Análise Matemática EE - Ficha nº 2
1º ano, 2º semestre

Funções reais de várias variáveis - Limites e continuidade

1. Determine os seguintes limites:

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \left(2x - y^2\right)$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{3},2\right)} y \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$

   c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^2\right)$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \left(\frac{y-3x}{x}\right)$

2. Estude a existência de limite nos seguintes casos:

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x - y}{x + 3y}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)$

   c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$

3. Mostre que:

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

   c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 - 3y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

4. Estude a continuidade das seguintes funções:

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{5x^2 - y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x + y}{5x - y} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \text{ se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \text{ se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$

   d) $f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ se } y \leq 0 \text{ ou } y \geq x^2 \\ 1 \text{ se } 0 < y < x^2 \end{cases}$

   e) $f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \neq y \\ x^2 \text{ se } x = y \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = y = 0 \end{cases}$ f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+1} \text{ se } x \neq -1 \\ 0 \text{ se } x = -1 \end{cases}$

5. Determine k de modo que f seja contínua no ponto $(2,2)$.

   $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y} \text{ se } x \neq y \\ k \text{ se } x = y \end{cases}$