UNIVERSIDADE DO MINHO	29 de Novembro de 2008
Resolução do 1º Teste de **Álgebra Linear**	
LEI	Duração: 2 horas

Nome: ____ **Nº:** __________

Nota. *Preencha devidamente o cabeçalho deste enunciado e da sua folha de exame. As respostas aos grupos* **I, II** *e* **III** *devem ser indicadas no enunciado, enquanto que o grupo* **IV** *deve ser resolvido na folha de exame.* **O enunciado deve ser portanto entregue com a folha de exame.** *Para cada resposta* **errada** *dos grupos* **I, II** *desconta-se* 20% *do seu valor.*

I. *Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (*V*) ou falsa (*F*), colocando uma circunferência no símbolo correspondente.*

1. **a)** Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Então $3A_1 + 2A_2 + 5A_3 = AX$, em que A_j é a j-ésima coluna de A. V F

b) As matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1/b & 1 \end{pmatrix}$, com $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, verificam a equação $X^2 = 2X$. V F

c) Seja A uma matriz de ordem 2×3.
Não existe nenhuma matriz B tal que AB^T seja uma matriz coluna. V F

d) Seja A uma matriz invertível, tal que $AB + BA = 0$, para uma dada matriz B.
Então $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$. V F

2. Seja $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base dum espaço vectorial V, e seja $B' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ com $u_1' = 2u_1 - u_2 + u_3$, $u_2' = u_1 + u_3$ e $u_3' = 3u_1 - u_2 + 3u_3$.

a) B' é uma base de V. V F

b) $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$. V F

c) As coordenadas do vector $v = -2u_1' + 3u_2' + u_3'$ na base B são 2, 1 e 4. V F

d) Não é possível escrever os vectores da base B como combinação linear dos vectores de B'. V F

3. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $A^{-1} = -A$. V F

b) As matrizes A^{-1} e A^2 não são comutáveis. V F

c) $(A^{-1})^T$ é uma matriz simétrica. V F

d) $(A^{-1})^2 = I_2$. V F

Cotações	Parte I	Parte II	Parte III	Parte IV
	6	1.5+1.5	3 + 3	1+1.5+1+1.5

II. *Para cada questão deste grupo, indique a (única) alínea que contém uma afirmação verdadeira, colocando uma circunferência no símbolo correspondente.*

1. Seja $v = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. A matriz $I_3 - vv^T$:

a) é ortogonal.

b) é diagonal.

c) é simétrica.

d) tem característica igual a 3.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, e recorde que $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$.

a) $(1, 0, 3) \in N(A)$.

b) As linhas de A são linearmente independentes.

c) $(0, 0, 0) \notin N(A)$.

d) $N(A)$ tem dimensão 2.

III. *Para cada questão deste grupo, complete as respectivas afirmações.*

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \beta + \beta^2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} \beta \\ -2 \\ \beta + 1 \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}$

a) O sistema $Ax = b$ é impossível se e só se .... $\beta = 0$ ....

b) O sistema $Ax = b$ é possível e indeterminado se e só se .... $\beta = -1$ ....

c) O sistema $Ax = b$ é possível e determinado se e só se............ $\beta \neq -1$ e $\beta \neq 0$ ....

2. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \beta & 3 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 \end{pmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Tem-se $c(A) = 2$ se se e só se .... $\beta = 0$ .... ou ($\beta \neq 0$ e .... $\alpha = 3$ ....).

b) Tem-se $c(A) = 3$ se e só se .... $\alpha \neq 3$ e $\beta \neq 0$ ....

c) Os valores possíveis para a dimensão do espaço coluna da matriz A são...... 2 e 3 ......

IV. *Responda à questão deste grupo justificando a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.*

Considere U e V, subespaços vectoriais reais de $\mathbb{R}^3$, tais que:

$$U = \{(a, b, c) : a + b + c = 0 \text{ e } a, b, c \in \mathbb{R}\}, \qquad V = \{(a, b, c) : b = c \text{ e } a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

a) Diga o que entende por *subespaço vectorial real de* $\mathbb{R}^3$.

R: *Um subespaço vectorial real de* $\mathbb{R}^3$ *é um subconjunto não vazio* S *de* $\mathbb{R}^3$*, fechado para as operações de adição e de multiplicação por um número real, ou seja,* S *é tal que:*

(i) $x + y \in S,\ \forall x, y \in S$;

(ii) $\alpha x \in S,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in S$.

b) Mostre que U é um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^3$.

R: *É claro, pela sua definição, que* U *é um subconjunto de* $\mathbb{R}^3$ *e é não vazio pois* $(0,0,0) \in U$*. Mostremos agora que* U *é fechado para as operações de adição e de multiplicação por um escalar. Sejam* $x, y \in U$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Então* $x = (a,b,c)$ *e* $y = (d,e,f)$ *para alguns* $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$ *com* $a+b+c = 0 = d+e+f$*. Daqui resulta que* $x + y = (a+d, b+e, c+f)$ *e, dado que* $(a+d)+(b+e)+(c+f) = (a+b+c)+(d+e+f) = 0+0 = 0$*, deduz-se que* $x+y \in U$*. Por outro lado* $\alpha x = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ *donde* $\alpha x \in U$ *pois* $\alpha a + \alpha b + \alpha c = \alpha(a+b+c) = \alpha 0 = 0$*. Provou-se assim que* U *é um subespaço vectorial real de* $\mathbb{R}^3$*.*

c) Determine uma base e a dimensão de V.

R: *O subespaço* V *pode ser escrito nas seguintes formas*

$$\begin{aligned} V &= \{(a,b,c) : b = c \text{ e } a,b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a,b,b) : a,b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1,0,0) + b(0,1,1) : a,b \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle. \end{aligned}$$

Mostramos deste modo que $(1,0,0)$ *e* $(0,1,1)$ *formam um conjunto de geradores de* V*. Para concluir que formam uma base de* V*, falta provar que estes vectores são linearmente independentes. Ora, para* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tem-se,*

$$\begin{aligned} \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) = (0,0,0) &\Rightarrow (\alpha, \beta, \beta) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

Os vectores $(1,0,0)$ *e* $(0,1,1)$ *são portanto linearmente independentes e, por isso, formam uma base de* U*.*

Dado que a dimensão, quando finita, de um espaço vectorial é o número de elementos de qualquer das suas bases, conclui-se que a dimensão de V *é igual a 2.*

d) Defina o subespaço $U \cap V$ e determine um conjunto de geradores de $U \cap V$.

R: *Das definições dos subespaços* U *e* V *e da operação de intersecção, resulta que*

$$U \cap V = \{(a,b,c) : a+b+c = 0, b = c \text{ e } a,b,c \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos ainda representar este subespaço de $\mathbb{R}^3$ *nas formas seguintes*

$$\begin{aligned} U \cap V &= \{(a,b,c) : a+b+c = 0, b = c \text{ e } a,b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a,b,c) : a+c+c = 0, b = c \text{ e } a,b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a,b,c) : a = -2c, b = c \text{ e } a,b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2c,c,c) : c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c(-2,1,1) : c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-2,1,1) \rangle, \end{aligned}$$

e deduzir assim que $(-2,1,1)$ *é um gerador de* $U \cap V$*.*