Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância) 1ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**2,0**] Seja o conjunto $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}\subset\mathbb{R}^4$, tais que $\vec{u}_1=(1,2,0,k)$, $\vec{u}_2=(1,k,2-k,2)$, $\vec{u}_3=(-2,-k,1,-1)$ e $\vec{u}_4=(0,1,1,1)$. Calcule os valores de *k*, de forma que U seja uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$. Justifique.

2. [**6,2**] Considere o conjunto $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}\subset\mathbb{R}^4$, com $\vec{a}=(1,-1,2,0)$, $\vec{b}=(1,1,0,1)$, $\vec{c}=(1,-1,3,0)$ e $\vec{d}=(2,2,1,2)$, e os vetores $\vec{v}=(\alpha-1,\alpha+1,0,\beta)$ e $\vec{w}=(\beta,-\beta,1,0)$.

a) Determine o subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$. Indique uma base para o subespaço obtido e conclua em relação à sua dimensão.

b) Será o conjunto S linearmente independente? Justifique.

c) Calcule os valores dos escalares α e β de modo que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ possam pertencer a uma base ortogonal, Q, para o subespaço $L(\mathrm{S})$. Obtenha Q.

d) Determine uma base, W, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que contenha o maior número possível de elementos de S.

GRUPO II

3. [**2,2**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=\sqrt{2}$ e $\vec{c}=\vec{a}-(2\vec{a})\times(2\vec{b})$. Considere o conjunto ortonormal $\mathrm{S}=\{\alpha\vec{a},\alpha\vec{a}\times\vec{b}\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) Determine α e calcule o ângulo, θ, entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

b) Obtenha o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{c}$ (se não resolveu a alínea **a)**, admita $\theta=45°$).

c) Verifique, justificando devidamente, se os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ definem um prisma. Em caso afirmativo calcule o seu volume.

....***(continua no verso)***

GRUPO III

4. [**2,5**] Seja o plano $M=\left\{X\in\mathbb{R}^3\ :\ (X-P)\cdot\vec{n}=0\right\}$. Mostre que:

a) $O'=\dfrac{P\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$ é o ponto do plano M mais próximo da origem.

b) $\left\|\overrightarrow{PO'}\right\|=\left[\|P\|^2-\dfrac{(P\cdot\vec{n})^2}{\|\vec{n}\|^2}\right]^{1/2}=\dfrac{\|P\times\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$.

5. [**4,7**] Sejam o ponto $P=(1,0,-1)$, o plano $M\ :\ x+2y+z=3$ e a reta, h, com a equação vetorial $X(t)=R+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $R=(1,-1,0)$ e $\vec{a}=(1,0,1)$.

a) Determine a distância do ponto P ao plano M e o ângulo que a reta h faz com M.

b) Seja I o ponto de interseção de h com M. Obtenha todas as soluções para o ponto, S, que pertence a h e tal que o triângulo [PIS] tenha $\sqrt{3}$ unidades de área.

6. [**2,4**] Considere o ponto P e a reta h do exercício **5**. Calcule as equações vetoriais de todas as retas que passam em P, são concorrentes com h e fazem, com esta reta, um ângulo de $30°$.