Análise Matemática para Engenharia

folha de exercícios 4 — 2021/2022

• Diferenciabilidade

1. Diga, justificando, se as seguintes funções são de classe C^1, nos pontos indicados:

(a) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $\quad P_1 = (2,1)$;

Tem-se

$$f_x(x,y) = 2xe^{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Logo, dado que f, f_x e f_y são funções exponenciais, prova-se, facilmente, a continuidade de f e das derivadas até à ordem 1 no ponto $(2,1)$:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,1)} e^{x^2+y^2} = e^5 = f(2,1)$$
$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,1)} 2xe^{x^2+y^2} = 4e^5 = f_x(2,1)$$
$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f_y(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,1)} 2ye^{x^2+y^2} = 2e^5 = f_y(2,1).$$

Logo, a função exponencial f é de classe C^1 no ponto $(2,1)$, possuindo, portanto, derivadas de primeira ordem contínuas.

(b) $f(x,y) = \text{sen}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$, $\quad P_2 = (2,1)$.

Temos $f(x,y) = h(g(x,y))$, com $h(z) = \text{sen}(z)$ contínua em $\mathbb{R}$ e a função racional $g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ contínua em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, pelo que f é contínua no ponto $(2,1)$ (não é necesário recorrer à definição). Analogamente

$$f_x = \left(\text{sen}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right)'_x = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)'_x \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)2}\right)\cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$

$$f_y = \left(\text{sen}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right)'_y = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)'_y \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)2}\right)\cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$

donde, como o produto de funções contínuas é contínua, se prova que f_x e f_y são contínuas em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Logo, f é uma função de classe C^1 no ponto $(2,1)$.

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$, $\quad P_3 = (1,2)$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{x^4+6y^8}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, $\quad P_4 = (0,0)$;

Averiguemos, em primeiro lugar, se f é contínua no ponto $(0,0)$. Para tal analisemos o que acontece quando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo de algumas curvas passando pela origem: (a) $(x,y)\to(0,0)$ ao longo da reta $x=0$: neste caso, $f(x,0) = \frac{0}{6y^8} = 0$ e, portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = 0$$

(b) $(x,y)\to(0,0)$ ao longo da reta $x=y^2$: neste caso, $f(y,y) = \frac{y^8}{7y^8} = \frac{1}{7}$ e, portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y) = \frac{1}{7}$$

Com isto provamos que não existe limite de f quando $(x,y)\to(0,0)$ e, portanto, f não é contínua no ponto $(0,0)$, pelo que f não é uma função de classe C^1 no ponto $(0,0)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

Tal como no exercício anterior, averiguemos se f é contínua no ponto $(0,0)$, supondo que $(x,y) \to (0,0)$ ao longo das retas $x = 0$ e $y = x$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{2y}{2y^2} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

Como os limites são distintos, prova-se que não existe limite de $f(x,y)$ $(x,y) \to (0,0)$, pelo que pelo f não é contínua no ponto $(0,0)$. Logo f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Diga, justificando a sua resposta, se f é diferenciável em $(0,0)$.

A função f é contínua no ponto $(0,0)$ porque, como $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2y = 0$, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2y\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Vejamos que existem as derivadas parciais no ponto (0,0), calculando os seguintes limites:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0.$$

Estamos agora em condições de analisar a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$, recorrendo à definição. Averiguemos então a existência do seguinte limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)(x-0) - f_y(0,0)(y-0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2|y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2\sqrt{y^2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Analisemos o que acontece quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo da reta $y = x$ que passa na origem:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \frac{2x^2\sqrt{y^2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x,\to 0} \frac{2x^2\sqrt{x^2}}{(x^2+x^2)\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Prova-se que, existindo limite, teria que ser igual a 1 e não 0, donde se conclui que f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

(a) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(b) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

Repare que $\forall (x,y) \in B((0,0),\epsilon)$, $f(x,y) \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$. Ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|xy|} = 0 = f(0,0).$$

Portanto, f é contínua no ponto $(0,0)$.

(c) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

(d) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

Analisemos a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$, recorrendo à definição.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\sqrt{|xy|} - f(0,0) - f_x(0,0)(x-0) - f_y(0,0)(y-0)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (1)$$

e provando que este limite não se anula.

Calculemos os limites de f quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo das retas $x=0$ e $y=x$ que passam pela origem:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{\sqrt{y^2}} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{2}\sqrt{y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Provamos assim que não existe o limite (1), pelo que f não é diferenciável em $(0,0)$.

5. Para cada uma das funções $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ apresentadas, determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f, no ponto indicado.

(a) $f(x,y) = \text{sen}(x+y) \quad (1,-1,0)$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy}, \quad (1,2,\frac{5}{2})$.

6. Seja $z = f(x,y) = e^{2x+3y}$,

(a) Determine o plano tangente a f no ponto $(0,0,1)$.

A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,0,1)$ é dada por:

$$z = f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0).$$

Calculemos então as derivadas parciais no ponto (0,0)

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2x+3y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x+3y)\, e^{2x+3y} = 2e^{2x+3y} \Rightarrow f_x(0,0) = 2,$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2x+3y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x+3y)\, e^{2x+3y} = 4e^{2x+3y} \Rightarrow f_y(0,0) = 3.$$

Substituíndo na equação do plano, temos

$$z = 1 + 2(x-0) + 3(0,0)(y-0) \Leftrightarrow -2x - 3y + z = 1.$$

Outro método de determinar a equação do plano é considerar que o gráfico da função $f(x,y)$ é uma superfície de nível $k=0$ de uma função de três variáveis $F(x,y,z)$, fazendo o seguinte:

$$z = e^{2x+3y} \Leftrightarrow \underbrace{z - e^{2x+3y}}_{F(x,y,z)} = 0.$$

Seja $F(x,y,z) = z - e^{2x+3y}$. Da equação $F(x,y,z) = 0$ sai que o vetor gradiente $\vec{\nabla} F$ é perpendicular à superfície de nível, ou seja, ao gráfico no ponto $(0,0,1)$, sendo portanto perpendicular a todos os vetores que passam pelo seu pé. Então, a equação do plano pode ser dada por:

$$\vec{\nabla} F(0,0,1) \cdot (x-0, y-0, z-1) = 0.$$

Calculando o vetor gradiente

$$\vec{\nabla}F(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(z - e^{2x+3y}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(z - e^{2x+3y}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(z - e^{2x+3y}\right)\right)$$
$$= (-2e^{2x+3y} - 3e^{2x+3y}, 1) \Rightarrow \vec{\nabla}F(0,0,1) = (-2,-3,1),$$

obtemos

$$(-2,-3,1)\cdot(x-0, y-0, z-1) = 0 \Leftrightarrow -2x - 3y + z = 1.$$

(b) Use esta aproximação para calcular $f(0.1, 0)$ e $f(0, 0.1)$.
Como f é diferenciável, o plano tangente à superfície no ponto $(0,0,1)$ é uma boa aproximação para os pontos (x,y) da bola aberta $\in B((0,0),\epsilon)$. Então:

$$f(0.1,0) \approx f(0,0) + f_x(0,0)(0.1-0) + f_y(0,0)(0-0) = 1 + 2\times 0.1 = 1.2$$
$$f(0,0.1) \approx f(0,0) + f_x(0,0)(0-0) + f_y(0,0)(0.1-0) = 1 + 3\times 0.1 = 1.3$$

(c) Calcule, usando a calculadora, o valor exacto de $f(0.1, 0)$ e $f(0, 0.1)$. $f(0.1,0) \approx 1.22$, $f(0,0.1) \approx 1.35$.

7. Sendo $z = f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$,

(a) determine o diferencial dz;

$$\Delta z = f(x+dx, y+dy) - f(x,y) = (x+dx)^2 + 3(x+dx)(y+dy) - (y+dy)^2 - x^2 - 3xy + y^2$$

(b) compare os valores de Δz e dz se x varia de 2 para 2.05 e y de 3 para 2.96. O diferencial total é dado por

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (2x+3y)dx + (3x-2y)dy.$$

Se x varia de 2 para 2.05 e y de 3 para 2.96, então

$$x = 2,\quad x + dx = 2.05,\quad dx = 0.05,\quad y = 3,\quad y + dy = 2.96 \quad \text{e} \quad dy = -0.04.$$

Portanto,

$$dz = (2\times 2 + 3\times 3)\times 0.05 + (3\times 2 - 2\times 3)\times(-0.04) = 0.65, \quad \Delta z = 0.6449.$$

8. Utilize diferenciais para calcular um valor aproximado de

(a) $\sqrt{9(1.95)^2 + (8.1)^2}$.
Seja $f(x,y) = \sqrt{9(x^2+y^2}$. Então

$$f(1.95, 8.1) = \sqrt{9(1.95)^2 + (8.1)^2} \approx f(2,8) + f_x(2,8)(1.95-2) + f_y(2,8)(8.1-8).$$

(b) $(0.98)^2 - 1.01 \ln \dfrac{1.01}{0.98}$.

9. Use diferenciais para determinar o erro máximo cometido no cálculo da área de um rectângulo de 10cm de comprimento e 5cm de largura, sabendo que o erro cometido em cada uma das medições não ultrapassa 0.1cm.

A área de um rectângulo é dada pela expressão: $A = b\times h$ onde b é o comprimento e h a largura do rectângulo. O erro máximo cometido no cálculo da área do rectângulo é:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial b}db + \frac{\partial A}{\partial h}dh = 5\times 0.1 + 10\times 0.1 = 1.5$$

10. Calcule a derivada direcional de f, $D_{\vec{v}}(a,b)$, das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = e^x \tan y + 2x^2 y$, $\quad (a,b) = (0, \pi/4)$, $\quad \vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(b) $f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$, $\quad (a,b) = (1,2)$, $\quad \vec{v}$ é um vetor que faz um ângulo de 60º com OX.

Como as funções f, $f_x = 2x - y$ e $f_y = -x - 4y$ são polinómios, está garantido a continuidade das mesmas no ponto $(1,2)$. Portanto, f é uma função de classe $\mathcal{C}^1$, pelo que é diferenciável no ponto $(1,2)$. Portanto,

$$D_{\vec{v}} f(1,2) = \vec{\nabla} f(1,2) \cdot \vec{v},$$

onde $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Como $\vec{\nabla} f(1,2) = (0,-7)$, obtemos

$$D_{\vec{v}} f(1,2) = (0,-7) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -7\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

11. Determine um vetor segundo o qual a derivada da função $f(x,y) = x^2 + y^3 + 1$ no ponto $(1,1)$ é nula.

f é diferenciável no ponto $(1,1)$, logo

$$D_{\vec{v}} f(1,1) = \vec{\nabla} f(1,1) \cdot \vec{v}.$$

Tem-se

12. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(1,0)$.

(b) Calcule a derivada de f no ponto $(1,0)$ segundo o vetor $(1,2)$.

(c) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo o vetor $(1,1)$.

a) Para $(x,y) \neq (0,0)$, tem-se

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2y)'_x(x^2+y^2) - x^2y(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2yx(x^2+y^2) - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2y)'_y(x^2+y^2) - x^2y(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

b) f é diferenciável em qualquer ponto $(x,y) \neq (0,0)$, porque, para tais pontos (x,y), temos $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ que é uma função racional. Logo, f diferenciável em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ e, portanto,

$$D_{\vec{v}} f(1,0) = \vec{\nabla} f(1,0) \cdot \vec{v} = (0,1)) \cdot (1,2) = 2.$$

c) Calculemos, por definição, a derivada direcional de f no ponto $(0,0)$ segundo o vetor $(1,1)$. Ou seja,

$$D_{\vec{v}} f(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(1,1)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{2h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{2h^3} = \frac{1}{2}$$

13. Considere $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$. Em que direcção nos devemos afastar de $P = (1,1)$ para que os valores de f aumentem o mais rapidamente possível? Esboce o gráfico de f e interprete o resultado.

O valor de f cresce mais rapidamente a partir do ponto (1,1) segundo a direção e sentido do vetor gradiente, ou seja, $\nabla f(1,1)$. Tem-se

$$f_x = -2x, \quad f_y = -2y$$

donde

$$\vec{\nabla} f(1,1) = (-2,-2)$$

pelo que e que a taxa de crescimento aumenta à medida que nos aproximamos da origem.

14. A temperatura T num dado ponto (x,y) do plano é dada por $T(x,y) = x^2 e^{-y}$. Em que direcção a partir do ponto (2,1) a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual a taxa de crescimento nessa direcção?

15. Determine a equação do plano tangente à superfície $x^2+y^2-xyz=7$ no ponto $(2,3,1)$ por dois processos diferentes:

(a) considerando a superfície como a superfície de nível de uma função de 3 variáveis $f(x,y,z)$;
A superfície dada, C, é o conjunto de nível 7 da função $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z)=x^2+y^2-xyz$. Um vetor perpendicular a C no ponto $(2,3,1)$ é, portanto, dado por

$$\vec{\nabla} f(2,3,1).$$

Como

$$\vec{\nabla} f(x,y,z)=(2x-yz,2y-xz,-xy)$$

temos que um vetor normal a C em $(2,3,1)$ é $(1,4,-6)$. Segue-se que o plano tangente é dado pela equação cartesiana

$$(1,4,-6)\cdot(x-2,y-3,z-1)=0 \Leftrightarrow x+4y-6z=8.$$

(b) considerando a superfície como o gráfico de uma função de 2 variáveis $g(x,y)$.
Seja $g(x,y)=\frac{x^2-y^2-7}{xy}$. Então, a equação cartesiana do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(2,3,1)$ é

$$z=g(2,3)+g_x(2,3)(x-2)+g_y(2,3)(z-3).$$

Temos

$$g_x=\frac{2x^2y-yx^2+y^3+7y}{x^2y^2}\quad,\quad g_y=\frac{-2xy^2-x^3+y^2x+7x}{x^2y^2}$$

donde sai

$$(\cdots)$$