Sistemas de Equações Lineares
Formulação Matricial

Notação Matricial

O sistema de *n* equações lineares a *n* incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

pode ser apresentado sob a *forma matricial* seguinte

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

em que

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \textit{matriz dos coeficientes do sistema}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \textit{matriz-coluna das incógnitas do sistema}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \textit{matriz-coluna dos termos independentes}$$

Sistema de Cramer: $r(A) = n$

Definição: **Sistema de Cramer**
O sistema de *n* equações lineares a *n* incógnitas $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ designa-se por **sistema de Cramer** se $r(\boldsymbol{A}) = n$.

- Se $r(\boldsymbol{A}) = n$, então:

  i) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, ou seja, a matriz $\boldsymbol{A}$ é *não singular* (ou *regular*);

  ii) A matriz $\boldsymbol{A}$ admite matriz inversa, $\boldsymbol{A}^{-1}$.

- A solução do **sistema de Cramer** pode ser obtida procedendo do seguinte modo:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

- O **sistema de Cramer** é sempre *possível e determinado*: todas as *n equações* e as *n incógnitas* do sistema são *principais*.

- O **sistema de Cramer** pode, em alternativa, ser resolvido usando a **regra de Cramer**, que se encontra expressa no **teorema de Cramer**.

Teorema [4.1]: Teorema de Cramer

Num **sistema de Cramer** de n equações a n incógnitas, o valor da incógnita x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ pode ser expresso como o quociente de dois determinantes:

i) O *denominador* é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, $|\boldsymbol{A}|$;

ii) O *numerador* é formado pelo determinante que se obtém a partir de $|\boldsymbol{A}|$, substituindo, na matriz $\boldsymbol{A}$, a coluna dos coeficientes da incógnita x_j pela coluna dos termos independentes.

Demonstração:

Sabe-se que $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ e

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{Cof\ A})^{\mathrm{T}}$$

em que

$$\boldsymbol{Cof\ A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{A}_{33} & \cdots & \boldsymbol{A}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n1} & \boldsymbol{A}_{n2} & \boldsymbol{A}_{n3} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

é a *matriz adjunta* (ou *matriz dos cofactores*) da matriz $\boldsymbol{A}$. Então

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{Cof\ A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$$

A incógnita (elemento) x_j (j=1,2,…,n) da *matriz-coluna* ***X*** é dada por

$$x_j = \frac{\boldsymbol{A}_{1j}b_1 + \boldsymbol{A}_{2j}b_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_{nj}b_n}{|\boldsymbol{A}|}$$

em que

$$\boldsymbol{A}_{1j}b_1 + \boldsymbol{A}_{2j}b_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_{nj}b_n = \begin{array}{|cccccc|} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \\ \multicolumn{1}{c}{} & & & \downarrow & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \multicolumn{1}{c}{} & & & \text{coluna } j & & \multicolumn{1}{c}{} \end{array}$$

é o *desenvolvimento laplaceano* do determinante ao longo da coluna de índice j.
Este determinante é obtido a partir do determinante de ***A***,

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{array}{|cccccc|} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \\ \multicolumn{1}{c}{} & & & \downarrow & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \multicolumn{1}{c}{} & & & \text{coluna } j & & \multicolumn{1}{c}{} \end{array}$$

substituindo a *coluna de índice j*, que contém os *coeficientes da incógnita* x_j, pela *coluna dos termos independentes*.

Exemplo 1 [4.2]: Mostre que o sistema de 3 equações lineares a 3 incógnitas (x, y, z)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -4 \\ -4x + 2y - 7z = 3 \\ 3x + y + 2z = -7 \end{cases}$$

é um *sistema de Cramer*. Determine a sua solução.

Solução:

Considere-se a representação do sistema sob a *forma matricial*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

em que

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -7 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Recorrendo à **regra de Sarrus**, obtém-se

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -7 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 16 + 63 - (24 - 14 + 24) = 55 - 34 = 21 \neq 0$$

A matriz $\boldsymbol{A}$ é *não singular*, pelo que o sistema dado é um **sistema de Cramer** (*sistema possível e determinado*).

Processo I – recorrendo à matriz $\boldsymbol{A}^{-1}$

Considerando a *matriz inversa* de **A**

$$\boldsymbol{Cof\ A} = \begin{bmatrix} 11 & -13 & -10 \\ 10 & -8 & -11 \\ 13 & -2 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{Cof\ A})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 11 & 10 & 13 \\ -13 & -8 & -2 \\ -10 & -11 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 11 & 10 & 13 \\ -13 & -8 & -2 \\ -10 & -11 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -105 \\ 42 \\ 63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Processo II – recorrendo à **regra de Cramer**

Considerando a **regra de Sarrus**

$$x = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix} -4 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -7 \\ -7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-16+12-147-(-56+28-18)}{21} = \frac{-105}{21} = -5$$

$$y = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & 3 & -7 \\ 3 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \frac{12+112+84-(36+98+32)}{21} = \frac{42}{21} = 2$$

$$z = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \frac{-28+16-27-(-24+6-84)}{21} = \frac{63}{21} = 3$$

Solução do sistema (*Cramer*): $(x, y, z) = (-5, 2, 3)$