DETERMINANTES

Introdução

- A qualquer matriz quadrada é possível associar um escalar, que é designado por *determinante* da matriz.

- A noção de determinante pode ser utilizada na obtenção da *matriz inversa* de uma matriz quadrada não singular.

- A noção de determinante pode ainda ser aplicada na resolução de *sistemas de equações lineares*.

- Também pode ser usada na análise e determinação da *característica* de uma matriz genérica do tipo $m \times n$.

- Comecemos por apresentar a sua definição e um conjunto de propriedades que serão fundamentais para justificar as técnicas utilizadas no seu cálculo.

Definição

Seja a matriz quadrada ***A*** do tipo $n \times n$.

Definição [3.3]: **Determinante da matriz *A***
Designa-se por *determinante da matriz* ***A***, representando-se por $|\boldsymbol{A}|$ ou $det\boldsymbol{A}$, o escalar cujo valor é dado pela soma dos *termos* distintos existentes na matriz, afectados dos respectivos sinais.

- Vejamos agora o que se entende por ***termo*** da matriz e por ***sinal de um termo***.

- Para melhor compreendermos estes conceitos vamos particularizá-los para os casos de $n = 2$ e $n = 3$ (determinantes de 2ª e 3ª ordens).

Definição [3.1]: **Termo da matriz *A***
Designa-se por *termo da matriz* ***A*** qualquer produto de *n* elementos da matriz, com um e um só elemento em cada linha e, da mesma forma, com um e um só elemento em cada coluna.

- Relativamente à matriz ***A*** do tipo $n \times n$ tem-se:

  i) O número total de termos distintos é igual a $n!$;

  ii) *Termo principal*: $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ (produto dos elementos principais);

  iii) *Termo secundário*: $a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\ldots a_{n1}$ (produto dos elementos da diagonal secundária);

  iv) É irrelevante a ordem pela qual os elementos se dispõem no termo;

  v) Dois termos só serão considerados distintos se não possuirem, na sua totalidade, elementos da matriz coincidentes.

Definição [3.2]: Sinal de um termo da matriz *A*

Designa-se por *sinal de um termo* da matriz ***A***, o sinal de $(-1)^{\alpha}$, onde $\alpha = \alpha_l + \alpha_c$ e em que:

i) α_l é número de **inversões** dos índices das **linhas** no termo;

ii) α_c é número de **inversões** dos índices das **colunas** no termo.

- O sinal de um termo depende da forma como estão ordenados os índices das linhas e das colunas nesse termo; o **termo é positivo** se sinal é positivo, sendo um **termo negativo** se o sinal é negativo.

- O *número de inversões* dos índices das linhas (colunas) no termo é obtido comparando a ordenação dos índices das linhas (colunas) com a chamada **permutação principal**

$$(1,2,3,\ldots,n)$$

  onde a ordenação dos índices é feita pela ordem crescente;

- Quando se compara um índice de linha (coluna) de um dado elemento de um termo com um outro índice de linha (coluna) de um elemento subsequente, pode concluir-se:

  i) Se os dois índices se dispõem pela mesma ordem com que surgem na *permutação principal*, constituem uma ***permanência***;

  ii) Se os dois índices se dispõem por ordem inversa com que surgem na *permutação principal*, constituem uma ***inversão***.

- O sinal de um termo é invariante relativamente à ordem pela qual os seus elementos aparecem no termo.

- Em particular tem-se $|a| = a$, já que o escalar '*a*' pode ser considerado como o único elemento de uma matriz quadrada de ordem 1.

Exemplo 1 [3.1;2;5]: A matriz de ordem 2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

tem $2! = 2$ termos distintos:

$$a_{11}a_{22} \text{ ou } a_{22}a_{11} \text{ (termo principal)}$$

$$a_{12}a_{21} \text{ ou } a_{21}a_{12} \text{ (termo secundário)}$$

Termo	α_l	α_c	α	Sinal
$a_{11}a_{22}$	0	0	0	$+1$
$a_{12}a_{21}$	0	1	1	-1

Em alternativa, pode obter-se

Termo	α_l	α_c	α	Sinal
$a_{22}a_{11}$	1	1	2	$+1$
$a_{21}a_{12}$	1	0	1	-1

Então

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Regra dos produtos cruzados:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{vmatrix}}_{\text{Termo }(+)} - \underbrace{\begin{vmatrix} & a_{12} \\ a_{21} & \end{vmatrix}}_{\text{Termo }(-)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo 2 [**3.2;4;7**]: A matriz de ordem 3

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

possui $3! = 6$ termos distintos:

$$a_{11}a_{22}a_{33} \text{ (termo principal)} \quad ; \quad a_{21}a_{33}a_{12} \quad ; \quad a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \quad ; \quad a_{21}a_{13}a_{32} \quad ; \quad a_{31}a_{13}a_{22} \text{ (termo secundário)}$$

O termo $a_{21}a_{33}a_{12}$ é equivalente a qualquer uma das formas seguintes:

$$a_{21}a_{12}a_{33} \quad , \quad a_{12}a_{21}a_{33} \quad , \quad a_{12}a_{33}a_{21} \quad , \quad a_{33}a_{12}a_{21} \quad , \quad a_{33}a_{21}a_{12}$$

Termo	α_l	α_c	α	Sinal
$a_{11}a_{22}a_{33}$	0	0	0	$+1$
$a_{21}a_{33}a_{12}$	2	1	3	-1
$a_{31}a_{12}a_{23}$	2	0	2	$+1$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	0	1	1	-1
$a_{21}a_{13}a_{32}$	1	1	2	$+1$
$a_{31}a_{13}a_{22}$	2	1	3	-1

Em relação ao termo $a_{21}a_{33}a_{12}$, cujo sinal é $(-1)^3 = -1$, verifica-se

Termos Equivalentes	α_l	α_c	α	Sinal
$a_{21}a_{12}a_{33}$	1	0	1	-1
$a_{12}a_{21}a_{33}$	0	1	1	-1
$a_{12}a_{33}a_{21}$	1	2	3	-1
$a_{33}a_{12}a_{21}$	2	3	5	-1
$a_{33}a_{21}a_{12}$	3	2	5	-1

Então

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23}) -$$

$$-(a_{31}a_{13}a_{22} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}\ a_{33}\ a_{12})$$

Regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Termos $(+)$

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$\begin{array}{ccc} & a_{12} & a_{13} \\ & & a_{23} \end{array}$$

Termos $(-)$

$$\left|\begin{array}{ccc} & & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| = -(a_{31}a_{13}a_{22} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}\ a_{33}\ a_{12})$$
$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & & \end{array}$$

Exemplo 3 **[3.6]**: Recorrendo à **regra dos produtos cruzados**, o determinante da matriz quadrada de ordem 2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

é

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 2 \times 4 = 15 - 8 = 7$$

Exemplo 4 **[3.8]**: Considerando a **regra de Sarrus**, o determinante da matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

é

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times 2 + 2 \times 1 \times 2 + 4 \times 1 \times 1 -$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$-(2 \times 3 \times 4 + 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 2) = 14 - 29 = -15$$

- O recurso à definição não é viável para calcular um determinante de ordem elevada; se $n = 4$ o número de termos a considerar é $4! = 24$ e para $n = 5$ esse número eleva-se a $5! = 120$.

- Não são conhecidas quaisquer regras práticas para determinar, de um modo simples e eficaz, o valor de um determinante de ordem $n > 3$.

- São analisados três *processos de cálculo* para obter o determinante de uma matriz quadrada:

  1. **Método da condensação da matriz** – é um método semelhante ao que é utilizado na determinação da característica de uma matriz.

  2. **Desenvolvimentos Laplaceanos**

     i) *Formulação geral*: transforma um determinante de ordem n numa soma de determinantes de ordem $p < n$;

     ii) *Formulação particular*: transforma um determinante de ordem n numa soma de n determinantes de ordem $n - 1$.

  3. **Método misto** – trata-se da aplicação combinada dos dois métodos anteriores, o que permite transformar, em cada fase do processo de cálculo, um determinante de uma dada ordem p num único determinante de ordem $p - 1$.

Propriedades

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω.

Propriedade 1: Se a matriz $\boldsymbol{A}$ possuir uma fila (linha/coluna) nula, então

$$|\boldsymbol{A}| = 0$$

Exemplo 5 [3.9]: Relativamente à matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times 0 + 7 \times 4 \times 0 + 9 \times 2 \times 0 -$$

$$-(0 \times 3 \times 9 + 0 \times 4 \times 1 + 0 \times 2 \times 7) = 0$$

Propriedade 2: Multiplicando os elementos de uma fila da matriz ***A*** por um escalar $\lambda \in \Omega$, obtém-se uma nova matriz ***B***, tal que

$$|\boldsymbol{B}| = \lambda |\boldsymbol{A}|$$

Exemplo 6 [3.10]: Seja

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 3\times 2 + 2\times 1\times 2 + 4\times 1\times 1 -$$

$$-(2\times 3\times 4 + 1\times 1\times 1 + 2\times 1\times 2) = 14 - 29 = -15$$

Multiplicando a linha 1 da matriz ***A*** pelo escalar $\lambda = 3$, obtém-se

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 3\times 2 + 2\times 1\times 6 + 4\times 3\times 1 - (6\times 3\times 4 + 1\times 1\times 3 + 2\times 3\times 2)$$

$$|\boldsymbol{B}| = 3\left[1\times 3\times 2 + 2\times 1\times 2 + 4\times 1\times 1 - (2\times 3\times 4 + 1\times 1\times 1 + 2\times 1\times 2)\right]$$

$$|\boldsymbol{B}| = 3|\boldsymbol{A}| = -45$$

Propriedade 3 – Multiplicando os elementos de m filas paralelas de $\boldsymbol{A}$, respectivamente, pelos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \Omega$, obtém-se uma nova matriz $\boldsymbol{B}$, tal que

$$|\boldsymbol{B}| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m |\boldsymbol{A}|$$

Exemplo 7 [3.11]:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times 2 + 2 \times 1 \times 2 + 4 \times 1 \times 1 -$$

$$-(2 \times 3 \times 4 + 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 2) = 14 - 29 = -15$$

Multiplicando as colunas 1, 2 e 3 da matriz $\boldsymbol{A}$, respectivamente, pelos escalares $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$, obtém-se

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \\ 12 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \times 3 \times 4 - 6 \times 1 \times 4 - 12 \times 1 \times 2 -$$

$$-(- 4 \times 3 \times 12 - 2 \times 1 \times 3 - 4 \times 1 \times 6)$$

$$|\boldsymbol{B}| = 3 \times (- 1) \times 2 \left[1 \times 3 \times 2 + 2 \times 1 \times 2 + 4 \times 1 \times 1 - (2 \times 3 \times 4 + 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 2) \right]$$

$$|\boldsymbol{B}| = -6 |\boldsymbol{A}| = 90$$

Propriedade 4: O determinante da matriz $\boldsymbol{A}$ é igual ao determinante da sua matriz transposta, isto é,

$$|\boldsymbol{A}| = \left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|$$

Exemplo 8 [3.12]:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times3\times2 + 2\times1\times2 + 4\times1\times1 -$$

$$-(2\times3\times4 + 1\times1\times1 + 2\times1\times2) = 14 - 29 = -15$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times3\times2 + 1\times1\times4 + 2\times2\times1 -$$

$$-(4\times3\times2 + 1\times1\times1 + 2\times2\times1)$$

$$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right| = 1\times3\times2 + 2\times1\times2 + 4\times1\times1 - (2\times3\times4 + 1\times1\times1 + 2\times1\times2)$$

$$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right| = |\boldsymbol{A}| = -15$$

Propriedade 5: Trocando, na matriz $\boldsymbol{A}$, duas filas paralelas, obtém-se uma nova matriz $\boldsymbol{B}$, tal que

$$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|$$

Exemplo 9 [3.13]:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 3\times 2 + 2\times 1\times 2 + 4\times 1\times 1 -$$

$$-(2\times 3\times 4 + 1\times 1\times 1 + 2\times 1\times 2) = 14 - 29 = -15$$

Troquemos, na matriz $\boldsymbol{A}$, a 1ª coluna com a 3ª coluna. Obtém-se

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\times 3\times 4 + 1\times 1\times 1 + 2\times 1\times 2 -$$

$$-(1\times 3\times 2 + 2\times 1\times 2 + 4\times 1\times 1)$$

$$|\boldsymbol{B}| = -\left[1\times 3\times 2 + 2\times 1\times 2 + 4\times 1\times 1 - (2\times 3\times 4 + 1\times 1\times 1 + 2\times 1\times 2)\right]$$

$$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}| = 15$$

Propriedade 6: Se a matriz $\boldsymbol{A}$ tem filas paralelas iguais, então

$$|\boldsymbol{A}| = 0$$

Exemplo 10 [3.14]: Seja a matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

que possui 2 linhas iguais (1ª e 3ª linhas). Então

$$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 3 + 4 \times 1 \times 3 + 2 \times 1 \times 5 -$$

$$-(3 \times 3 \times 2 + 5 \times 1 \times 2 + 3 \times 1 \times 4) = 40 - 40 = 0$$

Propriedade 7: Se a matriz ***A*** tem duas filas paralelas proporcionais, então

$$|\boldsymbol{A}| = 0$$

Exemplo 11 [3.15]: Seja a matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

em que as 1ª e 3ª linhas são proporcionais (a 3ª linha é o produto da 1ª por 2). Então

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\times2\times6 + 5\times2\times3 + 4\times1\times3 -$$

$$-(3\times2\times4 + 3\times2\times2 + 6\times1\times5) = 66 - 66 = 0$$

As Propriedades 2 e 6 permitem ainda escrever

$$|\boldsymbol{D}| = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times0 = 0$$

Propriedade 8: Se ***A*** é uma matriz triangular (superior ou inferior), então o seu determinante é igual ao produto dos elementos principais da matriz (termo principal), isto é,

$$|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemplo 12 [3.16]:

$$|\boldsymbol{T}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\times3\times6 + 0\times0\times3 + 0\times1\times4 -$$

$$-(3\times3\times0 + 4\times0\times2 + 6\times1\times0)$$

$$|\boldsymbol{T}| = 2\times3\times6 = 36$$

$$|\boldsymbol{R}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1\times4\times6 + 5\times3\times0 + 2\times0\times0 -$$

$$-(0\times4\times2 + 0\times3\times1 + 6\times0\times5)$$

$$|\boldsymbol{R}| = 1\times4\times6 = 24$$

- Uma matriz triangular (superior ou inferior) em que, pelo menos, um dos seus elementos principais é nulo, tem determinante nulo.

Propriedade 9: Substituindo, na matriz $\boldsymbol{A}$, os elementos da coluna de índice $g \leq n$ por somas de m parcelas, ou seja, considerando na matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1g} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2g} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ng} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

a coluna de índice g como o resultado da soma das m parcelas

$$\begin{bmatrix} a_{1g} \\ a_{2g} \\ \vdots \\ a_{ng} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1g}^{(1)} \\ a_{2g}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{ng}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1g}^{(2)} \\ a_{2g}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{ng}^{(2)} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1g}^{(m)} \\ a_{2g}^{(m)} \\ \vdots \\ a_{ng}^{(m)} \end{bmatrix}$$

é possível reescrever a matriz $\boldsymbol{A}$ sob a forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1g}^{(1)} + a_{1g}^{(2)} + \cdots + a_{1g}^{(m)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2g}^{(1)} + a_{2g}^{(2)} + \cdots + a_{2g}^{(m)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ng}^{(1)} + a_{ng}^{(2)} + \cdots + a_{ng}^{(m)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então o determinante da matriz $\boldsymbol{A}$ pode ser apresentado como a soma dos m determinantes seguintes:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1g}^{(1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2g}^{(1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ng}^{(1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1g}^{(2)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2g}^{(2)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ng}^{(2)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1g}^{(m)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2g}^{(m)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ng}^{(m)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- A Propriedade 4 dos determinantes permite aplicar a formulação da propriedade anterior a uma linha de índice $h \leq n$ da matriz $\boldsymbol{A}$.

- Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes quadradas de ordem n, podemos ainda concluir que, em geral, se verifica

  $$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$$

  ou seja, o determinante da matriz soma de duas matrizes não é necessariamente igual à soma dos determinantes de cada uma delas.

Exemplo 13 [3.17]:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times3\times2 + 2\times1\times2 + 4\times1\times1 -$$

$$-(2\times3\times4 + 1\times1\times1 + 2\times1\times2) = 14 - 29 = -15$$

Desdobremos a 2ª coluna da matriz na soma de 3 parcelas, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Então

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = 1\times1\times2 + 2\times0\times2 + 4\times3\times1 - (2\times1\times4 + 1\times0\times1 + 2\times3\times2) +$$

$$+1\times1\times2 + 2\times(-1)\times2 + 4\times2\times1 - \left[2\times1\times4 + 1\times(-1)\times1 + 2\times2\times2\right] +$$

$$+1\times1\times2 + 2\times2\times2 + 4\times(-4)\times1 - \left[2\times1\times4 + 1\times2\times1 + 2\times(-4)\times2\right]$$

$$|\boldsymbol{A}| = (14-20) + (6-15) + (-6+6) = -6 - 9 + 0 = -15$$

- Cada termo de $|\boldsymbol{A}|$ é desdobrado na soma de três parcelas, representando, cada uma delas, um termo de um dos três determinantes considerados na soma.

Propriedade 10: Adicionando a uma dada fila da matriz $\boldsymbol{A}$, uma combinação linear de filas paralelas, obtém-se uma nova matriz $\boldsymbol{B}$, tal que

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|$$

Exemplo 14 [3.18]:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 3\times 2 + 2\times 1\times 2 + 4\times 1\times 1 -$$

$$-(2\times 3\times 4 + 1\times 1\times 1 + 2\times 1\times 2) = 14 - 29 = -15$$

Adicionemos à 1ª coluna da matriz, a 2ª coluna multiplicada por 2 e a 3ª coluna multiplicada por (-4). Obtém-se a matriz

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5)\times 3\times 2 + 4\times 1\times 2 + (-2)\times 1\times 1 -$$

$$-\left[2\times 3\times (-2) + 1\times 1\times (-5) + 2\times 1\times 4\right] = -24 + 9 = -15$$

- A justificação para o resultado obtido é-nos dada pela Propriedade 9 dos determinantes.

A 1ª coluna da matriz ***B*** pode ser desdobrada na soma de 3 parcelas

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

resultando, após a aplicação da Propriedade 9 dos determinantes,

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|$$

em que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftarrow \text{ a 1ª e 2ª colunas são proporcionais (Prop. 7)}$$

$$\begin{vmatrix} -8 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftarrow \text{ a 1ª e 3ª colunas são proporcionais (Prop. 7)}$$

Propriedade 11: As filas paralelas da matriz $\boldsymbol{A}$ são linearmente dependentes, se e só se

$$|\boldsymbol{A}| = 0$$

Exemplo 15 [3.19]: Determine-se todos os valores de $t \in \mathbb{R}$, de modo que as matrizes-linha

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & t \end{bmatrix}$$

sejam linearmente independentes.

Solução:

Tendo em atenção a Propriedade 11 dos determinantes, o conjunto

$$\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$$

será linearmente independente, se e só se

$$|\boldsymbol{U}| = \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & 0 & t \end{vmatrix} \neq 0$$

$$|\boldsymbol{U}| = 1 \times 1 \times t + t \times 0 \times 0 + 1 \times t \times 1 - [0 \times 1 \times 1 + 1 \times 0 \times 1 + t \times t \times t] \neq 0$$

$$|\boldsymbol{U}| = 2t - t^3 = t(2 - t^2) = t(\sqrt{2} - t)(\sqrt{2} + t) \neq 0$$

$$t \neq -\sqrt{2} \ \wedge\ t \neq 0 \ \wedge\ t \neq \sqrt{2} \ \Leftrightarrow\ t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$$