FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI Data /10/20
Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano 1º Semestre 1º
Nome José Augusto Trigo Barbosa (Regente)

Espaço reservado para o avaliador

Notas de apoio ao Capítulo 2 do manual:
"Noções sobre Álgebra Linear".

Produto Escalar : Propriedades

d) Propriedade positiva

Seja $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \cdot (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) =$$

$$= x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 + \dots + x_n x_n =$$

$$= (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + \dots + (x_n)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \geq 0$$

$$\vec{x} \neq \vec{0} \iff \vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 > 0$$

e) $\vec{x} = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = 0$

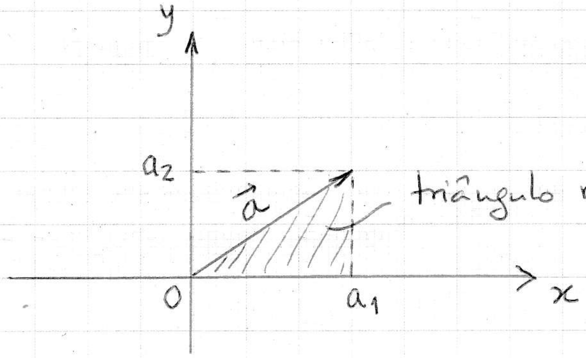
pág. 2.1

Norma

$\mathbb{R}$; $\vec{a} = (a) \implies \|\vec{a}\| = |a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

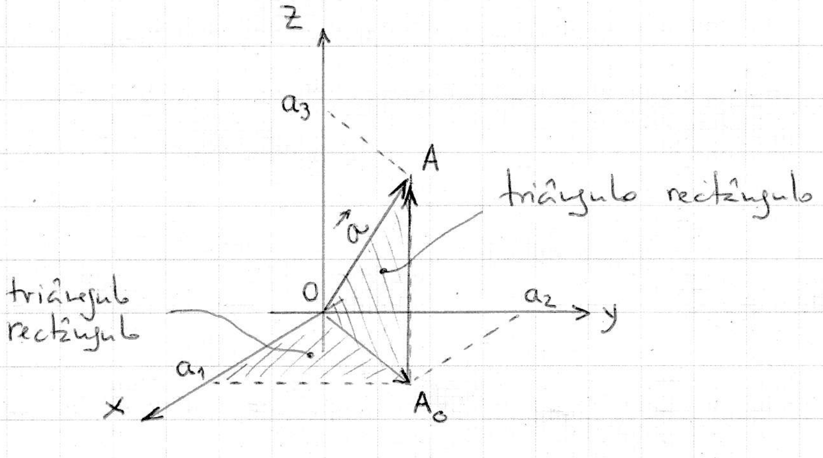
pág. 2.2

$\mathbb{R}^2$; $\vec{a} = (a_1, a_2)$



$$\|\vec{a}\|^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} \iff \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

$\mathbb{R}^3$; $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$



$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0A} \quad , \quad \overrightarrow{OA_0} = (a_1, a_2, 0) \quad , \quad \overrightarrow{A_0A} = (0,0,a_3)$$

$$\|\vec{a}\|^2 = \|\overrightarrow{OA_0}\|^2 + \|\overrightarrow{A_0A}\|^2 =$$

$$= (\overrightarrow{OA_0})\cdot(\overrightarrow{OA_0}) + (\overrightarrow{A_0A})\cdot(\overrightarrow{A_0A}) =$$

$$= (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} \iff$$

$$\iff \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

pág. 2.2

Norma : Propriedades

a) Propriedade positiva

Recorrendo à propriedade positiva do produto escalar

$$\vec{x} \neq \vec{0} \iff \vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 > 0$$

resulta

$$\vec{x} \neq \vec{0} \iff \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} > 0$$

ou seja

$$\vec{x} \neq \vec{0} \iff \|\vec{x}\| > 0$$

c) $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\alpha \vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

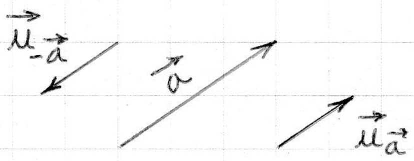
$$\|\alpha \vec{x}\| = \sqrt{(\alpha \vec{x}) \cdot (\alpha \vec{x})} = \sqrt{\alpha^2 (\vec{x} \cdot \vec{x})} =$$

$$= \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = |\alpha| \, \|\vec{x}\|$$

pág. 2.3

Vector unitário (versor)

$\vec{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$



$$\|\vec{u}_{\vec{a}}\| = \|\vec{u}_{-\vec{a}}\| = 1$$

pág. 2.3

Pretende-se encontrar os vectores $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\vec{u} \parallel \vec{a} \quad \text{e} \quad \|\vec{u}\| = 1$$

Se $\vec{u} \parallel \vec{a}$, então $\vec{u} = \alpha \vec{a}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\|\vec{u}\| = 1 \Leftrightarrow \|\alpha \vec{a}\| = 1 \Leftrightarrow |\alpha| \, \|\vec{a}\| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vee \alpha = \frac{-1}{\|\vec{a}\|}$$

Existem, então, dois versores associados ao vector $\vec{a}$

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad \text{(normalização de } \vec{a}\text{)}$$

$$\vec{u}_{-\vec{a}} = \frac{-\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

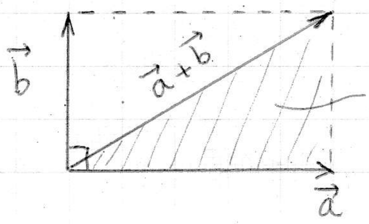
pág. 2.4

Papel 100% Reciclado

Ortogonalidade

Teorema [2.3]

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ tais que $\vec{a} \perp \vec{b}$



triângulo rectângulo
(Teorema de Pitágoras)

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$ e $\vec{a} \perp \vec{b}$ (Teorema de Pitágoras)

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) =$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{a}+\vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a}+\vec{b}) =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\,\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\,\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Atendendo ao teorema de Pitágoras conclui-se que

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

pág. 2.5

Atenção: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0}$ (Falso)

pág. 2.5

Ângulo entre vectores

Teorema [2.4] (Teorema de Carnot)

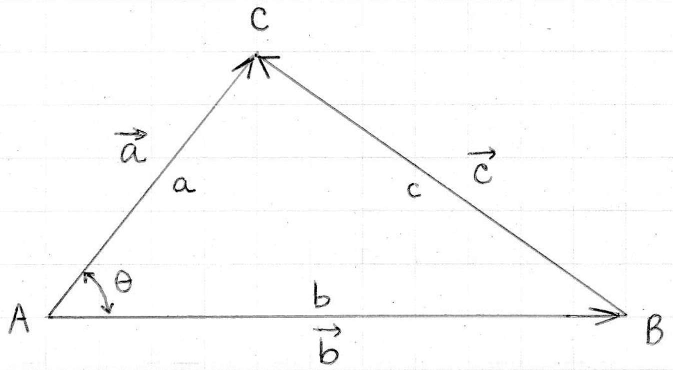
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta) \quad \text{(lei dos cossenos)}$$

$\theta \in \left]0, \pi\right[$

$a = \overline{AC}$

$b = \overline{AB}$

$c = \overline{BC}$



Teorema [2.5]

Sejam $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Na figura anterior considere-se $\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ e

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{a}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = a$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{b}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = b$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{c}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = c$$

Recorrendo à lei dos cossenos resulta

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\theta) \qquad (1)$$

Sabe-se que

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) =$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \quad \Leftrightarrow$$

pág. 2.6

$$\Leftrightarrow \quad \|\vec{c}\|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtém-se

$$\cancel{\|\vec{a}\|^2} + \cancel{\|\vec{b}\|^2} - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} = \cancel{\|\vec{a}\|^2} + \cancel{\|\vec{b}\|^2} - 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\theta)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}\right) \quad \text{e} \quad \theta \in [0, \pi]$$

<u>Consequência</u>:

Sendo $\theta \in [0, \pi]$ e $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$, então

$$-\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \leq \vec{a}\cdot\vec{b} \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$$

<u>valor mínimo</u>

$\vec{a}, \vec{b}$ vectores colineares com sentidos opostos

$\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\theta = \pi$

<u>valor máximo</u>

$\vec{a}, \vec{b}$ vectores colineares com o mesmo sentido

$\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\theta = 0$

<u>pág. 2.6</u>

Exemplo 1 [2.8]

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3 : \quad \|\vec{a}\| = \|\vec{c}\| = 5 \quad , \quad \|\vec{b}\| = 1 \quad \text{(versor)}$$

$$\alpha = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/8$$

$$\|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| \qquad (1)$$

Calcular $\theta = \measuredangle(\vec{b}, \vec{c})$.

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\|\vec{b}\| \|\vec{c}\|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{5} \qquad (2)$$

Sabe-se que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\alpha) = 5 \cos(\pi/8)$

Desenvolvendo

$$\begin{aligned}
\|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\|^2 &= (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = \\
&= \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) - \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) + \vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = \\
&= \|\vec{a}\|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \|\vec{b}\|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} - \\
&\quad - \vec{c} \cdot \vec{b} + \|\vec{c}\|^2 = \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} = \\
&= 25 + 1 + 25 - 10 \cos(\pi/8) + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

De modo análogo obtém-se

$$\begin{aligned}
\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2 &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = \\
&= 25 + 1 + 25 + 10 \cos(\pi/8) + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

Sabendo que $\|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\|^2 = \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2$ (1)
resulta

$$\cancel{51} + \cancel{2\vec{a} \cdot \vec{c}} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 10 \cos(\pi/8) = \cancel{51} + \cancel{2\vec{a} \cdot \vec{c}} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 10 \cos(\pi/8)$$

~~pág. 2.7~~

Wy

e, portanto,

$$4\vec{b}\cdot\vec{c} = -20\cos(\pi/8) \iff \vec{b}\cdot\vec{c} = -5\cos(\pi/8)$$

Substituindo em (2) obtém-se

$$\cos(\theta) = -\cos(\pi/8) \iff \theta = \pi - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$$

pág. 2.7

Exemplo 2

$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d} \in \mathbb{R}^n$: $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{b}\| = \|\vec{d}\| = 1$ (versores)

$$\alpha = \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{d} \iff \vec{d} = k\vec{a}, \quad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Calcular $\|\vec{c}\|$ e $\theta = \measuredangle(\vec{c},\vec{d})$

$$\|\vec{c}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} =$$

$$= 2+1+2\vec{a}\cdot\vec{b} = 3 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

ou seja, sabendo que

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\alpha) = \sqrt{2}\cos(\pi/4) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$$\|\vec{c}\|^2 = 3 + 2(1) = 5 \iff \|\vec{c}\| = \sqrt{5}$$

Por outro lado,

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\|\vec{c}\|\|\vec{d}\|} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\sqrt{5}} \qquad (1)$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot k\vec{a} = k\|\vec{a}\|^2 + k\,\vec{a}\cdot\vec{b} \iff$$

pág. 2.7

Wuy

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = k \left(\|\vec{a}\|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} \right) = k\,(2+1) = 3k \qquad (2)$$

Além disso,

$$\|\vec{d}\| = 1 \Leftrightarrow \|k\vec{a}\| = 1 \Leftrightarrow |k|\,\|\vec{a}\| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |k| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee k = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Assim, se $k = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ (os vectores $\vec{a}$ e $\vec{d}$ têm o mesmo sentido) então

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 3k = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{3\sqrt{10}}{10} \right) \qquad (1)$$

Por outro lado, se $k = \frac{-1}{\sqrt{2}} < 0$ (os vectores $\vec{a}$ e $\vec{d}$ têm sentidos opostos), então

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 3k = \frac{-3}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{\sqrt{5}} = \frac{-3}{\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-3\sqrt{10}}{10} \right) \qquad (1)$$

pág. 2.7

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Teorema [2.12; 18]

Sejam $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leq (\vec{x}\cdot\vec{x})(\vec{y}\cdot\vec{y}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad |\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|$$

Condição de igualdade:

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \text{ se e só se } \vec{x} = k\vec{y}, \; k \in \mathbb{R}$$

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = |k\vec{y}\cdot\vec{y}| = |k|\,\|\vec{y}\|^2$$

$$\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| = \|k\vec{y}\|\,\|\vec{y}\| = |k|\,\|\vec{y}\|\,\|\vec{y}\| = |k|\,\|\vec{y}\|^2$$

pág. 2.8

Desigualdade triangular

Teorema [2.13; 19]

Sejam $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,\vec{x}\cdot\vec{y}$$

Sabe-se que $\vec{x}\cdot\vec{y} \leq |\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$

pág. 2.8

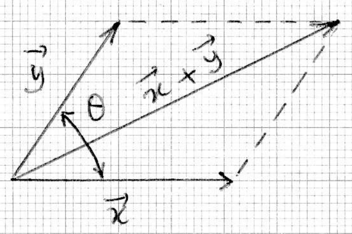
Wai

pelo que

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \iff$$

$$\iff \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq \left(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|\right)^2 \iff$$

$$\iff \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$



$\theta \in [0, \pi]$

<u>Condição de igualdade</u>

$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ se e só se $\vec{y} = k\vec{x}$, $k \in \mathbb{R}_0^+$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}+k\vec{x}\| = \|(k+1)\vec{x}\| =$$

$$= |k+1|\,\|\vec{x}\|$$

$$\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|k\vec{x}\| = \|\vec{x}\| + |k|\,\|\vec{x}\| =$$

$$= (1+|k|)\,\|\vec{x}\|$$

$|k+1| = 1+|k|$ se e só se $k \in \mathbb{R}_0^+$

pág. 2.8

Projecção ortogonal entre vectores

Teorema [2.7 ; 22]

$$\vec{a} = \overrightarrow{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a} + \vec{a}_\perp \quad e \quad \overrightarrow{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = k\vec{b}, \quad k \in \mathbb{R}$$

logo

$$\vec{a} = k\vec{b} + \vec{a}_\perp \quad e \quad \vec{b} \neq \vec{0}$$

então

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (k\vec{b} + \vec{a}_\perp)\cdot\vec{b} = k\vec{b}\cdot\vec{b} + \underbrace{\cancel{\vec{a}_\perp\cdot\vec{b}}}_{=0} =$$

$$= k\,\vec{b}\cdot\vec{b}$$

e, portanto,

$$k = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$$

Concluindo

$$\overrightarrow{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = k\,\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\,\vec{b}$$

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \overrightarrow{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$$

Propriedades

Seja $\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$

i) $\theta \in [0, \pi/2[\ , \quad \vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad , \quad k > 0$

ii) $\theta \in]\pi/2, \pi]\ , \quad \vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad , \quad k < 0$

pág. 2.10

iii) $\theta = \pi/2 \quad , \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad , \quad k = 0$

iv)

$$\| \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\, \vec{a} \| = \| k\vec{b} \| = |k|\, \|\vec{b}\| =$$

$$= \left| \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \right| \|\vec{b}\| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{b}\|^2}\, \|\vec{b}\| =$$

$$= \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{b}\|}$$

v) Se $\vec{b}$ é versor, isto é, $\|\vec{b}\| = 1$ então

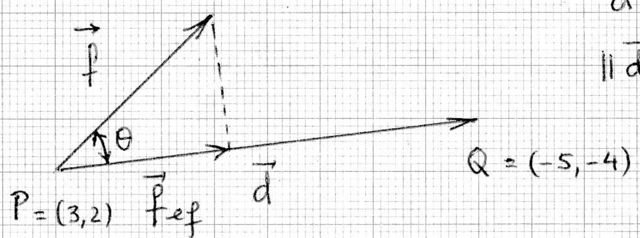
$$\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\, \vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{b})\, \vec{b}$$

$$\| \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\, \vec{a} \| = |\vec{a}\cdot\vec{b}|$$

pág. 2.10

Exemplo 3 [2.11]

$\vec{f} = (3,-1)$



$\vec{d} = \overrightarrow{PQ} = (-8,-6)$

$\|\vec{d}\| = \sqrt{100} = 10$

força efectiva : $f_{ef} = \|\vec{f}\| \cos(\theta) = \sqrt{10}\cos(\theta)$

deslocamento : $d = \|\vec{d}\| = 10$

$$W = f_{ef}\, d = \|\vec{f}\| \cos(\theta)\, \|\vec{d}\| = \vec{f}\cdot\vec{d} =$$

$$= (3,-1)\cdot(-8,-6) = -24 + 6 = -18 < 0$$

pág. 2.10

Como $W = -18 < 0$ o trabalho é resistente, pelo que

$\theta \in]\pi/2, \pi]$ e $\cos(\theta) \in [-1, 0[$.

Cálculo da força efectiva : $\vec{f}_{ef}$

$$\vec{f}_{ef} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{d}}\, \vec{f} = \frac{\vec{f} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\, \vec{d} = \underbrace{\frac{-18}{100}}_{<0} (-8, -6) =$$

$$= \frac{-9}{25} (-4, -3)$$: trata-se de um vector com o sentido oposto ao de $\vec{d}$

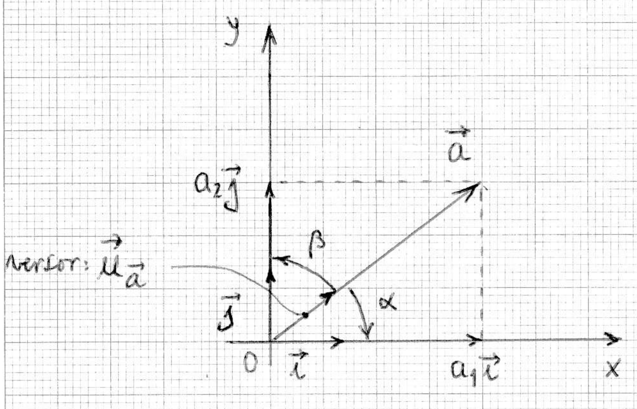
$$W = \vec{f}_{ef} \cdot \vec{d} = \frac{-9}{25} (-4, -3) \cdot (-8, -6) =$$

$$= \frac{-9}{25} (32 + 18) = -18 \quad \checkmark$$

pág. 2.10

Projecções - $\mathbb{R}^2$

Vectores coordenados unitários : $\vec{\imath} = (1,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1)$



Ângulos directores de $\vec{a}$:

$\alpha = \measuredangle(\vec{a}, \vec{\imath})$ e $\beta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{\jmath})$

Cossenos directores de $\vec{a}$:

$\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$

$$\vec{a} = a_1 \vec{\imath} + a_2 \vec{\jmath} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{\imath}}\, \vec{a} + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{\jmath}}\, \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{\imath})\, \vec{\imath} + (\vec{a} \cdot \vec{\jmath})\, \vec{\jmath}$$

pág. 2.11

Teoremas

Seja $\vec{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{\imath} = \|\vec{a}\| \cos(\alpha)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{\jmath} = \|\vec{a}\| \cos(\beta)$$

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{\imath})\,\vec{\imath} + (\vec{a} \cdot \vec{\jmath})\,\vec{\jmath} = \|\vec{a}\| \left[\cos(\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta)\,\vec{\jmath} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \cos(\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta)\,\vec{\jmath} \quad \text{e} \quad \|\vec{u}_{\vec{a}}\| = 1$$

Uma vez que $\|\vec{u}_{\vec{a}}\| = 1$ então

$$\sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta)} = 1 \iff \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$$

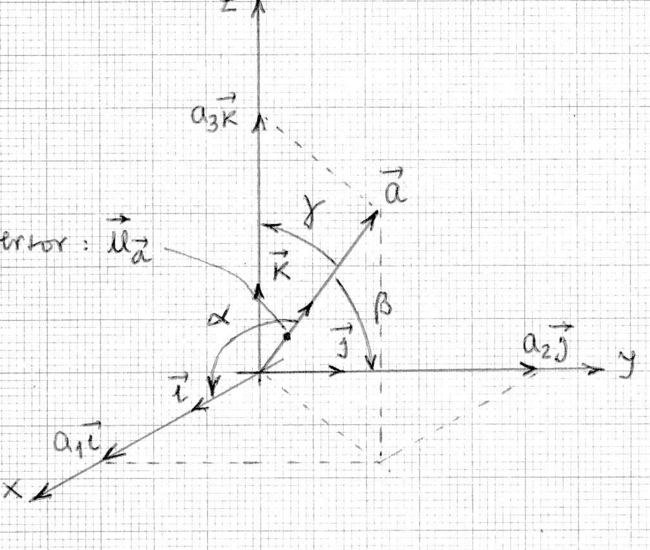
pág. 2.11

Projecções - $\mathbb{R}^3$

Vectores coordenados unitários: $\vec{\imath} = (1,0,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$

Ângulos directores de $\vec{a}$:
$\alpha = \measuredangle(\vec{a}, \vec{\imath})$, $\beta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{\jmath})$, $\gamma = \measuredangle(\vec{a}, \vec{k})$

Cossenos directores de $\vec{a}$: $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$



$$\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k} = \overrightarrow{proj}_{\vec{\imath}}\,\vec{a} + \overrightarrow{proj}_{\vec{\jmath}}\,\vec{a} + \overrightarrow{proj}_{\vec{k}}\,\vec{a} =$$
$$= (\vec{a} \cdot \vec{\imath})\,\vec{\imath} + (\vec{a} \cdot \vec{\jmath})\,\vec{\jmath} + (\vec{a} \cdot \vec{k})\,\vec{k}$$

pág. 2.12

Teoremas [2.10] ; [2.11]

Seja $\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = \|\vec{a}\| \cos(\alpha)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{j} = \|\vec{a}\| \cos(\beta)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{k} = \|\vec{a}\| \cos(\gamma)$$

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{a} \cdot \vec{k})\vec{k} =$$

$$= \|\vec{a}\| \left[\cos(\alpha)\vec{i} + \cos(\beta)\vec{j} + \cos(\gamma)\vec{k} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \cos(\alpha)\vec{i} + \cos(\beta)\vec{j} + \cos(\gamma)\vec{k} \quad \text{e} \quad \|\vec{u}_{\vec{a}}\| = 1$$

Uma vez que $\|\vec{u}_a\| = 1$ então

$$\sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma)} = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

pág. 2.12

Projecções - $\mathbb{R}^n$

Vectores coordenados unitários:
$\vec{e}_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1,\dots,0)$, ..., $\vec{e}_n = (0,0,0,\dots,1)$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + \dots + a_n\vec{e}_n =$$

$$= \text{proj}_{\vec{e}_1}\vec{a} + \text{proj}_{\vec{e}_2}\vec{a} + \text{proj}_{\vec{e}_3}\vec{a} + \dots + \text{proj}_{\vec{e}_n}\vec{a} =$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{a} \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3 + \dots + (\vec{a} \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_n$$

pág. 2.13

Wmj

Conjuntos ortogonais de vectores

Teorema [2.23]

Seja $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \dots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto ortogonal, tal que

$$\vec{s}_i \neq \vec{0} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

Seja $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\vec{x} \in L(S) \Leftrightarrow \vec{x} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \alpha_3 \vec{s}_3 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k \; , \; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

i) Mostrar que S é linearmente independente.

Recorrendo à definição, pretende-se mostrar que

$$\beta_1 \vec{s}_1 + \beta_2 \vec{s}_2 + \beta_3 \vec{s}_3 + \dots + \beta_k \vec{s}_k = \vec{0} \Rightarrow \underset{\text{(solução trivial)}}{\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0}$$

Comecemos por mostrar que $\beta_1 = 0$. Tendo em atenção que $\vec{s}_1 \neq \vec{0}$, então

$$(\beta_1 \vec{s}_1 + \beta_2 \vec{s}_2 + \beta_3 \vec{s}_3 + \dots + \beta_k \vec{s}_k) \cdot \vec{s}_1 = \vec{0} \cdot \vec{s}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1 + \beta_2 \underbrace{\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_1}_{=0} + \beta_3 \underbrace{\vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1}_{=0} + \dots + \beta_k \underbrace{\vec{s}_k \cdot \vec{s}_1}_{=0} = 0 \Leftrightarrow$$

(os vectores são ortogonais)

$$\Leftrightarrow \beta_1 \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1 = 0 \Leftrightarrow \beta_1 \underbrace{\|\vec{s}_1\|^2}_{>0} = 0 \Leftrightarrow \beta_1 = 0$$

, já que $\vec{s}_1 \neq \vec{0}$

O processo anterior pode ser repetido para os restantes vectores $(\vec{s}_2, \vec{s}_3, \dots, \vec{s}_k)$ do conjunto S, obtendo-se

$$\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$$

pág. 2.14

Papel 100% Reciclado

Como a solução nula (trivial) $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$ é a única solução, conclui-se que o vector nulo é gerado de forma única pelos elementos do conjunto S e, portanto, S é um conjunto linearmente independente.

ii) Se $\vec{x} \in L(S)$, então

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \alpha_3 \vec{s}_3 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k \quad , \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Comecemos por mostrar que $\alpha_1 = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{s}_1}{\| \vec{s}_1 \|^2}$. Tendo em atenção que $\vec{s}_1 \neq \vec{0}$, então

$$(\alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \alpha_3 \vec{s}_3 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k) \cdot \vec{s}_1 = \vec{x} \cdot \vec{s}_1 \iff$$

$$\iff \alpha_1 \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1 + \alpha_2 \underbrace{\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_1}_{=0} + \alpha_3 \underbrace{\vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1}_{=0} + \dots + \alpha_k \underbrace{\vec{s}_k \cdot \vec{s}_1}_{=0} = \vec{x} \cdot \vec{s}_1 \iff$$

(os vectores são ortogonais)

$$\iff \alpha_1 \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1 = \vec{x} \cdot \vec{s}_1 \iff \alpha_1 \| \vec{s}_1 \|^2 = \vec{x} \cdot \vec{s}_1 \iff \alpha_1 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{s}_1}{\| \vec{s}_1 \|^2}$$

Além disso, conclui-se que

$$\alpha_1 \vec{s}_1 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{s}_1}{\| \vec{s}_1 \|^2} \vec{s}_1 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_1} \vec{x}$$

O processo anterior pode ser repetido para os restantes vectores $(\vec{s}_2, \vec{s}_3, \dots, \vec{s}_k)$ do conjunto S, obtendo-se

$$\alpha_2 \vec{s}_2 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{s}_2}{\| \vec{s}_2 \|^2} \vec{s}_2 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_2} \vec{x} \quad , \quad \alpha_3 \vec{s}_3 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{s}_3}{\| \vec{s}_3 \|^2} \vec{s}_3 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_3} \vec{x} \, , \dots ,$$

$$\alpha_k \vec{s}_k = \frac{x \cdot \vec{s}_k}{\| \vec{s}_k \|^2} \vec{s}_k = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_k} \vec{x}$$

Concluindo

$$\vec{x} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_1} \vec{x} + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_2} \vec{x} + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_3} \vec{x} + \dots + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_k} \vec{x}$$

pág. 2.14

Teorema [2.24]

Seja $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \dots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto ortonormal.

Seja $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\vec{x} \in L(S) \Leftrightarrow \vec{x} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \alpha_3 \vec{s}_3 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k \, , \; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

i) O conjunto S é linearmente independente.

A demonstração é idêntica à apresentada na alínea i) do teorema anterior, onde, neste caso, se considera

$$\|\vec{s}_1\| = \|\vec{s}_2\| = \|\vec{s}_3\| = \dots = \|\vec{s}_k\| = 1$$

ii) Mais uma vez, a demonstração desta propriedade é idêntica à apresentada na alínea ii) do teorema anterior. Neste caso, obtém-se

$$\alpha_1 = \vec{x} \cdot s_1 \;,\quad \alpha_2 = \vec{x} \cdot \vec{s}_2 \;,\; \alpha_3 = \vec{x} \cdot \vec{s}_3 \;,\; \dots ,\; \alpha_k = \vec{x} \cdot \vec{s}_k$$

e

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{s}_1)\, \vec{s}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{s}_2)\, \vec{s}_2 + (\vec{x} \cdot \vec{s}_3)\, \vec{s}_3 + \dots + (\vec{x} \cdot \vec{s}_k)\, \vec{s}_k =$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{s}_1} \vec{x} + \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{s}_2} \vec{x} + \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{s}_3} \vec{x} + \dots + \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{s}_k} \vec{x}$$

pág. 2.15

Papel 100% Reciclado