MUDANÇAS DE BASE

2. Para cada um dos seguintes pares de bases ordenadas, U e V, para o espaço linear $\mathbb{R}^3$, obtenha as matrizes mudança de base, $\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{V}}$ e $\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\to\mathrm{U}}$, que relacionam essas mesmas bases.

a) $\mathrm{U}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\mathrm{V}=\{(2,1,-1),(0,-1,-1),(1,0,2)\}$.

b) $\mathrm{U}=\{(1,-1,0),(0,1,2),(1,0,-2)\}$ e $\mathrm{V}=\{(-1,1,0),(0,1,1),(1,0,-1)\}$.

c) $\mathrm{U}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\mathrm{V}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),(0,1,0)\right\}$.

d) $\mathrm{U}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),(0,1,0)\right\}$ e $\mathrm{V}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)\right\}$.

5. Seja a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, definida por

$$T(x,y,z)=(y+z,y-z)$$

em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_3=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ e $\mathrm{E}_2=\{\vec{i}_1,\vec{j}_1\}$ para os espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Considere as bases ordenadas $\mathrm{U}=\{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}$ para $\mathbb{R}^3$ e $\mathrm{V}=\{(-1,1),(1,1)\}$ para $\mathbb{R}^2$. Determine:

a) A matriz que representa *T* em relação às bases canónicas.

b) A matriz mudança de base de U para E_3.

c) A matriz mudança de base de V para E_2.

d) As coordenadas dos vectores $\vec{x}=(1,1,2)$ e $\vec{y}=(1,5)$ em relação às bases U e V, respectivamente.

e) A matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}_3,\mathrm{V}}=m(T)_{\mathrm{E}_3,\mathrm{V}}$, que representa *T* em relação às bases ordenadas E_3 e V.

f) A matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U},\mathrm{E}_2}=m(T)_{\mathrm{U},\mathrm{E}_2}$, que representa *T* em relação às bases ordenadas U e E_2.

g) A matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U},\mathrm{V}}=m(T)_{\mathrm{U},\mathrm{V}}$, que representa *T* em relação às bases ordenadas U e V.

h) A imagem, através de *T*, do vector $\vec{x}=(1,1,2)$, expressa em relação às bases E_2 e V.

6. Sejam as transformações lineares $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que possuem as representações matriciais

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{S} = m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $\mathrm{E}_2 = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\}$ para os espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja a base ordenada $\mathrm{B} = \{(1,0,1),(0,2,0),(1,2,3)\}$ para $\mathbb{R}^3$. Determine:

a) As matrizes mudança de base de B para E_3 e de E_3 para B.

b) A matriz que representa a transformação linear $ST:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ em relação às bases canónicas.

c) A matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}_2,\mathrm{B}} = m(T)_{\mathrm{E}_2,\mathrm{B}}$, que representa T em relação às bases ordenadas E_2 e B.

d) A matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{B},\mathrm{E}_3} = m(S)_{\mathrm{B},\mathrm{E}_3}$, que representa S em relação às bases ordenadas B e E_3.

e) A matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}_3,\mathrm{B}} = m(S)_{\mathrm{E}_3,\mathrm{B}}$, que representa S em relação às bases ordenadas E_3 e B.

f) A matriz semelhante a $\boldsymbol{S}$, definida em relação à base ordenada B.

g) A matriz $m(ST)_{\mathrm{E}_2,\mathrm{B}}$, que representa ST em relação às bases E_2 e B.

9. Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes semelhantes e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que:

a) Se uma delas é uma matriz não singular, então a outra também o é.

b) As matrizes $\boldsymbol{A}^n$ e $\boldsymbol{B}^n$ são, também, matrizes semelhantes.

12. Sejam as transformações lineares $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definidas por

$$S(x,y)=(x+y,2x,x-y)$$

$$T(1,1,0)=(2,0,-1),\ T(1,-1,0)=(0,0,1)\ \text{e}\ T(0,0,1)=(0,1,1)$$

em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_3=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ e $\mathrm{E}_2=\{\vec{i}_1,\vec{j}_1\}$ para os espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Considere a base ordenada $\mathrm{B}=\{(1,1,0),(0,0,1),(1,-1,0)\}$ para $\mathbb{R}^3$. Obtenha:

a) A matriz que representa T em relação à base canónica, usando a matriz mudança de base adequada.

b) A matriz que representa a transformação composta possível de S com T em relação às bases canónicas.

c) A matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}_2,\mathrm{B}}=m(S)_{\mathrm{E}_2,\mathrm{B}}$, que representa S em relação às bases ordenadas E_2 e B.

d) A matriz da transformação composta obtida em b), recorrendo à matriz calculada na alínea anterior.

14. Sejam as transformações lineares $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, representadas pelas matrizes

$$\boldsymbol{S}=m(S)=\begin{bmatrix}1&1\\2&3\\1&2\end{bmatrix}\ \text{e}\ \boldsymbol{T}=m(T)=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&1\\0&2&1\end{bmatrix}$$

em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_2=\{\vec{i}_1,\vec{j}_1\}$ e $\mathrm{E}_3=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ para os espaços lineares $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Considere a base ordenada para $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{V}=\{(1,1,0),(0,-1,0),(1,1,-1)\}$. Determine:

a) A representação matricial da transformação $TS+S$ em relação às bases canónicas.

b) A representação matricial da transformação TS, considerando a base V para $\mathbb{R}^3$.

c) A representação matricial da transformação $TS+S$, considerando a base V para $\mathbb{R}^3$.

15. Seja a transformação linear $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$S(1,1,0)=(3,-1,4)\,,\ S(0,-1,1)=(-1,-2,-1)\ \text{e}\ S(1,-1,1)=(0,-4,0)$$

em que $\mathrm{U}=\{(1,1,0),(0,-1,1),(1,-1,1)\}$ é uma base ordenada para $\mathbb{R}^3$. Sejam, ainda, as transformações lineares $R:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, representadas pelas matrizes

$$\boldsymbol{R}=m(R)=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\ \text{e}\ \boldsymbol{T}=m(T)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_3=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}\subset\mathbb{R}^3$ e $\mathrm{E}_2=\{\vec{i}_1,\vec{j}_1\}\subset\mathbb{R}^2$. Considere as bases ordenadas $\mathrm{B}=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ e $\mathrm{C}=\{(1,-2),(1,2)\}\subset\mathbb{R}^2$. Determine:

a) A matriz que representa S em relação à base canónica, usando a matriz mudança de base adequada.

b) A representação matricial de $S^2:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ em relação à base U.

c) A representação matricial de $TR:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases B e C.

d) A representação matricial de $(TR+T):\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases B e C.

e) A matriz que representa $TR^2:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases E_3 e C, a partir da matriz encontrada em c).

f) A matriz que representa $SR:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ em relação à base canónica, a partir da matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{U},\mathrm{E}_3}=m(S)_{\mathrm{U},\mathrm{E}_3}$.

18. Sejam V um espaço linear real e $\mathrm{A}=\{a_1,a_2,a_3\}$ e $\mathrm{B}=\{b_1,b_2,b_3\}$ duas bases ordenadas distintas para V. Considere a transformação linear $S:\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathrm{V}$, possuindo a representação matricial

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{E,A}}=m(S)_{\mathrm{E,A}}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{E,A}}$$

em relação à bases ordenadas $\mathrm{E}=\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$, para $\mathbb{R}^4$, e A. Determine a matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E,B}}=m(S)_{\mathrm{E,B}}$, que representa S em relação às bases E e B, se:

a) $\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{A}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

21. Sejam as transformações lineares $S:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definidas por

$$S(1,1,0)=(4,1,-1)\,,\ S(0,2,-1)=(6,-3,-3)\ \text{ e }\ S(1,0,2)=(1,1,2)$$

$$T(x,y,z)=(x+y+3z,2x+2y,x+y+z)$$

em relação à base canónica $\mathrm{E}_3=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ para o espaço linear $\mathbb{R}^3$. Determine:

a) A matriz que representa S em relação à base canónica, usando a matriz mudança de base adequada.

b) A matriz $m(TS)$, que representa a transformação composta TS em relação à base canónica.

c) A matriz semelhante à obtida em b), definida em relação à base ortonormada

$$\mathrm{B}=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0),(0,0,1)\right\}$$

22. Em cada uma das alíneas seguintes $\boldsymbol{A}$ é uma representação matricial de uma dada transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida em relação à base canónica $\mathrm{E}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ para o espaço linear $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\boldsymbol{B}$ é uma matriz semelhante a $\boldsymbol{A}$, encontrando-se definida em relação à base ordenada V.

a) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 4 & 6 & -4 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{V}=\{\vec{i},\vec{i}+\vec{j},2\vec{k}\}$.

b) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{V}=\{\vec{i}+\vec{j},\vec{i}+\vec{k},\vec{j}+\vec{k}\}$.