Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância) 1ª Prova de Reavaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta.**

GRUPO I

1. [**7,5**] Seja o conjunto $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}\subset\mathbb{R}^4$, onde $\vec{a}=(1,2,-1,-2)$, $\vec{b}=(3,2,-2,-3)$, $\vec{c}=(0,2,-1,-1)$ e $\vec{d}=(1,4,-2,-3)$. Sejam os vetores $\vec{e}=(1,1,-1,1)$ e $\vec{f}=(2,1,1,-1)$, e o subespaço $\mathrm{H}=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \;:\; z=x+y \;\wedge\; w=-z\}$. Determine:

a) O subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$; indique uma base para o subespaço que apenas inclua elementos de S e conclua em relação à sua dimensão. Justifique.

b) Uma base ortogonal, W, para $L(\mathrm{S})$ que inclua um elemento de H.

c) Uma base, V, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que inclua os vetores $\vec{e}$ e $\vec{f}$.

GRUPO II

2. [**2,6**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\mathrm{S}=\{\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\}$ é um conjunto ortogonal, $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$, $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}$, $\|\vec{a}-\vec{c}\|=2$, $\measuredangle(\vec{a}\cdot\vec{c})=\pi/3$ e $\vec{c}+\vec{d}=\vec{b}\times\vec{a}$. Calcule:

a) As normas dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{d}$.

b) O ângulo, α, formado pelos vetores $\vec{a}+\vec{d}$ e $\vec{a}\times\vec{b}$ (se não resolveu a alínea anterior considere $\|\vec{d}\|=2\sqrt{2}$).

....*(continua no verso)*

3. [**5,3**] Sejam o plano $M \ : x - y = 3$, o ponto $R = (-1,0,1)$ e a reta, *r*, com a equação vetorial $X(t) = P + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, em que $P = (1,0,1)$ e $\vec{a} = (1,-1,1)$.

a) Calcule a distância do ponto *R* à reta *r* e o ponto, *I*, desta reta mais próximo de *R*.

b) Determine a equação vetorial de uma reta *s* que passa no ponto *R*, é paralela ao plano *M* e é concorrente com a reta *r*. Qual o valor do ângulo, β, que a reta *s* faz com a reta *r*?

4. [**2,0**] Seja $\mathrm{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \ldots, \vec{b}_k\}$ um conjunto de *k* vetores do espaço $\mathbb{R}^n$.

a) Defina $\dim L(\mathrm{B})$, dimensão do subespaço, $L(\mathrm{B})$, gerado pelo conjunto B. Qual a dimensão máxima que o subespaço $L(\mathrm{B})$ pode assumir e em que circunstâncias é que tal ocorrerá.

b) Seja o vetor $\vec{v} \in L(\mathrm{B})$. Mostre que se B é linearmente independente, então o conjunto $\mathrm{B}_1 = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \ldots, \vec{b}_k, \vec{v}\}$ é linearmente dependente.

GRUPO III

5. [**2,6**] Sejam os dados apresentados na pergunta **3.**. Obtenha as equações vetoriais das retas, h e h_1, que são paralelas ao plano $M_1 \ : x + y - z = 3$, fazem o ângulo $\alpha = \pi / 6$ com *M* e passam no ponto, *H*, de interseção de *M* com o eixo dos *xx*.