Problema: Seja a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longrightarrow (x+y,\ 2x,\ 2y)$$

a) Mostre que T é injectiva

PROCESSO I: Recorrendo à definição

$$\forall_{X,Y \in \mathbb{R}^2} \quad T(X) = T(Y) \Rightarrow X = Y$$

Sejam
$$X = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$$
$$Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$T(X) = T(Y) \Rightarrow (x_1+y_1, 2x_1, 2y_1) = (x_2+y_2, 2x_2, 2y_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+y_1 = x_2+y_2 \\ 2x_1 = 2x_2 \\ 2y_1 = 2y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow X = Y$$

PROCESSO II: Recorrendo ao núcleo, $N(T)$

Se T é uma transformação linear, então

$$T \text{ é injectiva} \Leftrightarrow N(T) = \{(0,0)\}$$

$$N(T) = \{X \in \mathbb{R}^2 : T(X) = (0,0,0)\}$$

$$T(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x+y, 2x, 2y) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow N(T) = \{(0,0)\}$$

b) Determine a respectiva função inversa

Uma vez que $\dim N(T) = 0$, o teorema da dimensão permite concluir que

$$\dim T(\mathbb{R}^2) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim N(T) = 2$$

pelo que

$$T(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$$

isto é, T não é sobrejectiva.

Assim, $\quad T^{-1} : T(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Calculemos o contradomínio, $T(\mathbb{R}^2)$

$$T(\mathbb{R}^2) = \{ y \in \mathbb{R}^3 : \exists_{x \in \mathbb{R}^2} \ T(x) = y \}$$

Seja $y = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$$T(x) = y \iff (x+y, 2x, 2y) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x+y = a \\ 2x = b \\ 2y = c \end{cases}$$

Convém notar que:

$$\underline{\text{Sistema}} \begin{cases} \underline{\text{Impossível}} : y \notin T(\mathbb{R}^2) \\ \underline{\text{Possível}} : y \in T(\mathbb{R}^2) \begin{cases} \underline{\text{Determinado}} : \underline{T \text{ é injectiva}} \\ \text{Indeterminado} : T \text{ não é injectiva} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} (x) & (y) \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 2 & c \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b-2a \\ 0 & 2 & c \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b-2a \\ 0 & 0 & c+b-2a \end{array}\right] \quad (*)$$

O sistema é impossível, $y \notin T(\mathbb{R}^2) \iff c+b-2a \neq 0$

O sistema é possível e determinado ($y \in T(\mathbb{R}^2)$ e T é injectiva)

$$\iff c+b-2a = 0 \iff c = 2a-b \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

$$T(\mathbb{R}^2) = \{ y = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = 2a-b \} =$$

$$= \{ y = (a,b,2a-b) \in \mathbb{R}^3 \} \subset \mathbb{R}^3 \quad (T \text{ não é sobrejectiva})$$

Base $T(\mathbb{R}^2) = \{ (1,0,2), (0,1,-1) \}$

A solução do sistema de equações lineares $(*)$ é

$$\begin{cases} x = a - y \\ y = \frac{1}{2}(2a-b) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{b}{2} \\ y = \frac{1}{2}(2a-b) \end{cases}$$

Tem-se, então,

$$\underset{c = 2a-b}{T^{-1}(a,b,c)} = (x,y)$$

pelo que

$$T^{-1} : T(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(a, b, 2a-b) \longrightarrow \left(\frac{b}{2}, \frac{1}{2}(2a-b)\right)$$

<u>Atentemos no seguinte</u>:

i) $$T^{-1}T = I_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow (x,y)$$

$$(T^{-1}T)(x,y) = T^{-1}\left[T(x,y)\right] = T^{-1}(x+y, 2x, 2y) =$$

$$= \left(\frac{2x}{2}, \frac{1}{2}\left(\cancel{2x}+2y-\cancel{2x}\right)\right) = (x, y) \checkmark$$

T^{-1} é inversa à esquerda de T

ii) $$TT^{-1} = I_{T(\mathbb{R}^2)} : T(\mathbb{R}^2) \longrightarrow T(\mathbb{R}^2)$$
$$(a,b,2a-b) \longrightarrow (a, b, 2a-b)$$

$$(TT^{-1})(a,b,2a-b) = T\left[T^{-1}(a,b,2a-b)\right] = T\left(\frac{b}{2}, \frac{1}{2}(2a-b)\right) =$$

$$= \left(\frac{b}{2} + \frac{1}{2}(2a-b), 2\frac{b}{2}, 2\frac{1}{2}(2a-b)\right) =$$

$$= (a, b, 2a-b) \checkmark$$

T^{-1} é inversa à direita de T

José Araújo Barbosa