PRODUTO VECTORIAL E PRODUTO MISTO

3. Sejam $\vec{a} = x\vec{i} + \vec{j} - y\vec{k}$, $\vec{b} = (y - x)\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Calcule o valor de:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$, o produto vectorial de $\vec{a}$ por $\vec{b}$.

b) O que se pode concluir em relação a $\vec{b} \times \vec{a}$?

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$, o produto misto $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$.

d) O que se pode concluir em relação a $\vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{c}$?

5. Calcule, recorrendo ao produto vectorial, a área do triângulo com vértices nos pontos:

a) $A = (0,1,2)$, $B = (2,0,1)$, $C = (3,4,0)$.

b) $O = (0,0,0)$, $B = (0,2,1)$, $C = (1,-1,1)$.

6. Os pontos $A = (1,2,3)$, $B = (1,5,2)$, $C = (1,6,3)$, $D = (1,5,5)$ e $E = (1,3,4)$ são vértices consecutivos de um pentágono. Determine:

a) A área do pentágono recorrendo ao produto vectorial.

b) O ângulo interno, θ, do pentágono com vértice no ponto *A*.

8. Calcule, recorrendo ao produto misto, o volume do paralelipípedo definido pelos vectores:

a) $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $-\vec{i} + \vec{k}$.

b) $2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

9. Determine o vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{x} \cdot (2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = -1$ e $\vec{x} \times (-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = -\vec{i} - \vec{j}$.

11. Seja $\{\vec{a},\vec{b}\}\subset\mathbb{R}^3$ um conjunto ortonormado. Tendo em atenção as propriedades do produto vectorial calcule $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$ e $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}$.

13. Sejam $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, em que $\vec{a}$ é não nulo. Mostre que se $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ e $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$, então $\vec{b}=\vec{c}$.

15. Identifique quais dos seguintes produtos mistos são iguais:

$\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a}$	$\vec{b}\cdot\vec{a}\times\vec{c}$	$\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a}$	$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$
$\vec{c}\times\vec{a}\cdot\vec{b}$	$\vec{a}\cdot\vec{c}\times\vec{b}$	$-\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a}$	$\vec{b}\times(-\vec{a})\cdot\vec{c}$

17. Seja $\{\vec{a},\vec{b}\}\subset\mathbb{R}^3$ um conjunto linearmente independente e $\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})-\vec{b}$. Designe-se por β o ângulo formado pelos vectores $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

a) Prove que os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}+\vec{c}$ são perpendiculares.

b) Mostre que $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

c) Calcule a norma do vector $\vec{c}$, sabendo que $\vec{b}$ é versor e $\left\|\vec{b}\times\vec{a}\right\|=3$.

18. Considere o conjunto ortogonal $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b}\}\subset\mathbb{R}^3$, em que $\vec{b}$ é versor, e seja $\vec{d}$ o vector dado por $\vec{d}=\vec{c}-2(\vec{a}\times\vec{b})$, sendo $\vec{c}\in L(\mathrm{S})$. Admitindo que $\left\|\vec{d}\right\|=\sqrt{8}$ e que $\measuredangle(\vec{d},\vec{c})=\pi/3$, calcule a norma do vector $\vec{a}$.

19. Sejam $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$, $\|\vec{a}\|=\sqrt{3}$, $\|\vec{b}\|=\sqrt{2}$ e $\vec{c}=\sqrt{3}(\vec{a}\times\vec{b})-\sqrt{2}\vec{b}$. Determine:

a) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$.

b) A norma do vector $\vec{c}$.

c) O ângulo, α, formado pelos vectores $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

20. Seja $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b}\}\subset\mathbb{R}^3$ um conjunto linearmente independente. Verifique se cada um dos conjuntos seguintes é, ou não, linearmente independente:

a) $\mathrm{T}=\left\{\vec{a}+2\vec{b},3\vec{a}-\vec{b},-\vec{a}\times\vec{b}\right\}$.

b) $\mathrm{U}=\left\{\vec{a}-2\vec{b},\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{b}),2\vec{b}+(\vec{a}\times\vec{b})\right\}$.

c) $\mathrm{V}=\left\{\vec{a},\vec{a}+\vec{b},(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})\right\}$.

21. Recorrendo ao produto misto, determine os valores de ω, de modo que o conjunto de vectores $\mathrm{S}=\{(1,\omega,1),(\omega,1,0),(0,1,\omega)\}\subset\mathbb{R}^3$ seja linearmente independente.

24. Sejam $\vec{a},\vec{b}$ vectores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$. Mostre que:

a) $\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{i})\vec{i}+(\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{j})\vec{j}+(\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{k})\vec{k}$.

b) $-2\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{i})\times\vec{i}+(\vec{a}\times\vec{j})\times\vec{j}+(\vec{a}\times\vec{k})\times\vec{k}$.

25. Sejam $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\vec{a}\times\vec{c}\cdot\vec{b}=-1$, $\vec{a}\times\vec{d}\cdot\vec{b}=7$, $\vec{c}+\vec{d}=(3,0,3)$ e $\vec{c}-\vec{d}=(-1,-2,1)$. Determine o vector $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$.

27. Considere os vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=2$, $\|\vec{c}\|=4$ e $\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})-\vec{a}$. Calcule:

a) O volume do paralelepípedo definido pelos vectores dados.

b) O ângulo, φ, formado pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

28. Os pontos $A=(1,-1,4)$, $B=(5,-1,4)$, $C=(6,1,4)$ e $D=(2,1,4)$ são vértices consecutivos de um quadrilátero.

a) Identifique o quadrilátero. **b**) Calcule a sua área.

c) Obtenha todos os pontos possíveis, E, tais que $\overline{AE}$ seja a aresta de um paralelipípedo que tem por base o quadrilátero dado e 24 unidades de volume.

29. Calcule o volume do tetraedro [*ABCD*] em que:

a) $A=(2,3,-2)$, $B=(1,6,2)$, $C=(2,4,-3)$ e $D=(3,2,4)$.

b) $\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(0,1,1)$ e $\overrightarrow{AD}=(-4,0,0)$.

30. Sejam os vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$, $\|\vec{c}\|=\|\vec{d}\|=1$, $\measuredangle(\vec{c},\vec{d})=\pi/3$, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ e $\measuredangle(\vec{a},\vec{c}\times\vec{d})=\pi/6$. Calcule:

a) A norma do vector $\vec{b}$.

b) O ângulo, θ, formado pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

32. Considere os vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in\mathbb{R}^3$, tais que $S=\{\vec{a},\vec{b}\}$ é um conjunto ortonormal, $\vec{c}$ é um vector paralelo a $\vec{a}\times\vec{b}$, $\|\vec{c}\|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{c}\times\vec{b}>0$ e $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}-\vec{d}+\vec{a}$. Determine:

a) A norma do vector $\vec{a}+\vec{b}$. **b**) A norma do vector $\vec{d}$.

c) O ângulo, θ, formado pelos vectores $\vec{d}$ e $\vec{a}+\vec{b}$.

33. Sejam os vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in\mathbb{R}^3$, tais que $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{c})=\pi/6$, $\|\vec{a}\|=1$, $\|\vec{b}\|=\|\vec{c}\|$, $\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{c})+\vec{b}$ e $\measuredangle(\vec{c},\vec{d})=\pi/3$. Calcule o ângulo, θ, formado pelos vectores $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

35. Considere a base ortonormal directa $\mathrm{S}=\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}\subset\mathbb{R}^3$ e o vector $\vec{d}=\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$. Calcule:

a) A norma do vector $\vec{a}\times\vec{d}$.

b) O vector $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{d})$.

c) O ângulo, β, formado pelos vectores $\vec{a}\times\vec{d}$ e $\vec{c}$.

36. Considere os vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in\mathbb{R}^3$, tais que $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $\|\vec{a}\|=3$, $\|\vec{b}\|=1$, $\|\vec{c}\|=2$, $\|\vec{a}+\vec{c}\|=1$, $\measuredangle(\vec{c},\vec{b})=\pi/6$, $\vec{a}\cdot\vec{c}\times\vec{b}=-2$ e $\vec{d}=\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})$. Obtenha:

a) A norma do vector $\vec{d}$.

b) O ângulo, ϕ, formado pelos vectores $\vec{c}$ e $\vec{a}\times\vec{b}$.

c) O ângulo, β, formado pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{d}$.

d) A norma do vector $\vec{c}\times\vec{d}$.

37. Sejam os vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in\mathbb{R}^3$, tais que $\left\{\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right\}$ é um conjunto ortogonal, $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$, $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}$, $\|\vec{a}-\vec{c}\|=2$, $\measuredangle(\vec{c},\vec{a})=\pi/3$ e $\vec{c}+\vec{d}=\vec{b}\times\vec{a}$. Determine:

a) As normas dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{d}$.

b) A norma do vector $\vec{a}+\vec{d}$.

c) O ângulo, α, formado pelos vectores $\vec{a}+\vec{d}$ e $\vec{a}\times\vec{b}$.

38. Sejam $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, em que $S=\{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\}$ é um conjunto ortonormal, $\|\vec{a}-\vec{b}\|=1$, $\|\vec{c}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{a}+\vec{c}\|=\sqrt{5}$, $\measuredangle(\vec{c},\vec{b})=\pi/6$ e $\vec{d}=2\vec{a}+2\vec{b}+\alpha(\vec{a}\times\vec{c})$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Calcule:

a) A norma do vector $\vec{b}$.

b) A norma do vector $\vec{a}\times\vec{b}$.

c) O valor de α, admitindo que $\|\vec{d}\|=5$.

39. Considere os vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}\in\mathbb{R}^3$, tais que $S=\{\vec{a},\vec{b}\}$ é um conjunto ortonormal, $\vec{a}\cdot\vec{c}=1$, $\measuredangle(\vec{c},\vec{b})=\pi/4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=1$, $\vec{d}=\vec{c}-\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{e}=(\vec{c}\times\vec{b})-\vec{a}+\vec{b}$ e $\|\vec{e}\|=\sqrt{5}$. Obtenha:

a) A norma dos vectores $\vec{b}\times\vec{c}$ e $\vec{c}$.

b) A norma do vector $\vec{d}$.

c) O ângulo, α, formado pelos vectores $\vec{d}$ e $\vec{b}\times\vec{c}$.

d) A norma do vector $(\vec{e}-\vec{b})\times\vec{b}$.

40. Seja o conjunto $S=\{\vec{a},\vec{b}\}\subset\mathbb{R}^3$, em que $\vec{a}=(1,1,1)$ e $\vec{b}=(0,1,2)$. Obtenha uma base ortonormal positiva para o espaço $\mathbb{R}^3$, $T=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$, que verifique as condições seguintes:

i) O vector $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{a}$ e $\vec{u}\cdot\vec{a}<0$;

ii) O vector $\vec{v}\in L(S)$ e $\vec{v}\cdot\vec{i}<0$.

42. Sejam os vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$; mostre que $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}=\vec{0}$.