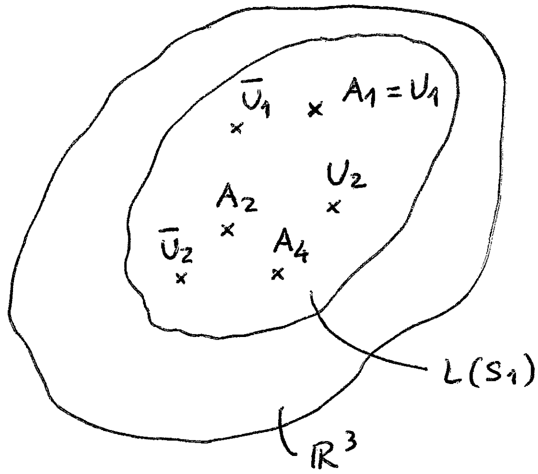
Seja o conjunto $S_1 = \{A_1, A_2\} \subset \mathbb{R}^3$, em que $A_1 = (1,1,1)$ e $A_2 = (1,1,2)$, que é base (gera de forma única) o subespaço

$L(S_1) = \{X = (x_1, x_1, x_3) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\dim L(S_1) = 2$

(este problema foi tratado no exemplo anterior)

a) Pretende-se encontrar uma base ortogonal para $L(S_1)$.

Trata-se de um conjunto constituído por 2 vectores ($\dim L(S_1) = 2$) linearmente independentes, pertencentes a $L(S_1)$, isto é,



$$U = \{U_1, U_2\} \subset L(S_1)$$

em que $U_1 \perp U_2$ e $U_1 \neq 0$ e $U_2 \neq 0$

Seja, por exemplo, $\boxed{U_1 = A_1 = (1,1,1)}$

Nestas condições o vector U_2 deverá satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} U_2 \in L(S) \setminus \{0\} \\ U_2 \cdot U_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_2 = (x_1, x_1, x_3) \neq 0 \\ x_1 + x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U_2 = (x_1, x_1, -2x_1), \ x_1 \neq 0 \\ x_3 = -2x_1 \end{cases}$$

Seja, por exemplo, $\boxed{U_2 = (1,1,-2)}$

O conjunto $U = \{U_1, U_2\} = \{(1,1,1), (1,1,-2)\} \subset L(S)$ é uma base ortogonal para $L(S)$ (o conjunto é linearmente independente).

b) Recorrendo à base ortogonal U encontrada em a), pretende-se obter uma base ortonormal para $L(S)$

Tendo em atenção a base ortogonal U tem-se

$\overline{U} = \{\overline{U}_1, \overline{U}_2\} = \left\{\frac{U_1}{\|U_1\|}, \frac{U_2}{\|U_2\|}\right\} \subset L(S)$ é uma base ortonormal para $L(S)$, em que $\boxed{\overline{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$ e $\boxed{\overline{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)}$

c) Seja $A_4 = (-1,-1,0) \in L(S_1)$

c.1) Exprime A_4 como combinação linear dos vectores da base S_1

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = A_4 \Leftrightarrow (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2) = (-1,-1,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \\ (\alpha_1)\ (\alpha_2) \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Assim,

$$A_4 = A_1 - 2A_2$$

c.2) Exprime A4 como combinação linear dos vectores de base U

$\beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 = A_4$

Sendo U uma base ortogonal, então

$$\beta_1 U_1 = \overrightarrow{\text{proj}}_{U_1} A_4 \quad \text{com} \quad \beta_1 = \frac{A_4 \cdot U_1}{\|U_1\|^2} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\beta_2 U_2 = \overrightarrow{\text{proj}}_{U_2} A_4 \quad \text{com} \quad \beta_2 = \frac{A_4 \cdot U_2}{\|U_2\|^2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Assim,

$$A_4 = -\frac{2}{3} U_1 - \frac{1}{3} U_2$$

c.3) Exprime A_4 como combinação linear dos vectores de base $\overline{U}$

$\gamma_1 \overline{U}_1 + \gamma_2 \overline{U}_2 = A_4$

Sendo $\overline{U}$ uma base ortonormal, então

$$\gamma_1 \overline{U}_1 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\overline{U}_1} A_4 \quad \text{com} \quad \gamma_1 = A_4 \cdot \overline{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2) = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\gamma_2 \overline{U}_2 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\overline{U}_2} A_4 \quad \text{com} \quad \gamma_2 = A_4 \cdot \overline{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2) = -\frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Assim,

$$A_4 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \overline{U}_1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \overline{U}_2$$

d) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclua os vectores da base ortogonal U obtida em a).

O conjunto $T = \{U_1, U_2, U_3\} \subset \mathbb{R}^3$ é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ se $U_3 \neq 0 \wedge U_3 \perp U_1 \wedge U_3 \perp U_2$, ou seja, se

$$\begin{cases} U_3 \cdot U_1 = 0 \\ U_3 \cdot U_2 = 0 \\ U_3 \neq 0 \end{cases} \quad \text{em que } U_3 = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$$

Convém notar que as condições acabadas de definir para o vector U_3 garantem-nos que $U_3 \notin L(S_1)$ e, portanto, o conjunto T é linearmente independente.

Assim,

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \\ U_3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} (u_1) & (u_2) & (u_3) & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -u_2 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad \forall_{u_2 \neq 0}$$

A solução geral para U_3 é

$$U_3 = (-u_2, u_2, 0), \quad u_2 \neq 0$$

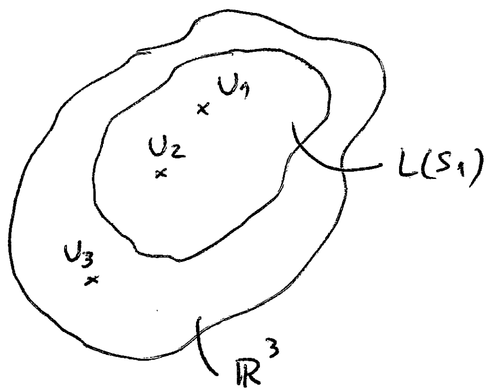
Seja, por exemplo,

$$U_3 = (-1, 1, 0)$$

O conjunto ortogonal

$$T = \{U_1, U_2, U_3\} = \{(1,1,1), (1,1,-2), (-1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$



e) Recorrendo à base ortogonal T encontrada em d), obtenha uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$.

O conjunto de vectores ortogonais e unitários

$$\bar{T} = \{ \bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3 \} = \left\{ \frac{U_1}{\|U_1\|}, \frac{U_2}{\|U_2\|}, \frac{U_3}{\|U_3\|} \right\}$$

em que

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \;, \quad \bar{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \quad e \quad \bar{U}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$$

é uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$.

f) Seja $A_6 = (-1,1,3) \in \mathbb{R}^3$

f.1) Determine as coordenadas do vector A_6 em relação à base $S_2 = \{A_1, A_2, A_3\}$, em que $A_3 = (0,1,1)$ (obtida no exemplo da aula teórica anterior).

$$A_6 = (-1,1,3) = (a_1, a_2, a_3)_{S_2}$$

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = A_6 \iff$$

$$\iff (a_1 + a_2, \; a_1 + a_2 + a_3, \; a_1 + 2a_2 + a_3) = (-1,1,3) \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \iff$$

$$\iff \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 2 \end{cases} \implies A_6 = (-1,1,3) = (-3,2,2)_{S_2}$$

f.2) Determine as coordenadas do vector A_6 em relação à base ortogonal T

$$A_6 = (-1,1,3) = (a_1, a_2, a_3)_T$$

$$a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 = A_6 = (-1,1,3)$$

Sendo T uma base ortogonal, então

$$a_1 U_1 = \overrightarrow{proj}_{U_1} A_6 \quad \text{com} \quad a_1 = \frac{A_6 \cdot U_1}{\|U_1\|^2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$a_2 U_2 = \overrightarrow{proj}_{U_2} A_6 \quad \text{com} \quad a_2 = \frac{A_6 \cdot U_2}{\|U_2\|^2} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$a_3 U_3 = \overrightarrow{proj}_{U_3} A_6 \quad \text{com} \quad a_3 = \frac{A_6 \cdot U_3}{\|U_3\|^2} = \frac{2}{2} = 1$$

Assim, $A_6 = (-1, 1, 3) = (1, -1, 1)_T$

f.3) Determine as coordenadas do vector A_6 em relação à base ortonormal $\overline{T}$

$$A_6 = (-1, 1, 3) = (a_1, a_2, a_3)_{\overline{T}}$$

$$a_1 \overline{U}_1 + a_2 \overline{U}_2 + a_3 \overline{U}_3 = A_6 = (-1, 1, 3)$$

Sendo $\overline{T}$ uma base ortonormal, então

$$a_1 \overline{U}_1 = \overrightarrow{proj}_{\overline{U}_1} A_6 \quad \text{com} \quad a_1 = A_6 \cdot \overline{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(3) = \sqrt{3}$$

$$a_2 \overline{U}_2 = \overrightarrow{proj}_{\overline{U}_2} A_6 \quad \text{com} \quad a_2 = A_6 \cdot \overline{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-6) = -\sqrt{6}$$

$$a_3 \overline{U}_3 = \overrightarrow{proj}_{\overline{U}_3} A_6 \quad \text{com} \quad a_3 = A_6 \cdot \overline{U}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2) = \sqrt{2}$$

Assim,

$$A_6 = (-1, 1, 3) = (\sqrt{3}, -\sqrt{6}, \sqrt{2})_{\overline{T}}$$

Joni Araújo Barbosa