Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Reavaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**5,7**] Sejam as transformações lineares $T \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ e $U,S \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, dadas por

$$T(x,y,z)=(x+y,x+y-z), \qquad U(x,y,z)=(x+z,x-y,x+y+2z),$$

$$S(x,y,z)=(x+z,x+2y+3z,y+2z)$$

em relação às bases canónicas E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *T*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Verifique quais das funções dadas são sobrejetivas. Justifique.

c) Mostre que apenas a função *S* é bijetiva e obtenha a sua função inversa.

2. [**2,0**] Sejam a transformação linear $T:\mathrm{V}\to\mathrm{W}$ e os conjuntos $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\ldots,\vec{u}_n\}\subset\mathrm{V}$ e $\overline{\mathrm{U}}=\{T(\vec{u}_1),T(\vec{u}_2),T(\vec{u}_3),\ldots,T(\vec{u}_n)\}\subset T(\mathrm{V})$. Mostre que se T é injetiva e U é linearmente independente, então $\overline{\mathrm{U}}$ é, ainda, linearmente independente. Se $\dim\mathrm{V}=n$, o que pode concluir em relação ao conjunto $\overline{\mathrm{U}}$; justifique.

GRUPO II

3. [**4,2**] Considere as transformações lineares definidas na questão 1 e as bases $\mathrm{B}=\{(1,0,0),(-1,1,1),(1,0,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$ e $\mathrm{V}=\{(1,-1),(1,1)\}\subset\mathbb{R}^2$.

a) Recorrendo ao cálculo matricial, obtenha as matrizes $m(US)_{\mathrm{B},\mathrm{E}_3}$ e $m(T)_{\mathrm{E}_3,\mathrm{V}}$.

b) Usando preferencialmente as matrizes obtidas na alínea anterior, calcule a matriz $m(TU^2S)_{\mathrm{B},\mathrm{V}}$.

.... ***(continua no verso)***

4. [**2,5**] Seja a matriz real:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -5\\ -1 & 2 & 0 & -1\\ -1 & 0 & a & 5\\ 2 & 6 & a & -7\end{bmatrix}$$

a) Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o seu determinante e a sua característica.

b) Sejam $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ matrizes quadradas de ordem 4, tais que $|\boldsymbol{B}|=2$ e $\boldsymbol{C}=2(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}$. Obtenha o valor do determinante de $\boldsymbol{C}$.

GRUPO III

5. [**5,6**] Seja a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ representada, em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$, pela matriz $\boldsymbol{T}=m(T)$, tal que $|\boldsymbol{T}|=1$ e o seu traço é igual a cinco; admita que a matriz $\boldsymbol{T}^{-1}=m(T^{-1})$ possui um valor próprio igual a dois. Considere o espaço próprio, associado a um dos valores próprios de $\boldsymbol{T}=m(T)$, $\mathrm{E}(\beta)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ z=0\right\}$ e o conjunto $\mathrm{U}=\left\{(1,\alpha,\delta),(1,1,0),(1,0,2)\right\}\subset\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os valores próprios de $\boldsymbol{T}=m(T)$. O que pode concluir em relação ao valor próprio correspondente ao espaço próprio $\mathrm{E}(\beta)$?

b) Determine α e δ de modo que U seja uma base de vetores próprios para a transformação linear. Indique a base U, justificando.

c) Obtenha uma nova base, B, de vetores próprios para a transformação linear que não inclua nenhum elemento de U. Determine as matrizes $\boldsymbol{T}_{\mathrm{B,B}}$ e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{B,E}}$.