Base e dimensão de um espaço de vectores

Definição [1.13]: Base de um espaço de vectores
Seja $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto S diz-se uma *base* para um espaço linear $V \subseteq \mathbb{R}^n$, se S gerar *de forma única* todo e qualquer vector de V, ou seja, se:

i) S é um conjunto *linearmente independente*;

ii) $L(S) = V$.

- A ordenação dos elementos que constituem o conjunto S é determinante na definição de uma base (*conjunto ordenado* de vectores); são bases distintas os conjuntos $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ e $S_1 = \{\vec{s}_k, \ldots, \vec{s}_2, \vec{s}_1\}$, por exemplo.

Definição [1.14]: Dimensão de um espaço de vectores
Se o conjunto $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$, constituído por k vectores de $\mathbb{R}^n$, é uma *base* para o subespaço $L(S) \subseteq \mathbb{R}^n$, então diz-se que $L(S)$ tem *dimensão finita* igual a k e denota-se por $\dim L(S) = k$. Nestas condições, diz-se também que $L(S)$ é um espaço *k-dimensional*. Por outro lado, se $L(S)$ não é de dimensão finita, então diz-se de *dimensão infinta*.

- O subespaço $L(S) \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se *unidimensional*, se $\dim L(S) = 1$, *bidimensional*, se $\dim L(S) = 2$, *tridimensional*, se $\dim L(S) = 3$, e assim sucessivamente.

- Se S é um conjunto linearmente dependente, então $\dim L(\mathrm{S}) < k$.

- Uma vez que, por convenção, $L(\varnothing) = \{\vec{0}\}$ e que $\varnothing$ é *linearmente independente*, então $\varnothing$ é uma base para $L(\varnothing)$ e $\dim L(\varnothing) = 0$.

- Existe uma infinidade de bases para um dado espaço de vectores, possuindo, todas elas, um conjunto de propriedades comuns.

Teorema [1.22]: Seja $\mathrm{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ um espaço de vectores de dimensão finita igual a *n*, ou seja, $\dim \mathrm{V} = n$. Verifica-se:

i) Qualquer conjunto formado por mais de *n* elementos de V é um conjunto *linearmente dependente*;

ii) Todo o conjunto *linearmente independente* formado por $k < n$ elementos de V é um *subconjunto de uma base* para V;

iii) Qualquer conjunto *linearmente independente* formado por *n* elementos de V é uma *base* para V.

- Em relação ao teorema anterior, convém realçar o seguinte:

  i) Não é possível encontrar em V mais do que *n* elementos *linearmente independentes*, isto é, qualquer *base* para V possui *exactamente n* elementos;

  ii) Qualquer conjunto formado por menos de *n* elementos de V nunca poderá gerar V.

Exemplo 13: No espaço $\mathbb{R}^2$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$\text{E} = \left\{\vec{i}, \vec{j}\right\} = \{(1,0),(0,1)\}$$

é designada por *base canónica*, ou *base natural*, para $\mathbb{R}^2$.
O espaço $\mathbb{R}^2$ admite, no máximo, **2** vectores *linearmente independentes*.

Exemplo 14: No espaço $\mathbb{R}^3$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$\text{E} = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

é designada por *base canónica*, ou *base natural*, para $\mathbb{R}^3$.
O espaço $\mathbb{R}^3$ admite, no máximo, **3** vectores *linearmente independentes*.

Exemplo 15 [1.66]: No espaço $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$\text{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\} = \{(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),(0,0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,1)\}$$

é designada por *base canónica*, ou *base natural*, para $\mathbb{R}^n$.
O espaço $\mathbb{R}^n$ admite, no máximo, ***n*** vectores *linearmente independentes*.

Teorema: Admita-se que U é um subespaço de um espaço V de dimensão finita; seja $\dim \text{V} = n$. Então:

i) O subespaço U é de dimensão finita e $\dim \text{U} \leq n$;

ii) O subespaço U possui uma base com um número finito de elementos de V e qualquer base para U é um subconjunto de uma base para V;

iii) $\text{U} = \text{V}$, se e só se $\dim \text{U} = n$.

Exemplo 16 [1.74]: Os conjuntos de vectores dos **exemplos 5** e **6**

$$S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1)\} \text{ e } S_2 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6\} = \{(2,0,1), (0,2,1)\}$$

são *linearmente independentes* e geram (*de forma única*) o subespaço

$$L(S_1) = L(S_2) = \left\{(x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Os conjuntos S_1 e S_2 são duas *bases* (ordenadas) distintas para o subespaço $L(S_1) \subseteq \mathbb{R}^3$; além disso, verifica-se

$$\dim L(S_1) = 2$$

Exemplo 17 [1.74]: O conjunto de vectores do **exemplo 9**

$$S_8 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1), (2,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é *linearmente independente* e gera (*de forma única*) o espaço

$$L(S_8) = \mathbb{R}^3$$

O conjunto S_8 é uma *base* (ordenada) para o espaço $\mathbb{R}^3$ e, além disso,

$$\dim L(S_8) = \dim\ \mathbb{R}^3 = 3$$

Por exemplo, o conjunto de vectores

$$S_9 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6, \vec{a}_4\} = \{(2,0,1), (0,2,1), (2,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é, também, uma *base* (ordenada) para o espaço $\mathbb{R}^3$; convém notar que

$$\vec{a}_4 = (2,-1,1) \notin L(S_1) = L(S_2)$$

pelo que S_9 é um conjunto *linearmente independente*.

Componentes e coordenadas de um vector

- As *componentes* e *coordenadas* de um vector variarão em função da *base* (ordenada) que for escolhida dentro do espaço de vectores.

Definição [1.15]: Componentes e coordenadas de um vector
Seja o espaço $\mathbb{R}^n$, tal que $\dim \mathbb{R}^n = n$. Se o conjunto de vectores $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \ldots, \vec{s}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ é uma *base* (*ordenada*) para $\mathbb{R}^n$, qualquer vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ pode ser expresso através de uma *combinação linear* dos vectores de S, isto é,

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{s}_1 + \alpha_2\vec{s}_2 + \alpha_3\vec{s}_3 + \ldots + \alpha_n\vec{s}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{s}_i$$

que é única. Cada uma das parcelas da *combinação linear*

$$\alpha_i\vec{s}_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

designa a *componente* do vector $\vec{x}$ na direcção do vector $\vec{s}_i$, enquanto que os escalares reais α_i , $i = 1, 2, \ldots, n$ dizem-se as *coordenadas* do vector $\vec{x}$ *em relação à base* (*ordenada*) S, podendo escrever-se

$$\vec{x}_S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)_S$$

- A ordenação dos vectores na *base* S é determinante na definição das *componentes* e *coordenadas* do vector; daí, muitas vezes, o recurso ao conceito de *base ordenada*.

- Sempre que se omitir a base em relação à qual o vector $\vec{x}$ está definido, admite-se que a base considerada é a *base canónica*, ou *base natural*, para o espaço $\mathbb{R}^n$; neste caso, diz-se que o vector está definido através das suas *coordenadas naturais*.