Método da Condensação da Matriz

- O **método da condensação da matriz** permite transformar qualquer matriz quadrada $\boldsymbol{A}$, de ordem n, numa *matriz triangular superior*, $\boldsymbol{T}$, cujo determinante (ver Propriedade 8 dos determinantes) é

$$|\boldsymbol{T}| = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$$

- O valor de $|\boldsymbol{T}|$ pode ser relacionado com o determinante da matriz inicial $\boldsymbol{A}$, $|\boldsymbol{A}|$, desde que as **operações de Jacobi** sejam aplicadas tendo em atenção as propriedades dos determinantes. Assim:

  1. Troca de duas quaisquer filas paralelas do determinante

     $\Rightarrow$ mudança de sinal no determinante (Propriedade 5)

  2. Multiplicação de uma qualquer fila do determinante por um escalar λ não nulo

     $\Rightarrow$ o determinante resultante será igual ao produto de λ pelo determinante precedente (Propriedade 2)

  3. Adição a uma dada fila do determinante de uma outra fila paralela multiplicada por um escalar ou, de um modo mais geral, de uma combinação linear de filas paralelas

     $\Rightarrow$ o valor do determinante não se altera (Propriedade 10)

Exemplo 16 [3.20]: Pretende-se calcular o determinante

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

usando o *método da condensação da matriz*.

Solução:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 3L_2 + L_3 \end{matrix} \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = -15$$

Exemplo 17 [3.21]: Pretende-se obter o valor do determinante

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

usando o *método de condensação da matriz*.

Solução:

Processo I – utilizando apenas as operações elementares 2 e 3.

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{D}| = \frac{1}{3\times 3}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow 3L_2 \\ \\ \leftarrow 3L_4 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{D}| = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \\ \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{D}| = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_3 - 4L_2 \\ \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{D}| = \frac{1}{9\times 7}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 21 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow 7L_4 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{D}| = \frac{1}{63}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow 3L_3 + L_4 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{D}| = \frac{1}{63}\left[3\times(-1)\times(-7)\times 21\right] = 7$$

Processo II – aplicando todas as operações elementares associadas ao método da condensação da matriz.

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{D}| = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{D}| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \\ C_2 & C_1 & & \end{matrix} \end{array} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{D}| = 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \leftarrow -L_2 \\ \leftarrow L_3/7 \\ \leftarrow -L_4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{D}| = 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_3 - L_2 \\ \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{D}| = 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{D}| = 7\left[1\times 1\times(-1)\times(-1)\right] = 7$$

Desenvolvimentos de Laplace ou Laplaceanos

- Neste caso o processo de cálculo de determinantes tem por base o **teorema de Laplace**; daí a designação de *desenvolvimentos de Laplace ou laplaceanos*.

Teorema **[3.1]**: O determinante da matriz quadrada $\boldsymbol{A}$, de ordem n, é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando cada um dos elementos de uma dada fila da matriz pelos respectivos **cofactores**, isto é,

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij} = a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2} + \ldots + a_{in}\boldsymbol{A}_{in}$$

se for adoptado um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da linha de índice i da matriz, e ainda

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij} = a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j} + a_{2j}\boldsymbol{A}_{2j} + \ldots + a_{nj}\boldsymbol{A}_{nj}$$

se for considerado um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da coluna de índice j (**teorema de Laplace**).

- O **teorema de Laplace** permite transformar qualquer determinante de ordem n, por sucessivos **abaixamentos de ordem**, num somatório de determinantes de ordem 3, que podem ser resolvidos através da **regra de Sarrus**.

Definição [3.7]: **Cofactor do elemento a_{ij} da matriz *A***

Chama-se **cofactor** (ou **complemento algébrico**) do elemento a_{ij} da matriz ***A***, ao seu menor complementar afectado do respectivo sinal.

Definição [3.4;5]: **Menor complementar do elemento a_{ij} da matriz *A***

Seleccione-se, na matriz ***A***, a linha de índice *i* e a coluna de índice *j* e suprimam-se os elementos da matriz situados nessa linha e nessa coluna. Obtém-se uma submatriz quadrada de ***A***, de ordem *n*-1, cujo determinante, que se representa por

$$|\boldsymbol{A}(i;j)|$$

é designado por *menor complementar* do elemento a_{ij} da matriz ***A***.

Definição [3.6]: **Sinal do menor complementar do elemento a_{ij} da matriz *A***

Designa-se por *sinal do menor complementar* do elemento a_{ij} da matriz ***A***, o sinal de $(-1)^{\alpha}$, onde $\alpha = i + j$ é a soma dos índices da linha e da coluna que foi necessário suprimir na matriz ***A*** para que $|\boldsymbol{A}(i;j)|$ fosse obtido.

- Assim, o **cofactor** do elemento a_{ij} da matriz ***A*** tem o valor

$$\boldsymbol{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\,|\boldsymbol{A}(i;j)|$$

Exemplo 18 **[3.28]**: Determine-se o determinante

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

adoptando um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da 2ª coluna.

Solução:

$$|\boldsymbol{A}| = a_{12}\boldsymbol{A}_{12} + a_{22}\boldsymbol{A}_{22} + a_{32}\boldsymbol{A}_{32} = (1)\boldsymbol{A}_{12} + (3)\boldsymbol{A}_{22} + (1)\boldsymbol{A}_{32}$$

Os cofactores são

$$\boldsymbol{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$\boldsymbol{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Então

$$|\boldsymbol{A}| = 1 \times 0 + 3 \times (-6) + 1 \times 3 = -18 + 3 = -15$$

Exemplo 19 [3.29]: Determine-se o determinante

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

considerando um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da 1ª linha.

Solução:

$$|\boldsymbol{D}| = d_{11}\boldsymbol{D}_{11} + d_{12}\boldsymbol{D}_{12} + d_{13}\boldsymbol{D}_{13} + d_{14}\boldsymbol{D}_{14} = (3)\boldsymbol{D}_{11} + (2)\boldsymbol{D}_{12} + (4)\boldsymbol{D}_{13} + (3)\boldsymbol{D}_{14}$$

Os cofactores são

$$\boldsymbol{D}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 8 + 9 - (2 + 6 - 12) = 3 + 4 = 7$$

$$\boldsymbol{D}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -[4 + 12 + 9 - (2 + 12 + 18)] = -(25 - 32) = 7$$

$$\boldsymbol{D}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 6 + 3 - (-4 + 6 + 6) = 1 - 8 = -7$$

$$\boldsymbol{D}_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -[-8 + 9 + 1 - (-6 + 2 + 6)] = -(2 - 2) = 0$$

Então

$$|\boldsymbol{D}| = 3 \times 7 + 2 \times 7 + 4 \times (-7) + 3 \times 0 = 21 + 14 - 28 = 7$$

Teorema [3.2]: A soma dos produtos obtidos pela multiplicação dos elementos de uma dada fila da matriz ***A*** pelos cofactores dos elementos correspondentes de uma fila paralela, é sempre nula, isto é,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{A}_{ij} = a_{k1}\boldsymbol{A}_{i1} + a_{k2}\boldsymbol{A}_{i2} + \ldots + a_{kn}\boldsymbol{A}_{in} = 0 \quad \text{e} \quad i \neq k$$

no caso de se considerar as linhas de índices i e k da matriz ***A***, e ainda

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{A}_{ij} = a_{1k}\boldsymbol{A}_{1j} + a_{2k}\boldsymbol{A}_{2j} + \ldots + a_{nk}\boldsymbol{A}_{nj} = 0 \quad \text{e} \quad j \neq k$$

se forem contempladas as colunas de índices j e k (**corolário do teorema de Laplace**).

Exemplo 20: Relativamente ao determinante

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

sabendo que os cofactores dos elementos da coluna 2 são

$$\boldsymbol{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\; ; \;\; \boldsymbol{A}_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \;\; ; \;\; \boldsymbol{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

verifica-se, relativamente às colunas 1 e 3,

$$a_{11}\boldsymbol{A}_{12} + a_{21}\boldsymbol{A}_{22} + a_{31}\boldsymbol{A}_{32} = 1\times 0 + 2\times(-6) + 4\times 3 = 0$$

$$a_{13}\boldsymbol{A}_{12} + a_{23}\boldsymbol{A}_{22} + a_{33}\boldsymbol{A}_{32} = 2\times 0 + 1\times(-6) + 2\times 3 = 0$$

Exemplo 21 [3.30]: Relativamente ao determinante

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

sabendo que os cofactores dos elementos da linha 1 são

$$\boldsymbol{D}_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad ; \quad \boldsymbol{D}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$\boldsymbol{D}_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \quad ; \quad \boldsymbol{D}_{14} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

verifica-se, relativamente às linhas 2, 3 e 4,

$$d_{21}\boldsymbol{D}_{11} + d_{22}\boldsymbol{D}_{12} + d_{23}\boldsymbol{D}_{13} + d_{24}\boldsymbol{D}_{14} = 2\times 7 + 1\times 7 + 3\times(-7) + 2\times 0 = 0$$

$$d_{31}\boldsymbol{D}_{11} + d_{32}\boldsymbol{D}_{12} + d_{33}\boldsymbol{D}_{13} + d_{34}\boldsymbol{D}_{14} = 3\times 7 + (-2)\times 7 + 1\times(-7) + 3\times 0 = 0$$

$$d_{41}\boldsymbol{D}_{11} + d_{42}\boldsymbol{D}_{12} + d_{43}\boldsymbol{D}_{13} + d_{44}\boldsymbol{D}_{14} = 1\times 7 + 1\times 7 + 2\times(-7) + 2\times 0 = 0$$

Cálculo do Determinante – Método Misto

- É um processo alternativo onde se procura optimizar a aplicação dos dois métodos atrás apresentados no cálculo de determinantes, combinando-os de um modo adequado.

- O **método da condensação da matriz** pode, em algumas situações, apresentar algumas dificuldades no cálculo de determinantes, particularmente quando o número de operações algébricas envolvidas for muito elevado.

- O **teorema de Laplace** é pouco eficiente se a ordem do determinante for elevada. Se considerarmos um determinante de ordem 5:

  i) A aplicação do teorema de Laplace permite, no caso mais geral, transformar o determinante dado numa soma de 5 determinantes de ordem 4;

  ii) Recorrendo ainda ao teorema de Laplace é possível desdobrar cada um dos determinantes de ordem 4 numa soma de 4 determinantes de ordem 3;

  iii) Os 20 determinantes de ordem 3 encontrados são resolvidos através da **regra de Sarrus**.

- No caso de um determinante de ordem 6 o número de determinantes de ordem 3 a resolver poderia ascender a 120.

- O **método misto** é um processo de cálculo de um determinante que assenta nas seguintes operações:

  1) Selecciona-se uma dada fila (linha/coluna) no determinante;

  2) Aplica-se o **método da condensação da matriz** à fila escolhida, anulando-se todos os elementos situados nessa fila à excepção, como é óbvio, de um deles;

  3) Adopta-se um desenvolvimento laplaceano ao longo dessa fila (**teorema de Laplace**), resultando um único determinante de ordem imediatamente inferior à do determinante anterior.

- O **método misto** permite obter, após sucessivos **abaixamentos de ordem**, um único determinante de ordem 3, cuja solução pode ser determinada através da **regra de Sarrus**.

Exemplo 22 [3.32]: Usando o *método misto* calcule-se o determinante

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solução:

Apliquemos o *processo de redução* à 1ª coluna do determinante:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix}$$

Adoptemos um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da 1ª coluna:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 9 = -15$$

Exemplo 23 [3.33]: Utilizando o *método misto* calcule-se o determinante

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Solução:

Apliquemos o *processo de redução* à 2ª coluna do determinante:

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 7 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

Adoptemos um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da 2ª coluna:

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 7 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 7 & 7 & 7 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 7 & 7 & 7 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{D}| = 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -L_1 \\ \leftarrow L_2 / 7 \\ \leftarrow -L_3 \end{array}$$

Apliquemos o *processo de redução* à 3ª coluna do determinante:

$$|\boldsymbol{D}| = 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{D}| = 7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Adoptemos um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da 3ª coluna:

$$|\boldsymbol{D}| = 7\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \times 1 \times (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \times (-1) = 7$$

Exemplo 24 **[3.34]**: Usando o *método misto* obtenha-se o valor do determinante

$$|\boldsymbol{F}| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & -8 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 6 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

Solução:

Apliquemos o *processo de redução* à 1ª coluna do determinante:

$$|\boldsymbol{F}| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & -8 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 6 & -5 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{F}| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & -39 & 27 & -19 & -31 \\ 0 & 8 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -15 & 16 & -11 & -10 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - 7L_1 \\ \leftarrow L_3 + L_1 \\ \\ \leftarrow L_5 - 2L_1 \end{array}$$

Adoptemos um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da 1ª coluna:

$$|\boldsymbol{F}| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & -39 & 27 & -19 & -31 \\ 0 & 8 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -15 & 16 & -11 & -10 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -39 & 27 & -19 & -31 \\ 8 & -2 & 2 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \\ -15 & 16 & -11 & -10 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{F}| = \begin{vmatrix} -39 & 27 & -19 & -31 \\ 8 & -2 & 2 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \\ -15 & 16 & -11 & -10 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{F}| = 2 \begin{vmatrix} 39 & -27 & 19 & 31 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \\ 15 & -16 & 11 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -L_1 \\ \leftarrow L_2/2 \\ \\ \leftarrow -L_4 \end{matrix}$$

Apliquemos o *processo de redução* à 3ª coluna do determinante:

$$|\boldsymbol{F}| = 2 \begin{vmatrix} 39 & -27 & 19 & 31 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \\ 15 & -16 & 11 & 10 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{F}| = 2 \begin{vmatrix} -37 & -8 & 0 & -45 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -29 & -5 & 0 & -34 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 - 19L_2 \\ \\ \leftarrow L_3 - L_2 \\ \leftarrow L_4 - 11L_2 \end{matrix}$$

Adoptemos um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da 3ª coluna:

$$|\boldsymbol{F}| = 2\begin{vmatrix} -37 & -8 & 0 & -45 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -29 & -5 & 0 & -34 \end{vmatrix} = 2\times1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -37 & -8 & -45 \\ 1 & 3 & 4 \\ -29 & -5 & -34 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{F}| = -2\begin{vmatrix} -37 & -8 & -45 \\ 1 & 3 & 4 \\ -29 & -5 & -34 \end{vmatrix}$$

Apliquemos o *processo de redução* à 2ª linha do determinante:

$$|\boldsymbol{F}| = -2\begin{vmatrix} -37 & -8 & -45 \\ 1 & 3 & 4 \\ -29 & -5 & -34 \end{vmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{F}| = -2\begin{vmatrix} -37 & 103 & 103 \\ 1 & 0 & 0 \\ -29 & 82 & 82 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \\ C_2 - 3C_1 & \\ & \uparrow \\ & C_3 - 4C_1 \end{array}$$