*** Não são consideradas as folhas sem identificação. Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não é possível a utilização de máquinas de calcular gráficas nem de microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**8,0**] Seja o conjunto de vetores $\mathrm{U}=\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right\}\subset\mathbb{R}^4$, em que $\vec{a}=(2,1,0,-3)$, $\vec{b}=(1,1,1,-1)$, $\vec{c}=(0,1,2,1)$ e $\vec{d}=(1,0,-1,-2)$. Considere, ainda, o subespaço $H=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : z=x-2w\right\}\subset\mathbb{R}^4$.

a) Calcule o subespaço, $L(\mathrm{U})$, gerado por U; indique uma base, V, para o subespaço e conclua em relação à dimensão. Será o conjunto U linearmente independente? Justifique.

b) Calcule uma base ortogonal, W, para o subespaço $L(\mathrm{U})$ que contenha o vetor $\vec{b}$.

c) Obtenha uma base ortogonal, Q, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que inclua dois vetores de $L(\mathrm{U})$ e um vetor de *H*.

d) Determine as coordenadas do vetor $\vec{v}=(1,-1,0,0)$ em relação à base Q.

2. [**2,5**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores não nulos do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=1$, $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\measuredangle(\vec{b},\vec{a})=60°$ e $\vec{d}+\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$. Determine:

a) A norma do vetor $\vec{c}$ e o ângulo formado pelos vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

b) A norma do vetor $\vec{d}$.

.... *(continua no verso)*

GRUPO II

3. [**2,5**] Considere o plano M de equação cartesiana $ax+by+cz=d$, em que $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$, e o ponto $Q=(x_0,y_0,z_0)\notin M$. Seja a reta s de equação vetorial $X(u)=(0,0,k)+u(k,k,k)$, $u\in\mathbb{R}$.

a) Determine em que condições a reta s está contida em M.

b) Mostre que a distância do ponto Q ao plano M é dada por:

$$d_{Q,M}=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0-d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

4. [**7,0**] Considere o plano $M : x-y=2$, a reta $r : X(v)=A+v\vec{u}$, $v\in\mathbb{R}$, em que $A=(1,0,0)$ e $\vec{u}=(1,1,0)$, e o ponto $B=(1,1,-3)$. Determine:

a) A posição relativa da reta r em relação ao plano M e o ângulo que a reta faz com o plano $\sigma : z-y=0$.

b) A equação vetorial de uma reta, s, que passa nos pontos P e Q, em que P é um ponto de r que está à distância $\sqrt{10}$ de B e Q é o ponto de M mais próximo da origem do referencial.

c) As equações cartesianas dos planos, α e β, que passam no ponto A, são ortogonais ao plano xOz e fazem um ângulo de $60°$ com M.