Alice: *I'm very glad*
I happened to be in the way.

3. Sistemas de Equações Lineares

- Sistemas de Equações Lineares
- Operações elementares
- Método de eliminação de Gauss
- Característica de uma matriz
- Matriz escada de linhas
- Classificação de Sistemas
- Sistemas Homogéneos. Núcleo de uma matriz
- Inversa de uma matriz
- Determinante

conjunto solução

equação linear	$ax + by = c$	$S = \{(x,y) : ax + by = c\}$
	$2x + 3y = -5$	
	$x/3 = 25$	$S = \{75\}$

equação não linear

$$x + y^2 = 6$$
$$2x + 3xy - 4y = 10$$
$$\sqrt{u} + \sqrt{v} = -10$$
$$ax + \frac{b}{y}c$$

sist. de duas equações

com duas incógnitas

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

exemplo

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

conj$\underline{\text{to}}$ solução $S = \{(x, y) : ax + by = c \text{ e } a'x + b'y = c'\}$

S conj$\underline{\text{to}}$ vazio, finito, infinito

sist. de três equações

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d' \end{cases}$$

com três incógnitas

conj$\underline{\text{to}}$ solução

$$S = \{(x, y, z) : ax + by + cz = d \text{ e } a'x + b'y + c'z = d'$$
$$a''x + b''y + c'z = d''\}$$

Equações Linear

Uma equação linear nas incógnitas $x_1, \ldots x_n$ ´´e uma equação do tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ e b são números reais.

À expressão $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ é chamada o primeiro membro ou termo dependente da equação.

O número b é chamado o segundo membro ou termo independente da equação.

Sistema de m equações nas n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ \end{cases}$$

na forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e em notação abreviada

$$Ax = b$$

com: $A = (A_{ij})$ matriz dos coeficientes, $m \times n$,
$x = (x_i)$ matriz-coluna das incógnitas,
$b = (b_i)$ matriz-coluna dos termos independentes.

Uma solução de um sistema de equações lineares nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de números tais que as substituições $x_i = \alpha_i$ $(i = 1, ..., n)$ transformam, em simultâneo, todas as equações do sistema em identidades verdadeiras. Uma solução também pode ser apresentada sob a forma de uma matriz coluna

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

Resolver um sistema de equações lineares ´e determinar todas as suas soluções ou provar que não existe nenhuma solução.

Um sistema de equações lineares que tenha pelo menos uma solução diz-se possível (determinado se tiver uma única, indeterminado se tiver mais do que uma). Caso contrário, o sistema diz-se impossível.

Dado um sistema de equações lineares $Ax = b$, colocam-se naturalmente duas questões.

QUESTÃO 1 Como resolver $Ax = b$?

QUESTÃO 2 Como *discutir* $Ax = b$? (Isto é, como saber se o sistema é possível ou não? E no caso de ser possível, se ele é determinado ou não?)

Consideremos os dois seguintes sistemas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = & -3 \\ x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Verificamos que ambos os sistemas têm solução única igual a $(2/3, 1/3, -4/3)$.

O que podemos dizer da $2^{\underline{a}}$ equação do $2^{\underline{0}}$ sistema?

Note-se que: $-1\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{linha 1}} + 1 \times \underbrace{(2x_1 + x_3)}_{\text{linha 2}} + 2 \times \underbrace{(x_2 + x_3)}_{\text{linha 3}} = x_1 + x_2 + 3x_3$

Os sistemas dizem-se equivalentes

Definição

Dois sistemas dizem-se equivalentes se admitem o mesmo conjunto solução.

Que operações se podem fazer sobre as equações de um sistema de modo a obter um sistema equivalente?

$$\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

$$E_1 \leftrightarrow E_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

$$E_3 \leftarrow (-1)E_1 + E_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ -y+2z=3 \end{cases}$$

$$E_3 \leftarrow E_3 + E_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{cases}$$

substituindo da 3ª equação para a 1ª, obtemos $z=2$, $y=1$ e $x=1$.

As operações se podem efectuar num sistema de modo a obter-se um sistema equivalente são:

- OE1 troca da ordem das equações,
- OE2 multiplicar por um escalar, não nulo, ambos os membros de uma equação,
- OE3 substituir uma equação pela soma com outra multiplicada por um escalar.

Estas operações designam-se por **operações elementares**.

Consideremos, em paralelo, dois modos de escrita da resolução de um sistema, usando chavetas e com notação matricial.

$$\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_1 \leftrightarrow E_2 \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \leftarrow (-1)E_1 + E_3 \qquad L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3$$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ -y+2z=3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \leftarrow E_3 + E_2 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

obtendo-se o sistema simplificado, e para o qual é fácil obter a solução (primeiro o valor de z, depois de y e depois de x)

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}\right.$$

$$S=\{(1,1,2)\}$$

Observação: Note-se que $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{A}} . \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{solução}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{b}}$

As operações se podem efectuar sobre as linhas de uma matriz são:

- OL1 troca da ordem das linhas,
- OL2 multiplicação de uma linha por um escalar, não nulo,
- OL3 substituir uma linha pela soma com outra linha multiplicada por um escalar.

Estas operações designam-se por **operações elementares**.

Considerando a matriz ampliada do sistema $(A|b)$ podemos escrever:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3$ $\qquad$ $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$ $\qquad$ matriz triangular superior

terminamos o método de eliminação de Gauss

Método de eliminação de Gauss

Teorema

Seja $\tilde{A}x = \tilde{b}$ um sistema que resulta da realização de uma sequência de operações elementares sobre as equações de $Ax = b$. Então, os sistemas são equivalentes.

Nota: as operações *equivalentes* ao serem realizadas sobre a matriz ampliada do sistema, simplificam a aplicação do método.

Teorema

Seja $\tilde{A}x = \tilde{b}$ um sistema determinado, de n de equações a n incógnitas. Então é possível, realizando uma sequência finita de operações elementares sobre as equações, transformá-lo num sistema equivalente cuja matriz dos coeficientes é triangular superior.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow (-1)L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow (-2)L_1 + L_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow 2L_2 + L_4}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

matriz triangular superior

obtendo-se o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

que permite obter a solução pelo designado método de substituição inversa.

Obtendo-se primeiro o valor de x_4, depois x_3, seguido de x_2, e finalmente x_1 tem-se

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(1, 0, -1, 1)\}$$

Método de eliminação de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Considerando $a_{11} \neq 0$ os passos elementares são efectuados de maneira a eliminar a incógnita x_1 em todas as equações a partir da 2ª equação. A matriz A é transformada na matriz

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}, \text{com} \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) a_{1j}, \; {\scriptstyle i,j=2,\dots,n.}$$

Se $a_{11} = 0$, por troca de linhas ou colunas coloca-se na posição (1,1) um elemento de A não nulo.

Se $a_{22}^{(1)} \neq 0$ a matriz $A^{(1)}$ é transformada na matriz

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}, \text{com} \qquad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)},$$

$$i, j = 3, \dots, n.$$

e assim sucessivamente ate se obter uma matriz triangular superior.

Os números não nulos $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \dots$ são designados os pivots da eliminação.

Sistemas triangulares - método de substituição inversa e método de substituição directa

Considere-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \phantom{a_{11}x_1 +{}} a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots & \\ & & a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ao qual corresponde uma matriz dos coeficientes triangular superior.

Da última equação obtém-se: $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$

que, substituindo-se na penúltima equação: $x_{n-1} = \dfrac{(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)}{a_{n-1,n-1}}$

e, assim sucessivamente, obtêm-se: $x_1 = \dfrac{(b_1 - a_{1,2}x_2) - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{1,1}}$

este é chamado método de substituição inversa.

Um sistema cuja matriz dos coeficientes é triangular inferior, invertível, pode ser resolvido pelo método de substituição directa.

Exemplo Considerando o sistema seguinte

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x + 3y = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 1 \end{cases}$$

cuja matriz dos coeficientes é: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

tem-se: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1/3 \\ z = -2/9 \end{cases}$

sendo o conjunto solução do sistema inicial: $S = \{(1, -1/3, -2/9)\}$

Para matrizes rectangulares, em que a matriz ampliada do sistema de tem m equações a n incógnitas, com $m \neq n$, o método de eliminação de Gauss consiste na aplicação das mesmas operações elementares sobre linhas, com o objectivo de se obterem matrizes **escada de linhas.**

Definição

Diz-se que uma matriz é uma matriz **escada de linhas** se:

1. por debaixo do $1^{\underline{o}}$ elemento não nulo de cada linha da matriz, e por debaixo dos elementos anteriores da mesma linha, todas as componentes da matriz são nulos,
2. não há linhas totalmente nulas seguidas de linhas não nulas.

Esquematicamente:

$$\begin{pmatrix} \circledast & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \circledast & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \circledast & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \circledast & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \circledast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\circledast$: ele^{tos} não nulos,
$\star$: ele^{tos} que podem ser nulos ou não,
a cor azul: ele^{tos} da diagonal principal.

Exemplos de matrizes escada de linhas:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} \quad ; \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} c(A) = 3 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(C) = 1 \;\; ; \;\; D = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} c(D) = 4$$

$$E = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(E) = 3 \; ; \;\; c(I_n) = n \; ; \;\; c(O_n) = 0$$

Se uma dada matriz A de ordem $m \times n$ é convertida, por operações elementares sobre linhas, numa matriz em escada E, a característica de A, que designaremos por $car(A)$, é definida como:

$$\begin{aligned} car(A) &= \text{número de pivôs de } E \\ &= \text{número de linhas não nulas de } E \\ &= \text{número de colunas básicas de } A; \end{aligned}$$

onde as *colunas básicas* (também referidas como colunas principais) de A são as colunas de A correspondentes às colunas de E que contêm os pivôs.

Classificação de Sistemas

Exemplo 1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \qquad S = \{(1, -1)\} \quad \text{(solução única)}$$

Exemplo 2.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 = 1 \end{cases} \qquad S = \{\} \quad \text{(não existe solução)}$$

Exemplo 3.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad S = \{(1, \alpha, \alpha) : \alpha \in R\}$$

(existem uma infinidade de soluções)

Classificação de Sistemas

Consideremos o sistema de m equações nas n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

cuja matriz ampliada se representa por $(A|b)$.

Podem definir-se, à custa da característica da matriz dos coeficientes e da característica da matriz ampliada, condições de existência e unicidade para a solução.

$$\begin{cases} \text{sistema possível} \begin{cases} \text{determinado} \\ c(A) = n \\ \text{indeterminado} \\ c(A) < n \end{cases} \\ c(A) = c(A|b) \\ \\ \text{sistema impossível} \\ c(A) \neq c(A|b) \end{cases}$$

Discussão de Sistemas

Exemplo

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + kx_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + (k-3)x_3 = 0 \end{array}\right. \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right)$$

- se $k = -4$ $\quad c(A) = 2;\ c(A|b) = 3$ logo $c(A) \neq c(A|b)$ sistema impossível

$$S = \{\}$$

- se $k \neq -4$ $\quad \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & k & \frac{k}{k+4} \end{array}\right)$

  - se $k = 0$
  - se $k \neq 0$

- se $k = 0$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1 = -3 - 3x_3 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$$

$c(A) = 2 = c(A|b)$ sistema possível

$c(A) < 3 = n$ sistema possível indeterminado, $\quad S = \{(-3 - 3\alpha, 1, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

- se $k \neq 0$ $\quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & k & \frac{k}{k+4} \end{array}\right)$

$c(A) = 3 = c(A|b) = n$ sistema possível determinado

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ (k+4)x_2 = 4 \\ kx_3 = \frac{k}{k+4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{11+k}{k+4} \\ x_2 = \frac{4}{k+4} \\ x_3 = \frac{1}{k+4} \end{array}\right. ,$$

$$S = \{(\tfrac{11+k}{k+4}, \tfrac{4}{k+4}, \tfrac{1}{k+4}), k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0 \wedge k \neq -4\}$$

Sistemas Homogéneos

Seja $Ax = b$ a equação matricial de um sistema de m equações a n incógnitas. Se $b = 0$, o sistema diz-se um sistema homogéneo.

Um sistema homogéneo tem sempre solução, dita solução trivial $x = 0$.
Exemplo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

não há necessidade de *trabalhar* com a matriz ampliada do sistema!

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ matriz escada de linhas

$$\begin{cases} x_2 = (-1/2)x_3 \\ x_1 = x_4 - (1/2)x_3 \end{cases}$$

$$S = \{(\beta - (1/2)\alpha, \ -(1/2)\alpha, \ \alpha, \ \beta) : \alpha, \beta, \in \mathbb{R}\}$$

Núcleo de uma matriz

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. O núcleo ou espaço nulo de A, representado por N(A), é o conjunto das soluções do sistema homogéneo $Ax = 0$. Recorde-se que Ax $= 0$ é possível, donde $N(A)$ é não vazio.

Exemplo Consideremos o sistema homogéneo $Ax = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 + x_4 \\ x_2 = 2x_4 \end{cases}$$

Tendo-se

$$N(A) = \{(\frac{1}{2}\alpha + 2\beta, 2\beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Teorema

Sejam $AX = b$ um sistema possível de p equações lineares em n incógnitas e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ uma sua solução. Então o conjunto das soluções do sistema é:

$$S = \{y + z : z \in N(A)\} = \{y + z : Az = 0\}$$

Ou seja, cada solução w de $Ax = b$ é uma soma, $w = y + z$, da solução particular y com alguma solu¸cao $z = (z_1, ..., z_n)$ do sistema homog´eneo associado $Ax = 0$.

Demonstração:

Suponhamos primeiro que w é solução do sistema (donde $Aw = b$), e seja $z = w - y$. Então $w = y + z$ e $Az = A(w - y) = Aw - Ay = b - b = 0$, e logo $z \in N(A)$.

Reciprocamente, suponhamos que $w = y + z$ com $z \in N(A)$. Então $Aw = Ay + Az = b + 0 = b$, o que prova que w é solução do sistema $Ax = b$.

Teorema

Sejam $AX = b$ um sistema possível de p equações lineares em n incógnitas e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ uma sua solução. Então o conjunto das soluções do sistema é:

$$S = \{y + z : z \in N(A)\} = \{y + z : Az = 0\}$$

Ou seja, cada solução w de $Ax = b$ é uma soma, $w = y + z$, da solução particular y com alguma solu¸cao $z = (z_1, ..., z_n)$ do sistema homog´eneo associado $Ax = 0$.

Demonstração:

Suponhamos primeiro que w é solução do sistema (donde $Aw = b$), e seja $z = w - y$. Então $w = y + z$ e $Az = A(w - y) = Aw - Ay = b - b = 0$, e logo $z \in N(A)$.

Reciprocamente, suponhamos que $w = y + z$ com $z \in N(A)$. Então $Aw = Ay + Az = b + 0 = b$, o que prova que w é solução do sistema $Ax = b$.

Inversa de uma matriz

Se A é uma matriz de ordem n, invertível, a sua inversa verifica

$$AX = XA = I_n$$

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as colunas da matriz X e designemos por $e_1, e_2, \ldots, e_n$ as colunas da matriz identidade I_n.
Considerando $AX = I_n$, e as matrizes X e I_n fraccionadas por colunas, tem-se

$$A(x_1 x_2 \ldots x_n) = (e_1 e_2 \ldots e_n) \qquad \text{com } e_i = (0 \ldots 0 \underbrace{\ 1\ }_{\text{posição } i} 0 \ldots 0)^T$$

$$\Leftrightarrow (Ax_1 \quad Ax_2 \quad \ldots \quad Ax_n) = (e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n) \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_1 = e_1 \\ Ax_2 = e_2 \\ \quad \vdots \\ Ax_n = e_n \end{cases}$$

consequentemente, a coluna i da matriz inversa de A é a solução do sistema $Ax_i = e_1$, que tem solução única, porque A é invertível.

Para calcular a matriz inversa de A resolvem-se n sistemas $Ax_i = e_1$, todos com a mesma matriz dos coeficientes.

Para tal pode-se usar o chamado algoritmo de Gauss-Jordan, que resolve os n sistemas simultaneamente, e que consiste em aplicar as operações elementares à matriz

$$(A|In)$$

de forma a transformá-la numa matriz da forma

$$(In|X).$$

Então $X = A^{-1}$.

Para não repetir operações elementares sobre a matriz dada, faz-se

$$(A|I_n) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (I_n|X)$$

tendo-se $X = A^{-1}$.

Exemplo

Determinar a inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

donde a matriz inversa de A é: $A^{-1} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

O método descrito para determinar a inversa da matriz resultou de um conjunto apenas operações elementares sobre linhas, convertendo a matriz numa forma ainda mais simplificada, a chamada forma em escada reduzida.

Diz-se que uma matriz é uma matriz em escada reduzida ou que tem a forma em escada reduzida, se:

1. a matriz tem a forma em escada;
2. os pivôs são todos iguais a 1;
3. as colunas que contêm um pivô têm todos os elementos, à excepção do pivô, iguais a zero.

Teorema

Seja A uma matriz de ordem n. Então a matriz A é invertível se e só se $Ax = 0$ não tem soluções além da solução nula (trivial).

Demonstração:

" $\Longrightarrow$ "

Se A é invertível, existe A^{-1}, e podemos multiplicar ambos os membros de $Ax = 0$, à esquerda, por A^{-1}, obtendo-se:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 \Rightarrow A^{-1}(Ax) = 0 \Rightarrow Ix = 0 \Rightarrow x = 0$$

" $\Longleftarrow$ "

Teorema

Seja A uma matriz invertível. Então, para qualquer inteiro m, a matriz A^m é invertível tendo-se

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$$

Demonstração:

Por indução em m.

Para $m = 1$ trivial!

Consideremos que a *afirmação* é válida até m e verifiquemos que é válida para $m + 1$.

Então, e uma vez que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, tem-se que:

$$(A^{-1})^{m+1} = (A^{-1})^1(A^{-1})^m = A^{-1}(A^{-1})^m \underset{(*)}{=} A^{-1}(A^m)^{-1} =$$

$$= (A^m A)^{-1} = (A^{m+1})^{-1}$$

(*) por hipótese *afirmação* é válida até m.

Teorema Seja A uma matriz de ordem n. A matriz A é invertível se e só se $c(A) = n$.

Demonstração:
Consideremos que A é invertível. Então qualquer sistema da forma $Ax = b$ é possível e determinado pois tem solução única igual a $A^{-1}b$. Portanto, $c(A) = n$.

Reciprocamente, suponhamos que $c(A) = n$. Então, conclui-se que cada sistema da forma $Ax_i = e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ é possível e determinado. Logo $A(x_1 x_2 \ldots x_n) = I_n$. Daqui resulta que A é invertível, tendo-se $A^{-1} = (x_1 x_2 \ldots x_n)$.

Teorema Seja A uma matriz de ordem n.
As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A matriz A é invertível.
(b) Tem-se $|A| \neq 0$.
(c) $c(A) = n$.
(d) $Ax = 0$ não tem soluções além da solução nula.

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$$

Cálculo de determinantes usando operações elementares.

Pode calcular-se eficientemente o valor do determinante de uma matriz, usando eliminação Gaussiana.
Sabendo que:

- o valor do determinante de uma matriz, não se altera se for realizada a operação de substituição de uma linha pela sua soma com outra previamente multiplicada por um número,
- o valor do determinante de uma matriz "troca" de sinal se forem trocadas duas linhas,

tem-se que, realizando uma sequência finita de operações elementares sobre uma matriz, sendo a matriz $A = (a_{ij})$, de ordem n, transformada na matriz $U = (u_{ij})$ triangular superior, vem:

$$det(A) = (-1)^l u_{11} u_{22} \dots u_{nn}$$

sendo l o número de trocas de linhas efectuadas.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \times 2 \times (-10) = 20$$

Teorema

Seja $Ax = b$ um sistema de n equações em n incógnitas. Então:

(i) se $\det(A) \neq 0$ o sistema $Ax = b$ tem solução única,

(ii) se $\det(A) \neq 0$ a solução $x = (x_i)$ pode ser obtida de

$$x_i = \frac{\det(A^{(i)})}{\det(A)}, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

em que $A^{(i)}$ denota a matriz A **substituindo a coluna** i **pelo vector** b dos termos independentes.

Exemplo

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ \quad y+z=-1 \\ -x+z=-1 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \det A = 1$$

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, A^{(3)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A^{(1)}=3, \quad \det A^{(2)}=-3, \quad \det A^{(3)}=2$$

$$x_{(1)}=\frac{3}{1}=3, \quad x_{(2)}=\frac{-3}{1}=-3, \quad x_{(3)}=\frac{2}{1}=2$$