Prova sem consulta. Duração: 2h (25m de tolerância). 2ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta.**

GRUPO I

1. [**5,7**] Sejam as transformações lineares $R \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ e $S, T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dadas por

$$R(x,y) = (x+y, x+2y, -2x-y), \qquad S(x,y,z) = (z-x-y, z-x, x+y-z),$$

$$T(x,y,z) = (-x+y+z, x+y-z, y+z)$$

em relação às bases canónicas E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *R*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Verifique quais das funções dadas são injetivas. Justifique.

c) Mostre que apenas a função *T* é bijetiva e obtenha a sua função inversa.

2. [**2,0**] Sejam V e W espaços lineares sobre um corpo Ω. Mostre que se $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ é uma transformação linear injetiva, então T é invertível e a sua função inversa $T^{-1} : T(\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$ é linear.

GRUPO II

3. [**4,0**] Considere as transformações lineares definidas na questão 1. e as bases $\mathrm{U} = \{(0,1,-1),(0,1,0),(1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathrm{B} = \{(1,-1),(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Usando o cálculo matricial, obtenha as matrizes $m(T)_{\mathrm{E}_3,\mathrm{U}}$, representação matricial de *T* em relação às bases E_3 e U, e $m(R)_{\mathrm{B},\mathrm{E}_3}$, representação matricial de *R* em relação às bases B e E_3.

b) Usando preferencialmente as matrizes obtidas na alínea anterior, calcule a matriz $m(TSR)_{\mathrm{B},\mathrm{U}}$, representação matricial de TSR em relação às bases B e U.

..........*(continua no verso)*

GRUPO III

4. [**2,5**] Seja a matriz real:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 0 & 4\\ 1 & 0 & \beta-1 & 1\\ 2 & 1 & \beta+1 & 1\\ 0 & \alpha-1 & \beta & 2\end{bmatrix}$$

a) Determine, indicando todas as operações efetuadas, os valores dos parâmetros α e β para os quais a matriz ***C*** é não singular.

b) Sejam ***A*** e ***B*** duas matrizes do tipo $n\times n$. Admita que ***B*** é obtida a partir de ***A*** por aplicação consecutiva das seguintes operações (OP) sobre as linhas (L) de ***A***:

OP1 : Multiplicação de todas as linhas de ***A*** por (-2).

OP2 : $-2L_1-4L_2\rightarrow L_2$; OP3 : $L_3-2L_4\rightarrow L_3$;

Relacione o determinante de ***B*** com o determinante de ***A***. Justifique.

GRUPO IV

5. [**5,8**] Considere a transformação linear $T\ :\ \mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$m(T)=\begin{bmatrix}a & 8 & b\\ 8 & a & b\\ b & b & 4\end{bmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Seja o espaço próprio, associado a um dos valores próprios de $m(T)$, $\mathrm{E}(\alpha)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 2x+2y+z=0\right\}$ e a base, para o espaço $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{B}=\left\{(2,2,1),(1,0,0),(1,0,-2)\right\}$.

a) Determine os valores próprios e os respetivos espaços próprios; indique, para cada um destes subespaços, uma base e a dimensão.

b) Verifique, justificando, se T admite uma base de vetores próprios, U, para $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, obtenha essa base e as matrizes $m(T)_{\mathrm{U,U}}$ e $m(T)_{\mathrm{U,E}}$.

c) Calcule a matriz $m(T)_{\mathrm{B,B}}$ e verifique se esta matriz é semelhante à matriz $m(T)_{\mathrm{U,U}}$. Justifique devidamente, apresentando as expressões matriciais que as relacionam.