Universidade do Minho
Departamento de Matemática MIECiv

Análise Matemática para Engenharia

folha de exercícios 4 — 2021/2022

• Diferenciabilidade

1. Diga, justificando, se as seguintes funções são de classe $\mathcal{C}^1$, nos pontos indicados:

(a) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}, \quad P_1 = (2,1)$;

(b) $f(x,y) = \text{sen}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right), \quad P_2 = (2,1)$.

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy}, \quad P_3 = (1,2)$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{x^4+6y^8}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad P_4 = (0,0)$;

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Diga, justificando a sua resposta, se f é diferenciável em $(0,0)$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

(a) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

(b) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

(c) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

5. Para cada uma das funções $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ apresentadas, determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f, no ponto indicado.

(a) $f(x,y) = \text{sen}(x+y) \quad (1,-1,0)$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy}, \quad (1,2,\frac{5}{2})$.

6. Seja $z = f(x,y) = e^{2x+3y}$,

(a) Determine o plano tangente a f no ponto $(0,0,1)$.

(b) Use esta aproximação para calcular $f(0.1,0)$ e $f(0,0.1)$.

(c) Calcule, usando a calculadora, o valor exato de $f(0.1,0)$ e $f(0,0.1)$.

7. Sendo $z = f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$,

(a) determine o diferencial dz;

(b) compare os valores de Δz e dz se x varia de 2 para 2.05 e y de 3 para 2.96.

8. Utilize diferenciais para calcular um valor aproximado de

(a) $\sqrt{9(1.95)^2+(8.1)^2}$.

(b) $(0.98)^2 - 1.01 \ln \dfrac{1.01}{0.98}$.

9. Use diferenciais para determinar o erro máximo cometido no cálculo da área de um rectângulo de 10cm de comprimento e 5cm de largura, sabendo que o erro cometido em cada uma das medições não ultrapassa 0.1cm.

10. Calcule a derivada direcional de f, $D_{\vec{v}}(a,b)$, das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = e^x \tan y + 2x^2 y, \quad (a,b) = (0, \pi/4), \quad \vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(b) $f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2, \quad (a,b) = (1,2),$ $\vec{v}$ é um vetor que faz um ângulo de 60º com OX.

11. Determine um vetor segundo o qual a derivada da função $f(x,y) = x^2 + y^3 + 1$ no ponto $(1,1)$ é nula.

12. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(1,0)$.

(b) Calcule a derivada de f no ponto $(1,0)$ segundo o vetor $(1,2)$.

(c) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo o vetor $(1,1)$.

13. Considere $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$. Em que direcção nos devemos afastar de P para que os valores de f aumentem o mais rapidamente possível? Esboce o gráfico de f e interprete o resultado.

14. A temperatura T num dado ponto (x,y) do plano é dada por $T(x,y) = x^2 e^{-y}$. Em que direcção a partir do ponto (2,1) a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual a taxa de crescimento nessa direcção?

15. Determine a equação do plano tangente à superfície $x^2 + y^2 - xyz = 7$ no ponto $(2,3,1)$ por dois processos diferentes:

(a) considerando a superfície como a superfície de nível de uma função de 3 variáveis $f(x,y,z)$;

(b) considerando a superfície como o gráfico de uma função de 2 variáveis $g(x,y)$.