Exercícios sobre sistemas de equações lineares

---

1. Considere o sistema de equações Ax = b com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determine o conjunto solução.

> Solução:
> Há 3 modos diferentes de representar esta solução:
> $$(x, y, z) = (1 - z, -z, z)$$
> $$(x, y, z) = (-x, x - 1, 1 - x)$$
> $$(x, y, z) = (1 + y, y, -y)$$
> Se repararem bem, todas dizem o mesmo, que o valor da primeira e da segunda coordenada são iguais, e que o valor da terceira coordenada é igual à soma de 1 com o simétrico da primeira (segunda) coordenada.

2. Considere o sistema de equações Ax = b com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Determine o conjunto solução.

3. Considere o sistema de equações Ax = b com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determine o conjunto solução.

4. Considere o sistema de equações Ax = b com

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Determine o conjunto solução.

5. Considere o sistema de equações Ax = b com

$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2y + z + 4x = -3 \\ -z + 2y = 3 \end{cases}$$

Determine o conjunto solução.

6. Considere o sistema de equações Ax = b com

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -5x + 3z = 2 \\ -17x - 4y + 11z = 6 \end{cases}$$

Determine o conjunto solução.

Discussão de sistemas

7. Considere o sistema de equações Ax = b com

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix} \text{ e } b=\begin{bmatrix}\alpha\\0\\0\end{bmatrix}$$

i) Diga para que valores de α o sistema é possível determinado.

ii) Diga para que valores de α o sistema é possível indeterminado.

iii) Diga para que valores de α o sistema é impossível.

8. Considere o sistema de equações Ax = b com

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&2&a\end{bmatrix} \text{ e } b=\begin{bmatrix}1\\1\\c\end{bmatrix}.$$

i) Diga para que valores de **a** e **c** o sistema é possível determinado.

ii) Diga para que valores de **a** e **c** o sistema é possível indeterminado.

iii) Diga para que valores de **a** e **c** o sistema é impossível.

iv) Indique a solução do sistema para a=2 e c=0.

v) Indique a solução do sistema homogéneo associado para a=1.

9. Considere o sistema de equações Ax = b com

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\0&2&0&a\end{bmatrix} \text{ e } b=\begin{bmatrix}1\\1\\c\end{bmatrix}.$$

i) Diga para que valores de **a** e **c** o sistema é possível determinado.

ii) Diga para que valores de **a** e **c** o sistema é possível indeterminado.

iii) Diga para que valores de **a** e **c** o sistema é impossível.

iv) Indique a solução do sistema para **a**=3 e **c**=-2.

v) Indique a solução do sistema homogéneo associado para **a**=2.

10. Considere o sistema de equações Ax = b com

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -4 & 1 & \alpha\end{bmatrix} \text{ e } b=\begin{bmatrix}1\\1\\ \beta\end{bmatrix}.$$

i) Diga para que valores de α e β o sistema é possível determinado.

ii) Diga para que valores de α e β o sistema é possível indeterminado.

iii) Diga para que valores de α e β o sistema é impossível.

iv) Indique a solução do sistema homogéneo associado para α =3 e β =-2.

v) Indique a solução do sistema homogéneo associado para α =3.

Soluções:

2 $(x,y,z)=(2,1,0)$

3 $\{\}$

4 $(x,y,z)=(2,2,1)$

5 $\{\}$

6 $(x,y,z)=(3y-1,y,5y-1)$

7 PD se $\{\}$, PI se $\alpha=0$ Impossível se $\alpha\neq 0$

8 (i) PD se $a\neq 2\wedge c\in\Re$; (ii) PI se $a=2\wedge c=0$; (iii) Impossível se $a=2\wedge c\neq 0$;
(iv) $(x,y,z)=(-z+1,-z,z)$; (v) (0,0,0).

9 (i) PD se {}; (ii) PI se $(a\neq 2\wedge c\in\Re)\vee(a=2\wedge c=0)$; (iii) Impossível se $a=2\wedge c\neq 0$;
(iv) $(x,y,z)=(-z+1,2,z,-2)$; (v) $(-z,-w,z,w)$

10 (i) PD se $\alpha\neq\frac{1}{3}$; (ii) PI se $\alpha=\frac{1}{3}\wedge\beta=-\frac{5}{3}$; (iii) Impossível se $\alpha=\frac{1}{3}\wedge\beta\neq-\frac{5}{3}$; (iv) $\left(\frac{3}{8},\frac{-1}{8},\frac{-1}{8}\right)$
(v) (0,0,0)

Exercícios de revisão

1. Considere os sistemas (S_1) e (S_2) de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e coeficientes reais

$$(S_1)\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+3x_3+x_4=0\\ -x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}x_1-2x_2+x_4=1\\ 2x_1-x_3+x_4=0\\ -x_1+2x_2-x_3=-1\\ x_2-x_4=0\end{cases}$$

1.1 Justifique que (S_1) e (S_2) são sistemas possíveis e determine o seu grau de indeterminação.

1.2 Resolva os sistemas (S_1) e (S_2).

2. Discuta, em função dos parâmetros *t* e *k,* a possibilidade e grau de indeterminação de cada um dos sistemas de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e coeficientes em IR :

2.1 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - tx_3 = 0 \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = t \end{cases}$

3. Considere o sistema *(S)* de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e coeficientes reais cuja matriz simples é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e cuja matriz dos termos independentes é $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3.1 Resolva o sistema homogéneo associado a *(S).*

3.2 Verifique que $\left(0, 1, \frac{3}{2}, -1\right)$ é solução de *(S)* e determine *Sol (S).*