Tópicos de Álgebra Linear

Gaspar J. Machado

Departamento de Matemática e Aplicações, Universidade do Minho

setembro de 2016 (v3.3)

Índice

Def 1.1

⟦produto cartesiano de dois conjuntos⟧ Sejam A e B conjuntos. Chama-se produto cartesiano de A e B, que se representa por $A \times B$, ao conjunto formado pelos pares ordenados tais que a primeira componente pertence a A e a segunda componente pertence a B, ou seja,

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

Exe 1.2

Descreva por extensão $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\}$.

Def 1.1

⟦produto cartesiano de dois conjuntos⟧ Sejam A e B conjuntos. Chama-se produto cartesiano de A e B, que se representa por $A \times B$, ao conjunto formado pelos pares ordenados tais que a primeira componente pertence a A e a segunda componente pertence a B, ou seja,

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

Exe 1.2

Descreva por extensão $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\}$.

Res

$\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

Def 1.3

(a) ⟦produto cartesiano de um número finito de conjuntos⟧ Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos. Chama-se produto cartesiano de $A_1, \ldots, A_n$, que se representa por $A_1 \times \ldots \times A_n$, ao conjunto formado pelos n-uplos tais que a i-ésima componente é um elemento de A_i, ou seja,

$$A_1 \times \cdots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, \ldots, a_n) : \forall i \in \{1, \ldots, n\} \, [a_i \in A_i]\}.$$

Def 1.3

(a) ⟦produto cartesiano de um número finito de conjuntos⟧ Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos. Chama-se produto cartesiano de $A_1, \ldots, A_n$, que se representa por $A_1 \times \ldots \times A_n$, ao conjunto formado pelos n-uplos tais que a i-ésima componente é um elemento de A_i, ou seja,

$$A_1 \times \cdots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, \ldots, a_n) : \forall i \in \{1, \ldots, n\} \, [a_i \in A_i]\}.$$

(b) ⟦potência cartesiana de um conjunto⟧ Sejam A um conjunto e $n \in \mathbb{N}$. Chama-se potência cartesiana de ordem n de A, que se representa por A^n, ao conjunto formado pelos n-uplos tais que todas as componentes são elementos de A, ou seja,

$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, \ldots, a_n) : \forall i \in \{1, \ldots, n\} \, [a_i \in A]\},$$

identificando-se A^1 com A.

Exe 1.4

Descreva por compreensão $\mathbb{R}^3$.

Exe 1.4

Descreva por compreensão $\mathbb{R}^3$.

Res

$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Def 1.5

(a) ⟦matriz, tipo de uma matriz⟧ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ (lê-se "m por n") a uma função real com domínio $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$.

Def 1.5

(a) $[\![$matriz, tipo de uma matriz$]\!]$ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ (lê-se "m por n") a uma função real com domínio $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$.

(b) $[\![\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})]\!]$ Representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$.

Def 1.5

(a) ⟦matriz, tipo de uma matriz⟧ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ (lê-se "m por n") a uma função real com domínio $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$.

(b) ⟦$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$⟧ Representa-se por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$.

Def 1.5

(a) ⟦matriz, tipo de uma matriz⟧ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ (lê-se "m por n") a uma função real com domínio $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$.

(b) ⟦$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$⟧ Representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$.

Obs 1.6

É possível considerar matrizes cujos elementos do conjunto de chegada não são números reais (*e.g.*, números complexos e polinómios). Neste curso, porém, considera-se apenas matrizes cujos elementos do conjunto de chegada são números reais.

Def 1.5

(a) $\llbracket$matriz, tipo de uma matriz$\rrbracket$ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ (lê-se "m por n") a uma função real com domínio $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$.

(b) $\llbracket\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\rrbracket$ Representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$.

Obs 1.6

É possível considerar matrizes cujos elementos do conjunto de chegada não são números reais (*e.g.*, números complexos e polinómios). Neste curso, porém, considera-se apenas matrizes cujos elementos do conjunto de chegada são números reais.

Def 1.7

$\llbracket$escalar$\rrbracket$ Chama-se escalar a um elemento de $\mathbb{R}$.

Def 1.8

⟦elemento de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. Chama-se elemento ij da matriz A, que se representa por $(A)_{ij}$ (ou por $(A)_{i,j}$ se houver ambiguidade relativamente aos índices), a

$$(A)_{ij} \overset{\text{def}}{=} A(i, j).$$

Obs 1.9

(a) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. Se se quiser representar por ξ_{ij} o elemento ij da matriz A, usa-se a notação

$$A = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Obs 1.9

(a) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i \in \{1,\ldots,m\}$ e $j \in \{1,\ldots,n\}$. Se se quiser representar por ξ_{ij} o elemento ij da matriz A, usa-se a notação

$$A = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

(b) É habitual representar matrizes por letras maiúsculas. Neste caso, para representar o elemento ij duma matriz é também habitual usar a respetiva letra minúscula afetada do índice ij, ou seja,

$$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Obs 1.9 (cont.)

(c) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. A representação habitual de A é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

em que $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

Obs 1.9 (cont.)

(c) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. A representação habitual de A é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

em que $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

(d) Neste curso, as letras "i" e "j" nunca estão associadas à unidade imaginária dos números complexos.

Obs 1.9 (cont.)

(c) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. A representação habitual de A é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

em que $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

(d) Neste curso, as letras "i" e "j" nunca estão associadas à unidade imaginária dos números complexos.

(e) Quando se está perante matrizes do conjunto $\mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R})$, o contexto será suficiente para distinguir se se está a fazer referência à matriz ou ao único elemento que a constitui.

Exe 1.10

Dê um exemplo de um elemento de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Exe 1.10

Dê um exemplo de um elemento de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Res

$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -4 \\ \sqrt{2} & 0 & \pi \end{bmatrix}$.

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \left[\qquad \qquad \qquad \right]$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & \\ & & \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ & & \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & & \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & 2-2 & \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & 2-2 & 3-2 \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$X = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$X = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$X = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$X = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 & \\ & \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$X = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1+1 & 1\times 2+1 \\ & \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$X = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1+1 & 1\times 2+1 \\ 2\times 1+1 & \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$X = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1+1 & 1\times 2+1 \\ 2\times 1+1 & 2\times 2+1 \end{bmatrix}$$

Exe 1.11

Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $(A)_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

Res

(a)

$$A = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & (A)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$X = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1+1 & 1\times 2+1 \\ 2\times 1+1 & 2\times 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Def 1.12

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Def 1.12

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦linha de uma matriz⟧ Chama-se linha i da matriz A, que se representa por $\ell_{i,A}$ (ou por ℓ_i se não houver ambiguidade relativamente à matriz), a

$$\ell_{i,A} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}).$$

Def 1.12

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{I\!R})$.

(a) ⟦linha de uma matriz⟧ Chama-se linha i da matriz A, que se representa por $\ell_{i,A}$ (ou por ℓ_i se não houver ambiguidade relativamente à matriz), a

$$\ell_{i,A} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}).$$

(b) ⟦coluna de uma matriz⟧ Chama-se coluna j da matriz A, que se representa por $c_{j,A}$ (ou por c_j se não houver ambiguidade relativamente à matriz), a

$$c_{j,A} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}).$$

Exe 1.13

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Indique o elemento que está na segunda linha e na terceira coluna da matriz A.

(b) Indique o elemento 12 da matriz A.

(c) Indique a segunda linha da matriz A.

(d) Indique a terceira coluna da matriz A.

Exe 1.13

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Indique o elemento que está na segunda linha e na terceira coluna da matriz A.

(b) Indique o elemento 12 da matriz A.

(c) Indique a segunda linha da matriz A.

(d) Indique a terceira coluna da matriz A.

Res

(a) $(A)_{23} = 7$.

Exe 1.13

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Indique o elemento que está na segunda linha e na terceira coluna da matriz A.

(b) Indique o elemento 12 da matriz A.

(c) Indique a segunda linha da matriz A.

(d) Indique a terceira coluna da matriz A.

Res

(a) $(A)_{23} = 7$.

(b) $(A)_{12} = 2$.

Exe 1.13

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Indique o elemento que está na segunda linha e na terceira coluna da matriz A.

(b) Indique o elemento 12 da matriz A.

(c) Indique a segunda linha da matriz A.

(d) Indique a terceira coluna da matriz A.

Res

(a) $(A)_{23} = 7$.

(b) $(A)_{12} = 2$.

(c) $\ell_2 = (5, 6, 7, 8)$.

Exe 1.13

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Indique o elemento que está na segunda linha e na terceira coluna da matriz A.

(b) Indique o elemento 12 da matriz A.

(c) Indique a segunda linha da matriz A.

(d) Indique a terceira coluna da matriz A.

Res

(a) $(A)_{23} = 7$.

(b) $(A)_{12} = 2$.

(c) $\ell_2 = (5, 6, 7, 8)$.

(d) $c_3 = (3, 7)$.

Def 1.14

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Def 1.14

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) $[\![$matriz coluna$]\!]$ Diz-se que A é uma matriz coluna se $n = 1$.

Def 1.14

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) $[\![$matriz coluna$]\!]$ Diz-se que A é uma matriz coluna se $n = 1$.

(b) $[\![$matriz linha$]\!]$ Diz-se que A é uma matriz linha se $m = 1$.

Def 1.14

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦matriz coluna⟧ Diz-se que A é uma matriz coluna se $n = 1$.

(b) ⟦matriz linha⟧ Diz-se que A é uma matriz linha se $m = 1$.

Def 1.14

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦matriz coluna⟧ Diz-se que A é uma matriz coluna se $n = 1$.

(b) ⟦matriz linha⟧ Diz-se que A é uma matriz linha se $m = 1$.

Obs 1.15

É habitual representar matrizes linha e matrizes coluna por letras minúsculas e os seus elementos apenas com um índice. Assim, e usando esta notação, a representação da matriz coluna x com m linhas é $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ e da matriz linha y com n colunas é $y = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$.

Exe 1.16

(a) Dê um exemplo de uma matriz linha com 3 elementos.

(b) Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "Há matrizes que são simultaneamente matrizes linha e matrizes coluna".

Exe 1.16

(a) Dê um exemplo de uma matriz linha com 3 elementos.

(b) Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "Há matrizes que são simultaneamente matrizes linha e matrizes coluna".

Res

(a) $q = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

Exe 1.16

(a) Dê um exemplo de uma matriz linha com 3 elementos.

(b) Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "Há matrizes que são simultaneamente matrizes linha e matrizes coluna".

Res

(a) $q = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Proposição verdadeira pois, por exemplo, $A = [3]$ é simultaneamente uma matriz linha e uma matriz coluna.

Def 1.17

⟦matriz retangular, matriz quadrada⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz retangular se $m \neq n$. Caso contrário, diz-se uma matriz quadrada.

Def 1.17

⟦matriz retangular, matriz quadrada⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz retangular se $m \neq n$. Caso contrário, diz-se uma matriz quadrada.

Exe 1.18

Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "$A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ é uma matriz retangular."

Def 1.17

⟦matriz retangular, matriz quadrada⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz retangular se $m \neq n$. Caso contrário, diz-se uma matriz quadrada.

Exe 1.18

Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "$A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ é uma matriz retangular."

Res

A proposição é verdadeira pois o número de linhas da matriz A, que é 2, é diferente do número de colunas, que é 3.

Def 1.17

⟦matriz retangular, matriz quadrada⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz retangular se $m \neq n$. Caso contrário, diz-se uma matriz quadrada.

Exe 1.18

Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "$A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ é uma matriz retangular."

Res

A proposição é verdadeira pois o número de linhas da matriz A, que é 2, é diferente do número de colunas, que é 3.

Exe 1.19

Dê um exemplo de uma matriz quadrada.

Def 1.17

⟦matriz retangular, matriz quadrada⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz retangular se $m \neq n$. Caso contrário, diz-se uma matriz quadrada.

Exe 1.18

Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "$A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ é uma matriz retangular."

Res

A proposição é verdadeira pois o número de linhas da matriz A, que é 2, é diferente do número de colunas, que é 3.

Exe 1.19

Dê um exemplo de uma matriz quadrada.

Res

$G = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Def 1.20

⟦ordem de uma matriz quadrada⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz de ordem n.

Obs 1.21

Uma matriz de ordem n tem n linhas e n colunas.

Exe 1.22

Dê um exemplo de uma matriz de ordem 4.

Def 1.20

⟦ordem de uma matriz quadrada⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz de ordem n.

Obs 1.21

Uma matriz de ordem n tem n linhas e n colunas.

Exe 1.22

Dê um exemplo de uma matriz de ordem 4.

Res

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Def 1.23

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Def 1.23

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦diagonal ou diagonal principal de uma matriz⟧ Chama-se diagonal ou diagonal principal de A ao n-uplo $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Obs 1.24

As definições anteriores só se aplicam a matrizes quadradas.

Def 1.23

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦diagonal ou diagonal principal de uma matriz⟧ Chama-se diagonal ou diagonal principal de A ao n-uplo $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

(b) ⟦diagonal secundária de uma matriz⟧ Chama-se diagonal secundária de A ao n-uplo $(a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1})$.

Obs 1.24

As definições anteriores só se aplicam a matrizes quadradas.

Exe 1.25

Seja $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Indique a diagonal de D.

(b) Indique a diagonal secundária de D.

Res

(a) $(1, 0, 2)$.

(b) $(0, 0, 2)$.

Def 1.26

⟦matriz diagonal⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz diagonal se

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ [i \neq j \to a_{ij} = 0].$$

Def 1.26

⟦matriz diagonal⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz diagonal se

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ [i \neq j \rightarrow a_{ij} = 0].$$

Obs 1.27

(a) A definição anterior só se aplica a matrizes quadradas.

Def 1.26

⟦matriz diagonal⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz diagonal se

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ [i \neq j \to a_{ij} = 0].$$

Obs 1.27

(a) A definição anterior só se aplica a matrizes quadradas.

(b) A é uma matriz diagonal se todos os elementos que não pertencem à diagonal são zeros, não sendo, por isso, relevante para esta classificação se os elementos da diagonal são zeros ou não.

Def 1.26

⟦matriz diagonal⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz diagonal se

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ [i \neq j \to a_{ij} = 0].$$

Obs 1.27

(a) A definição anterior só se aplica a matrizes quadradas.

(b) A é uma matriz diagonal se todos os elementos que não pertencem à diagonal são zeros, não sendo, por isso, relevante para esta classificação se os elementos da diagonal são zeros ou não.

(c) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A não é uma matriz diagonal se

$$\exists i, j \in \{1, \ldots, n\}\ [i \neq j \wedge a_{ij} \neq 0].$$

Exe 1.28

(a) Dê um exemplo de uma matriz diagonal de ordem 4.

(b) Dê um exemplo de uma matriz de ordem 3 que não seja diagonal.

Res

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Def 1.29

⟦matriz escalar⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz escalar se é uma matriz diagonal e $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$.

Def 1.29

⟦matriz escalar⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz escalar se é uma matriz diagonal e $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$.

Obs 1.30

A definição anterior só se aplica a matrizes quadradas.

Exe 1.31

(a) Dê um exemplo de uma matriz escalar de ordem 3.

(b) Dê um exemplo de uma matriz de ordem 2 que não seja escalar.

Res

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Def 1.32

⟦matriz triangular superior⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz triangular superior se

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ [i > j \rightarrow a_{ij} = 0].$$

Def 1.32

⟦matriz triangular superior⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz triangular superior se

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ [i > j \to a_{ij} = 0].$$

Obs 1.33

(a) A definição anterior só se aplica a matrizes quadradas.

Def 1.32

⟦matriz triangular superior⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz triangular superior se

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \; [i > j \rightarrow a_{ij} = 0].$$

Obs 1.33

(a) A definição anterior só se aplica a matrizes quadradas.

(b) A é uma matriz triangular superior se todos os elementos "abaixo" da diagonal são zeros, não sendo, por isso, relevante para esta classificação se os elementos da diagonal e "acima" da diagonal são zeros ou não.

Def 1.32

⟦matriz triangular superior⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz triangular superior se

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}\ [i > j \to a_{ij} = 0].$$

Obs 1.33

(a) A definição anterior só se aplica a matrizes quadradas.

(b) A é uma matriz triangular superior se todos os elementos "abaixo" da diagonal são zeros, não sendo, por isso, relevante para esta classificação se os elementos da diagonal e "acima" da diagonal são zeros ou não.

(c) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A não é uma matriz triangular superior se

$$\exists i, j \in \{1, \dots, n\}\ [i > j \land a_{ij} \neq 0].$$

Exe 1.34

(a) Dê um exemplo de uma matriz triangular superior de ordem 4.

(b) Dê um exemplo de uma matriz de ordem 3 que não seja triangular superior.

Res

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Def 1.35

⟦matriz triangular inferior⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz triangular inferior se

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ [i < j \rightarrow a_{ij} = 0].$$

Def 1.35

⟦matriz triangular inferior⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz triangular inferior se

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ [i < j \to a_{ij} = 0].$$

Obs 1.36

(a) A definição anterior só se aplica a matrizes quadradas.

Def 1.35

⟦matriz triangular inferior⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz triangular inferior se

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ [i < j \rightarrow a_{ij} = 0].$$

Obs 1.36

(a) A definição anterior só se aplica a matrizes quadradas.

(b) A é uma matriz triangular inferior se todos os elementos "acima" da diagonal são zeros, não sendo, por isso, relevante para esta classificação se os elementos diagonal e "abaixo" da diagonal são zeros ou não.

Def 1.35

⟦matriz triangular inferior⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz triangular inferior se

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ [i < j \to a_{ij} = 0].$$

Obs 1.36

(a) A definição anterior só se aplica a matrizes quadradas.

(b) A é uma matriz triangular inferior se todos os elementos "acima" da diagonal são zeros, não sendo, por isso, relevante para esta classificação se os elementos diagonal e "abaixo" da diagonal são zeros ou não.

(c) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A não é uma matriz triangular inferior se

$$\exists i, j \in \{1, \ldots, n\}\ [i < j \land a_{ij} \neq 0].$$

Exe 1.37

(a) Dê um exemplo de uma matriz triangular inferior de ordem 2.

(b) Dê um exemplo de uma matriz de ordem 3 que não seja triangular inferior.

Res

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Exe 1.38

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Indique as matrizes retangulares e o seu tipo.

(b) Indique as matrizes quadradas e a sua ordem.

(c) Indique as matrizes linha.

(d) Indique as matrizes coluna.

(e) Indique as matrizes diagonais.

(f) Indique as matrizes escalares.

(g) Indique as matrizes triangulares superiores.

(h) Indique as matrizes triangulares inferiores.

Def 1.39

⟦traço de uma matriz⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se traço da matriz A, que se representa por $\operatorname{tr}(A)$, à soma dos elementos da diagonal de A, ou seja,

$$\operatorname{tr}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}.$$

Exe 1.40

Determine os traços de $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 9 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{smallmatrix}\right]$.

Res

$\operatorname{tr}(A) = 3 + 9 = 12$ e $\operatorname{tr}(B) = 1 + 9 + 6 = 16$.

Exe 1.41

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Mostre que $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$.

Def 1.42

⟦matriz nula, $0_{m\times n}$, $\underline{0}$⟧ Chama-se matriz nula a uma matriz cujos elementos são todos iguais a 0. Representa-se a matriz nula do tipo $m \times n$ por $0_{m\times n}$ ou por $\underline{0}$ se não houver ambiguidade relativamente ao tipo.

Def 1.42

⟦matriz nula, $0_{m\times n}$, $\underline{0}$⟧ Chama-se matriz nula a uma matriz cujos elementos são todos iguais a 0. Representa-se a matriz nula do tipo $m \times n$ por $0_{m\times n}$ ou por $\underline{0}$ se não houver ambiguidade relativamente ao tipo.

Exe 1.43

Indique a matriz nula do tipo 2×4.

Def 1.42

⟦matriz nula, $0_{m\times n}$, $\underline{0}$⟧ Chama-se matriz nula a uma matriz cujos elementos são todos iguais a 0. Representa-se a matriz nula do tipo $m \times n$ por $0_{m\times n}$ ou por $\underline{0}$ se não houver ambiguidade relativamente ao tipo.

Exe 1.43

Indique a matriz nula do tipo 2×4.

Res

$0_{2\times 4} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Def 1.44

⟦matriz identidade, I_n, I⟧ Chama-se matriz identidade à matriz escalar cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1. Representa-se a matriz identidade de ordem n por I_n ou por I se não houver ambiguidade relativamente à ordem.

Def 1.44

⟦matriz identidade, I_n, I⟧ Chama-se matriz identidade à matriz escalar cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1. Representa-se a matriz identidade de ordem n por I_n ou por I se não houver ambiguidade relativamente à ordem.

Exe 1.45

Indique a matriz identidade de ordem 3.

Def 1.44

⟦matriz identidade, I_n, I⟧ Chama-se matriz identidade à matriz escalar cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1. Representa-se a matriz identidade de ordem n por I_n ou por I se não houver ambiguidade relativamente à ordem.

Exe 1.45

Indique a matriz identidade de ordem 3.

Res

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Def 1.46

⟦matrizes iguais⟧ Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$. Diz-se que A e B são matrizes iguais se:

(i) $m = p$.

Def 1.46

⟦matrizes iguais⟧ Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$. Diz-se que A e B são matrizes iguais se:

(i) $m = p$.

(ii) $n = q$.

Def 1.46

⟦matrizes iguais⟧ Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$. Diz-se que A e B são matrizes iguais se:

(i) $m = p$.

(ii) $n = q$.

(iii) $a_{ij} = b_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Def 1.46

⟦matrizes iguais⟧ Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$. Diz-se que A e B são matrizes iguais se:

(i) $m = p$.

(ii) $n = q$.

(iii) $a_{ij} = b_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

Obs 1.47

Usa-se esta definição em algumas demonstrações relativas a matrizes.

Def 1.48

⟦soma de matrizes⟧ Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se soma das matrizes A e B, que se representa por $A + B$, ao elemento de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$(A+B)_{ij} \overset{\text{def}}{=} (A)_{ij} + (B)_{ij}.$$

Obs 1.49

Só se podem somar matrizes do mesmo tipo.

Exe 1.50

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $A + B$.

Exe 1.50

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $A + B$.

Res

$$A + B$$

Exe 1.50

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $A + B$.

Res

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exe 1.50

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $A + B$.

Res

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+3 & 2+0 & 1+2 \\ 0+1 & 1+(-1) & -4+2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exe 1.50

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $A + B$.

Res

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+3 & 2+0 & 1+2 \\ 0+1 & 1+(-1) & -4+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Def 1.51

⟦produto (ou multiplicação) de uma matriz por um escalar⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se produto (ou multiplicação) da matriz A pelo escalar α, que se representa por αA, ao elemento de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$(\alpha A)_{ij} \overset{\text{def}}{=} \alpha (A)_{ij}.$$

Obs 1.52

(a) É sempre possível multiplicar uma matriz por um escalar.

Def 1.51

⟦produto (ou multiplicação) de uma matriz por um escalar⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se produto (ou multiplicação) da matriz A pelo escalar α, que se representa por αA, ao elemento de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$(\alpha A)_{ij} \overset{\text{def}}{=} \alpha (A)_{ij}.$$

Obs 1.52

(a) É sempre possível multiplicar uma matriz por um escalar.

(b) Seja a matriz A. Então, em vez de $(-1)A$ escreve-se $-A$.

Exe 1.53

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) $2A$.

(b) $-B$.

Exe 1.53

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) $2A$.

(b) $-B$.

Res

(a)

$$2A = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exe 1.53

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) $2A$.

(b) $-B$.

Res

(a)

$$2A = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-1) & 2\times 2 & 2\times 1 \\ 2\times 0 & 2\times 1 & 2\times(-4) \end{bmatrix}$$

Exe 1.53

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) $2A$.

(b) $-B$.

Res

(a)

$$2A = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-1) & 2\times 2 & 2\times 1 \\ 2\times 0 & 2\times 1 & 2\times(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

Exe 1.53

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) $2A$.

(b) $-B$.

Res

(a)

$$2A = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-1) & 2\times 2 & 2\times 1 \\ 2\times 0 & 2\times 1 & 2\times(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$-B$$

Exe 1.53

Considere as matrizes $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule:

(a) $2A$.

(b) $-B$.

Res

(a)

$$2A = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-1) & 2\times 2 & 2\times 1 \\ 2\times 0 & 2\times 1 & 2\times(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$-B = -\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exe 1.53

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) $2A$.

(b) $-B$.

Res

(a)

$$2A = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-1) & 2\times 2 & 2\times 1 \\ 2\times 0 & 2\times 1 & 2\times(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$-B = -\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Obs 1.54

Sejam A e B matrizes do mesmo tipo. Então, tendo em consideração a observação $\boxed{\text{Obs 1.52}}$ (b), em vez de $A + (-B)$ escreve-se $A - B$.

Exe 1.55

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $\frac{1}{2}A - 3B$.

Res

$$\frac{1}{2}A - 3B$$

Obs 1.54

Sejam A e B matrizes do mesmo tipo. Então, tendo em consideração a observação $\boxed{\text{Obs 1.52}}$ (b), em vez de $A+(-B)$ escreve-se $A-B$.

Exe 1.55

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $\frac{1}{2}A - 3B$.

Res

$$\frac{1}{2}A - 3B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Obs 1.54

Sejam A e B matrizes do mesmo tipo. Então, tendo em consideração a observação $\boxed{\text{Obs 1.52}}$ (b), em vez de $A+(-B)$ escreve-se $A-B$.

Exe 1.55

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $\frac{1}{2}A - 3B$.

Res

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}A - 3B &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\times(-1) - 3\times 3 & \frac{1}{2}\times 2 - 3\times 0 & \frac{1}{2}\times 1 - 3\times 2 \\ \frac{1}{2}\times 0 - 3\times 1 & \frac{1}{2}\times 1 - 3\times(-1) & \frac{1}{2}\times(-4) - 3\times 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Obs 1.54

Sejam A e B matrizes do mesmo tipo. Então, tendo em consideração a observação $\boxed{\text{Obs 1.52}}$ (b), em vez de $A + (-B)$ escreve-se $A - B$.

Exe 1.55

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $\frac{1}{2}A - 3B$.

Res

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}A - 3B &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \times (-1) - 3 \times 3 & \frac{1}{2} \times 2 - 3 \times 0 & \frac{1}{2} \times 1 - 3 \times 2 \\ \frac{1}{2} \times 0 - 3 \times 1 & \frac{1}{2} \times 1 - 3 \times (-1) & \frac{1}{2} \times (-4) - 3 \times 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{19}{2} & 1 & -\frac{11}{2} \\ -3 & \frac{7}{2} & -8 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Exe 1.56

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $b_{ij} = 3i - j$ e $C = [\gamma_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $\gamma_{ij} = i^2$. Indique se estão bem definidas as seguintes expressões, efetuando nesses casos as respetivas operações:

(a) $A + B$.

(b) $B + A$.

(c) $A - C$.

(d) $-C$.

(e) $(A - B) + 3A$.

(f) $4A - B$.

Obs 1.57

No exercício anterior, terá sido coincidência $A + B = B + A$ e $(A - B) + 3A = 4A - B$? O teorema que se segue diz que não.

Teo 1.58

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})\ [A + B = B + A]$.

Obs 1.59

Teo 1.58

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + B = B + A]$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A + B) + C = A + (B + C)]$.

Obs 1.59

Teo 1.58

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + B = B + A]$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A + B) + C = A + (B + C)]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + 0_{m\times n} = A]$.

Obs 1.59

Teo 1.58

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + B = B + A]$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A + B) + C = A + (B + C)]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + 0_{m\times n} = A]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + (-A) = 0_{m\times n}]$.

Obs 1.59

Teo 1.58

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + B = B + A]$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A + B) + C = A + (B + C)]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + 0_{m\times n} = A]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + (-A) = 0_{m\times n}]$.

(e) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)]$.

Obs 1.59

Teo 1.58

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + B = B + A]$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A + B) + C = A + (B + C)]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + 0_{m\times n} = A]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + (-A) = 0_{m\times n}]$.

(e) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)]$.

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A]$.

Obs 1.59

Teo 1.58

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + B = B + A]$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A + B) + C = A + (B + C)]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + 0_{m\times n} = A]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + (-A) = 0_{m\times n}]$.

(e) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)]$.

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A]$.

(g) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B]$.

Obs 1.59

Teo 1.58

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + B = B + A]$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A + B) + C = A + (B + C)]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + 0_{m\times n} = A]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + (-A) = 0_{m\times n}]$.

(e) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)]$.

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A]$.

(g) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B]$.

(h) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [1A = A]$.

Obs 1.59

Teo 1.58

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + B = B + A]$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A + B) + C = A + (B + C)]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + 0_{m\times n} = A]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + (-A) = 0_{m\times n}]$.

(e) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)]$.

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A]$.

(g) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B]$.

(h) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [1A = A]$.

Obs 1.59

(a) A matriz nula é o elemento neutro da soma de matrizes.

Teo 1.58

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + B = B + A]$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A + B) + C = A + (B + C)]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + 0_{m\times n} = A]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [A + (-A) = 0_{m\times n}]$.

(e) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)]$.

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A]$.

(g) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B]$.

(h) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [1A = A]$.

Obs 1.59

(a) A matriz nula é o elemento neutro da soma de matrizes.

(b) Sejam A, B e C matrizes do mesmo tipo. Então, tem-se que a expressão $A + B + C$ não resulta ambígua devido à propriedade associativa da soma de matrizes.

Def 1.60

⟦produto (ou multiplicação) de matrizes⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Chama-se produto (ou multiplicação) da matriz A pela matriz B, que se representa por AB, ao elemento de $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ tal que

$$(AB)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj}.$$

Def 1.60

⟦produto (ou multiplicação) de matrizes⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Chama-se produto (ou multiplicação) da matriz A pela matriz B, que se representa por AB, ao elemento de $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ tal que

$$(AB)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj}.$$

Obs 1.61

(a) Só se pode efetuar a multiplicação da matriz A pela matriz B se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B. Neste caso, o número de linhas da matriz resultante é igual ao número de linhas da matriz A e o número de colunas da matriz resultante é igual ao número de colunas da matriz B.

(b) Sendo possível multiplicar as matrizes A e B, o elemento ij da matriz AB é igual ao produto escalar usual de $\ell_{i,A}$ com $c_{j,B}$, ou seja, $(AB)_{ij} = \ell_{i,A} \cdot c_{j,B}$.

Obs 1.61 (cont.)

(c) Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$. Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB. Por exemplo o elemento $(AB)_{23}$ obtém-se considerando $\ell_{2,A}$ e $c_{3,B}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * \\ \boxed{2 \quad 1} \\ * & * \end{bmatrix}}_{A\in\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ -5 \end{matrix}} & * \\ * & * & & * \end{bmatrix}}_{B\in\mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})} = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & \boxed{3} & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{AB\in\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})}$$

$$(AB)_{23} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k}b_{k3} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 2\times 4 + 1\times(-5) = 3.$$

Exe 1.62

Considere as matrizes $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Então:

- A a expressão $A + B$ está bem definida.
- B a expressão $2A - 3B^2$ está bem definida.
- C a expressão CBA está bem definida.
- D a expressão ABC está bem definida.

Exe 1.63

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$. Indique se estão bem definidas as seguintes expressões, efetuando nesses casos as respetivas operações:

(a) AB.

(b) BA.

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \quad & & \quad \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 8 & & \\ & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 8 & & \\ & & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 21 & & \\ & & \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 8 & & \\ & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & & \\ & & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 8 & 1 \times 6 + 2 \times 9 & \\ & & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 21 & & \\ & & \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 8 & 1 \times 6 + 2 \times 9 & \\ & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & 24 & \\ & & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1\times 5 + 2\times 8 & 1\times 6 + 2\times 9 & \\ & & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 21 & 24 & \\ & & \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 8 & 1 \times 6 + 2 \times 9 & 1 \times 7 + 2 \times 0 \\ & & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 21 & 24 & \\ & & \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 8 & 1 \times 6 + 2 \times 9 & 1 \times 7 + 2 \times 0 \\ & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ & & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\times 5 + 2\times 8 & 1\times 6 + 2\times 9 & 1\times 7 + 2\times 0 \\ & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ & & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 8 & 1 \times 6 + 2 \times 9 & 1 \times 7 + 2 \times 0 \\ 3 \times 5 + 4 \times 8 & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ & & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 8 & 1 \times 6 + 2 \times 9 & 1 \times 7 + 2 \times 0 \\ 3 \times 5 + 4 \times 8 & & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 47 & & \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 8 & 1 \times 6 + 2 \times 9 & 1 \times 7 + 2 \times 0 \\ 3 \times 5 + 4 \times 8 & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 47 & & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1\times 5 + 2\times 8 & 1\times 6 + 2\times 9 & 1\times 7 + 2\times 0 \\ 3\times 5 + 4\times 8 & 3\times 6 + 4\times 9 & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 47 & & \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\times 5 + 2\times 8 & 1\times 6 + 2\times 9 & 1\times 7 + 2\times 0 \\ 3\times 5 + 4\times 8 & 3\times 6 + 4\times 9 & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 47 & 54 & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1\times 5 + 2\times 8 & 1\times 6 + 2\times 9 & 1\times 7 + 2\times 0 \\ 3\times 5 + 4\times 8 & 3\times 6 + 4\times 9 & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 47 & 54 & \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\times 5+2\times 8 & 1\times 6+2\times 9 & 1\times 7+2\times 0 \\ 3\times 5+4\times 8 & 3\times 6+4\times 9 & 3\times 7+4\times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 47 & 54 & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\times 5+2\times 8 & 1\times 6+2\times 9 & 1\times 7+2\times 0 \\ 3\times 5+4\times 8 & 3\times 6+4\times 9 & 3\times 7+4\times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 47 & 54 & 21 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Res

(a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efetuar a operação AB, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\times 5+2\times 8 & 1\times 6+2\times 9 & 1\times 7+2\times 0 \\ 3\times 5+4\times 8 & 3\times 6+4\times 9 & 3\times 7+4\times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 47 & 54 & 21 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Como o número de colunas da matriz B, que é 3, é diferente do número de linhas da matriz A, que é 2, não é possível efetuar a operação BA.

Exe 1.64

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine AB.

Exe 1.65

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $b_{ij} = j$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Indique se estão bem definidas as seguintes expressões, efetuando nesses casos as respetivas operações:

(a) $(AB)C$. (b) $A(BC)$. (c) CI_3. (d) I_2C.

Exe 1.64

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine AB.

Exe 1.65

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $b_{ij} = j$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Indique se estão bem definidas as seguintes expressões, efetuando nesses casos as respetivas operações:

(a) $(AB)C$. (b) $A(BC)$. (c) CI_3. (d) I_2C.

Obs 1.66

No exercício anterior, terá sido coincidência $(AB)C = A(BC)$, $CI_3 = C$ e $I_2C = C$? O teorema que se segue diz que não.

Teo 1.67

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})\ [(AB)C = A(BC)].$

Obs 1.68

Teo 1.67

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})\ [(AB)C = A(BC)]$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [(A+B)C = AC + BC]$.

Obs 1.68

Teo 1.67

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})\ [(AB)C = A(BC)]$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [(A+B)C = AC + BC]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [A(B+C) = AB + AC]$.

Obs 1.68

Teo 1.67

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})\ [(AB)C = A(BC)]$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [(A+B)C = AC + BC]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [A(B+C) = AB + AC]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ I_m A = A I_n = A]$.

Obs 1.68

Teo 1.67

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})\ [(AB)C = A(BC)]$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [(A+B)C = AC + BC]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [A(B+C) = AB + AC]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ I_m A = A I_n = A]$.

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)]$.

Obs 1.68

Teo 1.67

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})\ [(AB)C = A(BC)]$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [(A+B)C = AC + BC]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [A(B+C) = AB + AC]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ I_m A = A I_n = A]$.

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)]$.

Obs 1.68

(a) A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

Teo 1.67

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})\ [(AB)C = A(BC)]$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [(A+B)C = AC + BC]$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [A(B+C) = AB + AC]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ I_m A = A I_n = A]$.

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)]$.

Obs 1.68

(a) A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

(b) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$. Então, tem-se que a expressão ABC não resulta ambígua devido à propriedade associativa da multiplicação de matrizes, fazendo sentido a seguinte definição:

Def 1.69

⟦potência de ordem p de uma matriz quadrada⟧ Sejam $p \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada. Chama-se potência de ordem p da matriz A, que se representa por A^p, a

$$A^p \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{p} A.$$

Exe 1.70

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule A^3.

Exe 1.70

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule A^3.

Res

Como A é uma matriz quadrada, é possível determinar A^3, tendo-se:

$$A^3 = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nota: como a multiplicação de matrizes é associativa, também se tem $A^3 = A(AA)$.

Exe 1.71

Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) B^2.

(b) B^3.

Exe 1.72

Seja $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$X^2 = (a+d)X - (ad - bc)I_2.$$

Obs 1.73

A multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa. Faz, pois, sentido a seguinte definição:

Obs 1.73

A multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa. Faz, pois, sentido a seguinte definição:

Def 1.74

⟦matrizes comutáveis⟧ Sejam A e B matrizes da mesma ordem. Diz-se que as matrizes A e B são comutáveis se $AB = BA$.

Obs 1.73

A multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa. Faz, pois, sentido a seguinte definição:

Def 1.74

⟦matrizes comutáveis⟧ Sejam A e B matrizes da mesma ordem. Diz-se que as matrizes A e B são comutáveis se $AB = BA$.

Exe 1.75

Mostre que as matrizes $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ são comutáveis.

Obs 1.73

A multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa. Faz, pois, sentido a seguinte definição:

Def 1.74

⟦matrizes comutáveis⟧ Sejam A e B matrizes da mesma ordem. Diz-se que as matrizes A e B são comutáveis se $AB = BA$.

Exe 1.75

Mostre que as matrizes $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ são comutáveis.

Exe 1.76

Mostre através de um contraexemplo que a multiplicação de matrizes não é comutativa.

Exe 1.77

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que:

(a) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

(b) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

Exe 1.77

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que:

(a) $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

(b) $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$.

Exe 1.78

Sejam A e B matrizes comutáveis. Mostre que:

(a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Exe 1.77

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que:

(a) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

(b) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

Exe 1.78

Sejam A e B matrizes comutáveis. Mostre que:

(a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

Exe 1.79

Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem. Mostre que

$$(A+B)^2 - (A-B)(A+B) - 2B^2 = 2BA.$$

Exe 1.80

Mostre através de contraexemplos que as seguintes proposições são falsas:

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\ [A^2 \neq I_2]$.

(b) $\forall A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{2\times 2}\}\ [A^2 \neq 0_{2\times 2}]$.

(c) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{2\times 2}\}\ [AB \neq 0_{2\times 2}]$.

Exe 1.81

Sejam A e B matrizes comutáveis. Então:

A $(A-B)^3 = A^3 + A^2B - AB^2 - B^3$.

B $(A-B)^3 = A^3 - A^2B + AB^2 - B^3$.

C $(A-B)^3 = A^3 + 3A^2B - 3AB^2 - B^3$.

D $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$.

Exe 1.82

Considere as seguintes proposições:

- $\forall A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3\times 3}\}\ [A^2 \neq 0_{3\times 3}]$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})\ [A^2 \neq I_3]$.

A São ambas verdadeiras.

B São ambas falsas.

C Apenas a primeira é verdadeira.

D Apenas a segunda é verdadeira.

Obs 1.83

Não se define a operação "divisão de matrizes". No entanto, define-se um conceito semelhante ao de "número inverso".

Obs 1.83

Não se define a operação “divisão de matrizes”. No entanto, define-se um conceito semelhante ao de “número inverso”.

Def 1.84

⟦matriz invertível ou não-singular, matriz não-invertível ou singular⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz invertível ou não-singular se existir uma matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $AZ = ZA = I_n$. Caso contrário, diz-se que A é uma matriz não-invertível ou singular.

Teo 1.85

Seja A uma matriz invertível de ordem n. Então, existe uma e uma só matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $ZA = AZ = I_n$.

Teo 1.85

Seja A uma matriz invertível de ordem n. Então, existe uma e uma só matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $ZA = AZ = I_n$.

Dem

Sejam $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AX = I_n \overset{(1)}{=} XA$ e $AY \overset{(2)}{=} I_n = YA$.
Então:

Teo 1.85

Seja A uma matriz invertível de ordem n. Então, existe uma e uma só matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $ZA = AZ = I_n$.

Dem

Sejam $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AX = I_n \overset{(1)}{=} XA$ e $AY \overset{(2)}{=} I_n = YA$.
Então:

$$X = XI_n \qquad (I \text{ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes})$$

Teo 1.85

Seja A uma matriz invertível de ordem n. Então, existe uma e uma só matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $ZA = AZ = I_n$.

Dem

Sejam $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AX = I_n \overset{(1)}{=} XA$ e $AY \overset{(2)}{=} I_n = YA$.
Então:

$$\begin{aligned} X &= XI_n && (I \text{ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes}) \\ &= X(AY) && (\text{por } (2)) \end{aligned}$$

Teo 1.85

Seja A uma matriz invertível de ordem n. Então, existe uma e uma só matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $ZA = AZ = I_n$.

Dem

Sejam $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AX = I_n \overset{(1)}{=} XA$ e $AY \overset{(2)}{=} I_n = YA$.
Então:

$$\begin{aligned} X &= XI_n && (I \text{ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes}) \\ &= X(AY) && (\text{por } (2)) \\ &= (XA)Y && (\text{a multiplicação de matrizes é associativa}) \end{aligned}$$

Teo 1.85

Seja A uma matriz invertível de ordem n. Então, existe uma e uma só matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $ZA = AZ = I_n$.

Dem

Sejam $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AX = I_n \overset{(1)}{=} XA$ e $AY \overset{(2)}{=} I_n = YA$. Então:

$$\begin{aligned} X &= XI_n && (I \text{ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes})\\ &= X(AY) && (\text{por } (2))\\ &= (XA)Y && (\text{a multiplicação de matrizes é associativa})\\ &= I_nY && (\text{por } (1)) \end{aligned}$$

Teo 1.85

Seja A uma matriz invertível de ordem n. Então, existe uma e uma só matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $ZA = AZ = I_n$.

Dem

Sejam $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AX = I_n \overset{(1)}{=} XA$ e $AY \overset{(2)}{=} I_n = YA$.
Então:

$$
\begin{aligned}
X &= XI_n && (I \text{ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes})\\
&= X(AY) && (\text{por } (2))\\
&= (XA)Y && (\text{a multiplicação de matrizes é associativa})\\
&= I_nY && (\text{por } (1))\\
&= Y, && (I \text{ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes})
\end{aligned}
$$

Teo 1.85

Seja A uma matriz invertível de ordem n. Então, existe uma e uma só matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $ZA = AZ = I_n$.

Dem

Sejam $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AX = I_n \overset{(1)}{=} XA$ e $AY \overset{(2)}{=} I_n = YA$.
Então:

$$\begin{aligned}
X &= XI_n && (I \text{ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes})\\
&= X(AY) && (\text{por } (2))\\
&= (XA)Y && (\text{a multiplicação de matrizes é associativa})\\
&= I_nY && (\text{por } (1))\\
&= Y, && (I \text{ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes})
\end{aligned}$$

i.e., existe uma única matriz que satisfaz a condição de invertibilidade.

Def 1.86

⟦matriz inversa⟧ Seja A uma matriz invertível de ordem n. Chama-se matriz inversa da matriz A, que se representa por A^{-1}, à única matriz Z tal que $AZ = ZA = I_n$.

Def 1.86

⟦matriz inversa⟧ Seja A uma matriz invertível de ordem n. Chama-se matriz inversa da matriz A, que se representa por A^{-1}, à única matriz Z tal que $AZ = ZA = I_n$.

Teo 1.87

Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem tais que $AB = I$. Então, $A^{-1} = B$.

Def 1.86

⟦matriz inversa⟧ Seja A uma matriz invertível de ordem n. Chama-se matriz inversa da matriz A, que se representa por A^{-1}, à única matriz Z tal que $AZ = ZA = I_n$.

Teo 1.87

Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem tais que $AB = I$. Então, $A^{-1} = B$.

Obs 1.88

(a) Se A é a matriz inversa da matriz B, então B é a matriz inversa da matriz A.

Def 1.86

⟦matriz inversa⟧ Seja A uma matriz invertível de ordem n. Chama-se matriz inversa da matriz A, que se representa por A^{-1}, à única matriz Z tal que $AZ = ZA = I_n$.

Teo 1.87

Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem tais que $AB = I$. Então, $A^{-1} = B$.

Obs 1.88

(a) Se A é a matriz inversa da matriz B, então B é a matriz inversa da matriz A.

(b) Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem. Então, $AB = I$ se e só se $BA = I$. Assim, basta verificar se $AB = I$ ou $BA = I$ para se concluir que as matrizes A e B são invertíveis com $A^{-1} = B$ e $B^{-1} = A$.

Exe 1.89

Considere as matrizes $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exe 1.89

Considere as matrizes $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule AB.

Exe 1.89

Considere as matrizes $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule AB.

(b) O que pode concluir da alínea anterior?

Exe 1.89

Considere as matrizes $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule AB.

(b) O que pode concluir da alínea anterior?

(c) As matrizes A e B são comutáveis?

Exe 1.89

Considere as matrizes $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule AB.

(b) O que pode concluir da alínea anterior?

(c) As matrizes A e B são comutáveis?

Exe 1.89

Considere as matrizes $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule AB.

(b) O que pode concluir da alínea anterior?

(c) As matrizes A e B são comutáveis?

Res

(a) $AB = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exe 1.89

Considere as matrizes $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule AB.

(b) O que pode concluir da alínea anterior?

(c) As matrizes A e B são comutáveis?

Res

(a) $AB = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) As matrizes são invertíveis com $A^{-1} = B$ e $B^{-1} = A$.

Exe 1.89

Considere as matrizes $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule AB.

(b) O que pode concluir da alínea anterior?

(c) As matrizes A e B são comutáveis?

Res

(a) $AB = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) As matrizes são invertíveis com $A^{-1} = B$ e $B^{-1} = A$.

(c) Sim, pois $AB = BA = I_2$.

Exe 1.90

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule a sua inversa através da definição.

Exe 1.90

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule a sua inversa através da definição.

Obs 1.91

(a) Há matrizes quadradas que não são invertíveis.

Exe 1.90

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule a sua inversa através da definição.

Obs 1.91

(a) Há matrizes quadradas que não são invertíveis.

(b) Apresenta-se na observação Obs 1.155 uma condição para caracterizar matrizes invertíveis e um método mais prático para calcular inversas.

Exe 1.90

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule a sua inversa através da definição.

Obs 1.91

(a) Há matrizes quadradas que não são invertíveis.

(b) Apresenta-se na observação Obs 1.155 uma condição para caracterizar matrizes invertíveis e um método mais prático para calcular inversas.

Exe 1.90

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule a sua inversa através da definição.

Obs 1.91

(a) Há matrizes quadradas que não são invertíveis.

(b) Apresenta-se na observação $\boxed{\text{Obs 1.155}}$ uma condição para caracterizar matrizes invertíveis e um método mais prático para calcular inversas.

Teo 1.92

Seja A uma matriz invertível. Então, A^{-1} também é uma matriz invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

Exe 1.90

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule a sua inversa através da definição.

Obs 1.91

(a) Há matrizes quadradas que não são invertíveis.

(b) Apresenta-se na observação Obs 1.155 uma condição para caracterizar matrizes invertíveis e um método mais prático para calcular inversas.

Teo 1.92

Seja A uma matriz invertível. Então, A^{-1} também é uma matriz invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

Dem

Como A é uma matriz invertível, tem-se que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Logo, A^{-1} é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Teo 1.93

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis da mesma ordem. Então, AB também é uma matriz invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Teo 1.93

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis da mesma ordem. Então, AB também é uma matriz invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dem

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis. Então, existem $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AA^{-1} \overset{(1)}{=} I_n = A^{-1}A$ e $BB^{-1} \overset{(2)}{=} I_n = B^{-1}B$, pelo que

Teo 1.93

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis da mesma ordem. Então, AB também é uma matriz invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dem

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis. Então, existem $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AA^{-1} \overset{(1)}{=} I_n = A^{-1}A$ e $BB^{-1} \overset{(2)}{=} I_n = B^{-1}B$, pelo que

$$
\begin{aligned}
&(AB)(B^{-1}A^{-1}) \\
&\quad = A(BB^{-1})A^{-1} \qquad \text{(a multiplicação de matrizes é associativa)}
\end{aligned}
$$

Teo 1.93

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis da mesma ordem. Então, AB também é uma matriz invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dem

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis. Então, existem $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AA^{-1} \overset{(1)}{=} I_n = A^{-1}A$ e $BB^{-1} \overset{(2)}{=} I_n = B^{-1}B$, pelo que

$$
\begin{aligned}
&(AB)(B^{-1}A^{-1}) \\
&\quad = A(BB^{-1})A^{-1} && \text{(a multiplicação de matrizes é associativa)} \\
&\quad = AI_nA^{-1} && \text{(por (2))}
\end{aligned}
$$

Teo 1.93

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis da mesma ordem. Então, AB também é uma matriz invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dem

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis. Então, existem $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AA^{-1} \overset{(1)}{=} I_n = A^{-1}A$ e $BB^{-1} \overset{(2)}{=} I_n = B^{-1}B$, pelo que

$$
\begin{aligned}
&(AB)(B^{-1}A^{-1}) \\
&\quad = A(BB^{-1})A^{-1} && \text{(a multiplicação de matrizes é associativa)} \\
&\quad = AI_nA^{-1} && \text{(por (2))} \\
&\quad = AA^{-1} && \text{(I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes)}
\end{aligned}
$$

Teo 1.93

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis da mesma ordem. Então, AB também é uma matriz invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dem

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis. Então, existem $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AA^{-1} \overset{(1)}{=} I_n = A^{-1}A$ e $BB^{-1} \overset{(2)}{=} I_n = B^{-1}B$, pelo que

$$
\begin{aligned}
&(AB)(B^{-1}A^{-1}) \\
&\quad = A(BB^{-1})A^{-1} && \text{(a multiplicação de matrizes é associativa)} \\
&\quad = AI_nA^{-1} && \text{(por (2))} \\
&\quad = AA^{-1} && \text{(I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes)} \\
&\quad = I_n && \text{(por (1)).}
\end{aligned}
$$

Teo 1.93

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis da mesma ordem. Então, AB também é uma matriz invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dem

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis. Então, existem $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AA^{-1} \overset{(1)}{=} I_n = A^{-1}A$ e $BB^{-1} \overset{(2)}{=} I_n = B^{-1}B$, pelo que

$$
\begin{aligned}
&(AB)(B^{-1}A^{-1}) \\
&\quad = A(BB^{-1})A^{-1} && \text{(a multiplicação de matrizes é associativa)} \\
&\quad = AI_nA^{-1} && \text{(por (2))} \\
&\quad = AA^{-1} && \text{(I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes)} \\
&\quad = I_n && \text{(por (1)).}
\end{aligned}
$$

Conclui-se, então, que AB é uma matriz invertível com $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exe 1.94

Sejam A e B matrizes comutáveis e invertíveis. Mostre que

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

Exe 1.95

Sejam A e B matrizes comutáveis e B é uma matriz invertível. Mostre que A e B^{-1} são matrizes comutáveis.

Exe 1.96

Seja A uma matriz quadrada tal que $A^p = \underline{0}$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$(I - A)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{p-1} A^k.$$

Def 1.97

⟦matriz transposta⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se transposta da matriz A, que se representa por A^T, ao elemento de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que

$$(A^T)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (A)_{ji}.$$

Def 1.97

⟦matriz transposta⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se transposta da matriz A, que se representa por A^T, ao elemento de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que

$$(A^T)_{ij} \overset{\text{def}}{=} (A)_{ji}.$$

Obs 1.98

(a) É sempre possível calcular a matriz transposta de uma matriz.

Def 1.97

⟦matriz transposta⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se transposta da matriz A, que se representa por A^T, ao elemento de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que

$$(A^T)_{ij} \overset{\text{def}}{=} (A)_{ji}.$$

Obs 1.98

(a) É sempre possível calcular a matriz transposta de uma matriz.

(b) Calcular a transposta de uma matriz corresponde a trocar linhas com colunas.

Exe 1.99

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) A^T.

(b) $\frac{AA^T}{u^T u}$.

Exe 1.99

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) A^T.

(b) $\frac{AA^T}{u^T u}$.

Res

(a)

Exe 1.99

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) A^T.

(b) $\frac{AA^T}{u^T u}$.

Res

(a)

$$A^T$$

Exe 1.99

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) A^T.

(b) $\frac{AA^T}{u^T u}$.

Res

(a)

$$A^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^T$$

Exe 1.99

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) A^T.

(b) $\frac{AA^T}{u^T u}$.

Res

(a)

$$A^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}.$$

Exe 1.99

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) A^T.

(b) $\frac{AA^T}{u^T u}$.

Res

(a)

$$A^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

Exe 1.99

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) A^T.

(b) $\frac{AA^T}{u^T u}$.

Res

(a)

$$A^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 1 & \\ -2 & \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

Exe 1.99

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) A^T.

(b) $\frac{AA^T}{u^T u}$.

Res

(a)

$$A^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & \\ -2 & \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

Exe 1.99

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) A^T.

(b) $\frac{AA^T}{u^T u}$.

Res

(a)

$$A^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Res (cont.)

(b)

Res (cont.)

(b)

$$\frac{AA^T}{u^T u}$$

Res (cont.)

(b)

$$\frac{AA^T}{u^T u} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

Res (cont.)

(b)

$$\frac{AA^T}{u^T u} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Res (cont.)

(b)

$$\frac{AA^T}{u^T u} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -2 \\ -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Res (cont.)

(b)

$$\frac{AA^T}{u^Tu} = \frac{\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}5 & -4\\ -4 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2} & -2\\ -2 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}.$$

Nota: relembre a observação $\boxed{\text{Obs 1.9}}$ (e).

Exe 1.100

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $b_{ij} = i - j$, $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i < j, \\ (-1)^{i+1} & \text{se } i = j, \\ 1 & \text{se } i > j, \end{cases}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) $\frac{AB^T + BA^T}{2}$.

(b) C^T.

(c) $(CBA^TC)^2$.

(d) uu^T.

(e) u^Tu.

(f) u^TA^TBu.

(g) $(Au)^T$.

(h) u^TA^T.

Exe 1.100

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $b_{ij} = i - j$, $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i < j, \\ (-1)^{i+1} & \text{se } i = j, \\ 1 & \text{se } i > j, \end{cases}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) $\frac{AB^T + BA^T}{2}$.

(b) C^T.

(c) $(CBA^T C)^2$.

(d) uu^T.

(e) $u^T u$.

(f) $u^T A^T B u$.

(g) $(Au)^T$.

(h) $u^T A^T$.

Obs 1.101

No exercício anterior, terá sido coincidência $(Au)^T = u^T A^T$? O teorema que se segue diz que não.

Teo 1.102

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [\left(A^T\right)^T = A]$.

Exe 1.103

Sabendo que as matrizes $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são invertíveis, resolva em ordem a X a equação matricial $C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n$.

Exe 1.104

Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem não-singulares. Resolva em ordem a X a equação matricial $[(A^T)^{-1}X]^T + (AB)^{-1} = A$.

Teo 1.102

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [\left(A^T\right)^T = A]$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A+B)^T = A^T + B^T]$.

Exe 1.103

Sabendo que as matrizes $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são invertíveis, resolva em ordem a X a equação matricial $C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n$.

Exe 1.104

Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem não-singulares. Resolva em ordem a X a equação matricial $[(A^T)^{-1}X]^T + (AB)^{-1} = A$.

Teo 1.102

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [\left(A^T\right)^T = A]$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A+B)^T = A^T + B^T]$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha A)^T = \alpha A^T]$.

Exe 1.103

Sabendo que as matrizes $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são invertíveis, resolva em ordem a X a equação matricial $C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n$.

Exe 1.104

Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem não-singulares. Resolva em ordem a X a equação matricial $[(A^T)^{-1}X]^T + (AB)^{-1} = A$.

Teo 1.102

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A^T)^T = A]$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A+B)^T = A^T + B^T]$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha A)^T = \alpha A^T]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [(AB)^T = B^T A^T]$.

Exe 1.103

Sabendo que as matrizes $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são invertíveis, resolva em ordem a X a equação matricial $C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n$.

Exe 1.104

Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem não-singulares. Resolva em ordem a X a equação matricial $[(A^T)^{-1}X]^T + (AB)^{-1} = A$.

Teo 1.102

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ \left[\left(A^T\right)^T = A\right]$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(A+B)^T = A^T + B^T]$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\ [(\alpha A)^T = \alpha A^T]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})\ [(AB)^T = B^T A^T]$.

(e) $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\ \left[A \text{ é uma matriz invertível} \rightarrow \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T\right]$.

Exe 1.103

Sabendo que as matrizes $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são invertíveis, resolva em ordem a X a equação matricial $C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n$.

Exe 1.104

Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem não-singulares. Resolva em ordem a X a equação matricial $[(A^T)^{-1}X]^T + (AB)^{-1} = A$.

Exe 1.105

Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem n tais que $\left(\left(A^{-1}\right)^T B\right)^{-1} = I_n$. Então:

A $B = A^T$.

B $B = A$.

C $B = A^{-1}$.

D $B = \left(A^{-1}\right)^T$.

Exe 1.106

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{se } i \leqslant j, \\ 0 & \text{se } i > j. \end{cases}$ Então:

A $A^2 + A^T = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}\right]$.

B $A^2 + A^T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

C $A^2 + A^T = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \end{smallmatrix}\right]$.

D $A^2 + A^T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

Def 1.107

⟦matriz simétrica⟧ Seja A uma matriz quadrada. Diz-se que A é uma matriz simétrica se $A = A^T$.

Def 1.107

⟦matriz simétrica⟧ Seja A uma matriz quadrada. Diz-se que A é uma matriz simétrica se $A = A^T$.

Exe 1.108

Dê um exemplo de uma matriz simétrica de ordem 3.

Def 1.107

⟦matriz simétrica⟧ Seja A uma matriz quadrada. Diz-se que A é uma matriz simétrica se $A = A^T$.

Exe 1.108

Dê um exemplo de uma matriz simétrica de ordem 3.

Res

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Def 1.107

⟦matriz simétrica⟧ Seja A uma matriz quadrada. Diz-se que A é uma matriz simétrica se $A = A^T$.

Exe 1.108

Dê um exemplo de uma matriz simétrica de ordem 3.

Res

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Exe 1.109

Determine os valores $a, b, c \in \mathbb{R}$, para que a matriz $S = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

Def 1.107

⟦matriz simétrica⟧ Seja A uma matriz quadrada. Diz-se que A é uma matriz simétrica se $A = A^T$.

Exe 1.108

Dê um exemplo de uma matriz simétrica de ordem 3.

Res

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Exe 1.109

Determine os valores $a, b, c \in \mathbb{R}$, para que a matriz $S = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

Res

$a = 1,\ b = 2,\ c = 3.$

Exe 1.110

Mostre que o produto de uma matriz pela sua transposta é uma matriz simétrica.

Exe 1.110

Mostre que o produto de uma matriz pela sua transposta é uma matriz simétrica.

Exe 1.111

Uma matriz quadrada A diz-se antissimétrica se $A^T = -A$. Mostre que, dada qualquer matriz quadrada B, a matriz $B - B^T$ é antissimétrica.

Exe 1.112

Sejam A e B matrizes simétricas da mesma ordem. Então:

A $(AB)^T = AB$.

B $A^T = B$.

C $A^{-1} = B$.

D $(AB)^T = BA$.

Exe 1.113

Considere as seguintes afirmações:

- O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.
- A soma de duas matrizes simétricas de ordem n é uma matriz simétrica.

$\boxed{\text{A}}$ São ambas verdadeiras.

$\boxed{\text{B}}$ São ambas falsas.

$\boxed{\text{C}}$ Apenas a primeira é verdadeira.

$\boxed{\text{D}}$ Apenas a segunda é verdadeira.

Def 1.114

⟦matriz ortogonal⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz ortogonal se $AA^T = A^T A = I_n$.

Def 1.114

⟦matriz ortogonal⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz ortogonal se $AA^T = A^T A = I_n$.

Obs 1.115

Se A é uma matriz ortogonal, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^T$.

Exe 1.116

Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

Exe 1.116

Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

Res

Como

$$AA^T$$

Exe 1.116

Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

Res

Como

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Exe 1.116

Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

Res

Como

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Exe 1.116

Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

Res

Como

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

Exe 1.116

Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

Res

Como

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & \\ & \end{bmatrix}$$

Exe 1.116

Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

Res

Como

$$
\begin{aligned}
AA^T &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ & \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Exe 1.116

Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

Res

Como

$$
\begin{aligned}
AA^T &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Exe 1.116

Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

Res

Como

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

Exe 1.116

Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

Res

Como

$$\begin{aligned}
AA^T &= \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

Exe 1.116

Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

Res

Como

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

i.e., $AA^T = I_2$, tem-se que A é uma matriz ortogonal.

Exe 1.117

Indique quais das seguintes matrizes são ortogonais:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, C = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Exe 1.117

Indique quais das seguintes matrizes são ortogonais:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, C = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Exe 1.118

Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais da mesma ordem é uma matriz ortogonal.

Exe 1.119

Seja $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $x^T x = I_1$. Mostre que $I_n - 2xx^T$ é uma matriz simétrica e ortogonal.

Exe 1.120

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Então:

A Pode-se calcular $(A - 2A^T)^3$.

B $A^2 = I_3$.

C $(A)_{31} + (A)_{13} = (A)_{23}$.

D A é uma matriz ortogonal.

Exe 1.121

A Seja A uma matriz diagonal. Então, A é uma matriz escalar.

B Seja A uma matriz simétrica. Então, A é uma matriz ortogonal.

C Seja A uma matriz invertível. Então, A é uma matriz ortogonal.

D Seja A uma matriz escalar. Então, A é uma matriz diagonal.

Exe 1.122

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Então:

A A e B são matrizes comutáveis.

B A e B são matrizes escalares.

C A e B são matrizes ortogonais.

D A e B são matrizes invertíveis.

Exe 1.123

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j+1}2^{j-1} & \text{se } i < j, \\ (-1)^{i+1} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i > j. \end{cases}$. Então:

A A é uma matriz escalar.

B A é uma matriz simétrica.

C A é uma matriz ortogonal.

D $A^2 = I_3$.

Def 1.124

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) $[\![$linha nula de uma matriz$]\!]$ Diz-se que ℓ_i é uma linha nula da matriz A se

$$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0.$$

Def 1.124

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦linha nula de uma matriz⟧ Diz-se que ℓ_i é uma linha nula da matriz A se

$$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0.$$

(b) ⟦coluna nula de uma matriz⟧ Diz-se que c_j é uma coluna nula da matriz A se

$$a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{mj} = 0.$$

Def 1.124

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦linha nula de uma matriz⟧ Diz-se que ℓ_i é uma linha nula da matriz A se

$$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0.$$

(b) ⟦coluna nula de uma matriz⟧ Diz-se que c_j é uma coluna nula da matriz A se

$$a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{mj} = 0.$$

(c) ⟦pivô de uma linha não-nula⟧ Chama-se pivô de uma linha não-nula ao seu elemento não-nulo mais à esquerda.

Def 1.124

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦linha nula de uma matriz⟧ Diz-se que ℓ_i é uma linha nula da matriz A se

$$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0.$$

(b) ⟦coluna nula de uma matriz⟧ Diz-se que c_j é uma coluna nula da matriz A se

$$a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{mj} = 0.$$

(c) ⟦pivô de uma linha não-nula⟧ Chama-se pivô de uma linha não-nula ao seu elemento não-nulo mais à esquerda.

(d) ⟦coluna pivô⟧ Chama-se coluna pivô a uma coluna da matriz se existe um elemento pivô nessa coluna.

Exe 1.125

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Identifique os pivôs das linhas não-nulas da matriz A.

Res

Def 1.126

⟦matriz em escada⟧ Seja A uma matriz. Diz-se que A é uma matriz em escada se é uma matriz nula ou, no caso de não o ser, se o número de zeros à esquerda do pivô aumenta de linha para linha até que, havendo, sobrem apenas linhas nulas.

Exe 1.125

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Identifique os pivôs das linhas não-nulas da matriz A.

(b) Identifique as colunas pivô da matriz A.

Res

Def 1.126

⟦matriz em escada⟧ Seja A uma matriz. Diz-se que A é uma matriz em escada se é uma matriz nula ou, no caso de não o ser, se o número de zeros à esquerda do pivô aumenta de linha para linha até que, havendo, sobrem apenas linhas nulas.

Exe 1.125

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Identifique os pivôs das linhas não-nulas da matriz A.

(b) Identifique as colunas pivô da matriz A.

Res

(a) Pivôs: $(A)_{15}$, $(A)_{22}$ e $(A)_{32}$.

Def 1.126

⟦matriz em escada⟧ Seja A uma matriz. Diz-se que A é uma matriz em escada se é uma matriz nula ou, no caso de não o ser, se o número de zeros à esquerda do pivô aumenta de linha para linha até que, havendo, sobrem apenas linhas nulas.

Exe 1.125

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Identifique os pivôs das linhas não-nulas da matriz A.

(b) Identifique as colunas pivô da matriz A.

Res

(a) Pivôs: $(A)_{15}$, $(A)_{22}$ e $(A)_{32}$.

(b) Colunas pivô: c_2 e c_5.

Def 1.126

⟦matriz em escada⟧ Seja A uma matriz. Diz-se que A é uma matriz em escada se é uma matriz nula ou, no caso de não o ser, se o número de zeros à esquerda do pivô aumenta de linha para linha até que, havendo, sobrem apenas linhas nulas.

Exe 1.127

Indique quais das seguintes matrizes são matrizes em escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Res

A, B, C, F, G, H, u.

Def 1.128

⟦matriz em escada reduzida⟧ Seja A uma matriz. Diz-se que A é uma matriz em escada reduzida se é uma matriz em escada, se todos os pivôs são iguais a um e se estes são os únicos elementos não-nulos nas colunas pivô.

Exe 1.129

Indique quais das matrizes do exercício Exe 1.127 são matrizes em escada reduzida.

Res

A, C, F, H, u.

Def 1.130

⟦operação elementar do tipo I nas linhas de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $i, i' \in \{1, \ldots, m\}$. Chama-se operação elementar do tipo I nas linhas da matriz A à troca de duas linhas. A troca de ℓ_i com $\ell_{i'}$ representa-se por $\ell_i \leftrightarrow \ell_{i'}$.

Exe 1.131

Indique a matriz que se obtém após aplicar a operação $\ell_1 \leftrightarrow \ell_3$ à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Res

Def 1.130

⟦operação elementar do tipo I nas linhas de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $i, i' \in \{1, \ldots, m\}$. Chama-se operação elementar do tipo I nas linhas da matriz A à troca de duas linhas. A troca de ℓ_i com $\ell_{i'}$ representa-se por $\ell_i \leftrightarrow \ell_{i'}$.

Exe 1.131

Indique a matriz que se obtém após aplicar a operação $\ell_1 \leftrightarrow \ell_3$ à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Res

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Def 1.130

⟦operação elementar do tipo I nas linhas de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $i, i' \in \{1, \ldots, m\}$. Chama-se operação elementar do tipo I nas linhas da matriz A à troca de duas linhas. A troca de ℓ_i com $\ell_{i'}$ representa-se por $\ell_i \leftrightarrow \ell_{i'}$.

Exe 1.131

Indique a matriz que se obtém após aplicar a operação $\ell_1 \leftrightarrow \ell_3$ à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Res

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_3]{}$$

Def 1.130

⟦operação elementar do tipo I nas linhas de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $i, i' \in \{1, \ldots, m\}$. Chama-se operação elementar do tipo I nas linhas da matriz A à troca de duas linhas. A troca de ℓ_i com $\ell_{i'}$ representa-se por $\ell_i \leftrightarrow \ell_{i'}$.

Exe 1.131

Indique a matriz que se obtém após aplicar a operação $\ell_1 \leftrightarrow \ell_3$ à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Res

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_3]{} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Def 1.132

⟦operação elementar do tipo II nas linhas de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i \in \{1, \dots, m\}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chama-se operação elementar do tipo II nas linhas da matriz A à substituição de uma linha por um seu múltiplo não-nulo. A substituição de ℓ_i pela linha que se obtém multiplicando por α os elementos de ℓ_i representa-se por $\ell_i \leftarrow \alpha\ell_i$, que se lê "$\ell_i$ toma valor de $\alpha\ell_i$".

Exe 1.133

Indique a matriz que se obtém após aplicar a operação $\ell_3 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_3$ à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Res

Def 1.132

⟦operação elementar do tipo II nas linhas de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chama-se operação elementar do tipo II nas linhas da matriz A à substituição de uma linha por um seu múltiplo não-nulo. A substituição de ℓ_i pela linha que se obtém multiplicando por α os elementos de ℓ_i representa-se por $\ell_i \leftarrow \alpha\ell_i$, que se lê "$\ell_i$ toma valor de $\alpha\ell_i$".

Exe 1.133

Indique a matriz que se obtém após aplicar a operação $\ell_3 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_3$ à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Res

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Def 1.132

⟦operação elementar do tipo II nas linhas de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chama-se operação elementar do tipo II nas linhas da matriz A à substituição de uma linha por um seu múltiplo não-nulo. A substituição de ℓ_i pela linha que se obtém multiplicando por α os elementos de ℓ_i representa-se por $\ell_i \leftarrow \alpha\ell_i$, que se lê "$\ell_i$ toma valor de $\alpha\ell_i$".

Exe 1.133

Indique a matriz que se obtém após aplicar a operação $\ell_3 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_3$ à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Res

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_3]{}$$

Def 1.132

⟦operação elementar do tipo II nas linhas de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i \in \{1, \dots, m\}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chama-se operação elementar do tipo II nas linhas da matriz A à substituição de uma linha por um seu múltiplo não-nulo. A substituição de ℓ_i pela linha que se obtém multiplicando por α os elementos de ℓ_i representa-se por $\ell_i \leftarrow \alpha\ell_i$, que se lê "$\ell_i$ toma valor de $\alpha\ell_i$".

Exe 1.133

Indique a matriz que se obtém após aplicar a operação $\ell_3 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_3$ à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Res

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Def 1.134

⟦operação elementar do tipo III nas linhas de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i, i' \in \{1, \ldots, m\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Chama-se operação elementar do tipo III nas linhas da matriz A à substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha. A substituição de ℓ_i pela linha que se obtém somando os elementos de ℓ_i aos elementos que se obtêm multiplicando por β os elementos de $\ell_{i'}$ representa-se por $\ell_i \leftarrow \ell_i + \beta\ell_{i'}$, que se lê "$\ell_i$ toma valor de $\ell_i + \beta\ell_{i'}$".

Def 1.134

⟦operação elementar do tipo III nas linhas de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i, i' \in \{1, \ldots, m\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Chama-se operação elementar do tipo III nas linhas da matriz A à substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha. A substituição de ℓ_i pela linha que se obtém somando os elementos de ℓ_i aos elementos que se obtêm multiplicando por β os elementos de $\ell_{i'}$ representa-se por $\ell_i \leftarrow \ell_i + \beta\ell_{i'}$, que se lê "$\ell_i$ toma valor de $\ell_i + \beta\ell_{i'}$".

Exe 1.135

Indique a matriz que se obtém após aplicar a operação $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \frac{1}{2}\ell_2$ à matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Def 1.134

⟦operação elementar do tipo III nas linhas de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i, i' \in \{1, \dots, m\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Chama-se operação elementar do tipo III nas linhas da matriz A à substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha. A substituição de ℓ_i pela linha que se obtém somando os elementos de ℓ_i aos elementos que se obtêm multiplicando por β os elementos de $\ell_{i'}$ representa-se por $\ell_i \leftarrow \ell_i + \beta\ell_{i'}$, que se lê "$\ell_i$ toma valor de $\ell_i + \beta\ell_{i'}$".

Exe 1.135

Indique a matriz que se obtém após aplicar a operação $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \frac{1}{2}\ell_2$ à matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \frac{1}{2}\ell_2}$$

Def 1.134

⟦operação elementar do tipo III nas linhas de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i, i' \in \{1, \dots, m\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Chama-se operação elementar do tipo III nas linhas da matriz A à substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha. A substituição de ℓ_i pela linha que se obtém somando os elementos de ℓ_i aos elementos que se obtêm multiplicando por β os elementos de $\ell_{i'}$ representa-se por $\ell_i \leftarrow \ell_i + \beta\ell_{i'}$, que se lê "$\ell_i$ toma valor de $\ell_i + \beta\ell_{i'}$".

Exe 1.135

Indique a matriz que se obtém após aplicar a operação $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \frac{1}{2}\ell_2$ à matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \frac{1}{2}\ell_2} \begin{bmatrix} -1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obs 1.136

Nas três últimas definições apenas se consideram operações sobre linhas, apesar de também ser possível definir operações sobre colunas. Fazendo este curso apenas referência a operações elementares sobre linhas, estas passarão a ser referenciadas apenas por “operações elementares”.

Obs 1.136

Nas três últimas definições apenas se consideram operações sobre linhas, apesar de também ser possível definir operações sobre colunas. Fazendo este curso apenas referência a operações elementares sobre linhas, estas passarão a ser referenciadas apenas por “operações elementares”.

Def 1.137

⟦matrizes equivalentes⟧ Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A e B são matrizes equivalentes, escrevendo-se $A \longleftrightarrow B$, se se pode obter uma a partir da outra através duma sequência (finita) de operações elementares com linhas.

Obs 1.136

Nas três últimas definições apenas se consideram operações sobre linhas, apesar de também ser possível definir operações sobre colunas. Fazendo este curso apenas referência a operações elementares sobre linhas, estas passarão a ser referenciadas apenas por "operações elementares".

Def 1.137

⟦matrizes equivalentes⟧ Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A e B são matrizes equivalentes, escrevendo-se $A \longleftrightarrow B$, se se pode obter uma a partir da outra através duma sequência (finita) de operações elementares com linhas.

Exe 1.138

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Efetue a seguinte sequência de operações na matriz A: $\ell_1 \leftrightarrow \ell_2$, $\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1$, $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3$, $\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2$ e $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2$.

Res

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{\qquad\qquad}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{\hspace{4em}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{\hspace{4em}}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[]{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{\qquad\qquad} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{\qquad\qquad}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2}$$

Res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{\qquad\qquad} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{\qquad\qquad}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teo 1.139

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, existe uma única matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz A.

Teo 1.139

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, existe uma única matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz A.

Obs 1.140

Seja A uma matriz não-nula. Então, existe uma infinidade de matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.

Teo 1.139

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, existe uma única matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz A.

Obs 1.140

Seja A uma matriz não-nula. Então, existe uma infinidade de matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.

Def 1.141

Seja A uma matriz.

(a) $[\![\mathrm{fe}(A)]\!]$ Representa-se por $\mathrm{fe}(A)$ o conjunto das matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.

Teo 1.139

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, existe uma única matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz A.

Obs 1.140

Seja A uma matriz não-nula. Então, existe uma infinidade de matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.

Def 1.141

Seja A uma matriz.

(a) $[\![\text{fe}(A)]\!]$ Representa-se por $\text{fe}(A)$ o conjunto das matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.

(b) $[\![\text{fer}(A)]\!]$ Representa-se por $\text{fer}(A)$ a única matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz A.

Obs 1.142

Seja A uma matriz.

(a) Note-se que $\mathrm{fe}(A)$ é um conjunto de matrizes e que $\mathrm{fer}(A)$ é uma matriz.

Obs 1.142

Seja A uma matriz.

(a) Note-se que fe(A) é um conjunto de matrizes e que fer(A) é uma matriz.

(b) Na observação $\boxed{\text{Obs 1.143}}$ apresenta-se um algoritmo para determinar um elemento de fe(A) e na observação $\boxed{\text{Obs 1.145}}$ apresenta-se um algoritmo para determinar fer(A).

Obs 1.143

"Algoritmo escada": Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, o seguinte algoritmo determina um elemento de $\mathrm{fe}(A)$:

Passo 1 [inicializar o algoritmo]
$i \leftarrow 1$
$j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz A

Passo 2 [selecionar elemento pivô]
se $a_{ij} = 0$ **então**
$\ell_i \leftrightarrow \ell_k$, em que ℓ_k é a primeira linha abaixo da linha ℓ_i com um elemento diferente de zero na coluna c_j
fimse

Passo 3 [anular os elementos abaixo do pivô]
para $p \leftarrow i+1$ **até** m **fazer**

$$\ell_p \leftarrow \ell_p - \frac{a_{pj}}{a_{ij}}\ell_i$$

fimpara

Passo 4 [terminar?]
se já se obteve uma matriz em escada **então**
terminar
senão
$i \leftarrow i+1$
$j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz que se obtém eliminando na matriz A as linhas $\ell_1, \ldots, \ell_{i-1}$
ir para o Passo 2
fimse

Exe 1.144

Aplique o "Algoritmo escada" à matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e indique quantas operações elementares dos tipos I e III efetuou.

Res

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2]{} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathrm{fe}(A)}$$

operações elementares do tipo I: 1
operações elementares do tipo III: 2

Obs 1.145

"Algoritmo escada reduzida": Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, o seguinte algoritmo determina $\text{fer}(A)$:

Passo 1 [inicializar o algoritmo]
determinar $A' = [a'_{ij}] \in \text{fe}(A)$ (no que se segue, ℓ' refere-se às
  linhas da matriz A')
$i \leftarrow$ índice da última linha não-nula da matriz A'
$j \leftarrow$ índice da coluna pivô da linha ℓ_i

Passo 2 [colocar elemento pivô a 1]
se $a'_{ij} \neq 1$ **então**
  $$\ell_{i'} \leftarrow \frac{1}{a'_{ij}} \ell_{i'}$$
fimse

Passo 3 [anular os elementos acima do pivô]
para $p \leftarrow 1$ **até** $i - 1$ **fazer**
  $\ell'_p \leftarrow \ell'_p - a'_{pj} \ell_{i'}$
fimpara

Passo 4 [terminar?]
se já se obteve uma matriz em escada reduzida **então**
  terminar
senão
  $i \leftarrow i - 1$
  $j \leftarrow$ índice da coluna pivô da linha i
  ir para o Passo 2
fimse

Exe 1.146

Aplique o "Algoritmo escada reduzida" à matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e indique quantas operações elementares dos tipos I, II e III efetuou.

Res

Atendendo ao exercício $\boxed{\text{Exe 1.144}}$, tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathrm{fe}(A)} \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \frac{1}{3}\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{fer}(A)}$$

operações elementares do tipo I: 1
operações elementares do tipo II: 1
operações elementares do tipo III: 3

Exe 1.147

Aplique, para cada uma das seguintes matrizes, o "Algoritmo escada" e o "Algoritmo escada reduzida" e indique quantas operações elementares dos tipos I, II e III efetuou:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

(g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(h) $h = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(i) $I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

(j) $J = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exe 1.148

Seja $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então:

A $\operatorname{fer}(X) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

B $\operatorname{fer}(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

C $\operatorname{fer}(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

D $\operatorname{fer}(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Def 1.149

⟦matriz elementar⟧ Seja $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que E é uma matriz elementar se se pode obter através de uma operação elementar sobre a matriz I_n.

Def 1.149

⟦matriz elementar⟧ Seja $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que E é uma matriz elementar se se pode obter através de uma operação elementar sobre a matriz I_n.

Exe 1.150

A partir de I_4, determine as matrizes elementares obtidas através das seguintes operações elementares:

(a) $\ell_2 \leftrightarrow \ell_4$.

Def 1.149

⟦matriz elementar⟧ Seja $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que E é uma matriz elementar se se pode obter através de uma operação elementar sobre a matriz I_n.

Exe 1.150

A partir de I_4, determine as matrizes elementares obtidas através das seguintes operações elementares:

(a) $\ell_2 \leftrightarrow \ell_4$.

(b) $\ell_3 \leftarrow 2\ell_3$.

Def 1.149

⟦matriz elementar⟧ Seja $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que E é uma matriz elementar se se pode obter através de uma operação elementar sobre a matriz I_n.

Exe 1.150

A partir de I_4, determine as matrizes elementares obtidas através das seguintes operações elementares:

(a) $\ell_2 \leftrightarrow \ell_4$.

(b) $\ell_3 \leftarrow 2\ell_3$.

(c) $\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1$.

Res

(a)

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_4]{} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

(b)

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow 2\ell_3]{} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

(c)

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Teo 1.151

As matrizes elementares são invertíveis e as suas inversas são matrizes elementares.

Teo 1.151

As matrizes elementares são invertíveis e as suas inversas são matrizes elementares.

Teo 1.152

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tais que $A \longleftrightarrow B$. Então, existe um número finito de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tais que $B = E_1 E_2 \cdots E_k A$.

Teo 1.151

As matrizes elementares são invertíveis e as suas inversas são matrizes elementares.

Teo 1.152

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tais que $A \longleftrightarrow B$. Então, existe um número finito de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tais que $B = E_1 E_2 \cdots E_k A$.

Teo 1.153

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, existe um número finito de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tais que $\text{fer}(A) = E_1 E_2 \cdots E_k A$.

Teo 1.151

As matrizes elementares são invertíveis e as suas inversas são matrizes elementares.

Teo 1.152

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tais que $A \longleftrightarrow B$. Então, existe um número finito de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tais que $B = E_1E_2\cdots E_kA$.

Teo 1.153

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, existe um número finito de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tais que $\text{fer}(A) = E_1E_2\cdots E_kA$.

Teo 1.154

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, A é invertível se e só se A é o produto de matrizes elementares.

Obs 1.155

(a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, A é invertível se e só se $\text{fer}(A) = I_n$.

Obs 1.155

(a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, A é invertível se e só se $\text{fer}(A) = I_n$.

(b) Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível. Então, existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$I_n = E_k \cdots E_2 E_1 A,$$

pelo que

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n,$$

ou ainda

$$\begin{aligned} A^{-1} &= I_n \left(E_k^{-1}\right)^{-1} \cdots \left(E_2^{-1}\right)^{-1} \left(E_1^{-1}\right)^{-1} \\ &= E_k \cdots E_2 E_1 I_n, \end{aligned}$$

i.e., A^{-1} obtém-se a partir de I_n através das mesmas operações elementares que transformam A em I_n.

Exe 1.156

Verifique se as seguintes matrizes são invertíveis, calculando, nesses casos, a sua inversa:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Res

(a)

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A|I_3}$$

Res

(a)

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A|I_3} \begin{array}{l} \\ \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1 \end{array} \longleftrightarrow$$

Res

(a)

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A|I_3} \xrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Res

(a)

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A|I_3} \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3$$

$$\longleftrightarrow$$

Res

(a)

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A|I_3} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow[]{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Res

(a)

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A|I_3} \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2}{\longleftrightarrow}$$

Res

(a)

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A|I_3} \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\longleftrightarrow}{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\longleftrightarrow}{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{I_3|A^{-1}}.$$

Res (cont.)

Assim, A é uma matriz invertível pois fer$(A) = I_3$ com $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Mostre-se, apenas para efeito de verificação, que $AA^{-1} = I_3$:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Res (cont.)

Assim, A é uma matriz invertível pois $\text{fer}(A) = I_3$ com $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Mostre-se, apenas para efeito de verificação, que $AA^{-1} = I_3$:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{B|I_2} \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Assim, como $\text{fer}(B) \neq I_2$, conclui-se que a matriz B não é invertível.

Exe 1.157

Indique se as seguintes matrizes são invertíveis e calcule nesses casos a sua inversa:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(f) $F = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Exe 1.158

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Indique se estão bem definidas as seguintes expressões, efetuando nesses casos as respetivas operações:

(a) $b^T A$.

(b) Ab^T.

(c) $(c^T A + d^T A)^T$.

(d) $A^T b$.

(e) $b^T(c + d)$.

(f) $(AE)^T$.

(g) $E^T A^T$.

(h) A^2.

(i) $(AA^T)^2$.

(j) $(AE)^{-1}$.

Exe 1.159

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, A é uma matriz invertível se e só se

A $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

B $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq \alpha$.

C $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

D $\beta \neq 0$ e $\beta \neq \alpha$.

Exe 1.160

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então:

A $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

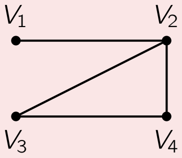
B $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

C $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Obs 1.161

Nesta observação vai-se apresentar uma aplicação de Redes e Grafos envolvendo os conceitos introduzidos neste capítulo.
Definição: Um grafo simples é um par ordenado $G = (V, A)$, no qual V é um conjunto finito e não-vazio e A é um conjunto finito de subconjuntos de V com exatamente dois elementos. A V chama-se conjunto dos vértices e a A chama-se conjunto das arestas.
Habitualmente um grafo simples é representado por um diagrama no qual cada vértice é representado por um ponto e cada aresta por uma linha unindo os dois vértices que a definem.
Exemplo: O grafo simples $G_1 = (V_1, E_1)$ com $V_1 = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ e $A_1 = \{\{V_1, V_2\}, \{V_2, V_3\}, \{V_3, V_4\}, \{V_2, V_4\}\}$ pode ser representado por



Obs 1.161 (cont.)

Pode-se imaginar que os vértices correspondem a nós numa rede de comunicação e que as arestas que ligam os vértices representam elos de comunicação entre dois nós da rede. Na realidade, uma rede de comunicação envolve um número elevado de vértices e arestas o que complica a representação gráfica da rede. Esta dificuldade é ultrapassada recorrendo a uma representação matricial para a rede.

Definição: Considere um grafo com n vértices. A matriz $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{V_i, V_j\} \text{ é uma aresta do grafo} \\ 0 & \text{se não existe uma aresta que liga } V_i \text{ e } V_j \end{cases}$$

é a matriz de adjacência do grafo.

Obs 1.161 (cont.)

Exemplo: A matriz de adjacência do grafo G_1

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nota: A matriz de adjacência M é sempre simétrica.

Definição: Um caminho num grafo é uma sequência de arestas que ligam um vértice a outro. O comprimento do caminho é o número de arestas que o formam.

Exemplo: No grafo simples G_1, a sequência de arestas $(\{V_1, V_2\}, \{V_2, V_4\})$ representa um caminho de comprimento 2 que liga V_1 a V_4 e a sequência de arestas $(\{V_2, V_3\}, \{V_3, V_2\}, \{V_2, V_3\})$ representa um caminho de comprimento 3 que liga V_2 a V_3.

Teorema: Sejam $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz de adjacência de um grafo e $m_{ij}^{(k)}$ um elemento de M^k. Então, $m_{ij}^{(k)}$ é igual ao número de caminhos de comprimento k de V_i a V_j.

Obs 1.161 (cont.)

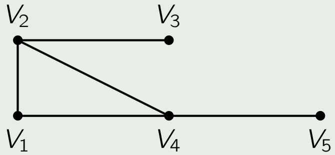
Exemplo: Para determinar o número de caminhos de comprimento 3 que ligam V_2 e V_3 no grafo simples G_1, calcula-se M^3:

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se, então, que o número de caminhos de comprimento 3 que ligam V_2 e V_3 é $m_{23}^{(3)} = 4$.

Exe 1.162

Considere o grafo com a representação



(a) Determine a matriz de adjacência M do grafo.

(b) Indique os caminhos de comprimento 2 que começam em V_1.

(c) Indique quantos caminhos de comprimento 3 existem de V_2 a V_4.

(d) Indique quantos caminhos de comprimento menor ou igual a 3 existem de V_2 a V_4.

Exe 1.163

Seja $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Desenhe um grafo que tenha M como matriz de adjacência e indique os vértices.

(b) Analisando o grafo e a matriz M^2, indique o número de caminhos de comprimento 2 de V_1 a V_3.

Obs 1.164

Some english vocabulary regarding Matrices

- matriz/matrix
- linha de uma matriz/row of a matrix
- coluna de uma matriz/column of a matrix
- matriz retangular/rectangular matrix
- matriz quadrada/square matrix
- matriz diagonal/diagonal matrix
- matriz escalar/scalar matrix
- matriz triangular superior/upper triangular matrix
- matriz triangular inferior/lower triangular matrix
- matriz nula/zero matrix
- matriz identidade/identity matrix
- soma de matrizes/matrix addition

Obs 1.164 (cont.)

- produto (ou multiplicação) de uma matriz por um escalar/multiplication of a matrix by a scalar
- multiplicação de matrizes/matrix multiplication
- potência de uma matriz/power of a matrix
- matrizes comutáveis/permutable matrices
- matriz invertível/invertible matrix
- matriz não-singular/non-singular matrix
- matriz não-invertível/non-invertible matrix
- matriz singular/singular matrix
- matriz inversa/inverse matrix
- matriz transposta/transpose matrix
- matriz simétrica/symmetric matrix

Obs 1.164 (cont.)

- matriz ortogonal/orthogonal matrix
- matriz em escada/row echelon form of a matrix
- matriz em escada reduzida/row reduced echelon form of a matrix

Sol 1.38

(a) A — tipo 2×4, c — tipo 3×1, D — tipo 3×2, E — tipo 1×4.

(b) B — ordem 3, F — ordem 2, g — ordem 1, H — ordem 2.

(c) e, g.

(d) c, g.

(e) B, g, H.

(f) g, H.

(g) B, F, g, H.

(h) B, g, H.

Sol 1.56

(a) $A + B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) $B + A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

(c) A expressão $A - C$ não está bem definida (pois as matrizes A e C não são do mesmo tipo).

(d) $-C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -4 \\ -9 & -9 \end{bmatrix}$.

(e) $(A - B) + 3A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$.

(f) $4A - B = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$.

Sol 1.62

C.

Sol 1.64

$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Sol 1.65

(a) $(AB)C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $A(BC) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $CI_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $I_2C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Sol 1.71

(a) $B^2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(b) $B^3 = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$.

Sol 1.81

D.

Sol 1.82

B.

Sol 1.90

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Sol 1.100

(a) $\frac{AB^T + BA^T}{2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $(CBA^T C)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) $uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) $u^T u = [\,5\,]$.

(f) $u^T A^T Bu = [\,-2\,]$.

(g) $(Au)^T = [\,1\ 0\,]$.

(h) $u^T A^T = [\,1\ 0\,]$.

Sol 1.103

$X = CB - A.$

Sol 1.104

$X = (A^2 - B^{-1})^T.$

Sol 1.105

A.

Sol 1.106

A.

Sol 1.112

D.

Sol 1.113

D.

Sol 1.117

A e C.

Sol 1.120

A.

Sol 1.121

D.

Sol 1.122

A.

Sol 1.123

D.

Sol 1.147

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \text{fe}(A)$, I: 0, III: 2, $\text{fer}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, I: 0, II: 2, III: 4.

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(B)$, I: 0, III: 3, $\text{fer}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, I: 0, II: 2, III: 4.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(C)$, I: 2, III: 1, $\text{fer}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, I: 2, II: 1, III: 2.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \in \text{fe}(D)$, I: 0, III: 3, $\text{fer}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \end{bmatrix}$, I: 0, II: 2, III: 6.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(E)$, I: 0, III: 4, $\text{fer}(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, I: 0, II: 1, III: 5.

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \in \text{fe}(F)$, I: 0, III: 3, $\text{fer}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$, I: 0, II: 2, III: 6.

Sol 1.147

(g) $G \in \mathrm{fe}(G)$, I: 0, III: 0, $\mathrm{fer}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, I: 0, II: 1, III: 1.

(h) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(h)$, I: 0, III: 2, $\mathrm{fer}(h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, I: 0, II: 0, III: 2.

(i) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(I)$, I: 0, III: 3, $\mathrm{fer}(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, I: 0, II: 3, III: 6.

(j) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(J)$, I: 0, III: 3, $\mathrm{fer}(J) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, I: 0, II: 0, III: 5.

Sol 1.148

D.

Sol 1.157

(a) A é invertível com $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

(b) B não é invertível.

(c) C é invertível com $C^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) D é invertível com $D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(e) E é invertível com $E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \\ -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$.

(f) F não é invertível.

Sol 1.158

(a) $b^T A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) A expressão Ab^T não está bem definida pois o número de colunas da matriz A, que é 3, é diferente do número de linhas da matriz b^T, que é 1.

(c) $(c^T A + d^T A)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(d) $A^T b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(e) $b^T(c + d) = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$.

(f) $(AE)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(g) $E^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(h) A expressão $A^2 (= AA)$ não está bem definida pois o número de colunas da matriz A, que é 2, é diferente do seu número de linhas, que é 3.

(i) $(AA^T)^2 = \begin{bmatrix} 13 & -24 \\ -24 & 45 \end{bmatrix}$.

(j) $(AE)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Sol 1.159

B.

Sol 1.160

D.

Sol 1.162

(a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

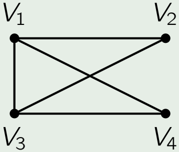
(b) Existem 6 caminhos de comprimento 2 que começam em V_1: $V_1V_2V_1,\ V_1V_4V_1,\ V_1V_4V_2,\ V_1V_2V_3,\ V_1V_2V_4,\ V_1V_4V_5$.

(c) 5.

(d) 7.

Sol 1.163

(a) .



(b) 2.

Def 2.1

⟦matriz complementar de um elemento de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Chama-se matriz complementar do elemento ij, que se representa por $\widetilde{A}_{ij}$, a

$$\widetilde{A}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} A & \text{se} \quad n = 1, \\ \begin{array}{l}\text{matriz que se obtém a partir da} \\ \text{matriz } A \text{ eliminando } \ell_i \text{ e } c_j\end{array} & \text{se} \quad n \geqslant 2. \end{cases}$$

Exe 2.2

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ e $B = [\,-5\,]$.

(a) Determine a matriz complementar do elemento 12 da matriz A.

(b) Determine $\widetilde{A}_{33}$.

(c) Determine $\widetilde{B}_{11}$.

Res

(a) $\widetilde{A}_{12} = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) $\widetilde{A}_{33} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

(c) $\widetilde{B}_{11} = [\,-5\,]$.

Def 2.3

⟦determinante de uma matriz⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se determinante da matriz A, que se representa por $\det(A)$, $\begin{vmatrix} (A)_{11} & \cdots & (A)_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A)_{n1} & \cdots & (A)_{nn} \end{vmatrix}$ ou $|A|$, ao escalar

$$\det(A) \equiv \begin{vmatrix} (A)_{11} & \cdots & (A)_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A)_{n1} & \cdots & (A)_{nn} \end{vmatrix} \equiv |A|$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (A)_{11} & se \quad n = 1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (A)_{1j}(-1)^{1+j} \det(\widetilde{A}_{1j}) & se \quad n \geqslant 2. \end{cases}$$

Obs 2.4

(a) A definição que se acaba de dar é um exemplo de uma definição recursiva.

(b) Só se definem determinantes de matrizes quadradas, sendo o seu valor um número real.

(c) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R})$. Note-se que quando se escreve $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$, $|\cdot|$ não representa o valor absoluto mas sim o determinante. O contexto será sempre suficiente para interpretar o significado correto de $|\cdot|$.

Exe 2.5

Seja $X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Determine $\widetilde{X}_{11}$ e $\widetilde{X}_{12}$.

(b) Calcule $\det(X)$.

Res

(a) $\widetilde{X}_{11} = [\, x_{22} \,]$ e $\widetilde{X}_{12} = [\, x_{21} \,]$.

(b)

$$\begin{aligned}
\det(X) &\equiv \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{2} x_{1j}(-1)^{1+j} \det(\widetilde{X}_{1j}) \\
&= \underbrace{x_{11}(-1)^{1+1} \det(\widetilde{X}_{11})}_{j=1} + \underbrace{x_{12}(-1)^{1+2} \det(\widetilde{X}_{12})}_{j=1} \\
&= x_{11} \times 1 \times x_{22} + x_{12} \times (-1) \times x_{21} \\
&= x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}.
\end{aligned}$$

Obs 2.6

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então, $\det(A)$ pode-se calcular atendendo a

$$\begin{tikzcd}
+ & & - \\
a_{11} \arrow[drr] & & a_{12} \arrow[dll] \\
a_{21} & & a_{22}
\end{tikzcd}$$

vindo

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exe 2.7

Calcule $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right|$.

Res

$\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right| = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

Exe 2.8

Calcule o determinante da matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

Exe 2.9

Seja $Y = [y_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Calcule $\det(Y)$.

Res

$$\det(Y) \equiv \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} y_{1j}(-1)^{1+j}\det(\widetilde{Y}_{1j})$$

$$= \underbrace{y_{11}(-1)^{1+1}\det(\widetilde{Y}_{11})}_{j=1} + \underbrace{y_{12}(-1)^{1+2}\det(\widetilde{Y}_{12})}_{j=2}$$

$$+ \underbrace{y_{13}(-1)^{1+3}\det(\widetilde{Y}_{13})}_{j=3}$$

Res (cont.)

$$
\begin{aligned}
&= y_{11} \times 1 \times \begin{vmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} + y_{12} \times (-1) \times \begin{vmatrix} y_{21} & y_{23} \\ y_{31} & y_{33} \end{vmatrix} \\
&\qquad + y_{13} \times 1 \times \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{vmatrix} \\
&= y_{11}(y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32}) - y_{12}(y_{21}y_{33} - y_{23}y_{31}) \\
&\qquad + y_{13}(y_{21}y_{32} - y_{22}y_{31}) \\
&= y_{11}y_{22}y_{33} + y_{12}y_{23}y_{31} + y_{13}y_{21}y_{32} \\
&\qquad - y_{11}y_{23}y_{32} - y_{12}y_{21}y_{33} - y_{13}y_{22}y_{31}.
\end{aligned}
$$

Obs 2.10

"Regra de Sarrus" (apenas se aplica a matrizes de ordem 3): seja

$$\begin{tikzcd}
+ & a_{11} \arrow[dr] & a_{12} & a_{13} \arrow[dl] & - \\
+ & a_{21} \arrow[dr] & a_{22} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{23} \arrow[dl] & - \\
+ & a_{31} \arrow[dr] & a_{32} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{33} \arrow[dl] & - \\
 & a_{11} & a_{12} \arrow[dl] \arrow[dr] & a_{13} & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} &
\end{tikzcd}$$

vindo

$$\begin{aligned}
\det(A) = & \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}\right) \\
& - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}\right),
\end{aligned}$$

Obs 2.10 (cont.)

ou, atendendo a

$$
\begin{array}{ccccc}
+ & + & + & & \\
& & & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
& & & & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
& & & & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
& & & & \\
- & - & - & &
\end{array}
$$

vindo

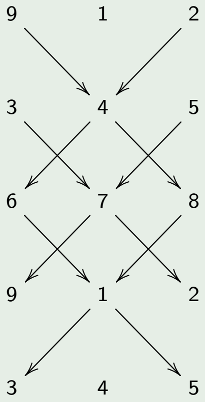
$$
\begin{aligned}
\det(A) = {} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\
& - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).
\end{aligned}
$$

Exe 2.11

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$.

Res

Atendendo a



Res (cont.)

tem-se que

$$\begin{aligned}\det(A) &= 9 \times 4 \times 8 + 3 \times 7 \times 2 + 6 \times 1 \times 5 \\ &\quad - 2 \times 4 \times 6 - 5 \times 7 \times 9 - 8 \times 1 \times 3 \\ &= -27,\end{aligned}$$

Res (cont.)

ou atendendo a

$$\begin{array}{ccccc} 9 & 1 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 6 & 7 \end{array}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \det(A) &= (9 \times 4 \times 8 + 1 \times 5 \times 6 + 2 \times 3 \times 7) \\ &\qquad - (2 \times 4 \times 6 + 9 \times 5 \times 7 + 1 \times 3 \times 8) \\ &= -27. \end{aligned}$$

Exe 2.12

Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exe 2.13

Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Então:

A $\det(A) = 2$.

B $\det(A) = -2$.

C $\det(A) = 0$.

D $\det(A) = -1$.

Exe 2.14

Considere as matrizes $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Então:

A $\det(A) + \det(B) = -6$.

B $\det(A) + \det(B) = -3$.

C $\det(A) + \det(B) = -1$.

D $\det(A) + \det(B) = 0$.

Def 2.15

⟦co-fator de um elemento de uma matriz ou complemento algébrico de um elemento de uma matriz⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se co-fator ou complemento algébrico do elemento ij, que se representa por A_{ij}, ao escalar

$$A_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} \det(\widetilde{A}_{ij}).$$

Exe 2.16

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) Determine o co-fator do elemento 11 da matriz A.

(b) Determine o complemento algébrico do elemento 12 da matriz A.

(c) Determine A_{21}.

(d) Determine A_{22}.

Res

(a) $A_{11} = (-1)^{1+1} \det(\widetilde{A}_{11}) = 1 \times |-4| = -4.$

(b) $A_{12} = (-1)^{1+2} \det(\widetilde{A}_{12}) = -1 \times |3| = -3.$

(c) $A_{21} = (-1)^{2+1} \det(\widetilde{A}_{21}) = -1 \times |-2| = 2.$

(d) $A_{22} = (-1)^{2+2} \det(\widetilde{A}_{22}) = 1 \times |-5| = -5.$

Obs 2.17

Relembre-se as seguintes notações:

- $(A)_{ij}$ — elemento ij da matriz A.
- $\widetilde{A}_{ij}$ — matriz complementar do elemento ij da matriz A.
- A_{ij} — co-fator ou complemento algébrico do elemento ij de uma matriz A.

Teo 2.18

(Teorema de Laplace) Sejam n um natural maior ou igual a 2, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\xi, \eta \in \{1, \ldots, n\}$. Então:

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (A)_{\xi j} A_{\xi j}}_{\substack{\text{desenvolvimento} \\ \text{através da linha } \xi}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (A)_{i\eta} A_{i\eta}}_{\substack{\text{desenvolvimento} \\ \text{através da coluna } \eta}}.$$

Obs 2.19

(a) Note que a definição $\boxed{\text{Def 2.46}}$ para $n \geqslant 2$ consiste no cálculo do determinante através do desenvolvimento segundo a primeira linha.

(b) Como regra prática para calcular determinantes através do teorema de Laplace, deve-se fazer o desenvolvimento a partir da linha ou coluna que tiver mais zeros.

Exe 2.20

Calcule o determinante da matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ através do desenvolvimento da primeira coluna e da quarta linha.

Teo 2.21

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Se A for uma matriz diagonal ou triangular (inferior ou superior), então $\det(A) = \prod_{i=1}^{n}(A)_{ii}$.

(b) Se todos os elementos de uma linha ou coluna da matriz A são nulos, então $\det(A) = 0$.

(c) Se A tem duas linhas ou colunas iguais, então $\det(A) = 0$.

(d) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

(e) $\det(A^T) = \det(A)$.

(f) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(g) A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$.

(h) Se A é uma matriz invertível, então $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Obs 2.22

(a) $\det(I) = 1$.

(b) Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então,

$$\det\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_i).$$

(c) Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$. Então, $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

Exe 2.23

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tal que P é uma matriz invertível. Usando as propriedades dos determinantes, calcule:

(a) $\det(A)$.

(b) $\det(B)$.

(c) $\det(C)$.

(d) $\det(D)$.

(e) $\det(-2A)$.

(f) $-2\det(A)$.

(g) $\det(A^3)$.

(h) $\det(2A^TA)$.

(i) $\det(A^TA^{-1}B^T)$.

(j) $\det(A^{-1}DA)$.

(k) $\det(ABCD)$.

(l) $\det(P^{-1}AP)$.

Res

(a) Sendo A uma matriz triangular (superior), tem-se que $\det(A) = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

(b) Sendo $c_{1,B} = c_{2,B}$, tem-se que $\det(B) = 0$.

(c) Sendo $\ell_{2,C}$ uma linha nula, tem-se que $\det(C) = 0$.

(d) Sendo D uma matriz diagonal, tem-se que $\det(D) = 1 \times 2 = 2$.

(e) $\det(-2A) = (-2)^3 \det(A) = -8 \times 6 = -48$.

(f) $-2\det(A) = -2 \times 6 = -12$.

(g) $\det(A^3) = (\det(A))^3 = 6^3 = 216$.

(h) $\det(2A^TA) = \det(2A^T)\det(A) = 2^3\det(A^T)\det(A) = 2^3\det(A)\det(A) = 2^3 \times 6 \times 6 = 288$.

(i) $\det(A^TA^{-1}B^T) = \det(A^T)\det(A^{-1})\det(B^T) = \det(A)\frac{1}{\det(A)}\det(B) = \det(B) = 0$.

Res (cont.)

(j) $\det(A^{-1}DA) = \det(A^{-1})\det(D)\det(A) = \frac{1}{\det(A)}\det(D)\det(A) = \det(D) = 2$.

(k) $\det(ABCD) = \det(A)\det(B)\det(C)\det(D) = 6 \times 0 \times 0 \times 2 = 0$.

(l) $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A) = 6$.

Exe 2.24

Considere as matrizes A, B, C e D do exercício anterior. Indique, justificando, as que são invertíveis.

Res

As matrizes A e D são invertíveis pois os seus determinantes são diferentes de zero.

Exe 2.25

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ x & y & 1 \end{bmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Indique para que valores de x e y a matriz A é invertível.

Exe 2.26

Considere a matriz $Z = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Indique para que valores de x a matriz Z é invertível.

Exe 2.27

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e seja B uma matriz de ordem 4 tal que $|B| = 12$. Calcule o determinante da matriz $(AB^{-1})^T$.

Exe 2.28

Sejam A uma matriz quadrada tal que $\det(A) = 2$ e $B = 2A^T$. Mostre que a matriz B é invertível.

Exe 2.29

Considere a matriz $A=[a_{ij}]\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $a_{ij}=\begin{cases} i & \text{se } i\geqslant j,\\ 0 & \text{se } i<j.\end{cases}$ Então:

A $\det(A)=0$.

B $\det(A)=1$.

C $\det(A)=n$.

D $\det(A)=n!$.

Exe 2.30

Considere a matriz $A=[a_{ij}]\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $a_{ij}=\begin{cases} 2 & \text{se } i\leqslant j,\\ 0 & \text{se } i>j.\end{cases}$ Então:

A $\det(A^TA)=2^n$.

B $\det(A^TA)=4^n$.

C $\det(A^TA)=1$.

D $\det(A^TA)=0$.

Exe 2.31

Considere a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{10\times 10}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i < j, \\ i & \text{se } i \geq j. \end{cases}$ Então:

$\boxed{\text{A}}$ $\det(A^T A) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{10} i\right)^2.$

$\boxed{\text{B}}$ $\det(A^T A) = \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{10} i\right)^2.$

$\boxed{\text{C}}$ $\det(A^T A) = 1.$

$\boxed{\text{D}}$ $\det(A^T A) = 10.$

Exe 2.32

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $\det(A) = 2$ e $\det(B) = -2$. Então:

$\boxed{\text{A}}$ $\det(A + B) = 0$.

$\boxed{\text{B}}$ $\det(-A) = -\det(A)$.

$\boxed{\text{C}}$ $\det(-A) = \det(A)$.

$\boxed{\text{D}}$ $\det(AB) = 0$.

Exe 2.33

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então:

$\boxed{\text{A}}$ $\det(AA^T)\det(A^{-1}) = 1$.

$\boxed{\text{B}}$ $\det(AA^T)\det(A^{-1}) = 2$.

$\boxed{\text{C}}$ $\det(AA^T)\det(A^{-1}) = 4$.

$\boxed{\text{D}}$ $\det(AA^T)\det(A^{-1}) = 8$.

Teo 2.34

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Se B resulta de A por troca de duas linhas (operação elementar do tipo I), então $\det(B) = -\det(A)$.

(b) Se B resulta de A por multiplicação dos elementos de uma linha de A por α (operação elementar do tipo II), então $\det(B) = \alpha \det(A)$.

(c) Se B resulta de A adicionando a uma linha um múltiplo de outra linha (operação elementar do tipo III), então $\det(B) = \det(A)$.

Obs 2.35

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $B \in \text{fe}(A)$ e que se obteve a partir da matriz A através das operações elementares do tipo I e III (por exemplo, por aplicação do algoritmo apresentado na observação Obs 1.143). Então, $\det(A) = (-1)^s \prod_{i=1}^{n} (B)_{ii}$, em que s é o número de trocas de linhas realizadas.

Exe 2.36

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $\det(A)$ através da definição (podendo usar qualquer processo para calcular determinantes de matrizes de ordem 3).

(b) Calcule $\det(A)$ por aplicação do teorema de Laplace através do desenvolvimento a partir da terceira coluna (podendo usar qualquer processo para calcular determinantes de matrizes de ordem 3).

(c) Calcule $\det(A)$ através da observação Obs 2.35.

Res

(a)

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{4} (A)_{1j}(-1)^{1+j}\det(\widetilde{A}_{1j}) \\
&= (A)_{11}(-1)^{1+1}\det(\widetilde{A}_{11}) + (A)_{12}(-1)^{1+2}\det(\widetilde{A}_{12}) \\
&\qquad + (A)_{13}(-1)^{1+3}\det(\widetilde{A}_{13}) + (A)_{14}(-1)^{1+4}\det(\widetilde{A}_{14}) \\
&= 0 + 1\times(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 2\times(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0 + 1\times(-1)\times 10 + 0 + 2\times(-1)\times 2 \\
&= -14.
\end{aligned}
$$

Cálculos auxiliares:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times(0\times 1 - 3\times 0) - 2\times(1\times 1 - 3\times 2) + 0\times(1\times 0 - 0\times 2) = 10.$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(0\times 0 - 0\times 1) - 1\times(1\times 0 - 0\times 2) + 2\times(1\times 1 - 0\times 2) = 2.$

Res (cont.)

(b)

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{4} (A)_{i3}(-1)^{i+3}\det(\widetilde{A}_{i3}) \\
&= (A)_{13}(-1)^{1+3}\det(\widetilde{A}_{13}) + (A)_{23}(-1)^{2+3}\det(\widetilde{A}_{23}) \\
&\qquad + (A)_{33}(-1)^{3+3}\det(\widetilde{A}_{33}) + (A)_{43}(-1)^{4+3}\det(\widetilde{A}_{43}) \\
&= 0 + 2\times(-1)\times\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 \\
&= 2\times(-1)\times 7 \\
&= -14.
\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\times(0\times 1 - 3\times 1) - 1\times(1\times 1 - 3\times 2) + 2\times(1\times 1 - 0\times 2) = 7.$

Res (cont.)

(c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_4 \leftarrow \ell_4 - 2\ell_1]{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_4 \leftarrow \ell_4 + \ell_2]{\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_4 \leftarrow \ell_4 - 2\ell_3]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^1 \times (1 \times 1 \times (-2) \times (-7)) = -14.$$

Obs 2.37

Pedindo-se o determinante de uma matriz, se não for explicitado no enunciado o processo de cálculo, este pode ser feito por um método qualquer, nomeadamente aquele que se achar mais simples.

Exe 2.38

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ por dois processos distintos.

Exe 2.39

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Então:

A $\det(A) = -6$.

B $\det(A) = -2$.

C $\det(A) = 0$.

D $\det(A) = 2$.

Def 2.40

⟦matriz adjunta⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se matriz adjunta de A, que se representa por $\operatorname{adj}(A)$, ao elemento de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$(\operatorname{adj}(A))_{ij} \overset{\text{def}}{=} A_{ji}.$$

Obs 2.41

A matriz adjunta é a transposta da matriz dos co-fatores.

Exe 2.42

(a) Determine a matriz adjunta da matriz $X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Determine a matriz adjunta da matriz $A = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

Res

(a) Atendendo a

$$\begin{aligned}
X_{11} &= (-1)^{1+1}\det(\widetilde{X}_{11}) = 1 \times |x_{22}| = x_{22},\\
X_{12} &= (-1)^{1+2}\det(\widetilde{X}_{12}) = -1 \times |x_{21}| = -x_{21},\\
X_{21} &= (-1)^{2+1}\det(\widetilde{X}_{21}) = -1 \times |x_{12}| = -x_{12},\\
X_{22} &= (-1)^{2+2}\det(\widetilde{X}_{22}) = 1 \times |x_{11}| = x_{11},
\end{aligned}$$

tem-se que

$$\operatorname{adj}(X) = \begin{bmatrix} x_{22} & -x_{21} \\ -x_{12} & x_{11} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{bmatrix}.$$

(b) Atendendo à alínea anterior, tem-se que

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}.$$

Teo 2.43

Seja A uma matriz invertível de ordem maior do que 1. Então, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$.

Exe 2.44

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que a matriz A é invertível.

(b) Determine a inversa da matriz A pelo método da adjunta.

Res

(a) Como $\det(A) = 3 \times 0 - (-2) \times 1 = 2 \neq 0$, A é uma matriz invertível.

(b) $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Mostre-se, apenas para efeito de verificação, que $AA^{-1} = I_2$:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exe 2.45

Considere a matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que a matriz E é invertível.

(b) Determine a inversa da matriz E pelo método da adjunta.

Exe 2.46

Calcule o determinante das matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Exe 2.47

Calcule o determinante, a adjunta e a inversa das matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Exe 2.48

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $\det(AB) = \det(BA)$.

Exe 2.49

Considere as matrizes $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $D = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $F = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ e a equação matricial em X dada por $[(AX)^T + DF]^{-1} = I_2$.

(a) Resolva a equação dada.

(b) Diga, sem efetuar quaisquer cálculos, qual o determinante de $(AX)^T + DF$.

Exe 2.50

Sejam $p \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada tal que $A^p = \underline{0}$. Mostre que A é uma matriz singular.

Exe 2.51

Seja A uma matriz ortogonal. Mostre que $\det(A) = \pm 1$.

Obs 2.52

Nesta observação vai-se apresentar uma aplicação de Criptografia envolvendo os conceitos introduzidos neste capítulo.
Pode-se codificar uma mensagem associando a cada letra do alfabeto um número inteiro e enviar a lista de números que substitui a mensagem. A teoria dos determinantes é usada neste contexto para o cálculo de inversas com propriedades especiais.
Exemplo: A mensagem "BOA SORTE!" pode ser codificada por

$$3, 1, 5, 10, 1, 6, 2, 8, 0,$$

onde a letra "B" é representado pelo algarismo "3", a letra "O" pelo algarismo "1", etc. (neste exemplo não se codifica o espaço).
Para complicar ainda mais a codificação da mensagem e para impedir que o código seja quebrado pode-se usar a seguinte técnica: o código que representa a mensagem é colocado nas colunas de uma matriz B.

Obs 2.52 (cont.)

No exemplo considerado tem-se $B = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$. A matriz B vai ser pré-multiplicada por uma outra matriz A. A matriz A deve verificar as seguintes propriedades: os elementos de A são números inteiros e $\det(A) = \pm 1$. Daí resulta que $A^{-1} = \pm \operatorname{adj}(A)$ e os elementos de A^{-1} também vão ser todos números inteiros.
Seja a matriz A dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 22 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

contém a mensagem codificada que deve ser enviada:

$$13, 1, 6, 22, 1, 7, 2, 8, 8.$$

Obs 2.52 (cont.)

O recetor da mensagem consegue descodificá-la multiplicando-a por A^{-1} da seguinte forma:

$$A^{-1}AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 22 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz de codificação A pode ser construída a partir da matriz identidade I, aplicando, sucessivamente, operações elementares do tipo I e do tipo III. A matriz assim obtida vai ter elementos inteiros, verifica $\det(A) = \pm\det(I) = \pm 1$ e A^{-1} também vai ter elementos inteiros.

Exe 2.53

Na codificação de uma mensagem, a i-ésima letra do alfabeto é representada pelo natural i, $i = 1, \ldots, 26$ (neste exercício, o espaço também não é considerado). A mensagem foi transformada usando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

e enviada como

$$45, 60, -47, 63, 82, -68, 44, 48, -65.$$

Qual é a mensagem?

Obs 2.54

Some english vocabulary regarding Determinants

- determinante de uma matriz/determinant of a matrix
- matriz adjunta/adjoint matrix

Sol 2.8

$\det(A) = -17.$

Sol 2.12

$\det(B) = 24$, $\det(C) = 0$, $\det(D) = 8.$

Sol 2.13

D.

Sol 2.14

B.

Sol 2.20

$\det(E) = -8.$

Sol 2.29

D.

Sol 2.25

$x \neq y$.

Sol 2.26

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Sol 2.27

$\det((AB^{-1})^T) = -5$.

Sol 2.30

B.

Sol 2.31

B.

Sol 2.32

C.

Sol 2.33

B.

Sol 2.38

$\det(A) = -3$.

Sol 2.39

A.

Sol 2.45

(b) $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Sol 2.46

$\det(A) = 15$, $\det(B_\alpha) = 1$, $\det(C) = 0$, $\det(D) = 0$, $\det(E) = 1$, $\det(F) = 2$.

Sol 2.47

$\det(A) = 1$, $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

$\det(B) = -7$, $\operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

$\det(C) = 10$, $\operatorname{adj}(C) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$.

$\det(D) = 3$, $\operatorname{adj}(D) = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -8 & -5 \end{bmatrix}$, $D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$.

Sol 2.49

(a) $X = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$.

(b) $\det(AX^T + DF) = 1$.

Sol 2.53

"BOM ESTUDO".

Def 3.1

⟦sistema de equações lineares, matriz dos coeficientes, vetor dos termos independentes, vetor das incógnitas, matriz aumentada ou matriz ampliada, conjunto solução⟧ Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $b = [b_i] \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Diz-se que (S) é um sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ com matriz dos coeficientes A e vetor dos termos independentes b se (S) é o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

Def 3.1 (cont.)

Chama-se vetor das incógnitas do sistema (S) à matriz coluna $x = [x_i] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Chama-se matriz aumentada ou matriz ampliada do sistema (S), que se representa por $A|b$, à matriz

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Chama-se conjunto solução do sistema (S), que se representa por $\mathrm{CS}_{(S)}$, a

$$\mathrm{CS}_{(S)} \overset{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b\}.$$

Obs 3.2

Note-se que o sistema (S) da definição anterior pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ou, em notação matricial, como $Ax = b$.

Exe 3.3

Dê um exemplo de um sistema com duas equações lineares e com três incógnitas.

Res

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x - y - z = 0. \end{cases}$$

Obs 3.4

Neste curso apenas se estudarão sistema de equações lineares, o que implica que, por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + x\,\mathrm{sen}(y) = 1 \\ x - \exp(y) = 0, \end{cases}$$

que se diz um sistema de equações não lineares, não será aqui tratado.

Def 3.5

⟦sistema homogéneo⟧ Seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$. Diz-se que (S) é um sistema homogéneo se $b = \underline{0}$.

Exe 3.6

Dê um exemplo de um sistema homogéneo com duas equações e com três incógnitas.

Res

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0. \end{cases}$$

Def 3.7

⟦sistema homogéneo associado⟧ Seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$ tal que $b \neq \underline{0}$. Chama-se sistema homogéneo associado ao sistema (S) ao sistema $Ax = \underline{0}$.

Exe 3.8

Identifique o sistema homogéneo associado ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x & + & 2y & = & 1 \\ 3x & - & y & = & 0. \end{cases}$$

Res

$$\begin{cases} x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & - & y & = & 0. \end{cases}$$

Def 3.9

⟦característica de uma matriz⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se característica da matriz A, que se representa por $\text{car}(A)$, ao número de linhas não nulas de uma matriz em escada que seja equivalente à matriz A.

Exe 3.10

Determine a característica da matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Res

Atendendo a que

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right],$$

$\text{car}(A) = 2$.

Def 3.11

Seja (S) um sistema de equações lineares.

(a) $[\![$sistema possível$]\!]$ Diz-se que (S) é um sistema possível se $\#\,\mathrm{CS}_{(S)} > 0$.

(b) $[\![$sistema possível e determinado$]\!]$ Diz-se que (S) é um sistema possível e determinado se $\#\,\mathrm{CS}_{(S)} = 1$.

(c) $[\![$sistema possível e indeterminado$]\!]$ Diz-se que (S) é um sistema possível e indeterminado se $\#\,\mathrm{CS}_{(S)} > 1$.

(d) $[\![$sistema impossível$]\!]$ Diz-se que (S) é um sistema impossível se $\#\,\mathrm{CS}_{(S)} = 0$.

Teo 3.12

Seja $Ax = b$ um sistema de equações lineares com n incógnitas. Então:

$$\begin{cases} \text{car}(A) = \text{car}(A|b) & : \text{ sistema possível (Pos)} \\ \text{car}(A) = \text{car}(A|b) = n & : \text{ sistema possível e determinado (PD)} \\ \text{car}(A) = \text{car}(A|b) < n & : \text{ sistema possível e indeterminado (PI)} \\ \text{car}(A) < \text{car}(A|b) & : \text{ sistema impossível (Imp).} \end{cases}$$

Obs 3.13

(a) Seja $Ax = b$ um sistema de m equações lineares com n incógnitas. Então, se $n > m$ o sistema não pode ser possível e determinado.

(b) Seja $Ax = b$ um sistema de n equações lineares com n incógnitas, tal que A é uma matriz invertível. Então, $x = A^{-1}b$.

Def 3.14

$[\![$variável pivô, variável livre$]\!]$ Sejam $Ax = b$ um sistema de equações lineares e $A' \in \text{fe}(A)$. Se $c_{j,A'}$ é uma coluna pivô, diz-se que x_j é uma variável pivô. Caso contrário, diz-se que é uma variável livre.

Exe 3.15

Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine um elemento de $\text{fe}(A|b)$.

(b) Identifique as colunas pivô do sistema (S).

(c) Identifique as variáveis pivô e as variáveis livres do sistema (S).

Res

(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right]}_{\in \text{fe}(A|b)}.$$

(b) Colunas pivô de (S): c_1 e c_3.

(c) Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ o vetor das incógnitas do sistema (S). Então, x_1 e x_3 são as variáveis pivô de (S) e x_2 e x_4 são as variáveis livres de (S).

Teo 3.16

Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, cujo vetor dos termos independentes é $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ e cujo vetor das incógnitas é $x = [x_i] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

(a) (Método de Gauss) Seja, ainda, $A'|b' \in \mathrm{fe}(A|b)$. No caso de (S) ser um sistema possível, tem-se que:

$$\mathrm{CS}_{(S)} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \text{ se } x_i \text{ é uma variável pivô, então } x_i = \frac{(A'|b')_{i,n+1} - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} (A'|b')_{ij} x_j}{(A'|b')_{ii}} \right\}.$$

Teo 3.16 (cont.)

(b) (Método de Gauss-Jordan) No caso de (S) ser um sistema possível, tem-se que:

$$\mathrm{CS}_{(S)} = \Bigg\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \text{ se } x_i \text{ é uma variável pivô,}$$

$$\text{então } x_i = \frac{(\mathrm{fer}(A|b))_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} (\mathrm{fer}(A|b))_{ij} x_j}{(\mathrm{fer}(A|b))_{ii}}\Bigg\}.$$

Obs 3.17

(a) Algoritmo do Método de Gauss: começa-se por determinar um elemento pertencente ao conjunto das matrizes em escada equivalentes à matriz ampliada do sistema. A partir desta matriz é imediato concluir se o sistema é possível e determinado, caso em que não há variáveis livres, possível e indeterminado, caso em que se tem que identificar as variáveis livres, ou impossível. No caso de ser possível, o seu conjunto solução é obtido através do teorema Teo 3.16 (a).

(b) Algoritmo do Método de Gauss-Jordan: começa-se por determinar a matriz em escada reduzida equivalente à matriz ampliada do sistema. A partir desta matriz é imediato concluir se o sistema é possível e determinado, caso em que não há variáveis livres, possível e indeterminado, caso em que se tem que identificar as variáveis livres, ou impossível. No caso de ser possível, o seu conjunto solução é obtido através do teorema Teo 3.16 (b).

Obs 3.17 (cont.)

(c) O método de Gauss e o método de Gauss-Jordan são dois algoritmos para resolver sistemas de equações lineares. Assim, o conjunto solução que se obtém através da aplicação do método de Gauss a qualquer sistema de equações lineares tem que ser igual ao que se obtém através da aplicação do método de Gauss-Jordan.

(d) Um sistema de 2 equações lineares com 2 incógnitas tem uma inerpretação geométrica que se apresenta no exercício seguinte.

Exe 3.18

(a) Dê um exemplo de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas possível e determinado, resolva-o através do Método de Gauss e faça a sua interpretação geométrica.

(b) Dê um exemplo de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas possível e indeterminado, resolva-o através do Método de Gauss e faça a sua interpretação geométrica.

(c) Dê um exemplo de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas impossível, resolva-o através do Método de Gauss e faça a sua interpretação geométrica.

Res

(a) Seja (S_1) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, *i.e.*,

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Resolução de (S_1) através do método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

Como $\text{car}(A) = \text{car}(A|b) = n = 2$ (n é o número de incógnitas), (S_1) é um sistema possível e determinado equivalente ao sistema de equações lineares

Res (cont.)

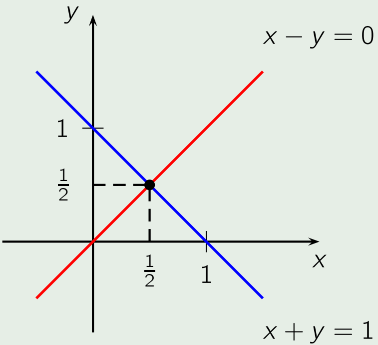
$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ & - & 2y & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

ou seja,

$$\mathrm{CS}_{(S_1)} = \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}.$$

$\mathrm{CS}_{(S_1)}$ pode ser geometricamente interpretado como sendo os pontos de intersecção das retas $x + y = 1$ e $x - y = 0$, que neste caso é um só, conforme se ilustra na seguinte figura:

Res (cont.)



Res (cont.)

(b) Seja (S_2) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, *i.e.*,

$$(S_2) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ -2x - 2y = -2. \end{cases}$$

Resolução de (S_2) através do método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\text{car}(A) = \text{car}(A|b) = 1 < n = 2$ (n é o número de incógnitas), (S_2) é um sistema possível e indeterminado equivalente à equação linear

Res (cont.)

$$x \quad + \quad y \quad = \quad 1.$$

Sendo y uma variável livre, tem-se

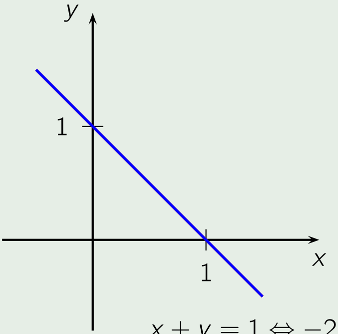
$$\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ou seja,

$$\mathrm{CS}_{(S_2)} = \{(1-\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathrm{CS}_{(S_2)}$ pode ser geometricamente interpretado como sendo os pontos de intersecção das retas $x + y = 1$ e $-2x - 2y = -2$, que neste caso são uma infinidade, conforme se ilustra na seguinte figura:

Res (cont.)



$$x + y = 1 \Leftrightarrow -2x - 2y = -2$$

Res (cont.)

(c) Seja (S_3) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$, *i.e.*,

$$(S_3) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2. \end{array} \right.$$

Resolução de (S_3) através do método de Gauss:

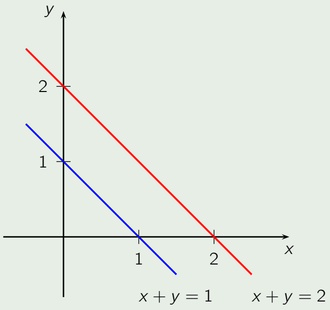
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como $\text{car}(A) = 1 < \text{car}(A|b) = 2$, (S_3) é um sistema impossível, tendo-se

$$\text{CS}_{(S_3)} = \emptyset.$$

Res (cont.)

$CS_{(S_3)}$ pode ser geometricamente interpretado como sendo os pontos de intersecção das retas $x + y = 1$ e $x + y = 2$, que neste caso não existem, conforme se ilustra na seguinte figura:



Exe 3.19

Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e o vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Determine $\mathrm{CS}_{(S)}$ através do método de Gauss.

(b) Determine $\mathrm{CS}_{(S)}$ através do método de Gauss-Jordan.

(c) Comente os resultados obtidos nas duas alíneas anteriores.

Res

(a) .

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{1}{2}\ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Res (cont.)

Como $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|b) = n = 3$ (n é o número de incógnitas), (S) é um sistema possível e determinado equivalente ao sistema de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 3x_3 & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1-1+1}{1} = 1 \\ x_2 = \frac{0+2\times 1}{2} = 1 \\ x_3 = \frac{3}{3} = 1 \end{array}\right.$$

ou seja,

$$\mathrm{CS}_{(S)} = \{(1,1,1)\}.$$

Res (cont.)

(b) Tendo em consideração a alínea anterior, onde já se determinou uma matriz em escada equivalente à matriz ampliada do sistema e se concluiu que o sistema é possível e determinado, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \frac{1}{3}\ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow[]{\substack{\ell_1 \leftarrow \ell_1 + \ell_3 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 + 2\ell_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Res (cont.)

Assim, (S) é um sistema equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$\mathrm{CS}_{(S)} = \{(1,1,1)\}.$$

(c) O conjunto solução que se obteve através da aplicação do método de Gauss é igual ao que se obteve através da aplicação do método de Gauss-Jordan, como tem que ser. Substituindo os valores encontrados para as incógnitas no sistema dado, tem-se $1+1-1=1$, $-1+1-1=-1$ e $1+2\times 1=3$, o que permite concluir que o conjunto solução encontrado está correto.

Exe 3.20

Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e o vetor dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Determine $\mathrm{CS}_{(S)}$ através do método de Gauss.

(b) Determine $\mathrm{CS}_{(S)}$ através do método de Gauss-Jordan.

(c) Comente os resultados obtidos nas duas alíneas anteriores.

Res

(a) .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|b) = 2 < n = 3$ (n é o número de incógnitas), (S) é um sistema possível e indeterminado equivalente ao sistema de equações lineares

Res (cont.)

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & & & = & 1. \end{array}\right.$$

Sendo z uma variável livre, tem-se

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - (-1) - \alpha = 2 - \alpha \\ y = -1 \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

ou seja,

$$\mathrm{CS}_{(S)} = \{(2 - \alpha, -1, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Res (cont.)

(b) Tendo em consideração a alínea anterior, onde já se determinou uma matriz em escada equivalente à matriz ampliada do sistema e se concluiu que o sistema é possível e indeterminado, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow -\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Assim, (S) é um sistema equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x \qquad + z = 2 \\ \quad y \qquad = -1. \end{cases}$$

Sendo z uma variável livre, tem-se

Res (cont.)

$$\begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = -1 \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ou seja,

$$\mathrm{CS}_{(S)} = \{(2 - \alpha, -1, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

(c) O conjunto solução que se obteve através da aplicação do método de Gauss é igual ao que se obteve através da aplicação do método de Gauss-Jordan, como tem que ser. Substituindo os valores encontrados para as incógnitas no sistema dado, tem-se $(2 - \alpha) + (-1) + \alpha = 1$ e $(2 - \alpha) + \alpha = 2$, o que permite concluir que o conjunto solução encontrado está correto.

Exe 3.21

Considere os seguintes sistemas de equações lineares:

$$(S_1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0. \end{cases} \qquad (S_3)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$(S_2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \qquad (S_4)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Responda às seguintes questões para cada um dos sistemas de equações lineares dados:

(a) identifique a matriz dos coeficientes A, o vetor dos termos independentes b, o vetor das incógnitas x e a matriz ampliada $A|b$.

(b) classifique o sistema quanto ao número de soluções e determine o seu conjunto solução.

(c) classifique o sistema homogéneo associado quanto ao número de soluções e determine o seu conjunto solução.

Exe 3.22

Resolva os seguintes sistemas de equações lineares através do método de Gauss e de Gauss-Jordan:

$$(S_1)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ \phantom{x_1 +{}} 3x_2 = 6. \end{cases}$$

$$(S_2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ \phantom{x_1 +{}} 0x_2 = 2. \end{cases}$$

$$(S_3)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ \phantom{x_1 +{}} 4x_2 + 5x_3 = 23. \end{cases}$$

$$(S_4)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$(S_5)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$(S_6)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Exe 3.22 (cont.)

$$(S_7)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 0\\ 2x & - & y & + & z & - & w & = & 5\\ & & y & & & - & w & = & 0\\ x & & & & & - & w & = & 2. \end{array}\right.$$

$$(S_8)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & 2w & = & 1\\ 2x & - & y & + & z & - & w & = & -1\\ & & y & & & + & 3w & = & 1\\ 2x & - & 2y & + & 2z & - & w & = & -2. \end{array}\right.$$

Exe 3.23

Dê exemplos de sistemas de m equações lineares a n incógnitas possíveis e determinados, possíveis e indeterminados e impossíveis para $m > n$, $m = n$ e $m < n$, sempre que tal seja possível.

Res

	$m > n$	$m = n$	$m < n$
PD	$m = 2, n = 1$ $\begin{cases} x = 1 \\ 2x = 2 \end{cases}$	$m = 1, n = 1$ $\begin{cases} x = 1 \end{cases}$	—
PI	$m = 3, n = 2$ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$	$m = 2, n = 2$ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$	$m = 1, n = 2$ $\begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$
Imp	$m = 2, n = 1$ $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$	$m = 2, n = 2$ $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$	$m = 2, n = 3$ $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

Exe 3.24

Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \end{bmatrix}$. Então:

A $CS_{(S)} = \{(4 - 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

B $CS_{(S)} = \{(4, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

C $CS_{(S)} = \{(2, 1)\}$.

D $CS_{(S)} = \{(\alpha, 4 - \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Exe 3.25

Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Então:

A $CS_{(S)} = \{(2, -4, 0)\}$.

B $CS_{(S)} = \{(2 - \alpha, -4, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

C $CS_{(S)} = \emptyset$.

D $CS_{(S)} = \{(2, -4, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Exe 3.26

Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e o vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Então, a resolução de (S) através do Método de Gauss-Jordan envolve:

- A 0 operações elementares do tipo I, 2 do tipo II e 5 do tipo III.
- B 1 operação elementares do tipo I, 2 do tipo II e 6 do tipo III.
- C 0 operações elementares do tipo I, 0 do tipo II e 7 do tipo III.
- D 0 operações elementares do tipo I, 1 do tipo II e 6 do tipo III.

Exe 3.27

Seja (S) o sistema linear $Ax = b$ de n equações a n incógnitas tal que $c(A) = n$. Então:

$\boxed{\text{A}}$ $\#\,\text{CS}_{(S)} = 0$.

$\boxed{\text{B}}$ $\#\,\text{CS}_{(S)} = 1$.

$\boxed{\text{C}}$ $\#\,\text{CS}_{(S)} = 2$.

$\boxed{\text{D}}$ $\#\,\text{CS}_{(S)} = \infty$.

Exe 3.28

Considere as seguintes proposições:

- Um sistema homogéneo é sempre possível.
- Um sistema com 5 equações e 10 incógnitas pode ser possível e determinado.

A São ambas verdadeiras.

B São ambas falsas.

C Apenas a primeira é verdadeira.

D Apenas a segunda é verdadeira.

Exe 3.29

Discuta o seguinte sistema de equações lineares em função dos parâmetros reais α e β:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = \beta \\ 2x_1 + (\alpha+2)x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ (\alpha+1)x_1 + 2x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Res

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & \beta \\ 2 & \alpha+2 & 2 & -1 & 0 \\ \alpha+1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - (\alpha+1)\ell_1}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & -1-\alpha & \alpha & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \frac{\alpha}{2}\ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + \frac{1-\alpha}{2}\ell_2}]{}$$

Res (cont.)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & \frac{\alpha\beta}{2} \\ 0 & 0 & -1-\alpha & 1 & \frac{(1-\alpha)\beta}{2} \end{array}\right] \xleftrightarrow{\quad\quad\quad\quad} \quad \ell_3 \leftrightarrow \ell_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & -1-\alpha & 1 & \frac{(1-\alpha)\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & \frac{\alpha\beta}{2} \end{array}\right]$$

Res (cont.)

$\alpha = -1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{2} \end{array}\right]$$

- $\alpha \neq -1$: $\text{car}(A) = 4$, $\text{car}(A|b) = 4$ e $n = 4$ (número de incógnitas) — $\text{car}(A) = \text{car}(A|b) = n$ —, pelo que o sistema é possível e determinado.
- $\alpha = -1$ e $\beta = 0$: $\text{car}(A) = 3$, $\text{car}(A|b) = 3$ e $n = 4$ (número de incógnitas) — $\text{car}(A) = \text{car}(A|b) < n$ —, pelo que o sistema é possível e indeterminado.
- $\alpha = -1$ e $\beta \neq 0$: $\text{car}(A) = 3$ e $\text{car}(A|b) = 4$ — $\text{car}(A) < \text{car}(A|b)$ —, pelo que o sistema é impossível.

Exe 3.30

Discuta os seguintes sistemas de equações lineares $Ax = b$ em função dos respetivos parâmetros reais:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & k & -1 \\ 1 & 2 & k \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & c \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{bmatrix}$.

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & \beta \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Exe 3.31

Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & k_1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $k_1 \in \mathbb{R}$, e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ k_2 \end{bmatrix}$, $k_2 \in \mathbb{R}$. Então:

A se $k_1 \in [0,1]$ e $k_2 \in [0,1]$ o sistema (S) é impossível.

B se $k_1 \in [1,3]$ e $k_2 \in [1,2]$ o sistema (S) é possível e indeterminado.

C se $k_1 \in [1,2]$ e $k_2 \in [2,3]$ o sistema (S) é possível e determinado.

D se $k_1 \in [0,1]$ e $k_2 \in [0,1]$ o sistema (S) é possível e indeterminado.

Exe 3.32

Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & s & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$, e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ t+\frac{5}{2} \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Então:

A se $s \in [1,2]$ e $t \in [2,4]$ o sistema (S) possível e determinado.

B se $s = 4$ e $t = -2$ o sistema (S) é impossível.

C se $s \in [1,2]$ e $t = -2$ o sistema (S) é possível e determinado.

D se $s \in [1,2]$ e $t \in [1,2]$ o sistema (S) é possível e indeterminado.

Exe 3.33

Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & \alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e cujo vetor dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Então, (S) é um sistema possível e determinado se e só se:

- **A** $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$.
- **B** $\alpha = \sqrt{2}$.
- **C** $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.
- **D** $\alpha = \sqrt{2} \vee \alpha = -\sqrt{2}$.

Exe 3.34

Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_1-1 \end{bmatrix}$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2k_2+k_1 \end{bmatrix}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Então:

- $\boxed{\text{A}}$ se $k_1 = 1$, o sistema (S) é possível e determinado.
- $\boxed{\text{B}}$ se $2k_2 + k_1 = 0$, o sistema (S) é possível e indeterminado.
- $\boxed{\text{C}}$ se $k_1 \in [3, 4]$ e $k_2 = 1$, o sistema (S) é impossível.
- $\boxed{\text{D}}$ se $k_1 = 1$ e $k_2 \in [3, 4]$, o sistema (S) é impossível.

Teo 3.35

(Regra de Cramer) Seja $Ax = b$ um sistema de n equações lineares com n incógnitas possível e determinado. Então, $x = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)\, b$, ou seja, $x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}, i = 1, \ldots, n$, em que Δ_i é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A, na qual se substitui a i-ésima coluna pelo vetor dos termos independentes, b.

Obs 3.36

(a) Seja (S) um sistema de n equações lineares com n incógnitas cuja matriz dos coeficientes é A. Então, (S) é PD sse $\det(A) \neq 0$.

(b) Seja (S) um sistema de m equações lineares com n incógnitas cuja matriz dos coeficientes é A. Então, pode-se obter o seu conjunto solução através da Regra de Cramer se $m = n$ e (S) é PD, ou seja, se A é uma matriz quadrada e $\det(A) \neq 0$.

Exe 3.37

Seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre, sem o resolver, que (S) é um sistema possível e determinado.

(b) Determine o conjunto solução de (S) através da Regra de Cramer.

Res

(a) Como $\det(A) = 1 \times 6 - 2 \times (-3) = 12 \neq 0$, $\operatorname{car}(A) = 2$, $\operatorname{car}(A|b) = 2$ e $n = 2$ (número de incógnitas) — $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|b) = n$ —, pelo que (S) é um sistema possível e determinado.

(b) Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ o vetor das incógnitas de (S). Então:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{5}{12}, \quad \mathrm{CS}_{(S)} = \left\{\left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{12}\right)\right\}.$$

Exe 3.38

Considere o sistema de equações lineares (S) cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ e o vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre, sem o resolver, que o sistema de equações lineares dado é possível e determinado.

(b) Resolva o sistema de equações lineares dado através da Regra de Cramer.

Exe 3.39

Considere o sistema de equações lineares (S) cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ e o vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre, sem o resolver, que o sistema de equações lineares dado é possível e determinado.

(b) Resolva o sistema de equações lineares dado através da Regra de Cramer.

Teo 3.40

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, A é uma matriz invertível se e só se $\mathrm{car}(A) = n$.

Exe 3.41

Indique quais das seguintes matrizes são invertíveis:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(f) $F = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Exe 3.42

Determine, por dois processos distintos, para que valores de α a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ é invertível.

Exe 3.43

Seja (S) o sistema de equações lineares dado por

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2ax_2 & + & 2ax_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & b \end{array}\right. , a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Discuta (S) em função de dos parâmetros a e b.

(b) Resolva (S) através da Regra de Cramer para $a = 2$ e $b = 1$.

Exe 3.44

Seja (S) o sistema de equações lineares dado por

$$\begin{cases} x \quad - 2z = 1 \\ \quad y - bz = 1 \\ ax \quad - z = 2a \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Discuta (S) em função dos parâmetros a e b.

(b) Seja (S') o sistema homogéneo associado a (S) para $a = \frac{1}{2}$ e $b = 1$. Resolva-o.

Exe 3.45

Determine a equação da parábola que passa nos pontos $(1, 2)$, $(-1, 6)$ e $(2, 3)$.

Exe 3.46

Seja (S) o sistema não linear com incógnitas reais α, β e γ dado por

$$\begin{cases} 2\operatorname{sen}\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\operatorname{sen}\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 10 \\ 6\operatorname{sen}\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9. \end{cases}$$

Mostre que, neste caso, é possível concluir que (S) é impossível recorrendo ao método de Gauss.

Exe 3.47

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule A^{-1}.

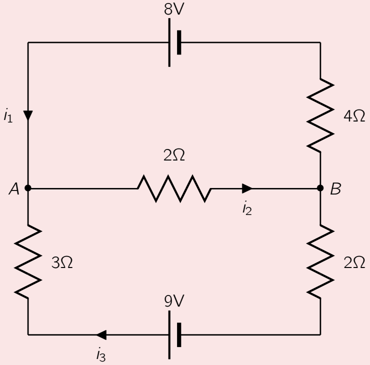
(b) Mostre que o sistema $Ax = b$ é possível e determinado, qualquer que seja o vetor dos termos independentes $b \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

(c) Usando a alínea (a), resolva o sistema $Ax = b$, em que $b = [b_i] \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, $b_i = i$.

Obs 3.48

Nesta observação vai-se apresentar uma aplicação de Circuitos elétricos envolvendo os conceitos introduzidos neste capítulo por forma a determinar a corrente em cada trecho de um circuito elétrico através das *leis de Kirchhoff*.

Considere o seguinte circuito elétrico:



Obs 3.48 (cont.)

A bateria, medida em volt (V), gera uma carga que produz uma corrente. A corrente sai da bateria do lado que contém a reta vertical mais longa. As resistências são medidas em ohm (Ω). As letras maiúsculas representam os nós do circuito elétrico. A letra i representa a corrente entre os nós e as setas indicam o sentido de fluxo, mas se i for negativa, então a corrente flui no sentido oposto ao indicado. As correntes são medidas em ampere.

Para determinar as correntes, recorre-se às *leis de Kirchhoff*:

(a) Em cada nó, a soma das correntes que entram é igual à soma das correntes que saem.

(b) Em cada ciclo fechado, a diferença de potencial é zero.

Obs 3.48 (cont.)

A diferença de potencial elétrico U em cada resistor é dada pela *lei de Ohm*:

$$U = iR,$$

onde i representa a corrente em ampere e R a resistência em ohm. Determine-se, agora, as correntes do circuito elétrico considerado. Da primeira *lei de Kirchhoff* obtém-se

$$\begin{array}{rcrcrcl} i_1 & - & i_2 & + & i_3 & = & 0 \qquad (\text{nó } A) \\ -i_1 & + & i_2 & - & i_3 & = & 0 \qquad (\text{nó } B) \end{array}$$

Da segunda *lei de Kirchhoff* resulta que

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4i_1 & + & 2i_2 & & & = & 8 \qquad (\text{ciclo superior}) \\ & & 2i_2 & + & 5i_3 & = & 9 \qquad (\text{ciclo inferior}) \end{array}$$

Obs 3.48 (cont.)

Pode-se representar o circuito elétrico usando a seguinte matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right].$$

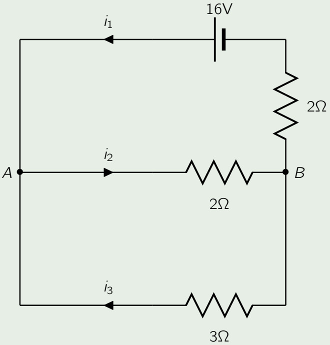
Esta matriz pode ser reduzida à forma escada da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Resolvendo por substituição de trás para a frente, obtém-se $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ e $i_3 = 1$.

Exe 3.49

Determine a corrente em cada um dos trechos do seguinte circuito elétrico:



Obs 3.50

Some english vocabulary regarding Linear Systems of Equations

- sistema de equações lineares/linear system of equations
- matriz dos coeficientes/coefficient matrix
- vetor dos termos independentes/right hand side vector
- vetor das incógnitas/unknown vector
- matriz aumentada ou matriz ampliada/augmented matrix
- conjunto solução/solution set
- sistema homogéneo/homogeneous system
- sistema possível/consistent linear system
- sistema possível e determinado/independent linear system
- sistema possível e indeterminado/dependent linear system
- sistema impossível/inconsistent linear system
- característica de uma matriz/rank of a matrix

Sol 3.21

(S_1) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $A|b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) PD. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(1,1,1)\}$.

(c) PD. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(0,0,0)\}$.

(S_2) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $A|b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(2-t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

(c) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(-t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

(S_3) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $A|b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Imp. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \emptyset$.

(c) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(-s, s, 0) : s \in \mathbb{R}\}$.

(S_4) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $A|b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(1+s-t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

(c) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(s-t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Sol 3.22

(S_1) sistema PD com $\mathrm{CS}_{(S_1)} = \{(1, 2)\}$.

(S_2) sistema Imp, *i.e.*, $\mathrm{CS}_{(S_2)} = \emptyset$.

(S_3) sistema PI com $\mathrm{CS}_{(S_3)} = \{(\frac{5-\alpha}{2}, \frac{23-5\alpha}{4}, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(S_4) sistema PI com $\mathrm{CS}_{(S_4)} = \{(-s, 1-t, s, t) : t, s \in \mathbb{R}\}$.

(S_5) sistema PI com $\mathrm{CS}_{(S_5)} = \{(0, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(S_6) sistema PI com $\mathrm{CS}_{(S_6)} = \{(-\frac{4}{3}\alpha, 0, \frac{1}{3}\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(S_7) sistema PD com $\mathrm{CS}_{(S_7)} = \{(1, -1, 1, -1)\}$.

(S_8) sistema PD com $\mathrm{CS}_{(S_8)} = \{(0, 1, 0, 0)\}$.

Sol 3.24

A.

Sol 3.25

B.

Sol 3.26

A.

Sol 3.27

B.

Sol 3.28

C.

Sol 3.30

(a) PD: $\alpha \neq 3$. PI: $\alpha = 3$. Imp: nunca.

(b) PD: $k \neq 2 \wedge k \neq -5$. PI: $k = 2$. Imp: $k = -5$.

(c) PD: nunca. PI: $c \neq 3 \vee t = 3$. Imp: $c = 3 \wedge t \neq 3$.

(d) PD: nunca. PI: $a \neq -1 \vee t = -1$. Imp: $a = -1 \wedge t \neq -1$.

(e) PD: $\beta \neq -2$. PI: nunca. Imp: $\beta = -2$.

(f) PD: $\gamma \neq 2$. PI: $\gamma = 2$. Imp: nunca.

Sol 3.31

D.

Sol 3.32

D.

Sol 3.33

C.

Sol 3.34

D.

Sol 3.38

(b) $\text{CS}_{(S)} = \{(-\frac{13}{29}, -\frac{1}{29})\}$.

Sol 3.39

(b) $\text{CS}_{(S)} = \{(1, 2, 3)\}$.

Sol 3.42

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Sol 3.41

A, C, D e E.

Sol 3.43

(a) $a = 1$ e $b = 1$: sistema PI. $a = 1$ e $b \neq 1$: sistema Imp. $a \neq 1$ e $a \neq \frac{1}{2}$ e $b \in \mathbb{R}$: sistema PD. $a = \frac{1}{2}$ e $b \in \mathbb{R}$: sistema PI.

(b) $\mathrm{CS}_{(S)} = \{(1, 0, 0)\}$.

Sol 3.44

(a) Para $a = \frac{1}{2}$ o sistema é Imp. Para $a \neq \frac{1}{2}$ o sistema é PD.

(b) $\mathrm{CS}_{(S')} = \{(2\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Sol 3.45

$x^2 - 2x + 3$.

Sol 3.47

(a) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathsf{CS}_{Ax=b} = \{(0,1,2)\}$.

Sol 3.49

$i_1 = 5\text{A}$, $i_2 = 3\text{A}$ e $i_3 = -2\text{A}$.

Obs 4.1

Apresenta-se na definição que se segue a generalização da noção de "vetor" entendido como uma entidade com um tamanho, um sentido e uma direcção. O estudo genérico de um espaço vetorial permite-nos estabelecer propriedades válidas para um conjunto alargado de entidades matemáticas.

Def 4.2

⟦espaço vetorial⟧ Sejam V um conjunto não vazio e as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (x,y) & \longmapsto & x \oplus y, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \odot : & \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ & (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha \odot x. \end{array}$$

Diz-se que o sêxtuplo $(V, \oplus, \odot, \mathbb{R}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial se:

(a) $\forall x, y \in V\ [x \oplus y = y \oplus x]$.

(b) $\forall x, y, z \in V\ [(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)]$.

(c) $\exists^1$ elemento de V (representado por 0_V), $\forall x \in V\ [x \oplus 0_V = x]$.

(d) $\forall x \in V, \exists^1$ elemento de V (representado por $-x$) $[x \oplus (-x) = 0_V]$.

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V\ [\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y]$.

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V\ [(\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x]$.

(g) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V\ [(\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)]$.

(h) $\forall x \in V\ [1 \odot x = x]$.

Def 4.3

Seja o espaço vetorial definido por $(V, \oplus, \odot, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

(a) $[\![$escalar$]\!]$ Chama-se escalares aos elementos de $\mathbb{R}$.

(b) $[\![$vetor$]\!]$ Chama-se vetores aos elementos de V.

(c) $[\![$soma de vetores$]\!]$ Chama-se soma de vetores à operação $\oplus$.

(d) $[\![$multiplicação de um escalar por um vetor$]\!]$ Chama-se multiplicação de um escalar por um vetor à operação $\odot$.

Obs 4.4

(a) Para simplificar a linguagem, em vez de "seja o espaço vetorial definido por $(V, \oplus, \odot, \mathbb{R}, +, \cdot)$" diz-se " seja V um espaço vetorial" quando as operações de soma de vetores e de multiplicação de um escalar por um vetor estiverem subentendidas.

(b) Se não causar confusão, em vez de $x \oplus y$ escreve-se $x + y$, em vez de $x \oplus (-y)$ escreve-se $x - y$ e em vez de $\alpha \odot x$ escreve-se αx.

Def 4.5

⟦$\mathbb{R}^n$⟧ Seja $n \in \mathbb{N}$. Representa-se por $\mathbb{R}^n$ o conjunto dos n-tuplos com elementos em $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\mathbb{R}^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

As operações usuais neste conjunto de soma e multiplicação por um escalar, são dadas, respetivamente, por:

(i) $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.

(ii) $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

Teo 4.6

$\mathbb{R}^n$ com as operações usuais é um espaço vetorial.

Obs 4.7

Considera-se neste curso apenas espaços vetoriais que são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Teo 4.8

Seja V um espaço vetorial. Então:

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\, [\alpha 0_V = 0_V]$.

(b) $\forall x \in V\, [0x = 0_V]$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V\, [-(\alpha x) = (-\alpha)x]$.

(d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V\, [(-\alpha)(-x) = \alpha x]$.

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V\, [\alpha x = 0_V \rightarrow (\alpha = 0 \vee x = 0_V)]$.

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V \setminus \{0_V\}\, [\alpha x = \beta x \rightarrow \alpha = \beta]$.

(g) $\forall x, x_1, x_2 \in V\, [x_1 + x = x_2 \rightarrow x = x_2 - x_1]$.

(h) $\forall x, x_1, x_2 \in V\, [x + x_1 = x + x_2 \rightarrow x_1 = x_2]$.

Def 4.9

⟦subespaço⟧ Sejam o espaço vetorial $(V, \oplus, \odot, \mathbb{R}, +, \cdot)$ e F um subconjunto não-vazio de V. Diz-se que F é um subespaço de V se $(F, \oplus, \odot, \mathbb{R}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial.

Teo 4.10

Sejam V um espaço vetorial e $F \subseteq V$. Então, F é um subespaço de V se e só se:

(i) $0_V \in F$.

(ii) $\forall x, y \in F \; [x + y \in F]$.

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in F \; [\alpha x \in F]$.

Obs 4.11

Note-se que o teorema Teo 4.10 é um processo mais prático de verificar se um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço do que a definição Def 4.9.

Exe 4.12

Mostre que $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Res

Sendo $F \subset \mathbb{R}^2$, verifiquem-se as três propriedades do teorema Teo 4.10:

(i) $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$, pelo que a propriedade (i) é válida.

(ii) sejam $x = (x_1, 0), y = (y_1, 0) \in F$. Então,
$x + y = (x_1, 0) + (y_1, 0) = (x_1 + y_1, 0) \in F$, pelo que a propriedade (ii) é válida.

(iii) sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, 0) \in F$. Então,
$\alpha x = \alpha(x_1, 0) = (\alpha x_1, 0) \in F$, pelo que a propriedade (iii) é válida.

Conclui-se, assim, que F é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Teo 4.13

Seja V um espaço vetorial. Então:

(a) $\{0_V\}$ é um subespaço de V.

(b) V é um subespaço de V.

Exe 4.14

Mostre que:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(0, x, 2x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Exe 4.15

Mostre que $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 1\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Res (cont.)

Para resolver este exercício basta identificar uma das condições do teorema $\boxed{\text{Teo 4.10}}$ que não é satisfeita. No entanto, e por questões didáticas, vão-se verificar as três condições.
Sendo $G \subset \mathbb{R}^2$, verifiquem-se as três propriedades do teorema $\boxed{\text{Teo 4.10}}$:

(i) $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \notin G$, pelo que a propriedade (i) não é válida.

(ii) Sejam, por exemplo, $x = (2, 1), y = (3, 1) \in G$. Então, $x + y = (2, 1) + (3, 1) = (5, 2) \notin G$, pelo que a propriedade (ii) não é válida.

(iii) Sejam, por exemplo, $\alpha = 2$ e $x = (3, 1) \in G$. Então, $\alpha x = 2(3, 1) = (6, 2) \notin G$, pelo que a propriedade (iii) não é válida.

Como as propriedades (i), (ii) e (iii) do teorema $\boxed{\text{Teo 4.10}}$ não são satisfeitas, conclui-se que o conjunto G não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ (volta-se a frisar que basta uma propriedade do teorema $\boxed{\text{Teo 4.10}}$ não se verificar para se concluir que não se está perante um subespaço).

Exe 4.16

Mostre que:

(a) $\{(x, x+1) : x \in \mathbb{R}\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(b) $\{(x, y^2) : x, y \in \mathbb{R}\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(c) $\{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(d) $\{(1, 0, 0, 0)\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(e) $\{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Teo 4.17

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, $\mathrm{CS}_{(Ax=\underline{0})}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Dem

Para mostrar que $\mathrm{CS}_{(Ax=\underline{0})} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, aplique-se o teorema $\boxed{\text{Teo 4.10}}$ (no que se segue identifica-se $\mathbb{R}^n$ com $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$):

(a) como $A0_{n\times 1} = \underline{0}$, tem-se que $0_{\mathbb{R}^n} = 0_{n\times 1} \in \mathrm{CS}_{(Ax=\underline{0})}$, pelo que a propriedade (a) é válida.

(b) sejam $x_1, x_2 \in \mathrm{CS}_{(Ax=\underline{0})}$. Então, como $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$, tem-se que $x_1 + x_2 \in \mathrm{CS}_{(Ax=\underline{0})}$, pelo que a propriedade (b) é válida.

(c) sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathrm{CS}_{(Ax=\underline{0})}$. Então, como $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\underline{0} = \underline{0}$, tem-se que $\alpha x \in \mathrm{CS}_{(Ax=\underline{0})}$, pelo que a propriedade (c) é válida.

Assim, conclui-se que $\mathrm{CS}_{(Ax=\underline{0})}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exe 4.18

Indique qual das seguintes proposições é verdadeira:

$\boxed{\text{A}}$ $\{(0,0,a^2) : a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{B}}$ $\{(1,1,1)\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{C}}$ $\{(a,0,a) : a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{D}}$ $\{(a,1,a) : a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Exe 4.19

Indique qual das seguintes proposições é verdadeira:

$\boxed{\text{A}}$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 - y\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{B}}$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{C}}$ $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{D}}$ $\{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Def 4.20

⟦combinação linear⟧ Sejam V um espaço vetorial, $x \in V$, $k \in \mathbb{N}$ e $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq V$. Diz-se que x é uma combinação linear dos elementos de X se

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\, [x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k].$$

Obs 4.21

Sejam V um espaço vetorial, $x \in V$, $k \in \mathbb{N}$ e $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq V$. Diz-se que x é uma combinação linear dos elementos de X se o sistema linear

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = x$$

é possível.

Exe 4.22

Sejam $x = (1, 4), x_1 = (1, 2), x_2 = (1, 1)$ e $x_3 = (2, 2)$.

(a) Mostre que $x = (1, 4)$ é uma combinação linear de $x_1 = (1, 2)$ e $x_2 = (1, 1)$ e escreva x como combinação linear de x_1 e de x_2.

(b) Mostre que $x = (1, 4)$ é uma combinação linear de $x_1 = (1, 2)$, $x_2 = (1, 1)$ e $x_3 = (2, 2)$ e escreva x como combinação linear de x_1, de x_2 e de x_3 de duas maneiras.

(c) Mostre que $x = (1, 4)$ não é uma combinação linear de $x_2 = (1, 1)$ e $x_3 = (2, 2)$.

Res

(a) Mostrar que $x = (1, 4)$ é uma combinação linear de $x_1 = (1, 2)$ e $x_2 = (1, 1)$ é, por definição, mostrar que

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, [x = \alpha x_1 + \beta x_2],$$

i.e., que é possível o sistema de equações lineares (S_a) dado por

Res (cont.)

$$(1,4) = \alpha(1,2) + \beta(1,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 1 \\ 2\alpha & + & \beta & = & 4. \end{array} \right.$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cr|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz ampliada, pelo que o sistema (S_a) é possível, concluindo-se que x é uma combinação linear de x_1 e x_2. Para escrever x como combinação linear de x_1 e x_2, resolve-se o sistema (S_a), tendo-se

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \alpha & = & 3 \\ \beta & = & -2, \end{array} \right.$$

vindo

$$x = 3x_1 - 2x_2.$$

Res (cont.)

(b) Mostrar que $x = (1,4)$ é uma combinação linear de $x_1 = (1,2)$, $x_2 = (1,1)$ e $x_3 = (2,2)$ é, por definição, mostrar que

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\, [x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3],$$

i.e., que é possível o sistema de equações lineares (S_b) dado por

$$(1,4) = \alpha(1,2) + \beta(1,1) + \gamma(2,2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = 4. \end{cases}$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Res (cont.)

a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz ampliada, pelo que o sistema (S_b) é possível, concluindo-se que x é uma combinação linear de x_1, x_2 e x_3. Para escrever x como combinação linear de x_1, x_2 e x_3, resolve-se o sistema (S_b), tendo-se

$$\begin{cases} \alpha &= 3 \\ \beta &= -2-2a \\ \gamma &= a \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

vindo

$$x = 3x_1 + (-2-2a)x_2 + ax_3, a \in \mathbb{R}.$$

Assim, considerando, por exemplo, $a = 0$ e $a = 1$, tem-se

$$x = 3x_1 - 2x_2,$$

$$x = 3x_1 - 4x_2 + x_3.$$

Res (cont.)

(c) Mostrar que $x = (1,4)$ não é uma combinação linear de $x_2 = (1,1)$ e $x_3 = (2,2)$ é equivalente a mostrar que é impossível o sistema de equações lineares (S_c) dado por

$$(1,4) = \alpha(1,1) + \beta(2,2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha & + & 2\beta & = & 1 \\ \alpha & + & 2\beta & = & 4. \end{array} \right.$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

a característica da matriz dos coeficientes é menor do que a característica da matriz ampliada, o sistema (S_c) é impossível, concluindo-se que x não é uma combinação linear de x_2 e x_3.

Exe 4.23

Escreva, se possível, o vetor $v = (3,3) \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear dos seguintes vetores de $\mathbb{R}^2$, e interprete geometricamente os resultados obtidos:

(a) $v_1 = (1,1)$.

(b) $v_1 = (1,2)$.

(c) $v_1 = (1,2), v_2 = (4,2)$.

(d) $v_1 = (1,1), v_2 = (2,2)$.

(e) $v_1 = (1,-1), v_2 = (-1,1)$.

(f) $v_1 = (1,-1), v_2 = (0,1), v_3 = (2,0)$.

Exe 4.24

Sejam $u = (1, 2, -4)$, $v = (2, 5, -6)$, $w = (1, -1, -10)$, $r = (1, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Escreva o vetor w como combinação linear de u e v.

(b) Indique para que valores de α o vetor r é uma combinação linear de u e v.

Exe 4.25

Indique qual das seguintes proposições é verdadeira:

$\boxed{\text{A}}$ $(1, 0, 0) \in \langle (1, 0), (0, 0) \rangle$.

$\boxed{\text{B}}$ $(1, 0, 0) \in \langle (2, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle$.

$\boxed{\text{C}}$ $(1, 0, 0) \in \langle (1, 2, 3), (2, 4, 6) \rangle$.

$\boxed{\text{D}}$ $(1, 0, 0) \in \langle (0, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle$.

Def 4.26

⟦espaço gerado, $L(X)$, $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$⟧ Sejam V um espaço vetorial e $X = \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq V$. Chama-se espaço gerado pelo conjunto X, que se representa por $L(X)$ ou por $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$, ao conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de X, ou seja,

$$L(X) \equiv \langle x_1, \ldots, x_r \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r : \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}\}.$$

Exe 4.27

Sejam $a = (-1, 2, -3)$, $b = (3, 4, 2)$, $c = (1, 8, -4)$, $d = (-9, -2, 5) \in \mathbb{R}^3$. Mostre que $c \in \langle a, b \rangle$ e $d \notin \langle a, b \rangle$.

Teo 4.28

Sejam V um espaço vetorial e $X = \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq U \subseteq V$. Então:

(a) $L(X)$ é um subespaço de V.

(b) se U é um subespaço de V, então $L(X) \subseteq U$.

Obs 4.29

Sejam V um espaço vetorial e $X = \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq V$. Então:

(a) chama-se "espaço gerado" ao conjunto $L(X)$ devido à alínea (a) do teorema anterior.

(b) $L(X)$ é o "menor" subespaço de V que contém X no sentido da alínea (b) do teorema anterior.

Def 4.30

⟦conjunto gerador⟧ Sejam V um espaço vetorial e $X = \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq V$. Diz-se que X é um conjunto gerador de V se $V = L(X)$.

Obs 4.31

Sejam V um espaço vetorial e $X = \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq V$. Então, X é um conjunto gerador de V se

$$\forall x \in V, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}\, [x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r],$$

i.e., se o sistema de equações lineares

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r = x$$

é possível qualquer que seja $x \in V$.

Exe 4.32

(a) Verifique se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0) \rangle$.

(b) Verifique se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0), (3,4) \rangle$.

(c) Verifique se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0), (3,4), (0,1) \rangle$.

Res

(a) Verificar se $\mathbb{R}^2 = \langle(2,0)\rangle$ é equivalente a verificar se, qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, é possível o sistema de equações lineares (S_1) dado por

$$(x_1, x_2) = \alpha(2,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha & = & x_1 \\ 0\alpha & = & x_2. \end{array} \right.$$

Então, como a representação matricial do sistema (S_1) é

$$\left[\begin{array}{c|c} 2 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{array} \right]$$

que já está em escada, a característica da matriz dos coeficientes é menor do que a característica da matriz ampliada se $x_2 \neq 0$, pelo que o sistema (S_1) nem sempre é possível, concluindo-se que $\mathbb{R}^2 \neq \langle(2,0)\rangle$, *i.e.*, $\{(2,0)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$.

Res (cont.)

(b) Verificar se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0),(3,4) \rangle$ é equivalente a verificar se, qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, é possível o sistema de equações lineares (S_2) dado por

$$(x_1, x_2) = \alpha(2,0) + \beta(3,4) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} 2\alpha & + & 3\beta & = & x_1 \\ 0\alpha & + & 4\beta & = & x_2. \end{array} \right.$$

Então, como a representação matricial do sistema (S_2) é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 4 & x_2 \end{array} \right]$$

que já está em escada, a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz ampliada qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, pelo que o sistema (S_2) é sempre possível, concluindo-se que $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0),(3,4) \rangle$, *i.e.*, $\{(2{,}0),(3{,}4)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$.

Res (cont.)

(c) Verificar se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0),(3,4),(0,1)\rangle$ é equivalente a verificar se, qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, é possível o sistema de equações lineares (S_3) dado por

$$(x_1, x_2) = \alpha(2,0) + \beta(3,4) + \gamma(0,1) \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2\alpha & + & 3\beta & + & 0\gamma & = & x_1 \\ 0\alpha & + & 4\beta & + & \gamma & = & x_2. \end{array}\right.$$

Então, como a representação matricial do sistema (S_3) é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & x_1 \\ 0 & 4 & 1 & x_2 \end{array}\right]$$

que já está em escada, a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz ampliada qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, pelo que o sistema (S_3) é sempre possível, concluindo-se que $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0),(3,4),(0,1)\rangle$, *i.e.*, $\{(2,0),(3,4),(0,1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$.

Exe 4.33

Indique quais dos seguintes conjuntos de vetores são conjuntos geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(1,0),(0,1)\}$$
$$B = \{(1,2),(-1,0)\}$$
$$C = \{(1,0),(0,1),(1,3)\}$$
$$D = \{(1,2)\}$$
$$E = \{(1,2),(2,4),(-1,-2)\}$$
$$F = \{(1,-1),(-2,2)\}$$

Exe 4.34

Seja $X = \{(1,0,\alpha),(\alpha,\beta,\beta),(1,0,0),(0,0,1)\}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. X é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ para que valores de α e β?

Obs 4.35

(a) Conjuntos geradores distintos podem gerar o mesmo espaço vetorial.

(b) O teorema que se segue indica-nos um processo para "simplificar" conjuntos geradores de subespaços de $\mathbb{R}^n$ através da eliminação de elementos redundantes.

Teo 4.36

Sejam V um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ um conjunto gerador de V. Seja, ainda, $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{R})$, com a_{ij} a i-ésima componente de x_j. Então, $X' = \{x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}\}$, em que $c_{k_1}, \ldots, c_{k_p}$ são os colunas pivô de $B \in fe(A)$, também é um conjunto gerador de V.

Exe 4.37

Indique um conjunto gerador de $V = \langle (0,0),(1,-2),(-2,4)\rangle$ com o número mínimo de elementos.

Res

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Então, como

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 + 2\ell_1]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B \in fe(A),$$

c_2 é a única coluna de pivô de B, pelo que $X' = \{(1,-2)\}$ é um conjunto gerador de V com o número mínimo de elementos.

Exe 4.38

Indique o número mínimo de vetores geradores de $V = \langle (1,3,2),(1,0,2),(0,1,0),(2,2,4)\rangle$.

Def 4.39

Sejam V um espaço vetorial e $X = \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq V$.

(a) ⟦conjunto linearmente independente⟧ Diz-se que X é um conjunto linearmente independente se

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}\, [\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r = 0_V \to \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0].$$

(b) ⟦vetores linearmente independentes⟧ Se X é um conjunto linearmente independente, os elementos de X dizem-se vetores linearmente independentes.

(c) ⟦conjunto linearmente dependente⟧ Se X não é um conjunto linearmente independente, diz-se que X é um conjunto linearmente dependente.

(d) ⟦vetores linearmente dependentes⟧ Se X é um conjunto linearmente dependente, os elementos de X dizem-se vetores linearmente dependentes.

Obs 4.40

Sejam V um espaço vetorial e $X = \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq V$. Seja, ainda, (S) o sistema de equações lineares $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r = 0_V$.

(a) (S) é sempre um sistema possível, pois pelo menos admite a solução trivial, ou seja, $(0, \ldots, 0) \in \mathrm{CS}_{(s)}$.

(b) X é um conjunto linearmente independente se (S) é um sistema de equações lineares possível e determinado, *i.e.*, $\mathrm{CS}_{(s)} = \{(0, \ldots, 0)\}$.

(c) X é um conjunto linearmente dependente se (S) é um sistema de equações lineares possível e indeterminado, ou seja, existe pelo menos um $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$, tal que

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r = 0_V$$

(d) Se V é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $r > n$, então (S) é um sistema de equações lineares possível e indeterminado pelo que X é um conjunto linearmente dependente.

Teo 4.41

Sejam V um espaço vetorial e $X = \{x\} \subseteq V$. Então:

(a) X é um conjunto linearmente independente se e só se $x \neq 0_V$.

(b) X é um conjunto linearmente dependente se e só se $x = 0_V$.

Exe 4.42

(a) Indique, justificando, se $X_1 = \{(2,0)\}$ é um conjunto linearmente independente ou linearmente dependente.

(b) Indique, justificando, se $X_2 = \{(2,0),(3,4)\}$ é um conjunto linearmente independente ou linearmente dependente.

(c) Indique, justificando, se $X_3 = \{(2,-1),(-4,2)\}$ é um conjunto linearmente independente ou linearmente dependente.

(d) Indique, justificando, se $X_4 = \{(2,0),(3,4),(0,1)\}$ é um conjunto linearmente independente ou linearmente dependente.

Res

(a) Como $(2,0) \neq (0,0)$, X_1 é um conjunto linearmente independente.

(b) Como

$$\alpha(2,0) + \beta(3,4) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2\alpha & + & 3\beta & = & 0 \\ 0\alpha & + & 4\beta & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0, \\ \beta = 0, \end{array} \right.$$

conclui-se que X_2 é um conjunto linearmente independente.

Res (cont.)

(c) Como

$$\alpha(2,-1)+\beta(-4,2)=(0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\alpha & - & 4\beta & = & 0 \\ -\alpha & + & 2\beta & = & 0, \end{array} \right.$$

vem

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{rr|r} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

pelo que $\mathrm{car}(\left[\begin{smallmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]) = \mathrm{car}(\left[\begin{smallmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right]) = 1 < n = 2$ (n é o número de incógnitas), ou seja, o sistema é possível e indeterminado. Assim, X_3 é um conjunto linearmente dependente.

(d) Como $X_4 \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\#X_4 = 3 > 2$, X_4 é um conjunto linearmente dependente.

Obs 4.43

O seguinte teorema justifica o facto da designação “vetores linearmente independentes” e “vetores linearmente dependentes”.

Teo 4.44

Sejam V um espaço vetorial e $X = \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq V$ com $r \geq 2$. Então:

(a) X é um conjunto linearmente dependente se e só se existe pelo menos um elemento de X que é uma combinação linear dos restantes elementos de X.

(b) X é um conjunto linearmente independente se e só se nenhum dos elementos de X for uma combinação linear dos restantes elementos de X.

Teo 4.45

Sejam V um espaço vetorial e X e X^* subconjuntos de V.

(a) Se X é um conjunto linearmente dependente e $X \subseteq X^*$, então X^* também é um conjunto linearmente dependente.

(b) Se X é um conjunto linearmente independente e $X^* \subseteq X$, então X^* também é um conjunto linearmente independente.

Exe 4.46

Indique quais dos seguintes conjuntos de vetores são conjuntos linearmente independentes:

(a) $A = \{(3,1),(4,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) $B = \{(3,1),(4,-2),(7,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$.

(c) $C = \{(0,-3,1),(2,4,1),(-2,8,5)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(d) $D = \{(-1,2,0,2),(5,0,1,1),(8,-6,1,-5)\}$ em $\mathbb{R}^4$.

Exe 4.47

Indique para que valores do parâmetro real α, os vetores $a = (1,-2)$ e $b = (\alpha,-1)$ de $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes.

Exe 4.48

Sejam $v_1 = (\alpha_1, \beta_1, 1)$ e $v_2 = (\alpha_2, \beta_2, 0)$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Indique para que valores de α_1, α_2, β_1 e β_2 os vetores v_1 e v_2 serem linearmente independentes.

Exe 4.49

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e um seu subespaço $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2\}$. Determine dois vetores linearmente independentes u e v de X e mostre que qualquer vetor $w \in X$ é uma combinação linear de u e v.

Exe 4.50

Sejam V um espaço vetorial e $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto de vetores de V linearmente independente. Mostre que os seguintes conjuntos também são linearmente independentes:

(a) $\{v_1, v_1 + v_2\}$.

(b) $\{2v_1, v_1 + v_2, -v_1 + v_3\}$.

(c) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$.

Def 4.51

⟦base⟧ Sejam V um espaço vetorial e $B = \{b_1, \dots, b_r\} \subset V$. Diz-se que B é uma base de V se B é um conjunto gerador de V linearmente independente.

Obs 4.52

Sejam V um espaço vetorial e $B = \{b_1, \dots, b_r\} \subset V$. Diz-se que B é uma base de V se o sistema de equações lineares

$$\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_r b_r = x$$

é possível e determinado qualquer que seja $x \in V$.

Exe 4.53

(a) Indique, justificando, se $\{(2,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Indique, justificando, se $\{(2,0),(3,4)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(c) Indique, justificando, se $\{(2,0),(3,4),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Res

(a) Atendendo ao exercício $\boxed{\text{Exe 4.32}}$ (a), $\{(2,0)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$, pelo que também não é uma sua base.

(b) Atendendo aos exercícios $\boxed{\text{Exe 4.32}}$ (b) e $\boxed{\text{Exe 4.42}}$ (b), $\{(2,0),(3,4)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$ linearmente independente, pelo que é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(c) Atendendo ao exercício $\boxed{\text{Exe 4.42}}$ (c), $\{(2,0),(3,4),(0,1)\}$ não é um conjunto linearmente independente, pelo que também não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exe 4.54

Averigue quais dos seguintes conjuntos de vetores são bases de $\mathbb{R}^2$:

(a) $A = \{(1,1),(3,0)\}$.

(b) $B = \{(1,1),(0,2),(2,3)\}$.

(c) $C = \{(1,1),(0,8)\}$.

(d) $D = \{(1,-2),(-2,4)\}$.

Exe 4.55

Indique para que valores de α o conjunto $\{(\alpha,6),(1,\alpha)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exe 4.56

Considere o subespaço $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = z = w\}$ de $\mathbb{R}^4$.
Então:

A $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\}$ é uma base de F.

B $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0)\}$ é uma base de F.

C $\{(1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ é uma base de F.

D $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$ é uma base de F.

Exe 4.57

Indique qual das seguintes proposições é verdadeira:

A $\{(1, 1, 0), (0, 0, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

B $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

C $\{(1, 1), (0, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

D $\{(1, 1), (2, 3)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Def 4.58

⟦base ordenada⟧ Sejam V um espaço vetorial e $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_r) \in V^r$. Diz-se que $\mathcal{B}$ é uma base ordenada de V se $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$ é uma base de V.

Obs 4.59

O objetivo da definição anterior é permitir distinguir entre ordenações diferentes dos seus elementos, situação que não acontece em conjuntos. Faz sentido, agora, a seguinte definição:

Def 4.60

⟦coordenadas de um vetor numa base ordenada⟧ Sejam V um espaço vetorial, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_r)$ uma base ordenada de V, $x \in V$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_r b_r.$$

Chama-se coordenadas do vetor x relativamente à base ordenada $\mathcal{B}$, que se representa por $[x]_{\mathcal{B}}$, a

$$[x]_{\mathcal{B}} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r.$$

Obs 4.61

Como uma base é um conjunto linearmente independente, o sistema linear que é necessário resolver para determinar as coordenadas de um vetor numa base ordenada é sempre possível e determinado, pelo que as coordenadas de um vetor numa base ordenada são únicas.

Exe 4.62

Sejam $x = (0, 2, 3)$ e as base ordenada de $\mathbb{R}^3$ dadas por $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, $\mathcal{B}_2 = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}_3 = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$.

(a) Determine $[x]_{\mathcal{B}_1}$.

(b) Determine $[x]_{\mathcal{B}_2}$.

(c) Determine $[x]_{\mathcal{B}_3}$.

Res

(a) Como $(0, 2, 3) = 0(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$, tem-se que $[x]_{\mathcal{B}_1} = (0, 2, 3)$.

(b) Como $(0, 2, 3) = 2(0, 1, 0) + 0(1, 0, 0) + 3(0, 0, 1)$, tem-se que $[x]_{\mathcal{B}_2} = (2, 0, 3)$.

Res (cont.)

(a) Para responder à questão, tem que se resolver o sistema

$$\alpha(1,1,1)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,0,1)=(0,2,3) \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & & & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\ \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 3. \end{array}\right.$$

Recorra-se, agora, ao método de Gauss:

Res (cont.)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1]{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1} \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_2]{} \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

tendo-se

$$\begin{cases} \alpha = -1, \\ \beta = 3, \\ \gamma = 1, \end{cases}$$

pelo que $(0,2,3) = -(1,1,1) + 3(0,1,1) + (1,0,1)$, ou seja, $[x]_{\mathcal{B}_3} = (-1,3,1)$.

Exe 4.63

Seja $\mathcal{B} = ((1,1,1).(0,1,1).(1,0,1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de $z = (0,1,0)$ na base ordenada $\mathcal{B}$.

Teo 4.64

Sejam V um espaço vetorial e o conjunto $\{x_1, \ldots, x_r\}$ uma base de V. Então, todas as bases de V têm r vetores.

Exe 4.65

Sejam $z = (0,1,0)$ e $\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,1,1),(1,0,1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Então:

A $[z]_{\mathcal{B}} = (1,-1,0)$.

B $[z]_{\mathcal{B}} = (1,0,-1)$.

C $[z]_{\mathcal{B}} = (1,1,0)$.

D $[z]_{\mathcal{B}} = (1,-1,1)$.

Exe 4.66

Sejam $z = (1, 1, 0)$ e $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Então:

A $[z]_{\mathcal{B}} = (1, 1, 2)$.

B $[z]_{\mathcal{B}} = (-1, -1, 2)$.

C $[z]_{\mathcal{B}} = (1, -1, -2)$.

D $[z]_{\mathcal{B}} = (-1, 1, 2)$.

Def 4.67

⟦dimensão de um espaço vetorial de dimensão finita, $\dim(V)$⟧ Seja V um espaço vetorial tal que $V = \{0_V\}$ ou $\{x_1, \ldots, x_r\}$ é uma base de V.

(a) Se $V = \{0_V\}$, diz-se que a dimensão de V é zero, escrevendo-se $\dim(V) = 0$.

(b) Se $\{x_1, \ldots, x_r\}$ é uma base de V, diz-se que a dimensão de V é r, escrevendo-se $\dim(V) = r$.

(c) Diz-se ainda que V é um espaço vetorial de dimensão finita.

Obs 4.68

Note-se que a alínea (b) da definição anterior faz sentido pois o teorema que a precede garante que se $\{x_1, \ldots, x_r\}$ é uma base de V, todas as bases de V têm r elementos.

Teo 4.69

(a) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$ em que

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1),$$
$$f_1 = (-1,1,0), f_2 = (0,1,1), f_3 = (1,1,1),$$

são dois exemplos de bases de $\mathbb{R}^3$ (à primeira chama-se base canónica de $\mathbb{R}^3$).

(b) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Teo 4.70

Sejam V um espaço vetorial tal que $\dim(V) = n$ e B um subconjunto de V com n elementos.

(a) Se B é um conjunto linearmente independente, então B é uma base de V.

(b) Se B é um conjunto gerador de V, então B é uma base de V.

Teo 4.71

Sejam V um espaço vetorial com dimensão finita e X um subespaço de V. Então:

(a) $\dim(X) \leqslant \dim(V)$.

(b) $\dim(X) = \dim(V)$ se e só se $X = V$.

Def 4.72

⟦espaço nulo de uma matriz⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se espaço nulo da matriz A, que se representa por $\mathrm{N}(A)$, ao conjunto solução do sistema homogéneo cuja matriz dos coeficientes é a matriz A, ou seja,

$$\mathrm{N}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{CS}_{(Ax=\underline{0})}\,.$$

Teo 4.73

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então:

(a) $\dim(\langle \ell_{1,A}; \ldots; \ell_{m,A}\rangle) = \mathrm{car}(A)$.

(b) $\dim(\langle c_{1,A}; \ldots; c_{n,A}\rangle) = \mathrm{car}(A)$.

(c) $\dim(\mathrm{N}(A))$ é igual ao número de variáveis livres do sistema $Ax = \underline{0}$.

Obs 4.74

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então:

(a) $\{c_{1,A}, \ldots, c_{n,A}\}$ é um conjunto linearmente dependente se e só se $\det(A) = 0$.

(b) $\{c_{1,A}, \ldots, c_{n,A}\}$ é um conjunto linearmente independente se e só se $\det(A) \neq 0$.

(c) $\{\ell_{1,A}, \ldots, \ell_{n,A}\}$ é um conjunto linearmente dependente se e só se $\det(A) = 0$.

(d) $\{\ell_{1,A}, \ldots, \ell_{n,A}\}$ é um conjunto linearmente independente se e só se $\det(A) \neq 0$.

Exe 4.75

Determine o espaço nulo e a sua dimensão das seguintes matrizes:

(a) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

Res

(a) Seja (S) o sistema $Ax = \underline{0}$, $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$. Então:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

tendo-se

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\mathrm{N}(A) = \{(0,0)\}.$$

Como o sistema (S) não tem variáveis livres, tem-se que $\dim(\mathrm{N}(A)) = 0$.

Res (cont.)

(b) Seja (S) o sistema $Bx = \underline{0}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$. Então:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

tendo-se

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha - \beta, \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R}, \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \beta \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Res (cont.)

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(B) &= \{(-\alpha-\beta,\alpha,0,\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha(-1,1,0,0)+\beta(-1,0,0,1) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(-1,1,0,0),(-1,0,0,1)\rangle. \end{aligned}$$

Como o sistema (S) tem 2 variáveis livres, tem-se que $\dim(\mathrm{N}(B)) = 2$.

Obs 4.76

Seja V um espaço vetorial tal que $\dim(V) = n$. Então:

(a) quaisquer $m > n$ vetores de V são linearmente dependentes.

(b) se C é um conjunto gerador de V, então $\#C \geqslant n$.

(c) se C é um conjunto linearmente independente de V com n vetores, então C é um conjunto gerador de V.

(d) se C é um conjunto gerador de V com n vetores, então C é um conjunto linearmente independente.

(e) se C é um conjunto gerador de V e linearmente independente, então $\#C = n$.

Exe 4.77

Seja $X = \{(a, 0, a) : a \in \mathbb{R}\}$. Então, X é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ em que:

A $\dim(X) = 0$.

B $\dim(X) = 1$.

C $\dim(X) = 2$.

D $\dim(X) = 3$.

Exe 4.78

Indique qual das seguintes proposições é verdadeira:

A $\dim(\mathbb{R}^2) + \dim(\mathbb{R}^5) = 2$.

B $\dim(\mathbb{R}^2) + \dim(\mathbb{R}^5) = 5$.

C $\dim(\mathbb{R}^2) + \dim(\mathbb{R}^5) = 7$.

D $\dim(\mathbb{R}^2) + \dim(\mathbb{R}^5) = 14$.

Exe 4.79

Seja $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y - 3z \wedge z = 2w\}$.

(a) Mostre que F é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(b) Determine uma base e a dimensão de F.

Exe 4.80

Seja $F = \{(a + b, a - b + 2c, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que F é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(b) Determine uma base e a dimensão de F.

Exe 4.81

Sejam $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, $u_1 = (0, 2, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0)$ e $u_3 = (-1, 6, 0)$.

(a) Mostre que F é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) Verifique que $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

(c) O conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de F?

(d) Indique a dimensão de F.

Exe 4.82

Sejam V um espaço vetorial, $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B = \{v_1\}$ e $\{v_1, v_2\}$ uma base de V.

(a) A é um conjunto gerador de V?

(b) A é constituído por vetores linearmente independentes?

(c) B é um conjunto gerador de V?

(d) B é constituído por vetores linearmente independentes?

(e) Seja C um subconjunto de V que gera V. Que pode dizer sobre o número de vetores de C?

(f) Seja D um subconjunto de V constituído por vetores linearmente independentes. Que pode dizer sobre o número de vetores de D?

(g) Em que condições é que $E = \{v_1, v_4\}$ é um conjunto gerador de V?

Exe 4.83

Sejam V um espaço vetorial e $u_1, u_2, u_3, u_4 \in V$ tais que $V = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\{u_1, u_2\}$ é um conjunto linearmente independente, $u_3 = 2u_1$ e $u_4 = u_1 + u_2$. Considere, ainda, as seguintes proposições:

P_1: $\{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto linearmente independente.

P_2: $\{u_3\}$ é um conjunto linearmente independente.

P_3: $V = \langle u_2, u_3, u_4 \rangle$.

P_4: $\{u_2, u_4\}$ é uma base de V.

P_5: $\dim(V) = 3$.

Indique, justificando, as proposições verdadeiras.

Exe 4.84

Sejam $\{v_1, v_2\}$ uma base do espaço vetorial V e F um subespaço de V. Então:

- A $\{v_1, v_2\}$ é uma base de F.
- B $\dim(V) = \dim(F)$.
- C se $v \in V$, então $v \in F$.
- D se $v \in F$, então $v \in V$.

Exe 4.85

Seja X um espaço vetorial tal que $X = \langle x_1, x_2 \rangle$. Então:

- A $\dim(X) = 2$.
- B $X = \mathbb{R}^2$.
- C $\forall x \in X, \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.
- D $\{x_1, x_2\}$ é uma base de X.

Exe 4.86

Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 2, 0)$, $v = (2, 0, 1)$, $w = (1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 0)$ e $y = (2, 4, 0)$. Então:

A v, w e x são vetores linearmente independentes.

B $\mathbb{R}^3 = \langle w, x, y \rangle$.

C $\{u, w, y\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

D u é uma combinação linear de x e y.

Exe 4.87

Seja V um espaço vetorial tal que $V = \langle v_1, v_2 \rangle$. Então:

A $\dim(V) \leqslant 2$.

B $\dim(V) < 2$.

C $\dim(V) \geqslant 2$.

D $\dim(V) > 2$.

Obs 4.88

Some english vocabulary regarding Vector Spaces

- espaço vetorial/vector space
- subespaço/subspace
- combinação linear/linear combination
- espaço gerado/span
- conjunto linearmente independente/linearly independent set
- conjunto linearmente dependente/linearly dependent set
- base/basis
- base ordenada/ordered basis
- dimensão de um espaço vetorial/dimension of a vector space

Sol 4.18

C.

Sol 4.19

B.

Sol 4.23

(a) $v = 3v_1$.

(b) v não é uma combinação linear de v_1.

(c) $v = v_1 + \frac{1}{2}v_2$.

(d) $v = (3 - 2\alpha)v_1 + \alpha v_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(e) v não é uma combinação linear de v_1 e v_2.

(f) $v = (3 - 2\alpha)v_1 + (6 - 2\alpha)v_2 + \alpha v_3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sol 4.24

(a) $w = 7u - 3v$.

(b) $\alpha = -8$.

Sol 4.25

B.

Sol 4.33

A, B e C.

Sol 4.34

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sol 4.38

2.

Sol 4.46

A e C.

Sol 4.47

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

Sol 4.48

$\alpha_1 \in \mathbb{R} \wedge \beta_1 \in \mathbb{R} \wedge (\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \vee \beta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Sol 4.54

A e C.

Sol 4.55

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$.

Sol 4.56

A.

Sol 4.57

D.

Sol 4.63

$[z]_{\mathcal{B}} = (1, 0, -1)$.

Sol 4.65

B.

Sol 4.66

D.

Sol 4.77

B.

Sol 4.78

C.

Sol 4.79

(b) Por exemplo, o conjunto $\{(1, 1, 0, 0), (-6, 0, 2, 1)\}$ é uma base de F e $\dim(F) = 2$.

Sol 4.80

(b) Por exemplo, o conjunto $\{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, 0), (0, 2, 0, 1)\}$ é uma base de F e $\dim(F) = 3$.

Sol 4.81

(c) Não.

(d) $\dim(F) = 2$.

Sol 4.82

(a) Sim.

(b) Não.

(c) Não.

(d) Sim.

(e) $\#C \geqslant 2$.

(f) $\#D \leqslant 2$.

(g) E é um conjunto gerador de V se e só se v_1 e v_4 forem vetores linearmente independentes.

Sol 4.83

P_2, P_3 e P_4.

Sol 4.84

D.

Sol 4.85

C.

Sol 4.86

D.

Sol 4.87

A.

Obs 5.1

Começa-se este capítulo por rever algumas definições sobre funções, pois o seu objeto de estudo é um caso particular de funções — as transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Def 5.2

⟦função, imagem de um elemento através de uma função, domínio de uma função, conjunto de chegada de uma função⟧ Sejam A e B conjuntos e $x \in A$. Diz-se que f é uma função de A em B se associa a cada elemento de A um e só um elemento de B, representando-se por $f(x)$ a imagem de x por f. Chama-se domínio de f a A e conjunto de chegada de f a B.

Obs 5.3

Sejam f uma função cujo domínio é $\mathbb{R}^n$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Então, a imagem de x por f, além de se representar por $f(x)$, também é habitual representar-se por $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Exe 5.4

(a) Considere a função $F : \{a, b, c\} \to \{a, z\}$, $a \mapsto a$, $b \mapsto z$, $c \mapsto z$. Indique a imagem de b por F.

(b) Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2$. Indique a imagem de -2 por φ.

Res

(a) $F(b) = z$.

(b) $\varphi(-2) = 4$.

Exe 5.5

Considere a função $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, 0, x)$. Calcule:

(a) $T(2, 1)$.

(b) $T(y, 1)$.

(c) $T(y, x)$.

(d) $T(x + 2y, 2y - x)$.

Res

(a) $T(2, 1) = (1, 0, 2)$.

(b) $T(y, 1) = (y - 1, 0, y)$.

(c) $T(y, x) = (y - x, 0, y)$.

(d) $T(x + 2y, 2y - x) = (2x, 0, x + 2y)$.

Def 5.6

⟦composição de funções⟧ Sejam A, B e C conjuntos, f uma função de A em B e g uma função de B em C. Chama-se composição de f com g, que se representa por $g \circ f$ e que se lê "g após f", à função

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & A & \longrightarrow & C \\ & x & \longmapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Exe 5.7

Considere as seguintes funções:

$$F_1 : \{a, b\} \to \{\alpha, \beta, \gamma\}, a \mapsto \beta, b \mapsto \beta.$$
$$F_2 : \{\alpha, \beta, \gamma\} \to \{1, 2, 3, 4\}, \alpha \mapsto 3, \beta \mapsto 1, \gamma \mapsto 1.$$

Determine $F_2 \circ F_1$.

Res

$F_2 \circ F_1 : \{a, b\} \to \{1, 2, 3, 4\}, a \mapsto 1, b \mapsto 1.$

Exe 5.8

Considere as seguintes funções:

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2.$$
$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f_2(x) = (0, 3x).$$
$$f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f_3(x, y) = x + 2y.$$
$$f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f_4(x, y, z) = (x, 0).$$
$$f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\ f_5(x) = xI_n.$$

Mostre que:

(a) $f_3(f_2(f_1(2))) = 24$.

(b) $f_2(f_4(1, 1, 1)) = (0, 3)$.

(c) $\mathrm{tr}(f_5(2)) = 2n$.

Exe 5.9

Considere as seguintes funções:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2.$$
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = 2x.$$
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = x + 1.$$

Determine:

(a) $f_1 \circ f_2$.

(b) $f_2 \circ f_1$.

(c) $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$.

(d) $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$.

Res

(a) $f_1 \circ f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f_1 \circ f_2)(x) = 4x^2$.

(b) $f_2 \circ f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f_2 \circ f_1)(x) = 2x^2$.

(c) $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(x) = 2x^2 + 1$.

(d) $(f_3 \circ f_2) \circ f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $((f_3 \circ f_2) \circ f_1)(x) = 2x^2 + 1$.

Obs 5.10

No exercício anterior, terá sido coincidência $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$? O teorema que se segue diz que não.

Teo 5.11

Sejam A, B, C e D conjuntos, f uma função de A em B, g uma função de B em C e h uma função de C em D. Então, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Obs 5.12

A composição de funções é associativa mas não é comutativa.

Obs 5.13

No caso do domínio e do conjunto de chegada de duas funções serem $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respetivamente, pode definir-se a soma dessas duas funções através da seguinte definição (que se podia generalizar a domínios e conjuntos de chegada mais gerais, mas essa generalização não é relevante para este curso):

Def 5.14

⟦soma de funções⟧ Sejam f e g funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Chama-se soma de f e g, que se representa por $f+g$, à função

$$\begin{array}{rccc} f+g: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x). \end{array}$$

Exe 5.15

Considere as seguintes funções:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = x^2.$$
$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(x) = 2x.$$

Determine $F + G$.

Res

$F + G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (F + G)(x) = x^2 + 2x.$

Obs 5.16

No caso do domínio e do conjunto de chegada de uma função serem $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respetivamente, pode definir-se o produto (ou multiplicação) dessa função por um escalar através da seguinte definição (que se podia generalizar a domínios e conjuntos de chegada mais gerais, mas essa generalização não é relevante para este curso):

Def 5.17

⟦produto (ou multiplicação) de uma função por um escalar⟧ Sejam f uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se produto (ou multiplicação) de α por f, que se representa por αf, à função

$$\begin{array}{rccc} \alpha f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & \alpha f(x). \end{array}$$

Exe 5.18

Considere a função

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, F(x, y) = (x^2, 0, |y|).$$

Determine $3F$.

Res

$3F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (3F)(x, y) = (3x^2, 0, 3|y|).$

Def 5.19

(a) $[\![$transformação linear ou homomorfismo$]\!]$ Seja T uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Diz-se que T é uma transformação linear ou um homomorfismo de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ se

  (i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \, [T(x+y) = T(x) + T(y)]$ e

  (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R} \, [T(\alpha x) = \alpha T(x)]$.

(b) $[\![\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)]\!]$ Representa-se por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ o conjunto de todas as transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Obs 5.20

A definição anterior pode generalizar-se ao caso de funções em que o domínio e o conjunto de chegada são espaços vetoriais quaisquer. No entanto, e como indica o nome do capítulo, este curso apenas abordará transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Exe 5.21

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (x_2, 0, x_1 + x_2)$. Mostre que T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$.

Res

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \, [T(x + y) = T(x) + T(y)]$.
Sejam $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Então:

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\ &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_2 + y_2, 0, x_1 + y_1 + x_2 + y_2). \qquad \text{(i.1)} \\ T(x) + T(y) &= T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) \\ &= (x_2, 0, x_1 + x_2) + (y_2, 0, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + y_2, 0, x_1 + y_1 + x_2 + y_2). \qquad \text{(i.2)} \end{aligned}$$

Como as expressões (i.1) e (i.2) são iguais, conclui-se que a condição (i) é válida.

Res (cont.)

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}\, [T(\alpha x) = \alpha T(x)]$.
Seja $x = (x_1, x_2)$. Então:

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= T(\alpha(x_1, x_2)) \\ &= T(\alpha x_1, \alpha x_2) \\ &= (\alpha x_2, 0, \alpha x_1 + \alpha x_2). \qquad \text{(ii.1)} \\ \alpha T(x) &= \alpha T(x_1, x_2) \\ &= \alpha(x_2, 0, x_1 + x_2) \\ &= (\alpha x_2, 0, \alpha x_1 + \alpha x_2). \qquad \text{(ii.2)} \end{aligned}$$

Como as expressões (ii.1) e (ii.2) são iguais, conclui-se que a condição (ii) é válida.

Como as condições (i) e (ii) são válidas, conclui-se que T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$.

Obs 5.22

Seja f uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Então, f não é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ se

(i) $\exists x, y \in \mathbb{R}^n \, [f(x+y) \neq f(x) + f(y)]$ ou

(ii) $\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha \in \mathbb{R} \, [f(\alpha x) \neq \alpha f(x)]$.

Assim, há três tipos de funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ que não são transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$:

- a condição (i) da definição Def 5.19 (a) é verdadeira, mas a condição (ii) é falsa.
- a condição (ii) da definição Def 5.19 (a) é verdadeira, mas a condição (i) é falsa.
- as condições (i) e (ii) da definição Def 5.19 (a) são ambas falsas.

Exe 5.23

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_2, 1, x_1 + x_2)$. Mostre que f não é uma transformação linear $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$.

Res

Sejam, por exemplo, $x = (0, 0)$ e $y = (1, 0)$. Então:

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= f((0,0)+(1,0)) \\
&= f(1,0) \\
&= (0,1,1) && \text{(i.1)} \\
f(x)+f(y) &= f(0,0)+f(1,0) \\
&= (0,1,0)+(0,1,1) \\
&= (0,2,1) && \text{(i.2)}
\end{aligned}
$$

Como as expressões (i.1) e (i.2) são diferentes, conclui-se que a condição (i) da definição Def 5.19 (a) não é válida, pelo que f não é uma transformação linear $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$.

Obs 5.24

A função do exemplo anterior é um dos casos em que ambas as condições (i) e (ii) da definição Def 5.19 (a) são falsas. Assim, outra possível resolução do exercício anterior é mostrar que a condição (ii) é falsa através de um contraexemplo, ou seja, considerando, por exemplo, $\alpha = 0$ e $x = (1, 0)$. Então:

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= f(0(1,0)) \\ &= f(0,0) \\ &= (0,1,0) \qquad\qquad \text{(ii.1)} \\ \alpha f(x) &= 0f(1,0) \\ &= 0(0,1,1) \\ &= (0,0,0) \qquad\qquad \text{(ii.2)} \end{aligned}$$

Assim, como as expressões (ii.1) e (i.2) são diferentes, conclui-se que a condição (ii) da definição Def 5.19 (a) não é válida, pelo que f não é uma transformação linear $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$.

Teo 5.25

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se e só se

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, [T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)].$$

Obs 5.26

O teorema anterior indica um processo alternativo à definição Def 5.19 de verificar se uma função é uma transformação linear.

Exe 5.27

Indique quais das seguintes funções são transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$:

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T_1(x, y) = (0, -x, 0).$$
$$T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (0, 0, |x - y|).$$
$$T_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T_3(x_1, x_2) = (x_2, 0, x_1).$$
$$T_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T_4(x_1, x_2) = (x_1^2, 0, 0).$$

Exe 5.28

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Determine a relação entre α e β de modo que a função T definida por $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x + \alpha - 2\beta, -x)$, seja uma transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$.

Exe 5.29

Indique qual das seguintes proposições é verdadeira:

A $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = |x|$ é uma transformação linear.

B $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = (x + y)^2$ é uma transformação linear.

C $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = 1$ é uma transformação linear.

D $i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $i(x, y) = x + y$ é uma transformação linear.

Exe 5.30

Indique qual das seguintes proposições é verdadeira:

A $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, 0)$ é uma transformação linear.

B $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = (x, 1)$ é uma transformação linear.

C $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $h(x) = (x, 2)$ é uma transformação linear.

D $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $i(x) = (x, 3)$ é uma transformação linear.

Def 5.31

(a) ⟦endomorfismo⟧ Chama-se endomorfismo em $\mathbb{R}^n$ a uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

(b) ⟦$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$⟧ Representa-se por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todos os endomorfismos em $\mathbb{R}^n$.

Exe 5.32

Indique o valor lógico das seguintes proposições:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (|x_2|, 0)$ é um endomorfismo em $\mathbb{R}^2$.

(b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, g(x_1, x_2) = (x_2, 0, x_1 + x_2)$ é um endomorfismo em $\mathbb{R}^3$.

(c) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, h(x_1, x_2) = (0, 0)$ é um endomorfismo em $\mathbb{R}^2$.

Res

As proposições (a) e (b) são falsas e a proposição (c) é verdadeira.

Exe 5.33

Identifique geometricamente os seguintes endomorfismos em $\mathbb{R}^2$:

(a) $T_1(x, y) = (-x, y)$.

(b) $T_2(x, y) = (x, -y)$.

(c) $T_3(x, y) = (y, x)$.

(d) $T_4(x, y) = (-x, -y)$.

(e) $T_5(x, y) = (x, 0)$.

(f) $T_6(x, y) = (0, y)$.

(g) $T_7(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

(h) $T_8(x, y) = (kx, ky)$, $k \in]0, 1[$.

(i) $T_9(x, y) = (kx, ky)$, $k \in]1, +\infty[$.

(j) $T_{10}(x, y) = (kx, y)$, $k \in \mathbb{R}^+$.

(k) $T_{11}(x, y) = (x, ky)$, $k \in \mathbb{R}^+$.

(l) $T_{12}(x, y) = (x + ky, y)$, $k \in \mathbb{R}^+$.

(m) $T_{13}(x, y) = (x, kx + y)$, $k \in \mathbb{R}^+$.

Teo 5.34

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Então:

(a) $T(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^n \, [T(-x) = -T(x)]$.

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \, [T(x-y) = T(x) - T(y)]$.

Obs 5.35

O teorema anterior permite concluir que se $T(0_{\mathbb{R}^n}) \neq 0_{\mathbb{R}^m}$ ou $\exists x \in \mathbb{R}^n \, [T(-x) \neq -T(x)]$ ou $\exists x, y \in \mathbb{R}^n \, [T(x-y) \neq T(x) - T(y)]$, então T não é uma transformação linear. Note-se, ainda, que há funções em que $T(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \, [T(-x) = -T(x)]$ e $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \, [T(x-y) = T(x) - T(y)]$ e que não são transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Exe 5.36

Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g(a, b) = (a, 1, a + 2b)$. Mostre que g não é uma transformação linear.

Res

Como $g(0_{\mathbb{R}^2}) = g(0, 0) = (0, 1, 0) \neq (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$, conclui-se que g não é uma transformação linear.

Exe 5.37

Justifique que as funções T_2 e T_4 de do exercício Exe 5.27 não são transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ recorrendo à observação Obs 5.35.

Obs 5.38

Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $C = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$, $C' = (v'_1, \ldots, v'_m)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^m$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Então,

$$
\begin{aligned}
&\exists^1 \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\,[v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n],\\
&\exists^1 a_{11}, \ldots, a_{m1} \in \mathbb{R}\,[T(v_1) = a_{11} v'_1 + \cdots + a_{m1} v'_m],\\
&\qquad\vdots\\
&\exists^1 a_{1n}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}\,[T(v_n) = a_{1n} v'_1 + \cdots + a_{mn} v'_m].
\end{aligned}
$$

Tem-se, então, que:

Obs 5.38 (cont.)

$$
\begin{aligned}
T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \\
&= \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) \\
&= \alpha_1(a_{11}v_1' + \cdots + a_{m1}v_m') + \cdots + \alpha_n(a_{1n}v_1' + \cdots + a_{mn}v_m') \\
&= (\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_n a_{1n})v_1' + \cdots + (\alpha_1 a_{m1} + \cdots + \alpha_n a_{mn})v_m' \\
&= \beta_1 v_1' + \cdots + \beta_m v_m',
\end{aligned}
$$

em que

$$
\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.
$$

Def 5.39

$[\![$matriz de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, $A_{T,C,C'}$, $A_T]\!]$
Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $C = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$ e $C' = (v_1', \ldots, v_m')$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^m$. Chama-se matriz da transformação linear T relativamente às bases C e C', que se representa por $A_{T,C,C'}$, à matriz $[a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ introduzida na observação anterior.
Se C e C' são as bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respetivamente, representa-se a matriz da transformação linear T relativamente a C e C' por A_T.

Exe 5.40

Determine a matriz da transformação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x, y, z) = (x + 2z, 3x - y)$, relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

Res

Como

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (1, 3) \\ T(0, 1, 0) &= (0, -1) \\ T(0, 0, 1) &= (2, 0), \end{aligned}$$

tem-se que

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exe 5.41

Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_1 - x_3, 2x_3 - x_1 - x_2).$$

(a) Determine A_T.

(b) Use a matriz A_T para determinar a imagem dos vetores $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 1, 1)$ e $w = (-5, 3, 2)$.

Exe 5.42

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$. Então:

A $A_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

B $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exe 5.43

Seja $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz da transformação linear T relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. Então:

A $T(x, y, z) = (x, x + z, y, z)$.

B $T(x, y, z) = (x + y, y, x + z, z)$.

C $T(x, y, z) = (x, x, z, z)$.

D $T(x, y, z) = (x, y + z, x + y, z)$.

Obs 5.44

Nesta secção apresentam-se os teoremas principais relativos às seguintes operações com transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$: multiplicação por um escalar, soma e composição.

Teo 5.45

Sejam $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e A_T e A_S as matrizes de T e S, respetivamente. Então:

(a) $T + S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(b) $A_T + A_S$ é a matriz de $T + S$.

Exe 5.46

Sejam S e T as transformações lineares definidas por

$$S : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y,y), \end{array} \qquad T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0). \end{array}$$

Determine, por dois processos distintos, a matriz da transformação linear $T+S$ relativamente às bases canónicas do seu domínio e do seu conjunto de chegada.

Res

- Processo 1:
  $T+S$ é a transformação linear definida por $T+S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

  $$(T+S)(x,y) = T(x,y)+S(x,y) = (x,0)+(2x+y,y) = (3x+y,y).$$

  Como $(T+S)(1,0) = (3,0)$ e $(T+S)(0,1) = (1,1)$, tem-se que $A_{T+S} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Res (cont.)

- Processo 2:
  Como $T(1,0) = (1,0)$ e $T(0,1) = (0,0)$, tem-se que $A_T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
  Como $S(1,0) = (2,0)$ e $S(0,1) = (1,1)$, tem-se que $A_S = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.
  Assim,

$$A_{T+S} = A_T + A_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teo 5.47

Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e A_T a matriz de T. Então:

(a) $\alpha T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(b) αA_T é a matriz de αT.

Exe 5.48

Seja T a transformação linear definida por

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (2x + y, 0, y). \end{array}$$

Determine, por dois processos distintos, a matriz da transformação linear $-2T$ relativamente às bases canónicas do seu domínio e do seu conjunto de chegada.

Teo 5.49

Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ e A_T e A_S as matrizes de T e S, respetivamente. Então:

(a) $S \circ T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

(b) $A_S A_T$ é a matriz de $S \circ T$.

Exe 5.50

Sejam S e T as transformações lineares definidas por

$$S: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, y), \end{array} \qquad T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, 0). \end{array}$$

(a) Determine, por dois processos distintos, a matriz da transformação linear $S \circ T$ relativamente às bases canónicas do seu domínio e do seu conjunto de chegada.

(b) Determine, por dois processos distintos, a matriz da transformação linear $T \circ S$ relativamente às bases canónicas do seu domínio e do seu conjunto de chegada.

Exe 5.51

Considere as seguintes transformações lineares:

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, T(x,y,z) = (x+y+z,\, y-2z),$$
$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, S(x,y) = (x,\, x+y,\, x-y),$$
$$U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, U(x,y) = (2x+y,\, -y).$$

(a) Determine as matrizes associadas às transformações lineares dadas relativamente às bases canónicas do seu domínio e do seu conjunto de chegada.

(b) Para as seguintes operações, indique as que estão bem definidas, e determine, para esses casos, a respetiva matriz da transformação linear:

i. $T + \alpha S$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.
ii. $U \circ U$.
iii. $S \circ T$.
iv. $T \circ S$.
v. $U \circ U + \alpha (T \circ S)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exe 5.52

Sejam f e g duas transformações lineares definidas por

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y,-y) \end{array} \quad \text{e} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,x+y). \end{array}$$

Então, a matriz da transformação linear $g \circ f$ é dada por:

A $A_{g\circ f} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

B $A_{g\circ f} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

C $A_{g\circ f} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

D $A_{g\circ f} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Exe 5.53

Sejam $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $S(x, y) = (-y, x)$ e $T(x, y) = (y, 0)$. Então, a matriz da transformação linear $S \circ T$ relativamente às bases canónicas é

A $A_{S \circ T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

B $A_{S \circ T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C $A_{S \circ T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

D $A_{S \circ T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Def 5.54

⟦imagem de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, $\mathrm{Im}(T)$⟧ Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Chama-se imagem de T, que se representa por $\mathrm{Im}(T)$, a

$$\mathrm{Im}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{T(x) \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Exe 5.55

Determine a imagem de $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$.

Res

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,1) + x_2(0,2) + x_3(1,-1) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,1), (0,2), (1,-1) \rangle \\ &= \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

pois car $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2$.

Def 5.56

⟦núcleo de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, $\mathrm{Nuc}(T)$⟧ Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Chama-se núcleo de T, que se representa por $\mathrm{Nuc}(T)$, ao conjunto

$$\mathrm{Nuc}(T) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) = 0_{\mathbb{R}^m}\}.$$

Exe 5.57

Determine o núcleo de $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$,
$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$.

Res

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}(T) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : T(x_1, x_2, x_3) = 0_{\mathbb{R}^2}\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3) = (0, 0)\}.\end{aligned}$$

Res (cont.)

Tem-se, então, que resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0, \end{cases}$$

ou seja, $Ax = b$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, vindo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|b) = 2 < n = 3$ (n é o número de incógnitas), (S) é um sistema possível e indeterminado equivalente ao sistema de equações lineares

Res (cont.)

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + \; x_3 = 0 \\ \qquad 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Sendo x_3 uma variável livre, tem-se

$$\begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(T) &= \{(-a, a, a) : a \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(-1, 1, 1) : a \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-1, 1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Exe 5.58

Determine o núcleo e a imagem das seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$:

(a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T_1(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$.

(b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$.

(c) $T_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1, x_1)$.

Teo 5.59

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Então:

(a) $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$.

(b) $\mathrm{Nuc}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Teo 5.60

Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $\{u_1, \ldots, u_k\}$ um conjunto gerador de $\mathbb{R}^n$ (em particular, uma base). Então:

(a) T fica definida desde que se conheçam os vetores $T(u_1), \ldots, T(u_k)$.

(b) $\mathrm{Im}(T) = \langle T(u_1), \ldots, T(u_k) \rangle$.

Exe 5.61

Resolva de novo o exercício $\boxed{\text{Exe 5.55}}$ atendendo ao teorema anterior.

Res

Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$, *i.e.*, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &= \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3)\rangle \\ &= \langle T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\rangle \\ &= \langle (1,1), (0,2), (1,-1)\rangle \\ &= \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

pois $c\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]\right) = 2$, como já se disse no exercício $\boxed{\text{Exe 5.55}}$.

Exe 5.62

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, tal que $T(2,2) = (0,1,1)$ e $\text{Nuc}(T) = \langle (1,3) \rangle$. Determine T.

Res

Como $S = \{(2,2), (1,3)\}$ é um conjunto linearmente independente (verifique!), S é uma base de $\mathbb{R}^2$ (pois $\#S = \dim(\mathbb{R}^2)$), pelo que qualquer elemento de $\mathbb{R}^2$ é uma combinação linear única dos elementos de S, vindo

$$(x,y) = \alpha(2,2) + \beta(1,3).$$

Tem-se, então, que resolver o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2\alpha & + & \beta & = & x \\ 2\alpha & + & 3\beta & = & y, \end{array} \right.$$

Res (cont.)

ou seja, $A\xi = b$, com $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, $\xi = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right]$ e $b = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$, vindo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 2 & 3 & y \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & 2 & y-x \end{array}\right].$$

Como $\text{car}(A) = \text{car}(A|b) = n = 2$ (n é o número de incógnitas), $A\xi = b$ é um sistema possível e indeterminado equivalente ao sistema de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2\alpha & + & \beta & = & x \\ & & 2\beta & = & y-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{3x-y}{4} \\ \beta = \frac{y-x}{2}. \end{array}\right.$$

Res (cont.)

Assim,

$$(x, y) = \frac{3x - y}{4}(2, 2) + \frac{y - x}{2}(1, 3),$$

pelo que

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T\left(\frac{3x - y}{4}(2, 2) + \frac{y - x}{2}(1, 3)\right) \\ &= \frac{3x - y}{4}T(2, 2) + \frac{y - x}{2}T(1, 3) && \text{por } T \text{ ser uma transformação linear} \\ &= \frac{3x - y}{4}(0, 1, 1) + \frac{y - x}{2}(0, 0, 0) && \text{por } \mathrm{Nuc}(T) = \langle (1, 3) \rangle \\ &= \left(0, \frac{3x - y}{4}, \frac{3x - y}{4}\right). \end{aligned}$$

Exe 5.63

Para cada uma das alíneas seguintes, determine a função T sabendo que é uma transformação linear definida por:

(a) $T(1,0) = (-1,1,2)$ e $T(0,1) = (3,0,1)$.

(b) $T(1,2) = (3,-1,5)$ e $T(0,1) = (2,1,-1)$.

(c) $T(1,1,1) = 3$, $T(0,1,-2) = 1$ e $T(0,0,1) = -2$.

Exe 5.64

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tal que $T(0,0,1) = (0,0,1)$ e $\mathrm{Nuc}(T) = \langle (1,1,1), (0,1,1) \rangle$. Determine T.

Def 5.65

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(a) $[\![$característica de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, $c_T]\!]$ Chama-se característica de T, que se denota por c_T, à dimensão do subespaço $\mathrm{Im}(T)$, ou seja,

$$c_T \overset{\text{def}}{=} \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

(b) $[\![$nulidade de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, $n_T]\!]$ Chama-se nulidade de T, que se denota por n_T, à dimensão do subespaço $\mathrm{Nuc}(T)$, ou seja,

$$n_T \overset{\text{def}}{=} \dim(\mathrm{Nuc}(T)).$$

Teo 5.66

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Então:

(a) $c_T = \mathrm{car}(A_T)$.

(b) $n = c_T + n_T$.

Exe 5.67

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$. Determine:

(a) c_T.

(b) uma base de $\text{Im}(T)$.

(c) n_T.

(d) uma base de $\text{Nuc}(T)$.

Res

(a) Como

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,1) \\ T(0,1,0) &= (0,2) \\ T(0,0,1) &= (1,-1), \end{aligned}$$

Res (cont.)

tem-se que

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então, como

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

tem-se que $\mathrm{car}(A_T) = 2$, pelo que, aplicando o teorema $\boxed{\text{Teo 5.66}}$ (a), vem $c_T \equiv \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

(b) Como $c_T = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$, conclui-se que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, pelo que, por exemplo, $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

Res (cont.)

(c) Aplicando o teorema $\boxed{\text{Teo 5.66}}$ (b), tem-se que $\dim(\mathbb{R}^3) = c_T + n_T$, *i.e.*, $3 = 2 + n_T$, pelo que $n_T = 1$ (este valor é confirmado pelo número de variáveis livres em $\mathrm{Nuc}(T)$).

(d) Como $\mathrm{Nuc}(T) = \langle(-1,1,1)\rangle$ e $n_T = 1$, tem-se que, por exemplo, $\{(-1,1,1)\}$ é uma base de $\mathrm{Nuc}(T)$.

Exe 5.68

Determine a imagem, a característica, o núcleo, a nulidade e a matriz relativamente às bases canónicas das seguintes transformações lineares:

(a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_1(x,y) = x + y$.

(b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_2(x,y,z) = (x+y+z, 2x+2y+2z)$.

(c) $T_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T_3(x,y,z) = (x-z, 0, y-2z)$.

(d) $T_4 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T_4(x,y,z,w) = (x-y, z-w, x-3w)$.

Exe 5.69

Determine uma base e a dimensão do núcleo da transformação linear T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definida por
$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_2 - x_1 - x_3, x_3 - x_2)$.

Exe 5.70

Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $S = \{u_1, \ldots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto linearmente dependente. Mostre que $\{T(u_1), \ldots, T(u_k)\}$ também é um conjunto linearmente dependente.

Exe 5.71

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $T(x, y, z) = (x - 2y - 2z, x - 2z, -2x + 4z)$.
Então:

A $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

B $\operatorname{Im}(T) = \langle(-2, 0, 0)\rangle$.

C $\operatorname{Im}(T) = \langle(1, 1, -2), (-2, -2, 4)\rangle$.

D $\operatorname{Im}(T) = \langle(1, 1, -2), (-2, 0, 0)\rangle$.

Exe 5.72

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $T(x, y, z) = (x - 2y - 2z, x - 2z, -2x + 4z)$. Então:

A $\text{Nuc}(T) = \langle (1, 1, -2), (-2, 0, 0), (-2, -2, 4) \rangle$.

B $\text{Nuc}(T) = \{(0, 0, 0)\}$.

C $\text{Nuc}(T) = \langle (2, 0, 1) \rangle$.

D $\text{Nuc}(T) = \mathbb{R}^3$.

Exe 5.73

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $T(a, b) = (a + b, 0, a + b)$. Então:

A $\text{Nuc}(T) \subseteq \mathbb{R}^3$ e $c_T = 1$.

B $\text{Im}(T) = \langle (1, 0, 1) \rangle$ e $n_T = 1$.

C $\text{Nuc}(T) = \langle (1, 0) \rangle$ e $c_T = 1$.

D $c_T + n_T = 3$.

Exe 5.74

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $T(x, y) = (-x - y, -2x - 2y, -3x - 3y)$. Então:

- A $\mathrm{Im}(T) = \langle (1, 2, 3) \rangle$.
- B $\mathrm{Im}(T) = \langle (-1, -1, -1), (-2, -2, -2), (-3, -3, -3) \rangle$.
- C $\mathrm{Im}(T) = \langle -1, -2, -3 \rangle$.
- D $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

Exe 5.75

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x, y, z) = (x + z, 0)$. Então:

- A $\mathrm{Nuc}(T) = \langle (-1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$.
- B $\mathrm{Nuc}(T) = \langle (-1, 0, 1) \rangle$.
- C $\mathrm{Nuc}(T) = \langle (0, 1, 0) \rangle$.
- D $\mathrm{Nuc}(T) = \mathbb{R}^3$.

Exe 5.76

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Então:

$\boxed{\text{A}}$ $\dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 2$.

$\boxed{\text{B}}$ $\dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 3$.

$\boxed{\text{C}}$ $\dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 5$.

$\boxed{\text{D}}$ $\dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 6$.

Exe 5.77

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x, y, z) = (0, x - z)$. Então:

$\boxed{\text{A}}$ $\text{Nuc}(T) = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$.

$\boxed{\text{B}}$ $\text{Nuc}(T) = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$.

$\boxed{\text{C}}$ $\text{Nuc}(T) = \langle (1, 0, 1) \rangle$.

$\boxed{\text{D}}$ $\text{Nuc}(T) = \mathbb{R}^3$.

Exe 5.78

Seja $A_T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ a matriz de uma transformação linear T. Então:

A $T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, 2x + 4z)$.

B $\operatorname{Im}(T) = \langle (1, 2), (2, 4) \rangle$.

C $c_T = 1$

D $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Exe 5.79

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, 0, z)$. Então:

A $\operatorname{Im}(T) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ e $n_T = 1$.

B $\operatorname{Im}(T) = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$ e $n_T = 2$.

C $\operatorname{Nuc}(T) = \langle (0, 1, 0) \rangle$ e $c_T = 2$.

D $\operatorname{Nuc}(T) = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ e $c_T = 2$.

Exe 5.80

Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, y - x, 2x)$. Então:

A $\dim(\text{Im}(T)) = 0$.

B $\dim(\text{Im}(T)) = 1$.

C $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.

D $\dim(\text{Im}(T)) = 3$.

Exe 5.81

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que $T(1, 0) = (2, 1)$ e $T(0, 1) = (0, 1)$. Então:

A $T(x, y) = (2x, x + y)$.

B $T(x, y) = (x + 2, y + 1)$.

C $T(x, y) = (2x, y)$.

D $T(x, y) = (x, 2y)$.

Exe 5.82

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tal que $T(1,0) = (0,1,1)$ e $\text{Nuc}(T) = \langle (0,1) \rangle$.
Então:

A $T(x,y) = (0,x,x)$.

B $T(x,y) = (0,y,y)$.

C $T(x,y) = (x,y,y)$.

D $T(x,y) = (y,x,x)$.

Exe 5.83

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$. Então:

A $n_T + c_T = 3$.

B $n_T + c_T = 4$.

C $n_T + c_T = 7$.

D $n_T + c_T = 1$.

Obs 5.84

Some english vocabulary regarding Linear Maps from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$

- transformação linear/linear map
- imagem de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$/range space of a linear map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$
- núcleo de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$/null space or kernel of a linear map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$
- característica de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$/rank of a linear map from $\mathbb{R}^n$
- nulidade de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$/nullity of a linear map from $\mathbb{R}^n$

Sol 5.27

T_1 e T_3.

Sol 5.28

$\alpha = 2\beta$.

Sol 5.29

D.

Sol 5.30

A.

Sol 5.41

(a) $A_T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $T(u) = (0, 0, 0)$, $T(v) = (2, -1, -1)$, $T(w) = (-15, 9, 6)$.

Sol 5.42

C.

Sol 5.43

D.

Sol 5.51

(a) $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $A_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(b)
  i. A operação não está bem definida.
  ii. $A_{U \circ U} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
  iii. $A_{S \circ T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
  iv. $A_{T \circ S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
  v. $A_{U \circ U + \alpha(T \circ S)} = \begin{bmatrix} 4+3\alpha & 1 \\ -\alpha & 1+3\alpha \end{bmatrix}$.

Sol 5.52

D.

Sol 5.53

B.

Sol 5.58

(a) $\text{Nuc}(T_1) = \{(0,0,0)\}$, $\text{Im}(T_1) = \mathbb{R}^3$.

(b) $\text{Nuc}(T_2) = \langle(0,0,1)\rangle$, $\text{Im}(T_2) = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$.

(c) $\text{Nuc}(T_3) = \langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$, $\text{Im}(T_3) = \langle(1,1,1)\rangle$.

Sol 5.63

(a) $T(x,y) = (-x+3y, x, 2x+y)$.

(b) $T(x,y) = (-x+2y, -3x+y, 7x-y)$.

(c) $T(x,y,z) = 8x-3y-2z$.

Sol 5.64

$T(x,y,z) = (0,0,z-y)$.

Sol 5.68

(a) $\mathrm{Im}(T_1) = \mathbb{R}$, $c_{T_1} = 1$,
$\mathrm{Nuc}(T_1) = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1) \rangle$, $n_{T_1} = 1$,
$A_{T_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathrm{Im}(T_2) = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 2) \rangle$, $c_{T_2} = 1$,
$\mathrm{Nuc}(T_2) = \{(-y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$,
$n_{T_2} = 2$,
$A_{T_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathrm{Im}(T_3) = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$, $c_{T_3} = 2$,
$\mathrm{Nuc}(T_3) = \{(z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 2, 1) \rangle$, $n_{T_3} = 1$,
$A_{T_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(d) $\mathrm{Im}(T_4) = \mathbb{R}^3$, $c_{T_4} = 3$,
$\mathrm{Nuc}(T_4) = \{(3w, 3w, w, w) : w \in \mathbb{R}\} = \langle (3, 3, 1, 1) \rangle$, $n_{T_4} = 1$,
$A_{T_4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Sol 5.69

$\{(1,1,1)\}$ é uma base de $\mathrm{Nuc}(T)$, $n_T = 1$.

Sol 5.71

D.

Sol 5.72

C.

Sol 5.73

B.

Sol 5.74

A.

Sol 5.75

A.

Sol 5.76

B.

Sol 5.77

B.

Sol 5.78

A.

Sol 5.79

C.

Sol 5.80

C.

Sol 5.81

A.

Sol 5.82

A.

Sol 5.83

B.

Def 6.1

⟦vetor próprio de uma matriz associado a um valor próprio⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ é um vetor próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{C}$ se $Ax = \lambda x$.

Def 6.2

⟦espetro de uma matriz⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se espetro de A, que se representa por $\lambda(A)$, ao conjunto de todos os valores próprios de A, ou seja,

$$\lambda(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ é um valor próprio de } A\}.$$

Def 6.3

⟦subespaço próprio de um valor próprio⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \lambda(A)$. Chama-se subespaço próprio do valor próprio λ, que se representa por $E_{\lambda,A}$ (ou por E_λ se não houver ambiguidade relativamente à matriz), ao conjunto

$$E_{\lambda,A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x\}.$$

Teo 6.4

Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \lambda(A)$. Então, E_λ é um subespaço de $\mathbb{C}^n$.

Obs 6.5

(a) Note-se que existem matrizes reais cujos valores próprios são números complexos.

(b) Cada vetor próprio está associado apenas a um valor próprio.

(c) Se x é um vetor próprio associado ao valor próprio λ, então, αx, $\alpha \neq 0$, também é um vetor próprio associado ao valor próprio λ.

(d) Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \lambda(A)$. Então,

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n : x \text{ é um vetor próprio associado ao valor próprio } \lambda\} \cup \{0_{\mathbb{C}^n}\}.$$

(e) Chama-se "subespaço próprio" ao conjunto E_λ devido ao teorema anterior.

(f) O seguinte teorema indica-nos um processo de calcular $\lambda(A)$.

Teo 6.6

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, $\lambda \in \lambda(A)$ se e só se $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Def 6.7

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦polinómio característico de uma matriz⟧ Chama-se polinómio característico da matriz A, que se representa por $\Pi_A(\lambda)$, ao polinómio

$$\Pi_A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - \lambda I_n).$$

(b) ⟦equação característica de uma matriz⟧ Chama-se equação característica da matriz A à equação $\Pi_A(\lambda) = 0$.

(c) ⟦multiplicidade algébrica de um valor próprio⟧ Seja λ um valor próprio de A. Chama-se multiplicidade algébrica de λ à multiplicidade do escalar λ enquanto raiz da equação característica.

(d) ⟦valor próprio simples⟧ Seja λ um valor próprio de A. Diz-se que λ é um valor próprio simples se tem multiplicidade algébrica um.

Teo 6.8

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, o coeficiente do termo de grau n do polinómio característico da matriz A é $(-1)^n$ e o seu termo independente de λ é $\det(A)$.

Obs 6.9

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, $\Pi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + \cdots + \det(A)$.

Obs 6.10

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então,

(a) os valores próprios da matriz A são as raízes do seu polinómio característico.

(b) Se λ é um valor próprio da matriz A, então os vetores próprios associados a λ são as soluções não-nulas do sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)x = \underline{0}$.

(c) Do Teorema Fundamental da Álgebra resulta que $\Pi_A(\lambda)$ tem exatamente n raízes, podendo alguns deles ser iguais. Assim, sejam $n_1, n_2, \ldots, n_m$ as multiplicidades das $m(\leqslant n)$ raízes distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de $\Pi_A(\lambda)$. Então,

$$\Pi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{n_m},$$

em que $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. Aos números $n_1, n_2, \ldots, n_m$ chama-se multiplicidade algébrica dos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, respetivamente.

Exe 6.11

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Determine o espetro da matriz A.

(b) Determine o espaço próprio associado ao valor próprio de menor módulo da matriz A.

Res

(a) Seja

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}.$$

Res (cont.)

Então, aplicando o Teorema de Laplace e fazendo o desenvolvimento a partir da primeira coluna, obtém-se

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I_3) &= (2-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda)+2)\\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)\\ &= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)\\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda-3),\end{aligned}$$

pelo que

$$\lambda(A) = \{2, 3\},$$

sendo que $\lambda_1 = 2$ é um valor próprio de multiplicidade algébrica dois e $\lambda_2 = 3$ é um valor próprio simples.

C.A.: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 3.$

Res (cont.)

(b) Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$, tem que se resolver o sistema

$$(A - 2I_3)x_1 = \underline{0},$$

ou seja, $A_1 x_1 = b_1$, com $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}$ e $b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, vindo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 + 2\ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Res (cont.)

Como $\mathrm{car}(A_1) = \mathrm{car}(A_1|b_1) = 2 < n = 3$ (n é o número de incógnitas), $A_1 x_1 = b_1$ é um sistema possível e indeterminado equivalente ao sistema de equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x_{12} & & & = & 0 \\ & - & x_{13} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{11} = a \in \mathbb{C} \\ x_{12} = 0 \\ x_{13} = 0. \end{array} \right.$$

Assim, tem-se:

$$E_2 = \{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{C}\}.$$

Exe 6.12

Determine o espetro das seguintes matrizes, bem como os espaços próprios associados aos seus valores próprios:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(f) $F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exe 6.13

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcule os valores próprios de A e os respetivos subespaços próprios.

Exe 6.14

Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Então:

- A: 0 é um valor próprio de multiplicidade dois da matriz A.
- B: 0 é um valor próprio simples da matriz A.
- C: 3 é um valor próprio de multiplicidade dois da matriz A.
- D: 3 é um valor próprio simples da matriz A.

Exe 6.15

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então:

- A: 1 é um valor próprio múltiplo da matriz A.
- B: $\lambda(A) = \{1, 3, 5\}$.
- C: $\frac{3-\sqrt{11}}{2}$ é um valor próprio simples da matriz A.
- D: $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ é um valor próprio simples da matriz A.

Exe 6.16

Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ a & b \end{smallmatrix}\right]$, $a, b \in \mathbb{R}$. A condição que a e b devem verificar para que $(3,1)$ seja um vetor próprio de A é:

A $a + b = 1$.

B $3a + b = 6$.

C $a + b = 6$.

D $3a + b = 2$.

Exe 6.17

Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Então:

A $\lambda(A) = \{0, 3\}$.

B $\lambda(A) = \{1, 2\}$.

C $\lambda(A) = \{1\}$.

D $\lambda(A) = \{0\}$.

Exe 6.18

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Então, o conjunto dos vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -3$ é:

A $\{(3\alpha/2, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

B $\{(-\alpha/2, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

C $\{(-\alpha, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

D $\{(-2\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

Exe 6.19

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine:

(a) os valores próprios de A e os respetivos subespaços próprios.

(b) os valores próprios de A^2 e os respetivos subespaços próprios.

(c) os valores próprios de A^{-1} e os respetivos subespaços próprios.

Obs 6.20

No exercício anterior terá sido coincidência que os valores próprios de A^2 tenham sido os quadrados dos valores próprios de A e que os valores próprios de A^{-1} tenham sido os inversos dos valores próprios de A? O teorema que se segue diz que não.

Teo 6.21

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então:

(a) A é uma matriz invertível se e só se $0 \notin \lambda(A)$.

(b) se A é uma matriz invertível e $\lambda \in \lambda(A)$, então, $\frac{1}{\lambda} \in \lambda(A^{-1})$ e $E_{\lambda,A} = E_{\frac{1}{\lambda},A^{-1}}$.

(c) se $k \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \lambda(A)$, então, $\lambda^k \in \lambda(A^k)$ e $E_{\lambda,A} = E_{\lambda^k,A^k}$.

(d) $\lambda(A) = \lambda(A^T)$.

(e) se a matriz A é diagonal ou triangular, então, $\lambda(A) = \{a_{ii} : i = 1, \ldots, n\}$.

(f) os vetores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes.

(g) se A é uma matriz (real e) simétrica, os seus valores próprios são números reais.

Exe 6.22

Seja A uma matriz de ordem três tal que $\lambda(A) = \{-1, 0, 1\}$. Então:

A A é invertível e $\lambda(A^{-1}) = \{0, 1\}$.

B A não é invertível e $\lambda(A^2) = \{-1, 0\}$.

C A é invertível e $\lambda(A^{-1}) = \{-1, 0\}$.

D A não é invertível e $\lambda(A^2) = \{0, 1\}$.

Exe 6.23

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Então:

A $\lambda(A) = \{-1, 2, 3\}$.

B $0 \in \lambda(A)$.

C 2 é um valor próprio simples da matriz A.

D $\lambda(A) = \{-1, 2\}$.

Exe 6.24

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = \begin{cases} j^2 & \text{se } i > j \\ i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i < j. \end{cases}$ Então:

$\boxed{\text{A}}$ $0 \in \lambda(A)$.

$\boxed{\text{B}}$ $\lambda(A^{-1}) = \{1, \frac{1}{2}\}$.

$\boxed{\text{C}}$ $\lambda(A^2) = \{-1, 1, 4\}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\lambda(A) = \{1, 2, 3\}$.

Exe 6.25

Considere as seguintes proposições:

- Os valores próprios de uma matriz quadrada são iguais aos valores próprios da sua transposta.
- Uma matriz quadrada é invertível se e só se não admite o valor próprio zero.

A São ambas verdadeiras.

B São ambas falsas.

C Apenas a primeira é verdadeira.

D Apenas a segunda é verdadeira.

Def 6.26

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz diagonalizável se existir uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

Teo 6.27

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, A é diagonalizável se e só se A tem n vetores próprios linearmente independentes.

Teo 6.28

Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizável e $\{p_1, \ldots, p_n\}$ um conjunto de vetores próprios de A linearmente independentes. Então, $P^{-1}AP = D$ em que P é a matriz cuja i-ésima coluna é p_i, $i = 1, \ldots, n$, e D é a matriz diagonal tal que $(D)_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, sendo λ_i o valor próprio de A associado ao vetor próprio p_i.

Exe 6.29

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Mostre que A é diagonalizável.

(b) Determine uma matriz P que diagonaliza A.

(c) Verifique que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, em que λ_1 é o valor próprio de A associado ao vetor próprio de A que forma a primeira coluna de P e λ_2 é o valor próprio de A associado ao vetor próprio de A que forma a segunda coluna de P.

Res

(a) Seja $A - \lambda I_2 = \left[\begin{smallmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 2 & -5-\lambda \end{smallmatrix}\right]$. Então (verifique!),

$$\det(A - \lambda I_2) = (\lambda + 4)(\lambda - 1),$$

pelo que $\lambda(A) = \{-4, 1\}$. Assim, como os valores próprios de A são distintos, os vetores próprios de A são linearmente independentes, pelo que A é diagonalizável.

Res (cont.)

(b) O espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = -4$ é o conjunto solução do sistema linear $(A + 4I_2)p_1 = \underline{0}$. Tem-se, então,

$$E_{-4} = \left\{ \left(\frac{a}{2}, a \right) : a \in \mathbb{C} \right\},$$

pelo que, por exemplo, $p_1 = (1, 2)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = -4$.
O espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ é o conjunto solução do sistema linear $(A - I_2)p_2 = \underline{0}$. Tem-se, então,

$$E_1 = \{(3a, a) : a \in \mathbb{C}\},$$

pelo que, por exemplo, $p_2 = (3, 1)$ é um vetor próprio associado o valor próprio $\lambda_2 = 1$.
Assim, uma matriz P que diagonaliza A é $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Res (cont.)

(c) Sendo $P^{-1} = \frac{1}{5}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ (verifique!), tem-se:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exe 6.30

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que A é diagonalizável.

(b) Determine uma matriz P que diagonaliza A.

(c) Verifique que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$, em que λ_1 é o valor próprio de A associado ao vetor próprio de A que forma a primeira coluna de P, λ_2 é o valor próprio de A associado ao vetor próprio de A que forma a segunda coluna de P e λ_3 é o valor próprio de A associado ao vetor próprio de A que forma a terceira coluna de P.

Res

(a) Seja $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$. Então (verifique!),

$$\det(A - \lambda I_3) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1),$$

pelo que $\lambda(A) = \{1, 2\}$, onde $\lambda_1 = 1$ é um valor próprio simples e $\lambda_2 = 2$ é um valor próprio de multiplicidade algébrica 2.
O espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 1$ é o conjunto solução do sistema linear $(A - I_3)p_1 = \underline{0}$. Tem-se, então,

$$E_1 = \{(-2a, a, a) : a \in \mathbb{C}\},$$

pelo que, por exemplo, $\nu_1 = (-2, 1, 1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 1$.

Res (cont.)

O espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ é o conjunto solução do sistema linear $(A - 2I_3)p_2 = \underline{0}$. Tem-se, então,

$$E_2 = \{(-a, b, a) : a, b \in \mathbb{C}\},$$

pelo que, por exemplo, $\nu_2 = (-1, 0, 1)$ e $\nu_3 = (0, 1, 0)$ são vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ (verifique!).
Seja, então, $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Como $\text{car}(P) = 3$ (verifique!), $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ é um conjunto linearmente independente pelo que A é diagonalizável.

(b) $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Res (cont.)

(c) Sendo $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (verifique!), tem-se (verifique!):

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exe 6.31

Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Mostre que A é diagonalizável.

(b) Determine uma matriz P que diagonaliza A.

(c) Verifique que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, em que λ_1 é o valor próprio de A associado ao vetor próprio de A que forma a primeira coluna de P e λ_2 é o valor próprio de A associado ao vetor próprio de A que forma a segunda coluna de P.

Exe 6.32

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que A é diagonalizável.

(b) Determine uma matriz P que diagonaliza A.

(c) Verifique que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$, em que λ_1 é o valor próprio de A associado ao vetor próprio de A que forma a primeira coluna de P, λ_2 é o valor próprio de A associado ao vetor próprio de A que forma a segunda coluna de P e λ_3 é o valor próprio de A associado ao vetor próprio de A que forma a terceira coluna de P.

Exe 6.33

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $\lambda(A) = \lambda(A^T)$.

Exe 6.34

Seja $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\Pi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Exe 6.35

Seja $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{tr}(A) = 8$ e $\det(A) = 12$. Determine o espetro de A.

Exe 6.36

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) a matriz A_T é invertível se e só se $CS_{A_T x=\underline{0}} = \{\underline{0}\}$.

(b) a matriz A_T é invertível se e só se $\forall b \in \mathbb{R}^n \; [\# CS_{A_T x=b} = 1]$.

(c) a matriz A_T é invertível se e só se $\det(A_T) \neq 0$.

(d) a matriz A_T é invertível se e só se $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^n$.

(e) a matriz A_T é invertível se e só se as colunas da matriz A_T são linearmente independentes.

(f) a matriz A_T é invertível se e só se as linhas da matriz A_T são linearmente independentes.

(g) a matriz A_T é invertível se e só se as colunas da matriz A_T geram $\mathbb{R}^n$.

(h) a matriz A_T é invertível se e só se as linhas da matriz A_T geram $\mathbb{R}^n$.

Exe 6.36 (cont.)

(i) a matriz A_T é invertível se e só se as colunas da matriz A_T formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

(j) a matriz A_T é invertível se e só se as linhas da matriz A_T formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

(k) a matriz A_T é invertível se e só se $n_T = 0$.

(l) a matriz A_T é invertível se e só se $c_T = n$.

(m) a matriz A_T é invertível se e só se $0 \notin \lambda(A_T)$.

Exe 6.37

Determine a e b de modo que $(1,1)$ e $(1,0)$ sejam vetores próprios da matriz $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{smallmatrix}\right]$.

Exe 6.38

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diz-se idempotente se $A^2 = A$. Mostre que, se λ é um valor próprio de uma matriz idempotente, então λ tem que ser igual a 0 ou 1.

Exe 6.39

Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $B = A - \alpha I_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Explicite a relação entre os valores próprios de A e B.

Obs 6.40

Nesta observação vai-se apresentar uma aplicação a problemas de misturas envolvendo os conceitos introduzidos neste capítulo.
Os valores e vetores próprios podem ser usados para determinar as soluções de alguns sistemas de equações diferenciais.
Considere o seguinte sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} y_1' \equiv \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' \equiv \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases}$$

Sejam $y = \left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right]$, $y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}$ e $A = \left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right]$. Então, o sistema pode ser escrito na forma $y' = Ay$:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Obs 6.40 (cont.)

Se A tem dois valores próprios reais distintos λ_1 e λ_2 com vetores próprios v_1 e v_2 associados a λ_1 e λ_2 respetivamente, então a solução geral do sistema de equações diferenciais considerado é

$$y(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) v_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t) v_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se além disso impusermos que $y(t)$ assume um determinado valor y_0 quando $t = 0$, então o problema vai ter uma única solução. Um problema da forma

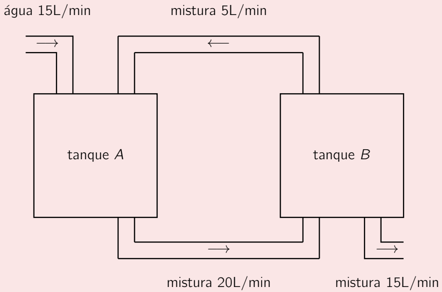
$$y' = Ay, y(0) = y_0$$

é designado por *problema com condições iniciais*.

Obs 6.40 (cont.)

Problema de misturas

Dois tanques estão ligados como ilustrado na figura seguinte:



Inicialmente, o tanque A contém 200 litros de água, onde foram dissolvidos 60 gramas de sal. O tanque B contém 200 litros de água pura. Bombeia-se líquido para dentro e para fora dos dois tanques a taxas indicadas na figura. Pretende-se determinar a quantidade de sal no instante t.

Obs 6.40 (cont.)

Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ a quantidade de sal em gramas nos tanques A e B, respetivamente, no instante de tempo t. Inicialmente, tem-se

$$y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A quantidade total de líquido em cada tanque é sempre 200 litros, porque a quantidade de líquido bombeada para dentro é igual à quantidade bombeada para fora em cada tanque. A taxa de variação da quantidade de sal em cada tanque é igual à taxa em que está sendo adicionado sal menos a taxa em que está sendo bombeado para fora. Para o tanque A, a taxa em que o sal está a ser adicionado é dada por

$$(5\,\mathrm{L/min})\left(\frac{y_2(t)}{200}\,\mathrm{g/L}\right) = \frac{y_2(t)}{40}\,\mathrm{g/min}$$

Obs 6.40 (cont.)

e a taxa de sal que está sendo bombeada para fora é

$$(20\,\mathrm{L/min})\left(\frac{y_1(t)}{200}\,\mathrm{g/L}\right) = \frac{y_1(t)}{10}\,\mathrm{g/min}.$$

Então, a taxa de variação para o tanque A é dada por

$$y_1'(t) = \frac{y_2(t)}{40} - \frac{y_1(t)}{10}.$$

Analogamente, a taxa de variação para o tanque B é dada por

$$y_2'(t) = \frac{20y_1(t)}{200} - \frac{20y_2(t)}{200} = \frac{y_1(t)}{10} - \frac{y_2(t)}{10}.$$

Para determinar $y_1(t)$ e $y_2(t)$, precisamos de resolver o problema com condições iniciais

Obs 6.40 (cont.)

$$y' = Ay, y(0) = y_0,$$

onde $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$ e $y_0 = \left[\begin{smallmatrix} 60 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Calculando os valores próprios de A, obtém-se $\lambda_1 = -\frac{3}{20}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{20}$ com vetores próprios associados $v_1 = (1, -2)$ e $v_2 = (1, 2)$. A solução deste problema é da forma

$$y = c_1 \exp\left(-\frac{3}{20}t\right) v_1 + c_2 \exp\left(-\frac{t}{20}\right) v_2.$$

No instante $t = 0$, $y = y_0$, logo

$$c_1\, v_1 + c_2\, v_2 = y_0,$$

ou, escrito de outra forma

Obs 6.40 (cont.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos calcular o valor das constantes c_1 e c_2 resolvendo o sistema associado à última equação. A solução é $c_1 = c_2 = 30$. Conclui-se que a solução do problema de valor inicial é

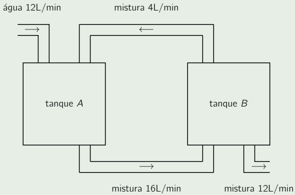
$$y = 30 \exp\left(-\frac{3}{20}t\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 30 \exp\left(-\frac{t}{20}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

que pode ser reescrita da forma

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \exp(-\frac{3}{20}t) + 30 \exp(-\frac{t}{20}) \\ -60 \exp(-\frac{3}{20}t) + 60 \exp(-\frac{t}{20}) \end{bmatrix}.$$

Exe 6.41

Dois tanques contêm, cada um, 100 litros de uma mistura. A mistura no tanque A contém 40 gramas de sal e a mistura no tanque B contém 20 gramas de sal. Bombeia-se líquido para dentro e para fora dos tanques de acordo com a seguinte figura:



Determine a quantidade de sal em $t = 1$min.

Obs 6.42

Some english vocabulary regarding Eigenvalues and Eigenvectors

- vetor próprio de uma matriz associado a um valor próprio/eigenvector of a matrix associated with a eigenvalue
- polinómio característico de uma matriz/characteristic polynomial of a matrix
- equação característica de uma matriz/characteristic equation of a matrix

Sol 6.12

(a) $\lambda(A) = \{-1, 5\}$. $E_{-1} = \{(-2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}$. $E_5 = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(b) $\lambda(B) = \{-i, i\}$. $E_{-i} = \{(\frac{\alpha}{1+i}, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}$. $E_i = \{(\frac{\alpha}{1-i}, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(c) $\lambda(C) = \{-2, 4\}$, em que o valor próprio $\lambda_1 = -2$ tem multiplicidade algébrica dois. $E_{-2} = \{(\beta - \alpha, \beta, \alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.
$E_4 = \{(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(d) $\lambda(D) = \{2, 4\}$, em que o valor próprio $\lambda_1 = 2$ tem multiplicidade algébrica dois. $E_2 = \{(\alpha, \beta, \alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.
$E_4 = \{(-\alpha, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(e) $\lambda(E) = \{0, 2\}$, em que o valor próprio $\lambda_2 = 2$ tem multiplicidade algébrica dois. $E_0 = \{(\alpha, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}$. $E_2 = \{(\alpha, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(f) $\lambda(F) = \{1, 2, 3\}$. $E_1 = \{(0, \alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{C}\}$.
$E_2 = \{(-\frac{\alpha}{2}, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}$. $E_3 = \{(-\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}$.

Sol 6.13

$\lambda(A) = \{\alpha\}$, $E_\alpha = \{(0, 0, x) : x \in \mathbb{C}\}$.

Sol 6.14

D.

Sol 6.15

D.

Sol 6.16

D.

Sol 6.17

B.

Sol 6.18

A.

Sol 6.19

(a) $\lambda(A)=\{1,3\}$, $E_1=\{(\alpha,\alpha):\alpha\in\mathbb{C}\}$, $E_3=\{(-\alpha,\alpha):\alpha\in\mathbb{C}\}$.
(b) $\lambda(A^2)=\{1,9\}$, $E_1=\{(\alpha,\alpha):\alpha\in\mathbb{C}\}$, $E_9=\{(-\alpha,\alpha):\alpha\in\mathbb{C}\}$.
(c) $\lambda(A^{-1})=\{1,\frac{1}{3}\}$, $E_1=\{(\alpha,\alpha):\alpha\in\mathbb{C}\}$, $E_{\frac{1}{3}}=\{(-\alpha,\alpha):\alpha\in\mathbb{C}\}$.

Sol 6.22

D.

Sol 6.23

D.

Sol 6.24

D.

Sol 6.25

A.

Sol 6.31

Por exemplo, $P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. $P^{-1}AP = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

Sol 6.32

Por exemplo, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Sol 6.35

$\lambda(A) = \{2, 6\}$.

Sol 6.37

$a = 0,\ b = 2$.

Sol 6.36

Todas as afirmações são verdadeiras.

Sol 6.39

Se $\lambda \in \lambda(A)$, então $\mu = \lambda - \alpha \in \lambda(B)$.

Sol 6.42

$y_1(1) = 25\exp(-\frac{2}{25}) + 15\exp(-\frac{6}{25}) \approx 34.8773$g e
$y_2(1) = 50\exp(-\frac{2}{25}) - 30\exp(-\frac{6}{25}) \approx 22.5570$g.