Álgebra Linear B

1º semestre do ano lectivo 2006/2007— COM+MEC

Exame da Época Especial — 14 de Setembro de 2007

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia — Universidade do Minho

Curso: Nome: Número: Classificação:

A prova tem a duração de 120 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. Durante a realização da prova os telemóveis devem estar desligados e só se pode abandonar a sala passados 15 minutos do seu início. A prova é constituída por três grupos e termina com a palavra "Fim". No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 200.

Grupo I — Indique, na folha do enunciado da prova e sem apresentar cálculos nem justificações, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas usando para tal os caracteres "V" ou "F", respectivamente. Cotações — resposta certa: 5; resposta em branco: 0; resposta errada: -5, sendo 0 a cotação mínima neste grupo.

I.1 ☐ Dadas duas matrizes A e B quaisquer, é sempre possível calcular AB.

I.2 ☐ Sejam A e B matrizes comutáveis. Então, A e B são matrizes quadradas da mesma ordem.

I.3 ☐ A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1 - x_3 + \alpha)$, é linear se e só se $\alpha = 0$.

I.4 ☐ -3 é um valor próprio de multiplicidade dois da matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

I.5 ☐ Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & k_1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & -2 \end{smallmatrix}\right]$, $k_1 \in \mathbb{R}$, e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ k_2 \end{smallmatrix}\right]$, $k_2 \in \mathbb{R}$. Se $k_1 \in [1, 2]$ e $k_2 \in [2, 3]$ o sistema (S) é possível e determinado.

I.6 ☐ Seja (S) um sistema linear com mais equações do que incógnitas. Então, (S) é um sistema impossível.

I.7 $\square$ Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido das operações $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ e $\alpha \odot (x_1, x_2) = (\alpha^2 x_1, \alpha^2 x_2)$. Então, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^2$: $(\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$.

I.8 $\square$ Considere o conjunto $V = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ munido das operações $(x, x^2) \oplus (y, y^2) = (x + y, (x + y)^2)$ e $\alpha \odot (x, x^2) = (\alpha x, \alpha^2 x^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \underline{x}, \underline{y} \in V : \alpha \odot (\underline{x} \oplus \underline{y}) = \alpha \odot \underline{x} \oplus \alpha \odot \underline{y}$.

Grupo II — Complete, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, as seguintes frases de modo a obter proposições verdadeiras. Cotações — resposta certa: 3; resposta em branco ou errada: 0.

II.1 Considere o sistema de equações lineares (S) cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix}$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta-1 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) $c(A) = 3$ se e só se $\boxed{}$.

(b) $c(A|b) = 1$ se e só se $\boxed{}$.

(c) (S) é possível e determinado se e só se $\boxed{}$.

(d) (S) é impossível se e só se $\boxed{}$.

(e) Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, então $CS_{(S)} = \boxed{}$.

II.2 Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tal que $|A| = 2$.

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = \boxed{}$.

(b) $|A^T A^{-1}| = \boxed{}$.

(c) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} = \boxed{}$.

II.3 Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{4n\times 4n}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^i & \text{se } i \geq j, \\ 0 & \text{se } i < j. \end{cases}$ Então, $\det(A) = \boxed{}$.

II.4 Sejam $n \in \mathbb{N}$ e a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Então, $A^n = \boxed{}$.

II.5 Sejam as matrizes $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } \ i \geq j, \\ 1 & \text{se } \ i < j. \end{cases}$

(a) $A^2 = \boxed{}$. (b) $AB = \boxed{}$. (c) $B^{-1} = \boxed{}$.

II.6 A matriz de ordem 2 dada por $A = \boxed{}$ é ortogonal.

II.7 (a) Sejam $x = (1, 0, 1)$ e $\mathcal{S}_1 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Então, $[x]_{\mathcal{S}_1} = \boxed{}$.

(b) Sejam $y = (1, 2, 3)$ e $\mathcal{S}_2 = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Então, $[y]_{\mathcal{S}_2} = \boxed{}$.

(c) Sejam $z = (1, 0, 0)$ e $\mathcal{S}_3 = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Então, $[z]_{\mathcal{S}_3} = \boxed{}$.

(d) Sejam $p = x^2 + 1$ e $\mathcal{S}_4 = (x^2, x^2 - 1, x + 2)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$. Então, $[p]_{\mathcal{S}_4} = \boxed{}$.

II.8 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x, y, z) = (x + z, x)$.

(a) $A_T = \boxed{}$. (c) $c_T = \boxed{}$.

(b) $\mathcal{N}_T = \boxed{}$. (d) $n_T = \boxed{}$.

II.9 Seja a matriz $X = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Então, fer($X$)= $\boxed{}$.

Grupo III — Responda, nas folhas que lhe foram distribuídas e por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar, bem como as respectivas justificações. Cotações: 20+15+(8+8)+20+20.

III.1 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $AA^T = -I_n$. Mostre que n é par, que A é invertível e determine uma expressão para A^{-1}.

III.2 Defina conjunto gerador de um espaço vectorial, conjunto linearmente independente e base de um espaço vectorial.

III.3 Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \end{smallmatrix}\right]$ e o vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Mostre, sem o resolver, que o sistema de equações lineares dado é possível e determinado.

(b) Resolva o sistema de equações lineares dado através da Regra de Cramer.

III.4 Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{smallmatrix}\right]$ e o vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Resolva-o através do método de Gauss e do método de Gauss-Jordan.

III.5 Determine o espectro da matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, bem como o espaço próprio do valor próprio de maior módulo.

Fim.