## Álgebra Linear B

COM+MEC

Exame da  $2^a$  chamada da Época Normal -2006/2007-27 de Janeiro de 2007

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia – Universidade do Minho

Classificação:

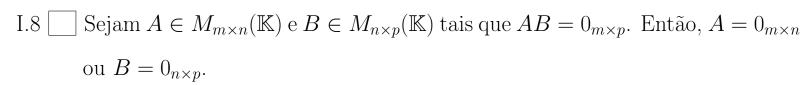
Curso: Nome: Número:

A prova tem a duração de 120 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. Durante a realização da prova os telemóveis devem estar desligados e só se pode abandonar a sala passados 20 minutos do seu início. A prova é constituído por três grupos e termina com a palavra "Fim". No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 200.

Grupo I — Indique, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas usando para tal os caracteres "V" ou "F", respectivamente. Cotações — resposta certa: 5; resposta em branco: 0; resposta errada: -5, sendo 0 a cotação mínima neste grupo.

- I.1 Considere o conjunto  $V = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$  munido das operações  $(x, x^2) \oplus (y, y^2) = (x + y, (x + y)^2)$  e  $\alpha \odot (x, x^2) = (\alpha x, \alpha^2 x^2)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \underline{x} \in V : (\alpha + \beta) \odot \underline{x} = \alpha \odot \underline{x} \oplus \beta \odot \underline{x}$ .
- I.2  $\square$  Seja (S) um sistema linear com mais equações do que incógnitas. Então, (S) é um sistema impossível.
- I.3  $\square$  Sejam  $p=x^2+1\in\mathbb{R}_2[x]$  e  $\mathcal{S}=(x^2,x^2-1,x+2)$  uma base ordenada de  $\mathbb{R}_2[x]$ . Então,  $[p]_{\mathcal{S}}=(1,1,1)$ .
- I.4 Sejam  $A \in B$  matrizes comutáveis. Então,  $(A-B)^3 = A^3 + 3A^2B 3AB^2 B^3$ .

I.5	$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz hermítica.
I.6	$\{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})   (A)_{11} + (A)_{nn} = 0\}$ é um subespaço de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ .
I.7	Sejam $V$ e $V'$ espaços vectoriais e $f:V\longrightarrow V'$ uma aplicação. Então, se
	$f(0_V) \neq 0_{V'}, f$ não é uma aplicação linear.



Grupo II — Complete, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, as seguintes frases de modo a obter proposições verdadeiras. Cotações — resposta certa: 3; resposta em branco ou errada: 0.

II.1 Seja 
$$A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
 tal que  $A\begin{bmatrix} 1\\2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\2 \end{bmatrix}$  e  $A\begin{bmatrix} 1\\1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\\3 \end{bmatrix}$ . Então,  $\lambda(A) = \begin{bmatrix} 1\\2 \end{bmatrix}$ 

II.2 Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ , tal que  $|A^{-1}| = 2$ .

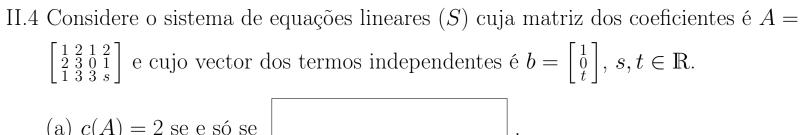
(a) 
$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$
 (c)  $|\operatorname{adj}(A)| =$ 

(b) 
$$|A^2 A^T A^{-1}| =$$
 (d)  $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} =$  .

II.3 Seja  $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A \text{ \'e uma matriz diagonal} \}.$ 

(a) 
$$\in S$$
. (c)  $\dim(S) =$ 

(b) S é um subespaço de  $\Big|$  . (d)  $\Big|$  é uma base de S.





(b) 
$$c(A|b) = 3$$
 se e só se

(c) 
$$(S)$$
 é possível e indeterminado se e só se

(d) 
$$(S)$$
 é impossível se e só se

II.5 Seja  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2), T(x, y, z) = (0, x).$ 

II.6 Sejam as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $C = BB^T$ .

(a) 
$$A^2 = \boxed{ }$$
 . (b)  $adj(A) = \boxed{ }$  . (c)  $C^{-1} = \boxed{ }$ 

Grupo III — Responda, nas folhas que lhe foram distribuídas e por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar, bem como as respectivas justificações. Cotações: 20+(5+5)+20+20+(10+10+10).

III.1 Seja  $x \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$  tal que  $x^T x = [1]$ . Mostre que a  $I_n - 2xx^T$  é uma matriz simétrica e ortogonal.

- III.2 Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  e cujo vector dos termos independentes é  $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ .
  - (a) Mostre, sem o resolver, que (S) é um sistema possível e determinado.
  - (b) Determine  $CS_{(S)}$  através da Regra de Cramer.
- III.3 Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$  e cujo vector dos termos independentes é  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 21 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Resolva-o através do método de Gauss e do método de Gauss-Jordan.

III.4 Considere as aplicações

$$T_1: \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$
 e  $T_2: \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$   
 $A \longmapsto A^T$   $A \longmapsto A^2.$ 

Mostre que  $T_1$  é uma aplicação linear e que  $T_2$  não é uma aplicação linear.

- III.5 Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .
  - (a) Determine o espectro da matriz A.
  - (b) Determine os espaços próprios dos valores próprios da matriz A.
  - (c) Seja X uma matriz quadrada e  $\lambda$  um valor próprio de X. Chama-se multiplicidade geométrica de  $\lambda$  à dimensão de  $E_{\lambda}$ .

Determine as multiplicidades algébricas e geométricas dos valores próprios da matriz A.

Fim.

Classifique numa escala de 1 (horrível) a 6 (espectacular) o Maple TA: