Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Reavaliação

*** Não são consideradas as folhas sem identificação. Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não é possível a utilização de máquinas de calcular gráficas nem de microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**9,2**] Considere as transformações lineares $R \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, em que $R(x,y,z,w) = (x-z, x+w, 2x-z+w)$, $S \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ é representada pela matriz

$$\boldsymbol{S} = m(S) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, tal que

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{U,E_2}$$

é a representação matricial em relação às bases $\mathrm{U} = \{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ e E_2, base canónica para o espaço $\mathbb{R}^2$. Seja a base $\mathrm{V} = \{(2,1),(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Obtenha o núcleo e o contradomínio de *R*. Para cada um destes subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que *S* é injetiva e determine a sua transformação inversa.

c) Usando o cálculo matricial, obtenha as matrizes $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U,V}} = m(T)_{\mathrm{U,V}}$, representação matricial de *T* em relação às bases U e V, e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E_3,V}} = m(T)_{\mathrm{E_3,V}}$, representação matricial de *T* em relação às bases E_3 e V.

d) Determine a matriz $m(TR)_{\mathrm{E_4,V}}$, representação matricial de *TR* em relação às bases E_4, base canónica para o espaço $\mathbb{R}^4$, e V.

2) [**1,3**] Considere a transformação linear $S : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ e o conjunto $\mathrm{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\} \subset \mathrm{V}$. Mostre que se $\mathrm{U}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ é uma base para $N(S)$ e se $\mathrm{U}_2 = \{S(u_{k+1}), \ldots, S(u_n)\}$ é uma base para $S(\mathrm{V})$, então U é uma base para V.

....*(continua no verso)*

GRUPO II

3) [**2,8**] Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o determinante da matriz real

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -k & 1 \\ 1 & k & 4 & 1-k \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenha o valor de k para que $5|\boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{F}^2|$.

4) [**5,5**] Seja a transformação linear $H\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{H} = m(H) = \begin{bmatrix} \beta & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & \alpha & 3 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Sendo $\alpha = 2$ e $\beta = 3$, calcule os valores próprios de $\boldsymbol{H}$ e os respetivos espaços próprios; indique, para cada um desses subespaços, uma base e a dimensão.

b) Relativamente à matriz definida em a), mostre, justificando devidamente, que a função H admite uma base, V, de vetores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$. Obtenha a matriz $\boldsymbol{H}_{\mathrm{V,V}}$ que representa H em relação à base V e apresente as expressões matriciais que comprovam que $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{H}_{\mathrm{V,V}}$ são matrizes semelhantes.

c) Obtenha os valores de α e β de forma que $\boldsymbol{H}$ possua um valor próprio nulo e a soma dos seus valores próprios seja igual a 12.

5) [**1,2**] Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n e não singular. Defina $\boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{A}$, matriz dos cofatores de $\boldsymbol{A}$, e mostre que $[\boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.