FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI Data / 11 / 20

Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano 1º Semestre 1º

Nome José Augusto Trigo Barboza

Espaço reservado para o avaliador

Notas de apoio ao Capítulo 3 do manual:
"Noções sobre Matrizes e Sistemas de Equações Lineares".

Exemplo 1 [3.1 ; 2 ; 5]

Seja matriz quadrada de ordem 2 : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

- Número de termos distintos : $2! = 2$

Termo	α_ℓ	α_c	α	$(-1)^\alpha$	
$a_{11}\,a_{22}$	0	0	0	+1	Termo principal
$a_{21}\,a_{12}$	1	0	1	−1	Termo secundário

Permutação principal : $1 \longrightarrow 2$ (0 inversões)

$2 \longrightarrow 1$ (1 inversão)

inv

- Número de termos positivos é igual ao número de termos negativos

- É irrelevante a ordem pela qual os elementos da matriz se dispõem no termo (o sinal do termo mantém-se). Por exemplo:

$$a_{22}\,a_{11} \Rightarrow \alpha_\ell = \alpha_c = 1 \,,\ \alpha = 2 \,,\ (-1)^\alpha = +1$$

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$\uparrow$

Regra dos Produtos Cruzados

pág. 5

Exemplo 2 [3.2; 4; 7]

Seja a matriz quadrada de ordem 3 : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

• Número de termos distintos : $3! = 6$

Termo	α_l	α_c	α	$(-1)^\alpha$	
$a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$	0	0	0	+1	Termo principal
$a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$	0	1	1	−1	
$a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$	0	1	1	−1	
$a_{12}\,a_{23}\,a_{31}$	0	2	2	+1	
$a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$	0	3	3	−1	Termo secundário
$a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$	0	2	2	+1	

Permutação principal : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ (0 inversões)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[r, bend right, "p"'] \arrow[rr, bend right=60, "p"'] & 3 \arrow[r] \arrow[r, bend right, "i"'] & 2 \end{tikzcd}$$ (1 inversão)

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[rr, bend right=60, "p"'] & 1 \arrow[r] \arrow[r, bend right, "p"'] & 3 \end{tikzcd}$$ (1 inversão)

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] \arrow[r, bend right, "p"'] \arrow[rr, bend right=60, "i"'] & 3 \arrow[r] \arrow[r, bend right, "i"'] & 1 \end{tikzcd}$$ (2 inversões)

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[rr, bend right=60, "i"'] & 2 \arrow[r] \arrow[r, bend right, "i"'] & 1 \end{tikzcd}$$ (3 inversões)

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[rr, bend right=60, "i"'] & 1 \arrow[r] \arrow[r, bend right, "p"'] & 2 \end{tikzcd}$$ (2 inversões)

Wm

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

termos positivos

$$= + \left(a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \right) -$$

$$- \left(a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31} \right)$$

termos negativos

Regra de Sarrus

pág. 6/7

Propriedade 9

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \times \quad \uparrow \quad \times \\ C_2 \end{array} = -15$$

desdobramento (por exemplo)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \underset{p_1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \underset{p_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} + \underset{p_3}{\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \times \quad \uparrow \quad \times \\ p_1 \end{array} + \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \times \quad \uparrow \quad \times \\ p_2 \end{array} + \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \times \quad \uparrow \quad \times \\ p_3 \end{array} =$$

$$= (-6) + (-9) + (0) = -15$$

as linhas 2 e 3 são proporcionais

- A propriedade pode ser também aplicada numa linha do determinante.

pág. 19/20

Propriedade 10

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

$\uparrow$ $c_1 + 2c_2 - 4c_3$

$$|B| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |A| = -15 \quad , \text{ porque} \ldots$$

$\uparrow$ c_1

desdobramento $\hookrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \underset{p_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}} + \underset{p_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}} + \underset{p_3}{\begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -8 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$\uparrow p_1$ $\qquad$ $\uparrow p_2$ $\qquad$ $\uparrow p_3$

$$= |A| + (0) + (0)$$

as colunas 1 e 2 são proporcionais $\qquad$ as colunas 1 e 3 são proporcionais

- A propriedade pode ser também aplicada numa linha do determinante.

pág. 21/22

Exemplo 25 [3.42]

$$|T| = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right| = \prod_{i=1}^{2} |T_{ii}| =$$

$$= |T_{11}|\,|T_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-8)\,(-4) = 32$$

ou, em alternativa,

$$|T| = \left|\begin{array}{cc|c|ccc} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right| = \prod_{i=1}^{3} |T_{ii}| =$$

$$= |T_{11}|\,|T_{22}|\,|T_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \, |-2| \, \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (4)\,(-2)\,(-4) = 32$$

pág. 41/42

Teorema [3.8]

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e não singular, isto é, que admite matriz inversa A^{-1}, tal que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad e \quad |A| \neq 0 .$$

Então

$$|A^{-1}A| = |I| \Leftrightarrow |A^{-1}|\,|A| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

pág. 44

Teorema [3.9]

Seja A uma matriz ortogonal de ordem n, isto é, uma matriz não singular tal que

$$A^{-1} = A^{T} \quad e \quad |A| \neq 0 .$$

Então

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad e \quad |A^{T}| = |A|$$

pelo que

$$|A^{-1}| = |A^{T}| \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A|^{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A| = +1 \;\vee\; |A| = -1 .$$

pág. 46

Exemplo 29 [3.38]

$$F = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cofactores com sinal positivo

A matriz F é não singular, já que $|F| = -4 \neq 0$

Cálculo dos cofactores dos elementos da matriz F:

- Cofactores com sinal positivo

$$\text{cof } f_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = +2$$

$$\text{cof } f_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = +6$$

$$\text{cof } f_{22} = + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -24$$

$$\text{cof } f_{31} = + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{cof } f_{33} = + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

- Cofactores com sinal negativo

$$\text{cof } f_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = +16$$

$$\text{cof } f_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$\text{cof } f_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

$$\text{cof } f_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\text{Cof } F = \begin{bmatrix} 2 & 16 & 6 \\ -3 & -24 & -11 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

pág. 50/51