Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância) 1ª Prova de Reavaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não é permitido o uso de telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**8,0**] Seja $\mathrm{U}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$, em que $\vec{a}=(1,1,0,-1)$, $\vec{b}=(2,3,1,-1)$ e $\vec{c}=(0,1,1,1)$, um conjunto de vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, e $M=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : w+z+y=0\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$; considere o vetor $\vec{r}=(1,3,-1,2)$.

a) Determine o subespaço gerado pelo conjunto U. Indique, para este subespaço, a dimensão e uma base, V, formada unicamente por elementos de U; justifique.

b) Tendo em atenção o resultado obtido em a), classifique o conjunto U quanto à (in)dependência linear do seus elementos. Será o conjunto $\mathrm{W}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{r}\}$ linearmente independente? Justifique.

c) Obtenha uma base ortogonal, S, para $\mathbb{R}^4$ formada por elementos do conjunto U e do subespaço *M*.

d) Obtenha as coordenadas do vetor $\vec{r}=(1,3,-1,2)$ em relação à base S.

2. [**1,5**] Considere, no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o vetor $\vec{w}$ e as retas $r\ :\ X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$ e $s\ :\ X(u)=Q+u\vec{c}$, $u\in\mathbb{R}$, em que $P\neq Q$. Seja o conjunto $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{c},\vec{w}\}$.

a) Mostre que se S é linearmente dependente, então $\vec{w}\cdot\vec{a}\times\vec{c}=0$.

b) Recorrendo às propriedades dos produtos vetorial e misto, estabeleça uma condição necessária e suficiente para *P*, *Q*, $\vec{a}$ e $\vec{c}$, de modo que as retas dadas sejam não complanares (enviesadas). Justifique a resposta.

.... ***(continua no verso)***

3. [**2,5**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{u}$, $\vec{c}$ e $\vec{w}$ elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\| = \|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{w}\| = \sqrt{5}$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{u}) = 60°$, $\vec{w} = \vec{a}\times\vec{c} - 2\vec{a}$, $\vec{c}\cdot\vec{a} = 1$ e $\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{u} = -2$. Calcule:

a) A norma dos vetores $\vec{a}\times\vec{c}$ e $\vec{c}$.

b) O ângulo formado pelos vetores $\vec{a}\times\vec{c}$ e $\vec{w}$.

c) A área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$.

GRUPO II

4. [**1,0**] Sejam os conjuntos $\mathrm{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{T} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s\} \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que $L(\mathrm{S}) = L(\mathrm{T})$ se e só se $\vec{x}_i \in L(\mathrm{T})$, $i = 1,\ldots,r$ e $\vec{y}_j \in L(\mathrm{S})$, $j = 1,\ldots,s$.

5. [**7,0**] Considere o ponto $Q = (1,0,3)$, o plano $M : y - z = 3$ e a reta $r : X(u) = P + u\vec{a}$, $u \in \mathbb{R}$, em que $P = (1,0,0)$ e $\vec{a} = (1,1,2)$. Determine:

a) O ponto, *R*, da reta *r* que está mais próximo do ponto *Q* e a distância de *Q* ao plano *M*.

b) A equação vetorial da reta, *s*, contida no plano *M*, ortogonal à reta *r* e que passa no ponto, *T*, do plano *M* mais próximo de *Q*.

c) A equação cartesiana de um plano, α, que passa no ponto *Q*, faz um ângulo de $45°$ com o eixo dos *yy* e é paralelo à reta *r*.