Álgebra Linear e Geometria Analítica **Folha 3**

1 Considere os vectores u_1, u_2, u_3 e u_4, pertencentes ao espaço vectorial real E. Sabendo que:

- $E = \langle u_1,\ u_2,\ u_3 \rangle$
- os vectores u_1 e u_2 são linearmente independentes;
- $u_3 = 2u_1$
- $u_4 = u_1 + u_2$

Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) os vectores u_1, u_2 e u_3 são linearmente independentes;

(b) $(u_2,\ u_4)$ é uma base de E;

(c) o vector u_3 é linearmente independente;

(d) a dimensão do espaço vectorial E é igual a 3;

(e) $E = \langle u_2,\ u_3,\ u_4 \rangle$

2 Determine a característica de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3 Discuta em função dos parâmetros reais α e β a característica da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \beta & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

4 Utilizando matrizes, determine os valores do parâmetro real λ para os quais o sistema de vectores $((1,2,3,\lambda),(0,1,1,\lambda),(2,1,2,0),(\lambda,1,0,1))$ forma uma base de $\Re^4$.

5 Determine, utilizando o conceito de característica de uma matriz, a dimensão dos subespaços vectoriais:

a) $<$ (1, 2, -1), (3, 1, 2), (1, -3, 4) $>$ de $\Re^3$

b) $<$ (3, -1, 4), (2, 1, 3), (1, 0, 2) $>$ de $\Re^3$

c) $<$ (0, 1, 1, 2), (-2, 1, 0, 1), (3, 1, 5, 2), (1, 0, 3, -1)$>$ de $\Re^4$

d) $<$ (-1, 2, -1, 0), (0, 3, 1, 2), (1, 1, -2, 2), (2, 1, 0, -1)$>$ de $\Re^4$

6 Averigúe quais das seguintes sequências de vectores são bases dos respectivos espaços vectoriais reais.

a) de $\Re^2$:

i) ((1,1), (3,0)) ;

ii) ((1,1), (0,2),(2,3));

iii) ((1,1, (0,8));

iv) ((1,-2), (-2,4)).

b) de $\Re_3[x]$

i) $(1, x, x^2, x^3)$

ii) $(1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, x^3)$

iii) $(2, x, x^2+x^3, x+x^2+x^3)$

iv) $(1, 1+x, x^2+x^3)$.

7 Considere os seguintes vectores do espaço vectorial real $\Re^3$:

$$v_1 = (\alpha,6,-1),\ v_2 = (1,\alpha,-1) \text{ e } v_3 = (2,\alpha,-3).$$

a) Determine os valores do parâmetro real α para os quais a sequência (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\Re^3$

b) Para um dos valores de determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do v=(-1,1,2) em relação à base (v_1, v_2, v_3).

8 Considere o seguinte subconjunto do espaço vectorial real $\Re^4$:

$$V = \left\{(x,y,z,w) \in \Re^4 : x = y - 3z \wedge z = 2w\right\}$$

a) Mostre que V é um subespaço vectorial de $\Re^4$.

b) Determine uma base e a dimensão de V.

9 Sejam $F = \{(x, y, z) \in \Re^3 : z=0\}$ um subconjunto de $\Re^3$ e $u_1 = (0, 2, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0)$ e $u_3 = (-1, 6, 0)$ três vectores de $\Re^3$.

a) Mostre que F é um subespaço vectorial de $\Re^3$.

b) Verifique que $< u_1, u_2, u_3 > = F$.

c) A sequência (u_1, u_2, u_3) é uma base de F?

d) Indique a dimensão de F.

10 Considere os subespaços vectoriais

$$U = \{ (x, y, z) \in \Re^3 : x + y + z = 0 \} \text{ e } V = < (1, a, 1), (1, 1, a) >$$

de $\Re^3$, em que a é uma constante real. Determine:

a) Os valores de a para os quais $(a, 1, 1) \in V$;

b) Os valores de a para os quais ((1, a, 1), (1, 1, a), (2, 1, 4)) seja uma base de $\Re^3$;