Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Reavaliação

* **Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
* **A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
* **Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
* **Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**4,7**] Sejam as aplicações lineares $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $S \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ e $R \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ dadas por

$$T(x,y,z) = (x-z, x+y-z, x+z), \qquad S(x,y) = (-x+y, x+2y, 2x+y)$$

$$R(x,y,z) = (x-z, -x+y+z)$$

em relação às bases canónicas E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *S*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Serão as funções dadas sobrejetivas? E bijetivas? Justifique.

c) Mostre que duas das funções são injetivas e obtenha as suas funções inversas.

2) [**2,0**] Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$. Mostre que T é injetiva se e só se $\mathrm{N}(T) = \{0_{\mathrm{V}}\}$ e que $\dim T(\mathrm{V}) = \dim \mathrm{V}$.

GRUPO II

3) [**4,7**] Considere as transformações lineares definidas na pergunta 1) e as bases $\mathrm{U} = \{(1,-1),(1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathrm{V} = \{(0,1,0),(1,1,0),(1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Recorrendo ao cálculo matricial, determine as matrizes $\boldsymbol{R}_{\mathrm{E}_3,\mathrm{U}} = m(R)_{\mathrm{E}_3,\mathrm{U}}$, representação matricial de R em relação às bases E_3 e U, e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V},\mathrm{E}_3} = m(T)_{\mathrm{V},\mathrm{E}_3}$, representação matricial de T em relação às bases V e E_3.

b) Usando preferencialmente as matrizes obtidas na alínea anterior, calcule a matriz $m(SRT)_{\mathrm{V},\mathrm{V}}$, representação matricial de SRT em relação à base V.

....(*continua no verso*)

GRUPO III

4) [**2,8**] Obtenha, indicando todas as operações efetuadas, o determinante e a característica da matriz real:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} k & k^2 & 0 & -k^2 \\ 2 & 0 & 2 & -6 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2k+4 & 0 \end{bmatrix}$$

GRUPO IV

5) [**5,8**] Seja a transformação linear $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{H} = m(H) = \begin{bmatrix} a & 1 & -b \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a-3 & 1-b \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$ e o conjunto $\mathrm{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, tal que $\vec{v}_1 = (1,1,-2)$ e $\vec{v}_2 = (1,1,0)$.

a) Calcule os valores dos parâmetros reais *a* e *b*, de modo que $\lambda = a - 1$ seja um dos seus valores próprios e que $tr(\boldsymbol{H}) = 8$.

b) Verifique, justificando, se *H* admite uma base de vetores próprios, U, para o espaço $\mathbb{R}^3$ que inclua os elementos de V. Em caso afirmativo, obtenha essa base e a matriz $\boldsymbol{H}_{\mathrm{U,E}} = m(H)_{\mathrm{U,E}}$.

c) Calcule a matriz $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{U,U}}^{-1}$ e indique uma matriz que lhe seja semelhante. Justifique devidamente a resposta, apresentando a relação de semelhança entre as duas matrizes.