Problema: Considere os planos

$$M : x - y = -1 \quad e \quad M_1 : 2x + y + z = 1$$

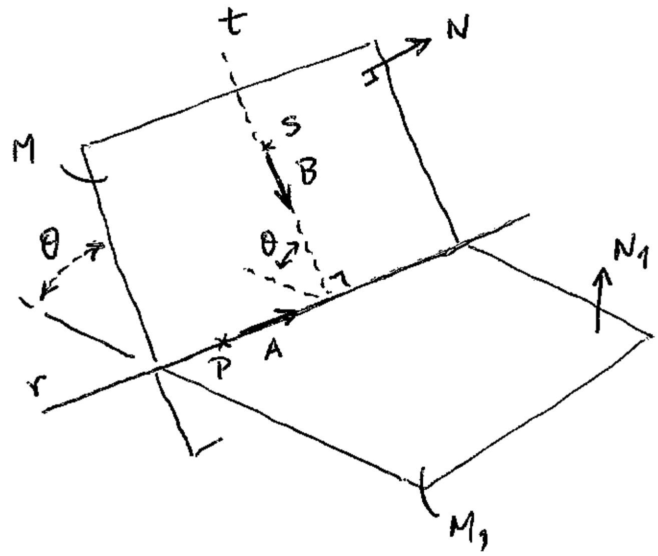
a) Determine a equação vectorial da recta, r, de intersecção dos dois planos.

$$r : X(t) = P + tA, \ t \in \mathbb{R}$$

$$r = M \cap M_1 : \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ z = -3x \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sejam os pontos

$$P = (0,1,0) \in r$$
$$P_1 = (1,2,-3) \in r$$



O vector direcção será

$$A = \overrightarrow{PP_1} = (1,1,-3)$$

Assim,

$$r : X(t) = (0,1,0) + t(1,1,-3), \ t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (t, 1+t, -3t), \ t \in \mathbb{R}$$

Convém notar que:

$$\left.\begin{array}{l} r \subset M \Rightarrow A \perp N \\ r \subset M_1 \Rightarrow A \perp N_1 \end{array}\right\} \Rightarrow A \parallel N \times N_1$$

em que

$$N = (1,-1,0) \perp M \quad \wedge \quad N_1 = (2,1,1) \perp M_1$$

$$N \times N_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,3) \parallel A \ !$$

b) Determine a recta h que passa no ponto $Q = (0,2,1)$ e é paralela aos planos M e M_1.

Convém notar que $Q = (0,2,1) \notin M$ e $Q \notin M_1$.

A equação vectorial da recta h será

$$h : X(u) = Q + uH, \ u \in \mathbb{R}$$

Sabendo que

$$\left.\begin{array}{l} h \parallel M \Rightarrow H \perp N \\ h \parallel M_1 \Rightarrow H \perp N_1 \end{array}\right\} \Rightarrow H \parallel N \times N_1 \parallel A$$

Seja, por exemplo, $H = A = (1,1,-3)$

Obtém-se, assim,

$$h: X(u) = Q + u A, \; u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (u, 2+u, 1-3u), \; u \in \mathbb{R}$$

c) Seja o ponto $S = (0,1,0) \in M$. Determine a recta t contida no plano M, que passe no ponto S e tal que t é de máxima inclinação em relação ao plano M_1.

A equação vectorial da recta t é

$$t: X(v) = S + vB, \; v \in \mathbb{R}$$

Se $t \subset M \Rightarrow B \perp N$

Se t é de máxima inclinação em relação a $M_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t \perp r = M \cap M_1 \Rightarrow B \perp A$$

Assim,

$$B \parallel A \times N \quad \text{em que} \quad A \times N = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-3,-3,-2)$$

Seja, por exemplo, $B = (3,3,2)$

Obtém-se, então,

$$t: X(v) = S + vB, \; v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (3v, 1+3v, 2v), \; v \in \mathbb{R}$$

Convém referir que se t é de máxima inclinação em relação ao plano M_1, então

$$\theta = \measuredangle(M, M_1) = \measuredangle(t, M_1)$$

Confirmemos tal situação.

$$\theta = \sphericalangle(M, M_1) \Rightarrow \cos\theta = \frac{|N \cdot N_1|}{\|N\| \, \|N_1\|} = \frac{|2-1|}{\sqrt{2}\,\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \checkmark$$

$$\theta = \sphericalangle(t, M_1) \Rightarrow \sin\theta = \frac{|B \cdot N_1|}{\|B\| \, \|N_1\|} = \frac{|6+3+2|}{\sqrt{22}\,\sqrt{6}} = \frac{11}{2\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{33}{36}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \checkmark$$

Jori Abraijr Barbosa