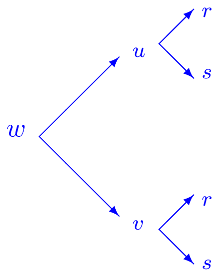
Análise Matemática para Engenharia

folha de exercícios 5 — 2021/2022

• Regra de Cadeia e derivada da função implícita

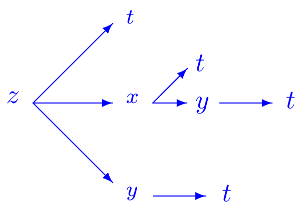
1. Determine $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ sabendo que $w = \sqrt{u^2+v^2}$, onde $u = re^{-s}$ e $v = s^2e^{-r}$.



$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s}(s,r) &= \frac{\partial w}{\partial u}(u(s,r),v(s,r))\frac{\partial u}{\partial s}(s,r) + \frac{\partial w}{\partial v}(u(s,r),v(s,r))\frac{\partial v}{\partial s}(s,r)\\
&= \left.\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right|_{(u(s,r),v(s,r))}(-re^{-s}) + \left.\left(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)\right|_{(x(s,r),y(s,r))} 2se^{-r}\\
&= -\frac{r^2e^{-2s}}{\sqrt{r^2e^{-2s}+s^4e^{-2r}}} + \frac{2s^3e^{-2r}}{\sqrt{r^2e^{-2s}+s^4e^{-2r}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r}(s,t) &= \frac{\partial w}{\partial u}(u(s,r),v(s,r))\frac{\partial u}{\partial r}(s,r) + \frac{\partial w}{\partial v}(u(s,r),v(s,r))\frac{\partial v}{\partial r}(s,r)\\
&= \left.\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right|_{(u(s,r),v(s,r))}(e^{-s}) + \left.\left(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)\right|_{(x(s,r),y(s,r))} (-s^2e^{-r})\\
&= \frac{re^{-2s}}{\sqrt{r^2e^{-2s}+s^4e^{-2r}}} - \frac{s^4e^{-2r}}{\sqrt{r^2e^{-2s}+s^4e^{-2r}}}
\end{aligned}$$

2. Sendo $z = txy^2$ em que $x = t + \ln\left(y+t^2\right)$ e $y = e^t$, determine $\dfrac{dz}{dt}$.



$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt}(t) &= xy^2 + ty^2\left(1+\frac{2t}{y+t^2}\right) + ty^2\frac{1}{y+t^2}\,e^t + 2txy\,e^t\\
&= e^{2t}\left(t+\log\left(e^t+t^2\right)\right) + te^{2t}\left(1+\frac{2t}{e^t+t^2}+\frac{e^t}{e^t+t^2}\right) + 2t\,e^{2t}\left(t+\log\left(e^t+t^2\right)\right)
\end{aligned}$$

3. Se $z(x,y) = f(x-y)$ e f é diferenciável, mostre que z satisfaz a equação

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Seja $u = x - y$. Vem

$$\begin{tikzcd} & & & x \\ z \arrow[r, mapsto] & f \arrow[r] & u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & & y \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du}\,\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \times 1 = f'(u) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{du}\,\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \times (-1) = -f'(u)$$

donde

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

4. Se $g(x, y) = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação

$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

(sugestão: faça $u = x^2 - y^2$ e $v = y^2 - x^2$).

Sejam $u = x^2 - y^2$, $v = y^2 - x^2$.

Vem

$$\begin{tikzcd} & & & x \\ & & u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & & y \\ g \arrow[r, mapsto] & f \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\ & & & x \\ & & v \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & & y \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\,\frac{\partial f}{\partial u} - 2x\,\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} = -2y\,\frac{\partial f}{\partial u} + 2y\,\frac{\partial f}{\partial v}$$

pelo que $\displaystyle y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = 0$

5. Mostre que a equação

$$y \sin(x + y) = 0$$

define, implicitamente, x como função de y em alguma vizinhança do ponto $(0, \pi)$ e calcule a derivada $\frac{dx}{dy}(\pi)$.

Seja $F(x, y) = y \sin(x + y)$. Então

- $F(0, \pi) = 0$.
- $F \in \mathcal{C}^1$?

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\cos(x + y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \sin(x + y) + y\cos(x + y) \tag{1}$$

  Todas estas derivadas são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, sendo, portanto contínuas numa vizinhança de $(0, \pi)$

- $\frac{\partial F}{\partial x}(0, \pi) = \pi \cos(\pi) = -\pi$.

Então, pelo teorema da derivada da função implícita, existe uma vizinhança de $(0, \pi)$ em que a equação define x como uma função de y.

Temos

$$\frac{dx}{dy}(\pi) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(0, \pi)}{\frac{\partial F}{\partial x}(0, \pi)} = 1$$

6. Considere a equação

$$x + 2y - z = \sin(3xyz)$$

(a) Verifique que a equação define z como uma função de x e y numa vizinhança de $(0, 0, 0)$

(b) Mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 1 \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = 2$$

Resolução

(a) Seja $F(x,y,z) = x + 2y - z - \sin(3xyz)$. Então

- $F(0,0,0) = 0$.
- $F \in \mathcal{C}^1$?

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - 3yz\cos(3xyz), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2 - 3xz\cos(3xyz), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1 - 3xy\cos(3xyz), \qquad (2)$$

  Todas estas derivadas são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, sendo, portanto contínuas numa vizinhança de $(0,0,0)$

- $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0) = -1 \neq 0$

Então, pelo teorema da derivada da função implícita, existe uma vizinhança de $(0,0,0)$ em que a equação define z como uma função de x e y.

(b) Mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)} = 1 \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)} = 2$$

7. Considere a superfície $\mathcal{S}$ de equação

$$\cos(xyz) + zye^{2x} = 2$$

e o ponto $P = (0,1,1)$ pertencente a $\mathcal{S}$.

(a) Mostre que a equação define z como uma função de x e y numa vizinhança de $(0,1,1)$.

(b) Determine o plano tangente a $\mathcal{S}$ em P.

Resolução

(a) A superfície dada é o conjunto de nível zero da função de classe $\mathcal{C}^1$ definida por

$$F(x,y,z) = \cos(xyz) + zye^{2x} - 2.$$

Então

- $F(0,1,1) = 0$.
- $F \in \mathcal{C}^1$?

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -yz\sin(xyz) + 2yze^{2x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -xz\sin(xyz) + ze^{2x}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -xy\sin(xyz) + ye^{2x}, \quad (3)$$

  Todas estas derivadas são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, sendo, portanto contínuas numa vizinhança de $(0,1,1) = 0$

- $\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1) = 1 \neq 0$

Então, pelo teorema da derivada da função implícita, existe uma vizinhança de $(0,1,1)$ em que a equação define z como uma função de x e y.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1)} = -2 \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1)} = -1 \qquad (4)$$

(b) Sabemos que z é uma função de x e y, logo, usando (4) a equação cartesiana do plano tangente ao gráfico de z no ponto $(0,1,1)$ é:

$$z = z(0,1) + \frac{\partial z}{\partial x}(0,1)(x-0) + \frac{\partial z}{\partial y}(0,1)(y-1) \Leftrightarrow z = 1 - 2x - (y-1)$$

Alternativamente,sabemos que o vetor normal à superfície $\mathcal{S}$ no ponto $(0,1,1)$ é dado pelo vetor gradiente $\overrightarrow{\nabla} F(0,1,1) = (-yz\sin(xyz) + 2yze^{2x}, -xz\sin(xyz) + ze^{2x}, -xy\sin(xyz) + ye^{2x})\big|_{(x,y,z)=(0,1,1)} = (2,1,1)$, logo os pontos (x,y,z) do plano tangente verificam

$$(x-0, y-1, z-1) \cdot (2,1,1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z = 2$$