DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES 08/06/ 2017

Duração: 120 minutos

2º Teste de Análise Matemática EE

Nome: ______________________ Nr.: __________ Curso:

GRUPO I(10,4 valores)

Em cada uma das perguntas seguintes, apresente a resposta sem apresentar cálculos.

1. Considere a função real $f(x,y) = \sin(xy)\cos(x)$. O gradiente de f num ponto (a,b) do seu domínio é:

$$\vec\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(y\cos(xy)\cos x - \operatorname{sen} x\,\operatorname{sen}(xy),\ x\cos(xy)\cos x\right)$$

2. A derivada direccional da função $f(x,y) = x^2\ln y$ na direção do vetor $\vec u = (u_1,u_2)$ no ponto (a,b) é:

$$D_{\vec u} f(x,y) = \vec\nabla f(x,y)\cdot\frac{\vec v}{\|\vec v\|} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\left(2x\ln y\, v_1 + \frac{x^2}{y}v_2\right)$$

3. Uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ no ponto $(1,2,f(1,2))$ é:

$$z = f(1,2) = \frac12 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -\frac14\end{array}\right. \qquad 1(x-1) - \frac14(y-2) - \left(z-\frac12\right) = 0 \Leftrightarrow z = (x-1) - \frac14(y-2) + \frac12$$

4. Considere a relação $z = f(t^2+3u, u\ln t)$ onde f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Determine:

(a) $$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\times 3 + \frac{\partial z}{\partial y}\ln t = 3\frac{\partial z}{\partial x} + \ln t\frac{\partial z}{\partial y}$$

(b) $$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(3\frac{\partial z}{\partial u} + \ln t\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 3\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \ln t\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \ln t\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = (*)$$

5. Considere a função real $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y^3}$. Indique a direção segundo a qual a função f tem maior taxa de variação no ponto (a,b) do seu domínio. Na direção do gradiente, isto é,

$$\vec\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{2x(x+y^3) - 1\times x^2}{(x+y^3)^2}, x^2\left(-1(x+y^3)^{-2}(3y^2)\right)\right) = \left(\frac{x^2+2xy^3}{(x+y^3)^2}, \frac{-3x^2y^2}{(x+y^3)^2}\right)$$

6. Considere a função real $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\cos y}$.

(a) Escreva o polinómio de Taylor de grau 2 da função f no ponto $(3,0)$.

$$P_2(3,0) = f(3,0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(3,0)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,0)(y-0)\right) + \frac12\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,0)(x-3)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(3,0) \ldots\right.$$

$$= 9 + \frac{2\times 3}{1}(x-3) + 6\times\frac{0}{1^2}(y-0) + \frac12\left(\frac{2}{1}(x-3)^2 + 2\left(\frac{-2\times3\,\operatorname{sen}0}{1^2}\right)(x-3)(y-0) + \ldots\right.$$

$$= 9 + 6(x-3) + (x-3)^2 - 3(y-0)^2$$

(b) Escreva o diferencial de f no ponto $(3,0)$.

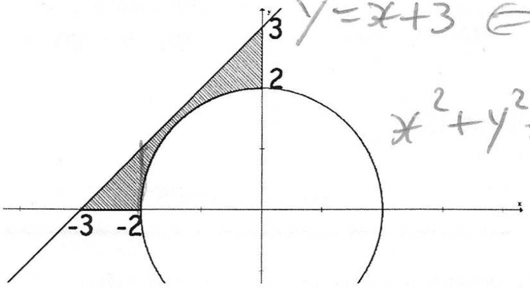
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 6dx + 0dy = 6dx$$

(c) Escreva uma expressão que permite calcular uma aproximação de $\dfrac{3.01^2}{\cos(-0.01)}$, usando diferenciais.

$$f(3.01, -0.01) = f(\underbrace{3+0.01}_{dx}, \underbrace{0-0.01}_{dy}) \approx f(3,0) + df(3,0) = \frac91 + 6\times 0.01 = 9.06$$

$$(*) = 3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\times 3 + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\times\ln t\right) + \ln t\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\times 3 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ln t\right) =$$

7. Considere a região plana sombreada na figura.



$y = x+3 \Leftrightarrow x = y-3$

$x^2+y^2=4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{4-y^2}$

(a) Escreva o integral duplo ou soma de integrais duplos que permite calcular a área da região plana sombreada na figura.

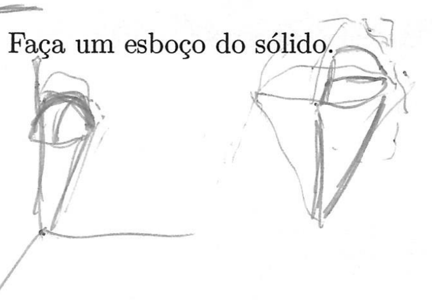
$$\int_{-3}^{-2}\int_{0}^{x+3} 1\,dy\,dx + \int_{-2}^{0}\int_{\sqrt{4-x^2}}^{x+3} 1\,dy\,dx$$

(b) Troque a ordem de integração.

$$\int_{0}^{2}\int_{\sqrt{4-y^2}}^{y-3} 1\,dx\,dy + \int_{2}^{3}\int_{0}^{y-3} 1\,dx\,dy$$

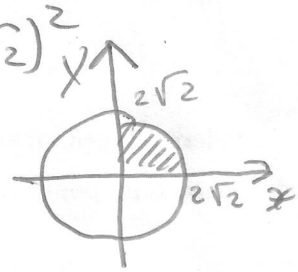
8. Considere o sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e pela esfera $x^2+y^2+z^2=16$ que se encontra no 1ºoctante.

(a) Faça um esboço do sólido.



(b) Esboce no plano XOY a projeção do sólido nesse plano.

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=16-x^2-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=x^2+y^2 \\ z^2=16-z^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2 \\ z^2=8 \end{cases}$$



(c) Escreva o integral triplo em coordenadas cilíndricas que permite calcular o volume do sólido.

$\sqrt{x^2+y^2} < z < \sqrt{16-x^2-y^2}$

$\sqrt{\rho^2} < z < \sqrt{16-\rho^2}$

$\rho < z < \sqrt{16-\rho^2}$

$$\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2\sqrt{2}}\int_{\rho}^{\sqrt{16-\rho^2}} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$\frac{4}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}$

0.125 0.375

GRUPO II (9,6 valores)

Apresente todos os cálculos efetuados.

1. Considere a função real $f(x,y) = y^2 - yx^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 4x$

(a) Determine os pontos críticos de f.

$$\vec{\nabla} f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy + x^3 - x^2 + 4 = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \times \left(\frac{x^2}{2}\right) + x^3 - x^2 + 4 = 0 \\ y = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ — \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$$
$$x = -2 \Rightarrow y = 2$$

$(-2,2)$ e $(2,2)$ são pt^{os} críticos de f.

(b) Classifique os pontos críticos de f.

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y + 3x^2 - 2x & -2x \\ -2x & 2 \end{bmatrix}$$

$|H(-2,2)| = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$ e $f''_{x^2} = 12 > 0$ logo $f(-2,2)$ é mínimo de f.

$|H(2,2)| = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0$ logo $f(2,2)$ é pt^o de sela, não há extremo

2. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = (e^y + 1, x.e^y + 6y)$ definido em $\mathbb{R}^2$.

(a) Verifique se $\vec{F}$ é um campo conservativo.

$D_{\vec{F}} = \mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^y$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^y$, logo $\vec{F}$ é conservativo em $\mathbb{R}^2$.

Determinar potencial de $\vec{F}$

$F_1(x,y) = f'_x = e^y + 1 \Rightarrow f(x,y) = xe^y + x + C(y)$

Derivando em ordem a y.

$f'_y = xe^y + C'(y)$ que tem que ser igual a F_2

$xe^y + C'(y) = xe^y + 6y \Leftrightarrow C'(y) = 6y \Leftrightarrow C(y) = 3y^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$

Assim,

$f(x,y) = xe^y + x + 3y^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\overrightarrow{F}$ ao longo da curva $y = x^2 - 1$, para $x \in [-1, 0]$.

$$W = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} \,.\ \text{Como } \vec{F} = \vec{\nabla} f \text{ para } f(x,y) = xe^y + x + 3y^2 +$$

pode calcular-se o integral curvilíneo da forma

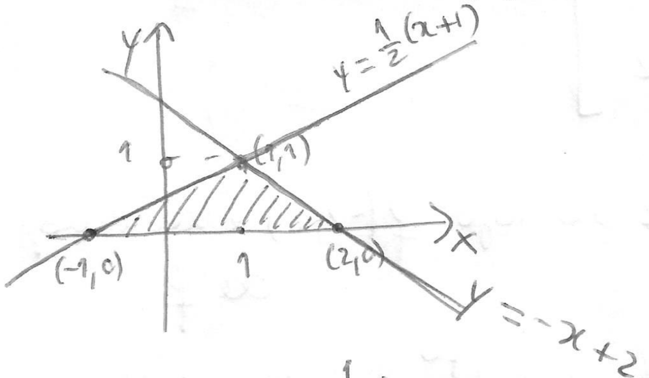
$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = f(\text{pt}^{\text{o}} \text{ final}) - f(\text{pt}^{\text{o}} \text{ inicial})$$

pt^{o} final $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$

pt^{o} inicial $\Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (-1, 0)$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = f(0,-1) - f(-1,0) = 5$$

3. Calcule o integral $\displaystyle\iint_R x(y+1)\, dA$ onde R é o triângulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 0)$. **Sug.:** Escolha a ordem de integração mais conveniente.



- $y = \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow x = 2y - 1$

- $y = -x + 2 \Leftrightarrow x = -y + 2$

- $$\int_{-1}^{1} \int_0^{\frac{1}{2}(x+1)} x(y+1)\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{-x+2} x(y+1)\, dy\, dx$$

ou

$$\int_0^1 \int_{2y-1}^{-y+2} x(y+1)\, dx\, dy = \int_0^1 (y+1) \left[\frac{x^2}{2}\right]_{2y-1}^{-y+2} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (y+1) \left[(-y+2)^2 - (2y-1)^2\right] dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y+1)(-3y^2+3)\, dy$$

$$= -\frac{3}{2} \int_0^1 (y+1)(y^2-1)\, dy = -\frac{3}{2} \int_0^1 (y^3 + y^2 - y - 1)\, dy$$

$$= -\frac{3}{2} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - y\right]_0^1 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{3}{2} \times \left(\frac{-11}{12}\right) = \frac{11}{8}$$