Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Mestrados Integrados em Eng Mecânica e em Eng Industrial e Gestão

Álgebra Linear e Geometria Analítica

2011-11-21

1ª Prova de Avaliação

- Identifique as folhas de capa (nome completo), bem como as folhas de continuação usadas.
- O exame tem a duração de 1h45m, sendo considerados 30m de tolerância para a sua conclusão. A desistência só é possível 1h após o seu início.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular gráficas nem de microcomputadores.

ATENÇÃO: Resolva cada um dos Grupos utilizando folhas de capa distintas.

GRUPO I

1. Seja o conjunto de vectores $S=\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right\}\subset\mathbb{R}^4$, em que $\vec{a}=(1,1,0,1)$, $\vec{b}=(2,-1,3,2)$, $\vec{c}=(0,-1,\alpha,1)$ e $\vec{d}=(-1,-2,1,\beta)$. Obtenha α e β de modo que o conjunto *S* seja linearmente independente. Poderão existir em *S* não mais de dois vectores linearmente independentes? Justifique a resposta.

2. Considere $\alpha=1$ e $\beta=2$ no conjunto *S* do exercício anterior.

   a) Determine o subespaço, $L(S)$, gerado por *S*; obtenha uma base para $L(S)$ e conclua em relação à dimensão do subespaço.

   b) Calcule uma base ortogonal, *U*, para o subespaço $L(S)$, que seja constituída por vectores com norma igual a $\sqrt{3}$.

   c) Exprima o vector $\vec{b}=(2,-1,3,2)$ como combinação linear dos elementos da base *U*.

3. Sejam o plano $M=\left\{X\in\mathbb{R}^3\ :\ X=P+s\vec{a}+t\vec{b},\ s,t\in\mathbb{R}\right\}$ e o vector $\vec{n}$, não nulo, de $\mathbb{R}^3$ que é perpendicular aos vectores geradores de *M*. Mostre que qualquer elemento do conjunto $R=\left\{X\in\mathbb{R}^3\ :\ (X-P)\cdot\vec{n}=0\right\}$ pertence ao conjunto *M*.

(continua no verso)

GRUPO II

4. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 1$, $\|\vec{c}\| = 2$, $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{6}$, $\measuredangle(\vec{c},\vec{b}) = 30°$, $\vec{c}\cdot\vec{b}\times\vec{a} = -2$ e $\vec{d} = \vec{c} + \vec{a}\times\vec{b}$. Determine:

   a) A norma do vector $\vec{d}$.

   b) O ângulo formado pelos vectores $\vec{b}$ e $\vec{d}$ e a norma do vector $\vec{c}\times\vec{d}$ (se não resolveu a alínea a) admita que $\|\vec{d}\| = \sqrt{13}$).

5. Considere o plano $M : x+z=4$, a recta $r : X(u) = P + u\vec{a}$, $u \in \mathbb{R}$, em que $P = (1,0,1)$ e $\vec{a} = (1,1,-1)$, e o ponto $Q = (1,0,-1)$. Determine:

   a) Os pontos do eixo dos *yy* que se encontram à mesma distância da recta *r* e do plano *M*.

   b) A equação cartesiana do plano M_1, perpendicular à recta *r* e que passa no ponto, *I*, desta recta mais próximo da origem.

   c) A equação vectorial de uma recta *s* que passa no ponto *Q*, é paralela ao plano *xOy* e faz um ângulo de $30°$ com o plano *M*.

6. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Mostre que se o conjunto $S = \{\vec{a},\vec{b}\}$ é linearmente dependente, então $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$.

Cotação prevista	1 2.1 ; 2 a) 2.0 b) 1.6 c) 1.6 ; 3 1.3 ; 4 a) 1.3 b) 1.2 5 a) 2.5 b) 2.5 c) 2.7 ; 6 1.2 .