Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância) 1ª Prova de Reavaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos dois grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**7,0**] Considere o conjunto $S=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}\subset\mathbb{R}^4$, em que $\vec{a}=(1,1,5,1)$, $\vec{b}=(2,-1,1,2)$ e $\vec{c}=(3,0,6,-3)$, o subespaço de $\mathbb{R}^4$, $H=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\ :\ x+y-z-w=0\right\}$, e o vetor $\vec{d}=(\alpha,\alpha,\alpha-1,\alpha)\in\mathbb{R}^4$.

a) Calcule o subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$; indique uma base para o subespaço obtido que inclua apenas elementos de S. Justifique.

b) Tendo em conta o resultado obtido na alínea anterior, determine o valor de $\alpha\in\mathbb{R}$ de modo que o conjunto $U=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}$ seja linearmente dependente.

c) Recorrendo ao maior número possível de elementos de H, obtenha uma base ortogonal, V, para o espaço $\mathbb{R}^4$.

d) Determine as coordenadas do vetor $\vec{f}=(1,0,1,1)$ em relação à base V.

2. [**1,2**] Sejam os conjuntos $S=\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\ldots,\vec{x}_s\}\subset\mathbb{R}^n$ e $K=\{\vec{y}_1,\vec{y}_2,\vec{y}_3,\ldots,\vec{y}_k\}\subset\mathbb{R}^n$. Mostre que $L(\mathrm{S})=L(\mathrm{K})$, se e só se $\vec{x}_i\in L(\mathrm{K})$, $i=1,2,\ldots,s$ e $\vec{y}_j\in L(\mathrm{S})$, $j=1,2,\ldots,k$.

3. [**2,5**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{d}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{b}\|=\|\vec{a}\|=1$, $\{\vec{b},\vec{d}\}$ é um conjunto ortogonal e $\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{c})-\vec{b}$.

a) Calcule a norma do vetor $\vec{a}\times\vec{c}$.

b) Obtenha o ângulo, α, formado pelos vetores $2\vec{d}+\vec{b}$ e $\vec{a}\times\vec{c}$.

c) Verifique, justificando devidamente, se o conjunto $S=\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ é uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$.

....*(continua no verso)*

GRUPO II

4. [**1,3**] Considere o conjunto de vetores $\mathrm{U} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subset \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0$. Será U linearmente dependente ou independente? Justifique devidamente a sua resposta.

5. [**8,0**] Sejam o plano $M \ : \ 2x + y + z = 2$, os pontos $Q = (1,0,3)$ e $R = (1,2,1)$, e a reta, *r*, com a equação vetorial $X(t) = P + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, em que $P = (-1,0,1)$ e $\vec{a} = (1,-2,3)$. Determine:

a) A distância do ponto *Q* à reta *r* e os pontos, *T*, desta reta, tais que a área do triângulo $[TQR]$ seja igual a $\sqrt{3}$ unidades de área.

b) A equação vetorial da reta, *h*, contida no plano *M*, concorrente com a reta *r* e que passa num ponto, *S*, que é a projeção ortogonal de *R* sobre o plano *M*.

c) A equação vetorial de uma reta, *s*, que passa em *R*, é concorrente com a reta *r* e faz um ângulo de $60°$ com o plano *M*.