Matemática das Coisas

Parte 1

Modelos Matemáticos
em
Ciências da Vida e da Saúde

Aula de 22 de Fevereiro de 2022

Ana Jacinta Soares

Modelação Matemática

1. **Dinâmica de uma população**
   Modelos de referência para uma espécie

2. **Dinâmica de duas populações**
   Competição de espécies
   Lotka-Volterra

3. **Dinâmica de várias populações**
   Modelo SIR
   Estudo do modelo SIR

Dinâmica de uma população

Modelo de Malthus

Evolução de uma população (nascimentos/mortes)

$$P'(t) = (n - m)P(t)$$

Thomas Malthus (1766-1834)
Economista
Reino Unido

- $P(t)$ número de indivíduos da população, no tempo t
- $P'(t)$ variação de $P(t)$
- n taxa de nascimentos
- m taxa de mortes

Modelo de Malthus

$$\boxed{P'(t) = (n-m)P(t)}$$

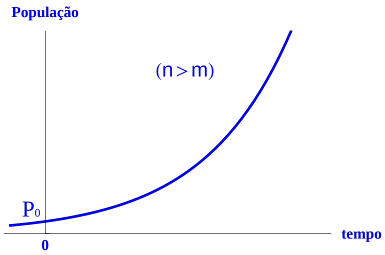
Solução do modelo ("crescimento" exponencial)

$$\boxed{P(t) = P_0\, e^{(n-m)t}, \quad P_0 \text{ população inicial}}$$

Caso n > m

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = +\infty$$

Crescimento não limitado (não controlado)



Modelo de Malthus

$$\boxed{P'(t) = (n-m)P(t)}$$

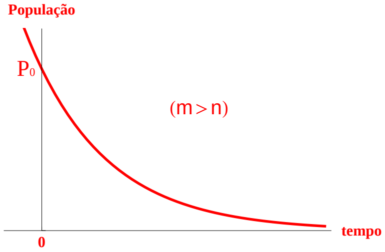
Solução do modelo ("crescimento" exponencial)

$$\boxed{P(t) = P_0\, e^{(n-m)t}, \quad P_0 \text{ população inicial}}$$

Caso m > n

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = 0$$

Extinção da população



Modelo de Malthus

$$\boxed{P'(t) = (n - m)P(t)}$$

Solução do modelo ("crescimento" exponencial)

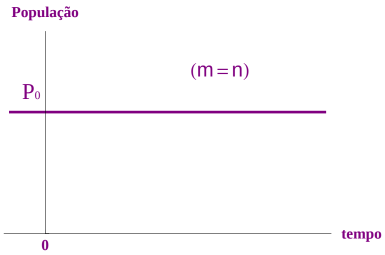
$$\boxed{P(t) = P_0\, e^{(n-m)t}, \quad P_0 \text{ população inicial}}$$

Caso $\mathbf{m = n}$

$P(t) = P_0$

População constante

(sem interesse)



Análise do Modelo de Malthus

- **Modelo muito idealista**
- **Adequado a curtos intervalos de tempo**
  População mundial entre 1700 e 1961
- **Adequado a certas populações animais**
  Evolução de bactérias em laboratório
  Praga biológica
- **Caso contrário, por exemplo se $n > m$**
  Superpopulação (até algum controlo externo)
  no caso de humanos, fome, guerra, doenças, miséria

Modelo de Verhulst

Evolução de uma população (com inibição)

$$P'(t) = \underbrace{(n - m)P(t)}_{\text{nascim \& mortes}} - \underbrace{kP^2(t)}_{\text{inibição}}$$

Pierre Verhulst
(1804-1849)
Matemático, Economista, Político
Bélgica

ou $$P'(t) = aP(t) - kP^2(t)$$

ou $$P'(t) = \Big[a - kP(t)\Big]P(t)$$

$$P'(t) = aP(t)\left[1 - \frac{P(t)}{a/k}\right]$$

$$P'(t) = aP(t)\left[1 - \frac{P(t)}{s}\right]$$

Modelo de Verhulst

Solução do modelo ("crescimento" controlado)

$$\boxed{P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}} \,, \quad P_0 \text{ população inicial}}$$

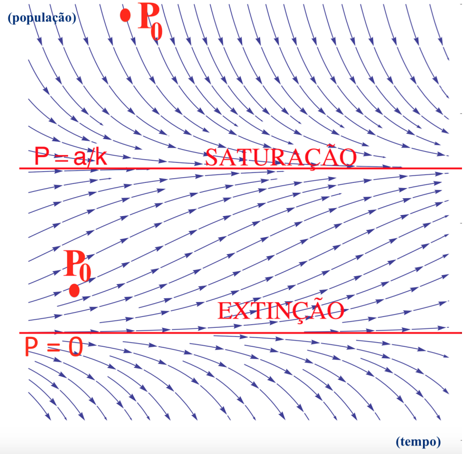
$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \frac{a}{k}$$

$\dfrac{a}{k}$ capacidade ou nível de saturação do meio ambiente

Crescimento ou Decrescimento controlado, desde P_0 até $\frac{a}{k}$

Modelo de Verhulst (solução)

$$P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}}\,, \quad \lim_{t \to +\infty} P(t) = \frac{a}{k}$$



Comportamento qualitativo da solução (possíveis trajectórias)

Modelo de Verhulst

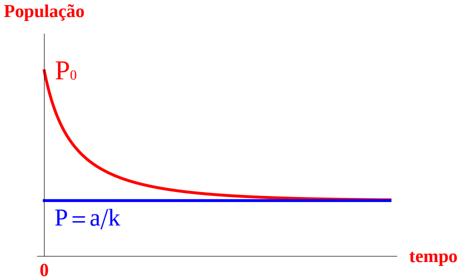
Solução do modelo

$$P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}}\ , \quad P_0 \text{ população inicial}$$

Caso $\mathbf{P_0 > \frac{a}{k}}$

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \frac{a}{k}$$

População diminui



Modelo de Verhulst

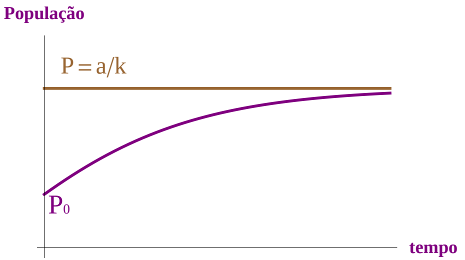
Solução do modelo

$$P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}} \ , \quad P_0 \text{ população inicial}$$

Caso $P_0 < \frac{a}{k}$

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \frac{a}{k}$$

População aumenta



Análise do Modelo de Verhulst

- **Modelo menos idealista**
- **A evolução da população tem em conta os recursos disponíveis**

  alimentares, ambientais

  capacidade do meio
- **Factores ecológicos**
- **Processos selectivos**

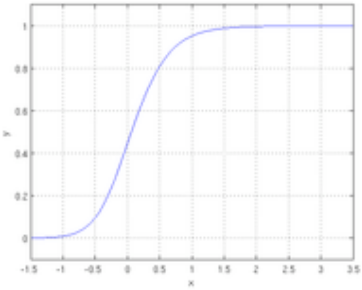
  que controlam o crescimento da população

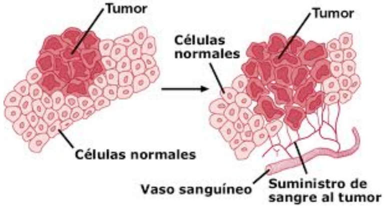
Aplicações notáveis

Medicina

Crescimento de tumores

Inibição: quimioterapia, fármacos



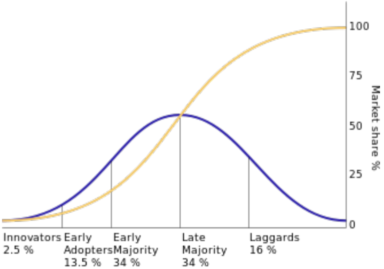


Aplicações notáveis

Economia & Sociologia

Difusão de ideias novas
tecnologias inovadoras

Inibição: natural, espontânea
associada ao consumo
bem como às imitações



AZUL: Consumidores
LARANJA: Saturação do mercado

Modelos Sazonais

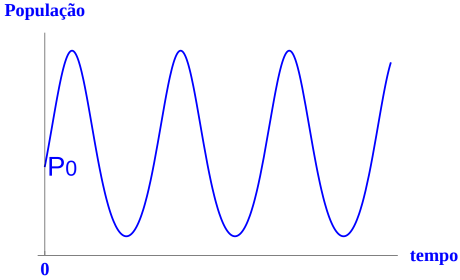
- Evolução depende fortemente da estação do ano ou de outros fenómenos periódicos
- Há uma grande alternância de comportamento

Modelo típico

$$P'(t) = k \cos(\gamma t)\, P(t)$$

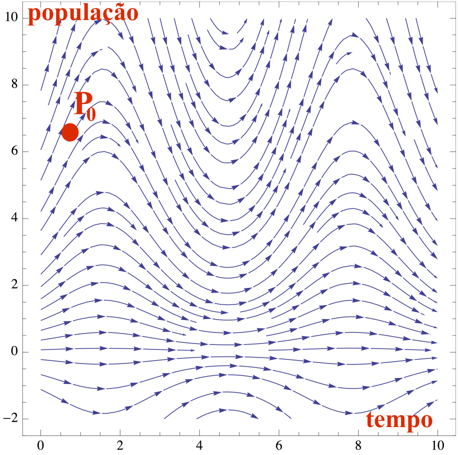
Solução

$$P(t) = P_0 e^{k/\gamma \operatorname{sen}(\gamma t)}$$



Modelos Sazonais

Aplicações: Turismo, alguns animais



Comportamento qualitativo da solução (possíveis trajectórias)

Dinâmica de duas populações

Modelos de Interacção (duas populações)

- Competição de espécies
- Duas espécies partilham um território comum
  ou dividem recursos alimentares
- Espécies que se inibem mutuamente
- Espécies que se favorecem mutuamente
- Sistemas de tipo **Presa-Predador**
  uma espécie é inibida e a outra é benificiada

Equações do modelo

- Duas populações $P(t)$ e $Q(t)$
- Sistema de duas equações de evolução

Equações do modelo

Se as espécies evoluíssem sozinhas (Verhulst), teríamos

$$\begin{cases} P'(t) = \big[a - bP(t)\big]P(t) = aP(t)\left[1 - \dfrac{P(t)}{s}\right] \\ Q'(t) = \big[c - dQ(t)\big]Q(t) = cQ(t)\left[1 - \dfrac{Q(t)}{r}\right] \end{cases}$$

a e c $\longrightarrow$ taxas de crescimento intrínseco das populações

b e d $\longrightarrow$ taxas inibidoras de crescimento da espécie (competição intra-espécie)

s e r $\longrightarrow$ níveis de saturação das espécies (número máx de indivíduos)

Mas não é assim ...

porque as espécies interagem

Equações do modelo

As espécies interagem

Por exemplo, se competirem, então

a presença de uma espécie é prejudicial para a outra

$$\begin{cases} P'(t) = \left[a - bP(t) - kQ(t)\right] P(t) \\ Q'(t) = \left[c - dQ(t) - \ell P(t)\right] Q(t) \end{cases}$$

a e c $\longrightarrow$ taxas de crescimento intrínseco das populações
b e d $\longrightarrow$ taxas inibidoras de crescimento das espécies

k e ℓ $\longrightarrow$ efeito competitivo de uma espécie sobre a outra

Várias coisas podem acontecer

- Ocorre extinção das duas espécies
- Só uma das espécies sobrevive (a outra extingue-se)
- As duas espécies sobrevivem, e encontram uma "convivência estável"

Com técnicas da **Teoria dos Sistemas Dinâmicos**, podemos prever estas situações, fazendo uma **análise qualitativa da solução** do modelo

(pontos de equilíbrio e estabilidade).

Equações do modelo

As espécies interagem

Numa relação de **mutualismo**, a presença de cada uma das espécies é benéfica para a outra

$$\begin{cases} P'(t) = \big[a - bP(t) + kQ(t)\big]P(t) \\ Q'(t) = \big[c - dQ(t) + \ell P(t)\big]Q(t) \end{cases}$$

a e c $\longrightarrow$ taxas de crescimento intrínseco das populações
b e d $\longrightarrow$ taxas inibidoras de crescimento das espécies

k e ℓ $\longrightarrow$ efeito benéfico de uma espécie sobre a outra

Exemplo: ruminantes e micro-organismos nos seus estômagos, ajudam na digestão dos vegetais ingeridos pelos ruminantes

Outras variantes

- **Parasita-Hospedeiro**

  uma espécie tira vantagens da outra

  pode haver ou não prejuízo para o hospedeiro

- **Comensalismo**

  uma beneficia e para a outra é indiferente

  rémora (beneficia) e tubarão (transporta) a rémora

  rémora alimenta-se dos restos que o tubarão rejeita

- **Presa-Predador**

  uma espécie alimenta-se da outra

Modelo Presa-Predador

Há uma competição feroz entre duas espécies

Predador ataca e Presa defende-se

O Predador alimenta-se da Presa

Pode ser uma relação de CANIBALISMO

populações da mesma "espécie"

selecção natural dentro da espécie

para eliminar os indivíduos "defeituosos"

Modelo Lotka-Volterra

Alfred Lotka (1880–1949)
Ucrânia

Vito Volterra (1860–1940)
Itália

Lince ibérico & Coelho bravo

Lince (Predador)

Coelho bravo (Presa)

Modelo

$$\begin{cases} P'(t) = \quad aP(t) - \alpha P(t)Q(t) \\ Q'(t) = -cQ(t) + \gamma P(t)Q(t) \end{cases}$$

Quem é quem?

Modelo

$$\begin{cases} P'(t) = \quad aP(t) - \alpha P(t)Q(t) & \text{(Presa)} \\ Q'(t) = -cQ(t) + \gamma P(t)Q(t) & \text{(Predador)} \end{cases}$$

População de presas isolada

$$P'(t) = aP(t)$$

crescimento exponencial

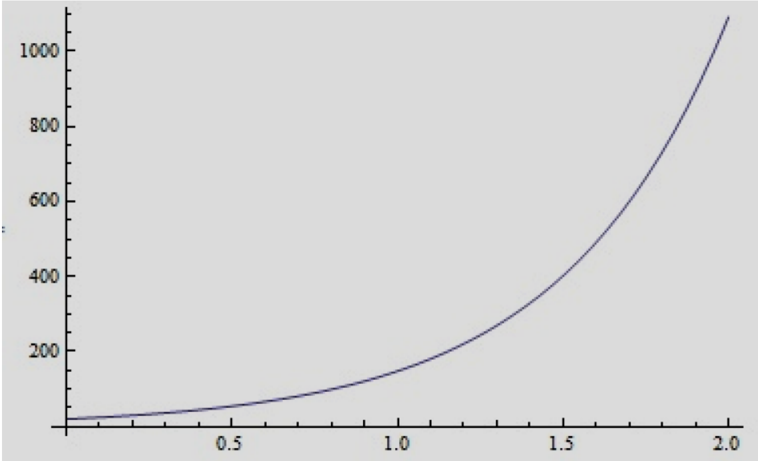
População de predadores isolada

$$Q'(t) = -cQ(t)$$

decrescimento exponencial (extinção)

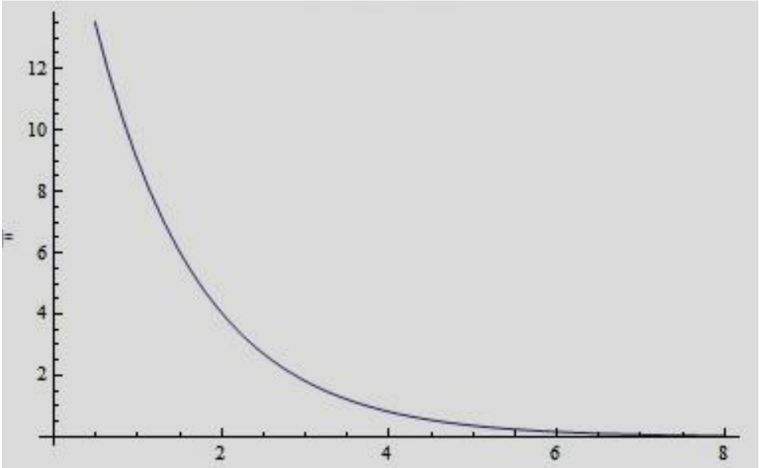
Presas isoladas (solução exacta)

$$\boxed{P(t) = P_0\, e^{at}}$$



Predadores isolados (solução exacta)

$$\boxed{Q(t) = Q_0\, e^{-ct}}$$



Modelo completo

$$\begin{cases} P'(t) = \quad aP(t) - \alpha P(t)Q(t) & \text{(Presa)} \\ Q'(t) = -cQ(t) + \gamma P(t)Q(t) & \text{(Predador)} \end{cases}$$

Analiticamente

não é possível determinar a solução exacta

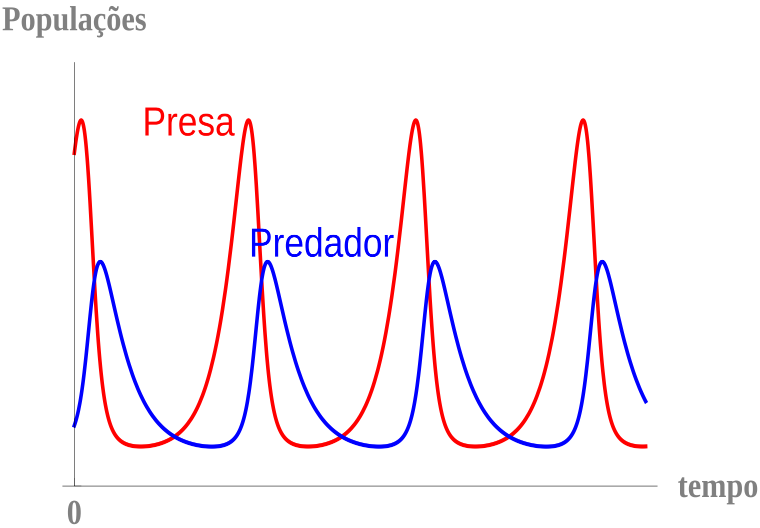
Numericamente

procuramos uma solução aproximada

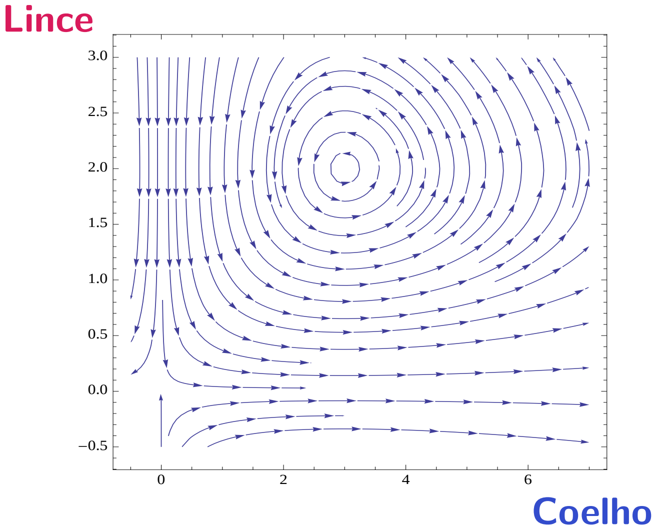
Estudamos

o comportamento qualitativo da solução (exacta)

Solução numérica (aproximada)



Comportamento qualitativo sua solução



Dinâmica de três populações

(próxima aula)