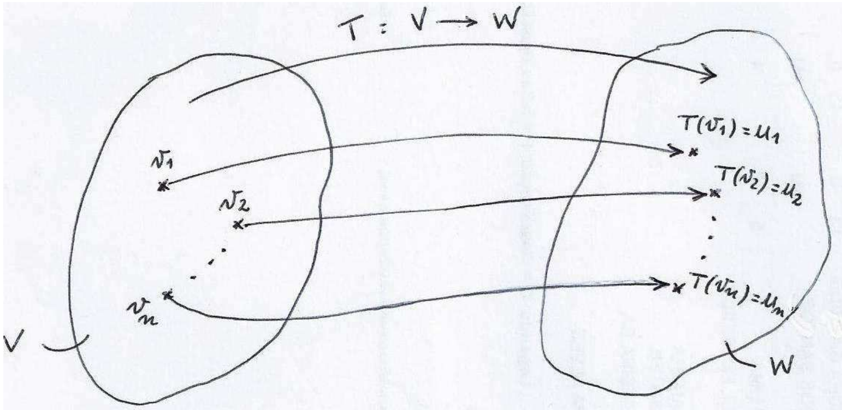
Transformações Lineares Definidas por Valores Prescritos

- Sejam V e W espaços lineares sobre um corpo Ω, tais que $\dim \mathrm{V} = n$ e $\dim \mathrm{W} = m$.



Teorema [3.17]: Sejam $\mathrm{S_V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma *base ordenada* para o espaço linear V ($\dim \mathrm{V} = n$) e $\mathrm{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ um conjunto de n elementos arbitrários do espaço linear W. Então, existe uma e uma só transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, tal que

$$T(v_k) = u_k \quad \text{com} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

que é definida do seguinte modo

$$\forall x \in \mathrm{V} \; : \; x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \quad \Rightarrow \quad T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \quad , \; x_i \in \Omega$$

Teorema [3.18]: Seja $\mathrm{S_V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma *base ordenada* para o espaço linear V ($\dim \mathrm{V} = n$). Se $S : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ e $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ são duas transformações lineares, tais que

$$S(v_k) = T(v_k) \quad \text{com} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

então $S = T$.

Exemplo 27 [3.46]: Obtenha a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida através das seguintes imagens

$$T(\vec{v}_1) = T(1,0,1) = (2,2,0,1)$$

$$T(\vec{v}_2) = T(0,1,-1) = (0,-1,1,0)$$

$$T(\vec{v}_3) = T(1,-1,0) = (0,1,1,-1)$$

Solução:

Notando que

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

o conjunto $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,0,1),(0,1,-1),(1,-1,0)\}$ é uma *base ordenada* para o *domínio* de *T*, $\mathbb{R}^3$; conclui-se, assim, que a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ encontra-se definida pelas imagens dadas.

Tendo em conta que

$$\begin{cases} T(1,0,1) = T(\vec{i}) + T(\vec{k}) = (2,2,0,1) \\ T(0,1,-1) = T(\vec{j}) - T(\vec{k}) = (0,-1,1,0) \\ T(1,-1,0) = T(\vec{i}) - T(\vec{j}) = (0,1,1,-1) \end{cases}$$

da resolução do sistema de equações, em ordem a $T(\vec{i})$, $T(\vec{j})$ e $T(\vec{k})$, resulta

$$\begin{cases} T(\vec{i}) = (1,1,1,0) \\ T(\vec{j}) = (1,0,0,1) \\ T(\vec{k}) = (1,1,-1,1) \end{cases}$$

A aplicação $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é definida pela seguinte *lei de transformação*

$$T(x,y,z) = T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = xT(\vec{i}) + yT(\vec{j}) + zT(\vec{k}) \iff$$

$$\iff T(x,y,z) = (x+y+z, x+z, x-z, y+z)$$

Representação Matricial de Transformações Lineares

- Qualquer transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, em que $\dim \mathrm{V} = n$ e $\dim \mathrm{W} = m$, admite sempre uma *representação matricial*, que *não é única*.

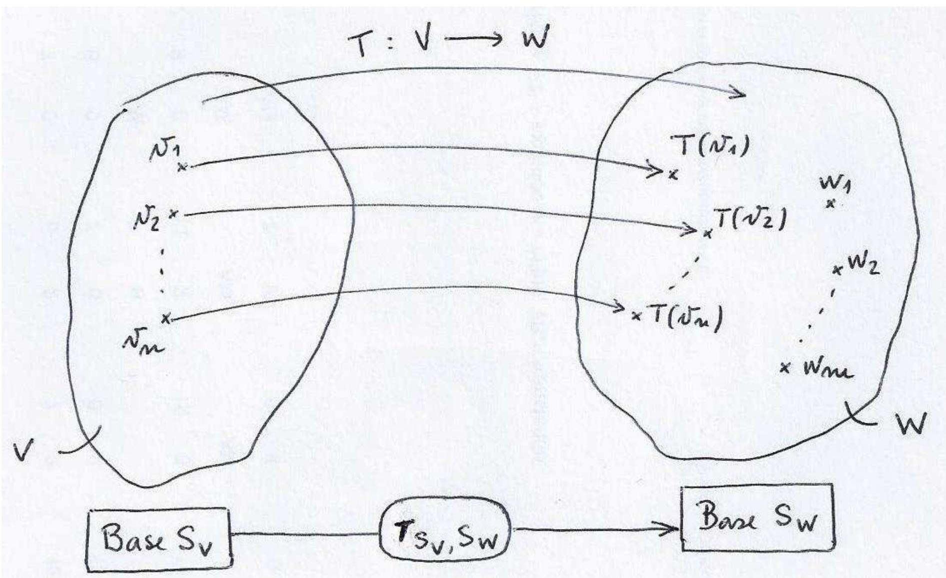
- Muitas das propriedades das transformações lineares podem ser relacionadas com as propriedades das matrizes que as representam.

Uma possível *representação matricial* da transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ poderá ser obtida recorrendo ao seguinte procedimento:

Passo I – Escolha das *bases ordenadas*

$$\mathrm{S_V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ \textit{para o domínio}, V}$$

$$\mathrm{S_W} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \text{ \textit{para o conjunto de chegada}, W}$$



Passo II – Obtenção das *imagens dos elementos da base* $\mathrm{S_V}$ (*domínio*) e *exprimi-las em relação à base* $\mathrm{S_W}$ (*conjunto de chegada*),

$$T(v_1) = t_{11}w_1 + t_{21}w_2 + \ldots + t_{m1}w_m = (t_{11}, t_{21}, \ldots, t_{m1})_{\mathrm{S_W}}$$

$$T(v_2) = t_{12}w_1 + t_{22}w_2 + \ldots + t_{m2}w_m = (t_{12}, t_{22}, \ldots, t_{m2})_{\mathrm{S_W}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$T(v_n) = t_{1n}w_1 + t_{2n}w_2 + \ldots + t_{mn}w_m = (t_{1n}, t_{2n}, \ldots, t_{mn})_{\mathrm{S_W}}$$

Passo III – *Colocar*, de forma ordenada, *numa matriz* (do tipo $m \times n$) todas as matrizes-coluna que contêm as coordenadas, em relação à base ordenada $\mathrm{S_W}$, das n imagens $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$,

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}} = m(T)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ T(v_1) & T(v_2) & \cdots & T(v_n) \end{matrix} \end{array} \in \mathrm{M}_{(m,n)}(\Omega)$$

A matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}} = m(T)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}} \in \mathrm{M}_{(m,n)}(\Omega)$ assim definida constitui a *representação matricial* da transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *em relação às bases ordenadas* $\mathrm{S_V}$ (*domínio*) e $\mathrm{S_W}$ (*conjunto de chegada*), em que:

i) O *número de linhas* da matriz é igual a $\dim \mathrm{W} = m$;

ii) O *número de colunas* da matriz é igual a $\dim \mathrm{V} = n$.

- Convém ainda notar o seguinte:

  i) A *representação matricial* da transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *não é única*, variando em função das bases ordenadas que são fixadas para V (base $\mathrm{S_V}$) e para W (base $\mathrm{S_W}$);

  ii) Sempre que não houver dúvida quanto às bases escolhidas para representar matricialmente a transformação linear ou, em particular, se forem consideradas as *bases canónicas* (*naturais*) para V e para W, é possível omitir os índices "$\mathrm{S_V}$" e "$\mathrm{S_W}$" na matriz;

  iii) No caso de $\mathrm{W} = \mathrm{V}$ e $\mathrm{S_W} = \mathrm{S_V}$ é possível escrever-se

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{S_V}} = m(T)_{\mathrm{S_V}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}_{\mathrm{S_V}} \in \mathrm{M}_{(n)}(\Omega)$$

- Conhecida uma representação matricial, $\boldsymbol{T}_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}} = m(T)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}}$, para a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, a imagem de qualquer elemento $x \in \mathrm{V}$, seja $y = T(x) \in \mathrm{W}$, pode ser encontrada a partir da equação matricial

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{S_W}} = \left[T\left(\boldsymbol{X}_{\mathrm{S_V}}\right)\right]_{\mathrm{S_W}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{S_V}} = m(T)_{\mathrm{S_V},\mathrm{S_W}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{S_V}}$$

  em que:

  i) $\boldsymbol{X}_{\mathrm{S_V}}$: *matriz-coluna* com as *coordenadas do elemento* $x \in \mathrm{V}$ *em relação à base* $\mathrm{S_V}$ (*domínio*);

  ii) $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{S_W}}$: *matriz-coluna* com as *coordenadas do elemento* $y = T(x) \in \mathrm{W}$ *em relação à base* $\mathrm{S_W}$ (*conjunto de chegada*).

Exemplo 28 **[3.47]**: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida através das imagens dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$T(\vec{i}) = T(1,0,0) = (1,1,1,0)$$

$$T(\vec{j}) = T(0,1,0) = (1,0,0,1)$$

$$T(\vec{k}) = T(0,0,1) = (1,1,-1,1)$$

a) Obtenha a *matriz* $\boldsymbol{T} = m(T)$, que representa T em relação às *bases canónicas* para $\mathbb{R}^3$ e para $\mathbb{R}^4$.

b) Escreva a *lei de transformação* para T associada à representação matricial obtida na alínea anterior.

c) Determine a imagem de $\vec{h} = (1,-1,2)$ através da transformação linear T.

Solução:

a) A *representação matricial* de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ em relação às *bases canónicas* para $\mathbb{R}^3$ e para $\mathbb{R}^4$ é

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Recorrendo à matriz obtida em a), a imagem do vector genérico do domínio $\vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é

$$m(T)\,\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ x-z \\ y+z \end{bmatrix}$$

A *lei de transformação* de T associada à matriz $\boldsymbol{T} = m(T)$ é, então,

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{, em que } T(x,y,z) = (x+y+z, x+z, x-z, y+z)$$

estando definida em relação às *bases canónicas* para $\mathbb{R}^3$ e para $\mathbb{R}^4$.

c) A imagem do vector $\vec{h} = (1,-1,2)$ é obtida a partir da *lei de transformação* definida anteriormente, ou seja,

$$T(\vec{h}) = T(1,-1,2) = (2,3,-1,1)$$

ou, em alternativa, recorrendo à respectiva *representação matricial*

$$T(\vec{h}) = T\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (2,3,-1,1)$$

Exemplo 29 **[3.50]**: Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida através das imagens dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} T(\vec{i}) &= T(1,0,0) = (3,0) \\ T(\vec{j}) &= T(0,1,0) = (0,1) \\ T(\vec{k}) &= T(0,0,1) = (-2,1) \end{aligned} \tag{1}$$

Sejam $E_3 = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ e $E_2 = \{\vec{i}_1,\vec{j}_1\} = \{(1,0),(0,1)\}$ as *bases canónicas* para os espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Considere ainda as bases

$$V = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\} = \{(1,-1,0),(0,1,1),(1,0,-1)\} \quad \text{e} \quad W = \{\vec{w}_1,\vec{w}_2\} = \{(1,1),(1,-1)\}$$

Determine:

a) A *matriz* $\boldsymbol{T} = m(T)$, que representa T em relação às *bases* E_3 e E_2 e escreva a respectiva lei de transformação.

b) As *expressões de mudança de coordenadas*, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, entre as bases E_3 e V.

c) As *expressões de mudança de coordenadas*, no espaço linear $\mathbb{R}^2$, entre as bases E_2 e W.

d) A *matriz* $\boldsymbol{T}_{V,E_2} = m(T)_{V,E_2}$, que representa T em relação às *bases* V e E_2 e escreva a respectiva lei de transformação.

e) A *matriz* $\boldsymbol{T}_{E_3,W} = m(T)_{E_3,W}$, que representa T em relação às *bases* E_3 e W e escreva a respectiva lei de transformação.

f) A *matriz* $\boldsymbol{T}_{V,W} = m(T)_{V,W}$, que representa T em relação às *bases* V e W e escreva a respectiva lei de transformação.

g) A imagem de $\vec{g} = (1,2,-1)$ recorrendo às representações matriciais obtidas nas alíneas anteriores e confirme a igualdade dos resultados encontrados.

Solução:

a) A *representação matricial* de T em relação às *bases* E_3 e E_2 é

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

A imagem do vector genérico do domínio $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, expresso em relação à base E_3, é

$$m(T)\ \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2z \\ y + z \end{bmatrix}$$

A *lei de transformação* de T em relação às bases E_3 e E_2 é

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \text{ em que } T(x, y, z) = (3x - 2z, y + z) \tag{3}$$

b) Designe-se por

$$\vec{x} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

as *coordenadas* do elemento genérico de $\mathbb{R}^3$ *em relação à base* E_3 e por

$$\vec{x}_V = (x_1, y_1, z_1)_V = x_1\vec{v}_1 + y_1\vec{v}_2 + z_1\vec{v}_3$$

as *coordenadas* do elemento genérico de $\mathbb{R}^3$ *em relação à base* V. Daqui resulta

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1(1,-1,0) + y_1(0,1,1) + z_1(1,0,-1) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (x_1 + z_1, -x_1 + y_1, y_1 - z_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + z_1 = x \\ -x_1 + y_1 = y \\ y_1 - z_1 = z \end{cases} \quad (V \to E_3) \tag{4}$$

As *expressões* (4) definem a *mudança de coordenadas* dos vectores do espaço linear $\mathbb{R}^3$, *da base* V *para a base* (canónica) E_3.

Resolvendo o sistema de equações (4) em ordem a x_1, y_1 e z_1, resulta

$$\begin{cases} x_1 = (x - y + z)/2 \\ y_1 = (x + y + z)/2 \\ z_1 = (x + y - z)/2 \end{cases} \quad (E_3 \to V) \tag{5}$$

As *expressões* (5) definem a *mudança de coordenadas* dos vectores do espaço linear $\mathbb{R}^3$, *da base* (canónica) E_3 *para a base* V.

c) Designe-se por

$$\vec{x} = (x, y) = x\vec{i}_1 + y\vec{j}_1$$

as *coordenadas* do elemento genérico de $\mathbb{R}^2$ *em relação à base* E_2 e por

$$\vec{x}_W = (x_1, y_1)_W = x_1\vec{w}_1 + y_1\vec{w}_2$$

as *coordenadas* do elemento genérico de $\mathbb{R}^2$ *em relação à base* W. Daqui resulta

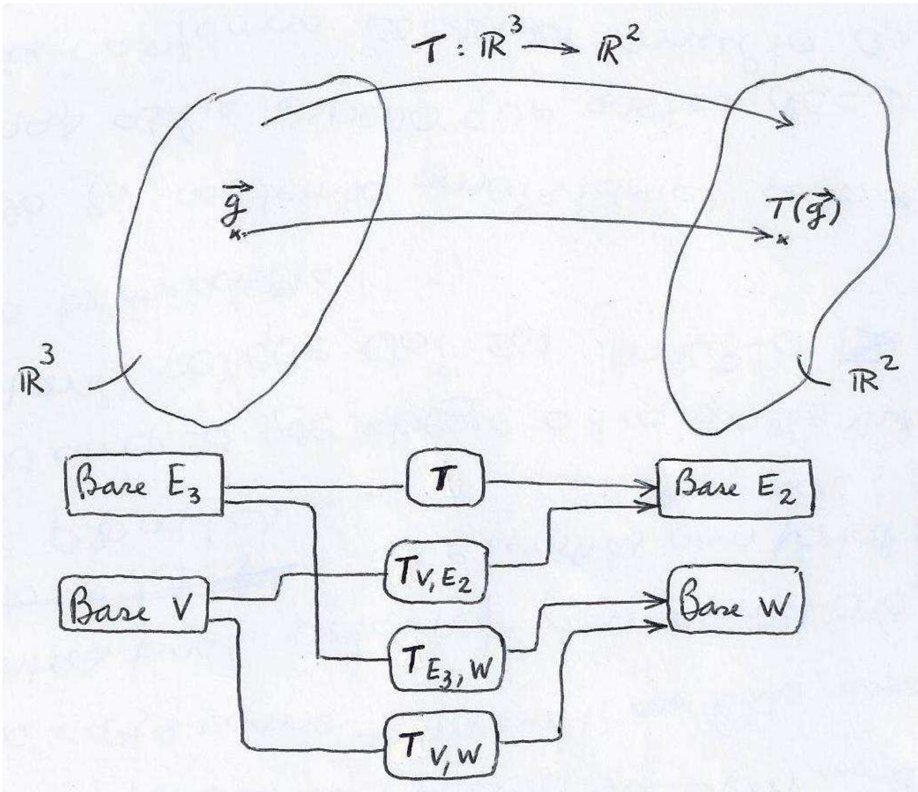
$$x\vec{i}_1 + y\vec{j}_1 = x_1(1,1) + y_1(1,-1) \iff$$

$$\iff (x, y) = (x_1 + y_1, x_1 - y_1) \iff \begin{cases} x_1 + y_1 = x \\ x_1 - y_1 = y \end{cases} \quad (W \to E_2) \tag{6}$$

As *expressões* (6) definem a *mudança de coordenadas* dos vectores do espaço linear $\mathbb{R}^2$, *da base* W *para a base* (canónica) E_2.
Resolvendo o sistema de equações (6) em ordem a x_1 e y_1, obtém-se

$$\begin{cases} x_1 = (x + y)/2 \\ y_1 = (x - y)/2 \end{cases} \quad (E_2 \to W) \tag{7}$$

As *expressões* (7) definem a *mudança de coordenadas* dos vectores do espaço linear $\mathbb{R}^2$, *da base* (canónica) E_2 *para a base* W.



d) As colunas da matriz $\boldsymbol{T}_{V,E_2} = m(T)_{V,E_2}$ deverão conter as coordenadas das imagens dos vectores da base V em relação à base E_2. Recorrendo a (2), ou (3), tem-se

$$\begin{aligned} T(\vec{v}_1) &= T(1,-1,0) = (3,-1) \\ T(\vec{v}_2) &= T(0,1,1) = (-2,2) \\ T(\vec{v}_3) &= T(1,0,-1) = (5,-1) \end{aligned} \tag{8}$$

e, portanto,

$$\boldsymbol{T}_{V,E_2} = m(T)_{V,E_2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{V,E_2}$$

A imagem do vector genérico do domínio $\vec{x}_V = (x_1, y_1, z_1)_V \in \mathbb{R}^3$, expresso em relação à base V, é

$$m(T)_{V,E_2}\ \boldsymbol{X}_V = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{V,E_2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2y_1 + 5z_1 \\ -x_1 + 2y_1 - z_1 \end{bmatrix}$$

A *lei de transformação* de T em relação às bases V e E_2 é

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, em que $T(x_1,y_1,z_1)_V = (3x_1 - 2y_1 + 5z_1, -x_1 + 2y_1 - z_1)$ (9)

e) As colunas da matriz $\boldsymbol{T}_{E_3,W} = m(T)_{E_3,W}$ deverão conter as coordenadas das imagens dos vectores da base E_3 em relação à base W. Recorrendo a (1) e a (7), tem-se

$$T(\vec{i}) = T(1,0,0) = (3,0) \ \Rightarrow\ \left[T(\vec{i})\right]_W = \frac{1}{2}(3,3)_W$$

$$T(\vec{j}) = T(0,1,0) = (0,1) \ \Rightarrow\ \left[T(\vec{j})\right]_W = \frac{1}{2}(1,-1)_W$$

$$T(\vec{k}) = T(0,0,1) = (-2,1) \ \Rightarrow\ \left[T(\vec{k})\right]_W = \frac{1}{2}(-1,-3)_W$$

e, portanto,

$$\boldsymbol{T}_{E_3,W} = m(T)_{E_3,W} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}_{E_3,W}$$

A imagem do vector genérico do domínio $\vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, expresso em relação à base E_3, é

$$m(T)_{E_3,W}\ \boldsymbol{X} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}_{E_3,W} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3x + y - z \\ 3x - y - 3z \end{bmatrix}_W$$

A *lei de transformação* de T em relação às bases E_3 e W é

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, em que $T(x,y,z) = \frac{1}{2}(3x + y - z, 3x - y - 3z)_W$ (10)

f) As colunas da matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,W}} = m(T)_{\mathrm{V,W}}$ deverão conter as coordenadas das imagens dos vectores da base V em relação à base W. Recorrendo a (8) e a (7), tem-se

$$T(\vec{v}_1) = T(1,-1,0) = (3,-1) \;\Rightarrow\; [T(\vec{v}_1)]_{\mathrm{W}} = (1,2)_{\mathrm{W}}$$

$$T(\vec{v}_2) = T(0,1,1) = (-2,2) \;\Rightarrow\; [T(\vec{v}_2)]_{\mathrm{W}} = (0,-2)_{\mathrm{W}}$$

$$T(\vec{v}_3) = T(1,0,-1) = (5,-1) \;\Rightarrow\; [T(\vec{v}_3)]_{\mathrm{W}} = (2,3)_{\mathrm{W}}$$

e, portanto,

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,W}} = m(T)_{\mathrm{V,W}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{\mathrm{V,W}}$$

A imagem do vector genérico do domínio $\vec{x}_{\mathrm{V}} = (x_1, y_1, z_1)_{\mathrm{V}} \in \mathbb{R}^3$, expresso em relação à base V, é

$$m(T)_{\mathrm{V,W}}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{\mathrm{V,W}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\mathrm{V}} = \begin{bmatrix} x_1 + 2z_1 \\ 2x_1 - 2y_1 + 3z_1 \end{bmatrix}_{\mathrm{W}}$$

A *lei de transformação* de T em relação às bases V e W é

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{, em que } T(x_1, y_1, z_1)_{\mathrm{V}} = (x_1 + 2z_1, 2x_1 - 2y_1 + 3z_1)_{\mathrm{W}} \qquad (11)$$

g) A imagem do vector $\vec{g} = (1,2,-1)$ expressa em relação à base E_2 (para $\mathbb{R}^2$) pode ser obtida a partir das matrizes $\boldsymbol{T} = m(T)$ e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,E_2}} = m(T)_{\mathrm{V,E_2}}$. No primeiro caso, obtém-se

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

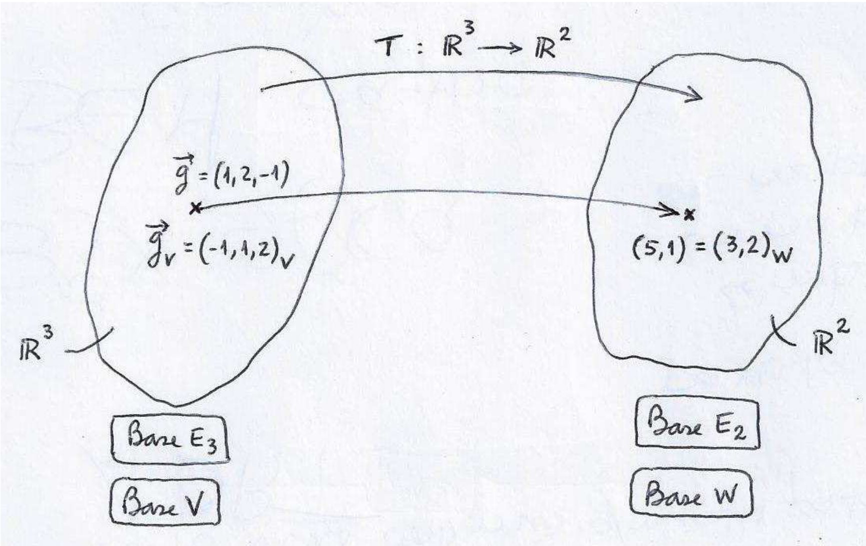
No segundo caso, o recurso a (5) permite escrever

$$\vec{g} = (1,2,-1) \;\Rightarrow\; \vec{g}_{\mathrm{V}} = (-1,1,2)_{\mathrm{V}}$$

de que resulta

$$T\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix}3 & -2 & 5\\-1 & 2 & -1\end{bmatrix}_{V,E_2}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$

Confirma-se o resultado atrás encontrado.



De modo idêntico, a imagem do vector $\vec{g} = (1,2,-1)$ expressa em relação à base W (para $\mathbb{R}^2$) pode ser obtida a partir das matrizes $\boldsymbol{T}_{E_3,W} = m(T)_{E_3,W}$ e $\boldsymbol{T}_{V,W} = m(T)_{V,W}$. Tem-se, então,

$$\left[T\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\right]_W = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\3 & -1 & -3\end{bmatrix}_{E_3,W}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}_W = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_W$$

e, por outro lado,

$$\left[T\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}_V\right]_W = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\2 & -2 & 3\end{bmatrix}_{V,W}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_W$$

Pode-se verificar que as imagens atrás obtidas representam o mesmo vector do conjunto de chegada, estando expressas em relação a bases distintas.

Com efeito, recorrendo às *expressões de mudança de coordenadas* (6) e (7), obtém-se

$$(5,1) = (3,2)_W$$

Convém referir que era, ainda, possível obter qualquer uma das imagens atrás encontradas, considerando, em alternativa às representações matriciais, as *leis de transformação* para *T* definidas em (3), (9), (10) e (11).