U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA UNIVERSIDADE DO PORTO

Prova sem consulta. Duração: 2h (30m de tolerância).

*** Não são consideradas as folhas sem identificação. Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não é possível a utilização de máquinas de calcular gráficas nem de microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**8,0**] Seja $S=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}$, em que $\vec{a}=(-2,1,2,1)$, $\vec{b}=(1,1,-1,1)$, $\vec{c}=(0,-2,2,0)$ e $\vec{d}=(1,1,1,3)$, um conjunto de vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.

a) Calcule o subespaço, $L(S)$, gerado por S; obtenha uma base, U, para o subespaço e conclua em relação à dimensão.

b) Verifique se é possível exprimir os vetores $\vec{r}=(3,1,-2,2)$ e $\vec{s}=(0,0,1,-1)$ como combinação linear dos elementos da base U; em caso afirmativo, obtenha a respetiva combinação linear.

c) Será o conjunto $S_1=\{(1,0,1,2),(1,1,1,3),(0,2,0,2)\}$ uma base para o subespaço $L(S)$? Justifique a sua resposta.

d) Obtenha uma base ortogonal, V, para o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, que contenha um número máximo de elementos de $L(S)$, sendo um destes elementos o vetor $\vec{v}_1=(1,-1,0,0)$.

2. [**2,5**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores não nulos do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, tais que $\{\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\}$ é um conjunto ortogonal, $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$, $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}$, $\|\vec{a}-\vec{c}\|=2$, $\measuredangle(\vec{c},\vec{a})=60°$ e $\vec{c}+\vec{d}=\vec{b}\times\vec{a}$. Determine:

a) As normas dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{d}$.

b) O ângulo formado pelos vetores $\vec{a}+\vec{d}$ e $\vec{a}\times\vec{b}$ (se não resolveu a alínea anterior considere $\|\vec{d}\|=2\sqrt{2}$).

....*(continua no verso)*

Prova sem consulta. Duração: 2h (30m de tolerância).

GRUPO II

3. [**2,5**] Seja a reta s do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, que passa em O (origem do referencial) e possui $\vec{a}$ como vetor direção, e o ponto P que não pertence a s.

a) Mostre que o vetor projeção de $\overrightarrow{OP}$ sobre $\vec{a}$ é:

$$\overrightarrow{proj}_{\vec{a}}\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}$$

b) Tendo em atenção as propriedades do produto vetorial, mostre que a distância de P à reta s é:

$$d_{P,s} = \frac{\|P\times\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} = \left[\|P\|^2 - \frac{(P\cdot\vec{a})^2}{\|\vec{a}\|^2}\right]^{1/2}$$

4. [**7,0**] Considere o plano $M\ :\ 2x+y+z=4$, a reta $r\ :\ X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(2,1,2)$ e $\vec{a}=(1,2,-1)$, e o ponto $Q=(2,-1,4)$. Determine:

a) A distância do ponto Q ao plano M e o ponto, I, de interseção da reta r com o plano M.

b) Um ponto, R, da reta r, tal que o triângulo $[OIR]$ tenha $\sqrt{50}$ unidades de área, sendo O a origem do referencial.

c) A equação vetorial de uma reta, h, que passa no ponto Q, é complanar com a reta r e faz, com esta reta, um ângulo de $30°$.