Departamento de Matemática e Aplicações 2 /4/ 2013

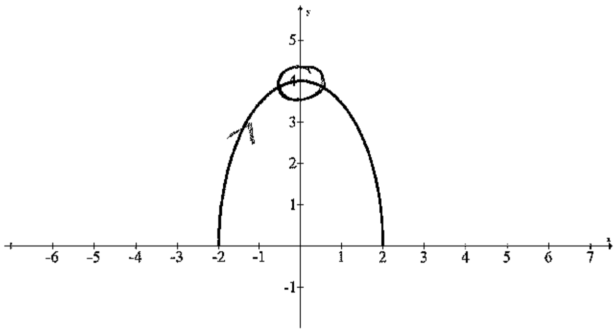
Duração: 90 minutos **Teste de Análise Matemática EE - versão A**

Nome: ______________________________ Nr.: __________ Curso: ________

GRUPO I (7 valores)

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correcta no quadrado correspondente. Cada resposta correcta vale 1 valor.

1. Qual das seguintes expressões representa a curva $\mathcal{C}$ na figura, percorrida a partir do ponto $(-2, 0)$ e com fim no ponto $(2, 0)$?



$r(t) = (3\cos t, 2\sin t),\ t \in [0, \pi]$ ☐

$r(t) = (2\cos(\pi - t), 3\sin(\pi - t)),\ t \in [0, \pi]$ ☐ $\vec{r}(0) = (2\cos\pi, 3\operatorname{sen}\pi) = (-2, 0)$; $\vec{r}(\pi) = (2\cos 0, 3\operatorname{sen} 0) = (2, 0)$

$r(t) = (2\cos t, 3\sin t),\ t \in [0, \pi]$ ☐ $\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = (0, 3)$

Nenhuma das anteriores. ☒

2. Qual dos conjuntos abaixo representa o domínio da função vetorial $\vec{r}(t) = (\ln(t+1), \frac{1}{t})$?

$D =]-1, +\infty[$ ☐ $t + 1 > 0 \wedge t \neq 0$

$D =]-1, +\infty[\backslash\{0\}$ ☒ $t > -1 \wedge t \neq 0$

$D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ☐

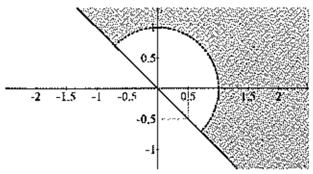
Nenhum dos anteriores. ☐

3. Considere a curva $\mathcal{C}$ representada pela função vetorial $\vec{r}(t) = (t^2 + t)\vec{e}_1 + (t^3 - 1)\vec{e}_2$. Qual dos vetores é tangente à curva no instante $t = 0$? $\vec{r}\,'(t) = (2t+1, 3t^2)$ $\vec{r}\,'(0) = (1, 0)$

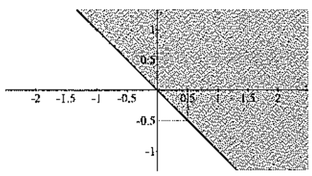
(0,-1) ☐; (0,0) ☐; (1,0) ☒; Nenhum dos anteriores. ☐

4. Considere a função real de duas variáveis reais, $f(x, y) = \sqrt{x+y}.\ln(x^2 + y^2 - 1)$. Qual destes domínios planos representa o domínio de f?

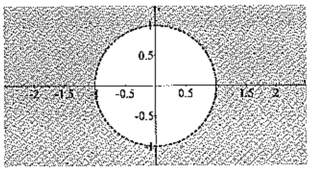
$y \geq -x \wedge x^2 + y^2 > 1$



☒



☐



Nenhuma das anteriores. ☐

5. Qual destas funções reais de duas variáveis reais tem por domínio $\mathbb{R}^2$?

$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ☐

$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ ☐

$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ☒

Nenhuma das anteriores. ☐

6. Considere a função real de duas variáveis reais definida no seu domínio, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ e o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Indique qual a afirmação verdadeira:

Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e é igual a zero . ☐

Não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pois $\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\right) \neq \lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\right)$. ☐

Não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pois $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)$ depende do valor de k. ☒

Nenhuma das anteriores. ☐

7. Considere a função real de duas variáveis reais definida no seu domínio, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ e o ponto $(0,0)$. Indique qual a afirmação verdadeira:

f é contínua em $(0,0)$. ☐

f não é contínua em $(0,0)$ porque não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. ☐

f não é contínua em $(0,0)$ porque existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ mas $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$. ☐

Nenhuma das anteriores. ☐

GRUPO II (13 valores)

Apresente todos os cálculos efectuados.

1. Considere a função vetorial que define uma curva em $\mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = \sin^2 t.\vec{a} + \cos^2 t.\vec{b} + \vec{c}$ onde $\vec{a} = \vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_3, \vec{c} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$. Escreva a função à custa das suas componentes.

$\vec{R}(t) = sen^2 t\,(\vec{e_2}) + cos^2 t\,(\vec{e_3}) + 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$

$\vec{R}(t) = 2\vec{e_1} + (sen^2 t - 3)\vec{e_2} + cos^2 t\,\vec{e_3}$

$=$

$\vec{R}(t) = (2, sen^2 t - 3, cos^2 t)$

2. Considere a função vetorial $\vec{r}(t) = (t^2 - t, \sin t)$.

(a) Determine $\vec{r}\,'(t)$.

$\vec{R}'(t) = (2t-1, \cos t)$

(b) Determine a equação da reta tangente à curva representada por $\vec{r}(t)$ no instante $t = 0$.

$\vec{R}'(0) = (-1, 1)$

$\vec{R}(0) = (0, 0)$

eq. paramétrica. eq. cartesiana

$(x,y) = \vec{R}(0,0) + t\,\vec{R}'(0,0)$, $t \in \mathbb{R}$

eq. vetorial da reta. $\rightarrow (x,y) = (0,0) + t(-1,1)$, $t \in \mathbb{R}$

$(x,y) = (-t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = -t \\ y = t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{y = -x}$

(c) Determine os instantes em que o vetor tangente à curva representada por $\vec{r}(t)$ é um vetor vertical.

Quando é que $\vec{R}'(t)$ é vertical?

$\vec{R}'(t)$ é vertical quando a sua 1ª coordenada é zero:

$\vec{R}'(t) = (2t-1, \cos t)$ $\qquad 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1/2$

No instante $t = 1/2$, isto é, no ponto $\vec{R}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}, \operatorname{sen}\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4}, \operatorname{sen}\frac{1}{2}\right)$.

3. Considere a função real de duas variáveis $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(a) Estude a continuidade da função f no seu domínio.

(b) Determine $f'_y(0,0)$, se existir.