FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI Data / 10 / 20

Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano 1º Semestre 1º

Nome José Augusto Trigo Barbosa (Regente)

Espaço reservado para o avaliador

Exercício proposto: 55, Capítulo 2 do manual: "Noções sobre Álgebra Linear".

55) Conjunto $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\} \subset \mathbb{R}^4$, tal que
$\vec{u}_1 = (1,-1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (1,0,2,-1)$, $\vec{u}_3 = (0,1,0,1)$,
$\vec{u}_4 = (1,0,1,0)$

Subespaço: $H = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z = x+y\}$

a) Antes de se proceder ao cálculo do subespaço gerado pelo conjunto $U$, $L(U) \subseteq \mathbb{R}^4$, convém reter o seguinte:

i) Se $U$ é linearmente independente, então $L(U) = \mathbb{R}^4$ e $\dim L(U) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$. Neste caso o conjunto $U$ é constituído por 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes, sendo, por isso, uma base para $\mathbb{R}^4$ (qualquer base para o espaço $\mathbb{R}^4$ é formada por 4 vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^4$).

ii) Se $U$ é linearmente dependente, então $L(U) \subset \mathbb{R}^4$, ou seja, é um subespaço de $\mathbb{R}^4$, e $\dim L(U) < 4$. Neste caso a $\dim L(U)$ será igual ao número máximo de vectores linearmente independentes que estão incluídos no conjunto $U$. Uma vez que $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, por exemplo, não são vectores nulos nem colineares (paralelos), podemos garantir que $U_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ é um conjunto linearmente independente e, portanto, $\dim L(U) \geq 2$. Finalmente, a $\dim L(U) = 3$ se for possível encontrar, no conjunto $U$, um conjunto de 3 vectores linearmente independentes, isto é, se um dos conjunto seguintes $U_2 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, $U_3 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_4\}$ (que incluem o conjunto $U_1$, que é linearmente independente) for linearmente independente.

A resposta às questões atrás colocadas pode ser dada a partir do cálculo do subespaço gerado pelo conjunto $U$, $L(U)$.

Por definição

$$L(U) = \{\vec{x} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 + \alpha_4 \bar{u}_4, \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 + \alpha_4 \vec{u}_4 = \vec{x} \iff$$

$$\iff \alpha_1 (1,-1,0,0) + \alpha_2 (1,0,2,-1) + \alpha_3 (0,1,0,1) + \alpha_4 (1,0,1,0) = (x,y,z,w) \iff$$

$$\iff (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, -\alpha_1 + \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_4, -\alpha_2 + \alpha_3) = (x,y,z,w) \iff$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = x \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = y \\ 2\alpha_2 + \alpha_4 = z \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = w \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de 4 equações lineares a 4 incógnitas (as incógnitas são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$) pelo método de eliminação de Gauss

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 & 1 & z \\ 0 & -1 & 1 & 0 & w \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 + L_1 \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \iff$$

NOTA: $\alpha_1$ é incógnita principal
$L_1$ é uma equação principal

$$\iff \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & 2 & 0 & 1 & z \\ 0 & -1 & 1 & 0 & w \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \iff$$

NOTA: $\alpha_1, \alpha_2$ são incógnitas principais
$L_1, L_2$ são equações principais

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & -2 & -1 & z-2x-2y \\ 0 & 0 & 2 & 1 & w+x+y \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow L_4+L_3 \end{array} \Leftrightarrow$$

NOTA: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são incógnitas principais

$L_1, L_2, L_3$ são equações principais

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & -2 & -1 & z-2x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w-x-y+z \end{array}\right] \quad (1)$$

NOTA: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são incógnitas principais

$\alpha_4$ é incógnita não principal (livre)

$L_1, L_2, L_3$ são equações principais

$L_4$ é equação não principal

A análise do sistema de equações lineares permite concluir o seguinte:

iii) O sistema é impossível se a equação não principal ($L_4$) não for compatível com as equações principais, isto é, se

$$w-x-y+z \neq 0$$

Neste caso o vector $\vec{x} = (x, y, z, w)$ não é combinação linear dos vectores que constituem o conjunto U e, portanto, $\vec{x} \notin L(U)$. Assim, podemos já concluir que $L(U) \subset \mathbb{R}^4$ e $\dim L(U) < \dim \mathbb{R}^4 = 4$.

iv) O sistema é possível se a equação não principal ($L_4$) for compatível com as equações principais, isto é, se

$$w-x-y+z = 0$$

Neste caso o vector $\vec{x} = (x, y, z, w)$ é combinação linear dos vectores que constituem o conjunto U e, portanto, $\vec{x} \in L(U)$.

Além disso, como existe uma incógnita não principal no sistema, podemos afirmar que o sistema é possível e simplesmente indeterminado, ou seja, qualquer vector $\vec{x} \in L(U)$ pode ser obtido através de uma infinidade de combinações lineares dos vectores que constituem o conjunto U. (como veremos na alínea b) esta situação terá uma consequência imediata na classificação do conjunto U quanto à sua dependência / independência linear).

Em face do que foi referido anteriormente, podemos concluir que

$$\vec{x} = (x,y,z,w) \in L(U) \text{ , se e só se } \quad w - x - y + z = 0$$

ou ainda, por exemplo,

$$\vec{x} = (x,y,z,w) \in L(U) \text{ , se e só se } \quad w = x + y - z$$

e, portanto,

$$L(U) = \{ \vec{x} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ w - x - y + z = 0 \} =$$

$$= \{ \vec{x} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ w = x + y - z \} =$$

$$= \{ \vec{x} = (x,y,z,x+y-z) \in \mathbb{R}^4 \} \subset \mathbb{R}^4$$

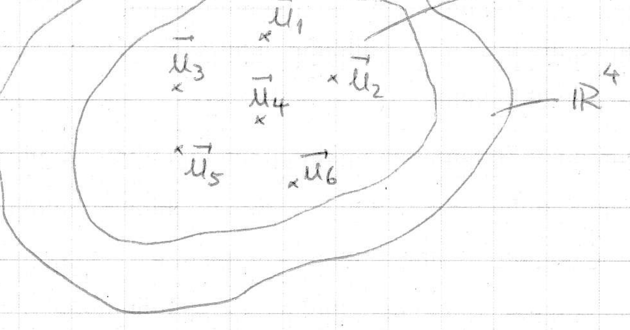
Para justificar a dimensão de $L(U)$, $\dim L(U)$, é necessário indicar uma base para o subespaço $L(U)$. A forma mais simples de o fazer é recorrer à definição de $L(U)$, isto é:

$$\vec{x} = (x,y,z,x+y-z) \in L(U) \iff$$

$$\iff \vec{x} = (x,0,0,x) + (0,y,0,y) + (0,0,z,-z) \in L(U) \iff$$

$$\iff \vec{x} = x(1,0,0,1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,-1) =$$

$$= x\vec{u}_5 + y\vec{u}_3 + z\vec{u}_6 \in L(U)$$



Conclui-se, então, que o conjunto

$$U_4 = \{\vec{u}_5, \vec{u}_3, \vec{u}_6\} = \{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,-1)\} \subset L(U).$$

é uma possível base para o subespaço $L(U)$, pelo que

$$\dim L(U) = 3 \quad \text{(número de elementos da base)}$$

Convém notar o seguinte:

v) Existe uma infinidade de bases para o subespaço $L(U)$; todas elas são constituídas por 3 vectores linearmente independentes que pertencem a $L(U)$.

vi) Conforme foi referido no ponto ii) (páginas 1 e 2), pelo menos um dos conjuntos $U_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ e $U_3 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4\}$, desde que seja linearmente independente, será ainda uma possível base para o subespaço $L(U)$.

b) Será $U$ um conjunto linearmente independente? Para responder a esta questão podemos recorrer a duas formas diferentes de justificar a resposta:

b1) Recorrendo à <u>definição</u> de conjunto linearmente independente.

Para que $U$ seja um conjunto linearmente independente terá de verificar-se a seguinte condição:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 + \alpha_4 \vec{u}_4 = \vec{0} = (0,0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$ (a solução nula será a única solução para a igualdade)

A resolução do problema passa pela resolução do sistema de equações lineares homogéneo, com 4 equações lineares e 4 incógnitas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad (2)$$

Trata-se de um sistema que é um caso particular do sistema de equações lineares que foi considerado na alínea a) para o cálculo do subespaço $L(U)$, desde que se considere $\vec{x} = \vec{0} = (0,0,0,0)$. Assim, a solução do sistema (2) pode ser obtida, substituindo $\vec{x} = \vec{0}$ na solução encontrada em (1) (página 3), ou seja:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_4 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 - \alpha_4 \\ \alpha_3 = -\alpha_4/2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_4/2 \\ \alpha_2 = -\alpha_4/2 \\ \alpha_3 = -\alpha_4/2 \end{cases}, \quad \alpha_4 \in \mathbb{R}$$

Conclui-se que o sistema de equações homogéneo é possível e simplesmente indeterminado, pelo que a solução nula não é a única solução do problema. Portanto, o vector nulo é gerado de forma não única pelo conjunto $U$, pelo que o conjunto $U$ é linearmente dependente.

b2) Recorrendo às <u>propriedades</u> dos subespaços.

Conforme foi verificado na alínea a), o subespaço $L(U)$ é gerado por um conjunto de 3 vectores linearmente independentes, em particular, pela base $U_4 = \{\vec{u}_5, \vec{u}_3, \vec{u}_6\}$, e, portanto, a sua dimensão é $\dim L(U) = 3$. Nestas condições podemos afirmar que não é possível encontrar em $L(U)$ um conjunto de vectores linearmente independentes com um número de elementos superior a 3. Qualquer conjunto de vectores do subespaço $L(U)$ com um número de elementos superior a 3 será sempre um conjunto linearmente dependente; daí que o conjunto $U$ seja um conjunto linearmente dependente (possui 4 vectores do subespaço $L(U)$).

c) Qualquer base para o subespaço $L(U)$ deve ser constituída por 3 vectores linearmente independentes de $L(U)$, pelo que

$$W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} \subset L(U)$$

Como $W$ é uma base ortogonal, os seus elementos deverão ser vectores não nulos e ortogonais entre si (o que garante que os vectores são linearmente independentes). Como em $U$ existem dois vectores não nulos e ortogonais (os vectores $\vec{u}_3$ e $\vec{u}_4$), então, por exemplo,

$$\vec{w}_1 = \vec{u}_3 = (0,1,0,1) \in L(U)$$
$$\vec{w}_2 = \vec{u}_4 = (1,0,1,0) \in L(U)$$
$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0$$

Resta o cálculo do vector $\vec{w}_3 = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ que deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} \vec{w}_3 \neq \vec{0} \\ \vec{w}_3 \in L(U) \\ \vec{w}_3 \cdot \vec{w}_1 = 0 \\ \vec{w}_3 \cdot \vec{w}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{w}_3 \neq \vec{0} \\ w = x + y - z \\ y + w = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{w}_3 \neq \vec{0} \\ -y = x + y + x \\ w = -y \\ z = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{w}_3 \neq \vec{0} \\ y = -x \\ z = -x \\ w = x \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

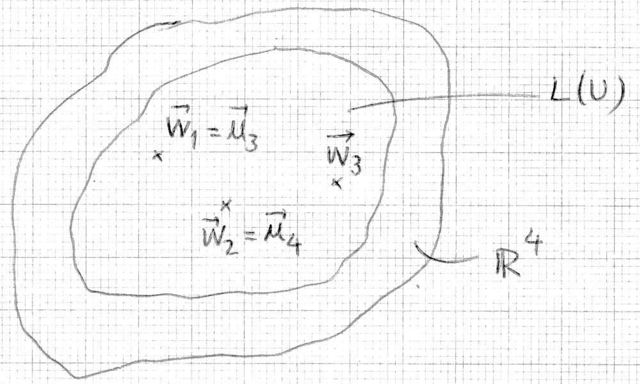
O sistema é possível e simplesmente indeterminado; uma solução possível é, por exemplo,

$$\vec{w}_3 = (1,-1,-1,1)$$

Concluindo

$$W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} = \{(0,1,0,1),(1,0,1,0),(1,-1,-1,1)\} \subset L(U)$$

é uma base ortogonal para o subespaço $L(U)$.




d) A base ortonormal $Q$ pode ser obtida, a partir da base ortogonal $W$, normalizando (obtendo versores) os vectores que constituem a base $W$, isto é,

$$Q = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\} = \left\{\frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}, \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}, \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}\right\} \subset L(U)$$

onde

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad \|\vec{q}_1\| = 1 \text{ (versor)}$$

$$\vec{q}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{e} \quad \|\vec{q}_2\| = 1 \text{ (versor)}$$

$$\vec{q}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \|\vec{q}_3\| = 1 \text{ (versor)}$$

e) Qualquer base para o espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ deve ser constituída por 4 vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^4$, pelo que

$$V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$$

Como V é uma base ortogonal, os seus elementos deverão ser vectores não nulos e ortogonais entre si (o que garante que os vectores são linearmente independentes).
Por outro lado, dois dos seus elementos devem pertencer ao subespaço $L(U) \cap H$, que resulta da intersecção dos subespaços $L(U)$ e $H$; seja, por exemplo,

$$\vec{v}_1 \in L(U) \cap H \setminus \{\vec{0}\}$$
$$\vec{v}_2 \in L(U) \cap H \setminus \{\vec{0}\}$$
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

Comecemos por determinar o subespaço $L(U) \cap H$:

$$L(U) \cap H = \{\vec{x} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} \in L(U) \wedge \vec{x} \in H\} =$$

$$= \{\vec{x} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = x+y-z \wedge z = x+y\} \subset \mathbb{R}^4$$

Resolvendo o sistema de 2 equações lineares a 4 incógnitas $(x,y,z,w)$, obtém-se

$$\begin{cases} w = x+y-z \\ z = x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 0 \\ z = x+y \end{cases}, \quad x,y \in \mathbb{R}$$

e, portanto,

$$L(U) \cap H = \{\vec{x} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z = x+y \wedge w = 0\} =$$

$$= \{\vec{x} = (x, y, x+y, 0) \in \mathbb{R}^4\} \subset \mathbb{R}^4$$

Notando que

$$\vec{x} = (x, y, x+y, 0) \in L(U) \cap H \iff$$

$$\iff \vec{x} = (x, 0, x, 0) + (0, y, y, 0) \in L(U) \cap H \iff$$

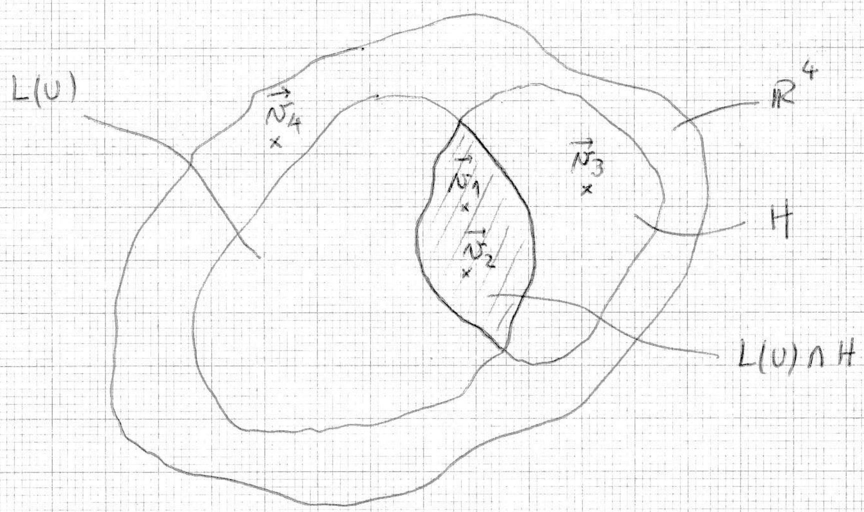
$$\iff \vec{x} = x(1,0,1,0) + y(0,1,1,0) =$$
$$= x\vec{u}_4 + y\vec{u}_7 \in L(U) \cap H$$

conclui-se que o conjunto

$$U_5 = \{\vec{u}_4, \vec{u}_7\} = \{(1,0,1,0), (0,1,1,0)\} \subset L(U) \cap H$$

é uma possível base para o subespaço $L(U) \cap H$, pelo que

$$\dim L(U) \cap H = 2$$




Antes de prosseguirmos a resolução do problema há a notar o seguinte:

vii) Como $\dim L(U) \cap H = 2$, qualquer base para o subespaço $L(U) \cap H$ é constituída por 2 vectores linearmente independentes pertencentes a $L(U) \cap H$. Assim, o conjunto ortogonal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ será uma base ortogonal para o subespaço $L(U) \cap H$.

Wuy

O processo de cálculo inicia-se pela escolha do vector $\vec{v}_1 = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, que deverá satisfazer as condições seguintes:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 \neq \vec{0} \\ \vec{v}_1 \in L(U) \cap H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 \neq \vec{0} \\ w = 0 \\ z = x + y \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

O sistema é possível e duplamente indeterminado; uma solução possível é, por exemplo,

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0) \in L(U) \cap H$$

O vector $\vec{v}_2 = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ deverá satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} \vec{v}_2 \neq \vec{0} \\ \vec{v}_2 \in L(U) \cap H \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_2 \neq \vec{0} \\ w = 0 \\ z = x + y \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_2 \neq \vec{0} \\ w = 0 \\ y = -2x \\ z = -x \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

O sistema é possível e simplesmente indeterminado; uma solução possível é, por exemplo,

$$\vec{v}_2 = (1, -2, -1, 0) \in L(U) \cap H$$

O vector $\vec{v}_3 = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ deverá satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} \vec{v}_3 \neq \vec{0} \\ \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_3 \neq \vec{0} \\ x + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_3 \neq \vec{0} \\ z = -x \\ y = x \end{cases}, \quad x, w \in \mathbb{R}$$

O sistema é possível e duplamente indeterminado; uma solução possível é, por exemplo,

$$\vec{v}_3 = (0, 0, 0, 1)$$

e $\vec{v}_3 \notin L(U)$ e $\vec{v}_3 \in H$.

Nuno

Finalmente, o vector $\vec{v}_4 = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ deverá verificar as condições seguintes:

$$\begin{cases} \vec{v}_4 \neq \vec{0} \\ \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_2 = 0 \\ \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_4 \neq \vec{0} \\ x + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_4 \neq \vec{0} \\ z = -x \\ y = x \\ w = 0 \end{cases}, \; x \in \mathbb{R}$$

O sistema é possível e simplesmente indeterminado; uma solução possível é, por exemplo,

$$\vec{v}_4 = (1, 1, -1, 0)$$

e $\vec{v}_4 \notin L(U)$ e $\vec{v}_4 \notin H$.

Concluindo

$$V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \{(1,0,1,0), (1,-2,-1,0), (0,0,0,1), (1,1,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$$

é uma base ortogonal para o espaço vectorial $\mathbb{R}^4$.

f) A base ortonormal $T$ pode ser obtida, a partir da base ortogonal $V$, normalizando (obtendo versores) os vectores que constituem a base $V$, isto é,

$$T = \{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3, \vec{t}_4\} = \left\{ \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|}, \frac{\vec{v}_4}{\|\vec{v}_4\|} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

onde

$$\vec{t}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{e} \quad \|\vec{t}_1\| = 1 \quad (\text{versor})$$

$$\vec{t}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, 0\right) \quad \text{e} \quad \|\vec{t}_2\| = 1 \quad (\text{versor})$$

$$\vec{t}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = (0, 0, 0, 1) = \vec{v}_3 \quad \text{e} \quad \|\vec{t}_3\| = 1 \quad (\text{versor})$$

$$\vec{t}_4 = \frac{\vec{v}_4}{\|\vec{v}_4\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right) \quad \text{e} \quad \|\vec{t}_4\| = 1 \quad (\text{versor})$$

g) As coordenadas do vector $\vec{s}$ em relação à base V,

$$\vec{s} = (2,-1,1,-3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)_V$$

são os escalares $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ que satisfazem a combinação linear

$$\beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \beta_3 \vec{v}_3 + \beta_4 \vec{v}_4 = \vec{s} = (2,-1,1,-3)$$

e que podem ser determinados resolvendo o sistema de 4 equações lineares a 4 incógnitas

$$\beta_1 (1,0,1,0) + \beta_2 (1,-2,-1,0) + \beta_3 (0,0,0,1) + \beta_4 (1,1,-1,0) = (2,-1,1,-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_4 = 2 \\ -2\beta_2 + \beta_4 = -1 \\ \beta_1 - \beta_2 - \beta_4 = 1 \\ \beta_3 = -3 \end{cases}$$

que é possível e determinado, já que o conjunto V é uma base (linearmente independente) para o espaço vectorial $\mathbb{R}^4$. No entanto, uma vez que V é uma base ortogonal, o problema pode ser, em alternativa, resolvido recorrendo à projecção ortogonal do vector $\vec{s} = (2,-1,1,-3)$ sobre cada um dos vectores que constituem a base V.
Tem-se, então,

$$\beta_1 \vec{v}_1 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{v}_1} \vec{s} \Rightarrow \beta_1 = \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} = \frac{3}{2}$$

$$\beta_2 \vec{v}_2 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{v}_2} \vec{s} \Rightarrow \beta_2 = \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\beta_3 \vec{v}_3 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{v}_3} \vec{s} \Rightarrow \beta_3 = \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|^2} = -3$$

$$\beta_4 \vec{v}_4 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{v}_4} \vec{s} \Rightarrow \beta_4 = \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}_4}{\|\vec{v}_4\|^2} = 0$$

pelo que as coordenadas do vector $\vec{s}$ em relação à base ortogonal V são

$$\vec{s} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -3, 0\right)_V$$

As coordenadas do vector $\vec{s}$ em relação à base T,

$$\vec{s} = (2,-1,1,-3) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)_T$$

são os escalares $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ que satisfazem a combinação linear

$$\gamma_1 \vec{t}_1 + \gamma_2 \vec{t}_2 + \gamma_3 \vec{t}_3 + \gamma_4 \vec{t}_4 = \vec{s} = (2,-1,1,-3)$$

e que podem ser obtidos resolvendo um <u>sistema</u> de 4 equações lineares a 4 incógnitas, que é <u>possível e determinado</u>, já que T é uma base (linearmente independente) para o espaço vectorial $\mathbb{R}^4$. No entanto, uma vez que T é uma <u>base ortonormal</u>, é possível obter a solução recorrendo à <u>projecção ortogonal do vector</u> $\vec{s} = (2,-1,1,-3)$ sobre cada um dos versores que constituem o conjunto T. Tem-se, então,

$$\gamma_1 \vec{t}_1 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{t}_1} \vec{s} \Rightarrow \gamma_1 = \vec{s} \cdot \vec{t}_1 = 3/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}/2$$

$$\gamma_2 \vec{t}_2 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{t}_2} \vec{s} \Rightarrow \gamma_2 = \vec{s} \cdot \vec{t}_2 = 3/\sqrt{6} = \sqrt{6}/2$$

$$\gamma_3 \vec{t}_3 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{t}_3} \vec{s} \Rightarrow \gamma_3 = \vec{s} \cdot \vec{t}_3 = -3$$

$$\gamma_4 \vec{t}_4 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{t}_4} \vec{s} \Rightarrow \gamma_4 = \vec{s} \cdot \vec{t}_4 = 0$$

Assim, as coordenadas do vector $\vec{s}$ em relação à base ortonormal T são

$$\vec{s} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -3, 0\right)_T$$