Tell us a story! - said the March Hare.
Yes, please do! - said Alice
And be quick about it!
Once upon a time there were three little sisters!- said Hatter
What did they live on? - said Alice, who always took a great interest in questions of eating and drinking.

Alice's Adventures in Wonderland, Lewis Carroll

6. Aplicações lineares

- Definição de aplicação linear. Generalidades.
- Núcleo e espaço imagem.
- Representação matricial de aplicações lineares.
- Classificação de aplicações lineares: injectivas, sobrejectivas e bijectivas

Definição

Sejam V e W dois subespaços reais. Designa-se por **aplicação linear** a aplicação $f : V \longrightarrow W$ tal que:

- $\forall x, y \in V \qquad f(x+y) = f(x) + f(y),$ $\qquad$ (f perversa $+$)
- $\forall x \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad f(\alpha x) = \alpha f(x),$ $\qquad$ (f perversa .).

Uma aplicação linear também é chamada, por vezes, de transformação linear ou de homomorfismo de espaços vectoriais.

Exemplo

Seja V um espaço vectorial real qualquer.

- A aplicação **identidade**

$$\begin{array}{rccc} Id: & V & \to & V \\ & u & \mapsto & u \end{array}$$

  é uma aplicação linear

- A aplicação **nula**

$$\begin{array}{rccc} O: & V & \to & V \\ & u & \mapsto & 0_V \end{array}$$

  é uma aplicação linear

Exemplo

Considere-se a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y,-y+3z) \end{array}$$

- $\forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$,

$$f\left((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\right) = f((x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)) =$$
$$= (2(x_1+x_2)+(y_1+y_2),-(y_1+y_2)+3(z_1+z_2)) = \cdots =$$
$$= f((x_1,y_1,z_1))+f((x_2,y_2,z_2)),$$

- $\forall (x_1,y_1,z_1) \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$f(\alpha(x_1,y_1,z_1)) = f((\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)) = (2(\alpha x_1)+\alpha y_1,-\alpha y_1+3\alpha z_1) = \cdots = \alpha f((x_1,y_1,z_1)).$

f é uma aplicação linear

Exemplo

- A aplicação $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x \end{array}$ é uma aplicação linear.

  A aplicação $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$ não é uma aplicação linear.

- A aplicação $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (3x+y,0,y-x) \end{array}$ é uma aplicação linear.

  A aplicação $\begin{array}{rccc} g: & R^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x^2,0,x+y). \end{array}$ não é uma aplicação linear.

Exemplo

- A aplicação

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \end{array}$$

é uma aplicação linear

- Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

A aplicação $\begin{array}{cccc} f_A : & R^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \mapsto & Ax \end{array}$ é uma aplicação linear

[Note-se que este exemplo mostra que, dada uma matriz, existe uma aplicação linear que lhe está associada.]

- A aplicação

$\begin{array}{cccc} \tau : & \mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & A^T \end{array}$ é uma aplicação linear

Exemplo

(a aplicação que a cada polinómio de grau 3 associa o polinómio-derivada)

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & ax^3 + bx^2 + cx + d & \longmapsto & 3ax^2 + 2bx + c \end{array}$$

ψ é uma aplicação linear

Teorema

Se f é uma aplicação linear definida de V para W então:

1. $f(0_V) = 0_W$, (*f preserva o vector nulo*)

2. $\forall x \in V, \quad f(-x) = -f(x)$. (*$f$ preserva os simétricos*)

Demonstração:

1. Tem-se que $f(0_V) = f(0_{\mathbb{R}} 0_V) = 0_{\mathbb{R}} f(0_V) = 0_W$

2. Usando (1) tem-se que, para todo $x \in V$,

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0_V) = 0_W.$$

Teorema

Se f é uma aplicação linear definida de V para W então:

1. $f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n)$, para $v_1, \ldots, v_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (f preserva as combinações lineares)

2. Se $v_1, \ldots, v_n \in V$, são vectores linearmente dependentes de V, então $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ são linearmente dependentes de W. (f preserva a dependência linear)

Note-se que, em geral, uma aplicação linear não preserva a independência linear.
A aplicação $f : R^3 \to R^2$ tal que $f(x, y, z) = (x, z)$ é um exemplo dessa afirmação.

Definição

Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear.

$Nuc(f)$ - designa-se por **núcleo** de f, ou espaço nulo, ou kernel de f, denotado por $Nuc(f)$ ou $Ker(f)$ o conjunto dos elementos de V que têm como imagem o zero de W

$$Nuc(f) = \{x \in V : \quad f(x) = 0_W\}$$

Note-se que: $Nuc(f) \subseteq V$

Im (f) - designa-se por **espaço imagem** de f, o conjunto das imagens de V por meio da aplicação linear f:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in W, \exists x \in V : \quad f(x) = y\}$$

Note-se que: $Im(f) \subseteq W$

Teorema

Sejam V, W espaços vectoriais reais e $f : V \to W$ uma aplicação linear.
Então:
(i) $Nuc(f)$ é um subespaço vectorial de V
(ii) $Im(f)$ é um subespaço vectorial de W.

Demonstração:

[$Nuc(f)$ é um subespaço vectorial]
(1.) $0_W \in W$ (pois W é subespaço) , e porque f é linear
$0_W = f(0_v), 0_v \in Nuc(f), Nuc(f) \neq \{\}$
(2.) sejam $x, x' \in Nuc(f)$ então, porque f é linear,
$f(x + x') = f(x) + f(x') = 0 + 0$, logo $x + x' \in Nuc(f)$
(3.) sejam $x \in Nu_f$ então, porque f é linear, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$,
logo $\alpha x \in Nuc(f)$
$Nuc(f)$ é um subespaço vectorial de V

[$Im(f)$ é um subespaço vectorial]

...

Definição

Seja $f : V \rightarrow W$ uma aplicação linear com V de dimensão finita.
Define-se:

- a **nulidade de** f como sendo $nul(f) = dim(Nuc(f))$.
- a **característica de** f como sendo car $(\mathrm{f}) = \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{f}))$.

Teorema

Seja $f : V \rightarrow W$ uma aplicação linear com V de dimensão finita. Então:

$$dim(V) = nul(f) + car(f)$$

Exemplo: Consideremos a aplicação linear $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,2y) \end{array}$

$$\begin{aligned} Nuc(f) &= \{(x,y,z) \in R^3 : f(x,y,z) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in R^3 : (x,2y) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in R^3 : x = y = 0\} \\ &= \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{f(x,y,z) \in R^2 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x,2y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
$Nuc(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$
$Im(f) =< (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) >$
$=< (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) >= \mathbb{R}^3$

uma vez que os vectores são l.i.

$Nuc(f) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a+b, b-c, a+d) = (0, 0, 0)\}$
$Nuc(f) = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$

Matriz associada a uma aplicação linear

Sejam:

- V e W espaços vectoriais reais, de dimensão m e n,
- $B = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ uma base de V
- $B' = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ uma base de W.

Então para qualquer vector de V, em particular um vector da sua base, v_i, $i = 1, \ldots n$, pode-se determinar $f(v_i)$, escrevendo-o na base de W, ou seja:

$$\begin{array}{c} f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1n}w_n \\ f(v_2) = a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{2n}w_n \\ \vdots \\ f(v_m) = a_{m1}w_1 + a_{m2}w_2 + \cdots + a_{mn}w_n \end{array}$$

A acção de f sobre cada um dos v_i é determinada pelos escalares a_{ij}, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$. Estes escalares formam uma matriz de ordem $m \times n$.

A matriz transposta desta, designa-se por matriz da aplicação linear f, nas bases $\{v_i\}$ de V, e $\{w_j\}$ de W, é uma matriz de ordem $n \times m$.

Escreve-se, A, a matriz da aplicação linear f, de V (dimensão m) em W (dimensão n), em relação às bases B e B', como sendo:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & & f(v_m) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por:

$$f(x, y, z) = (2x - 3y + z, 3x - 2y).$$

Uma vez que:

$f(1, 0, 0) = (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$,
$f(0, 1, 0) = (-3, -2) = -3(1, 0) - 2(0, 1)$,
$f(0, 0, 1) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$,
tem-se que,
a matriz da aplicação linear f, relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ é:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Note-se que:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y+z \\ 3x-2y \end{pmatrix}$$

Sendo então *possível* determinar a imagem por meio de f de qualquer elemento de $\mathbb{R}^2$, recorrendo à matriz da aplicação linear f, tendo-se, por exemplo:

$$f((1,2,3)) = A.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Seja A a matriz da aplicação linear f (relativamente às bases canónicas) definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine-se f.

A aplicação f será definida de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^3$, tendo-se:

$$f(a,b,c,d) = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ a+d \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (a,b,c,d) & \longmapsto & (a+b, b-c, a+d) \end{array}$$

como usar matrizes de aplicações lineares para determinar o núcleo

Dada uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a **matriz canónica** de f é a matriz de $\mathbb{R}^{m \times n}$, que se denota por A_f, e cujas colunas são os vectores imagem por f de cada um dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^n$, isto é

$$A_f = \left(\; T(e_1) \; T(e_2) \; \ldots \; T(e_n) \; \right)$$

Teorema: Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e seja A_f a respectiva matriz canónica. Então:

1. o núcleo de f é igual ao espaço nulo de A_f, isto é
$$Nuc(f) = N(A_f);$$
2. o espaço imagem de f coincide com o espaço das colunas deA_f, i.e.
$$Im(f) = R(A_f).$$

Demonstração:

1. Temos:
   $v \in Nuc(f) \Leftrightarrow T(v) = 0 \Leftrightarrow A_f v = 0 \Leftrightarrow v \in N(A_f)$.
2. Temos:

$$
\begin{aligned}
w \in Im(T) & \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n : w = f(v) \\
& \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n : w = A_f \\
& \Leftrightarrow w \in R(A_f)
\end{aligned}
$$

como usar matrizes de aplicações lineares para determinar o núcleo

Vejamos um exemplo.

Seja,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, x+y+2z, 2x+y+3z) \end{array}$$

O núcleo de f, $Nuc(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad f((x,y,z)) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Sendo A, a matriz da aplicação linear f, podemos escrever que, para $(x,y,z) \in Nuc(f)$:

$$f((x,y,z)) = (0,0,0) \Leftrightarrow A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sistema homogéneo,}$$

cujo conjunto solução é o núcleo de f.

ou seja, recorrendo ao método de eliminação de Gauss, para a A,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

tendo-se, por substituição inversa,

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad c(A) = 3 = n \text{ sistema possível determinado}$$

donde

$$Nuc(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{o qual é um conjunto singular.}$$

(Há só um elemento cuja imagem é o zero de $\mathbb{R}^3$.)

Exemplo

Sendo $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tal que:

$$f(a,b,c,d,e) = (a - c + 3d - e, a + 2d - e, 2a - c + 5d - e, -c + d)$$

determine-se uma base para os subespaços $Nuc(f)$ e $Im(f)$.

[base $Im(f)$]

$(a - c + 3d - e, a + 2d - e, 2a - c + 5d - e, -c + d) =$
$a(1,1,2,0) + c(-1,0,-1,-1) + d(3,2,5,1) + e(-1,-1,-1,0)$

$Im(f) = < (1,1,2,0), (-1,0,-1,-1), (3,2,5,1), (-1,-1,-1,0) >$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \dots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad c(A) = 3$$

$(3,2,5,1) = 2(1,1,2,0) - (-1,0,-1,-1)$

$Im(f) = < (1,1,2,0), (-1,0,-1,-1), (-1,-1,-1,0) >$
que, podemos verificar que são l.i., logo constituem uma base de $Im(f)$

$dim\ Im(f) = 3$

$$f(a,b,c,d,e) = (a - c + 3d - e, a + 2d - e, 2a - c + 5d - e, -c + d)$$

[base $Nuc(f)$**]** resolvendo o sistema homogéneo $Ax = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tendo-se $a - c + 3d - e = 0$ e $c - d = 0$ e $e = 0$ vem

$$Nuc(f) = \{(-2c, b, c, c, 0) : b, c \in \mathbb{R}\}$$
$$dim\ Nuc(f) = 2$$

base de $Nuc(f) = \{(-2, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 0)\}$

Definição

Uma aplicação linear $f : V \to W$ diz-se **sobrejectiva** se $Im(f) = W$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$Im(g) = \mathbb{R}$,

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \to W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, 0, x) \end{array}$$

$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y'$e $x = x'$ e então $(x, y) = (x', y')$ h é injectiva

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se bijectiva.

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Teorema

Se $f : V \to W$ é uma aplicação linear, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é injectiva,

(ii) $Nuc(f) = \{0\}$.

Demonstração:

$(i) \to (ii)$

Suponha-se que f é injectiva. Então $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, ou de modo equivalente $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Seja $x \in Nuc(f)$. Então $f(x) = 0_w = f(0_v)$. E, uma vez que f é injectiva, $x = 0_v$, tendo-se $Nuc(f) = \{0\}$.

$(ii) \to (i)$

Seja $Nuc(f) = \{0\}$ e $f(x) = f(y)$.

Então $f(x - y) = f\big((x) + (-y)\big) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = 0_w$, logo $x - y \in Nuc(f)$, e uma vez que $Nuc(f) = \{0\}$ tem-se $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, donde f é injectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x, 4x-y, 2x+3y-z) \end{array}$$

Determinemos o $Nuc(f)$.

$$Nuc(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\right\} =$$
$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2x, 4x-y, 2x+3y-z) = (0,0,0)\right\}$$

o que equivale a resolver o sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

o qual admite como única solução a solução trivial $(0,0,0)$,

donde $Nuc(f) = \{(0,0,0)\}$, e f é injectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva e/ou sobrejectiva.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, x+y+2z, 2x+y+3z) \end{array}$$

• Determine-se $Im(f)$.

$(a,b,c) \in Im(f)$ se o sistema $\begin{cases} x+z=a \\ x+y+2z=b \\ 2x+y+3z=c \end{cases}$ for possível.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right)$$

Donde, concluímos que $(a,b,c) \in Im(f)$ se e só $c = a+b$

$Im_f = \{(a,b,a+b), a,b \in \mathbb{R}\}$, $Im(f) \neq \mathbb{R}^3$), e logo f não é sobrejectiva.

• Determine-se $Nuc(f)$.

$(x,y,z) \in Nuc(f)$ se o sistema homogéneo $\begin{cases} x+z=0 \\ x+y+2z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$

tiver solução única, a solução trivial $(0,0,0)$.
Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde, concluímos que $c(A) = 2$, logo o sistema é indeterminado, não tendo solução única.
Então $Nuc(f) \neq \{(0,0,0)\}$ e f não é injectiva.

$$Nuc_f = \{(x,y,z) : x+z=0 \ \ e \ \ y+z=0\}$$
$$Nuc_f = \{(-\alpha,-\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ um conjunto de geradores de V, e $f : V \to W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de $Im(f)$

Consideremos um vector qualquer $u \in Im(f)$ então

$$\text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = u$$

Se $v \in V$ então existem escalares $a_1, \dots, a_n$ tais que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ são geradores de $Im(f)$.
Ou seja, **o espaço imagem $Im(f)$ é o espaço colunas da matriz A, da aplicação linear**.

Definição

Chama-se **isomorfismo** a uma **aplicação linear** $f : V \to W$ **bijectiva**.
Os **espaços** V e W dizem-se **isomorfos**, e escreve-se $V \simeq W$

Exemplo

Seja $A = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.
Seja $f : A \to B$ tal que $f(x, y, 0) = (x, 0, y)$

f é um isomorfismo

• vejamos que f é linear

(i) $f((x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0)) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)) =$
$(x_1 + x_2, 0, y_1 + y_2) = (x_1, 0, y_1) + (x_2, 0, y_2) = f((x_1, 0, y_1)) + f((x_2, 0, y_2))$

(ii) $f(\alpha(x_1, y_1, 0)) = f((\alpha x_1, \alpha y_1, 0)) = (\alpha x_1, 0, \alpha y_1) = \alpha(x_1, 0, y_1) =$
$\alpha f(x_1, y_1, 0)$

• verificamos que f é bijectiva (injectiva e sobrejectiva)

Logo f é um isomorfismo e os espaços vectoriais A e B são isomorfos ($A \simeq B$)).