Álgebra Linear e Geometria Analítica

EGI+EIC

Exame da 2ª chamada da Época Normal – ano lectivo 2005/2006 – 2 de Fevereiro de 2006

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia – Guimarães – Universidade do Minho

Curso: Nome: Número: Classificação:

A prova tem a duração de 120 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. Durante a realização da prova os telemóveis devem estar desligados e só se pode abandonar a sala passados 20 minutos do seu início. A prova é constituído por três grupos e termina com a palavra "Fim". No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 200.

Grupo I — Indique, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas usando para tal os caracteres "V" ou "F", respectivamente. Cotações — resposta certa: 5; resposta em branco: 0; resposta errada: -5, sendo 0 é cotação mínima neste grupo.

I.1 ☐ Seja $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tal que $f(p,q,r) = p + q - r$. Então, a matriz da aplicação linear f é $A_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

I.2 ☐ Seja $S = \{(1,0),(2,1),(0,0),(2,0)\}$. Então, $L(S) = \mathbb{R}^4$.

I.3 ☐ Seja A uma matriz invertível. Então, $\det(A) \neq 0$.

I.4 ☐ $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

I.5 ☐ $\langle (1,-2,0),(2,1,0) \rangle = \langle (3,-1,0),(-1,1,0) \rangle$.

I.6 ☐ Seja a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y + 1$. Então, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

I.7 ☐ Seja $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que $f(a,b) = (a, a+b)$. Então, $c_f = 2$.

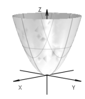
I.8 ☐ Sejam V um espaço vectorial com dimensão finita e X um subespaço de V. Então, $\dim(X) = \dim(V)$ se e só se $X = V$.

Grupo II — Complete, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, as seguintes frases de modo a obter proposições verdadeiras. Cotações — resposta certa: 5; resposta em branco ou errada: 0.

II.1 ☐ é uma matriz real singular de ordem 2.

II.2 ☐ é uma base do espaço vectorial real $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x+y \end{bmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

II.3 À quádrica $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ chama-se ______________________ .

II.4 Considere o parabolóide circular cuja representação gráfica é  . ______________________ e

______________________ são equações possíveis para o descrever.

Grupo III — Responda, nas folhas que lhe foram distribuídas e por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar, bem como as respectivas justificações. Cotações: 15+20+15+(5+5)+20+20+20+20.

III.1 Sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = nA$. Mostre que $(I_n - A)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1}A$.

III.2 Demonstre o seguinte resultado: "Seja A uma matriz invertível. Então, a sua inversa é única."

III.3 Considere o conjunto $V = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ munido das operações $(x, x^2) \oplus (y, y^2) = (x+y, (x+y)^2)$ e $\alpha \odot (x, x^2) = (\alpha x, \alpha^2 x^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Verifique se é válida a afirmação: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \underline{x} \in V : (\alpha + \beta) \odot \underline{x} = \alpha \odot \underline{x} \oplus \beta \odot \underline{x}$.

III.4 Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ e o vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre, sem o resolver, que o sistema de equações lineares dado é possível e determinado.

(b) Considere o seguinte teorema, conhecido por Regra de Cramer: " Seja $Ax = b$ um sistema de n equações lineares a n incógnitas. Se o sistema é possível e determinado então $x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}, i = 1, \ldots, n$, em que Δ_i é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A, na qual se substitui a coluna i pelo vector b."

Resolva o sistema de equações lineares dado através da Regra de Cramer.

III.5 Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$. Resolva-o através do método de Gauss e do método de Gauss-Jordan.

III.6 Determine a nulidade da aplicação linear dada por
$$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x + z). \end{array}$$

III.7 Determine o espectro da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, bem como o conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio de menor módulo.

III.8 Considere, em $\mathbb{R}^3$, o plano α definido pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ e $C = (1, 1, 1)$. Determine a distância do plano α à origem.

Fim.