UNIVERSIDADE DO MINHO

DICIONÁRIO DE ANÁLISE DE CIRCUITOS

Conceitos Fundamentais

Corrente Contínua

Métodos Sistemáticos

Componentes R, L e C

Circuitos de 1ª e 2ª Ordem

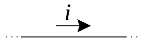
SÉRGIO F. LOPES

NOVEMBRO 2011

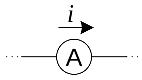
Corrente, Tensão e Lei de Ohm

Corrente Eléctrica

É o fluxo de cargas eléctricas (i) que atravessa um ramo de um circuito. Expressa-se em ampere (A).

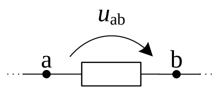


A seta indica o sentido da corrente. É uma característica absoluta de um ramo (parte sem nós) de um circuito e mede-se com um amperímetro em série num ponto desse ramo.

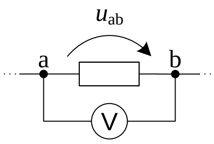


Tensão Eléctrica

É a diferença de potencial eléctrico (u) entre dois pontos (a e b) de um circuito. Expressa-se em volt (V).



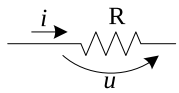
A seta indica o sentido da queda de tensão. É uma característica relativa a dois pontos de um circuito e mede-se com um voltímetro em paralelo nesses dois pontos.



Lei de Ohm

O valor da tensão aos terminais de uma resistência (u) é proporcional ao valor da corrente que a atravessa (i).

Numa resistência, a corrente eléctrica vai sempre do potencial mais elevado para o mais baixo (dissipação de energia). Por isso, frequentemente convenciona-se o mesmo sentido para u e i.

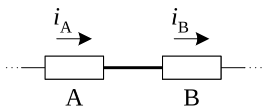


$u = \mathrm{R}\, i$

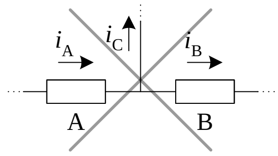
Associação de Elementos

Série

Dois elementos (A e B) estão em série quando são percorridos pela mesma corrente ($i_A = i_B$).

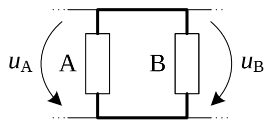


Em termos de traçado de circuito eléctrico, isto significa que entre os dois elementos existe um, e apenas um, caminho para a corrente eléctrica. Por outras palavras, não existem nós entre os elementos (eles estão no mesmo ramo).

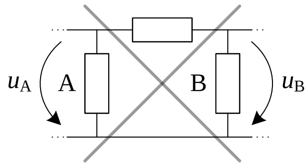


Paralelo

Dois elementos (A e B) estão em paralelo quando a tensão aos seus terminais é a mesma ($u_A = u_B$).

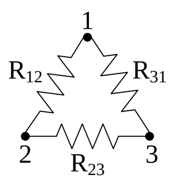


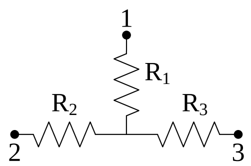
Em termos de traçado do circuito, isto significa que os terminais dos dois elementos estão directamente interligados. Ou seja, não existe qualquer outro componente que separe os seus terminais.



Estrela e Triângulo

Há casos em que não é possível associar elementos em série ou paralelo para simplificar o circuito, como por exemplo o "triângulo" (△) ou "estrela" (Y) de elementos. Nesses casos podem ser úteis as regras de transformação:





$$△\rightarrow Y: \begin{cases} R_1 = \dfrac{R_{12}\cdot R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 = \dfrac{R_{23}\cdot R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 = \dfrac{R_{31}\cdot R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{cases}$$

$$Y\rightarrow △: \begin{cases} R_{12} = \dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3} \\ R_{23} = \dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1} \\ R_{31} = \dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2} \end{cases}$$

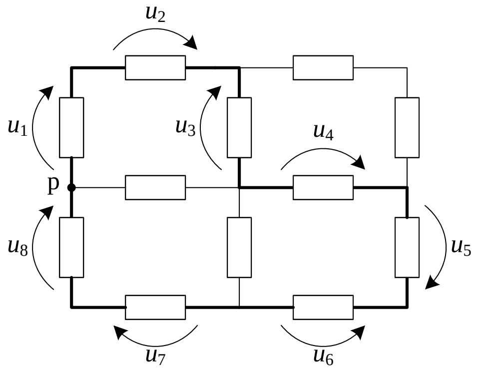
Leis de Kirchhoff

Lei das malhas

O somatório das tensões (com sinais opostos para subidas e quedas) ao longo de um percurso fechado (malha) é zero.

$$\sum_m u_m = 0$$

Significa que qualquer que seja o trajecto percorrido ao longo de um circuito eléctrico em que os pontos de partida e chegada sejam o mesmo, a soma das subidas de tensão equivale à soma das descidas de tensão.



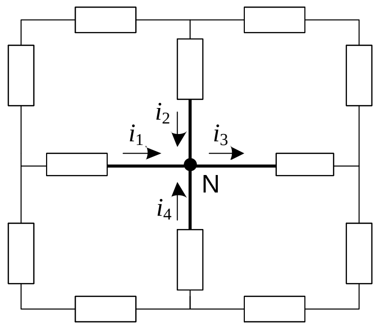
$$-u_1 - u_2 + u_3 - u_4 - u_5 + u_6 - u_7 - u_8 = 0$$

Lei dos nós

O somatório das correntes (com sinais opostos para correntes que chegam e que partem) que atravessam o nó é zero.

$$\sum_n i_n = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_c i_c = \sum_p i_p$$

Significa que a soma das correntes que chegam ao nó é igual à soma das correntes que partem do nó.



$$i_1 + i_2 - i_3 + i_4 = 0$$

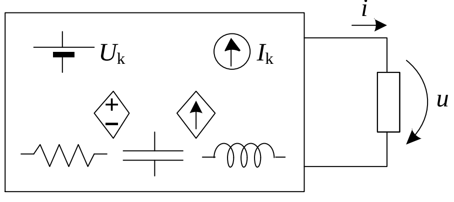
Regras

- O arbítrio de sentidos para tensões e correntes (desconhecidas) tem que respeitar a lei de Ohm (ver pagina anterior). Isto significa que se se convencionarem sentidos opostos para a tensão e corrente numa determinda resistência (e.g., u_1 e i_1), a respectiva relação terá que ter um sinal negativo (i.e.: $-u_1 = R \cdot i_1$).
- Ao escrever equações, tanto podem considerar-se as quedas de tensão negativas como positivas, desde que as subidas de tensão recebam coerentemente o sinal contrário. O mesmo se passa para as equações dos nós.

Teoremas Fundamentais

Teorema da Sobreposição

Num circuito linear (constituído por components lineares) com mais de uma fonte independente, a tensão e corrente em cada componente do circuito são respectivamente iguais à soma algébrica das tensões e correntes causadas por cada fonte independente ligada individualmente, anulando todas as outras fontes independentes.



$$\begin{cases} i = \sum_{k=1}^{N} i_k \\ u = \sum_{k=1}^{N} u_k \end{cases}$$

em que i_k e u_k são, respectivamente, a corrente e tensão no componente causadas pela fonte independente k, e N é o número de fontes independentes.

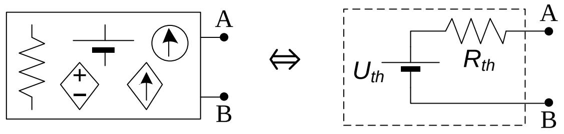
Aplicação

A anulação das fontes independentes corresponde a anular o valor da grandeza que fornecem, ou seja, no caso de uma:

- fonte ideal de tensão, $U = 0$ (substituindo-a por curto-circuito);
- fonte ideal de corrente, $I = 0$ (substituindo-a por circuito-aberto);
- fonte real, substituindo-a pela resistência equivalente.

Teorema de Thevenin

Qualquer circuito constituído por resistências e fontes lineares, com dois pontos A e B, tem um circuito terminal equivalente (visto a partir dos pontos A e B) constituído por uma **fonte de tensão** (U_{th}) em **série** com uma **resistência** (R_{th}),

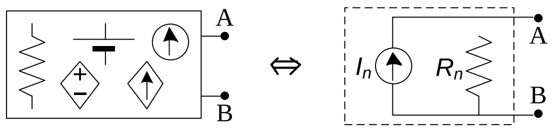


em que:

- U_{th} é a tensão entre os pontos A e B (em circuito aberto), e
- R_{th} é a resistência entre os pontos A e B com as fontes independentes anuladas.

Teorema de Norton

Qualquer circuito constituído por resistências e fontes lineares, com dois pontos A e B, tem um circuito terminal equivalente (visto a partir dos pontos A e B) constituído por uma **fonte de corrente** (I_n) em **paralelo** com uma **resistência** (R_n),



em que:

- I_n é a corrente percorre os pontos A e B quando estes estão em curto-circuito, e
- R_{th} é a resistência entre os pontos A e B com as fontes independentes anuladas.

Correspondência entre equivalentes:

$$\begin{cases} R_{th} = R_n \\ U_{th} = R_n \cdot I_n \end{cases} \tag{1}$$

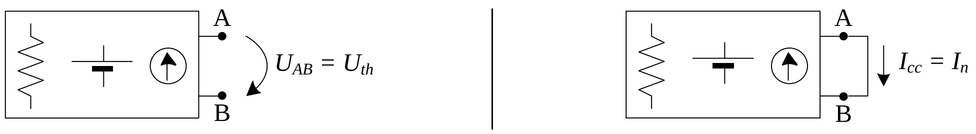
Aplicação

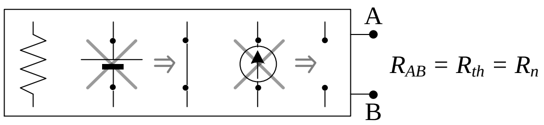
A anulação das fontes independentes corresponde à substituição descrita no teorema da sobreposição, ou seja, substituir:

- fontes de tensão por curto-circuito ($U = 0$), e
- fontes de corrente por circuito-aberto ($I = 0$).

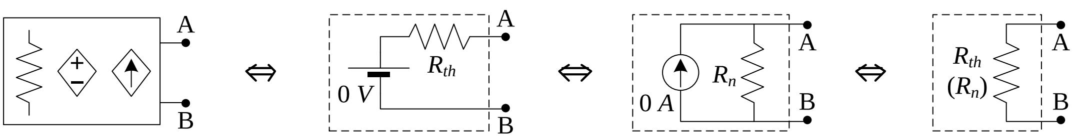
Na aplicação dos teoremas, três situações diferentes podem surgir:

- Num circuito que contenha **apenas fontes independentes**, para determinar os parâmetros dos equivalentes analisa-se directamente o circuito conforme descrito pelos teoremas.

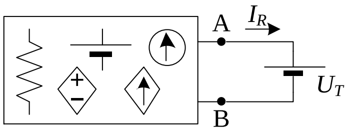




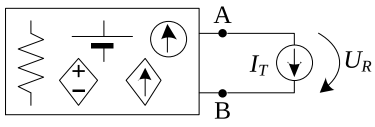
- Num circuito que contenha **apenas fontes dependentes** a tensão de Thevenin e a corrente de Norton são zero.



- Num circuito que contenha **fontes independentes e dependentes** não é possível determinar R_{th}/R_n apenas anulando as fontes independentes. Nesta situação, utiliza-se um método alternativo que consiste em ligar aos pontos A e B do circuito uma fonte de teste, tensão (U_T) ou corrente (I_T) conforme seja vantajoso, e determinar respectivamente a corrente (I_R) ou tensão (U_R) resultante nessa mesma fonte:

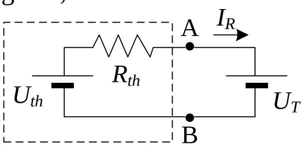


ou



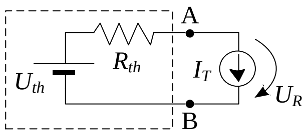
Em seguida, utilizam-se esses valores para determinar a determinar R_{th}/R_n:

R_{th}:



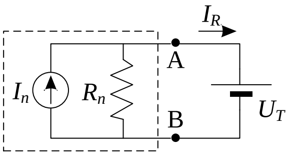
$$R_{th} = \frac{U_{th} - U_T}{I_R}$$

ou



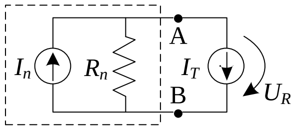
$$R_{th} = \frac{U_{th} - U_R}{I_T}$$

R_n:



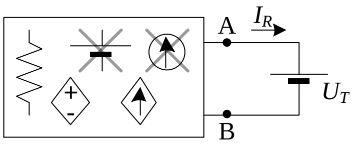
$$R_n = \frac{U_T}{I_n - I_R}$$

ou

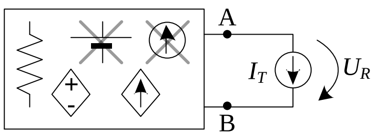


$$R_n = \frac{U_R}{I_n - I_T}$$

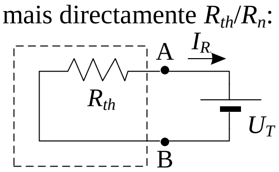
Uma variante deste método consiste em aplicar a fonte de teste ao circuito, anulando as fontes independentes:



ou

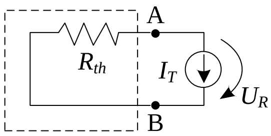


Neste caso, utilizam-se os valores de correntes ou tensão respectivamente obtidos para determinar a determinar mais directamente R_{th}/R_n:



$$R_{th} = R_n = \frac{U_T}{I_R}$$

ou

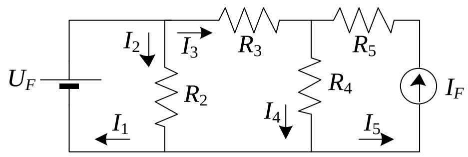


$$R_{th} = R_n = \frac{U_R}{I_T}$$

Esta variante poderá, dependendo do circuito, conseguir uma significativa simplificação do problema. Por isso, é recomendada.

Métodos Sistemáticos de Análise de Circuitos

O circuito da figura ao lado constitui um exemplo concreto de circuito cujas variáveis se pretendem obter, utilizando diferentes métodos sistemáticos. Neste caso, as variáveis pretendidas são as correntes em todos os ramos.



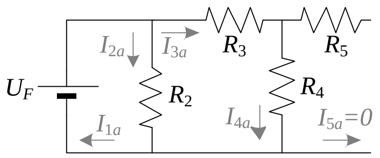
Método da sobreposição das fontes

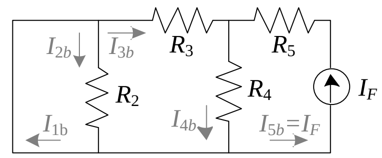
Este método aplica directamente o teorema da sobreposição, que indica que as variáveis do circuito podem ser encontradas pela sobreposição (soma algébrica) dos efeitos gerados por cada uma das fontes independentes.

O método consiste em:

- identificar o número F de fontes independentes;
- para cada uma das F fontes independentes, analisar o circuito que resulta da anulação das outras fontes independentes; e,
- somar os resultados parciais obtidos para obter os valores das variáveis do circuito.

Exemplo:





$$I_{1a} = \frac{U_F}{R_2 // (R_3 + R_4)} \qquad I_{2a} = \frac{U_F}{R_2}$$

$$I_{3a} = I_{1a} - I_{2a} \qquad I_{4a} = I_{3a}$$

$$I_{4b} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} I_F \qquad I_{3b} = -\frac{R_4}{R_3 + R_4} I_F$$

$$I_{2b} = 0 \qquad I_{1b} = I_{3b}$$

$$\begin{array}{|l} I_1 = I_{1a} + I_{1b} \\ I_2 = I_{2a} + I_{2b} \\ I_3 = I_{3a} + I_{3b} \\ I_4 = I_{4a} + I_{4b} \\ I_5 = I_{5a} + I_{5b} \end{array}$$

Método das correntes fictícias (ou nas malhas)

Este método permite obter a corrente fictícia em cada uma das malhas do circuito. Uma malha é percurso fechado num circuito que não contém qualquer outro percurso fechado. As correntes nos elementos são dadas por uma função algébrica das correntes fictícias.

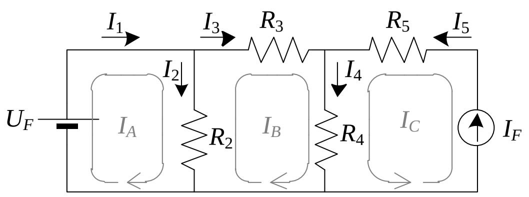
O método consiste em:

- definir as R-(N-1) malhas que cobrem todos os R ramos do circuito e o sentido da respectiva corrente fictícia, em que N é o número de nós; **atenção:** nenhuma corrente pode ser a única a passar em dois ramos!
- aplicar a lei de Kirchhoff das tensões a cada uma das malhas, e utilizar a relação tensão-corrente de cada um dos elementos para obter equações em função das correntes fictícias; e,
- resolver o resultante sistema de R-(N-1) equações (com outras tantas incógnitas).

Oportunidades de simplificação:

- deve passar-se apenas uma corrente fictícia pelos ramos com fonte de corrente ou que estão em paralelo com uma fonte de tensão (cuja corrente é conhecida à partida)
- a existência de C ramos com uma fonte de corrente e/ou T ramos em paralelo com uma fonte de tensão, permite reduzir o número de incógnitas em igual número (C + T), pois fixam as correntes (fictícias, ou a relação entre duas delas) nesses ramos.

Exemplo:



$$\begin{cases} U_F - R_2 I_A = 0 \\ R_2 (I_A - I_B) - R_3 I_B - R_4 (I_B + I_C) = 0 \\ I_C = I_F \end{cases}$$

$$\begin{array}{|l} I_1 = I_A + I_B \\ I_2 = I_A \\ I_3 = I_B \\ I_4 = I_B + I_C \\ I_5 = I_C \end{array}$$

Método das tensões nodais

Este método permite obter a tensão em cada um dos nós do circuito relativamente a um nó de referência.

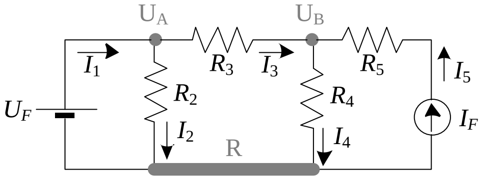
O método consiste em:

- de entre os N nós do circuito, escolher um para referência (R) e numerar os restantes N-1;
- para cada um dos N-1 nós cuja tensão é desconhecida, escrever a respectiva equação de Kirchhoff (dos nós) em função das tensões nodais;
- para cada dois dos N-1 nós interligados apenas por uma fonte de tensão, as respectivas equações conterão a corrente na fonte, que não pode ser escrita em função das respectivas tensões: fundir as equações numa só, eliminando essa corrente, e acrescentar a equação que relaciona as tensões dos nós; e,
- resolver o resultante sistema de equações (com outras tantas incógnitas).

Oportunidades de simplificação:

- deve escolher-se para referência o nó ao qual estiverem ligados mais ramos apenas com fontes de tensão;
- a existência de T ramos apenas com fonte(s) de tensão e ligados ao nó de referência (directamente ou através de outros), reduz o número incógnitas em igual número, pois fixam as tensões nodais.

Exemplo:



$$\begin{cases} U_A = U_F \\ \dfrac{U_A - U_B}{R_3} - \dfrac{U_B}{R_4} + I_F = 0 \end{cases}$$

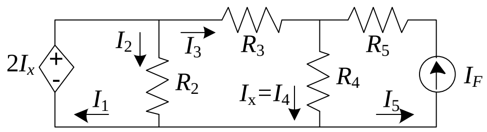
$$\begin{array}{|l} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_2 = U_A / R_1 \\ I_3 = (U_A - U_B) / R_3 \\ I_4 = U_B / R_4 \\ I_5 = I_C \end{array}$$

Aplicação com fontes dependentes

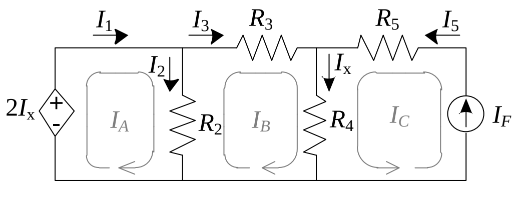
A existência de fontes dependentes no circuito tem um efeito mais notório sobre o método da sobreposição, porque as fontes dependentes não podem ser anuladas, permanecendo em todos os circuitos inerentes à análise dos efeitos individuais das fontes independentes.

Nos outros dois métodos (correntes fictícias e tensões nodais), as fontes dependentes podem fazer aparecer incógnitas adicionais no sistema de equações: uma por cada variável do circuito que, não sendo incógnita do método (corrente fictícia ou tensão nodal), é utilizada para definir o valor da grandeza da fonte (tensão ou corrente). No entanto, estas incógnitas são tratadas por um igual número de equações adicionais, que expressam a relação entre a grandeza da fonte e as outras incógnitas do método (correntes fictícias ou tensões nodais, consoante o método utilizado).

Por exemplo, para o circuito da figura ao lado, em que se troca a fonte de tensão do exemplo anterior por uma fonte dependente:



- no método das correntes fictícias



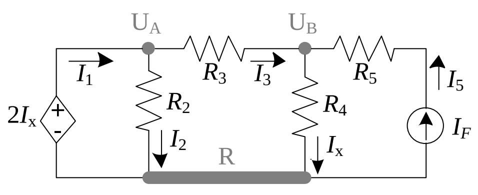
obtêm-se as mesmas equações que anteriormente, excepto a primeira, que fica

$$2\, I_x - R_2\, I_A = 0\ ,$$

acrescendo a incógnita I_x ao sistema, mas também a equação

$$I_x = I_B + I_C\ .$$

- no método das tensões nodais



obtêm-se as mesmas equações que anteriormente, excepto a primeira, que fica

$$U_A = 2\, I_x\ ,$$

acrescendo a incógnita I_x ao sistema, mas também a equação

$$I_x = U_B / R_4\ .$$

Dicas de aplicação

O método a aplicar a um determinado circuito depende das características desse circuito. A partir das características de cada método e respectivas oportunidades de simplificação anteriormente descritas, podem-se definir algumas regras heurísticas de aplicação.

- **Sobreposição**: deve aplicar-se sobretudo a circuitos apenas com fontes independentes, pois assim, cada circuito parcelar contém apenas uma fonte;
- **Correntes Fictícias**: deve aplicar-se a circuitos que tenham predominantemente fontes de corrente, pois permite eliminar o mesmo número de incógnitas (correntes fictícias);
- **Tensões Nodais**: deve aplicar-se a circuitos que tenham mais ramos apenas com fontes de tensão, pois permite eliminar o mesmo número de incógnitas (tensões nodais);

Erros a evitar

A aplicação de um método sistemático consiste em seguir uma receita, tal como um computador faria. As receitas de cada método anteriormente descritas conduzem a um sistema de equações cujas incógnitas estão claramente identificadas. Se a aplicação do método se desviar dessas incógnitas já não não aplica o método propriamente dito e não é sistemático: conduz a um processo de cálculo que exige reflexão e que é mais demorado, ou então poderá "andar às voltas".

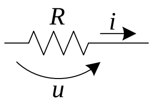
Para evitar o problema acima descrito devem ser evitados os seguintes erros de aplicação:

- **Correntes Fictícias**: não se escreve a equação das tensões na malha que tenha uma (ou mais) fonte(s) de corrente, pois isso faria aparecer na respectiva equação a(s) variável(is) que representa(m) a(s) tensão(ões) na(s) fonte(s); ao invés, escreve-se a relação entre o valor de cada fonte de corrente e das correntes fictícias que por ela passam;
- **Tensões Nodais**: não se escreve a equação das correntes de um nó ao qual estejam ligados ramos apenas com fontes de tensão, pois isso faria aparecer na equação a variável que representa a corrente no ramo; ao invés, escreve-se a relação entre o valor da fonte de tensão e as tensões dos nós ligados por esses ramos.

Outros são erros no sentido absoluto:

- **Correntes Fictícias**: não se pode passar apenas uma corrente fictícia por dois ramos, ou seja, pelo menos um deles tem que ser percorrido por pelo menos uma outra corrente.

Comparação R, C, L



A resistência é um elemento que dissipa energia (eléctrica) sob a forma de calor, criado pelo atrito das cargas eléctricas em movimento. Esta conversão é designada por efeito de Joule e a potência dissipada é dada por

$$p = u \cdot i \quad \text{(W, watt)}$$

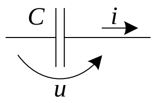
A resistência eléctrica (R) é o parâmetro da resistência (elemento) que relaciona a tensão aos seus terminais com a corrente que a atravessa, expresso pela Lei de Ohm

$$\boxed{R = \frac{u(t)}{i(t)}} \qquad (1)$$

e é uma medida da oposição que a matéria oferece à passagem de corrente eléctrica. A unidade de resistência eléctrica, é o ohm (Ω).

A expressão (2) define a característica tensão-corrente do elemento resistência.

A corrente e a (queda de) tensão têm sempre o mesmo sentido (em concordância com a lei de Ohm) e proporcionalidade.



O condensador é um elemento que armazena energia na forma de um campo eléctrico, criado por cargas eléctricas estáticas (tensão). A capacidade eléctrica (C) é o parâmetro do condensador que relaciona a tensão aos seus terminais com a respectiva carga armazenada

$$q = C \cdot u \quad \text{(C, coulomb)}$$

e é uma função das propriedades do dieléctrico, da área e da separação entre os eléctrodos. A unidade de capacidade eléctrica é o farad (F).

De acordo com a equação anterior, a adição/remoção de cargas eléctricas às placas de um condensador equivale a variar a tensão eléctrica existente entre as mesmas, e vice-versa.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Assim sendo, a corrente que “atravessa” um condensador é proporcional à variação da tensão aos seus terminais. A expressão

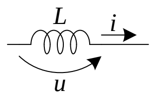
$$\boxed{i(t) = C\frac{du(t)}{dt}} \qquad (2)$$

define a característica tensão-corrente do elemento condensador.

A relação entre os sentidos da tensão e corrente varia consoante o elemento esteja a fornecer ou receber energia. Mudanças “instantâneas” da tensão (ligar uma fonte) originam picos de corrente idealmente infinitas.

A energia magnética armazenada é

$$w = ½\, C\, u^2 \quad \text{(J, joule).}$$



A bobina é um componente que armazena energia na forma de um campo magnético, criado por cargas eléctricas em movimento (corrente). A indutância (L) é o parâmetro da bobina que relaciona a corrente que a percorre com o fluxo magnético

$$\phi = L \cdot i \quad \text{(Wb, weber)}$$

e é uma função das dimensões físicas, do número de espiras e do material do núcleo. A unidade de indutância é o henry (H).

A relação (5) indica que as variações no fluxo magnético são proporcionais às variações na corrente eléctrica. Assim, e de acordo com a Lei de Faraday (indução de força electromotriz por variação do fluxo magnético)

$$v(t) = N\frac{d\phi(t)}{dt}$$

a tensão aos terminais de uma bobina é proporcional à variação da corrente que a atravessa. A expressão

$$\boxed{u(t) = L\frac{di(t)}{dt}} \qquad (3)$$

define a característica tensão-corrente do elemento bobina.

A relação entre os sentidos da tensão e corrente varia consoante o elemento esteja a fornecer ou receber energia. Mudanças “instantâneas” da corrente (desligar um interruptor) originam picos de tensão idealmente infinitos.

A energia eléctrica armazenada é

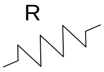
$$w = ½\, L\, i^2 \quad \text{(J, joule).}$$

Funcionamento dos Circuitos

As equações 1, 2 e 3 são leis físicas do funcionamento dos respectivos componentes, e que estes impõem ao circuito onde estão inseridos. As leis de Kirchhoff são leis de funcionamento dos circuitos, e que estes impõem aos componentes que deles fazem parte. Assim, é a conjugação destes dois tipos de leis que define o funcionamento de qualquer circuito.

Associação R, C, L

R



Série

$$R_s = R_1 + R_2 + ... + R_n$$

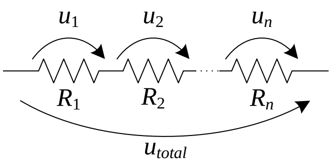
Paralelo

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

Paralelo de 2 resistências

$$R_p = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$$

Divisor de tensão

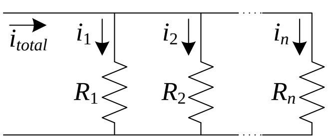


$$u_r = \frac{R_r}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} u_{total}$$

Divisor de tensão com 2 resistências

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_{total}$$

Divisor de corrente



$$i_r = \frac{\frac{1}{R_r}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}} i_{total}$$

Divisor de corrente com 2 resistências

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_{total}$$

C

Série

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

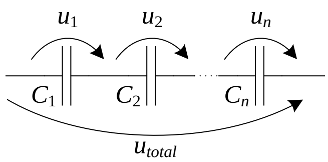
Série de 2 condensadores

$$C_s = \frac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2}$$

Paralelo

$$C_p = C_1 + C_2 + ... + C_n$$

Divisor de tensão

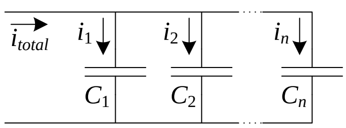


$$u_c = \frac{\frac{1}{C_c}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}} u_{total}$$

Divisor de tensão com 2 condensadores

$$u_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u_{total}$$

Divisor de corrente

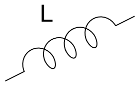


$$i_c = \frac{C_c}{C_1 + C_2 + \ldots + C_n} i_{total}$$

Divisor de corrente com 2 condensadores

$$i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i_{total}$$

L



Série

$$L_s = L_1 + L_2 + ... + L_n$$

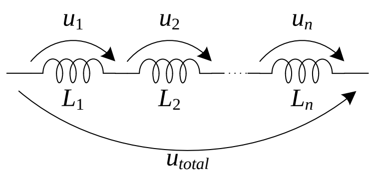
Paralelo

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}$$

Paralelo de 2 bobinas

$$L_p = \frac{L_1 \times L_2}{L_1 + L_2}$$

Divisor de tensão

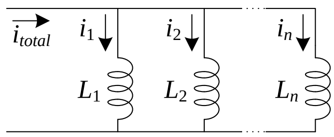


$$u_l = \frac{L_l}{L_1 + L_2 + \ldots + L_n} u_{total}$$

Divisor de tensão com 2 bobinas

$$u_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} u_{total}$$

Divisor de corrente



$$i_l = \frac{\frac{1}{L_l}}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}} i_{total}$$

Divisor de corrente com 2 bobinas

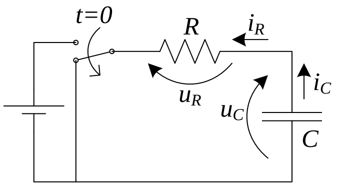
$$i_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_{total}$$

Circuitos de 1ª ordem

Um circuito de primeira ordem é composto por um (ou um conjunto redutível a apenas um, por associação série e/ou paralelo) condensador ou uma bobina e um qualquer conjunto de resistências e fontes.

Resposta Natural de 1ª ordem

Circuito RC



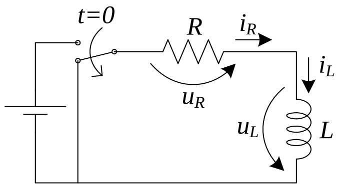
Como

$$i_C = i_R \quad \text{e} \quad u_C = -u_R$$

considerando as equações 1 e 2 anteriores, resulta a seguinte equação de funcionamento do circuito

$$C\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{-u_C(t)}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_C(t) = 0 \,.$$

Circuito RL



Como

$$i_L = i_R \quad \text{e} \quad u_L = -u_R$$

considerando as equações 1 e 3 anteriores, resulta a seguinte equação de funcionamento do circuito

$$L\frac{di_L(t)}{dt} = -R \cdot i_L(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{L/R}i_L(t) = 0 \,.$$

Ambas as equações têm a forma geral

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = 0$$

em que x é a variável que traduz o estado de energia dos componentes armazenadores de energia.

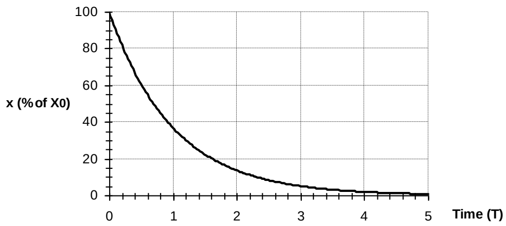
A solução desta equação diferencial é

$$x(t) = X_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

em que

- τ é a constante de tempo do circuito
- $X_0 = x(0)$, e é determinado pela condição inicial

e cuja evolu ão é ilustrada ao l do.



Para $v_C(t)$, e considerando $u_C(0) = U_0$, obtém-se

$$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t>0), \quad \text{com } \tau = RC.$$

Para $i_L(t)$, e considerando $i_L(0) = I_0$, obtém-se

$$i_L(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t>0), \quad \text{com } \tau = L/R.$$

Continuidade e Conservação da Energia

Como a energia não varia instantaneamente, então $u_C(t)$ e $i_L(t)$ são contínuas.
Poderiam ter sido escritas as equações de funcionamento dos circuitos relativas a i_C e v_L, respectivamente

$$i_C = i_R \;\Leftrightarrow\; i_C(t) = \frac{-u_C(t)}{R} \;\Leftrightarrow\; i_C = -\frac{1}{RC}\int i_C \cdot dt$$

$$\frac{di_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}i_C(t) = 0 \,.$$

$$u_L = -u_R \;\Leftrightarrow\; u_L = -R \cdot i_L(t) \;\Leftrightarrow\; u_L = -R\frac{1}{L}\int u_L \cdot dt$$

$$\frac{du_L(t)}{dt} + \frac{1}{L/R}u_L(t) = 0 \,.$$

Ambas as equações têm a forma geral anterior, e portanto soluções da mesma forma, resultando

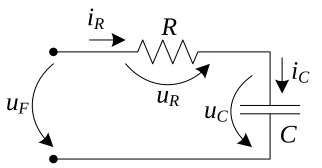
$$i_C(t) = i_C(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t>0), \quad \text{com } \tau = RC.$$

$$u_L(t) = u_L(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t>0), \quad \text{com } \tau = L/R.$$

No entanto, ao invés de $u_C(0)$ e $i_L(0)$ que reflectem a conservação da energia, i.e. $u_C(0^-) = u_C(0^+)$ e $i_L(0^-) = i_L(0^+)$, $i_C(0)$ e $u_L(0)$ dependem do circuito onde o componente/armazenador está inserido e de $u_C(0)$ e $i_L(0)$, respectivamente.
Aplicando respectivamente as equações 2 e 3 (na página 4) a u_C(t) e i_L(t) obtidos acima, ou simplesmente utilizando as equações do circuito, obtém-se $i_C(0) = -U_0/R$ e $u_L(0) = -R \cdot I_0$. Portanto, i_C e u_L não dependem dos seus valores anteriores, ou seja, são variáveis não causais e descontínuas no tempo.

Resposta Forçada de 1ª ordem

Circuito RC



Como

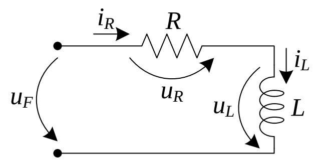
$$u_R + u_C = u_F \quad \text{e} \quad i_C = i_R$$

então, considerando as equações 1 e 2, obtém-se

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_F(t)$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{1}{RC}u_F(t)\,.$$

Circuito RL



Como

$$u_L + u_R = u_F \quad \text{e} \quad i_L = i_R$$

então, considerando as equações 1 e 3, obtém-se

$$L\frac{di_L(t)}{dt} + R\cdot i_L(t) = u_F(t)$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{L/R}i_L(t) = \frac{1}{R}\frac{1}{L/R}u_F(t)\,.$$

Ambas as equações têm a forma geral

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = B\frac{1}{\tau}y(t) \tag{5}$$

que tem como solução

$$x(t) = \underbrace{X_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{resposta natural}} + \underbrace{B\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\int y(t)\cdot e^{\frac{t}{\tau}}dt}_{\text{resposta forçada}}\,, \tag{6}$$

em que, o primeiro termo corresponde à resposta natural do circuito, e o segundo termo corresponde à componente forçada pelo sinal genérico $y(t)$.

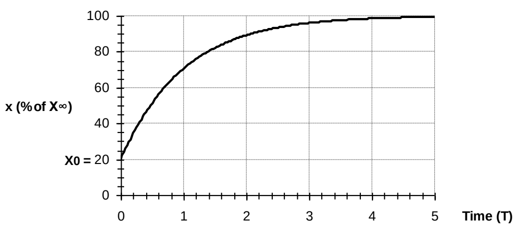
Para uma tensão $y(t)$ constante

$$y(t) = Y,\ t>0$$

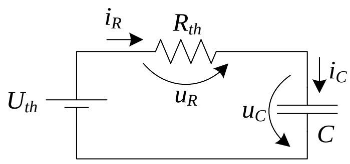
a resposta fica

$$x(t) = X_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + BY\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right),\ (t>0). \tag{7}$$

A curva resultante desta expressão é ilustrada ao lado.

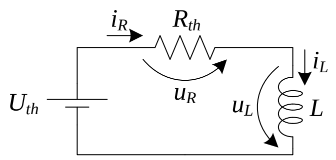


Nestas condições particulares, ou seja $y(t) = Y$ e $t>0$, o circuito resulta conforme representado a seguir, e então, representa não apenas uma configuração, mas todos os circuitos que por aplicação do teorema de Thevenin a ele possam ser reduzidos ($Y = U_{th}$ e $R = R_{th}$).



Onde $x = u_C$, $B = 1$, $\tau = R_{th}\cdot C$ e $X_0 = u_C(0) = U_0$, obtendo-se

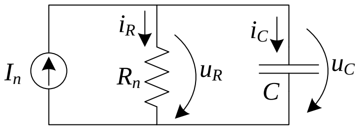
$$u_C(t) = U_0\cdot e^{-\frac{t}{R_{th}\cdot C}} + U_{th}\left(1-e^{-\frac{t}{R_{th}\cdot C}}\right),\ (t>0). \tag{8a}$$



Onde $x = i_L$, $B = 1/R_{th}$, $\tau = L/R_{th}$ e $X_0 = i_L(0) = I_0$, obtendo-se

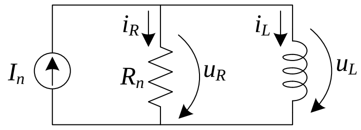
$$i_L(t) = I_0\cdot e^{-\frac{t}{L/R_{th}}} + \frac{U_{th}}{R_{th}}\left(1-e^{-\frac{t}{L/R_{th}}}\right),\ (t>0). \tag{8b}$$

Fazendo a análise dos circuitos com fonte de corrente, ou seja, utilizando o equivalente de Norton ($Y = I_n$ e $R = R_n$) representado a seguir, obtêm-se de novo as equações 5 a 7, nestes casos com



$B = R_n$, e outra vez $\tau = R_n \cdot C$ e $X_0 = u_C(0) = U_0$, logo

$$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R_n \cdot C}} + R_n \cdot I_n \left(1 - e^{-\frac{t}{R_n \cdot C}}\right),\ (t>0).$$



$B = 1$, e mais uma vez $\tau = L/R_n$ e $X_0 = i_L(0) = I_0$, logo

$$i_L(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R_n}} + I_n \left(1 - e^{-\frac{t}{L/R_n}}\right),\ (t>0).$$

Este resultado poderia ter sido obtido directamente a partir das equações 8a e 8b aplicando as equações 1, o que verifica a correspondência entre os equivalentes de Thevenin e de Norton e a respectiva validade.

Sistematização

A partir das equações 8a e 8b, e aplicando as equações 2 e 3, respectivamente, obtêm-se as expressões de i_C e v_L para o equivalente de Thevenin

$$i_C(t) = \frac{U_{th} - U_0}{R_{th}} \cdot e^{-\frac{t}{R_{th} \cdot C}},\ (t>0). \qquad (9a)$$

Das expressões de u_C e i_C obtém-se que

$$\begin{cases} u_C(0) = U_0 \\ i_C(0) = \dfrac{U_{th} - U_0}{R_{th}} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u_C(\infty) = U_{th} \\ i_C(\infty) = 0 \end{cases}.$$

$$U_L(t) = \left(U_{th} - R_{th} \cdot I_0\right) \cdot e^{-\frac{t}{L/R_{th}}},\ (t>0). \qquad (9b)$$

Das expressões i_L e u_L obtém-se que

$$\begin{cases} i_L(0) = I_0 \\ u_L(0) = U_{th} - R_{th} \cdot I_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} i_L(\infty) = \dfrac{U_{th}}{R_{th}} \\ u_L(\infty) = 0 \end{cases}.$$

Destes resultados pode concluir-se que, no instante inicial (t=0) e no regime permanente ($t \to \infty$) da resposta, os armazenadores de energia comportam-se como

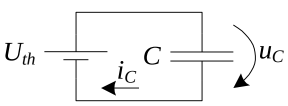
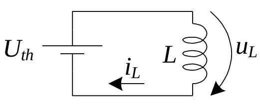
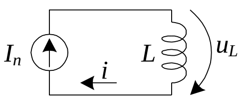
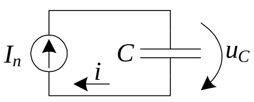
t	**Condensador**	**Bobina**
0	fonte de tensão U_0 (curto-circuito, se cond. inic. nulas)	fonte de corrente I_0 (circuito-aberto, se cond. inic. nulas)
∞	circuito-aberto	curto-circuito

De notar também que, na equação 7, $x(\infty) = BY$. Pela aplicação da tabela acima esse valor torna-se fácil de determinar, e então é preferível a memorizar os valores de B para os 4 circuitos tipo de 1ª ordem. Então, isso permite que a equação 7 seja generalizada e simplificada, fazendo $BY = X_\infty$:

$$x(t) = X_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + X_\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),\ (t>0). \qquad (10)$$

Por outro lado, verifica-se que as equações 9a e 9b podem encontrar-se directamente por aplicação da tabela acima. Então, a equação 10 serve para descrever não só as variáveis que traduzem o estado de energia dos armazenadores (u_C e i_L), mas também todas as outras variáveis dos circuitos (e.g., i_C e u_L). Resumindo, a equação 10, permite determinar quaisquer variáveis de circuitos de 1ª ordem alimentados por fontes constantes e (de forma segmentada) por ondas quadradas.

Note ainda, que existem casos extremos onde $R_{th} = 0$ e $R_n = \infty$, resultando em transitórios (teoricamente) infinitos de i_C/u_L ($\tau = 0$) e crescimento indeterminado de u_C/i_L ($\tau = \infty$), conforme se exemplifica abaixo.

		$\boldsymbol{\tau = 0}$		$\boldsymbol{\tau = \infty}$	
R_{th} ou R_n	**0**		$i_C = C\dfrac{dU_{th}}{dt}$ $\Leftrightarrow i_C = 0$		$U_{th} = L\dfrac{di}{dt}$ $\Leftrightarrow i_L = \dfrac{U_{th}}{L}t$
	∞		$u_L = L\dfrac{dI_n}{dt}$ $\Leftrightarrow u_L = 0$		$I_n = C\dfrac{du_C}{dt}$ $\Leftrightarrow u_C = \dfrac{I_n}{C}t$

Aplicação

Por exemplo, para encontrar as expressões de i_C e u_L directamente para os circuitos com equivalente de Norton, e sendo as condições iniciais dadas respectivamente por U_{C0} e I_{L0}, faz-se

$$\begin{cases} I_{C0} = I_n - I_{R0} = I_n - \dfrac{U_{C0}}{R_n} \\ I_{C\infty} = 0 \end{cases}$$

resultando

$$i_C(t) = \left(I_n - \frac{U_{C0}}{R_n} \right) \cdot e^{-\frac{t}{R_n \cdot C}}, \ (t>0).$$

$$\begin{cases} U_{L0} = I_{R0} \cdot R_n = (I_n - I_{L0}) R_n \\ U_{L\infty} = 0 \end{cases}$$

resultando

$$u_L(t) = R_n (I_n - I_{L0}) \cdot e^{-\frac{t}{L/R_n}}, \ (t>0).$$

Circuitos de 2ª ordem

Um circuito de 2ª ordem é composto por dois armazenadores de energia (não redutível a apenas um, por associação série e/ou paralelo), um qualquer conjunto de resistências e cuja equação de funcionamento é do tipo

$$\boxed{\frac{dx^2(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0{}^2 \cdot x(t) = f\left[y(t)\right]} \qquad (11)$$

em que

- $x(t)$ é a corrente ou tensão num dos componentes do circuito
- α é o coeficiente de amortecimento
- ω_0 é a frequência angular natural de oscilação
- $y(t)$ é o termo forçado das fontes independentes.

Resposta Natural de 2ª ordem e Forçada com termo nulo

Na resposta natural ou livre dos sistemas de 2ª ordem acontece livre da influência de fontes, e portanto $y(t) = 0$. Existem circuitos alimentados por fontes para os quais o termo $f[y(t)]$ da equação de funcionamento (relativa a uma determinada variável) resulta nulo. Nesse caso, trata-se de uma resposta forçada cuja forma que não difere de uma resposta livre.
A equação resulta

$$\boxed{\frac{dx^2(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0{}^2 \cdot x(t) = 0} \qquad (12)$$

O matemático Euler foi o primeiro a concluir que uma equação destas tem soluções do tipo e^{st}, $s \in \mathbb{C}$, pois a exponencial é uma função cuja derivada mantém a sua forma original, podendo então cancelar as derivadas de ordem diferente do polinómio. Então, fazendo $x(t) = e^{st}$ e dividindo pelo factor comum (e^{st}), obtém-se a denominada equação característica

$$s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_0{}^2 = 0 \qquad (13)$$

cujas raízes, aplicando a formula resolvente, são

$$s_1, s_2 = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0{}^2}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}\text{, com } s_1, s_2 \in \mathbb{C}. \qquad (14)$$

Como a equação 1 obedece ao princípio da sobreposição, então qualquer combinação linear das soluções e^{st} também satisfaz a equação. Então, a solução para a equação 12 resulta

$$x(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \qquad (15)$$

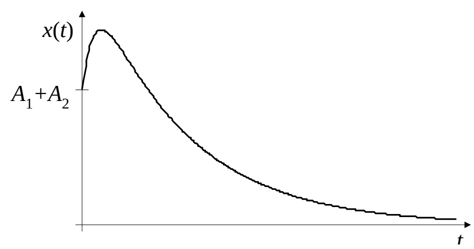
em que A_1 e A_2 são determinados pelas condições iniciais do circuito.
No entanto, dependendo da relação entre α e ω_0, a equação 12 dá origem a 4 tipos de curvas, descritas a seguir, que por sua vez distinguem 4 tipos de sistemas.

$\alpha > \omega_0$ – Sistema Sobre-amortecido

Sendo $\alpha > \omega_0$, então as raízes da equação 14 são reais e negativas. Pode então reescrever-se a resposta de sistemas sobre-amortecidos denotando isso

$$\boxed{x(t) = A_1 \cdot e^{r_1 t} + A_2 \cdot e^{r_2 t}} \qquad (16)$$

com $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \wedge r_1, r_2 < 0$.
A curva $x(t)$ tem a forma apresentada ao lado.



$\alpha = \omega_0$ – Sistema Criticamente Amortecido

Se $\alpha = \omega_0$, então as duas raízes são coincidentes ($s_1 = s_2 = -\alpha$), podendo então reescrever-se a equação 15 como

$$x(t) = A_1 \cdot e^{-\alpha} + A_2 \cdot e^{-\alpha} = A \cdot e^{-\alpha}.$$

No entanto, esta equação não consegue satisfazer as duas condições iniciais (basta uma para determinar A), e isso é necessário para que se garanta a continuidade da resposta de 2ª ordem, i.e., que nem $x(t)$ nem $dx(t)/dt$ variem instantaneamente. Assim, é necessária uma outra forma analítica para esta resposta.
Voltando à equação diferencial 12 e fazendo $\alpha = \omega_0$, obtém-se

$$\frac{dx^2(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx(t)}{dt} + \alpha^2 \cdot x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx^2(t)}{dt^2} + \alpha\frac{dx(t)}{dt} + \alpha\frac{dx(t)}{dt} + \alpha^2 \cdot x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}+\alpha\cdot x(t)\right)+\alpha\left(\frac{dx(t)}{dt}+\alpha\cdot x(t)\right)=0$$

que pode resolver-se por partes, fazendo a substituição de variáveis

$$\frac{dx(t)}{dt}+\alpha\cdot x(t)=z(t)\,.$$

Concretamente, resulta a seguinte equação diferencial de 1ª ordem

$$\frac{dz(t)}{dt}+\alpha\cdot z(t)=0$$

cuja solução é já conhecida, $z(t) = K\cdot e^{-\alpha t}$, e portanto

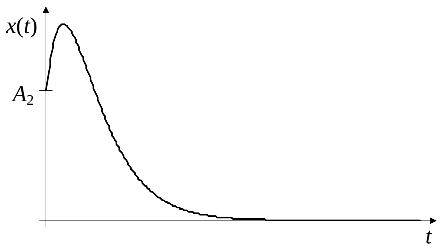
$$\frac{dx(t)}{dt}+\alpha\cdot x(t)=A_1\cdot e^{-\alpha t}\,.$$

Por sua vez, esta equação é idêntica à equação 5 e, portanto, tem o mesmo tipo de solução, ou seja

$$x(t)=A_2\cdot e^{-\alpha t}+A_1\cdot e^{-\alpha t}\int e^{-\alpha t}\cdot e^{\alpha t}dt=A_2\cdot e^{-\alpha t}+A_1 t\cdot e^{-\alpha t}$$

$$\boxed{x(t)=\left(A_2+A_1 t\right)\cdot e^{-\alpha t}} \qquad (17)$$

A curva $x(t)$ tem a forma apresentada ao lado.



$\alpha < \omega_0$ – Sistema Sub-amortecido

Se $\alpha < \omega_0$, então as raízes da equação 13, podem ser reescritas como

$$s_1, s_2=-\alpha\pm\sqrt{(-1)\left(\omega_0^{\,2}-\alpha^2\right)}=-\alpha\pm j\sqrt{\omega_0^{\,2}-\alpha^2}\,.$$

As raízes são complexas conjugadas

$$s_1, s_2=-\alpha\pm j\omega_d\,,\ \text{com}\ \ \omega_d=\sqrt{\omega_0^{\,2}-\alpha^2}\,. \qquad (18)$$

e ω_d é a frequência angular de oscilação.
Substituindo na equação 15, obtém-se

$$x(t)=K_1\cdot e^{(-\alpha+j\omega_d)t}+K_2\cdot e^{(-\alpha-j\omega_d)t}=e^{-\alpha t}\left(K_1\cdot e^{j\omega_d t}+K_2\cdot e^{-j\omega_d t}\right).$$

Utilizando as fórmulas de Euler, que relacionam as funções trigonométricas com a função exponencial complexa ($e^{j\theta} = \cos\theta + j\ \mathrm{sen}\ \theta$, $e^{-j\theta} = \cos\theta - j\ \mathrm{sen}\ \theta$), resulta

$$x(t)=e^{-\alpha t}\left(K_1\cos(\omega_d t)+jK_1\sin(\omega_d t)+K_2\cos(\omega_d t)-jK_2\sin(\omega_d t)\right)$$

$$x(t)=e^{-\alpha t}\left[(K_1+K_2)\cos(\omega_d t)+j(K_1-K_2)\sin(\omega_d t)\right]$$

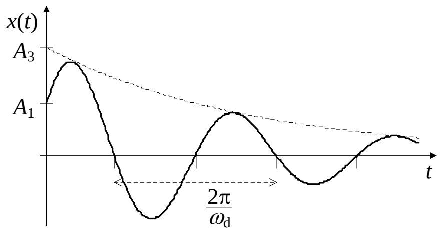
Fazendo $A_1 = K_1 + K_2$ e $A_2 = j(K_1 + K_2)$ obtém-se

$$x(t)=e^{-\alpha t}\left[A_1\cos(\omega_d t)+A_2\sin(\omega_d t)\right]$$

Sendo $x(t)$ uma grandeza real (corrente ou tensão eléctricas), então A_1 e A_2 são reais (de notar que K_1 e K_2 não têm esse requisito). Como a soma de duas sinusóides é uma sinusóide, também pode usar-se a seguinte forma

$$\boxed{x(t)=e^{-\alpha t}A_3\sin\left(\omega_d t+\theta\right)} \qquad (19)$$

sendo $A_3=\sqrt{A_1^{\,2}+A_2^{\,2}}$ e $\theta=\arctan\left(A_2/A_1\right)$.
A curva $x(t)$ tem a forma apresentada ao lado.



$\alpha = 0$ – Sistema Oscilatório

Sendo $\alpha = 0$, então o sistema não é amortecido. É um caso particular do anterior em que as raízes da equação 18 são puramente imaginárias

$$s_1, s_2=\pm j\omega_0$$

e o sistema oscila à frequência natural

$$\boxed{x(t)=A\sin\left(\omega_0 t+\theta\right)} \qquad (20)$$

A curva $x(t)$ tem a forma apresentada ao lado.