Matemática das Coisas

Parte 1

Modelos Matemáticos
em
Ciências da Vida e da Saúde

Aula de 8 de Março de 2022

Ana Jacinta Soares

Modelação Matemática

1. **Dinâmica de uma população**

   Modelos de referência para uma espécie

2. **Dinâmica de duas populações**

   Competição de espécies

   Lotka-Volterra

3. **Dinâmica de várias populações**

   Modelo SIR

   Estudo do modelo SIR

Modelo SIR
Estudo & Simulações

Modelo SIR (Kermack & Mc-Kendrik, 1927)

Estudo de uma **epidemia** que se transmite através do

contacto entre pessoas **infectadas** e pessoas **saudáveis**

As pessoas **saudáveis** são **susceptíveis** de se infectarem, contraindo a doença.

As pessoas **infectadas** acabam por **recuperar** da doença ou por padecer de forma drástica, morrendo.

Se quem já esteve doente ficar imune e não se infectar novamente, então os indivíduos recuperados são **removidos** da dinâmica da infecção.

Consideremos uma determinada população com **N indivíduos**. Vamos organizar esta população em três classes

- **S** (indivíduos susceptíveis) $\longrightarrow$ aqueles que podem ser contaminados quando em contacto com indivíduos doentes

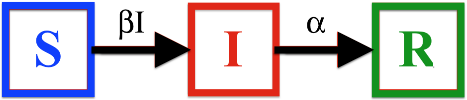
- **I** (indivíduos infectados) $\longrightarrow$ aqueles que tiveram contacto com a doença e que podem contaminar outros indivíduos quando em contacto com indivíduos susceptíveis

- **R** (indivíduos recuperados) $\longrightarrow$ aqueles que já contraíram a doença e que foram removidos da classe, porque recuperaram ou porque acabaram por morrer

Vamos seguir a evolução, no tempo, do número de indivíduos de cada classe, digamos

$$S(t),\ I(t),\ R(t)$$

Tomaremos como ponto de partida o **diagrama de fluxo** de propagação da epidemia, dado por

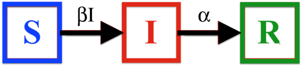


onde

$\beta I \longrightarrow$ taxa de infecção
$\beta \longrightarrow$ coeficiente de transmissão da infecção
$\alpha \longrightarrow$ taxa de recuperação de indivíduos

Modelo útil na **previsão de evolução** da epidemia e na **tomada de decisão** sobre estratégias de combate à sua propagação, como medidas de **vacinação** e de **quarentena**.

Equações do Modelo SIR

Do **diagrama de fluxo** 

vemos que

- **a classe $\boxed{\mathsf{S}}$ apenas perde indivíduos** da interacção **S** $\leftrightarrow$ **I**

  [vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]

- **a classe $\boxed{\mathsf{I}}$ recebe e perde indivíduos**

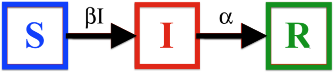
  recebe indivíduos da interacção **S** $\leftrightarrow$ **I**

  perde indivíduos a uma taxa constante

  [vamos ter um termo de *ganho* e outro de *perda* na equação de $I(t)$]

- **a classe $\boxed{\mathsf{R}}$ apenas recebe indivíduos** a uma taxa constante

  [vamos ter apenas um termo de *ganho* na equação de $R(t)$]



- **a classe $\boxed{\textbf{S}}$ apenas perde indivíduos** da interacção **S** $\leftrightarrow$ **I**

  [vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

- **a classe $\boxed{\textbf{I}}$ recebe indivíduos** da interacção **S** $\leftrightarrow$ **I**
  e perde indivíduos a uma taxa constante

  [vamos ter um termo de *ganho* e outro de *perda* na equação de $I(t)$]

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

- **a classe $\boxed{\textbf{R}}$ apenas recebe indivíduos** a uma taxa constante

  [vamos ter apenas um termo de *ganho* na equação de $R(t)$]

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Equações do Modelo SIR

A evolução do número de indivíduos de cada classe é dada por

$$S'(t) = -\beta S(t) I(t)$$
$$I'(t) = \beta S(t) I(t) - \alpha I(t)$$
$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Como o número total de indivíduos permanece constante, temos

$$S(t) + I(t) + R(t) = \mathbf{N}$$
$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = \mathbf{0}$$

e podemos trabalhar com o modelo reduzido

$$S'(t) = -\beta S(t) I(t)$$
$$I'(t) = \beta S(t) I(t) - \alpha I(t)$$

porque

$$R(t) = \mathbf{N} - S(t) - I(t)$$

Estudo do Modelo SIR

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$
$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$
$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Este é um sistema de **equações diferencias ordinárias (EDOs)**
Para valores iniciais positivos, $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$, o sistema possui, em tempos finitos, uma única solução positiva e limitada.

$\boxed{\textbf{Propriedades}}$

- **sistema não linear** (as equações contêm produtos de incógnitas)
- **sistema acoplado** (as equações de uma classe envolvem as densidades das outras classes)

Como obter uma **solução analítica** exacta do sistema?

- **sistema autónomo** (os termos sem derivada não envolvem a variável t explicitamente)

Estudamos o sistema como um **sistema dinâmico autónomo**
Determinamos **numericamente** uma sua solução **aproximada**

Análise qualitativa da solução

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$
$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$
$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Vemos que

- $S'(t) \leq 0$ e $S'(t) = 0$ sse $S(t) = 0$ ou $I(t) = 0$
- $R'(t) \geq 0$ e $R'(t) = 0$ sse $I(t) = 0$

Logo

$S(t)$ é decrescente e $R(t)$ é crescente

Quanto a $I'(t)$, temos que

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) = I(t)\Big[\beta S(t) - \alpha\Big]$$

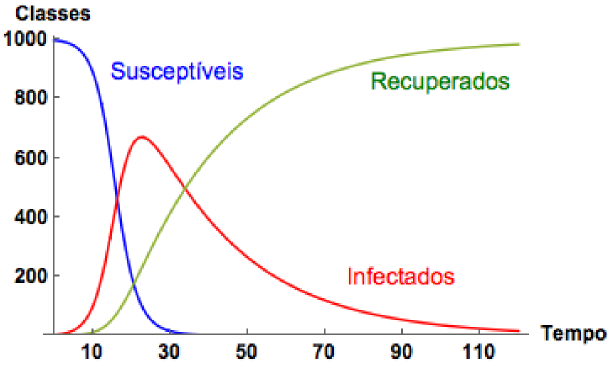
pelo que

- $I'(t) \geq 0$ se $S(t) \geq \dfrac{\alpha}{\beta}$ e $I'(t) \leq 0$ se $S(t) \leq \dfrac{\alpha}{\beta}$

ou seja

$I(t)$ cresce enquanto $S(t) > \alpha/\beta$ e decresce enquanto $S(t) < \alpha/\beta$
atingindo um máximo quando $S(t) = \alpha/\beta$

Resolução numérica do sistema (solução aproximada)



$\alpha = 0.04$, $\beta = 0.0004$, $\mathbf{N} = 1000$, $S(0) = 997$, $I(0) = 3$, $R(0) = 0$

Neste caso, $\alpha/\beta = 100$ e, de facto,

$I(t)$ mantém-se crescente até $S(t)$ atingir o valor $= 100$
e passa a ser decrescente para $S(t) < 100$

Relação entre $S(t)$ e $I(t)$

Das equações para S e I,

$$S'(t) = -\beta S(t) I(t), \qquad I'(t) = \beta S(t) I(t) - \alpha I(t),$$

dividindo a segunda pela primeira, e enquanto $S \neq 0$, $I \neq 0$, vem

$$\frac{I'(t)}{S'(t)} = \frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} = \frac{dI}{dS} = \frac{\beta S I - \alpha I}{-\beta S I} \iff \boxed{\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{S}}$$

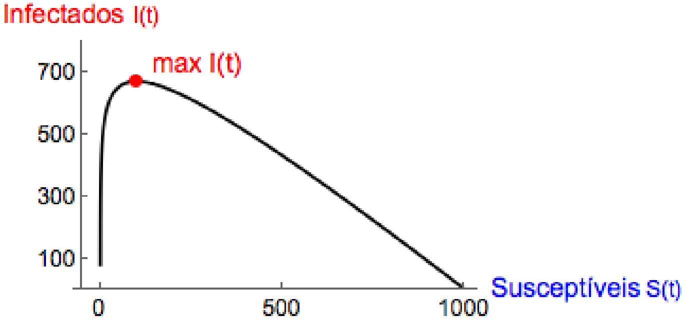
que é uma EDO de variáveis separáveis.

Resolvendo esta EDO, obtemos

$$\boxed{I = \frac{\alpha}{\beta}\ln(S) - S + \left[S_0 + I_0 - \frac{\alpha}{\beta}\ln(S_0)\right]}$$

Graficamente

$$\boxed{I = \frac{\alpha}{\beta}\ln(S) - S + \left[S_0 + I_0 - \frac{\alpha}{\beta}\ln(S_0)\right]}$$



$\alpha = 0.04, \quad \beta = 0.0004, \quad \mathbf{N} = 1000, \quad S_0 = 997, \quad I_0 = 3, \quad R_0 = 0$

Estudo do sistema dinâmico "reduzido"

$$S' = -\beta S I$$
$$I' = \beta S I - \alpha I$$

Procurar os pontos de equilíbrio

$$\beta S I = 0, \quad \beta S I - \alpha I = 0$$

Soluções

$$\Big(S = 0 \vee I = 0\Big) \quad \wedge \quad \Big(S = \alpha/\beta \vee I = 0\Big)$$

Pontos de equilíbrio

$$\left(S_1^*, I_1^*\right) = \left(0, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(S_2^*, I_2^*\right) = \left(\alpha/\beta, 0\right)$$

Estabilidade linear dos pontos de equilíbrio

$$\left(S_1^*, I_1^*\right) = \left(0, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(S_2^*, I_2^*\right) = \left(\alpha/\beta, 0\right)$$

Partimos do sistema "reduzido"

$$S' = -\beta S I$$
$$I' = \beta S I - \alpha I$$

e definimos as funções (segundo membro das equações)

$$F(S, I) = -\beta S I, \quad G(S, I) = \beta S I - \alpha I$$

Construímos a chamada **matriz Jacobiana**

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial S} & \dfrac{\partial F}{\partial I} \\ \dfrac{\partial G}{\partial S} & \dfrac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}$$

Montamos a **matriz Jacobiana** em cada ponto de equilíbrio

$$\left(S_1^*, I_1^*\right) = \left(0, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(S_2^*, I_2^*\right) = \left(\alpha/\beta, 0\right)$$

Vem

$$\mathbf{J}(S_1^*, I_1^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{J}(S_2^*, I_2^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(\alpha/\beta,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Precisamos de calcular os **valores próprios** destas matrizes

Para $\mathbf{J}(S_1^*, I_1^*)$, são $\quad \lambda_{1(1)} = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_{1(2)} = -\alpha$

Para $\mathbf{J}(S_2^*, I_2^*)$, são $\quad \lambda_{2(1)} = \lambda_{2(2)} = 0$

Nada se pode concluir sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio. Seria necessário uma análise detalhada usando os vectores próprios.

Sobre a estabilidade

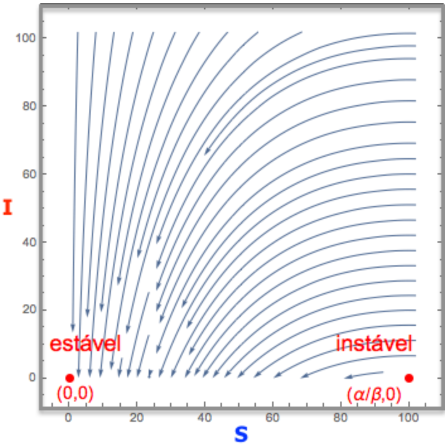
Table – Stability and Instability Properties of Linear and Almost Linear Systems

	Linear System		Almost Linear System	
r_1, r_2	Type	Stability	Type	Stability
$r_1 > r_2 > 0$	N	Unstable	N	Unstable
$r_1 < r_2 < 0$	N	Asymptotically stable	N	Asymptotically stable
$r_2 < 0 < r_1$	SP	Unstable	SP	Unstable
$r_1 = r_2 > 0$	PN or IN	Unstable	N or SpP	Unstable
$r_1 = r_2 < 0$	PN or IN	Asymptotically stable	N or SpP	Asymptotically stable
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$				
$\lambda > 0$	SpP	Unstable	SpP	Unstable
$\lambda < 0$	SpP	Asymptotically stable	SpP	Asymptotically stable
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	C	Stable	C or SpP	Indeterminate

Note: N, node; IN, improper node; PN, proper node; SP, saddle point; SpP, spiral point; C, center.

Boyce & DePrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems

Retrato de fase (trajectórias da solução)



$(0,0)$ atrai as trajectórias $\longrightarrow$ estável (atractor)
$(\alpha/\beta, 0)$ repele as trajectórias $\longrightarrow$ instável (repulsor)

A tarefa do primeiro trabalho a realizar em grupo
será o estudo de um modelo,
seguindo os passos aqui apresentados.

O estudo do modelo SIR funcionará como guião desse trabalho.