Álgebra Linear B

COM+MEC

Exame da 2ª chamada da Época Normal – 2006/2007 – 27 de Janeiro de 2007

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia – Universidade do Minho

Curso: Nome: Número: Classificação:

A prova tem a duração de 120 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. Durante a realização da prova os telemóveis devem estar desligados e só se pode abandonar a sala passados 20 minutos do seu início. A prova é constituído por três grupos e termina com a palavra "Fim". No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 200.

Grupo I — Indique, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas usando para tal os caracteres "V" ou "F", respectivamente. Cotações — resposta certa: 5; resposta em branco: 0; resposta errada: -5, sendo 0 a cotação mínima neste grupo.

I.1 ☐ Considere o conjunto $V = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ munido das operações $(x, x^2) \oplus (y, y^2) = (x + y, (x + y)^2)$ e $\alpha \odot (x, x^2) = (\alpha x, \alpha^2 x^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \underline{x} \in V : (\alpha + \beta) \odot \underline{x} = \alpha \odot \underline{x} \oplus \beta \odot \underline{x}$.

I.2 ☐ Seja (S) um sistema linear com mais equações do que incógnitas. Então, (S) é um sistema impossível.

I.3 ☐ Sejam $p = x^2 + 1 \in \mathbb{R}_2[x]$ e $\mathcal{S} = (x^2, x^2 - 1, x + 2)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$. Então, $[p]_{\mathcal{S}} = (1, 1, 1)$.

I.4 ☐ Sejam A e B matrizes comutáveis. Então, $(A-B)^3 = A^3+3A^2B-3AB^2-B^3$.

I.5 $\square$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz hermítica.

I.6 $\square$ $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) | (A)_{11} + (A)_{nn} = 0\}$ é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

I.7 $\square$ Sejam V e V' espaços vectoriais e $f : V \longrightarrow V'$ uma aplicação. Então, se $f(0_V) \neq 0_{V'}$, f não é uma aplicação linear.

I.8 $\square$ Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ tais que $AB = 0_{m\times p}$. Então, $A = 0_{m\times n}$ ou $B = 0_{n\times p}$.

Grupo II — Complete, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, as seguintes frases de modo a obter proposições verdadeiras. Cotações — resposta certa: 3; resposta em branco ou errada: 0.

II.1 Seja $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Então, $\lambda(A) =$ $\square$.

II.2 Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tal que $|A^{-1}| = 2$.

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} =$ $\square$.

(b) $|A^2 A^T A^{-1}| =$ $\square$.

(c) $|\operatorname{adj}(A)| =$ $\square$.

(d) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} =$ $\square$.

II.3 Seja $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A$ é uma matriz diagonal$\}$.

(a) $\square$ $\in S$.

(b) S é um subespaço de $\square$.

(c) $\dim(S) =$ $\square$.

(d) $\square$ é uma base de S.

II.4 Considere o sistema de equações lineares (S) cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & s \end{bmatrix}$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

(a) $c(A) = 2$ se e só se .

(b) $c(A|b) = 3$ se e só se .

(c) (S) é possível e indeterminado se e só se .

(d) (S) é impossível se e só se .

II.5 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x, y, z) = (0, x)$.

(a) $A_T =$.

(b) $\mathcal{N}_T =$.

(c) $c_T =$.

(d) $n_T =$.

II.6 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = BB^T$.

(a) $A^2 =$.

(b) $\mathrm{adj}(A) =$.

(c) $C^{-1} =$.

Grupo III — Responda, nas folhas que lhe foram distribuídas e por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar, bem como as respectivas justificações. Cotações: 20+(5+5)+20+20+(10+10+10).

III.1 Seja $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $x^T x = [1]$. Mostre que a $I_n - 2xx^T$ é uma matriz simétrica e ortogonal.

III.2 Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 6 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Mostre, sem o resolver, que (S) é um sistema possível e determinado.

(b) Determine $CS_{(S)}$ através da Regra de Cramer.

III.3 Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 21 \\ 2 \end{bmatrix}$. Resolva-o através do método de Gauss e do método de Gauss-Jordan.

III.4 Considere as aplicações

$$\begin{array}{rccc} T_1 : & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & A^T \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} T_2 : & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & A^2. \end{array}$$

Mostre que T_1 é uma aplicação linear e que T_2 não é uma aplicação linear.

III.5 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Determine o espectro da matriz A.

(b) Determine os espaços próprios dos valores próprios da matriz A.

(c) Seja X uma matriz quadrada e λ um valor próprio de X. Chama-se multiplicidade geométrica de λ à dimensão de E_λ.

Determine as multiplicidades algébricas e geométricas dos valores próprios da matriz A.

Fim.

Classifique numa escala de 1 (horrível) a 6 (espectacular) o *Maple TA*: $\square$.