Prova sem consulta. Duração: 3h (15m de tolerância). Prova de Reavaliação Global

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não é permitido o uso de telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**4,5**] Seja o conjunto $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}\subset\mathbb{R}^4$, tal que $\vec{a}=(1,3,-2,2)$, $\vec{b}=(0,2,1,3)$ e $\vec{c}=(1,2,0,3)$, e o subespaço de $\mathbb{R}^4$, $T=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+y-w=0\}$. Calcule:

a) O subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$; indique uma base para o subespaço obtido e conclua em relação à sua dimensão. Justifique a resposta.

b) Uma base ortogonal, W, para o subespaço T que inclua um elemento de S.

c) Uma base, V, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que contenha o maior número possível de elementos de S.

2) [**4,8**] Considere as transformações lineares $S\in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ e $R\in L(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$, tais que

$$S(x,y,z)=(2x+y,x-z,2x+y-z) \text{ e } R(x,y,z,w)=(x-z,x+w,2x-z+w)$$

e $T\in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$, que tem a representação matricial

$$\boldsymbol{T}=m(T)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}_{U,E_2}$$

em relação às bases $\mathrm{U}=\{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}\subset\mathbb{R}^3$ e E_2, base canónica para o espaço $\mathbb{R}^2$. Sejam as bases $\mathrm{V}=\{(2,1),(1,1)\}\subset\mathbb{R}^2$ e E_3, base canónica para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Determine o núcleo e o contradomínio de R. Para cada um destes subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que S é injetiva e determine a sua transformação inversa.

c) Obtenha a matriz $m(TR)_{\mathrm{E}_4,\mathrm{V}}$, representação matricial de TR em relação às bases E_4, base canónica para o espaço $\mathbb{R}^4$, e V.

..........*(continua no verso)*

Prova sem consulta. Duração: 3h (15m de tolerância). Prova de Reavaliação Global

GRUPO II

3) [**3,6**] Considere a reta $r\ :\ X(t)=P+t\vec{a}\ ,\ t\in\mathbb{R}$, em que $P=(0,1,0)$ e $\vec{a}=(1,-1,1)$, o plano $M\ :\ x-y=1$ e o ponto $S=(1,1,2)$. Determine:

a) A distância do ponto *S* à reta *r* e o ângulo que esta reta faz com *M*.

b) Os planos que contêm a reta *r* e fazem um ângulo de $60°$ com *M*.

4) [**3,3**] Seja a transformação linear $H\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{H}=m(H)=\begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ -2 & 6 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os valores próprios de $\boldsymbol{H}$ e os respetivos espaços próprios; indique, para cada um desses subespaços, uma base e a dimensão.

b) Mostre, justificando devidamente, que a função *H* admite uma base, V, de vetores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$. Obtenha a matriz $\boldsymbol{H}_{\mathrm{V,V}}$ que representa *H* em relação à base V e apresente as expressões matriciais que comprovam que $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{H}_{\mathrm{V,V}}$ são matrizes semelhantes.

5) [**1,8**] Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o determinante da matriz real

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & 5 & -k & 1\\ 1 & k & 4 & 1-k\\ 1 & 2 & -3 & -1\\ -1 & -2 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

Obtenha o valor de *k* para que $5|\boldsymbol{F}|=|\boldsymbol{F}^2|$.

6) [**2,0**] Sejam as retas $r=L(P,\vec{a})$ e $s=L(Q,\vec{c})$ do espaço $\mathbb{R}^3$. Recorrendo às propriedades dos produtos vetorial e misto, estabeleça condições necessárias e suficientes para que as retas dadas sejam concorrentes. Justifique a resposta.