Projeto 1B, Dinâmica de populações em competição

Inês José, 88690, L.E
Ricardo Oliveira, 73055, M.I.E.E.I.C
Dong Xuyong, 92960, L.E.G.S.I
Leandro Pereira, 90078, L.C.P
Luís Zhou, 88608, L.E.A

Professora:
Ana Jacinta Soares

Conteúdo

1. Introdução
2. Evolução de uma espécie na ausência da outra (espécie isolada)
3. Evolução de uma espécie em competição com a outra e casos
4. Conclusão

Introdução

O objetivo deste projeto é aprofundarmos o nosso conhecimento, sobre a dinâmica de uma ou duas populações num meio ambiente.

Usamos os modelos de Verhulst e Malthus para o nosso estudo.

Assim sendo, para realizar esta análise começamos por apresentar a evolução de uma espécie na ausência de outra, ou seja, de uma espécie isolada e apresentamos aqui as equações do modelo e a análise do modelo.

De seguida analisamos a evolução de uma espécie em competição com outra, e começamos mais uma vez por apresentar as equações e a análise do modelo.

A nossa análise avança depois para a determinação dos pontos de equilíbrio e estabilidade e termina com a apresentação das simulações numéricas.

Ferramentas utilizadas

(1) Wolfram One

(2) LATEX

(3) Overleaf

(4) Matlab

2 Evolução de uma espécie na ausência da outra (espécie isolada)

$$\begin{cases} P'(t) = [a - bP(t) - kQ(t)]\ P(t)] \\ Q'(t) = [c - dQ(t) - \ell P(t)]\ Q(t)] \end{cases}$$

3 Evolução de uma espécie em competição com a outra

A evolução das populações é descrita pelo modelo, onde a,b,k,c,d,ℓ são constantes positivas.

$$\begin{cases} P'(t) = [a - bP(t) - kQ(t)]\ P(t) \\ Q'(t) = [c - dQ(t) - \ell P(t)]\ Q(t) \end{cases}$$

As constantes a e c correspondem às taxas de **crescimento intrínseco** das espécies.

As constantes b e d correspondem às taxas **inibidoras de crescimento** das espécies.

As constantes k e ℓ correspondem ao **efeito competitivo** de uma espécie sobre a outra.

Análise do modelo

Existem três possibilidades:

(1) Ocorre a extinção de ambas as espécies.

(2) Uma espécie sobrevive, enquanto a outra se extingue.

(3) Ambas as espécies sobrevivem, e encontram uma “convivência estável”.

Estudo do sistema dinâmico “reduzido”

$$\begin{cases} P' = (a - bP - kQ)P \\ Q' = (c - dQ - \ell P)Q \end{cases}$$

Obtemos os sistemas de equações, para posteriormente, determinamos as suas soluções:

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} P = 0 \\ Q = c - dQ - \ell P = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a - bP - kQ = 0 \\ Q = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a - bP - kQ = 0 \\ c - dQ - \ell P = 0 \end{cases}$$

Estudo do sistema dinâmico “reduzido”

Após termos determinado as soluções, obtemos os pontos de equilíbrio:

$$(P_1^*, Q_1^*) = (0, 0)$$

$$(P_2^*, Q_2^*) = (0, \tfrac{c}{d})$$

$$(P_3^*, Q_3^*) = (\tfrac{a}{b}, 0)$$

$$(P_4^*, Q_4^*) = \left(\tfrac{-ad+ck}{kl-bd}, \tfrac{a\ell-bc}{k\ell-bd}\right)$$

Partindo da equação anterior, definimos as funções

$$\begin{cases} F(P,Q) = (a - bP - kQ)P = aP - bP^2 - kQP \\ G(P,Q) = (c - dQ - \ell P)Q = cQ - dQ^2 - \ell PQ \end{cases}$$

$$\mathrm{J}(P,Q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial P} & \frac{\partial F}{\partial Q} \\ \frac{\partial G}{\partial P} & \frac{\partial G}{\partial Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2bP - kQ & -kP \\ \ell Q & c - 2dQ - \ell P \end{bmatrix}$$

Caso 1

As condições iniciais são: $P(0) = Q(0) = 1$.

Os parâmetros são: $a = b = k = 1$, $c = 0.5$, $d = 0.25$, $\ell = 0.75$.

Pontos de equilíbrio	Valores próprios		Tipo	Estabilidade
$(0,0)$	$\lambda_1 = 0.5$	$\lambda_2 = 1$		Instável
$(0,2)$	$\lambda_1 = -0.5$	$\lambda_2 = -1$		Estável
$(1,0)$	$\lambda_1 = -0.25$	$\lambda_2 = -1$		Estável
$(0.5,0.5)$	$\lambda_1 \cong -0.78$	$\lambda_2 \cong 0.16$	Ponto de Sela	Instável

Código Mathematica

```
a = 1
b = 1
c = 0.5
d = 0.25
k = 1
l = 0.75
```

```
SolucaoNumerica =
 NDSolve[{P'[t] == (a - b*P[t] - k*Q[t])*P[t],
   Q'[t] == (c - d*Q[t] - l*P[t])*Q[t], P[0] == pini,
   Q[0] == qini}, {P[t], Q[t]}, {t, 0, 30}]
```

```
EqPontos = {{0, 0}, {0, c/d}, {a/b,
   0}, {(c*k - a*d)/(k*l - b*d), (a*l - b*c)/(k*l - b*d)}}
```

Código Mathematica

```
PL1 = Plot[Evaluate[{P[t], Q[t]} /. SolucaoNumerica], {t, 0, 30},
  PlotRange -> {0, 2},
  PlotStyle -> {{Blue, Thickness[0.005]}, {Red,
     Thickness[0.005]}, {DarkerGreen, Thickness[0.005]}},
  Ticks -> {{5, 10, 15, 20, 25, 30}, {0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0}},
  AxesLabel -> {Tempo, Classes}, LabelStyle -> {Medium, Black, Bold},
  Epilog -> {Text[
     "\!\(\*StyleBox[\"Espécie Q\", \"Text\",FontColor->RGBColor[1, \
0, 0]]\)", {25, 1.5}],
    Text["\!\(\*StyleBox[\"Espécie\", \
\"Text\",FontColor->RGBColor[0., 0., 1.]]\)\!\(\*StyleBox[\" \", \
\"Text\",FontColor->RGBColor[0., 0., 1.]]\)\!\(\*StyleBox[\"P\", \
\"Text\",FontColor->RGBColor[0., 0., 1.]]\)", {15, 0.5}]} ]
```

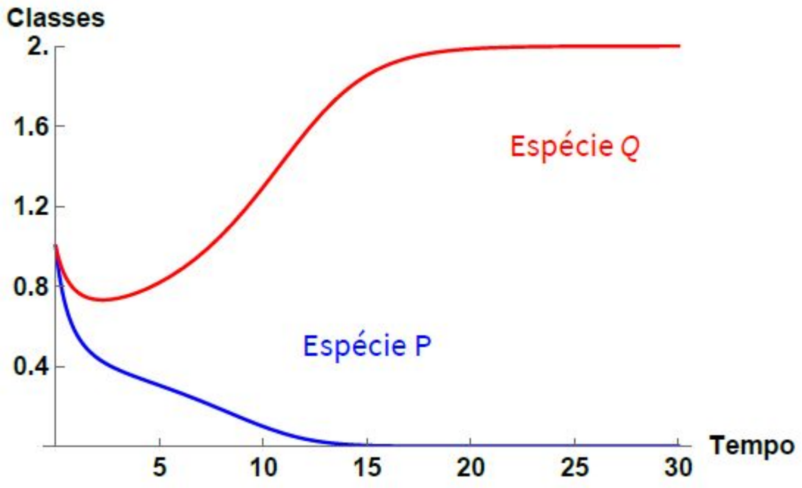
Código Mathematica

```
PL2 = ParametricPlot[
  Evaluate[{P[t], Q[t]} /. SolucaoNumerica], {t, 0, 30},
  PlotRange -> {{0, 1}, {0.6, 2}},
  PlotStyle -> {{Blue, Thickness[0.005]}, {Red,
     Thickness[0.005]}, {DarkerGreen, Thickness[0.005]}},
  Ticks -> {{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1}, {0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6,
     1.8, 2}}, AxesLabel -> {"P(t)", "Q(t)"},
```

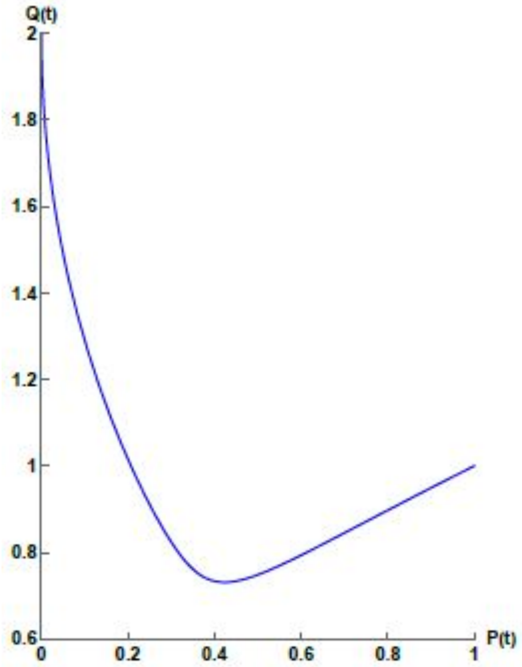
Código Mathematica

```
StreamPlot[{(a - b*P - k*Q)*P, (c - d*Q - l*P)*Q}, {P, -0.25,
  1.25}, {Q, -0.25, 2.25}, FrameLabel -> {P, Q}, StreamScale -> 1,
 StreamStyle -> {Arrowheads[Small], RGBColor[0, 0, 1]},
 Epilog -> {{PointSize[Large], Red, Point[EqPontos]}, Text["\!\(\*
StyleBox[\"(\", \"Text\",\nFontColor->RGBColor[1, 0, 0]]\)\!\(\*
StyleBox[\"0\", \"Text\",\nFontColor->RGBColor[1, 0, 0]]\)\!\(\*
StyleBox[\",\", \"Text\",\nFontColor->RGBColor[1, 0, 0]]\)\!\(\*
StyleBox[\"0\", \"Text\",\nFontColor->RGBColor[1, 0, 0]]\)\!\(\*
StyleBox[\")\", \"Text\",\nFontColor->RGBColor[1, 0, 0]]\)", {0, \
-0.1}], Text["\!\(\*
```

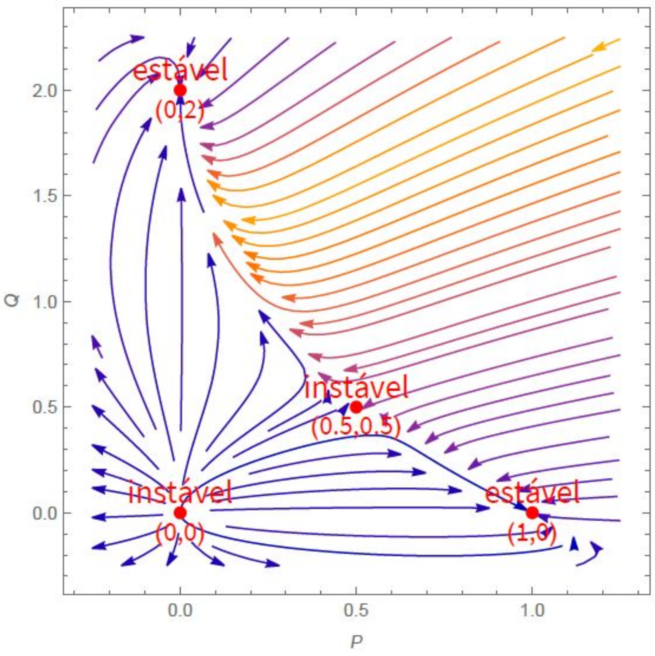
Solução Númerica do Sistema Diferencial



Esboço da relação entre P(t) e Q(t) para o caso 1



Campo de direções (com pontos de equilíbrio) para o caso 1



3.5 Simulações Numéricas Caso 2

Pontos de equilíbrio	Valores próprios		Tipo	Estabilidade
$(0,0)$	$\lambda_1 = 0.75$	$\lambda_2 = 1$		Instável
$(0, 0.75)$	$\lambda_1 = -0.75$	$\lambda_2 = 0.25$	Ponto de sela	Instável
$(1,0)$	$\lambda_1 = -1$	$\lambda_2 = 0.25$	Ponto de sela	Instável
$(0.5, 0.5)$	$\lambda_1 \cong -0.15$	$\lambda_2 \cong -0.86$	Ponto de Sela	Estável

Tabela 3: Valores próprios e estabilidade por cada ponto de equilíbrio para o caso 2.

As condições iniciais são: $P(0) = Q(0) = 1$.

Os parâmetros são: $a = b = k = 1$, $c = 0.75$, $d = 1$, $\ell = 0.5$.

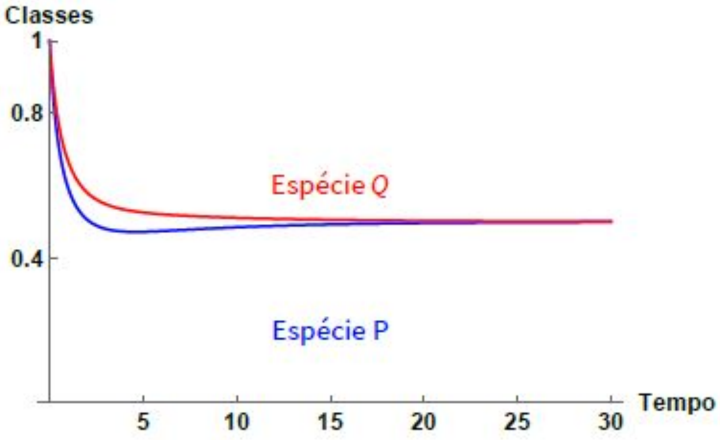


Figura 4: Solução numérica do sistema diferencial para o caso 2.

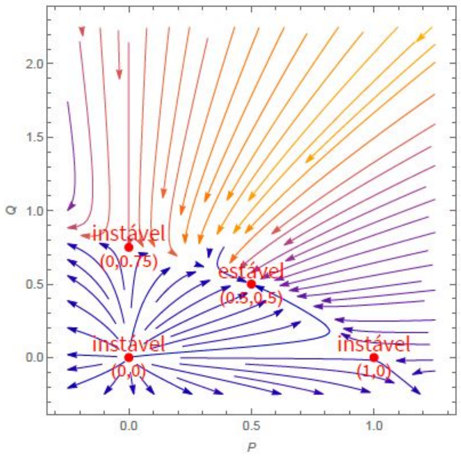


Figura 6: Campo de direções (com pontos de equilíbrio) para o caso 2.

3.5 Simulações Numéricas Caso 3

Pontos de equilíbrio	Valores próprios		Tipo	Estabilidade
$(0,0)$	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_2 = 1.5$		Instável
$(0,1.5)$	$\lambda_1 = -1.5$	$\lambda_2 = -0.5$		Estável
$(1,0)$	$\lambda_1 = -1.5$	$\lambda_2 = 0.5$	Ponto de Sela	Instável

Tabela 4: Valores próprios e estabilidade por cada ponto de equilíbrio para o caso 3.

Os parâmetros são: $a = b = k = 1$, $c = 1.5$, $d = 1$, $\ell = 1$.

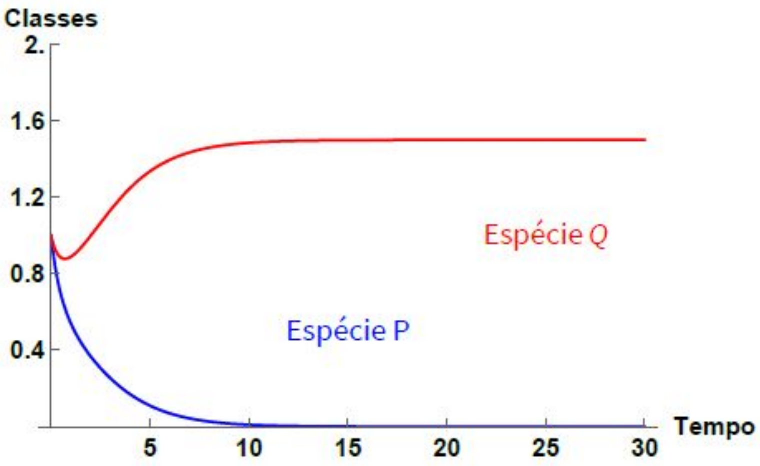


Figura 7: Solução numérica do sistema diferencial para o caso 3.

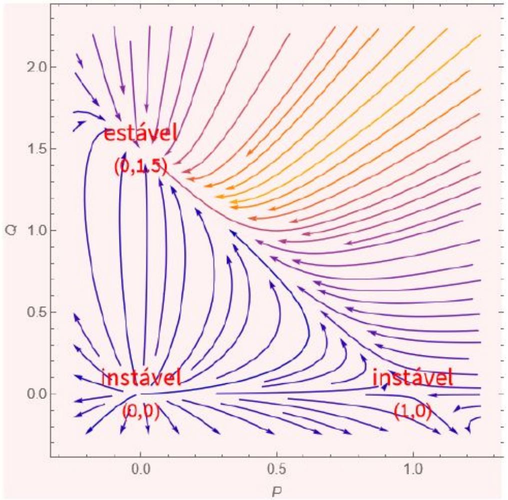


Figura 9: Campo de direções (com pontos de equilíbrio) para o caso 3.

3.5 Simulações Numéricas caso 4

Pontos de equilíbrio	Valores próprios		Tipo	Estabilidade
$(0,0)$	$\lambda_1 = 0.1$	$\lambda_2 = 0.2$		Instável
$(0,120)$	$\lambda_1 = -0.2$	$\lambda_2 = -0.02$		Estável
$(20,0)$	$\lambda_1 = -0.1$	$\lambda_2 = -0.2$		Estável
$(2.86, 85.7)$	$\lambda_1 \cong -0.02$	$\lambda_2 \cong -0.17$	Ponto de Sela	Instável

Tabela 5: Valores próprios e estabilidade por cada ponto de equilíbrio para o caso 4.

Os parâmetros são: $a = 0.1$, $b = 0.005$, $k = 0.001$, $c = 0.2$, $d = \frac{0.2}{120}$, $\ell = 0.02$.

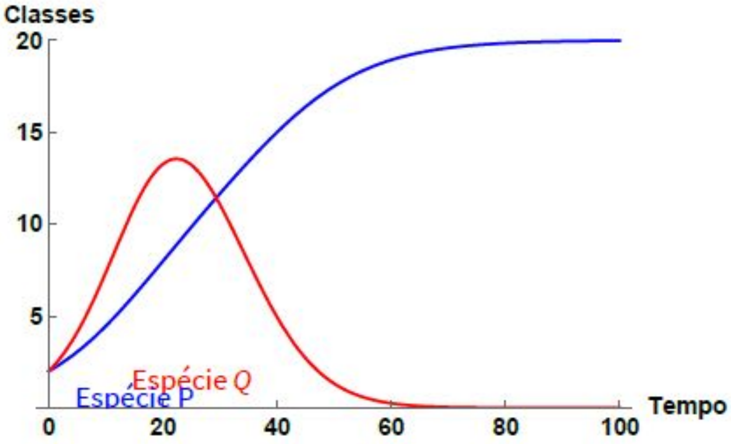


Figura 10: Solução numérica do sistema diferencial para o caso 4.

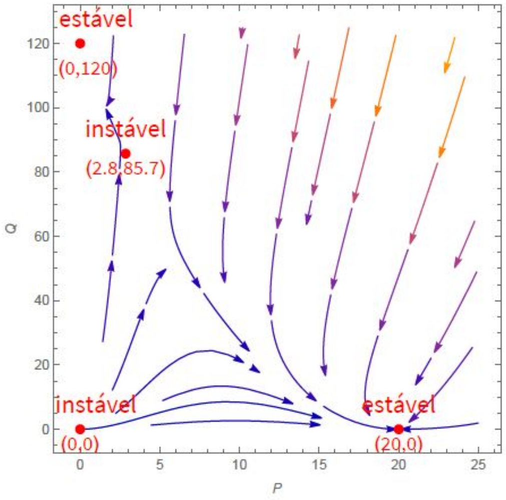


Figura 12: Campo de direções (com pontos de equilíbrio) para o caso 4.

4 Conclusão:

Com a realização do primeiro projeto, permitiu-nos compreender, a partir de uma visão analítica, a dinâmica das populações, ou seja, determinar a variação e as suas anomalias do mesmo por meio da interação entre as espécies. Com isso, possibilita-nos fazer uma previsão do comportamento das populações, por conseguinte, a prevenção das espécies.

Obrigado!

Opção Uminho, Matemática das coisas