FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso: MIEM / MIEGI | Data: / 10 / 20

Disciplina: Álgebra Linear e Geometria Analítica | Ano: 1º | Semestre: 1º

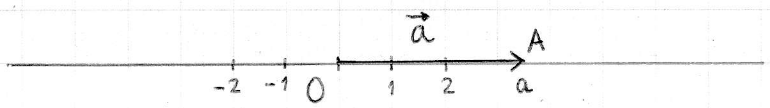
Nome: José Augusto Trigo Barbosa (Regente)

Espaço reservado para o avaliador

Notas de apoio ao Capítulo 1. do manual: "Noções sobre Álgebra Linear".

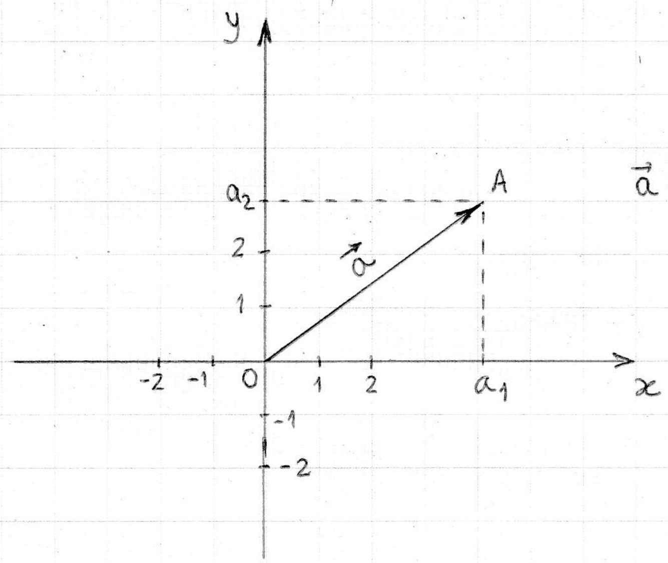
$\mathbb{R}$

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a)$



pág 1.2

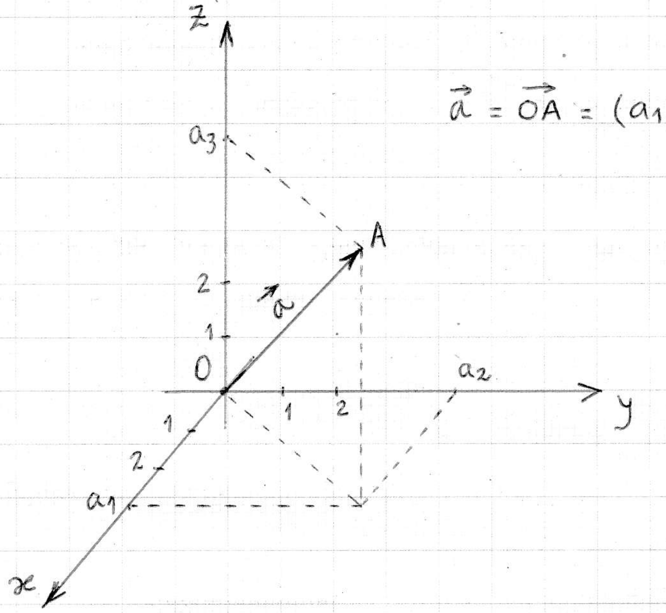
$\mathbb{R}^2$



$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$

pág 1.2

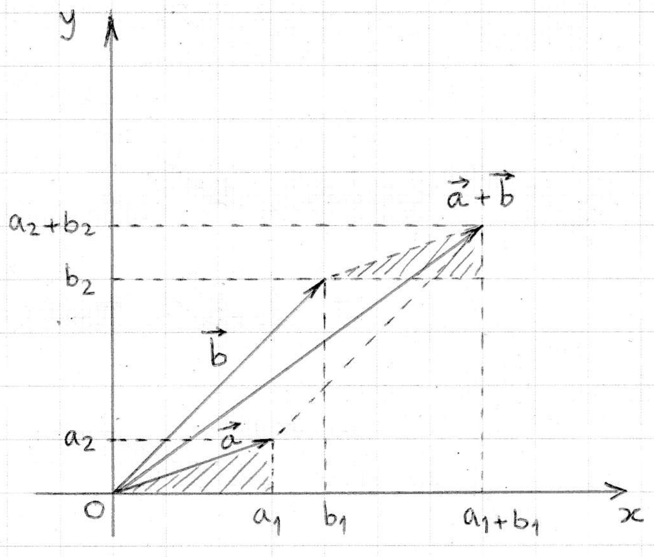
$\mathbb{R}^3$



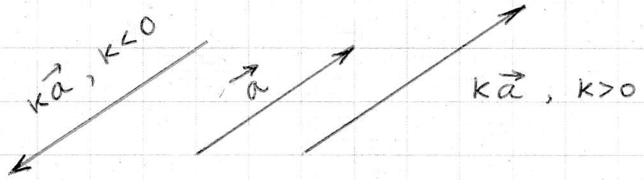
$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$

<u>pág 1.3</u>

$\mathbb{R}^2$



<u>pág 1.4</u>



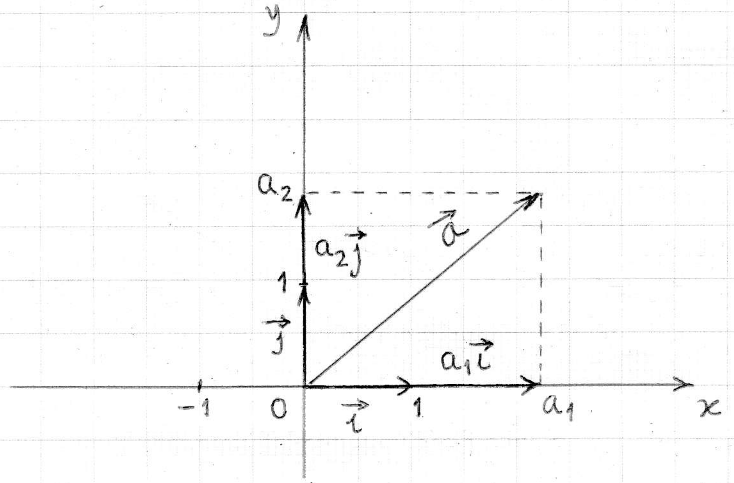
Se $k=0$, $k\vec{a} = \vec{0}$ (vector nulo)

<u>pág 1.5</u>

Vectores coordenados unitários - $\mathbb{R}^2$

$\vec{i} = (1,0)$

$\vec{j} = (0,1)$



$\|\vec{i}\| = 1 \quad , \quad \|\vec{j}\| = 1 \quad , \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow$ Vectores ortonormados

versores

ortogonais

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ é uma combinação linear dos versores $\vec{i}$ e $\vec{j}$

NOTAS COMPLEMENTARES :

i) Existe uma diversidade de conjuntos de vectores que são bases para o espaço $\mathbb{R}^2$.

ii) Todas as bases para o espaço $\mathbb{R}^2$ são constituídas por 2 vectores que deverão ser :
- não nulos ;
- não colineares (não paralelos).

iii) A cada base para o espaço $\mathbb{R}^2$ é possível associar um referencial.

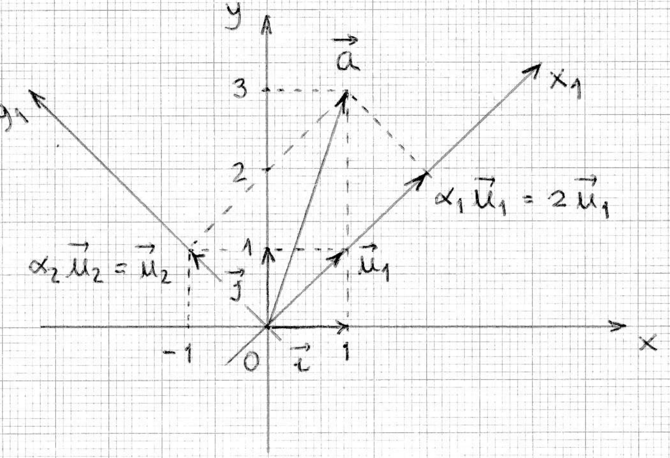
pág. 1.7/8

iv) Sempre que se registe uma alteração na base (referencial) que representa o espaço $\mathbb{R}^2$, verifica-se uma alteração nas coordenadas de um vector (a combinação linear altera-se).

$\vec{a} = (1,3) = \vec{i} + 3\vec{j}$ Base $E = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ (ortonormal)
Referencial: Oxy

Seja a base $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{(1,1), (-1,1)\}$ (ortogonal)
Referencial: Ox_1y_1

Quais são as coordenadas de $\vec{a}$ em relação à base U?



$\vec{a}$ é decomposto nas direcções $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ usando a regra do rectângulo (projecção ortogonal)

$$\vec{a} = (1,3) = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(-1,1) =$$
$$= (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$\vec{a} = (1,3) = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (2,1)_U$$

Em alternativa, como U é um conjunto ortogonal:

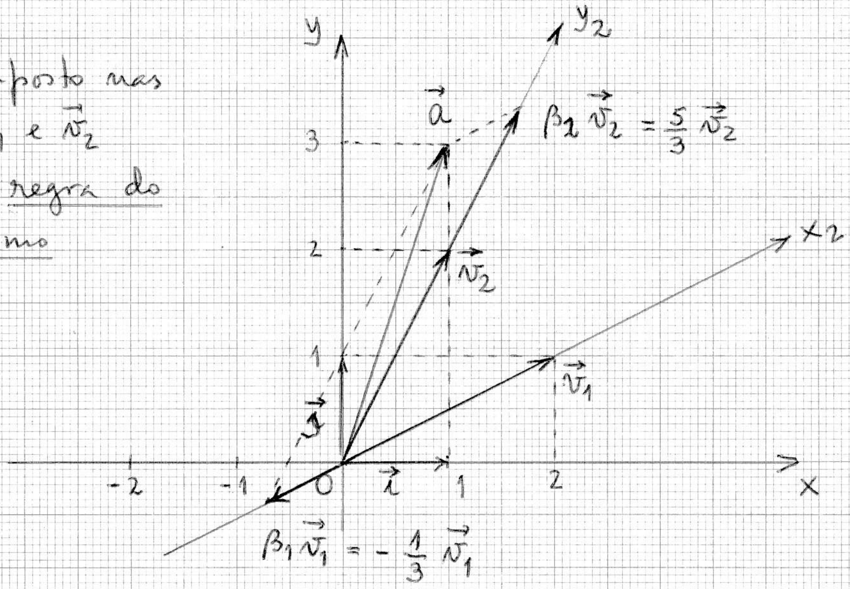
$$\alpha_1 \vec{u}_1 = \overrightarrow{proj}_{\vec{u}_1} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 = \frac{4}{2} \vec{u}_1 = 2\vec{u}_1 \quad \checkmark$$

$$\alpha_2 \vec{u}_2 = \overrightarrow{proj}_{\vec{u}_2} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2} \vec{u}_2 = \frac{2}{2} \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \quad \checkmark$$

Seja a base $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{(2,1), (1,2)\}$ (não ortogonal)
Referencial : $0x_2y_2$

Quais as coordenadas de $\vec{a}$ em relação à base V ?

$\vec{a}$ é decomposto nas direcções $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ usando a regra do paralelogramo



$$\vec{a} = (1,3) = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 = \beta_1 (2,1) + \beta_2 (1,2) =$$
$$= (2\beta_1 + \beta_2 , \beta_1 + 2\beta_2)$$

$$\begin{cases} 2\beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_1 + 2\beta_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = -1/3 \\ \beta_2 = 5/3 \end{cases}$$

$$\vec{a} = (1,3) = -\frac{1}{3}\vec{v}_1 + \frac{5}{3}\vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)_V$$

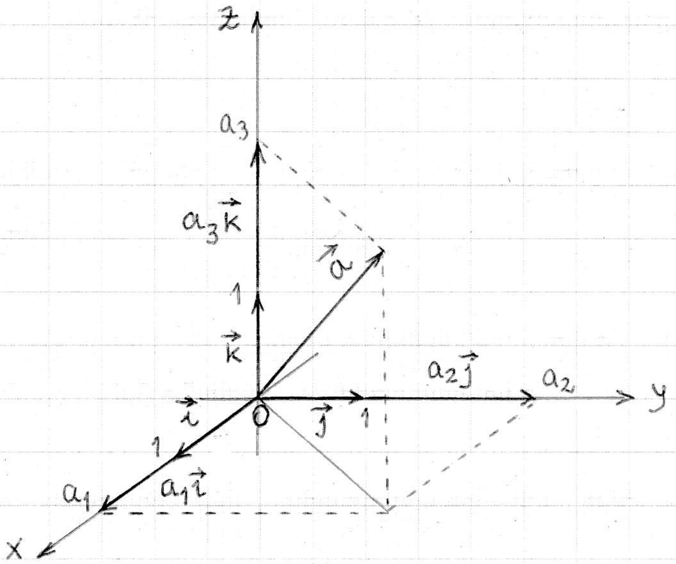
Uma vez que a base V não é um conjunto ortogonal, não é possível resolver o problema recorrendo à projecção ortogonal entre vectores.

Vectores coordenados unitários - $\mathbb{R}^3$

$\vec{i} = (1,0,0)$

$\vec{j} = (0,1,0)$

$\vec{k} = (0,0,1)$



$$\left.\begin{array}{ll} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 & \text{(versores)} \\ \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 & \text{(ortogonais)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{vectores ortonormados}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) =$$

$$= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \Rightarrow$$ $\vec{a}$ é uma combinação linear dos versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

NOTAS COMPLEMENTARES:

i) Existe uma diversidade de conjuntos de vectores que são bases para o espaço $\mathbb{R}^3$.

ii) Todas as bases para o espaço $\mathbb{R}^3$ são constituídas por 3 vectores que deverão ser:
- não nulos;
- não colineares;
- não complanares.

iv) Sempre que se registe uma alteração na base (referencial) que representa o espaço $\mathbb{R}^3$, verifica-se uma alteração nas coordenadas de um vector (a combinação linear altera-se).

$\vec{a} = (2, 3, -2) = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$; Base $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (ortonormal)
Referencial: $0xyz$

Seja a base $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(1,-1,1), (1,0,-1), (1,2,1)\}$ (ortogonal)
Referencial: $0x_1y_1z_1$

Quais são as coordenadas de $\vec{a}$ em relação à base U?

Recorrendo à combinação linear

$$\vec{a} = (2,3,-2) = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 =$$
$$= \alpha_1 (1,-1,1) + \alpha_2 (1,0,-1) + \alpha_3 (1,2,1) =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + 2\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

$$\vec{a} = (2,3,-2) = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (-1, 2, 1)_U$$

Em alternativa, como U é um conjunto ortogonal:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 = \overrightarrow{proj}_{\vec{u}_1} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 = \frac{-3}{3} \vec{u}_1 = -\vec{u}_1 \checkmark$$

$$\alpha_2 \vec{u}_2 = \overrightarrow{proj}_{\vec{u}_2} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2} \vec{u}_2 = \frac{4}{2} \vec{u}_2 = 2\vec{u}_2 \checkmark$$

$$\alpha_3 \vec{u}_3 = \overrightarrow{proj}_{\vec{u}_3} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|^2} \vec{u}_3 = \frac{6}{6} \vec{u}_3 = \vec{u}_3 \checkmark$$

pág. 1.9/10

Combinação linear de vectores

Exemplo 4 [1.37]

Seja $S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$

$\vec{a}_3$ é combinação linear dos elementos de S_1?

Considerando a combinação linear

$$\vec{a}_3 = (1,-1,0) = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \alpha_1 (1,1,1) + \alpha_2 (1,-3,-1) =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - 3\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$$

resolva-se o sistema de 3 equações lineares a 2 incógnitas (α_1 e α_2),

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Recorrendo ao método de eliminação de Gauss

$$\begin{array}{r} \\ \\ L_2 - L_1 \rightarrow \\ L_3 - L_1 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \leftarrow L_2 - 2L_3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

sistema com 2 equações principais, 2 incógnitas principais e 1 equação não principal (compatível)

O sistema é <u>possível</u> (o conjunto S_1 gera o vector $\vec{a}_3$) e <u>determinado</u> ($\vec{a}_3$ é gerado de forma única pelo conjunto S_1) e tem a solução:

$$\alpha_2 = 1/2 \quad \text{e} \quad \alpha_1 = 1 - \alpha_2 = 1/2$$

pág. 1.13

Conclui-se que $\vec{a}_3$ é combinação linear (que é única) dos elementos do conjunto S_1, isto é,

$$\vec{a}_3 = (1,-1,0) = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2$$

$\vec{a}_4$ é combinação linear dos elementos de S_1?

Seguindo um procedimento análogo ao considerado para o vector anterior

$$\vec{a}_4 = (2,-1,1) = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \alpha_1 (1,1,1) + \alpha_2 (1,-3,-1) =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - 3\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$$

Então

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

Sistema com 2 equações principais, 2 incógnitas principais e 1 equação não principal (incompatível)

Neste caso o sistema de equações é <u>impossível</u>, pelo que o conjunto S_1 não gera o vector $\vec{a}_4 = (2,-1,1)$, ou seja, o vector $\vec{a}_4$ não é combinação linear dos elementos do conjunto S_1.

NOTAS COMPLEMENTARES:

i) É evidente que o conjunto $S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} \subset \mathbb{R}^3$ nunca poderá gerar todos os vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Como já foi referido anteriormente, todas as bases do espaço $\mathbb{R}^3$ deverão ser constituídas por 3 vectores, que deverão satisfazer ~~pág 1.13~~

um conjunto de propriedades (assunto que será abordado mais à frente).

ii) Portanto, é natural que haja vectores que serão combinações lineares dos elementos do conjunto S_1 (por exemplo, o vector $\vec{a}_3 = (1,-1,0)$) e outros que não o serão (por exemplo, o vector $\vec{a}_4 = (2,-1,1)$).

iii) O objectivo que se coloca neste momento consiste em determinar o conjunto de todos os vectores que são gerados pelo conjunto S_1, ou seja, que são combinações lineares dos elementos do conjunto S_1 (assunto que será abordado na secção seguinte).

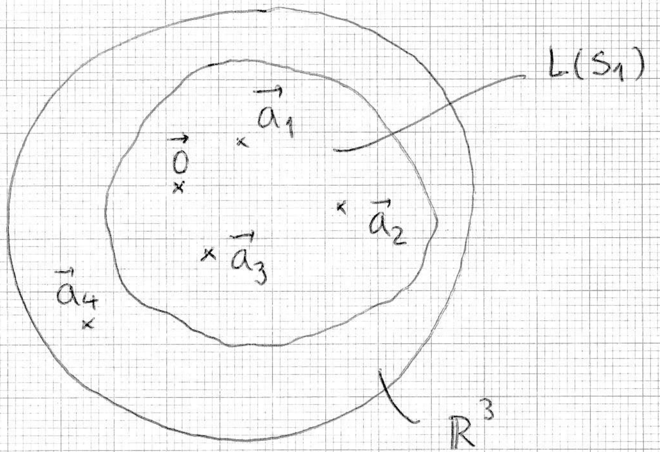
iv) Como veremos, o conjunto de todos os vectores que são gerados pelo conjunto S_1 representa, em termos geométricos, um plano do espaço $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem do referencial (o vector nulo é sempre combinação linear dos elementos de qualquer conjunto não vazio).

$\vec{0} \in L(S_1)$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in L(S_1)$

$\vec{a}_3 \in L(S_1)$

$\vec{a}_4 \notin L(S_1)$



O conjunto de todos os vectores que são gerados pelo conjunto S_1 é designado por <u>subespaço gerado por S_1</u> e representa-se por <u>$L(S_1)$</u>.

Subespaço gerado por um conjunto de vectores

Seja $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$

$$L(S) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \lambda_1 \vec{s}_1 + \lambda_2 \vec{s}_2 + \dots + \lambda_k \vec{s}_k ,\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{x}_i ,\ \lambda_i \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

PROPRIEDADES:

iii) $\vec{0} \in L(S)$

Considerando $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, obtém-se

$\vec{x} = 0\,\vec{s}_1 + 0\,\vec{s}_2 + \dots + 0\,\vec{s}_k = \vec{0} \in L(S)$

iv) Por exemplo, $\vec{s}_2 \in L(S)$

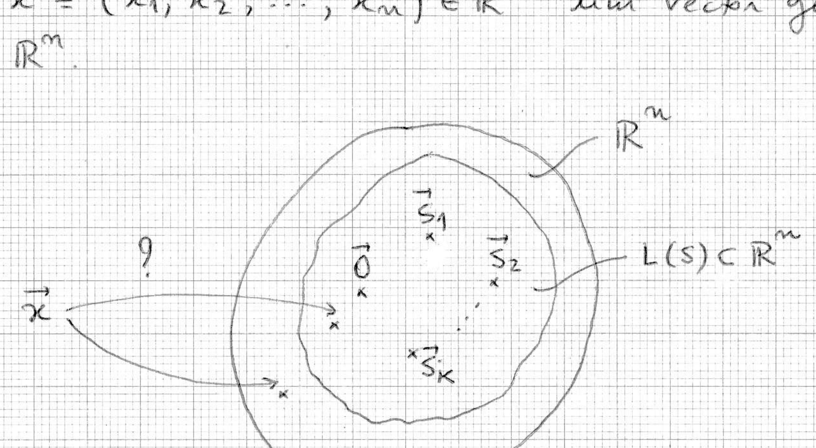
Considerando $\lambda_2 = 1$ e os restantes coeficientes da combinação linear iguais a zero, obtém-se

$\vec{x} = 0\,\vec{s}_1 + 1\,\vec{s}_2 + \dots + 0\,\vec{s}_k = \vec{s}_2 \in L(S)$

pág 1.14

CÁLCULO DE L(S)

Seja $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ um vector genérico do espaço $\mathbb{R}^n$.



pág. 1.15

Considere-se a combinação linear

$$\lambda_1 \vec{s}_1 + \lambda_2 \vec{s}_2 + \dots + \lambda_k \vec{s}_k = \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

sistema de <u>m equações lineares</u> (tantas quantas o número de coordenadas dos vectores) a <u>k incógnitas</u> ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$), onde os termos independentes ($x_1, x_2, \dots, x_m$) não estão definidos (sistema condicionado)

Resolução do sistema

<u>Sistema Impossível</u>

O sistema não tem solução para as incógnitas, logo

$\vec{x}$ não é combinação linear dos elementos do conjunto S e

$\underline{\vec{x} \notin L(S)}$

<u>Sistema Possível</u>

É possível encontrar, pelo menos, uma solução para as incógnitas, logo

$\vec{x}$ é combinação linear dos elementos do conjunto S e

$\underline{\vec{x} \in L(S)}$

<u>Determinado</u>

Só existe <u>uma solução</u> para as incógnitas, logo

$\vec{x}$ <u>é gerado de forma única</u> pelo conjunto S

<u>Indeterminado</u>

Existe uma <u>infinidade de soluções</u> para as incógnitas, logo

$\vec{x}$ é <u>gerado de forma não única</u> pelo conjunto S

<u>pág. 1.15</u>

Exemplo 5 [1.40]

Seja $S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Cálculo de $L(S_1)$, subespaço gerado pelo conjunto S_1.

Seja $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ um vector genérico do espaço $\mathbb{R}^3$.

Considerando a combinação linear

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (1,1,1) + \lambda_2 (1,-3,-1) = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - 3\lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) = (x_1, x_2, x_3)$$

e resolvendo o sistema de 3 equações lineares a 2 incógnitas (λ_1 e λ_2), obtém-se

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x_1 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 = x_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -3 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -4 & x_2 - x_1 \\ 0 & -2 & x_3 - x_1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow -2L_3 + L_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -4 & x_2 - x_1 \\ \hline 0 & 0 & -2x_3 + x_1 + x_2 \end{array}\right] \end{array}$$

Se $x_1 + x_2 - 2x_3 \neq 0$, o sistema é <u>impossível</u> e $\vec{x} \notin L(S_1)$

Se $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, o sistema é <u>possível</u> e $\vec{x} \in L(S_1)$.
Além disso, tendo 2 equações principais e 2 incógnitas principais (λ_1 e λ_2), o sistema é <u>possível e determinado</u>, tendo como solução:

pág. 1.16

$$\begin{cases} \lambda_1 = x_1 - \lambda_2 \\ -4\lambda_2 = x_2 - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{3x_1 + x_2}{4} \\ \lambda_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{4} \end{cases} \qquad (1)$$

Assim, $\vec{x} \in L(S_1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1 + 2x_3$ e, portanto,

$$L(S_1) = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \} =$$

$$= \{ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = -x_1 + 2x_3 \} =$$

$$= \{ \vec{x} = (x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3 \} \subset \mathbb{R}^3$$

Convém notar que:

- $\vec{0} \in L(S_1)$
- $\vec{a}_1 \in L(S_1)$, já que $1 + 1 - 2(1) = 0$ ✓
- $\vec{a}_2 \in L(S_1)$, já que $1 - 3 - 2(-1) = 0$ ✓

Verifique que $\vec{a}_3 = (1, -1, 0) \in L(S_1)$:

$\vec{a}_3 \in L(S_1)$, já que $1 - 1 - 2(0) = 0$ ✓

Verifique que $\vec{a}_4 = (2, -1, 1) \notin L(S_1)$:

$\vec{a}_4 \notin L(S_1)$, já que $2 - 1 - 2(1) = -1 \neq 0$ ✓

A solução encontrada para o sistema de equações lineares expressa em (1) permite ainda escrever o vector $\vec{a}_3$ como combinação linear dos elementos que constituem o conjunto S_1:

$\vec{a}_3 = (1, -1, 0) \in L(S_1)$ e $\lambda_1 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{1+1}{4} = \dfrac{1}{2}$

pelo que

$$\vec{a}_3 = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2$$

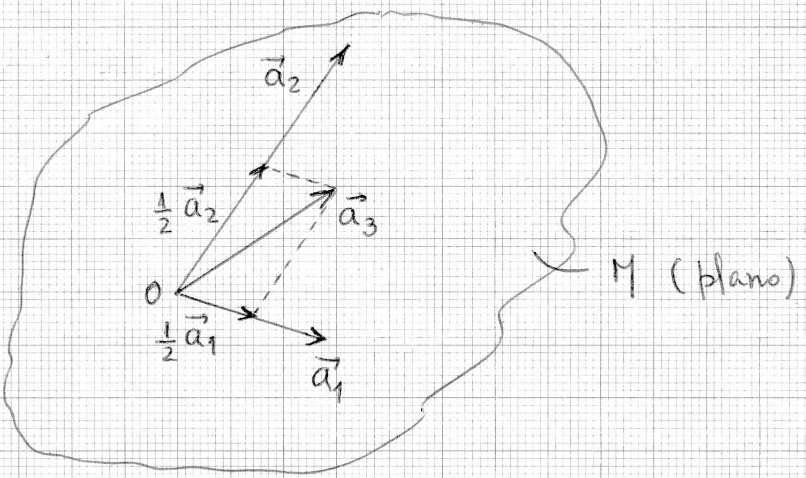
confirmando-se o resultado encontrado no exemplo 4. pág. 1.16

NOTAS COMPLEMENTARES:

i) O subespaço gerado pelo conjunto S_1

$$L(S_1) = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \}$$

representa, em termos geométricos, o plano M com a equação cartesiana $x + y - 2z = 0$ (passa na origem do referencial) e que tem $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ como vectores geradores.



ii). É evidente que o plano M admite uma infinidade de conjuntos de vectores geradores; qualquer conjunto de 2 vectores não nulos e não colineares situados no plano M é um conjunto de vectores geradores do plano M. Esta situação é também válida para o subespaço $L(S_1)$.

Exemplo 6 [1.43]

Seja $S_2 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6\} = \{(2,0,1), (0,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Cálculo de $L(S_2)$, subespaço gerado pelo conjunto S_2.

Seja $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ um vector genérico do espaço $\mathbb{R}^3$.

Considerando a combinação linear

$$\alpha_1 \vec{a}_5 + \alpha_2 \vec{a}_6 = \vec{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 (2,0,1) + \alpha_2 (0,2,1) = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (x_1, x_2, x_3)$$

e resolvendo o sistema de 3 equações lineares a 2 incógnitas (α_1 e α_2), obtém-se

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = x_1 \\ 2\alpha_2 = x_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 2 & 2x_3 - x_1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ \hline 0 & 0 & 2x_3 - x_1 - x_2 \end{array}\right] \end{array}$$

Se $2x_3 - x_1 - x_2 \neq 0$, o sistema é <u>impossível</u> e $\vec{x} \notin L(S_2)$.

Se $2x_3 - x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, o sistema é <u>possível</u> e $\vec{x} \in L(S_2)$. Além disso, tendo 2 equações principais e 2 incógnitas principais (α_1 e α_2), o sistema é <u>possível e determinado</u>, tendo como solução:

pág. 1.16

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = x_1 \\ 2\alpha_2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{x_1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{x_2}{2} \end{cases}$$

Assim, $\vec{x} \in L(S_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1 + 2x_3$ e, portanto,

$$L(S_2) = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \} =$$

$$= \{ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = -x_1 + 2x_3 \} =$$

$$= \{ \vec{x} = (x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3 \} \subset \mathbb{R}^3$$

Há a notar o seguinte:

i) $\vec{0} \in L(S_2)$

ii) $\vec{a}_5 \in L(S_2)$, já que $2 + 0 - 2(1) = 0$ ✓

$\vec{a}_6 \in L(S_2)$, já que $0 + 2 - 2(1) = 0$ ✓

iii) O subespaço gerado pelo conjunto S_2 coincide com o subespaço gerado pelo conjunto S_1 (calculado no exemplo 5), isto é,

$$L(S_2) = L(S_1)$$

e, portanto,

$$\vec{a}_1 \in L(S_2) \; ; \; \vec{a}_2 \in L(S_2)$$
$$\vec{a}_5 \in L(S_1) \; ; \; \vec{a}_6 \in L(S_1)$$

iv) Relativamente ao vector $\vec{a}_3 = (1, -1, 0)$ do exemplo 5, verifica-se, neste caso,

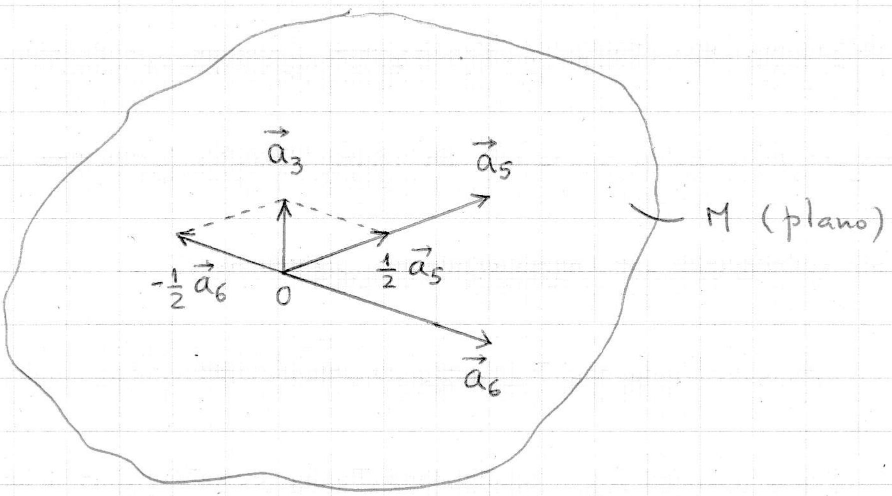
$\vec{a}_3 = (1, -1, 0) \in L(S_2)$ e $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{-1}{2}$

$$\vec{a}_3 = \frac{1}{2}\vec{a}_5 - \frac{1}{2}\vec{a}_6$$

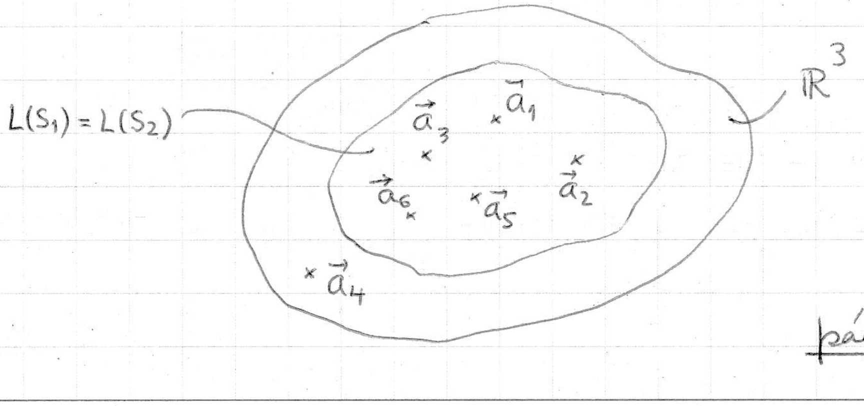
pág. 1.16

NOTAS COMPLEMENTARES

i) Tal como se verificou no caso do subespaço gerado pelo conjunto S_1, o subespaço gerado pelo conjunto S_2, $L(S_2)$, representa, em termos geométricos, o plano M com a equação cartesiana $x+y-2z=0$ e que tem $\vec{a}_5$ e $\vec{a}_6$ como vectores geradores.



ii) Tal como acontecia com o conjunto $S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, o conjunto $S_2 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6\}$ é um conjunto de vectores geradores do subespaço $L(S_1) = L(S_2)$. Veremos oportunamente que estes conjuntos de vectores serão designados por <u>bases</u> para $L(S_1) = L(S_2)$, uma vez que <u>geram de forma única</u> (através de combinações lineares com uma única solução para os respectivos coeficientes) qualquer elemento pertencente a $L(S_1) = L(S_2)$ (os sistemas de equações são possíveis e determinados).



pág. 1.16

Wnj

Exemplo 7 [1.44]

Seja $S_3 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1), (1,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$

Este conjunto é uma extensão do conjunto S_1, tendo sido adicionado o vector $\vec{a}_3 \in L(S_1)$, isto é,

$$S_3 = S_1 \cup \{\vec{a}_3\} \quad e \quad \vec{a}_3 \in L(S_1)$$

Cálculo de $L(S_3)$, subespaço gerado pelo conjunto S_3.

Seja $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ um vector genérico do espaço $\mathbb{R}^3$.

Considerando a combinação linear

$$\beta_1 . \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3 = \vec{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 (1,1,1) + \beta_2 (1,-3,-1) + \beta_3 (1,-1,0) = (x_1, x_2, x_3) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \,,\, \beta_1 - 3\beta_2 - \beta_3 \,,\, \beta_1 - \beta_2) = (x_1, x_2, x_3)$$

e resolvendo o sistema de 3 equações lineares a 3 incógnitas (β_1, β_2 e β_3), obtém-se

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = x_1 \\ \beta_1 - 3\beta_2 - \beta_3 = x_2 \\ \beta_1 - \beta_2 \qquad = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -3 & -1 & x_2 \\ 1 & -1 & 0 & x_3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -4 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & -2 & -1 & x_3 - x_1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow -2L_3 + L_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -4 & -2 & x_2 - x_1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -2x_3 + x_1 + x_2 \end{array}\right] \end{array}$$

pág. 1.17

Se $x_1+x_2-2x_3 \neq 0$, o sistema é <u>impossível</u> e $\vec{x} \notin L(S_3)$.

Se $x_1+x_2-2x_3 = 0$, o sistema é <u>possível</u> e $\vec{x} \in L(S_3)$.
Além disso, tendo 2 equações principais e 3 incógnitas (2 incógnitas principais, β_1 e β_2, e 1 incógnita livre, β_3), o sistema é <u>possível e simplesmente indeterminado</u>, tendo como solução:

$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2 = x_1-\beta_3 \\ -4\beta_2 = (x_2-x_1)+2\beta_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = x_1-\beta_3-\beta_2 \\ \beta_2 = \dfrac{x_1-x_2}{4}-\dfrac{1}{2}\beta_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = \dfrac{3x_1+x_2}{4}-\dfrac{1}{2}\beta_3 \\ \beta_2 = \dfrac{x_1-x_2}{4}-\dfrac{1}{2}\beta_3 \end{cases}, \quad \beta_3 \in \mathbb{R}$$

Assim, $\vec{x} \in L(S_3) \Leftrightarrow x_1+x_2-2x_3=0 \Leftrightarrow x_2=-x_1+2x_3$
e, portanto,

$$L(S_3) = \{ \vec{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1+x_2-2x_3=0 \} =$$

$$= \{ \vec{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = -x_1+2x_3 \} =$$

$$= \{ \vec{x} = (x_1, -x_1+2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3 \} \subset \mathbb{R}^3$$

Há a notar o seguinte:

i) $\vec{0} \in L(S_3)$, $\vec{a}_1 \in L(S_3)$, $\vec{a}_2 \in L(S_3)$ e $\vec{a}_3 \in L(S_3)$.

ii) O subespaço gerado pelo conjunto S_3 coincide com os subespaços gerados pelos conjuntos S_1 e S_2, isto é,

$$L(S_3) = L(S_1) = L(S_2)$$

o que é natural, já que S_3 foi obtido a partir de S_1 através de adição, a este conjunto, de um vector $\vec{a}_3 \in L(S_1)$.

<u>pág. 1.17</u>

iii) Qualquer vector $\vec{x} \in L(S_3)$ pode ser obtido através de uma infinidade de combinações lineares dos vectores do conjunto S_3; como vimos atrás a solução do sistema de equações lineares é possível e simplesmente indeterminada. Por exemplo, o vector $\vec{a}_3$ pode ser obtido através de, pelo menos, duas combinações lineares distintas:

$$\vec{a}_3 = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3 = 0\,\vec{a}_1 + 0\,\vec{a}_2 + 1\,\vec{a}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (1,-1,0) = 0\,(1,1,1) + 0\,(1,-3,-1) + 1\,(1,-1,0)$$

ou, ainda,

$$\vec{a}_3 = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3 = \frac{1}{2}\,\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\,\vec{a}_2 + 0\,\vec{a}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (1,-1,0) = \frac{1}{2}\,(1,1,1) + \frac{1}{2}\,(1,-3,-1) + 0\,(1,-1,0)$$

NOTAS COMPLEMENTARES

i) Tal como se verificou com os subespaços $L(S_1)$ e $L(S_2)$, o subespaço gerado pelo conjunto S_3, $L(S_3)$, representa, em termos geométricos, o plano M com a equação cartesiana $x + y - 2z = 0$.

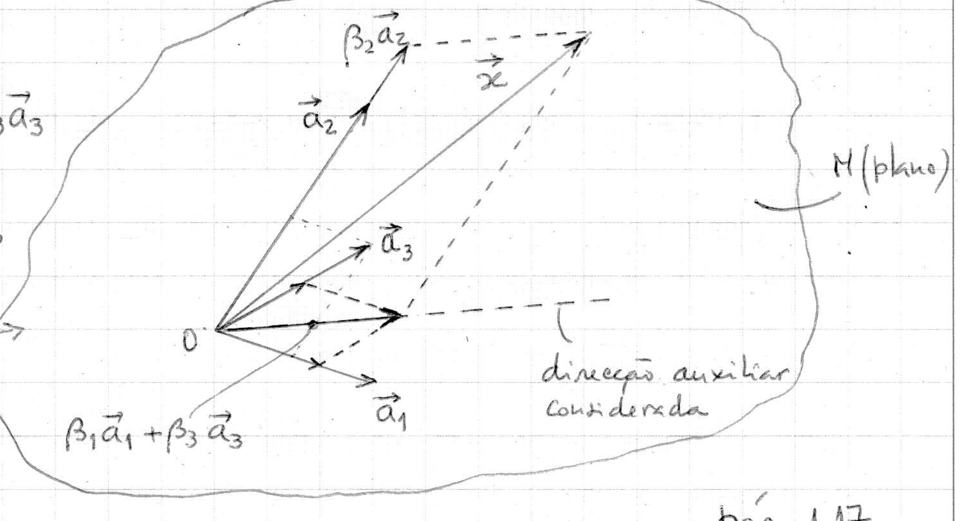
$\vec{x} \in L(S_3)$

$\vec{x} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3$

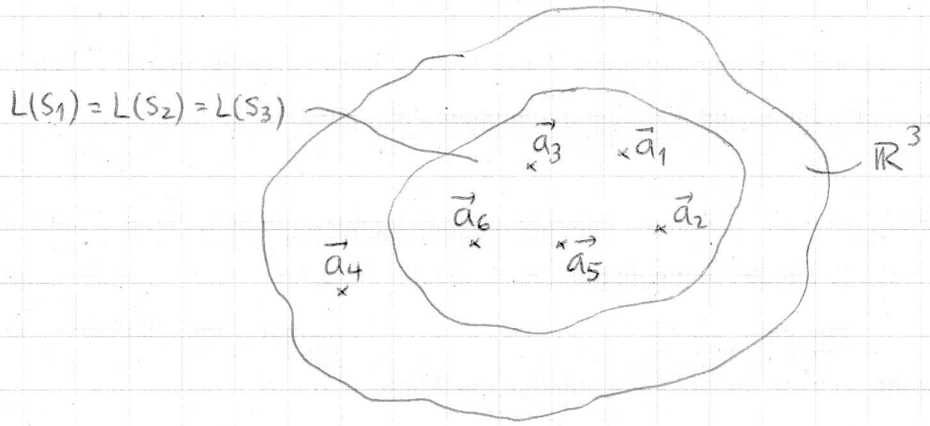
$\downarrow$

infinidade de soluções

Solução particular



ii) Tal como acontecia com os conjuntos $S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ e $S_2 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6\}$, o conjunto $S_3 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ é um conjunto de vectores geradores do subespaço $L(S_1) = L(S_2) = L(S_3)$. No entanto, contrariamente ao que sucede com os conjuntos S_1 e S_2, o conjunto S_3 gera de forma não única (através de combinações lineares com uma infinidade de soluções para os respectivos coeficientes) qualquer elemento pertencente a $L(S_3) = L(S_1) = L(S_2)$ (os sistemas de equações são possíveis e simplesmente indeterminados).



Como veremos oportunamente, o conjunto S_3 não é uma base para $L(S_1) = L(S_2) = L(S_3)$.

iii) Nas próximas secções iremos estabelecer as condições para que um determinado conjunto de elementos, S, seja uma base para o subespaço $L(S)$ (envolve o conceito de conjunto linearmente independente). Serão ainda estudadas propriedades que nos permitirão, conhecido um determinado subespaço, selecionar uma base para esse mesmo subespaço (envolve o conceito de dimensão de um subespaço).

pág. 1.17

Wng

Dependência e independência linear de vectores

Teorema [1.12]

Seja o conjunto $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$.
Seja

$$L(S) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k \ , \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

o subespaço gerado pelo conjunto S.

a) S gera de forma única qualquer vector $\vec{x} \in L(S) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ S gera de forma única o vector nulo, $\vec{0}$.

Como S gera de forma única qualquer vector $\vec{x} \in L(S)$ e $\vec{0} \in L(S)$ (basta considerar $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ na combinação linear), então, como é óbvio, S gera de forma única o vector $\vec{0}$.

b) S gera de forma única o vector nulo, $\vec{0} \Rightarrow S$ gera de forma única qualquer vector $\vec{x} \in L(S)$.

A hipótese estabelece que S gera de forma única o vector $\vec{0}$, ou seja (definição de conjunto linearmente independente),

$$\alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \qquad (1)$$

Admita-se, agora, que existem 2 combinações lineares possíveis para o vector $\vec{x}$:

$$\vec{x} \in L(S) \Rightarrow \vec{x} = \beta_1 \vec{s}_1 + \beta_2 \vec{s}_2 + \dots + \beta_k \vec{s}_k \ , \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\vec{x} \in L(S) \Rightarrow \vec{x} = \gamma_1 \vec{s}_1 + \gamma_2 \vec{s}_2 + \dots + \gamma_k \vec{s}_k \ , \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Subtraindo (3) a (2)

pág. 1.19

$$(\beta_1-\gamma_1)\vec{s}_1+(\beta_2-\gamma_2)\vec{s}_2+\dots+(\beta_k-\gamma_k)\vec{s}_k=\vec{x}-\vec{x}=\vec{0}$$

pelo que, atendendo à hipótese (1),

$$\underbrace{\beta_1-\gamma_1}_{\alpha_1}=0\ ,\ \underbrace{\beta_2-\gamma_2}_{\alpha_2}=0\ ,\ \dots,\ \underbrace{\beta_k-\gamma_k}_{\alpha_k}=0$$

e, portanto, $\beta_1=\gamma_1\ ,\ \beta_2=\gamma_2\ ,\ \dots,\ \beta_k=\gamma_k$.

Conclui-se que a combinação linear que permite gerar o vector $\vec{x}$ é única. Logo, o conjunto S gera de forma única qualquer vector $\vec{x}\in L(S)$.

pág. 1.19

PROPRIEDADES:

Teorema [1.13]

Seja o conjunto $S=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\dots,\vec{s}_k\}\subset\mathbb{R}^n$.

Admita-se que, por exemplo, $\vec{s}_1=\vec{0}$.

$$\alpha_1\vec{s}_1+\alpha_2\vec{s}_2+\dots+\alpha_k\vec{s}_k=\vec{0}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \alpha_1\vec{0}+\alpha_2\vec{s}_2+\dots+\alpha_k\vec{s}_k=\vec{0}\qquad(1)$$

A combinação linear (1) admite uma infinidade de soluções não nulas para os respectivos coeficientes; por exemplo,

$$\alpha_2=\alpha_3=\dots=\alpha_k=0\quad e\quad \alpha_1\in\mathbb{R}$$

Logo o conjunto S é linearmente dependente.

pág. 1.20

Wuj

Teorema [1.14]

Seja o conjunto $S = \{\vec{s}\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\vec{s} \neq \vec{0}$.

$$\alpha \vec{s} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \underbrace{\cancel{\vec{s} = \vec{0}}}_{\text{falso}} \Rightarrow \alpha = 0$$

A combinação linear admite apenas a solução nula, logo S é um conjunto linearmente independente.

Teorema [1.17]

Seja o conjunto $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$.

Admite-se, por exemplo, que $\vec{s}_2 = k\,\vec{s}_1$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 (k \vec{s}_1) + \dots + \alpha_k \vec{s}_k = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 + k\alpha_2)\, \vec{s}_1 + \alpha_3 \vec{s}_3 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k = \vec{0} \qquad (1)$$

A combinação linear (1) admite uma infinidade de soluções não nulas para os respectivos coeficientes; por exemplo,

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_k = 0 \ , \ \alpha_2 = 1 \ \text{e} \ \alpha_1 = -k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

Logo o conjunto S é linearmente dependente.

pág. 1.20

Papel 100% Reciclado

Teorema [1.16]

Seja o conjunto $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$.

Admite-se, por exemplo, que

$$\vec{s}_k = \beta_1 \vec{s}_1 + \beta_2 \vec{s}_2 + \dots + \beta_{k-1} \vec{s}_{k-1}, \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1} \in \mathbb{R}$$

isto é, o vector $\vec{s}_k$ é uma combinação linear dos restantes elementos do conjunto S.

Pode-se, então, provar que o conjunto S é linearmente dependente (esta propriedade constitui uma generalização da propriedade do teorema anterior).

Teorema [1.18]

Seja o conjunto $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2\} \subset \mathbb{R}^n$, tal que

$$\vec{s}_2 \neq k\,\vec{s}_1 \quad , \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Nestas condições o conjunto S é linearmente independente.

NOTAS COMPLEMENTARES :

i) A propriedade enunciada no teorema [1.18] permite concluir que o conjunto

$$S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

do exemplo 5 [1.40] e que o conjunto

$$S_2 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6\} = \{(2,0,1), (0,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

do exemplo 6 [1.43] são <u>conjuntos linearmente independentes</u>.

pág. 1.20

Wang

ii) Uma vez que

$$\vec{a}_3 = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2 \quad \text{(ver exemplo 5 [1.40])}$$

então a propriedade enunciada no teorema [1.16] permite concluir que o conjunto do exemplo 7 [1.44]

$$S_3 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1), (1,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é um conjunto linearmente dependente.
Com efeito, tendo em atenção a solução do sistema de equações lineares obtida no exemplo 7 [1.44], pode-se escrever ($\vec{x} = \vec{0}$)

$$\beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \beta_3\vec{a}_3 = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_1 = -\frac{1}{2}\beta_3 \quad \text{e} \quad \beta_2 = -\frac{1}{2}\beta_3 \,, \quad \beta_3 \in \mathbb{R}$$

ou seja, o vector nulo não é gerado de forma única pelos elementos do conjunto S_3 (existe uma infinidade de soluções não nulas para os coeficientes da combinação linear).

iii) A propriedade enunciada no teorema seguinte também permite justificar o facto de o conjunto

$$S_3 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1), (1,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$$

ser um conjunto linearmente dependente.

pág. 1.20

Wmj

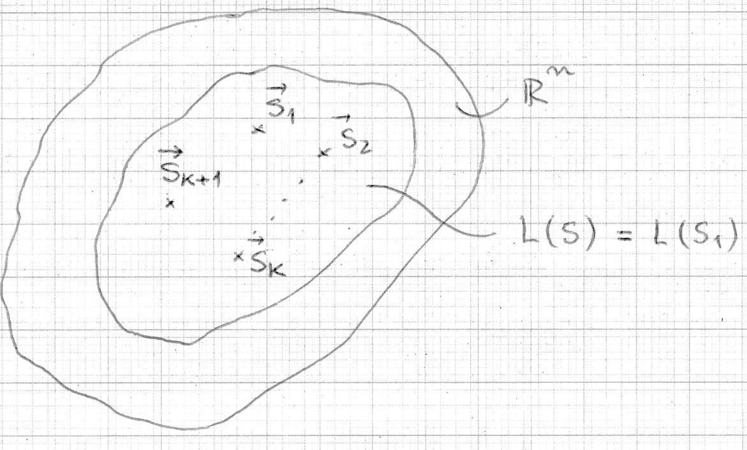
Teorema [1.19]

Seja o conjunto $S = \{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k \} \subset \mathbb{R}^n$ e admita-se que S é um conjunto linearmente independente.
Seja

$$L(S) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k \ , \ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

o subespaço gerado pelo conjunto S.
É possível mostrar que:

i) $S_1 = \{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k, \vec{s}_{k+1} \} \subset \mathbb{R}^n$ e $\vec{s}_{k+1} \in L(S)$ é um conjunto linearmente dependente.

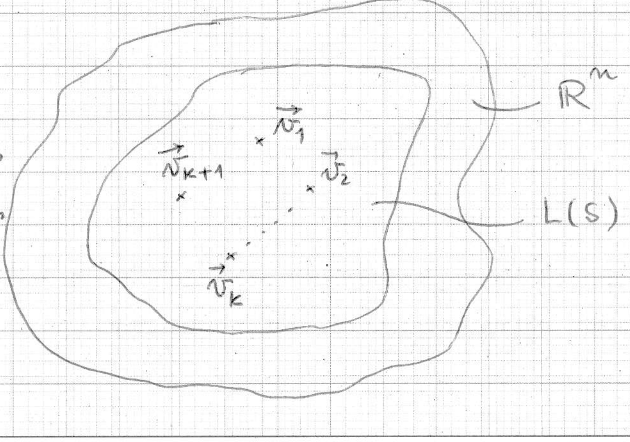


ii) $S_2 = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1} \} \subset \mathbb{R}^n$ e

$$\vec{v}_1 \in L(S) \ , \ \vec{v}_2 \in L(S), \dots, \vec{v}_k \in L(S) \ , \ \vec{v}_{k+1} \in L(S)$$

é um conjunto linearmente dependente.

$L(S) = L(S_2)$ se existirem k elementos linearmente independentes em S_2; caso contrário, $L(S_2) \subset L(S)$



pág. 1.21

NOTAS COMPLEMENTARES :

i) A propriedade enunciada no teorema anterior permite concluir que num subespaço gerado por um conjunto de k vectores linearmente independentes não é possível encontrar um conjunto linearmente independente com um número de elementos superior a k.

ii) Relativamente ao subespaço encontrado nos exemplos 5, 6 e 7

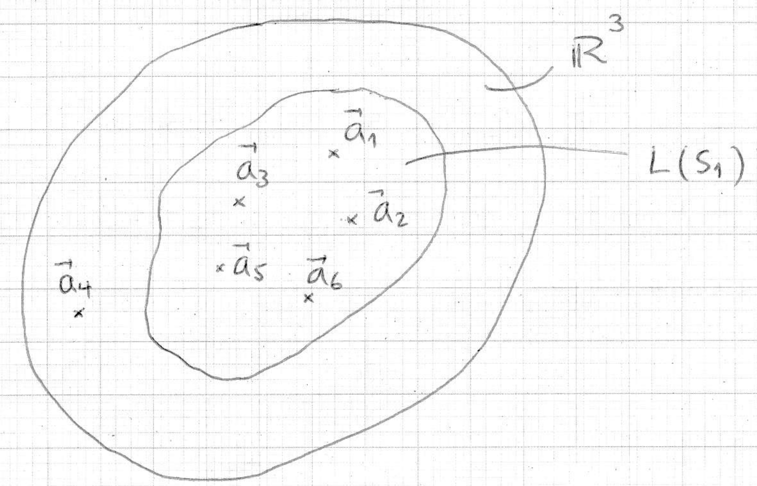
$$L(S_1) = \{ \vec{x} = (x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3 \} \subset \mathbb{R}^3$$

gerado pelos conjuntos linearmente independentes

$S_1 = \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \} = \{ (1,1,1), (1,-3,-1) \} \subset \mathbb{R}^3$ (exemplo 5)

$S_2 = \{ \vec{a}_5, \vec{a}_6 \} = \{ (2,0,1), (0,2,1) \} \subset \mathbb{R}^3$ (exemplo 6)

qualquer conjunto contido em $L(S_1)$ com um número de elementos superior a 2 é linearmente dependente.



Por exemplo, os conjuntos $S_3 = \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \} \subset L(S_1)$, $S_4 = \{ \vec{a}_1, \vec{a}_5, 2\vec{a}_6 \} \subset L(S_1)$, $S_{10} = \{ \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_5, \vec{a}_6 \} \subset L(S_1)$ são conjuntos linearmente dependentes.

pág. 1.21

Wr

Teorema [1.20]

Seja o conjunto $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ e admita-se que S é um conjunto linearmente independente.
Seja

$$L(S) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k \text{ , } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

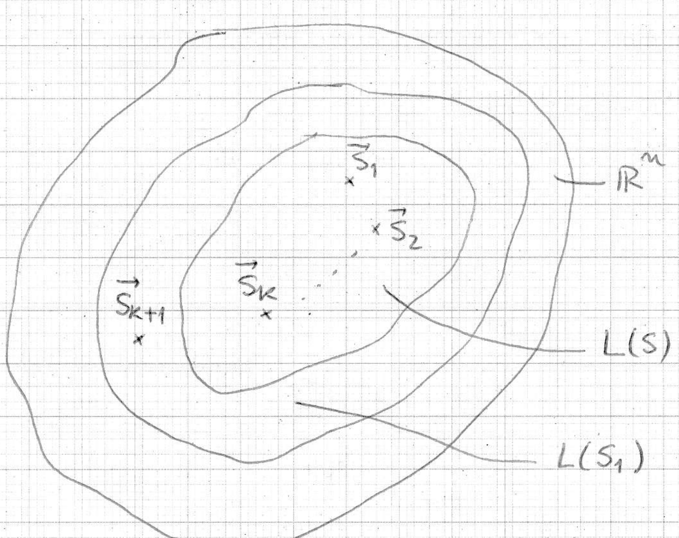
o subespaço gerado pelo conjunto S.
É possível mostrar que:

$S_1 = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k, \vec{s}_{k+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\vec{s}_{k+1} \notin L(S)$ é um conjunto linearmente independente.

Teorema [1.21]

Sejam os conjuntos $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $S_1 = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k, \vec{s}_{k+1}\} \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\vec{s}_{k+1} \notin L(S)$.
Então

$$L(S) \subset L(S_1)$$



$$L(S) \subset L(S_1) \subseteq \mathbb{R}^n$$

pág. 1.22

Exemplo 9 [1.53]

Seja o conjunto $S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$; trata-se de um conjunto linearmente independente.
Seja

$$L(S_1) = \{\vec{x} = (x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^3$$

o subespaço gerado pelo conjunto S_1 (exemplo 5).
Uma vez que

$$\vec{a}_4 = (2,-1,1) \notin L(S_1)$$

então o conjunto

$$S_8 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1), (2,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

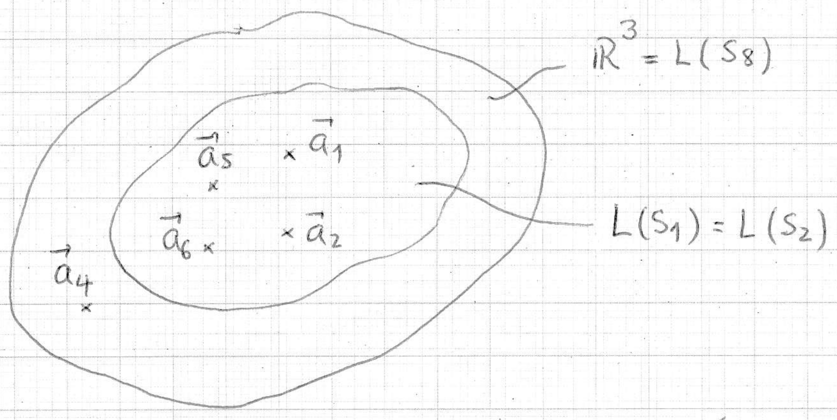
é um conjunto linearmente independente e

$$L(S_1) \subset L(S_8) \subseteq \mathbb{R}^3$$

Qual será $L(S_8)$, o subespaço gerado pelo conjunto S_8?

A resposta é imediata: uma vez que $\mathbb{R}^3$ não admite a existência de conjuntos linearmente independentes com um número de elementos superior a 3, então, sendo S_8 constituído por 3 vectores linearmente independentes, pode-se concluir que

$$L(S_8) = \mathbb{R}^3$$



Verifiquemos, através do seu cálculo, que $L(S_8) = \mathbb{R}^3$.

Seja $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ um vector genérico do espaço $\mathbb{R}^3$.

Considerando a combinação linear

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_4 = \vec{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 (1,1,1) + \alpha_2 (1,-3,-1) + \alpha_3 (2,-1,1) = (x_1, x_2, x_3) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

e resolvendo o sistema de 3 equações lineares a 3 incógnitas (α_1, α_2 e α_3), obtém-se

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = x_1 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 = x_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 1 & -3 & -1 & x_2 \\ 1 & -1 & 1 & x_3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -4 & -3 & x_2 - x_1 \\ 0 & -2 & -1 & x_3 - x_1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow -2L_3 + L_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -4 & -3 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & -1 & -2x_3 + x_1 + x_2 \end{array}\right] \end{array}$$

Uma vez que o sistema possui 3 equações principais e 3 incógnitas principais (α_1, α_2 e α_3), então o <u>sistema é possível e determinado</u> para <u>todo o vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$</u>. Conclui-se, então, que

$$L(S_8) = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \} = \mathbb{R}^3$$

A solução do sistema é:

pág. 1.22

$$\begin{cases} \alpha_1 = x_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ -4\alpha_2 = (x_2 - x_1) + 3\alpha_3 \\ \alpha_3 = -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ -4\alpha_2 = -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 \\ \alpha_3 = -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \cancel{x_1} - \cancel{x_1} - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ \alpha_2 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \\ \alpha_3 = -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 \\ \alpha_2 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \\ \alpha_3 = -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases}$$ (Solução possível e determinada)

Há a notar o seguinte:

i) No exemplo 6 verificou-se que o subespaço gerado pelo conjunto

$$S_2 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6\} = \{(2,0,1), (0,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

era

$$L(S_2) = L(S_1)$$

Uma vez que S_2 é um <u>conjunto linearmente independente</u>, então, por exemplo,

$$S_9 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6, \vec{a}_4\} = \{(2,0,1), (0,2,1), (2,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é um <u>conjunto linearmente independente</u> e

$$L(S_9) = \mathbb{R}^3$$

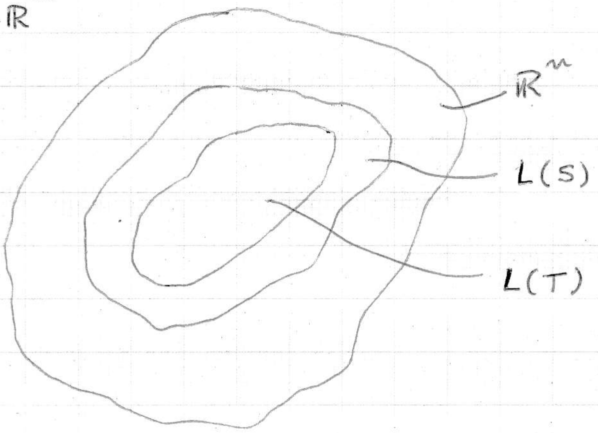
<u>pág. 1.22</u>

Teorema [1.15]

Sejam S e T dois conjuntos não vazios de vectores de $\mathbb{R}^n$, tal que

$$T \subseteq S.$$

$S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$



i) Se T é <u>linearmente dependente</u> $\Rightarrow$ S é <u>linearmente dependente</u>

Por exemplo, $T = \{\vec{t}_1, \vec{t}_2\} = \{(1,0,-2), (2,0,-4\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto linearmente dependente (os vectores são colineares ou paralelos).
Então
$$S = \{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3\} = \{(1,0,-2), (2,0,-4), (1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$$
é um conjunto linearmente dependente.

ii) Se S é <u>linearmente independente</u> $\Rightarrow$ T é <u>linearmente independente</u>

Por exemplo, $S = S_8 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1), (2,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto linearmente independente (exemplo 9).
Então
$$T = S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$$
é um conjunto linearmente independente (exemplo 5).

pág. 1.21

Base e dimensão de um espaço de vectores

Definição [1.13] : Base de um espaço de vectores

Seja o conjunto $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$.
Seja

$$L(S) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k \,,\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

o subespaço gerado pelo conjunto S.
S diz-se uma base para o subespaço $L(S)$ se for um conjunto linearmente independente.

pág. 1.24

Exemplo 16 [1.74]

Os conjuntos dos exemplos 5 e 6

$$S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1)\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (\text{exemplo } 5)$$

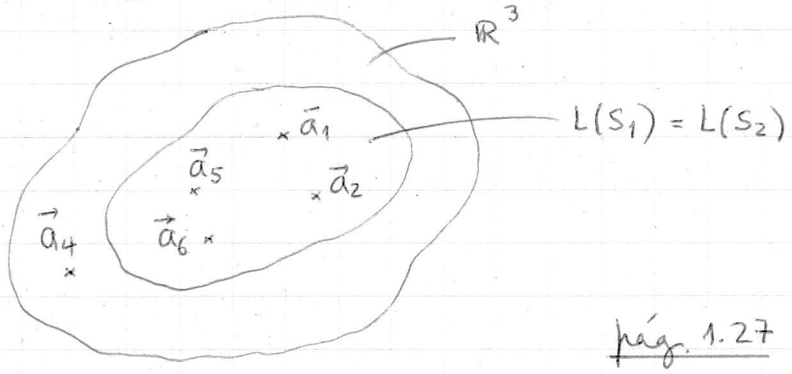
$$S_2 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6\} = \{(2,0,1), (0,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (\text{exemplo } 6)$$

são conjuntos linearmente independentes e geram o subespaço

$$L(S_1) = L(S_2) = \{\vec{x} = (x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^3$$

Nestas condições, os conjuntos S_1 e S_2 são duas bases distintas para o subespaço $L(S_1)$.
Além disso,

$$\dim L(S_1) = 2$$



pág. 1.27

. Há a notar o seguinte:

i) Como $\dim L(S_1) = 2$, então qualquer conjunto de 2 vectores linearmente independentes contido em $L(S_1)$ será uma base para $L(S_1)$.

Por exemplo, os conjuntos

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_6\} = \{(1,1,1), (2,0,1)\} \subset L(S_1)$$

$$\{\vec{a}_2, \vec{a}_5\} = \{(1,-3,-1), (2,0,1)\} \subset L(S_1)$$

são conjuntos linearmente independentes (os seus elementos não são colineares) e, por isso, são bases distintas para o subespaço $L(S_1)$.

Exemplo 17 [1.74]

O conjunto do exemplo 9

$$S_8 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1), (2,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é um conjunto linearmente independente e gera o subespaço

$$L(S_8) = \mathbb{R}^3$$

Assim, o conjunto S_8 é uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$ e, portanto,

$$\dim L(S_8) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Por exemplo, o conjunto

$$S_9 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6, \vec{a}_4\} = \{(2,0,1), (0,2,1), (2,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é também uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$, já que é um conjunto linearmente independente (teorema [1.20]).

pág. 1.27

Teorema [1.22]

Seja o subespaço $V \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que $\dim V = k$.

i) Qualquer conjunto formado por mais de k elementos de V é um conjunto linearmente dependente.
Por exemplo, o conjunto
$$S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k, \vec{s}_{k+1}\} \subset V$$
é um conjunto linearmente dependente.

(ii) Qualquer conjunto linearmente independente formado por k elementos de V é uma base para V.
Por exemplo, o conjunto
$$S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\} \subset V$$
sendo linearmente independente, é uma base para V

ii) Qualquer conjunto linearmente independente formado por $r < k$ elementos de V é um subconjunto de uma dada base para V.

1. Por exemplo, seja o conjunto linearmente independente
$$S_0 = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_r\} \subset V \quad , r < k$$

Sabe-se que
- $L(S_0) \subset V$.
- S_0 é uma base para $L(S_0)$.
- $\dim L(S_0) = r$.

2. Seleccione-se um vector $\vec{s}_{r+1} \notin L(S_0)$ e considere-se o conjunto
$$S_1 = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_r, \vec{s}_{r+1}\} \subset V$$

pág. 1.25

Papel 100% Reciclado

Wmj

Sabe-se que:

- S_1 é linearmente independente.
- S_1 é uma base para $L(S_1)$.
- $L(S_1) \subseteq V$ e $\dim L(S_1) = r+1$; $L(S_0) \subset L(S_1)$.

Se $r+1 = k$ então:

- $L(S_1) = V$
- $\dim L(S_1) = \dim V = k$
- S_1 é uma base para $L(S_1) = V$

O processo é interrompido

Se $r+1 < k$ então

- $L(S_1) \subset V$
- $\dim L(S_1) = r+1 < k$

O processo de cálculo de uma base para V é retomado ...

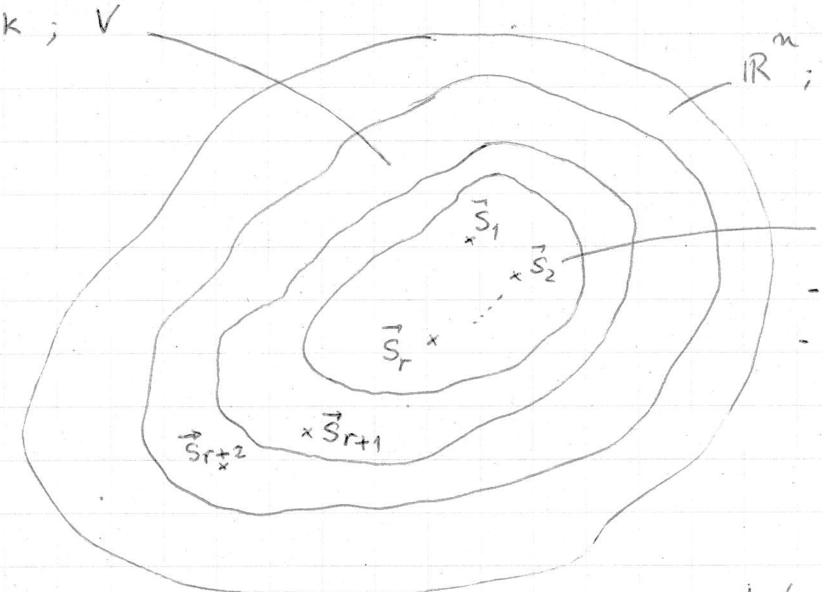
3. Seleccione-se um vector $\vec{s}_{r+2} \notin L(S_1)$ e considere-se o conjunto

$$S_2 = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_r, \vec{s}_{r+1}, \vec{s}_{r+2}\} \subset V$$

e assim sucessivamente até que o conjunto resultante seja constituído por k elementos linearmente independentes do subespaço V e que será uma base para V.

$\dim V = k$; V

$\mathbb{R}^n$; $\dim \mathbb{R}^n = n$



$L(S_0)$:
- $L(S_0) \subset V$
- $\dim L(S_0) = r < k$

$L(S_1)$:
- $L(S_1) \subseteq V$
- $\dim L(S_1) = r+1$
- $r+1 \leq k$
- $L(S_0) \subset L(S_1)$

pág. 1.25