Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância) 1ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**5,9**] Sejam o conjunto $\mathrm{S}=\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right\}\subset\mathbb{R}^4$, em que $\vec{a}=(3,-2,0,-1)$, $\vec{b}=(-2,1,0,1)$, $\vec{c}=(1,-1,1,1)$ e $\vec{d}=(1,0,1,0)$, e $\mathrm{H}=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\ :\ z=0\ \wedge\ w=0\right\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$. Determine:

a) O subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$; indique uma base para o subespaço obtido e conclua em relação à sua dimensão.

b) Uma base ortogonal, V, para $L(\mathrm{S})$ que inclua um vetor do conjunto S.

c) Uma base, W, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que inclua dois elementos do subespaço H e tal que não existam em W vetores ortogonais entre si.

2. [**1,1**] Seja $\mathrm{B}=\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\ldots,\vec{x}_m\}$ uma base para o subespaço F do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Mostre que o conjunto $\mathrm{C}=\{\vec{x}_1,\vec{x}_1+\vec{x}_2,\vec{x}_1+\vec{x}_2+\vec{x}_3,\ldots,\vec{x}_1+\vec{x}_2+\vec{x}_3+\ldots+\vec{x}_m\}$ é, ainda, uma base para F. Justifique devidamente.

GRUPO II

3) [**1,9**] Considere o conjunto $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}\subset\mathbb{R}^4$, tais que $\vec{u}_1=(1,2,6,3)$, $\vec{u}_2=(0,1,0,-3)$, $\vec{u}_3=(1,2,k+6,k+3)$ e $\vec{u}_4=(-1,-1,-6,t+2)$. Determine os valores de k e de t de forma que U seja um conjunto linearmente dependente.

....*(continua no verso)*

4. [**2,2**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\|=2$, $\|\vec{b}\|=\|\vec{c}\|=1$, $\|\vec{b}+2\vec{c}\|=\sqrt{5}$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{c})=\pi/3$ e $\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{c})$. Considere o conjunto $\mathrm{S}=\left\{\vec{a}\times\vec{b},\vec{b},\vec{c}\right\}$ e admita que o prisma definido pelos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ tem $\sqrt{2}$ unidades de volume.

a) Verifique, justificando devidamente, se S é um conjunto ortogonal.

b) Obtenha o ângulo, α, formado pelos vetores $\vec{d}$ e $\vec{a}\times\vec{c}$.

c) Calcule a norma do vetor $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

GRUPO III

5. [**1,4**] Enuncie a identidade de Lagrange e mostre que se $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$, então o conjunto $\mathrm{U}=\left\{\vec{a},\vec{b}\right\}$ é linearmente dependente.

6. [**5,0**] Considere o plano $M\ :\ x+y+z=1$, o ponto $Q=(-1,0,1)$ e a reta, *h*, com a equação vetorial $X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(1,0,1)$ e $\vec{a}=(0,1,2)$.

a) Determine um ponto, *J*, da reta *h* cuja distância a *Q* seja igual à distância de *Q* ao plano $M_1\ :\ x+2y+2z=7$.

b) Seja *I* o ponto de interseção da reta *h* com o plano *M*. Obtenha a equação vetorial da reta, h_1, que é a projeção ortogonal da reta *h* sobre o plano *M* e determine o ângulo, θ, que as retas *h* e h_1 fazem entre si.

7. [**2,5**] Sejam o plano *M* e a reta *h* do exercício **6**. Calcule a equação vetorial de uma reta, *q*, que passa no ponto *P*, é paralela ao plano *M* e faz o ângulo $\alpha=\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$ com a reta *h*.