Prova sem consulta. Duração: 2h (30m de tolerância). 2ª Prova de Reavaliação

---

*** Não são consideradas as folhas sem identificação. Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não é possível a utilização de máquinas de calcular gráficas nem de microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**8,9**] Sejam as transformações lineares $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, com $S(x,y,z)=(-x+y,x-z)$, e $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, representada pela matriz

$$\boldsymbol{T}=m(T)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

em relação à base canónica E_3 para o espaço linear $\mathbb{R}^3$. Considere as bases $\mathrm{V}=\{(1,1,0),(0,-1,0),(0,1,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ e E_2 a base canónica para o espaço linear $\mathbb{R}^2$.

a) Obtenha o núcleo e o contradomínio de *S*; identifique, para cada um destes subespaços, uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Classifique as transformações *S* e *T* quanto à injetividade e sobrejetividade e determine, se tal for possível, as respetivas transformações inversas. Justifique.

c) Usando o cálculo matricial, obtenha as matrizes $\boldsymbol{S}_{\mathrm{V,E_2}}=m(S)_{\mathrm{V,E_2}}$, representação matricial de *S* em relação às bases V e E_2, e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E_3,V}}=m(T)_{\mathrm{E_3,V}}$, representação matricial de *T* em relação às bases E_3 e V.

d) Usando o cálculo matricial e preferencialmente as matrizes obtidas na alínea c), determine a matriz $m(ST^2-2S)_{\mathrm{V,E_2}}$, que representa a transformação composta ST^2-2S relativamente às bases V e E_2.

2. [**2,5**] Seja $\boldsymbol{B}$ uma matriz quadrada e não singular. Mostre que:

a) A matriz $\boldsymbol{B}^n$, $n\in\mathbb{Z}_0^+$ é, também, não singular.

b) $(\boldsymbol{B}^n)^{-1}=(\boldsymbol{B}^{-1})^n$, $n\in\mathbb{Z}_0^+$.

....*(continua no verso)*

GRUPO II

3. [**2,7**] Seja a matriz real

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 & 2h+6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 6-h & 2 & h \end{bmatrix}$$

Calcule o determinante da matriz e obtenha o seu valor mínimo.

4. [**5,9**] Seja a transformação linear $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz real

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} a & a & -2 \\ 8 & -11 & -b \\ -10 & 11 & a+b \end{bmatrix}$$

relativamente à base canónica para o espaço linear $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule a e b sabendo que o traço de $\boldsymbol{H}$ é -5 e $\vec{x}=(1,0,1)$ é um dos seus vetores próprios.

b) Considere $a=-1$ e $b=8$. Determine os valores próprios e os espaços próprios da matriz, indicando, para cada um destes subespaços, uma base e a dimensão.

c) Verifique se a matriz $\boldsymbol{H}$ é diagonalizável; em caso afirmativo, obtenha a matriz diagonal que lhe é semelhante e a respetiva matriz diagonalizadora. Justifique de forma adequada a resposta.