = (x_1, 0), y = (y_1, 0) \in F$. Então, $x + y = (x_1, 0) + (y_1, 0) = (x_1 + y_1, 0) \in F$, pelo que a propriedade (b) é válida.

Propriedade (c)

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x = (x_1, 0) \in F$. Então, $\alpha x = \alpha(x_1, 0) = (\alpha x_1, 0) \in F$, pelo que a propriedade (c) é válida.

Conclui-se, assim, que F é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

4.16exe Mostre que o conjunto das matrizes simétricas de ordem n é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

res Seja F o conjunto das matrizes simétricas de ordem n, *i.e.*, $F = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) | A = A^T\}$, que é um subconjunto de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Verifiquem-se, agora, as três propriedades do teorema 4.13teo:

Propriedade (a)

$0_{\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})} = 0_{n\times n} \in F$, pelo que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Sejam $A, B \in F$. Então, $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, $A + B \in F$, pelo que a propriedade (b) é válida.

Propriedade (c)

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in F$. Então, como $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$, $\alpha A \in F$, pelo que a propriedade (c) é válida.

Conclui-se, assim, que F é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

4.17exe Mostre que:

(a) O conjunto das matrizes reais e diagonais de ordem n é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(b) $\mathbb{K}_n[x]$ é um subespaço de $\mathbb{K}[x]$.

(c) $C^k(a,b)$ é um subespaço de $C(a,b)$

(d) $C^\infty(a,b)$ é um subespaço de $C^k(a,b)$.

(e) $\{0_V\}$ é um subespaço de V.

(f) V é um subespaço de V.

res (a) Exercício.

(b) Exercício.

(c) Exercício.

(d) Exercício.

(e) Exercício.

(f) Exercício.

4.18exe Mostre que o conjunto $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 1\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

res Para resolver este exercício é necessário identificar (pelo menos) uma propriedade do teorema 4.13teo que não é satisfeita. No entanto, e por questões didácticas, vai-se verificar todas as propriedades.

Sendo $G \subset \mathbb{R}^2$, verifiquem-se as três propriedades do teorema $\boxed{\text{4.13teo}}$:

Propriedade (a)

$0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \notin G$, pelo que a propriedade (a) não é válida.

Propriedade (b)

Sejam $x = (x_1, 1), y = (y_1, 1) \in G$. Então, $x + y = (x_1, 1) + (y_1, 1) = (x_1 + y_1, 2) \notin G$, pelo que a propriedade (b) não é válida.

Propriedade (c)

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x = (x_1, 1) \in G$. Então, $\alpha x = \alpha(x_1, 1) = (\alpha x_1, \alpha) \notin G$, pelo que a propriedade (c) não é válida.

Como as propriedades (a), (b) e (c) do teorema $\boxed{\text{4.13teo}}$ não são satisfeitas, conclui-se que o conjunto G não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ (volta-se a frisar que bastava uma propriedade não se verificar para se concluir que não se estava perante um subespaço).

$\boxed{\text{4.19exe}}$ Mostre que o conjunto das matrizes hermíticas de ordem n não é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

$\boxed{\text{res}}$ Seja F o conjunto das matrizes hermíticas de ordem n, *i.e.*, $F = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) | A = A^H\}$, que é um subconjunto de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Verifiquem-se, agora, as três propriedades do teorema $\boxed{\text{4.13teo}}$:

Propriedade (a)

$0_{\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})} = 0_{n\times n} \in F$, pelo que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Sejam $A, B \in F$. Então, como $(A + B)^H = A^H + B^H = A + B$, $A + B \in F$, pelo que a propriedade (b) é válida.

Propriedade (c)

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in F$. Então, como $(\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H = \overline{\alpha} A$, $\alpha A \notin F$.

Assim, conclui-se que a propriedade (c) não é válida.

Como a propriedade (c) do teorema $\boxed{\text{4.13teo}}$ não é satisfeita, conclui-se que o conjunto G não é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

$\boxed{\text{4.20teo}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então, $CS_{Ax=\underline{0}}$ é um subespaço de $\mathbb{K}^n$.

$\boxed{\text{dem}}$ Para mostrar que $CS_{Ax=\underline{0}} \subset \mathbb{K}^n$ é um subespaço de $\mathbb{K}^n$, aplique-se o teorema $\boxed{\text{4.13teo}}$ (no que se segue identifia-se $\mathbb{K}^n$ com $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$):

Propriedade (a)

Seja Como $A0_{n\times 1} = \underline{0}$, tem-se que $0_{\mathbb{K}^n} = 0_{n\times 1} \in CS_{Ax=\underline{0}}$, pelo que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Sejam $x_1, x_2 \in CS_{Ax=\underline{0}}$. Então, como $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$, tem-se que $x_1 + x_2 \in CS_{Ax=\underline{0}}$, pelo que a propriedade (b) é válida.

Propriedade (c)

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in CS_{Ax=\underline{0}}$. Então, como $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\underline{0} = \underline{0}$, tem-se que $\alpha x \in CS_{Ax=\underline{0}}$, pelo que a propriedade (c) é válida.

Assim, conclui-se que $CS_{Ax=\underline{0}}$ é um subespaço de $\mathbb{K}^n$.

$\boxed{\text{4.21def}}$ [[combinação linear]] Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, $x \in V$ e $S = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$. Diz-se que x é uma combinação linear dos elementos de S se

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K} : x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k.$$

4.22exe Sejam $x = (1,4), x_1 = (1,2), x_2 = (1,1)$ e $x_3 = (2,2)$.

(a) Mostre que $x = (1,4)$ é uma combinação linear de $x_1 = (1,2)$ e $x_2 = (1,1)$ e escreva x como combinação linear de x_1 e de x_2.

(b) Mostre que $x = (1,4)$ é uma combinação linear de $x_1 = (1,2)$, $x_2 = (1,1)$ e $x_3 = (2,2)$.

(c) Mostre que $x = (1,4)$ não é uma combinação linear de $x_2 = (1,1)$ e $x_3 = (2,2)$.

res (a) Mostrar que $x = (1,4)$ é uma combinação linear de $x_1 = (1,2)$ e $x_2 = (1,1)$ é, por definição, mostrar que

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : x = \alpha x_1 + \beta x_2,$$

i.e., que é possível o sistema de equações lineares (S_a) dado por

$$(1,4) = \alpha(1,2) + \beta(1,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 1 \\ 2\alpha & + & \beta & = & 4. \end{array} \right.$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right],$$

a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz ampliada, pelo que o sistema (S_a) é possível, concluindo-se que x é uma combinação linear de x_1 e x_2. Para escrever x como combinação linear de x_1 e x_2, resolve-se o sistema (S_a), tendo-se

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 3 \\ \beta & = & -2, \end{array} \right.$$

vindo

$$x = 3x_1 - 2x_2.$$

(b) Mostrar que $x = (1,4)$ é uma combinação linear de $x_1 = (1,2)$, $x_2 = (1,1)$ e $x_3 = (2,2)$ é, por definição, mostrar que

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3,$$

i.e., que é possível o sistema de equações lineares (S_b) dado por

$$(1,4) = \alpha(1,2) + \beta(1,1) + \gamma(2,2) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & 2\gamma & = & 1 \\ 2\alpha & + & \beta & + & 2\gamma & = & 4. \end{array} \right.$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array} \right],$$

a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz ampliada, pelo que o sistema (S_b) é possível, concluindo-se que x é uma combinação linear de x_1, x_2 e x_3. Para escrever x como combinação linear de x_1, x_2 e x_3, resolve-se o sistema (S_b), tendo-se

$$\left\{ \begin{array}{ccl} \alpha & = & 3 \\ \beta & = & -2 - 2a \\ \gamma & = & a \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

vindo

$$x = 3x_1 + (-2 - 2a)x_2 + ax_3, a \in \mathbb{R}.$$

(c) Mostrar que $x = (1,4)$ não é uma combinação linear de $x_2 = (1,1)$ e $x_3 = (2,2)$ é equivalente a mostrar que é impossível o sistema de equações lineares (S_c) dado por

$$(1,4) = \alpha(1,1) + \beta(2,2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 4. \end{cases}$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right],$$

a característica da matriz dos coeficientes é menor do que a característica da matriz ampliada, o sistema (S_c) é impossível, concluindo-se que x não é uma combinação linear de x_2 e x_3.

$\boxed{\text{4.23def}}$ ⟦espaço gerado, $L(S)$, $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$⟧ Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$. Chama-se espaço gerado pelo conjunto S, que se representa por $L(S)$ ou por $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, ao conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de S.

$\boxed{\text{4.24teo}}$ Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset U \subset$. Então,

(a) $L(S)$ é um subespaço de V.

(b) U subespaço de $V \Rightarrow L(S) \subset U$.

$\boxed{\text{4.25obs}}$ Sejam V um espaço vectorial $\mathbb{K}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$. Então,

(a) $L(S) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$.

(b) Chama-se "espaço gerado" ao conjunto $L(S)$ devido à alínea (a) do teorema anterior.

(c) $L(S)$ é o "menor" subespaço de V que contém S no sentido da alínea (b) do teorema anterior..

4.26def ⟦conjunto gerador⟧ Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$. Diz-se que S é um conjunto gerador de V se $V = L(S)$.

4.27obs Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$. Então, S é um conjunto gerador de V se

$$\forall x \in V, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

i.e., que é possível o sistema de equações lineares $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, qualquer que seja $x \in V$.

4.28exe (a) Verifique se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0) \rangle$.

(b) Verifique se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0), (3,4) \rangle$.

(c) Verifique se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0), (3,4), (0,1) \rangle$.

res (a) Verificar se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0) \rangle$ é equivalente a verificar se, qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, é possível o sistema de equações lineares (S_1) dado por

$$(x_1, x_2) = \alpha(2,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha &= x_1 \\ 0\alpha &= x_2. \end{cases}$$

Então, como a representação matricial do sistema (S_1) é

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{array}\right],$$

que já está em escada, a característica da matriz dos coeficientes é menor do que a característica da matriz ampliada se $x_2 \neq 0$, pelo que o sistema (S_1) nem sempre é possível, concluindo-se que $\mathbb{R}^2 \neq \langle (1,0) \rangle$, *i.e.*, $\{(2,0)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$.

(b) Verificar se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0),(3,4) \rangle$ é equivalente a verificar se, qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, é possível o sistema de equações lineares (S_2) dado por

$$(x_1, x_2) = \alpha(2,0) + \beta(3,4) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} 2\alpha & + & 3\beta & = & x_1 \\ 0\alpha & + & 4\beta & = & x_2. \end{array} \right.$$

Então, como a representação matricial do sistema (S_2) é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 4 & x_2 \end{array} \right],$$

que já está em escada, a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz ampliada qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, pelo que o sistema (S_2) é sempre possível, concluindo-se que $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0),(3,4) \rangle$, *i.e.*, $\{(2,0),(3,4)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$.

(c) Verificar se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0),(3,4),(0,1) \rangle$ é equivalente a verificar se, qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, é possível o sistema de equações lineares (S_3) dado por

$$(x_1, x_2) = \alpha(2,0) + \beta(3,4) + \gamma(0,1) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2\alpha & + & 3\beta & + & 0\gamma & = & x_1 \\ 0\alpha & + & 4\beta & + & \gamma & = & x_2. \end{array} \right.$$

Então, como a representação matricial do sistema (S_3) é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & x_1 \\ 0 & 4 & 1 & x_2 \end{array} \right]$$

que já está em escada, a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz ampliada qualquer que seja

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, pelo que o sistema (S_3) é sempre possível, concluindo-se que $\mathbb{R}^2 = \langle(2,0),(3,4),(0,1)\rangle$, *i.e.*, {(2,0),(3,4),(0,1)} é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$.

4.29obs (a) Um espaço vectorial pode admitir diversos conjuntos geradores.

(b) Cojuntos geradores distintos podem gerar o mesmo espaço vectorial.

4.30def Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$.

(a) ⟦conjunto linearmente independente⟧ Diz-se que S é um conjunto linearmente independente se

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

(b) ⟦vectores linearmente independentes⟧ Se S é um conjunto linearmente independente, os elementos de S dizem-se vectores linearmente independentes.

(c) ⟦conjunto linearmente dependente⟧ Se S não é um conjunto linearmente independente, diz-se que S é um conjunto linearmente dependente.

(d) ⟦vectores linearmente dependentes⟧ Se S é um conjunto linearmente dependente, os elementos de S dizem-se vectores linearmente dependentes.

4.31exe (a) Indique, justificando, se $\{(2,0)\}$ é um conjunto linearmente independente ou linearmente dependente.

(b) Indique, justificando, se $\{(2,0),(3,4)\}$ é um conjunto linearmente independente ou linearmente.

(c) Indique, justificando, se $\{(2,0),(3,4),(0,1)\}$ é um conjunto linearmente independente ou linearmente dependente.

res (a) Como

$$\alpha(2,0) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha &= 0 \\ 0\alpha &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 0,$$

conclui-se que $\{(2,0)\}$ é um conjunto linearmente independente.

(b) Como

$$\alpha(2,0) + \beta(3,4) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 0\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = 0, \end{cases}$$

conclui-se que $\{(2,0),(3,4)\}$ é um conjunto linearmente independente.

(c) Como

$$(x_1,x_2)\alpha(2,0) + \beta(3,4) + \gamma(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 0\gamma = 0 \\ 0\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3a}{8}, \\ \beta = -\frac{a}{4}, \\ \gamma = a \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

conclui-se que $\{(2,0),(3,4),(0,1)\}$ é um conjunto linearmente dependente.

4.32teo Sejam V um espaço vectorial e $S_1 \subset S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset S_2 \subset V$.

(a) Se S é um conjunto linearmente dependente, então, S_2 é um conjunto linearmente dependente.

(b) se S é um conjunto linearmente independente, então, S_1 é um conjunto linearmente independente.

4.33def [[base]] Sejam V um espaço vectorial e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$. Diz-se que S é uma base de V se S é um conjunto gerador de V linearmente independente.

4.34exe (a) Indique, justificando, se $\{(2,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Indique, justificando, se $\{(2,0),(3,3)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(c) Indique, justificando, se $\{(2,0),(3,3),(0,1))\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

res (a) Atendendo ao exercício 4.30exe (a), $\{(2,0)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$, pelo que também não é uma sua base.

(b) Atendendo aos exercícios 4.30exe (b) e 4.35exe (b), $\{(2,0),(3,3)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$ linearmente independente, pelo que é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(c) Atendendo ao exercício 4.30exe (c), $\{(2,0),(3,3),(0,1)\}$ não é um conjunto linearmente independente, pelo que também não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

4.35def [[base ordenada]] Sejam V um espaço vectorial e $\mathcal{S} = (x_1, \ldots, x_n) \in V^n$. Diz-se que $\mathcal{S}$ é uma base ordenada de V se $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma base de V.

4.36obs O objectivo da definição anterior é permitir distinguir entre ordenações diferentes dos seus elementos, situação que não acontece em conjuntos. Faz sentido, agora, a seguinte definição:

4.37def [[coordenadas de um vector numa base ordenada]] Sejam V um espaço vectorial, $\mathcal{S} = (x_1, \ldots, x_n)$ uma base ordenada de V e $x \in V$. Chama-se coordenadas do vector x relativamente à base ordenada $\mathcal{S}$, que se representa por $[x]_{\mathcal{S}}$, a $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ se

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

4.38obs Como uma base é um conjunto linearmente independente, o sistema linear que é necessário resolver para determinar as coordenadas de um vector numa base ordenada é sempre possível e determinado, pelo que as coordenadas de um vector numa base ordenada são únicas.

4.39exe (a) Seja $\mathcal{S}_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de $x = (0,2,3)$ na base ordenada $\mathcal{S}_1$.

(b) Seja $\mathcal{S}_2 = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de $x = (0,2,3)$ na base ordenada $\mathcal{S}_2$.

(c) Seja $\mathcal{S}_3 = ((1,1,1),(0,1,1),(1,0,1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de $x = (0,2,3)$ na base ordenada $\mathcal{S}_3$.

res (a) Como $(0,2,3) = 0(1,0,0)+2(0,1,0)+3(0,0,1)$, tem-se que $[x]_{\mathcal{S}_1} = (0,2,3)$.

(b) Como $(0,2,3) = 2(0,1,0)+0(1,0,0)+3(0,0,1)$, tem-se que $[x]_{\mathcal{S}_2} = (2,0,3)$.

(c) Para responder à questão, tem que se resolver o sistema

$$\alpha(1,1,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1) = (0,2,3) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha & & & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\ \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 3. \end{cases}$$

Recorra-se, agora, ao método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

tendo-se

$$\begin{cases} \alpha = -1, \\ \beta = 3, \\ \gamma = 1, \end{cases}$$

pelo que $(0,2,3) = -(1,1,1) + 3(0,1,1) + (1,0,1)$, ou seja, $[x]_{\mathcal{S}_3} = (-1,3,1)$.

4.40exe Seja $\mathcal{S} = \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\right)$ uma base ordenada de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine as coordenadas de $A = \left[\begin{smallmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ na base ordenada $\mathcal{S}_2$.

res Como $\left[\begin{smallmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{smallmatrix}\right] = -2\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] + 3\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] + 5\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] + 4\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, tem-se que $[A]_{\mathcal{S}} = (-2,3,5,4)$.

4.41teo Sejam V um espaço vectorial e o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base de V. Então, todas as bases de V têm n vectores.

4.42def ⟦dimensão de um espaço vectorial, $\dim(V)$, espaço vectorial de dimensão finita⟧ Sejam V um espaço vectorial e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base de V. Chama-se dimensão do espaço vectorial V ao número de elementos que constituem a base, escrevendo-se $\dim(V) = n$. Diz-se, ainda, que V é um espaço vectorial de dimensão finita.

$\boxed{4.43\text{obs}}$

(a) Note-se que a definição anterior faz sentido pois o teorema que a precede garante que todas as bases de um espaço vectorial têm o mesmo número de elementos.

(b) Seja V um espaço vectorial. Então, $\dim(\{0_V\}) = 0$.

$\boxed{4.44\text{teo}}$

(a) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e
$\{e_1, e_2, e_3\}$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, e
$\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1 = (-1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (1, 1, 1)$, são dois exemplos de bases de $\mathbb{R}^3$ (à primeira chama-se base canónica de $\mathbb{R}^3$).

(b) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

(c) $\dim(\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})) = 6$ e $\{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$, em que

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

é uma base de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ (base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$).

(d) $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})) = mn$.

(e) $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ e $\{1, x, x^2\}$ é uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ (base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$).

(f) $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.

(g) $C(a, b)$ não é um espaço vectorial de dimensão finita.

$\boxed{4.45\text{teo}}$ Seja V um espaço vectorial tal que $\dim(V) = n$ e S um subconjunto de V com n elementos.

(a) Se S é um conjunto linearmente independente, então S é uma base de V.

(b) Se S é um conjunto gerador de V, então S é uma base de V.

$\boxed{\text{4.46teo}}$ Sejam V um espaço vectorial com dimensão finita e X e Y subespaços de V. Então,

(a) $\dim(X) \leqslant \dim(V)$.

(b) $\dim(X) = \dim(V)$ se e só se $X = V$.

$\boxed{\text{4.47def}}$ [[espaço nulo de uma matriz]] Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se espaço nulo da matriz A, que se representa por $N(A)$, a $CS_{Ax=\underline{0}}$.

$\boxed{\text{4.48teo}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(a) $\dim(\langle \ell_{1,A}; \ldots; \ell_{m,A}\rangle = c(A)$.

(b) $\dim(\langle c_{1,A}; \ldots; c_{n,A}\rangle = c(A)$.

(c) $\dim(N(A))$ é igual ao número de variáveis livres do sistema $Ax = \underline{0}$.

$\boxed{\text{4.49obs}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Então,

(a) $\{c_{1,A}, \ldots, c_{n,A}\}$ é um conjunto linearmente dependente se é só se $\det(A) = 0$.

(b) $\{c_{1,A}, \ldots, c_{n,A}\}$ é um conjunto linearmente independente se é só se $\det(A) \neq 0$.

(c) $\{\ell_{1,A}, \ldots, \ell_{n,A}\}$ é um conjunto linearmente dependente se é só se $\det(A) = 0$.

(d) $\{\ell_{1,A}, \ldots, \ell_{n,A}\}$ é um conjunto linearmente independente se é só se $\det(A) \neq 0$.

$\boxed{\text{4.50exe}}$ Determine o espaço nulo e a sua dimensão das seguintes matrizes:

(a) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

res (a)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$N(A) = \{(0,0)\}.$$

Como o sistema não tem variáveis livres, tem-se que $\dim(N(A)) = 0$.

(b) Comece-se por determinar $N(B)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha - \beta, \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R}, \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \beta \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} N(B) &= \{(-\alpha-\beta, \alpha, 0, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha(-1,1,0,0) + \beta(-1,0,0,1) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-1,1,0,0), (-1,0,0,1) \rangle. \end{aligned}$$

Assim, $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ é uma base de $N(B)$ pois é um conjunto linearmente independente (verificar).

$\boxed{\text{4.51obs}}$ Seja V um espaço vectorial tal que $\dim(V) = n$. Então,

(a) quaisquer m vectores de V com $m > n$ são linearmente dependentes.

(b) C conjunto de geradores de $V \Rightarrow \#C \geqslant n$.

(c) C conjunto de n vectores linearmente independentes de $V \Rightarrow C$ conjunto gerador.

(d) C conjunto de n vectores geradores de $V \Rightarrow$ os vectores são linearmente independentes.

(e) C conjunto de geradores de V constituído por vectores linearmente independentes $\Rightarrow \#C = n$.

4.2 Exercícios sobre Espaços Vectoriais

$\boxed{4.1\text{exe}}$ Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^+$ com as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & x \oplus y = xy, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha \odot x = x^\alpha \end{array}$$

é um espaço vectorial real.

$\boxed{4.2\text{exe}}$ Mostre que o conjunto $\mathbb{R}$ com as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x \oplus y = x+y+1, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha \odot x = \dfrac{\alpha x + \alpha + x - 1}{2} \end{array}$$

é um espaço vectorial real.

$\boxed{4.3\text{exe}}$ Mostre que os seguintes conjuntos com as operações indicadas não são espaços vectoriais reais, identificando as propriedades da definição de espaço vectorial que não são verificadas:

(a) $\mathbb{R}^2$, $(a,b) \oplus (c,d) = (a,b)$ e $\alpha \odot (a,b) = (\alpha a, \alpha b)$.

(b) $\mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ e $\alpha \odot (x_1,x_2) = (\alpha^2 x_1, \alpha^2 x_2)$.

(c) $\mathbb{R}^3$, $(x_1,x_2,x_3) \oplus (y_1,y_2,y_3) = (x_1+y_1, 0, x_2+y_2)$ e $\alpha \odot (x_1,x_2,x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$.

4.4exe Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^+$ com as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & x\oplus y=\frac{x}{y}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha\odot x=x^{\alpha} \end{array}$$

não é um espaço vectorial real, identificando as propriedades da definição de espaço vectorial que não são verificadas.

4.5exe Averigue se os seguintes conjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^3$:

(a) $S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y\}$.

(b) $S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y+2\}$.

4.6exe Escreva, se possível, o vector $v=(3,3)\in\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^2$, e interprete geometricamente os resultados obtidos:

(a) $v_1=(1,1)$.

(b) $v_1=(1,2)$.

(c) $v_1=(1,2), v_2=(4,2)$.

(d) $v_1=(1,1), v_2=(2,2)$.

(e) $v_1=(1,-1), v_2=(-1,1)$.

(f) $v_1=(1,-1), v_2=(0,1), v_3=(2,0)$.

4.7exe Sejam $u=(1,2,-4), v=(2,5,-6), w=(1,-1,-10), r=(1,0,\alpha)\in\mathbb{R}^3$.

(a) Escreva o vector w como combinação linear de u e v.

(b) Indique para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o vector r é uma combinação linear de u e v.

$\boxed{4.8\text{exe}}$ Escreva $u = 5t^2 - 8t + 6$ como combinação linear de $v = t^2 - t$ e $w = 2t^2 - 4$.

$\boxed{4.9\text{exe}}$ Indique quais dos seguintes conjuntos de vectores são conjuntos geradores do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$.

(a) $A = \{(1,0),(0,1)\}$.

(b) $B = \{(1,2),(-1,0)\}$.

(c) $C = \{(1,0),(0,1),(1,3)\}$.

(d) $D = \{(1,2)\}$.

(e) $E = \{(1,2),(2,4),(-1,-2)\}$.

(f) $F = \{(1,-1),(-2,2)\}$.

$\boxed{4.10\text{exe}}$ Seja $X = \{(1,0,\alpha),(\alpha,\beta,\beta),(1,0,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Indique para que valores de α e β o conjunto X é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{4.11\text{exe}}$ Verifique se os seguintes conjuntos são linearmente independentes:

(a) $\{(3,1),(4,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) $\{(3,1),(4,-2),(7,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$.

(c) $\{(0,-3,1),(2,4,1),(-2,8,5)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(d) $\{(-1,2,0,2),(5,0,1,1),(8,-6,1,-5)\}$ em $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{4.12\text{exe}}$ Indique para que valores do parâmetro real α, os vectores $a = (1,-2)$ e $b = (\alpha,-1)$ de $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes.

$\boxed{4.13\text{exe}}$ Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ os vectores $v_1 = (\alpha_1, \beta_1, 1)$ e $v_2 = (\alpha_2, \beta_2, 0)$ em que $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ são constantes reais. Indique, em função de α_1, α_2, β_1 e β_2 uma condição necessária e suficiente para os vectores v_1 e v_2 serem linearmente independentes.

$\boxed{4.14\text{exe}}$ Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ e um seu subespaço $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y\}$. Determine dois vectores linearmente independentes u e v de S e mostre que qualquer vector $w \in S$ é uma combinação linear de u e v.

$\boxed{4.15\text{exe}}$ Mostre que o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é linearmente independente.

$\boxed{4.16\text{exe}}$ Sejam V um espaço vectorial e $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto de vectores de V linearmente independente. Então, mostre que os seguintes conjuntos também são linearmente independentes:

(a) $\{v_1, v_1 + v_2\}$.

(b) $\{2v_1, v_1 + v_2, -v_1 + v_3\}$.

(c) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$.

$\boxed{4.17\text{exe}}$ Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}_2[x]$ os vectores $u = 1$, $v = 1 - x$ e $w = (1 - x)^2$. Verifique que os vectores u, v e w são linearmente independentes.

$\boxed{4.18\text{exe}}$ Averigue quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^2$:

(a) $A = \{(1,1),(3,0)\}$.

(b) $B = \{(1,1),(0,2),(2,3)\}$.

(c) $C = \{(1,1),(0,8)\}$.

(d) $D = \{(1,-2),(-2,4)\}$.

4.19exe Averigue quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}_3[x]$:

(a) $A = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(b) $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, x^3\}$.

(c) $C = \{2, x, x^2+x^3, x+x^2+x^3\}$.

(d) $D = \{1, 1+x, x^2+x^3\}$.

4.20exe Determine os valores do parâmetro α para os quais o conjunto $\{(\alpha,6),(1,\alpha)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

4.21exe Considere o seguinte subconjunto do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 | x = y - 3z \wedge z = 2w\}.$$

(a) Mostre que V é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Determine uma base e a dimensão de V.

4.22exe Sejam $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e $u_1 = (0,2,0)$, $u_2 = (1,0,0)$ e $u_3 = (-1,6,0)$ três vectores de $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que F é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) Verifique que $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

(c) O conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de F?

(d) Indique a dimensão de F.

$\boxed{\text{4.23exe}}$ Sejam V um espaço vectorial, v_1, v_2, v_3 e v_4 vectores de V e $\{v_1, v_2\}$ uma base de V.

(a) $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é um conjunto gerador de V?

(b) A é constituído por vectores linearmente independentes?

(c) $B = \{v_1\}$ é um conjunto gerador de V?

(d) B é constituído por vectores linearmente independentes?

(e) Seja C um subconjunto de V que gera V. Que pode dizer sobre o número de vectores de C?

(f) Seja D um subconjunto de V constituído por vectores linearmente independentes. Que pode dizer sobre o número de vectores de D?

(g) Em que condições é que $E = \{v_1, v_4\}$ é um conjunto gerador de V?

4.3 Soluções dos Exercícios sobre Espaços Vectoriais

$\boxed{4.3\text{sol}}$

(a) Propriedades (a), (c), (d) e (f).

(b) Propriedades (f).

(c) Propriedades (c), (d) e (f).

$\boxed{4.4\text{sol}}$ (a), (b), (f)

$\boxed{4.5\text{sol}}$

(a) Sim.

(b) Não.

$\boxed{4.6\text{sol}}$

(a) $v = 3v_1$.

(b) v não é uma combinação linear de v_1.

(c) $v = v_1 + \frac{1}{2}v_2$.

(d) $v = \alpha v_1 + \frac{3-\alpha}{2}v_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(e) v não é uma combinação linear de v_1 e v_2.

(f) $v = (\beta - 3)v_1 + \beta v_2 + \frac{6-\beta}{2}v_3$, $\beta \in \mathbb{R}$.

$\boxed{4.7\text{sol}}$

(a) $w = 7u - 3v$.

(b) $\alpha = -8$.

$\boxed{4.8\text{sol}}$ $u = 8v - \frac{3}{2}w$.

$\boxed{4.9\text{sol}}$ A, B e C.

$\boxed{4.10\text{sol}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\boxed{4.11\text{sol}}$

(a) Sim.

(b) Não.

(c) Sim.

(d) Não.

$\boxed{4.12\text{sol}}$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

$\boxed{4.13\text{sol}}$ $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_1 \in \mathbb{R}$, $\beta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\boxed{4.18\text{sol}}$ A e C.

$\boxed{4.19\text{sol}}$ A.

$\boxed{4.20\text{sol}}$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$.

$\boxed{4.21\text{sol}}$ (b) Por exemplo, o conjunto $\{(1,1,0,0),(-6,0,2,1)\}$ é uma base de V e $\dim(V) = 2$.

$\boxed{4.22\text{sol}}$ (c) Não.

(d) $\dim(F) = 2$.

$\boxed{4.23\text{sol}}$ (a) Sim.

(b) Não.

(c) Não.

(d) Sim.

(e) $\#C \geqslant 2$.

(f) $\#D \leqslant 2$.

(g) E é um conjunto gerador de V sse v_1 e v_4 forem vectores linearmente independentes.

Capítulo 5

Transformações Lineares

5.1 Apontamentos sobre Transformações Lineares

5.1obs Na definição que se segue revê-se o conceito de função, estudando-se neste capítulo um seu caso particular — as transformações lineares.

5.2def ⟦função, imagem de um elemento por meio de uma função⟧ Sejam A e B conjuntos e $x \in A$. Diz-se que f é uma função de A em B se associa a cada elemento de A um e só um elemento de B, representando-se por $f(x)$ a imagem de x por f.

5.3def Sejam V e V' espaços vectoriais reais e T uma função de V em V'.

(a) ⟦transformação linear ou homomorfismo⟧ Diz-se que T é uma transformação linear ou um homomorfismo se se verificar as seguintes propriedades:

i. $\forall x, y \in V : T(x + y) = T(x) + T(y)$.

ii. $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

(b) $[\![\mathcal{L}(V, V')]\!]$ Representa-se por $\mathcal{L}(V, V')$ o conjunto de todas as transformações lineares de V em V'.

5.4exe Seja $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (x_2, 0, x_1 + x_2)$. Mostre que T é uma transformação linear.

res **Propriedade (i)**

Definição geral:

$\forall x, y \in V : T(x + y) = T(x) + T(y)$.

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : T(x + y) = T(x) + T(y)$.

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\ &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_2 + y_2, 0, x_1 + y_1 + x_2 + y_2). \qquad \text{(i.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(x) + T(y) &= T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) \\ &= (x_2, 0, x_1 + x_2) + (y_2, 0, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + y_2, 0, x_1 + y_1 + x_2 + y_2). \qquad \text{(i.2)} \end{aligned}$$

Como as expressões (i.1) e (i.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (i) é válida.

Propriedade (ii)

Definição geral:

$\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R} : T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= T(\alpha(x_1, x_2)) \\ &= T(\alpha x_1, \alpha x_2) \\ &= (\alpha x_2, 0, \alpha x_1 + \alpha x_2). \qquad \text{(ii.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha T(x) &= \alpha T(x_1, x_2) \\ &= \alpha(x_2, 0, x_1 + x_2) \\ &= (\alpha x_2, 0, \alpha x_1 + \alpha x_2). \qquad \text{(ii.2)} \end{aligned}$$

Como as expressões (ii.1) e (ii.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (ii) é válida.

Como as expressões (i) e (ii) são válidas, conclui-se que T é uma transformação linear.

5.5exe Seja $T : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(ax + b) = \int_0^1 (ax + b)dx$. Mostre que T é uma transformação linear.

res Exercício.

5.6exe Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(a,b) = (a^2, 0)$. Mostre que g não é uma transformação linear.

res Exercício.

5.7def ⟦endomorfismo⟧ Seja V um espaço vectorial. Chama-se endomorfimo de V a uma transformação linear de V em V.

5.8exe Indique quais das seguintes aplicações lineares são endomorfismos:

(a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T_1(x_1, x_2) = (x_2, 0, x_1 + x_2)$.

(b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_2(x_1, x_2) = (0, 0)$.

(c) $T_3 : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_3(ax + b) = \int_0^1 (ax + b)dx$.

res (a) Não.

(b) Sim.

(c) Não.

5.9teo Sejam V e V' espaços vectoriais e T uma função de V em V'. Então, T é uma transformação linear se e só se

$$\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

5.10obs O teorema anterior indica um processo alternativo à definição 5.3def de verificar se uma função é uma transformação linear.

5.11teo Seja $T \in \mathcal{L}(V, V')$. Então, tem-se:

(a) $T(0_V) = 0_{V'}$.

(b) $\forall x \in V : T(-x) = -T(x)$.

(c) $\forall x, y \in V : T(x - y) = T(x) - T(y)$.

5.12obs O teorema anterior permite concluir que se $T(0_V) \neq 0_{V'}$ ou $\exists x \in V$: $T(-x) \neq -T(x)$ ou $\exists x, y \in V : T(x-y) \neq T(x) - T(y)$, então T não é uma transformação linear. Note-se, ainda, que há funções em que $T(0_V) = 0_{V'}$, $\forall x \in V : T(-x) = -T(x)$ e $\forall x, y \in V : T(x-y) = T(x) - T(y)$ e que não são transformações lineares.

5.13exe Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g(a,b) = (a, 1, a+2b)$. Mostre que g não é uma transformação linear.

res Como $g(0_{\mathbb{R}^2}) = g(0,0) = (0,1,0) \neq (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$, conclui-se que g não é uma transformação linear.

5.14obs Sejam $T \in \mathcal{L}(V, V')$, $C = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base ordenada de V, $C' = (v'_1, \ldots, v'_m)$ uma base ordenada de V' e $v \in V$. Então,

$$\begin{aligned}
&\exists^1 \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,\\
&\exists^1 a_{11}, \ldots, a_{m1} \in \mathbb{K} : T(v_1) = a_{11} v'_1 + \cdots + a_{m1} v'_m,\\
&\qquad \vdots\\
&\exists^1 a_{1n}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{K} : T(v_n) = a_{1n} v'_1 + \cdots + a_{mn} v'_m.
\end{aligned}$$

Tem-se, então, que:

$$\begin{aligned}
T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)\\
&= \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)\\
&= \alpha_1 (a_{11} v'_1 + \cdots + a_{m1} v'_m) + \cdots + \alpha_n (a_{1n} v'_1 + \cdots + a_{mn} v'_m)\\
&= (\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_n a_{1n}) v'_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{m1} + \cdots + \alpha_n a_{mn}) v'_m\\
&= \beta_1 v'_1 + \cdots + \beta_m v'_m,
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

5.15def ⟦matriz de uma transformação linear entre espaços de dimensão finita, $A_{T,C,C'}$, A_T⟧ Sejam $T \in \mathcal{L}(V, V')$, $C = (v_1, \dots, v_n)$ uma base ordenada de V e $C' = (v'_1, \dots, v'_m)$ uma base ordenada de V'. Chama-se matriz da transformação linear T relativamente às bases C e C', que se representa por $A_{T,C,C'}$, à matriz $[a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ introduzida na observação anterior.

Se $V = \mathbb{R}^n$, $V' = \mathbb{R}^m$ e C e C' são as respectivas bases canónicas, então representa-se por A_T a matriz da transformação linear T relativamente às bases C e C'.

5.16exe Determine a matriz da transformação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x, y, z) = (x + 2z, 3x - y)$, relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

res Como

$$T(1, 0, 0) = (1, 3)$$
$$T(0, 1, 0) = (0, -1)$$
$$T(0, 0, 1) = (2, 0),$$

tem-se que

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.17def Seja $T \in \mathcal{L}(V, V')$.

(a) [[imagem de uma transformação linear, $\mathcal{I}_T$]] Chama-se imagem de T, que se representa por $\mathcal{I}_T$, a

$$\mathcal{I}_T := \{T(x) \in V' | x \in V\}.$$

(b) [[núcleo de uma transformação linear, $\mathcal{N}_T$]] Chama-se núcleo de T, que se representa por $\mathcal{N}_T$, a

$$\mathcal{N}_T := \{x \in V | T(x) = 0_{V'}\}.$$

5.18exe Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$. Determine:

(a) $\mathcal{I}_T$.

(b) $\mathcal{N}_T$.

res (a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_T &= \{T(x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1, 1), (0, 2), (1, -1) \rangle.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_T &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | T(x_1, x_2, x_3) = 0_{\mathbb{R}^2}\} \\
&= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3) = (0, 0)\}.
\end{aligned}$$

Tem-se, então, que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right],$$

obtendo-se

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & & + & x_3 & = & 0 \\ & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T &= \{(-a, a, a) | a \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-1, 1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

5.19teo Seja $T \in \mathcal{L}(V, V')$. Então,

(a) $\mathcal{I}_T$ é um subespaço de V'.

(b) $\mathcal{N}_T$ é um subespaço de V.

5.20teo Sejam $T \in \mathcal{L}(V, V')$ e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto gerador de V (em particular, uma base). Então,

(a) T fica definida desde que se conheçam os vectores $T(u_1), \ldots, T(u_n)$.

(b) $\mathcal{I}_T = \langle T(u_1), \ldots, T(u_n) \rangle$.

5.21exe Resolva de novo 5.18exe (a), atendendo ao teorema anterior.

res Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$, *i.e.*, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_T &= \langle T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1) \rangle \\ &= \langle (1,1), (0,2), (1,-1) \rangle. \end{aligned}$$

5.22exe Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, tal que $T(2,2) = (0,1,1)$ e $\mathcal{N}_T = \langle (1,3) \rangle$. Determine a imagem por T de um elemento genérico do seu domínio.

res Como $S = \{(2,2),(1,3)\}$ é um conjunto linearmente independente (verifique!), S é uma base de $\mathbb{R}^2$ (pois $\#S = \dim(\mathbb{R}^2)$), pelo que qualquer elemento de $\mathbb{R}^2$ é uma combinação linear única dos elementos de S, vindo

$$(x,y) = \alpha(2,2) + \beta(1,3).$$

Tem-se, então, que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2\alpha & + & \beta & = & x \\ 2\alpha & + & 3\beta & = & y. \end{cases}$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 2 & 3 & y \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & 2 & y-x \end{array}\right],$$

obtendo-se

$$\begin{cases} 2\alpha & + & \beta & = & x \\ & & 2\beta & = & y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3x-y}{4} \\ \beta = \frac{y-x}{2}. \end{cases}$$

Assim,

$$(x,y) = \frac{3x-y}{4}(2,2) + \frac{y-x}{2}(1,3)$$

pelo que

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T\left(\frac{3x-y}{4}(2,2) + \frac{y-x}{2}(1,3)\right) \\ &= \frac{3x-y}{4}T(2,2) + \frac{y-x}{2}T(1,3) && \text{por } T \text{ ser uma transformação linear} \\ &= \frac{3x-y}{4}(0,1,1) + \frac{y-x}{2}(0,0,0) && \text{por } \mathcal{N}_T = \langle (1,3) \rangle \\ &= (0, \frac{3x-y}{4}, \frac{3x-y}{4}). \end{aligned}$$

5.23def Seja $T \in \mathcal{L}(V, V')$.

(a) [[característica de uma transformação linear, c_T]] Chama-se característica de T, que se denota por c_T, à dimensão do subespaço $\mathcal{I}_T$.

(b) [[nulidade de uma transformação linear, n_T]] Chama-se nulidade de T, que se denota por n_T, à dimensão do subespaço $\mathcal{N}_T$.

5.24teo Seja $T \in \mathcal{L}(V, V')$. Então,

(a) $c(A_T) = c_T$.

(b) Se $\dim(V) = n$, tem-se que $n = c_T + n_T$.

5.25exe Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_3, x_1+2x_2-x_3)$. Determine:

(a) c_T.

(b) uma base de $\mathcal{I}_T$.

(c) n_T.

(d) uma base de $\mathcal{N}_T$.

res (a) Como

$$T(1,0,0) = (1,1)$$
$$T(0,1,0) = (0,2)$$
$$T(0,0,1) = (1,-1),$$

tem-se que

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então, como

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

tem-se que $c(A_T) = 2$, pelo que, aplicando $\boxed{\text{5.24teo}}$(a), vem $c_T \equiv \dim(\mathcal{I}_T) = 2$.

(b) Como $c_T = \dim(\mathcal{I}_T) = 2$, conclui-se que $\mathcal{I}_T = \mathbb{R}^2$, pelo que, por exemplo, $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}_T$.

(c) Aplicando $\boxed{\text{5.24teo}}$(b), tem-se que $\dim(\mathbb{R}^3) = c_T + n_T$, *i.e.*, $3 = 2 + n_T$, pelo que $n_T = 1$ (este valor é confirmado pelo número de variáveis livres em $\mathcal{N}_T$).

(d) Como $\mathcal{N}_T = \langle(-1,1,1)\rangle$ e $n_T = 1$, tem-se que, por exemplo, $\{(-1,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}_T$.

5.2 Exercícios sobre Transformações Lineares

$\boxed{5.1\text{exe}}$ Considere a função $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, 0, x)$. Calcule:

(a) $T(2, 1)$.

(b) $T(y, 1)$.

(c) $T(y, x)$.

(d) $T(x + 2y, 2y - x)$.

$\boxed{5.2\text{exe}}$ Indique se as seguintes funções são transformações lineares:

(a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_1(x, y) = (0, -x)$.

(b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_2(x, y, z) = (x + y + 2, z - 3)$.

(c) $T_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_3(x, y) = |x - y|$.

(d) $T_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T_4(x_1, x_2) = (x_2, 0, x_1)$.

(e) $T_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_5(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$.

(f) $T_6 : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_6(A) = a_{11}$.

(g) $T_7 : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_7(A) = (a_{11})^2$.

(h) $T_8 : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_8(A) = \det(A)$.

(i) $T_9 : \mathbb{R}_2 x \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_9(ax^2 + bx + c) = a$.

(j) $T_{10} : C^1(a, b) \longrightarrow C(a, b)$, $T_{10}(f) = f'$.

$\boxed{5.3\text{exe}}$ Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Determine a relação entre α e β de modo que a transformação $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x + \alpha - 2\beta, -x)$, seja linear.

$\boxed{5.4\text{exe}}$ Determine a imagem, a característica, o núcleo, a nulidade e a matriz relativamente às bases canónicas das seguintes transformações lineares:

(a)

$$\begin{array}{rccc} T_1 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y. \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rccc} T_2 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x+2y+2z). \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rccc} T_3 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-z, 0, y-2z). \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rccc} T_4 : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z,w) & \longmapsto & (x-y, z-w, x-3w). \end{array}$$

5.5exe Para cada uma das alíneas seguintes, determine a função T sabendo que é uma transformação linear definida por:

(a) $T(1,0) = (-1,1,2)$ e $T(0,1) = (3,0,1)$.

(b) $T(1,2) = (3,-1,5)$ e $T(0,1) = (2,1,-1)$.

(c) $T(1,1,1) = 3$, $T(0,1,-2) = 1$ e $T(0,0,1) = -2$.

5.6exe Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, tal que $T(0,0,1) = (0,0,1)$ e $\mathcal{N}_T = \langle (1,1,1), (0,1,1) \rangle$. Determine $T(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

5.7exe Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T(A) = \begin{bmatrix} (A)_{11}+(A)_{12} & (A)_{22} \\ -(A)_{22} & 2(A)_{11} \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Determine as dimensões de $\mathcal{N}_T$ e de $\mathcal{I}_T$.

$\boxed{5.8\text{exe}}$ Sejam $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $T : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $T(A) = AM - MA$.

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Considere $M = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Determine uma base e a dimensão para o núcleo de T.

5.3 Soluções dos Exercícios sobre Transformações Lineares

5.1sol

(a) $T(2,1) = (1,0,2)$.

(b) $T(y,1) = (y-1,0,y)$.

(c) $T(y,x) = (y-x,0,y)$.

(d) $T(x+2y, 2y-x) = (2x, 0, x+2y)$.

5.2sol

(a) Sim.

(b) Não.

(c) Não.

(d) Sim.

(e) Não.

(f) Sim.

(g) Não.

(h) Não.

(i) Sim.

(j) Sim.

5.3sol $\alpha = 2\beta$.

5.4sol

(a) $\mathcal{I}_{T_1} = \mathbb{R}$, $c_{T_1} = 1$,
$\mathcal{N}_{T_1} = \{(x,-x) | x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1) \rangle$, $n_{T_1} = 1$,
$A_{T_1} = [\,1\ 1\,]$.

(b) $\mathcal{I}_{T_2} = \{(x,2x) | x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,2) \rangle$, $c_{T_2} = 1$,
$\mathcal{N}_{T_2} = \{(-y-z, y, z) | y,z \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle$, $n_{T_2} = 2$,
$A_{T_2} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(c) $\mathcal{I}_{T_3} = \{(x,0,z) | x, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0),(0,0,1) \rangle$, $c_{T_3} = 2$,

$\mathcal{N}_{T_3} = \{(z,2z,z) | z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,2,1) \rangle$, $n_{T_3} = 1$,

$A_{T_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(d) $\mathcal{I}_{T_4} = \mathbb{R}^3$, $c_{T_4} = 3$,

$\mathcal{N}_{T_4} = \{(3w,3w,w,w) | w \in \mathbb{R}\} = \langle (3,3,1,1) \rangle$, $n_{T_4} = 1$,

$A_{T_4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

5.5sol (a) $T(x,y) = (-x+3y, x, 2x+y)$.

(b) $T(x,y) = (-x+2y, -3x+y, 7x-y)$.

(c) $T(x,y,z) = 8x - 3y - 2z$.

5.6sol $T(x,y,z) = (0,0,z-y)$.

5.7sol (b) $n_T = 1$, $c_T = 3$.

5.8sol (b) Por exemplo: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $n_T = 2$.

Capítulo 6

Valores e Vectores Próprios

6.1 Apontamentos sobre Valores e Vectores Próprios

6.1def [[vector próprio de uma matriz associado a um valor próprio]] Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ é um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{C}$ se $Ax = \lambda x$.

6.2def [[espectro de uma matriz]] Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se espectro de A, que se representa por $\lambda(A)$, ao conjunto de todos os valores próprios de A.

6.3def [[subespaço próprio de um valor próprio]] Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \lambda(A)$. Chama-se subespaço próprio do valor próprio λ, que se representa por E_λ, ao conjunto

$$E_\lambda := \{x \in \mathbb{C}^n | Ax = \lambda x\}.$$

6.4teo Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \lambda(A)$. Então, E_λ é um subespaço de $\mathbb{C}^n$.

6.5obs

(a) Note-se que existem matrizes reais cujos valores próprios são números complexos.

(b) Cada vector próprio está associado apenas a um valor próprio.

(c) Se x é um vector próprio associado ao valor próprio λ, então, αx, $\alpha \neq 0$, também é um vector próprio associado ao valor próprio λ.

(d) Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \lambda(A)$. Então,

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n | x \text{ é um vector próprio associado ao valor próprio } \lambda\} \cup \{0_{\mathbb{C}^n}\}.$$

(e) Chama-se "subespaço próprio" ao conjunto E_λ devido ao teorema anterior.

(f) O seguinte teorema indica-nos um processo de calcular $\lambda(A)$.

6.6teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, $\lambda \in \lambda(A)$ se e só se $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

6.7def Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦polinómio característico de uma matriz⟧ Chama-se polinómio característico da matriz A, que se representa por $\Pi_A(\lambda)$, ao polinómio

$$\Pi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n).$$

(b) ⟦equação característica de uma matriz⟧ Chama-se equação característica da matriz A à equação $\Pi_A(\lambda) = 0$.

(c) ⟦multiplicidade algébrica de um valor próprio⟧ Seja λ um valor próprio de A. Chama-se multiplicidade algébrica de λ à multiplicidade do escalar λ enquanto raíz da equação característica.

(d) ⟦valor próprio simples⟧ Seja λ um valor próprio de A. Diz-se que λ é um valor próprio simples se tem multiplicidade algébrica um.

6.8teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, o coeficiente do termo de grau n do polinómio característico da matriz A é $(-1)^n$ e o seu termo independente de λ é $\det(A)$.

6.9obs Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, $\Pi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + \cdots + \det(A)$.

6.10obs Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então,

(a) os valores próprios da matriz A são os zeros do seu polinómio característico.

(b) Se λ é um valor próprio da matriz A, então os vectores próprios associados a λ são as soluções não-nulas do sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)x = \underline{0}$.

(c) Do Teorema Fundamental da Álgebra resulta que $\Pi_A(\lambda)$ tem exactamente n zeros, podendo alguns deles ser iguais. Assim, sejam $n_1, n_2, \ldots, n_m$ as multiplicidades dos $m(\leqslant n)$ zeros distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de $\Pi_A(\lambda)$. Então,

$$\Pi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{n_m},$$

em que $n_1+n_2+\cdots+n_m = n$. Aos números $n_1, n_2, \ldots, n_m$ chama-se multiplicidade algébrica dos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, respectivamente.

6.11teo Seja A uma matriz quadrada. Então, A é invertível se e só se $0 \notin \lambda(A)$.

6.12exe Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Determine o espectro da matriz A.

(b) Determine o espaço próprio associado ao valor próprio de menor módulo da matriz A.

res

(a) Seja

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}.$$

Então, aplicando o Teorema de Laplace e fazendo o desenvolvimento a partir da primeira coluna, obtém-se

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= (2-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda)+2) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\ &= (2-\lambda)^2(\lambda - 3), \end{aligned}$$

pelo que

$$\lambda(A) = \{2, 3\},$$

sendo que $\lambda_1 = 2$ é um valor próprio de multiplicidade algébrica dois e $\lambda_2 = 3$ é um valor próprio simples.

C.A.: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 3.$

(b) Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$, tem que se resolver o sistema

$$(A - 2I_3)x_1 = \underline{0}.$$

Aplicando o Método de Gauss, vem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

pelo que

$$\begin{cases} x_{11} = a \in \mathbb{C} \\ x_{12} = 0 \\ x_{13} = 0. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_2 = \{(a, 0, 0) | a \in \mathbb{C}\}.$$

6.2 Exercícios sobre Valores e Vectores Próprios

6.1exe Determine o espectro das seguintes matrizes, bem como os espaços próprios associados aos seus valores próprios:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.2exe Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Então, define-se o traço da matriz A, que se representa por $\mathrm{tr}(A)$, como sendo $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Considerando, agora, a matriz $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$, mostre que

$$\Pi_B(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(B)\lambda + \det(B).$$

6.3exe Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) a matriz A_T é invertível se e só se $CS_{A_T x=\underline{0}} = \{\underline{0}\}$.

(b) A matriz A_T é invertível se e só se $\#CS_{A_T x=b} = 1$, $\forall b \in \mathbb{R}^n$.

(c) A matriz A_T é invertível se e só se $\det(A_T) \neq 0$.

(d) A matriz A_T é invertível se e só se $\mathcal{I}_T = \mathbb{R}^n$.

(e) A matriz A_T é invertível se e só se as colunas da matriz A_T são linearmente independentes.

(f) A matriz A_T é invertível se e só se as linhas da matriz A_T são linearmente independentes.

(g) A matriz A_T é invertível se e só se as colunas da matriz A_T geram $\mathbb{R}^n$.

(h) A matriz A_T é invertível se e só se as linhas da matriz A_T geram $\mathbb{R}^n$.

(i) A matriz A_T é invertível se e só se as colunas da matriz A_T formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

(j) A matriz A_T é invertível se e só se as linhas da matriz A_T formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

(k) A matriz A_T é invertível se e só se $n_T = 0$.

(l) A matriz A_T é invertível se e só se $c_T = n$.

(m) A matriz A_T é invertível se e só se $0 \notin \lambda(A_T)$.

6.3 Soluções dos Exercícios sobre Valores e Vectores Próprios

6.1sol (a) $\lambda(A) = \{-1, 5\}$.

$E_1 = \{(-2\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

$E_5 = \{(\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(b) $\lambda(B) = \{-i, i\}$.

$E_{-i} = \{(\frac{\alpha}{1+i}, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

$E_i = \{(\frac{\alpha}{1-i}, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(c) $\lambda(C) = \{-2, 4\}$, em que o valor próprio $\lambda_1 = -2$ tem multiplicidade algébrica dois.

$E_{-2} = \{(\beta - \alpha, \beta, \alpha) | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

$E_4 = \{(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(d) $\lambda(D) = \{2, 4\}$, em que o valor próprio $\lambda_1 = 2$ tem multiplicidade algébrica dois.

$E_2 = \{(\alpha, \beta, \alpha) | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

$E_4 = \{(-\alpha, 0, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(e) $\lambda(E) = \{0, 2\}$, em que o valor próprio $\lambda_2 = 2$ tem multiplicidade algébrica dois.

$E_0 = \{(\alpha, -\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

$E_2 = \{(\alpha, 0, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(f) $\lambda(F) = \{1, 2, 3\}$.

$E_1 = \{(-\frac{\alpha}{3}, \beta, \alpha) | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

$E_2 = \{(-\frac{\alpha}{2}, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

$E_3 = \{(-\alpha, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

6.3sol Todas as afirmações são verdadeiras.

Apêndice A

Alfabeto Grego

Minúscula	Maiúscula	Nome	Equivalente Latino
α	A	alfa	a
β	B	beta	b
γ	Γ	gama	g
δ	Δ	delta	d
ε	E	épsilon	e
ζ	Z	zeta	z
η	H	eta	e,h
θ	Θ	teta	t
ι	I	iota	i
κ	K	capa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	miu	m
ν	N	niu	n
ξ	Ξ	csi	cs
o	O	ómicron	o
π	Π	pi	p
ρ	P	ró	r
σ	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Υ	ípsilon	u,y
φ, ϕ	Φ	fi	f
χ	X	qui	c,x
ψ	Ψ	psi	ps
ω	Ω	ómega	w

Índice Remissivo