Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Reavaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**4,7**] Sejam as transformações lineares $S,T \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ dadas por

$$S(x,y,z)=(x+z,x+2y+3z,y+2z) \text{ e } T(x,y,z)=(x+z,x-y,x+y+2z)$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Obtenha o núcleo e o contradomínio de *T*. Para cada um destes subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que apenas a função *S* é injetiva e determine a sua transformação inversa. Classifique as funções dadas quanto à sua sobrejetividade. Justifique.

2) [**2,0**] Seja a transformação linear $R : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$. Mostre que se *R* é injetiva, então *R* é invertível e a sua função inversa $R^{-1} : R(\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$ é linear.

GRUPO II

3) [**4,7**] Considere as transformações lineares $S,T \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ da pergunta 1) e a base $\mathrm{U}=\{(1,0,2),(-1,-1,0),(1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Usando o cálculo matricial, calcule as matrizes $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E,U}}=m(S)_{\mathrm{E,U}}$, representação matricial de *S* em relação às bases E e U, e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U,E}}=m(T)_{\mathrm{U,E}}$, representação matricial de *T* em relação às bases U e E.

b) Recorrendo às matrizes obtidas na alínea anterior, calcule a matriz que representa a função ST^2 em relação à base U.

.... *(continua no verso)*

GRUPO III

4) [**2,8**] Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o determinante e a característica da matriz real

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & k & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & h & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

GRUPO IV

5) [**5,8**] Considere a transformação linear $H\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{H}=m(H)=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Seja o espaço próprio associado a um dos seus valores próprios: $\mathrm{W}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x-2y=0\ \wedge\ z+2y=0\right\}$.

a) Calcule os valores próprios da matriz $\boldsymbol{H}$.

b) Determine os espaços próprios e indique, para cada um desses subespaços, uma base e a dimensão.

c) Verifique, justificando devidamente, se a função H admite uma base, U, de vetores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, obtenha as matrizes $\boldsymbol{H}_{\mathrm{U,U}}$ e $\boldsymbol{H}_{\mathrm{U,E}}$, e diga se alguma destas matrizes é semelhante à matriz $\boldsymbol{H}$, apresentando as expressões matriciais que as relacionam.