GEOMETRIA ANALÍTICA

1. Obtenha uma equação vectorial para a recta que passa pelos pontos:

a) $P=(4,-6)$ e $Q=(1,3)$.

b) $P=(-2,-1)$ e $Q=(4,-1)$.

c) $P=(5,0,-6)$ e $Q=(0,-3,2)$.

d) $P=(-5,2,-1)$ e $Q=(1,0,6)$.

e) $P=(0,2,-1,1)$ e $Q=(-1,-2,1,-1)$.

f) $P=(1,3,4,-3)$ e $Q=(1,2,5,-1)$.

g) $P=(2,6,-2,4,-1)$ e $Q=(0,-2,3,1,4)$.

3. Determine uma equação vectorial para cada uma das seguintes rectas do espaço $\mathbb{R}^2$:

a) Passa no ponto $P=(4,-1)$ e é paralela à recta $-2y=4x$.

b) Passa no ponto $Q=(0,-2)$ e é paralela à recta $-y=x$.

c) Passa no ponto $R=(1,-1)$ e é paralela à recta $y=-5$.

d) Passa no ponto $S=(0,-3)$ e é paralela à recta $x=4$.

5. Em cada um dos casos seguintes obtenha a equação vectorial da recta que passa no ponto *P* e é perpendicular à recta *r*:

a) $P=(0,0)$ e $r\ :\ X(t)=t(-3,1)\ ,\ t\in\mathbb{R}$.

b) $P=(4,5)$ e $r\ :\ X(t)=t(2,2)\ ,\ t\in\mathbb{R}$.

c) $P=(1,2)$ e $r\ :\ X(t)=(2,4)+t(4,0)\ ,\ t\in\mathbb{R}$.

d) $P=(0,1)$ e $r\ :\ X(t)=(1,7)+t(5,2)\ ,\ t\in\mathbb{R}$.

8. Em cada um dos casos seguintes verifique se os pontos *P*, *Q* e *R* são colineares:

a) $P=(1,2,1)$, $Q=(-1,4,1)$ e $R=(1,3,-1)$.

b) $P=(3,2,2)$, $Q=(1,-2,3)$ e $R=(1,-6,4)$.

c) $P=(1,2,1)$, $Q=(1,-2,3)$ e $R=(1,5,-1)$.

11. Classifique as rectas

$$-x-3=\frac{-y-1}{4}=\frac{z-2}{3} \text{ e } \frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{8}=\frac{4-z}{6}$$

quanto às suas posições relativas.

16. Em cada um dos casos seguintes obtenha o ponto S pertencente à recta r que é equidistante dos pontos Q e R:

a) $Q=(1,1,1)$, $R=(1,0,0)$ e $r : X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(0,1,0)$ e $\vec{a}=(1,1,1)$.

b) $Q=(3,3,3)$, $R=(1,3,2)$ e $r : 2x-8=2y-4=2z-3$.

17. Considere a recta r que passa nos pontos $P=(1,1,0)$ e $Q=(1,0,1)$. Em cada um dos casos seguintes obtenha os pontos, C, pertencentes à recta r, de forma que a área do triângulo $[ABC]$ seja igual a $1/2$ unidades de área:

a) $A=(1,1,2)$ e $B=(3,1,2)$.

b) $A=(1,3,-2)$ e $B=(1,0,0)$.

20. Sejam as rectas $r : X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$ e $s : X(u)=Q+u\vec{b}$, $u\in\mathbb{R}$, em que $P=(1,0,2)$, $\vec{a}=(2,1,3)$, $Q=(0,1,-1)$ e $\vec{b}=(1,\omega,2\omega)$. Determine o valor do parâmetro real ω de forma que as rectas sejam complanares.

21. Considere as rectas $r : X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$ e $s : X(u)=Q+u\vec{b}$, $u\in\mathbb{R}$, em que $P=(1,-1,2)$, $\vec{a}=(1,0,2)$, $Q=(2,0,1)$ e $\vec{b}=(3,1,3)$.

a) Mostre que as rectas são concorrentes.

b) Obtenha o ponto $I=r\cap s$.

28. Determine a equação vectorial e a equação cartesiana do plano que passa no ponto $Q=(1,2,0)$ e contém a recta $r : X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(3,4,1)$ e $\vec{a}=(1,1,3)$.

29. Determine a equação cartesiana do plano que passa no ponto $P=(2,2,3)$ e é perpendicular à recta $r\ :\ x-z=-2y-4x=-2$.

31. Considere o plano $M\ :\ 2x+y-z=7$ e o ponto $P=(-1,0,3)$. Calcule:

a) A distância do ponto *P* ao plano *M*.

b) O ponto, *Q*, do plano *M* situado à mínima distância do ponto *P*.

32. Em cada um dos casos seguintes verifique se a recta *r* está contida no plano *M*:

a) $M\ :\ x+2y+3z=1$ e $r\ :\ X(t)=(1+2t,-t,0)$, $t\in\mathbb{R}$.

b) $M : X(t,u)=(1+t-u,4-t+2u,1+t-u)$, $(t,u)\in\mathbb{R}^2$ e *r* passa nos pontos $P=(2,3,2)$ e $Q=(0,0,1)$.

34. Obtenha o valor do comprimento da projecção ortogonal do segmento de recta $[PQ]$, em que $P=(1,2,3)$ e $Q=(-3,2,-1)$, sobre o plano $x+2y+3z=0$.

35. Considere o plano $M\ :\ x+y-z=3$ e a recta *r* que passa nos pontos $P=(1,0,0)$ e $Q=(0,-1,-1)$. Determine a recta, *s*, simétrica da recta *r* em relação ao plano *M*.

36. Sejam o plano $M=\left\{P+s\vec{a}+t\vec{b}\right\}$, em que $P=(1,1,0)$, $\vec{a}=(1,0,1)$ e $\vec{b}=(0,1,-1)$, e a recta $r\ :\ X(u)=(2u,u,0)$, $u\in\mathbb{R}$. Em cada um dos casos seguintes exprima o vector $\vec{v}=(1,2,4)$ como a soma das componentes $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ tais que:

a) $\vec{v}_1$ é paralela ao plano *M* e $\vec{v}_2$ é paralela à direcção definida pela recta *r*.

b) $\vec{v}_1$ é paralela ao plano *M* e $\vec{v}_2$ é paralela à direcção ortogonal ao plano *M*.

42. Mostre que os planos $M=\left\{s\vec{a}+t\vec{b}\right\}$ e $M_1=\left\{Q+u\vec{c}+v\vec{d}\right\}$, em que $\vec{a}=(-1,\alpha,1)$, $\vec{b}=(2,0,1)$, $Q=(1,2,3)$, $\vec{c}=(\alpha,1,0)$ e $\vec{d}=(1,0,\alpha)$, são concorrentes para todo o $\alpha\in\mathbb{R}$.

44. Considere o ponto $Q=(-1,1,1)$, o plano $M\ :\ x-2y-z=0$ e o plano, M_1, que passa no ponto $P=(0,1,-1)$ e é gerado pelos vectores $\vec{a}=(1,2,0)$ e $\vec{b}=(1,0,0)$. Seja r a recta de intersecção dos planos M e M_1. Obtenha a equação cartesiana dos planos seguintes:

a) Plano que contém a recta r e é paralelo ao vector $\vec{c}=(-2,1,1)$.

b) Plano que é perpendicular à recta r e que dista 1 unidade da origem.

c) Plano que contém a recta r e que dista 2 unidades do ponto Q.

48. Considere a recta $h\ :\ 2x+2y-2z=x-y-z=4$, a recta $r\ :\ X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(1,-1,2)$ e $\vec{a}=(-3,0,1)$, e o plano $M_1\ :\ 2x+y+3z=2$.

a) Classifique as rectas dadas quanto às suas posições relativas.

b) Obtenha a equação cartesiana do plano, M, que passa no ponto $Q=(0,1,1)$ e contém r.

c) Determine a recta r_1 que é a projecção ortogonal da recta h sobre o plano M.

d) Calcule os pontos da recta h que são equidistantes dos planos M e M_1.

49. Sejam as rectas $s\ :\ x+y-2z=10y=10$ e $r\ :\ X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, com $P=(3,1,0)$ e $\vec{a}=(1,1,1)$.

a) Classifique as rectas dadas quanto às suas posições relativas.

b) Obtenha a equação cartesiana do plano, M, que contém r e é paralelo a s.

c) Calcule os pontos R e S pertencentes, respectivamente, às rectas r e s que estão situados sobre a respectiva recta perpendicular comum.

d) Obtenha a equação vectorial da recta, t, perpendicular comum às rectas dadas.

e) Determine a equação cartesiana do plano, M_1, que é paralelo às rectas r e s e que passa num ponto, I, da recta t que é equidistante das rectas r e s.

52. Relativamente ao plano $M\ :\ x+kz=w$, obtenha os valores dos parâmetros reais k e w tais que:

a) A distância do plano à origem seja igual a $\sqrt{2}$ unidades.

b) O ângulo entre M e o plano $y+z=5$ seja igual a $60°$.

54. Obtenha os planos que contêm a recta $x-2y=z=-1$ e fazem um ângulo de $45°$ com o plano $x+z=0$.

57. Considere a recta $r\ :\ 4x+2y=z-3x=-4$ e o ponto $P=(8,-1,8)$. Determine a equação vectorial e as equações cartesianas da recta, h, que passa em P e é perpendicular (concorrente) à recta r.

59. Sejam o plano $M\ :\ 2x-y+3z=1$, a recta $s\ :\ X(u)=(4+3u,5+6u,u)$, $u\in\mathbb{R}$ e a recta, r, que passa nos pontos $P=(1,0,1)$ e $Q=(0,1,2)$.

a) Classifique as rectas dadas quanto às suas posições relativas.

b) Obtenha o ponto, I, da recta s mais próximo da origem.

c) Determine a equação vectorial da recta, h, que passa no ponto I, é ortogonal à recta r e é paralela ao plano M.

60. Sejam a recta $r\ :\ X(t)=(1-t,-1,1+2t)$, $t\in\mathbb{R}$ e o ponto $Q=(-1,1,3)$. Determine:

a) A distância do ponto Q à recta r.

b) O ponto, I, da recta r mais próximo de Q.

c) A equação cartesiana da recta, h, que passa no ponto Q, é complanar com r e é paralela ao plano coordenado xOz.

61. Considere o plano $M\ :\ 2x+y-z=3$ e a recta $r\ :\ X(u)=P+u\vec{a}$, $u\in\mathbb{R}$, em que $P=(-1,0,1)$ e $\vec{a}=(1,1,0)$.

a) Classifique a recta *r* e o plano *M* quanto às suas posições relativas.

b) Calcule o ponto, *I*, de intersecção de *r* com *M* e o ângulo, α , que a recta faz com o plano.

c) Obtenha a recta, r_1, contida em *M* e que é perpendicular (concorrente) à recta *r*.

d) Calcule os pontos, *S* e *T*, pertencentes à recta *r* que distam $\sqrt{6}$ unidades de *M*.

e) Determine as rectas, *s* e *t*, que passam, respectivamente, nos pontos *S* e *T*, são paralelas a *M* e fazem um ângulo de $60°$ com a recta *r*.

62. Sejam o plano $M\ :\ x-y=1$ e a recta $r\ :\ X(u)=R+u\vec{a}$, $u\in\mathbb{R}$, em que $R=(-1,2,-1)$ e $\vec{a}=(1,-1,1)$. Determine:

a) O ponto, *I*, de intersecção da recta *r* com o plano *M*.

b) O ponto, *Q*, pertencente a *r* que dista $\sqrt{2}$ unidades de *M* e que se encontra mais afastado do plano coordenado *xOy*.

c) Os pontos *P* e *S*, tais que os triângulos $[IQP]$ e $[IQS]$ sejam rectângulos no vértice *Q*, tenham $2\sqrt{3}$ unidades de área e os catetos $[QP]$ e $[QS]$ sejam paralelos ao plano *M*.

63. Considere o plano $M\ :\ x+y+z=5$ e o plano M_1 que passa no ponto $P=(1,2,3)$ e contém a recta $r\ :\ X(t)=S+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $S=(1,0,1)$ e $\vec{a}=(0,2,1)$. Determine:

a) A equação cartesiana do plano M_1.

b) A recta, *s*, que passa em $Q=(2,-1,1)$ e é paralela a *M* e M_1.

c) A distância da recta *s* ao plano M.

d) As rectas, r_1 e r_2, contidas em *M*, concorrentes com *r* e que fazem um ângulo de $60°$ com *s*.

65. Sejam o plano $M\ :\ 2x-y-2z=2$ e a recta $r\ :\ X(t)=S+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $S=(-1,0,1)$ e $\vec{a}=(1,-2,3)$. Determine:

a) O ponto, *I*, de intersecção de *r* com *M*.

b) A equação cartesiana do plano, M_1, paralelo ao vector $\vec{b}=(7,8,3)$ e que contém *r*.

c) A recta, *s*, que passa em *I*, está contida em M_1 e é de maior inclinação em relação a *M*.

66. Sejam o plano $M=\left\{Q+s\vec{a}+t\vec{b}\right\}$, em que $Q=(0,0,-3)$, $\vec{a}=(0,1,1)$ e $\vec{b}=(1,0,2)$, a recta $r\ :\ X(u)=R+u\vec{c}$, $u\in\mathbb{R}$, tal que $R=(4,3,2)$ e $\vec{c}=(1,-1,0)$, e os pontos $P=(2,1,2)$ e $T=(2,1,0)$. Calcule:

a) A distância da origem à recta *r*.

b) A equação cartesiana do plano *M*.

c) A equação cartesiana do plano, M_1, que passa em *P* e contém *r*.

d) Um ponto *S* pertencente a M_1 que dista 2 unidades de *T*.

e) A recta, r_1, que passa em *S*, está contida em M_1 e é de maior inclinação em relação a *M*.

68. Considere o ponto $Q=(3,2,1)$, e as rectas $r\ :\ X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(1,0,1)$ e $\vec{a}=(1,1,2)$, e $s\ :\ x-2z=2y=2$. Determine:

a) A equação vectorial da recta *s*.

b) A recta, *h*, que passa em *Q* e é concorrente com as rectas *r* e *s*.

c) As rectas, *f* e f_1, que são concorrentes com as rectas *r* e *s*, são paralelas ao plano coordenado *xOy* e distam deste plano 1 unidade.

70. Sejam o ponto $Q=(1,2,-3)$, e a recta $r\ :\ X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(0,-1,-1)$ e $\vec{a}=(2,1,0)$. Obtenha:

a) O plano, *M*, que passa no ponto *Q* e é perpendicular à recta *r*.

b) O ponto, *I*, de intersecção de *r* com *M*.

c) Os planos, M_1 e M_2, que passam em *Q*, são perpendiculares a *M* e distam 2 unidades do ponto *I*.

71. Sejam o plano $M\ :\ x-4y+z=0$, a recta $s\ :\ X(u)=S+u\vec{a}$, $u\in\mathbb{R}$, em que $S=(1,1,0)$ e $\vec{a}=(2,1,2)$, e o ponto $P=(1,0,1)$. Determine:

a) O plano, M_1, que passa em *P* e é perpendicular à recta *s*.

b) O ponto, *I*, de intersecção de *s* com M_1.

c) O ponto, I_1, que é a projecção ortogonal de *P* sobre *M*.

d) A área do triângulo $[IPI_1]$.

e) As rectas, *r* e r_1, que estão contidas no plano *M*, são paralelas à recta *s* e distam $\sqrt{20}/3$ unidades do ponto *P*.