Álgebra Linear e Geometria Analítica para Engenharia

Carolina Ribeiro e Luís Ferrás

Departamento de Matemática (DMAT), Universidade do Minho

30 de novembro de 2021

Notes

Table of contents

Notes

Espaço vetorial

Definição 1

Sejam V um conjunto **não vazio** e as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & V\times V & \to & V \\ & (v,u) & \mapsto & v\oplus u \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} \odot: & \mathbb{R}\times V & \to & V \\ & (\alpha,u) & \mapsto & \alpha\odot u \end{array}$$

Dizemos que V é um **espaço vetorial** sobre $\mathbb{R}$ ou que $(V,\oplus,\odot)$ é um espaço vetoral sobre $\mathbb{R}$ se:

1. A operação $\oplus$ satisfaz:
   - (A_1) $\forall u,v\in V,\ u\oplus v = v\oplus u$
   - (A_2) $\forall u,v,w\in V,\ (u\oplus v)\oplus w = u\oplus(v\oplus w)$
   - (A_3) $\exists'$ elemento de V (representado por 0_V): $\forall u\in V: u\oplus 0_V = u$
   - (A_4) $\forall u\in V$, $\exists'$ elemento de V (representado por $-u$): $u\oplus(-u)=0_V$

Notes

Espaço vetorial

2. A operação $\odot$ satisfaz:
   - (M_1) $\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall u,v\in V: \alpha\odot(u\oplus v)=\alpha\odot u\oplus\alpha\odot v$
   - (M_2) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall u\in V: (\alpha+\beta)\odot u=\alpha\odot u\oplus\beta\odot u$
   - (M_3) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall u\in V: (\alpha\cdot\beta)\odot u=\alpha\odot(\beta\odot u)$
   - (M_4) $\forall u\in V: 1\odot u = u$

Notes

Exemplos de Espaços vetoriais

Exemplo 2

- $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ para as operações usuais.
- $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ para as operações definidas por

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \mapsto & (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (\alpha, (x_1, x_2)) & \mapsto & (\alpha x_1, \alpha x_2) \end{array}$$

- O espaço $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos vetores com n componentes reais, com a adição e a multiplicação por escalares usuais.
- O espaço $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, o conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$ para adição de matrizes e multiplicação escalar usuais.

Notes

Exemplos de Espaços vetoriais

Exemplo.

Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^+$ com a adição definida por

$$x \oplus y = x/y \quad (\text{divisão usual})$$

e uma multiplicação escalar definida por

$$a \odot x = x^a \quad (\text{potência usual})$$

não é um espaço vetorial.

Note que

$$1 \oplus 2 = \frac{1}{2} \text{ e } 2 \oplus 1 = \frac{2}{1} = 2,$$

donde se prova que

$$1 \oplus 2 \neq 2 \oplus 1.$$

Assim, a condição (A_1) não é válida e, portanto, $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ não é um espaço vetorial.

Notes

Exemplos de Espaços vetoriais

Exercício.

Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^+$ com a adição definida por

$$x \oplus y = x.y \quad (\text{produto usual})$$

e uma multiplicação escalar definida por

$$a \odot x = x^a \quad (\text{potência usual})$$

é um espaço vetorial.

Notes

Espaço vetorial

Definição 3

Seja o espaço vetorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{R}$.

- Chama-se **escalares** aos elementos de $\mathbb{R}$.
- Chama-se **vetores** aos elementos de V.
- O elemento neutro da adição é designado por **vetor nulo** de V e representado por 0_V.

Notação: Denotemos, por simplicidade, as operações adição e multiplicação escalar por $+$ e $\cdot$, respetivamente.

Notes

Espaço vetorial

Propriedades

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Então

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \ \alpha \cdot 0_V = 0_V$
- $\forall u \in V: \ 0 \cdot u = 0_V$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall u \in V: \ -(\alpha \cdot u) = (-\alpha) \cdot u \text{ e } (-\alpha) \cdot (-u) = \alpha \cdot u$
- $\forall u, u_1, u_2 \in V : \text{se} \, (u + u_1 = u_2)$ então $(u = u_2 - u_1)$
- $\forall u, u_1, u_2 \in V : \text{se} \, (u + u_1 = u + u_2)$ então $(u_1 = u_2)$

Notes

Subespaço vetorial

Definição 4

Sejam o espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ e F um subconjunto não-vazio de V. Diz-se que F é um subespaço vetorail de V se $(F, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 5

1. V e $\{0_V\}$ são subespaços vetorias (triviais) de V.
2. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ é uma subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
3. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Notes

Subespaço vetorial

Exemplo 6

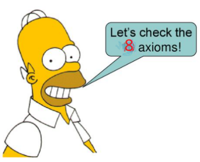
Será $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^3$?

Notes

Subespaço vetorial

Exemplo 7

Será $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^3$?

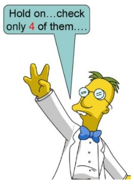


Notes

Subespaço vetorial

Exemplo 8

Será $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^3$?

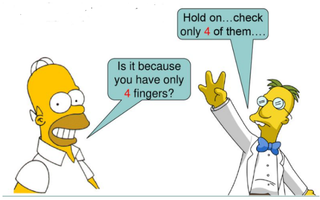


Notes

Subespaço vetorial

Exemplo 9

Será $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^3$?



Notes

Subespaço vetorial

Exemplo 10

Será $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^3$?

Notes

Subespaço vetorial

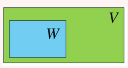
Teorema 11

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então, W é um subespaço de V se e só se:

(a) $0_V \in W$

(b) $\forall u, v \in W : u + v \in W$

(c) $\forall u \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \ \alpha \cdot u \in W$



Notes

Subespaço vetorial

Exemplo 12

Vejamos que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\} = \{(-y, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

- $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in S$ pois $0 + 0 = 0$.
- Verifiquemos que, quaiquer que sejam $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S$, se tem $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in S$. De facto, como $(x_1, y_1, z_1) \in S$, tem-se $x_1 = -y_1$ e, analogamente, como $(x_2, y_2, z_2) \in S$, tem-se $x_2 = -y_2$. Assim,

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &= (-y_1, y_1, z_1) + (-y_2, y_2, z_2)\\ &= (-y_1 - y_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (-(y_1 + y_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S.\end{aligned}$$

Notes

Subespaço vetorial

Exemplo 13

- Mostremos, agora, que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e para qualquer $(x_1, y_1, z_1) \in S$, se tem $\alpha(x_1, y_1, z_1) \in S$. De facto, como $(x_1, y_1, z_1) \in S$, tem-se $x_1 = -y_1$. Assim,

$$\alpha(x_1, y_1, z_1) = \alpha(-y_1, y_1, z_1) = (-\alpha y_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in S.$$

Assim, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Notes

Combinação linear

Definição 14

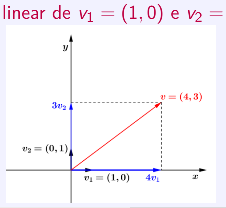
Sejam V um espaço vetorial, $u \in V$ e $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\} \subset V$. Diz-se que u é uma combinação linear dos elementos de S se

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R} :\ u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k$$

Exemplo 15

1. $v = (1, 3)$ é uma combinação linear de $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$ pois

$$(1, 3) = 1(1, 0) + 3(0, 1).$$



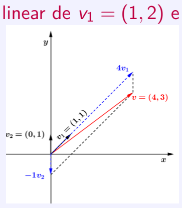
Notes

Combinação linear

Exemplo 16

2. $v = (4, 3)$ é uma combinação linear de $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (0, 1)$ pois

$$(4, 3) = 4(1, 1) + (-1)(0, 1).$$



3. A matriz $\left[\begin{smallmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{smallmatrix}\right]$ é uma combinação linear de $\left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$ e $\left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right]$ pois

$$\left[\begin{smallmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{smallmatrix}\right] = 2\left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right] + 3\left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right].$$

Notes

Combinação linear

Obs.

Sejam V um espaço vetorial e $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\} \subset V$. Diz-se que u é uma combinação linear dos elementos de S se o **sistema** linear

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = u$$

é **possível**.

Notes

Combinação linear

Exemplo 17

O vetor $u = (1, 2, 1)$ é combinação linear de $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$?

Resolução: Para que o vetor v seja combinação linear dos 2 vetores é necessário que existam 2 escalares α e β tais que

$$(1, 2, 1) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1) \Leftrightarrow (1, 2, 1) = (\alpha, \alpha + \beta, \beta).$$

Aplicando a eliminação de Gauss, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

donde, se prova que o sistema é possível ($car(A) = car(A|b) = 2$), tendo solução única

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Notes

Combinação linear

Exemplo 18

O vetor $u = (1, 2, 1)$ é combinação linear de $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$?

Resolução: Para que o vetor v seja combinação linear dos 2 vetores é necessário que existam 2 escalares α e β tais que

$$(1, 2, 1) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 0, 1) \Leftrightarrow (1, 2, 1) = (\alpha, \alpha, \beta).$$

Aplicando a eliminação de Gauss, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

donde, se prova que o sistema é impossível ($car(A) = 2 < car(A|b) = 3$). Logo, $u = (1, 2, 1)$ não é combinação linear de $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Notes

Espaço gerado

Definição 19

Sejam V um espaço vetorial e $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\} \subset V$. Chama-se espaço gerado pelo conjunto S, que se representa por $\langle u_1, u_2, \cdots, u_k\rangle$, ao conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de S, ou seja,

$$\langle u_1, u_2, \cdots, u_k\rangle = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

Notes

Espaço gerado

Exemplo 20

- O espaço gerado por $\{(1,1),(2,2)\}$ é

$$\begin{aligned}\langle(1,1),(2,2)\rangle &= \{\alpha(1,1)+\beta(2,2), \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(\alpha+2\beta,\alpha+2\beta), \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

- O espaço gerado por $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é

$$\begin{aligned}\langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle &= \{\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1), \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(\alpha,\beta,\gamma), \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

- $\left\langle \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\rangle = \left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}.$

Notes

Espaço gerado

Teorema 21

Sejam V um espaço vetorial, $u\in V$ e $S=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}\subset U\subset V$. Então:

(a) $\langle u_1,u_2,\cdots,u_k\rangle$ *é* ***um subespaço*** *de V;*

(b) *se U é um subespaço de V, então $\langle u_1,u_2,\cdots,u_k\rangle\subset U$.*

Notes

Conjunto gerador de V

Definição 22

Sejam V um espaço vetorial e $S=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}\subset V$. Diz-se que S é um conjunto gerador de V se $V=\langle u_1,u_2,\cdots,u_k\rangle$.

Obs. $S=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}\subset V$ é um conjunto gerador de V se

$$\forall u\in V, \exists\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{R}:\ u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_ku_k,$$

i.e., se o sistema de equações lineares

$$u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_ku_k$$

é **possível** qualquer que seja $u\in V$.

Notes

Conjunto gerador de V

Exemplo 23

- $\{(1,1,1),(2,2,0)\}$ é conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$?
  Se $\mathbb{R}^3=\langle(1,1,1),(2,2,0)\rangle$, então

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:(x,y,z)=\alpha(1,1,1)+\beta(2,2,0)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&2&x\\1&2&y\\1&0&z\end{array}\right]\longleftrightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&2&x\\0&0&y-x\\0&-2&z-x\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c}1&2&x\\0&-2&z-x\\0&0&y-x\end{array}\right]$$

$car(A)=car(A|b)$ para $y-x=0$, logo o sistema não é possível para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$, gerando, portanto, um subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y-x=0\}.$$

Notes

Conjunto gerador de V

Exemplo 24

- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle &= \{\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1),\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(\alpha,\beta,\gamma),\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

- $\left\langle \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\rangle = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$

Notes

Conjunto gerador de V

Obs

(a) Um espaço vetorial pode admitir diversos conjuntos geradores.
(b) Conjuntos geradores distintos podem gerar o mesmo espaço vetorial.

Notes

Conjunto gerador de V

Exemplo 25

Seja $S=\{(1,2,-1),(2,1,1),(-1,-2,1),(0,1,0)\}\subset\mathbb{R}^3$. Calcule o espaço gerado por S.

Se $(x,y,z)\in\langle(1,2,-1),(2,1,1),(-1,-2,1),(0,1,0)\rangle$, então existem escalares $\alpha,\beta,\gamma,\theta\in\mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z)=\alpha(1,2,-1)+\beta(2,2,0)+\gamma(-1,-2,1)+\theta(0,1,0)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&0&x\\2&1&-2&1&y\\-1&1&1&1&z\end{array}\right]\leftrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&0&x\\0&-3&0&1&y-2x\\0&3&0&0&x+z\end{array}\right]\leftrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&0&x\\0&-3&0&1&y-2x\\0&0&0&1&y+z-x\end{array}\right]$$

Como o sistema é sempre possível, então

$$\langle(1,2,-1),(2,1,1),(-1,-2,1),(0,1,0)\rangle=\langle(1,2,-1),(2,1,1),(0,1,0)\rangle=\mathbb{R}^3,\quad \dim S=3.$$

Notes

Dependência e indepedência Linear

Definição 26

Sejam V um espaço vetorial e $S=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}\subset V$.

- Diz-se que S é um conjunto linearmente independente se $\forall\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{R}:\ \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_ku_k=0_V\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0.$
- Se S é um conjunto linearmente independente, os elementos de S dizem-se vetores linearmente independentes.
- Se S não é um conjunto linearmente independente, diz-se que S é um conjunto linearmente dependente.
- Se S é um conjunto linearmente dependente, os elementos de S dizem-se vetores linearmente dependentes.

Notes

Dependência e indepedência Linear

Exemplo 27

1. Os vetores $(1,1),(2,2)$ são linearmente dependentes, pois
$$0(1,1)+0(2,2)=(0,0) \;\text{ e }\; 2(1,1)+(-1)(2,2)=(0,0).$$
1. Os vetores $(1,2),(2,1)$ são linearmente independentes, pois o sistema homogéneo
$$\alpha(1,2)+\beta(2,1)=(0,0),$$
cuja matriz ampliada é
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right], \quad car(A)=car(A|b)=2=n)$$
tem solução única
$$\alpha=\beta=0.$$

Notes

Dependência e indepedência Linear

Obs.

- Diz-se que S é um **conjunto linearmente independente** se o **sistema** de equações lineares
$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\cdots+\alpha_n u_n=0_V$$
é **possível e determinado**.
- Diz-se que S é um **conjunto linearmente dependente** se o **sistema** de equações lineares
$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\cdots+\alpha_n u_n=0_V$$
é **possível e indeterminado**.

Notes

Dependência e indepedência Linear

Proposição.

Sejam V um espaço vetorial e $S_1 \subset S=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\} \subset S_2 \subset V$.

(a) Se S é um conjunto linearmente dependente, então, S_2 é um conjunto linearmente dependente.

(b) Se S é um conjunto linearmente independente, então, S_1 é um conjunto linearmente independente.

Exemplo 28

1. $(1,0),(0,1),(1,1)$ é um conjunto linearmente dependente, então $(1,0),(0,1),(1,1),(-1,1)$ é um conjunto linearmente dependente.
2. $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ é um conjunto linearmente independente, então $(1,0,0),(0,1,0)$ é um conjunto linearmente independente.

Notes

Base de um espaço vetorial

Definição 29

O conjunto de vetores $S=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$ forma uma base do espaço vetorial V se verificar simultaneamente as seguintes condições:

1. S é um conjunto linearmente independente.
2. S é um conjunto gerador de V.

Exemplo 30

- Sejam $e_1=(1,0,\cdots,0)$, $e_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,0,\cdots,1))$. Então $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$,
- O conjunto $\{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]\}$ é a base canónica de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$

Notes

Base de um espaço vetorial

Proposição.

Se $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\} \subset V$ é uma base de V, então cada vetor de V escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de S

Obs.

S é uma base de V se o **sistema** de equações lineares

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = u$$

é **possível e determinado** qualquer que seja $u \in V$.

Notes

Base de um espaço vetorial

Corolário.

Duas bases de V possuem o mesmo número de elementos.

Notes

Dimensão de um espaço vetorial

Definição 31

Seja V um espaço vetorial.

(a) Se $V \neq \{0_V\}$ e $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ é uma base de V, chama-se **dimensão** do espaço vetorial V, que se representa por $dim(V)$, **ao número de elementos** que constituem a base. Diz-se, ainda, que V é um espaço vetorial de dimensão finita.

(b) Se $V = \{0_V\}$, diz-se que a dimensão de V é zero, escrevendo-se $dim(V) = 0$.

Notes

Dimensão de um espaço vetorial

Exemplo 32

- O conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, chamada **base canónica**. Logo,
$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2.$$
- O conjunto $\{(1,1),(1,2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ se e só se o sistema
$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(1,2))$$
é possível e determinado. Tem-se
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \end{array}\right],$$
donde se prova que, dada existência de duas colunas pivô, os 2 vetores geram $\mathbb{R}^2$ e são linearmente independentes.

Notes

Dimensão de um espaço vetorial

Exemplo 33

- O conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, chamada **base canónica**. Logo,
$$\dim(\mathbb{R}^3)=3.$$
- O conjunto $\{(1,1,1),(1,1,0),(-1,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se o sistema
$$(x,y,z)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(-1,0,1)$$
é possível e determinado. Tem-se
$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&x\\1&1&0&y\\1&0&1&z\end{array}\right]\leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&x\\0&0&1&y-x\\0&-1&2&z-x\end{array}\right]\leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&x\\0&-1&2&z-x\\0&0&1&y-x\end{array}\right]$$
donde se prova, dada existência de três colunas pivô, que os 3 vetores são linearmente independentes e geram $\mathbb{R}^3$.

Notes

Dimensão de um espaço vetorial

Exemplo 34

- O conjunto $\{(1,1,1),(1,1,0)\}$ é uma base de
$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=x\} \text{ e } \dim W=2.$$
- O conjunto
$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$
é uma base de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, chamada base canónica ou natural de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$. Logo,
$$\dim\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})=4.$$
- O conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $W=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}): a=d+b,\ c=0\right\}$. Logo,
$$\dim W=2.$$

Notes

Dimensão de um espaço vetorial

Exemplo 35

Indique uma base do espaço vetorial $W=\{(x,y,z): x=0\}$.

Como
$$W=\{(0,y,z),y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(0,1,0)+z(0,0,1),y,z\in\mathbb{R}\},$$
prova-se que cada vetor de W é combinação linear do conjunto $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$. Ou seja, $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é um conjunto gerador de W. Averiguemos se o comjunto $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente. Para tal, considere-se o sistema homogéneo
$$\alpha(0,1,0)+\beta(0,0,1)=(0,0,0).$$
Prova-se, facilmente, que o sistema tem solução única ($\alpha=\beta=0$). Portanto, $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de W.

Notes

Dimensão de um espaço vetorial

Teorema 36

Sejam V um espaço linear de dimensão finita e W um subespaço de V.

(i) *Seja $S=\{u_1,\ldots,u_k\}\in V$. Se S é linearmente independente então S será um subconjunto de uma base de V e ter-se-á $\dim V\geq k$.*

(ii) *Se $\dim V=n$, então quaisquer m vetores de V, com $m>n$, são linearmente dependentes.*

(iii) *Se $\dim V=n$, então quaisquer m vetores de V, com $m>n$, pode gerar V.*

(iv) *O subespaço W tem dimensão finita e $\dim W\leq\dim V$.*

(v) *Se $\dim W=\dim V$, então $W=V$.*

(vi) *Se $\dim V=n$, então quaisquer n **vetores de V linearmente independentes** constituem uma **base de** V.*

(vii) *Se $\dim V=n$, então quaisquer n **vetores geradores de** V constituem uma **base de** V.*

Notes

Dimensão de um espaço vetorial

Exemplo 37

Seja $S = \{(1,0,1),(0,1,a),(1,1,b),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Determinemos os valores dos parâmetros a e b para os quais S não gere $\mathbb{R}^3$.

Vejamos, então, para que valores de a e b a combinação linear

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(2,2,0) + \gamma(1,0,1) + \theta(2,2,0)$$

não é única. Tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & a & b & 1 & z \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & a & b-1 & 0 & z-x \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & b-a-1 & -a & z-x-ay \end{array}\right]$$

Logo, S não gera $\mathbb{R}^3$ se e só se $b-a-1=0$ e $-a=0$, isto é, se e só se $a=0$ e $b=1$.

Notes

Coordenadas de um vetor numa base de V

Theorem 38

Sejam V um espaço vetorial e $S = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ uma base ordenada de V. Então, cada vetor $u \in V$ escreve-se de forma única como combinação linear do elementos de S, ou seja, existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

Estes coeficientes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ dizem-se ***coordenadas*** *de u relativamente à base ordenada S, que se representa por*

$$[u]_S = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 39

Verifique que, relativamente à base $S = ((1,1),(1,2))$ de $\mathbb{R}^2$, se tem:

$$[(0,1)]_S = (-1,1), \quad [(1,-1)]_S = (3,-2)$$

Notes