Prova sem consulta. Duração: 3h (20m de tolerância). Prova de Reavaliação Global

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas.**

## GRUPO I

**1.** [**3,3**] Sejam as aplicações lineares $S \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e $R \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

$$S(x,y,z) = (x - y + z, x + z), \qquad T(x,y,z) = (x + y + z, x + z, -x + y - z)$$

$$R(x,y) = (x - 2y, -x - y, 4x - 2y)$$

definidas em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_3 \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathrm{E}_2 \subset \mathbb{R}^2$.

**a)** Calcule o núcleo e o contradomínio de *T*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

**b)** Mostre que apenas uma das funções é injetiva e obtenha a sua função inversa.

**2.** [**1,7**] Considere as transformações lineares definidas na pergunta **1.** e a base $\mathrm{U} = \{(1,0,1), (0,-1,-1), (0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$. Obtenha a matriz $m(RS - T^2)_{\mathrm{E}_3,\mathrm{U}}$, representação matricial de $RS - T^2$ em relação às bases $\mathrm{E}_3$ e U.

**3.** [**3,6**] Sejam o plano $M : 2x + y + z = 2$, o ponto $R = (1,2,1)$, e a reta, *r*, com a equação vetorial $X(t) = P + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, em que $P = (-1,0,1)$ e $\vec{a} = (1,-2,3)$. Determine:

**a)** A equação vetorial da reta, *h*, contida no plano *M*, concorrente com a reta *r* e que passa num ponto, *S*, que é a projeção ortogonal de *R* sobre o plano *M*.

**b)** A equação vetorial de uma reta, *s*, que passa em *R*, é concorrente com a reta *r* e faz um ângulo de $60°$ com o plano *M*.

.................................................................... ***(continua no verso)***

## GRUPO II

**4.** [**4,5**] Considere o conjunto $\text{S}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}\subset\mathbb{R}^4$, em que $\vec{a}=(1,1,5,1)$, $\vec{b}=(2,-1,1,2)$ e $\vec{c}=(3,0,6,-3)$, o subespaço de $\mathbb{R}^4$, $\text{H}=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\ :\ x+y-z-w=0\right\}$, e o vetor $\vec{d}=(\alpha,\alpha,\alpha-1,\alpha)\in\mathbb{R}^4$.

**a)** Calcule o subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\text{S})$; indique uma base para o subespaço obtido que inclua apenas elementos de S. Justifique.

**b)** Tendo em conta o resultado obtido na alínea anterior, determine o valor de $\alpha\in\mathbb{R}$ de modo que o conjunto $\text{U}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}$ seja linearmente dependente.

**c)** Recorrendo ao maior número possível de elementos de H, obtenha uma base ortogonal, V, para o espaço $\mathbb{R}^4$.

**5.** [**1,8**] Calcule, usando o método da condensação e indicando todas as operações efetuadas, o determinante da matriz real:

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & k \\ w & k & w+1 & -w+k^2 \\ k-1 & w & -k-1 & kw+k+1 \\ 2k-1 & k & -1-2k & (k+1)^2 \end{bmatrix}$$

**6.** [**3,1**] Seja a transformação linear $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definida, em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$, por:

$$S(1,0,0)=(1,3,4)\ ,\ S(0,1,0)=(2,6,8)\ ,\ S(0,0,1)=(1,3,4)$$

Considere a base $\text{B}=\left\{(1,0,0),(1,0,-1),(1,1,-1)\right\}\subset\mathbb{R}^3$.

**a)** Calcule os valores próprios e os espaços próprios que lhes estão associados.

**b)** Determine uma base de vetores próprios, U, para o espaço $\mathbb{R}^3$ e obtenha as matrizes $\boldsymbol{S}_{U,E}$ e $\boldsymbol{S}_{B,B}$.

**7.** [**2,0**] Sejam os conjuntos $\text{S}=\left\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\ldots,\vec{x}_s\right\}\subset\mathbb{R}^n$ e $\text{K}=\left\{\vec{y}_1,\vec{y}_2,\vec{y}_3,\ldots,\vec{y}_k\right\}\subset\mathbb{R}^n$. Mostre que $L(\text{S})=L(\text{K})$, se e só se $\vec{x}_i\in L(\text{K})$ , $i=1,2,\ldots,s$ e $\vec{y}_j\in L(\text{S})$ , $j=1,2,\ldots,k$.