Prova sem consulta. Duração: 1h30m (15m de tolerância) Prova de Reavaliação Global

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta. Em cada pergunta da prova é apresentada a cotação prevista.**

## GRUPO I

**1.** [**4,0**] Considere o conjunto $\mathrm{S}=\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}\subset\mathbb{R}^4$, onde $\vec{a}=(2,1,1,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,1,0)$ e $\vec{c}=(1,2,1,0)$. Seja $\mathrm{H}=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\ :\ y=0\ \wedge\ z-2w=0\right\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Determine:

**a)** O subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$, e conclua em relação à sua dimensão. Indique uma base, U, para o subespaço obtido que inclua o maior número possível de elementos de S. Justifique.

**b)** Uma base, W, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que inclua dois elementos não ortogonais de H e um elemento de $L(\mathrm{S})$. Justifique.

**2.** [**4,5**] Considere a transformação linear $T\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$m(T)=\begin{bmatrix}1&3&4\\2&6&8\\1&3&4\end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Seja $\mathrm{U}=\left\{(\alpha,0,\delta),(1,2,1),(\delta,1,-\delta)\right\}$ um conjunto de vetores próprios de $m(T)$ e $\mathrm{B}=\left\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\right\}$ uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$. Determine:

**a)** Os valores próprios e os respetivos vetores próprios e espaços próprios; indique, para cada um dos espaços próprios, uma base e a dimensão.

**b)** Os valores de $\alpha,\delta\in\mathbb{R}$, de modo que U seja uma base de vetores próprios para $\mathbb{R}^3$ e as matrizes $m(T)_{\mathrm{U,U}}$ e $m(T)_{\mathrm{B,B}}$. Justifique devidamente.

........................................................................................................................*(continua no verso)*

## GRUPO II

**3.** [**2,5**] Considere o plano $M: x+y=1$ e a reta, *r*, com a equação vetorial $X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, tal que $P=(0,1,3)$ e $\vec{a}=(1,1,1)$. Obtenha a equação vetorial de uma reta, *h*, que passa no ponto $Q=(2,0,-1)$, é concorrente com a reta *r* e faz o ângulo $\alpha=\pi/6$ com o plano *M*.

## GRUPO III

**4.** [**2,0**] Sejam $A$ e $C=(A-\alpha I)^2$, $\alpha\in\mathbb{R}$, matrizes quadradas de ordem *n*, sendo *I* a matriz identidade. Seja *X* um vetor próprio de *A* associado ao valor próprio $\lambda$.

**a)** Mostre que *X* é um vetor próprio de *C* associado ao valor próprio $(\lambda-\alpha)^2$.

**b)** Para que valores de $\lambda$ a matriz *C* é não singular? Justifique.

**5.** [**4,5**] Sejam as transformações lineares $S\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ e $T\in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$, definidas por

$$S(x,y)=(x+2y,-x-y,-3x-4y) \quad \text{e} \quad T(x,y,z)=(x+y-z,-x+z)$$

em relação às bases canónicas, $\mathrm{E}_3$, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e $\mathrm{E}_2$, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

**a)** Obtenha o núcleo e o contradomínio de *S*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

**b)** Mostre que apenas *S* é uma função injetiva e determine a sua função inversa.

## GRUPO IV

**6.** [**2,5**] Considere as transformações lineares definidas na questão **5.** e a base $\mathrm{V}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}=\{(1,2),(1,1)\}\subset\mathbb{R}^2$. Usando o cálculo matricial, obtenha a representação matricial da composição possível de *S* com *T* em relação à base V (domínio e conjunto de chegada).