Prova sem consulta. Duração: 1h30m (15m de tolerância). 2ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta. Em cada pergunta da prova é apresentada a cotação prevista.**

GRUPO I

1. [**5,5**] Sejam as transformações lineares $S,T \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, definidas por

$$S(x,y,z)=(x-z,-x+y+2z,2y+2z) \quad \text{e} \quad T(x,y,z)=(x-z,2x+z,y+2z)$$

em relação à base canónica, $\mathrm{E}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *S*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que apenas a função *T* é bijetiva e obtenha a sua função inversa.

2. [**2,0**] Considere a transformação linear $T:\mathrm{V}\to\mathrm{W}$, em que $\dim \mathrm{W}=m$. Sejam $\mathrm{Q}=\text{Base } N(T)=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\}$ e $\mathrm{Q}_1=\text{Base } T(\mathrm{V})=\{T(\vec{v}_{k+1}),T(\vec{v}_{k+2}),\ldots,T(\vec{v}_n)\}$.

a) Mostre que $\mathrm{S}=\mathrm{Q}\cup\{\vec{v}_{k+1},\vec{v}_{k+2},\ldots,\vec{v}_n\}$ é uma base para V.

b) Será *T* injetiva? Justifique. Recorrendo ao teorema da dimensão estabeleça uma condição para que *T* seja sobrejetiva.

GRUPO II

3. [**3,8**] Considere as transformações lineares definidas na questão **1.** e a base $\mathrm{V}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}=\{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$.

a) Usando o cálculo matricial, obtenha $m(T)_{\mathrm{E,V}}$, representação matricial de *T* em relação às bases E (domínio) e V (conjunto de chegada).

b) Usando preferencialmente a matriz obtida na alínea anterior, calcule $m(-TS)_{\mathrm{V,V}}$, representação matricial da função $-TS$ em relação à base V (domínio e conjunto de chegada).

....*(continua no verso)*

GRUPO III

4. [**3,2**] Seja a matriz real:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 2\beta & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Determine, indicando todas as operações efetuadas, os valores dos parâmetros α e β para os quais a matriz ***C*** é não singular.

b) Sejam ***A*** e ***B*** duas matrizes do tipo $n \times n$. Admita que ***B*** é obtida a partir de ***A*** por aplicação consecutiva das seguintes operações (OP) sobre as colunas (*C*) de ***A***:

OP1 : Multiplicação de C_1 e C_n de ***A*** por (-5).

OP2 : $2C_2 - C_3 \to C_3$; OP3 : $-C_2 + 2C_4 \to C_4$;

Relacione o determinante de ***B*** com o determinante de ***A***. Justifique.

GRUPO IV

5. [**5,5**] Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$m(T) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Seja o espaço próprio, associado a um dos valores próprios de $m(T)$, $\mathrm{E}(\alpha) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - y = 0 \ \wedge \ 2x + z = 0\right\}$ e o conjunto $\mathrm{B} = \left\{(2, \delta, 1), (\delta, 2, -2)\right\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Obtenha os valores próprios e os respetivos espaços próprios; indique, para cada um destes subespaços, uma base e a dimensão.

b) Verifique se é possível obter $\delta \in \mathbb{R}$, de modo que B possa ser incluído numa base de vetores próprios, U, para $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, determine essa base e as matrizes $m(T)_{\mathrm{U,U}}$ e $m(T)_{\mathrm{U,E}}$, justificando devidamente.