Prova sem consulta. Duração: 1h30m (15m de tolerância). Época Extraordinária - 2ª Prova

---

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos dois grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta. Em cada pergunta da prova é apresentada a cotação prevista.**

GRUPO I

1. [**5,5**] Sejam as transformações lineares $S \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, definidas por

$$S(x,y,z) = (2x - z, x + 2z, y + z) \quad \text{e} \quad T(x,y) = (x - y, x + y, 3x - y)$$

em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathrm{E}_2 = \{(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *T*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que apenas a função *S* é bijetiva e obtenha a sua função inversa.

2. [**2,0**] Seja $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ uma transformação linear injetiva. Mostre que se $\mathrm{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é uma base para V, então $\mathrm{V}_1 = \{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$ é uma base para $T\,(\mathrm{V})$. Se $\dim \mathrm{W} = m$, qual será a dimensão de $T\,(\mathrm{V})$?

3. [**3,8**] Considere a transformação linear *S* definida na questão **1.** e a base $\mathrm{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,1,0),(0,1,0),(1,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Usando o cálculo matricial, obtenha $m(S)_{\mathrm{E}_3,\mathrm{V}}$, representação matricial de *S* em relação às bases E_3 (domínio) e V (conjunto de chegada).

b) Usando preferencialmente a matriz obtida na alínea anterior, calcule $m(S^2)_{\mathrm{V},\mathrm{V}}$, representação matricial da função S^2 em relação à base V.

....*(continua no verso)*

GRUPO II

4. [**3,2**] Determine, indicando todas as operações efetuadas, o determinante e a característica da matriz:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & k \\ k & -2 & k & k^2 \\ 0 & 1 & 3k & 0 \\ 3 & 2 & -3k & -3 \end{bmatrix}$$

5. [**5,5**] Considere a transformação linear $T\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$m(T)=\begin{bmatrix} k-2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 2k \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule o valor de *k*, de modo que $m(T)$ admita um valor próprio nulo. Neste caso, obtenha os seus valores próprios e os respetivos vetores próprios.

b) Verifique, justificando devidamente, se a transformação linear admite uma base de vetores próprios, U, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, obtenha a representação matricial de *T* em relação à base U.