A Álgebra Matricial e as Transformações Lineares

- Sejam V e W espaços lineares sobre um corpo Ω, em que $\dim V = n$ e $\dim W = m$; admita-se que $S_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma *base ordenada* para V e $S_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ é uma *base ordenada* para W.

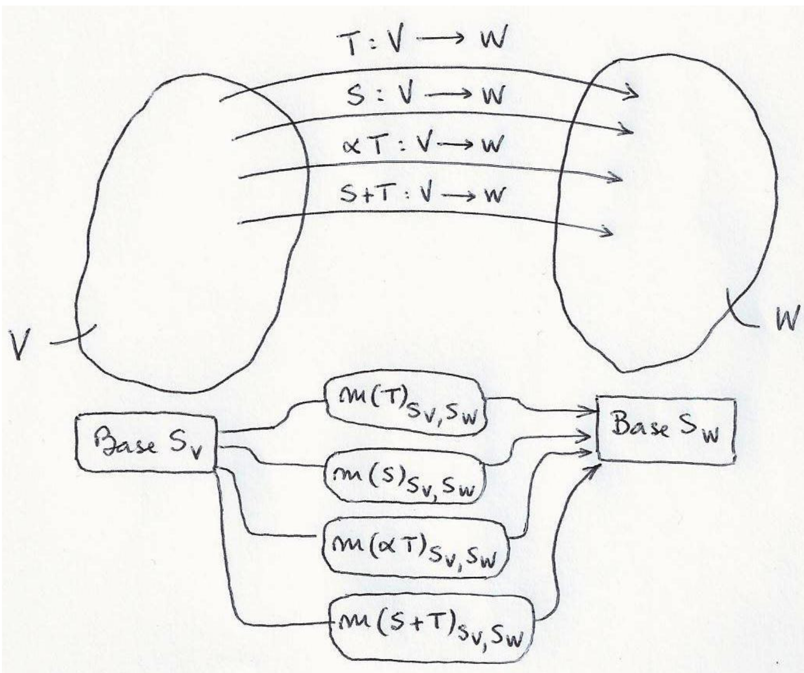
Teorema [3.22]: Considere as transformações lineares $T : V \to W$ e $S : V \to W$. Sendo $\boldsymbol{T}_{S_V,S_W} = m(T)_{S_V,S_W} \in M_{(m,n)}(\Omega)$ e $\boldsymbol{S}_{S_V,S_W} = m(S)_{S_V,S_W} \in M_{(m,n)}(\Omega)$, respectivamente, as *representações matriciais* de *T* e *S em relação às bases ordenadas* S_V e S_W, então:

i) Para a transformação linear $S + T : V \to W$ verifica-se

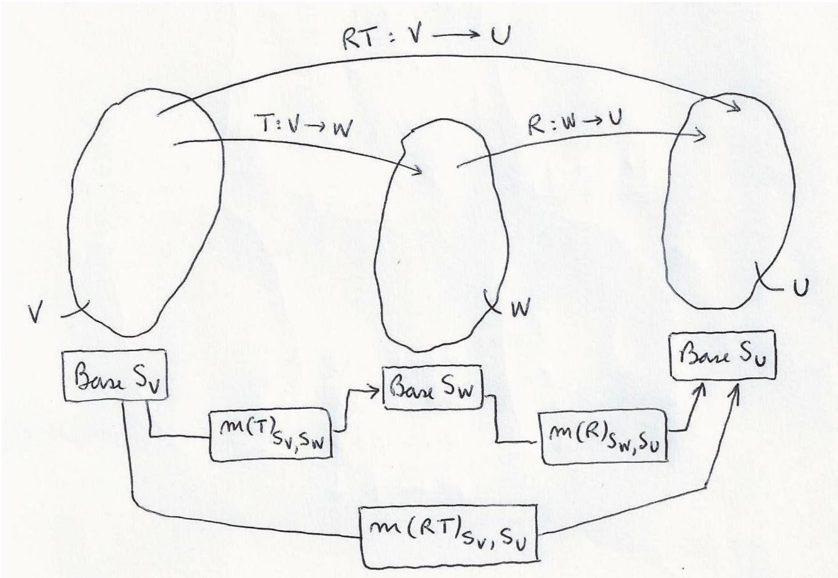
$$m(S+T)_{S_V,S_W} = m(S)_{S_V,S_W} + m(T)_{S_V,S_W} \in M_{(m,n)}(\Omega)$$

ii) Para a transformação linear $\alpha T : V \to W$, com $\alpha \in \Omega$, verifica-se

$$m(\alpha T)_{S_V,S_W} = \alpha m(T)_{S_V,S_W} \in M_{(m,n)}(\Omega)$$



- Seja U um espaço linear sobre um corpo Ω, em que $\dim \mathrm{U} = p$, e admita-se que $\mathrm{S_U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ é uma *base ordenada* para U.



Teorema [3.23]: Sejam as transformações lineares $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ e $R : \mathrm{W} \to \mathrm{U}$. Sendo $\boldsymbol{T}_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}} = m(T)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}} \in \mathrm{M}_{(m,n)}(\Omega)$ a *representação matricial* de T *em relação às bases ordenadas* $\mathrm{S_V}$ e $\mathrm{S_W}$ e $\boldsymbol{R}_{\mathrm{S_W},\mathrm{S_U}} = m(R)_{\mathrm{S_W},\mathrm{S_U}} \in \mathrm{M}_{(p,m)}(\Omega)$ a *representação matricial* de R *em relação às bases ordenadas* $\mathrm{S_W}$ e $\mathrm{S_U}$, então a *matriz que representa* a transformação linear $RT : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ *em relação às bases ordenadas* $\mathrm{S_V}$ e $\mathrm{S_U}$ é dada por

$$m(RT)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_U}} = m(R)_{\mathrm{S_W},\mathrm{S_U}}\, m(T)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}} \in \mathrm{M}_{(p,n)}(\Omega)$$

- Convém notar o seguinte:

  i) A matriz de $RT : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ só poderá ser obtida a partir do produto matricial $m(RT) = m(R)\, m(T)$ se a *base ordenada para o conjunto de chegada* (W) associada a $m(T)$ *for igual à base ordenada para o domínio* (W) associada a $m(R)$;

  ii) A *base ordenada para o domínio* (V) associada a $m(RT)$ *é igual à base ordenada para o domínio* (V) associada a $m(T)$;

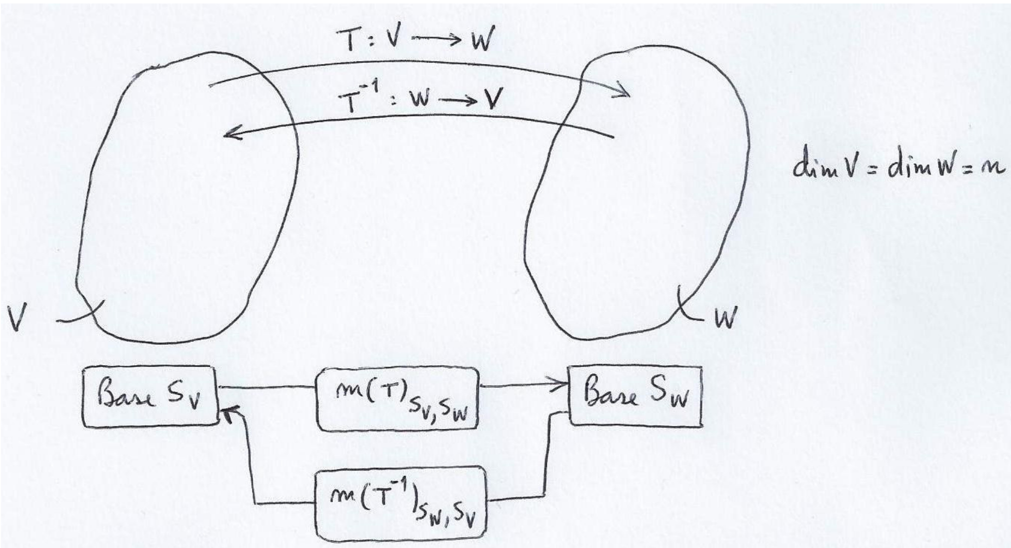
  iii) A *base ordenada para o conjunto de chegada* (U) associada a $m(RT)$ *é igual à base ordenada para o conjunto de chegada* (U) associada a $m(R)$.

Teorema [3.24]: Considere a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, em que $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{W} = n$, que possui a matriz

$$m(T)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}} \in \mathrm{M}_{(n)}(\Omega)$$

como *representação matricial em relação às bases ordenadas* $\mathrm{S_V}$ e $\mathrm{S_W}$ para os espaços lineares V e W, respectivamente. Então T é *invertível*, se e só se a *matriz* $m(T)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}}$ é *não singular*. Além disso, tem-se

$$m(T^{-1})_{\mathrm{S_W},\mathrm{S_V}} = \left(m(T)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}}\right)^{-1} \in \mathrm{M}_{(n)}(\Omega)$$



Teorema [3.25]: Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, em que $\dim \mathrm{V} = n$ e $\dim \mathrm{W} = m$, e admita-se que

$$m(T)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}} \in \mathrm{M}_{(m,n)}(\Omega)$$

é a sua *representação matricial em relação às bases ordenadas* $\mathrm{S_V}$ e $\mathrm{S_W}$ para os espaços lineares V e W, respectivamente. Então, verifica-se

$$r\left[\, m(T)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}} \right] = \dim T(\mathrm{V})$$

isto é, a *característica* da matriz $m(T)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}}$ *é igual* à *dimensão do contradomínio* (*ordem*) de T.