DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES 26 /3/ 2014

Duração: 90 minutos **Teste de Análise Matemática EE - versão B**

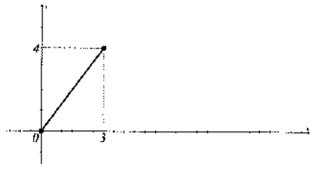
Nome: ______________________________ Nr.: __________ Curso: MIEEIC

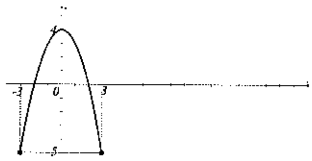
GRUPO I

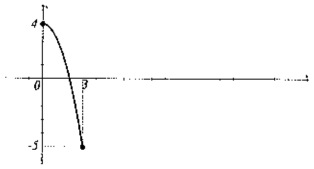
Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correta no quadrado correspondente. Cada resposta correta vale 1 valor.

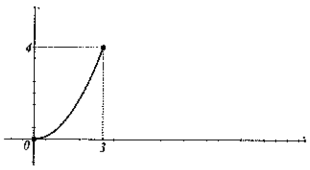
1. Qual dos seguintes pontos pertence à curva $\vec{r}(t) = t\,\vec{e}_1 + t^2\,\vec{e}_2 + (2+t)\,\vec{e}_3$ em $\mathbb{R}^3$?
   (2,4,4) [X]; (0,0,0) [ ]; (1,4,4) [ ]; (1,2,4) [ ]; Nenhum dos anteriores. [ ]

2. Qual das seguintes curvas é representada pela função vetorial $\vec{r}(t) = (t, 4-t^2)$, $t \in [0,3]$?


[ ];

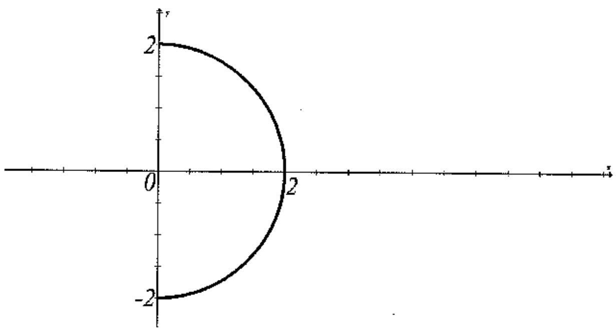

[ ];


[X];


[ ];

   Nenhuma das anteriores. [ ]

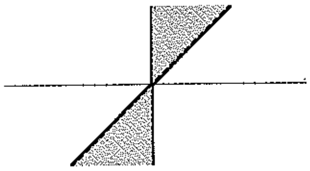
3. Qual das seguintes expressões representa a curva $\mathcal{C}$ na figura, percorrida a partir do ponto $(0,-2)$ e com fim no ponto $(0,2)$?

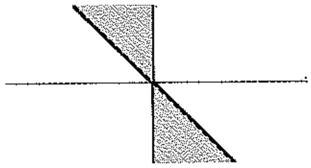


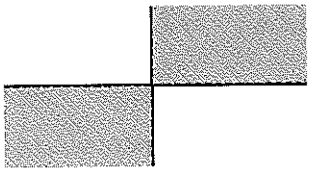
   $\vec{r}(t) = (2\sin t, 2\cos t),\ t \in [0,\pi]$ [ ]
   $\vec{r}(t) = (2\sin(\frac{\pi}{2}-t), 2\cos(\frac{\pi}{2}-t)),\ t \in [0,\pi]$ [ ]
   $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t),\ t \in [0,\pi]$ [ ]
   $\vec{r}(t) = (2\sin(\pi-t), 2\cos(\pi-t)),\ t \in [0,\pi]$ [X]
   Nenhuma das anteriores. [ ]

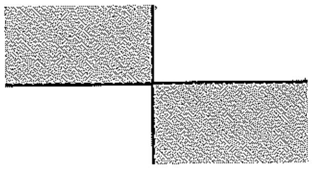
4. Qual das seguintes funções tem domínio $D =]0,+\infty[$?
   $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ [ ]
   $f(x,y) = \sqrt{xy}$ [ ]
   $\vec{r}(t) = (\frac{1}{t^2+1}, \ln t)$ [X]
   $\vec{r}(t) = (\sqrt{t}, t)$ [ ]
   Nenhuma das anteriores. [ ]

5. Considere a função real de duas variáveis reais, $f(x,y) = \ln(x.y)$. Qual destes domínios planos representa o domínio de f?

 ☐;

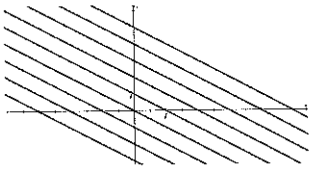
 ☐;

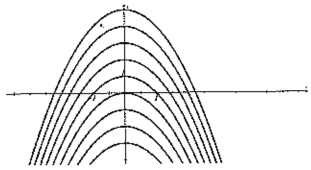
 ☒;

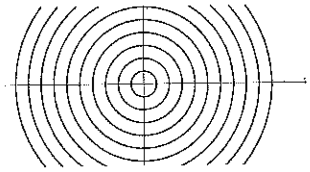
 ☐;

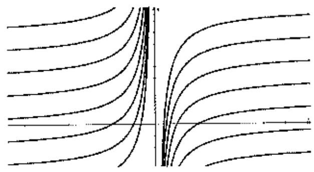
Nenhuma das anteriores. ☐

6. Quais das seguintes curvas representam as curvas de nível da função $f(x,y) = y + x^2$?

 ☐;

 ☒;

 ☐;

 ☐;

Nenhuma das anteriores. ☐

7. Considere a função real de duas variáveis reais definida no seu domínio, $f(x,y) = \frac{x-3y}{x+y}$ e o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Indique qual a afirmação verdadeira:

Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e é igual a zero . ☐

Não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pois $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) \neq \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$. ☒

Nada se pode concluir sobre o valor do limite. ☐

Nenhuma das anteriores. ☐

GRUPO II

Apresente todos os cálculos efectuados.

1. Considere a função vetorial em $\mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = \sin t.\vec{a} - \cos t.\vec{b} + 3t.\vec{c}$ onde $\vec{a} = \vec{e}_2 + \vec{e}_1, \vec{c} = \vec{e}_3, \vec{b} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

(a) Escreva a função à custa das suas componentes.

$\vec{R}(t) = \text{sent}(\vec{e_2} + \vec{e_1}) - \cos t\,(-\vec{e_1} + \vec{e_2}) + 3t \cdot \vec{e_3}$

$\vec{R}(t) = (\text{sent} + \cos t)\,\vec{e_1} + (\text{sent} - \cos t)\,\vec{e_2} + 3t \cdot \vec{e_3}$

ou $\vec{R}(t) = (\text{sent} + \cos t,\ \text{sent} - \cos t,\ 3t)$

(b) Se considerarmos a função vetorial $\vec{r}(t)$ como a trajetória de uma partícula ao longo do tempo t, em que ponto do espaço está a partícula no instante $t = 0$? E no instante $t = 3\pi$?

$\vec{R}(0) = (\text{sen } 0 + \cos 0,\ \text{sen } 0 - \cos 0,\ 0) = (1,-1,0)$

No instante $t = 0$, a partícula está no ponto $(1,-1,0)$

$\vec{R}(3\pi) = (\text{sen } 3\pi + \cos 3\pi,\ \text{sen } 3\pi - \cos 3\pi,\ 9\pi) = (-1,1,9\pi)$

No instante $t = 3\pi$, a partícula está no ponto $(-1,1,9\pi)$

(c) Calcule a distância percorrida (em cm) pela partícula entre $t = 0$ e $t = 3\pi$? **Sug**: Use a fórmula $\int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$.

$\vec{R}'(t) = (\cos t - \text{sen} t, \cos t + \text{sen} t, 3)$

$\|\vec{R}'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t - 2\cancel{\text{sen} t \cdot \cos t} + \cos^2 t + \text{sen}^2 t + 2\cancel{\text{sen} t \cdot \cos t} + 9} = \sqrt{11}$

$\int_0^{3\pi} \sqrt{11} \, dt = \sqrt{11}[t]_0^{3\pi} = 3\pi\sqrt{11}$. A distância percorrida foi $3\pi\sqrt{11}$ cm.

2. Considere a função vetorial $\vec{r}(t) = (\frac{-3t}{t+1}, \exp(2t-1))$.

(a) Determine o vetor tangente à curva descrita por $\vec{r}(t)$ no instante $t = 3$.

$\vec{R}'(t) = \left(-\frac{3}{(t+1)^2}, 2e^{2t-1}\right)$

$\vec{R}'(3) = \left(-\frac{3}{16}, 2e^5\right)$ → vetor tangente à curva $\vec{R}(t)$ no instante $t = 3$.

(b) Determine a equação da reta tangente à curva representada por $\vec{r}(t)$ no mesmo instante.

$\vec{R}(3) = \left(-\frac{9}{4}, e^5\right)$ → ponto ~~[illegible]~~ quando $t = 3$.

$\vec{R}'(3) = \left(-\frac{3}{16}, 2e^5\right)$ → vetor diretor da reta tangente à curva quando $t = 3$.

Equação da reta pretendida:

$(x, y) = \left(-\frac{9}{4}, e^5\right) + t\left(-\frac{3}{16}, 2e^5\right), t \in \mathbb{R}$.

(c) Determine o ponto em que o vetor tangente à curva representada por $\vec{r}(t)$ é paralelo à reta $\begin{cases} x(t) = -3t \\ y(t) = \frac{2}{e}t \end{cases}$. $t \in \mathbb{R}$

Um vetor paralelo à reta dada é $\vec{u} = (-3, \frac{2}{e})$.

Pretende-se saber qual o ponto onde $\vec{R}'(t) = \left(-\frac{3}{(t+1)^2}, 2e^{2t-1}\right)$ é igual a $\vec{u} = (-3, \frac{2}{e})$:

$\begin{cases} -\frac{3}{(t+1)^2} = -3 \\ 2e^{2t-1} = 2e^{-1} \end{cases}$ $\begin{cases} (t+1)^2 = 1 \\ 2t-1 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} t = 0 \vee t = -2 \\ t = 0 \end{cases}$. Em $t = 0$, isto é, no ponto $\vec{R}(0) = (0, e^{-1})$.

3. A partícula A segue a trajetória $\vec{r}(t) = (2 - 3t, 2t - 1)$, com $t \in [0, 1]$ e a partícula B segue a trajetória $\vec{s}(t) = (t, -2t + 1)$, com $t \in \mathbb{R}$.

Verifique se as partículas chocam uma com a outra. Se a resposta for afirmativa, indique o instante e o ponto de choque das duas partículas.

As partículas chocam se existe t tal que $\vec{s}(t) = \vec{R}(t)$

$\begin{cases} 2 - 3t = t \\ 2t - 1 = -2t + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} t = 1/2 \\ t = 1/2 \end{cases}$ As partículas chocam quando $t = 1/2$ (instante) no ponto $\vec{R}(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, 0)$.

4. A corrente elétrica (C) de um aparelho, com uma determinada potência (P) e ligado a uma determinada voltagem (V) é dada por $C(P,V) = \frac{P}{V}$. Considere a unidade da corrente elétrica, *Ampère*; a unidade da potência, *Watt* e a unidade da voltagem, *Volt.*

(a) Calcule $C(250, 100)$ e diga qual o seu significado.

$C(250,100) = \frac{250}{100} = 2{,}5$ Ampère.

A corrente elétrica é de 2,5 Ampère quando temos uma potência de 250 Watts e uma voltagem de 100 Volts.

(b) Determine o domínio da função $C(P,V)$.

$$D_C = \{(P,V) \in \mathbb{R}^2 : V \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(P,0) : P \in \mathbb{R}\}$$

(c) Determine $\lim\limits_{(P,V)\to(0,0)} C(P,V)$.

$$\lim_{(P,V)\to(0,0)} C(P,V) = \lim_{(P,V)\to(0,0)} \frac{P}{V} = \frac{0}{0}$$

Pelos limites iterados:

$$\lim_{P\to 0}\left(\lim_{V\to 0} \frac{P}{V}\right) = \lim_{P\to 0}\left(\frac{P}{0}\right) = \infty$$

$$\lim_{V\to 0}\left(\lim_{P\to 0} \frac{P}{V}\right) = \lim_{V\to 0}\left(\frac{0}{V}\right) = 0$$

Logo não existe $\lim\limits_{(P,V)\to(0,0)} C(P,V)$ pois os limites iterados são diferentes.