Análise Matemática EE - Ficha nº 3
1º ano, 2º semestre

Funções reais de várias variáveis - Derivadas parciais

1. Utilize a definição de derivada parcial para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P)\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(P)\,,$ sabendo que:

   (a) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}, \qquad P=(2,-1),$

   (b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y)=(0,0) \end{cases}\ , \qquad P=(0,0)$

2. Determina as derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem das seguintes funções:

   a)$f(x,y)=3x-5y$ b) $f(x,y)=x^3y+7x^2-2y^3-1$
   c)$g(x,y)=\dfrac{3x+y^2}{7x+y}$ d)$g(s,t)=\exp(2s-t)$
   e)$h(u,v)=\sin(u^2+4v)$ f) $m(x,y)=\cos\left(1+e^{xy}\right)$
   g)$g(v,w)=v.\ln w$ h) $h(x,y)=e^x\ln\left(y^2+3x\right)$
   i)$n(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ j) $p(x,y,z)=\int_0^{y\sin z}x.4^{2t}dt$

3. Mostre que se $z=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{3}}$, então $3x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

4. A equação diferencial $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, onde $z=f(x,y)$, denomina-se por equação de Laplace. Uma função definida em $\mathbf{R}^2$ que possua derivadas parciais de 2^aordem contínuas numa região do plano e que aí satisfaça a equação de Laplace, diz-se uma **função harmónica**.

   Mostre que as seguintes funções são harmónicas:

   a) $z=e^{kx}\cos(ky)$ b) $z=3x^2y-y^3$

5. Determine para que valores da constante real λ a função $f(x,y)=x^2+\lambda y^2$ é harmónica em $\mathbf{R}^2$.

6. Sejam u e v funções definidas em $\mathbf{R}^2$ que possuem derivadas parciais de 2^aordem contínuas e que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, isto é, tais que,
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\wedge\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$
   Mostre que as funções u e v são harmónicas.

7. Mostre que a função $u(x,t)=t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ satisfaz a equação diferencial $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. A equação denomina-se por equação do calor e traduz o comportamento da difusão do calor numa barra isolada (onde $u(x,t)$ representa a temperatura na posição x no instante t) e outros fenómenos semelhantes.

8. O volume (V) ocupado por uma certa quantidade de gás é determinado pela temperatura (T) e pela pressão (P) através da fórmula $V(T,P)=0.08\frac{T}{P}$. Calcula e interpreta os valores de $\frac{\partial V}{\partial P}$ e $\frac{\partial V}{\partial T}$ quando a temperatura é $T=150$ e $P=20$.

9. Numa loja, o número de televisões vendidas é dada por uma função $f(x,y)$ que depende do preço x de cada televisão e do que se gastou em publicidade, semanalmente y. Supõe que, actualmente, o preço unitário de cada televisão é de 400 euros e que se gasta em publicidade 2000 euros por semana.

(a) Considerando o seu significado, $\frac{\partial f}{\partial x}(400, 2000)$ será positivo ou negativo? Justifica.

(b) Considerando o seu significado, $\frac{\partial f}{\partial y}(400, 2000)$ será positivo ou negativo? Justifica.

10. A prestação mensal da hipoteca de uma casa é uma função $f(A, r)$ de duas variáveis, onde A é o valor da hipoteca e $r\%$ é a taxa de juro. Para uma hipoteca de 30 anos, tem-se que $f(92000, 9) = 740,25$ e $\frac{\partial f}{\partial r}(92000, 9) = 66,2$. Qual o significado do número 66,2?

11. Num dia de frio, uma pessoa sente mais frio se houver vento do que se não houver porque a taxa da perda de calor H (em kilocalorias por metro quadrado, por hora) é uma função da temperatura (t) (em graus Celsius) e da velocidade do vento (w) (em metros por segundo), $H(t, w) = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(33 - t)$. Quando $H = 2000$, corpo exposto ao frio congela num minuto.

    (a) Determina $H(0, 4)$.

    (b) Determina $\frac{\partial H}{\partial w}(0, 4)$ e $\frac{\partial H}{\partial t}(0, 4)$ e interpreta os resultados.

12. Pressupõe-se que o estatuto (*status*) de uma pessoa (S) é uma função do estatuto das suas habilitações literárias (E) e do estatuto dos seus ganhos (G), onde S, E, G são representados numericamente. Se $S = 7\sqrt[3]{E}\sqrt{G}$, determina $\frac{\partial S}{\partial E}$ e $\frac{\partial S}{\partial G}$ quando $E = 125$ e $G = 100$ e interpreta os resultados.

13. Um investigador desenvolveu uma função que permite medir a legibilidade de um texto R. Considerando o texto em amostras com 100 palavras, $R = f(w, s) = 206.835 - (1.015w + 0.846s)$ onde w é o número médio de palavras em cada frase por amostra e s o número médio de sílabas por amostra. Um texto com $R = 0$ é considerado ilegível e um texto com $R = 100$ é considerado fácil para qualquer pessoa que sabe ler.

    (a) Determina $\frac{\partial R}{\partial w}$ e $\frac{\partial R}{\partial s}$.

    (b) Qual é mais fácil de ler: um texto com $w = w_0$ e $s = s_0$ ou um texto com $w = w_0 + 1$ e $s = s_0$? Porquê?

14. Numa comunidade suburbana de uma grande cidade, as pessoas têm a possibilidade de escolher como transporte para o centro da cidade, o autocarro ou o comboio. A procura de cada um destes meios de transporte depende do preço de cada bilhete.

    (a) Seja $f(p_1, p_2)$ o número de pessoas que escolhem o autocarro quando o preço do bilhete do autocarro é p_1 e o preço do bilhete do comboio é p_2. Explica porque é que $\frac{\partial f}{\partial p_1} < 0$ e $\frac{\partial f}{\partial p_2} > 0$.

    (b) Seja $g(p_1, p_2)$ o número de pessoas que escolhem o comboio. Qual o sinal de $\frac{\partial g}{\partial p_1}$ e $\frac{\partial g}{\partial p_2}$?

15. Seja $f(p_1, p_2)$ o número de pessoas que compram um determinado tipo de carro que se move com um determinado combustível onde p_1 representa o preço de cada carro em euros e p_2 o preço do combustível por litro. Explica o significado de $\frac{\partial f}{\partial p_1} < 0$ e $\frac{\partial f}{\partial p_2} < 0$.

16. Um investigador determinou que o consumo anual de comida nos EUA é dado por $f(m, p, r) = 2.186m^{0.6}p^{-0.5}r^{0.9}$ onde m é o salário real de uma pessoa, p o preço médio da comida e r o preço médio de outros bens e serviços.

    Indica o sinal de cada derivada parcial, justificando o seu significado.

17. Seja $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 5y$.

    (a) Mostra que

    $$f(1 + h, 4) - f(1, 4) = 14h + 3h^2$$

    Nota: Significa que, se aproximarmos $f(1 + h, 4) - f(1, 4)$ pelo valor de $14h$, o erro é $3h^2$.

    (b) Considerando a aproximação indicada na alínea anterior, indica qual o erro da aproximação quando $h = 0.01$.