*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta.**

GRUPO I

1. [**7,2**] Seja o conjunto $S=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}\subset\mathbb{R}^4$, onde $\vec{a}=(1,1,-1,-2)$, $\vec{b}=(2,1,-1,0)$, $\vec{c}=(0,1,1,2)$ e $\vec{d}=(1,-1,1,1)$. Sejam $H=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \ : \ x-y-z-w=0\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$ e os vetores $\vec{e}=(1,1,0,2)$ e $\vec{f}=(-1,2,1,1)$.

a) Verifique, justificando, se o conjunto S é linearmente independente.

b) Determine o subespaço gerado pelo conjunto S, $L(S)$; indique uma base para o subespaço obtido e conclua em relação à sua dimensão. Justifique.

c) Obtenha uma base ortogonal, W, para H que contenha o maior número possível de elementos de S.

d) Calcule um vetor $\vec{g}$ de modo que o conjunto $U=\{\vec{e},\vec{f},\vec{g}\}\subset\mathbb{R}^4$ seja linearmente independente e, além disso, não exista em U nenhum par de vetores ortogonais.

2. [**1,3**] Sejam $B=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_{i-1},\vec{b}_i,\vec{b}_{i+1},\ldots,\vec{b}_n\}$ uma base para o espaço $\mathbb{R}^n$ e o vetor $\vec{v}=c_1\vec{b}_1+\ldots+c_{i-1}\vec{b}_{i-1}+c_i\vec{b}_i+c_{i+1}\vec{b}_{i+1}+\ldots+c_n\vec{b}_n$, $c_j\in\mathbb{R}$, $j=1,\ldots,n$, e tal que $c_i\neq 0$. Mostre que o conjunto $B_1=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_{i-1},\vec{v},\vec{b}_{i+1},\ldots,\vec{b}_n\}$ é uma base para $\mathbb{R}^n$, sabendo que B_1 foi obtido a partir de B substituindo o vetor $\vec{b}_i$ pelo vetor $\vec{v}$.

....*(continua no verso)*

GRUPO II

3. [**2,6**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $S=\{\vec{a},\vec{b}\}$ é uma base ortonormada para $L(S)$, subespaço gerado pelo conjunto S, $\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{b})-2\vec{c}$, $\vec{c}\in L(S)$, $\|\vec{c}\|=\sqrt{2}$ e $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1$. Calcule:

a) O volume do prisma definido pelos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{d}$.

b) O ângulo, α, formado pelos vetores $\vec{d}$ e $\vec{a}-\vec{c}$.

c) O valor do produto escalar $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

GRUPO III

4. [**5,1**] Sejam o plano $M: x+y+z=1$, o ponto $R=(-1,0,1)$ e a reta, r, com a equação vetorial $X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(1,0,1)$ e $\vec{a}=(0,-1,-2)$.

a) Classifique a reta *r* quanto à sua posição relativa em relação ao plano *M* e determine a distância do ponto *R* a *M*.

b) Calcule o ângulo, α, que a reta *r* faz com o plano *M* e obtenha a equação vetorial da reta, r_1, que é a projeção ortogonal de *r* sobre *M*.

5. [**2,6**] Considere os dados indicados na pergunta **4.**. Determine as equações vetoriais das retas, h e h_1, que passam no ponto *R*, são concorrentes com a reta *r* e fazem, com esta reta, um ângulo, α, tal que $\alpha=\arccos\sqrt{5}/3$.

6. [**1,2**] Seja $S=\{\vec{a},\vec{b}\}\subset\mathbb{R}^3$ um conjunto linearmente independente. Verifique se o conjunto $V=\{\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+2\vec{b},\vec{a}+(\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})\}$ é uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$. Justifique.