VALORES/VECTORES PRÓPRIOS

1. Calcule, sem recorrer ao polinómio característico, os valores próprios de cada uma das seguintes matrizes quadradas reais.

a) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. **b**) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. **c**) $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\text{sen}\theta\\ \text{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$.

d) $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$. **e**) $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$. **f**) $\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 7 & -4\end{bmatrix}$.

g) $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 8 & -7 & 8\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$. **h**) $\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 6\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}$.

2. Determine todas as matrizes quadradas de ordem 2, num corpo Ω ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), cujos valores próprios são:

a) Reais e distintos. **b**) Reais e iguais.

c) Complexos conjugados.

3. Considere as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{I}_n$ pertencentes ao espaço $\mathrm{M}_{(n)}(\Omega)$, em que $\boldsymbol{I}_n$ é a matriz identidade e $\Omega=\mathbb{R}$ ou $\Omega=\mathbb{C}$.

a) Mostre que se $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2$ e se λ é valor próprio de $\boldsymbol{A}$, então $\lambda\in\{0,1\}$.

b) Se $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{I}_n$ o que podemos concluir em relação aos valores próprios de $\boldsymbol{A}$?

c) Se $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{I}_n$ o que podemos concluir em relação aos valores próprios de $\boldsymbol{A}$?

5. Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{I}_n$ matrizes de $\mathrm{M}_{(n)}(\Omega)$, em que $\boldsymbol{I}_n$ é a matriz identidade. Mostre que se $\boldsymbol{X}$ é um vector próprio de $\boldsymbol{A}$ associado ao valor próprio $\lambda\in\Omega$, então $\boldsymbol{X}$ é um vector próprio da matriz $\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{I}_n$ associado ao valor próprio $\lambda-k\in\Omega$.

7. Sejam $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{I}_n$ matrizes de $\mathrm{M}_{(n)}(\Omega)$, em que $\boldsymbol{I}_n$ é a matriz identidade, e $\delta,\varepsilon,\varphi \in \Omega$. Mostre que:

a) Se $\boldsymbol{Y}$ é vector próprio da matriz $\boldsymbol{B}$ associado ao valor próprio δ, então $\boldsymbol{Y}$ é, ainda, vector próprio da matriz $\varepsilon\boldsymbol{B} + \varphi\boldsymbol{I}_n$ associado ao valor próprio $\varepsilon\delta + \varphi$.

b) Se $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \delta\boldsymbol{I}_n$ e $\boldsymbol{Y}$ é vector próprio da matriz $\boldsymbol{B}$ associado ao valor próprio ε, então $\boldsymbol{Y}$ é, ainda, vector próprio da matriz $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ associado ao valor próprio $\delta - \varepsilon$.

10. Calcule os valores dos parâmetros reais α, β, δ, ε, φ e γ, de modo que $\boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_2 = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ e $\boldsymbol{X}_3 = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ sejam vectores próprios da matriz real

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \delta \\ \varepsilon & \varphi & \gamma \end{bmatrix}$$

11. Calcule os valores dos parâmetros reais α, β e δ, de modo que $\boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ seja vector próprio da matriz real

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

associado a um valor próprio que é raiz dupla do polinómio característico.

12. Calcule os valores dos parâmetros reais α, β e δ, de modo que $\boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix}2 & -3 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ seja vector próprio da matriz real

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \beta \\ 2 & \delta & 3 \end{bmatrix}$$

e tal que o traço da matriz seja igual a 6.

13. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada real, de ordem 3, tal que $|\,\boldsymbol{A}\,| = tr(\boldsymbol{A}) = 6$. Admitindo que $\lambda_1 = 2$ é um dos seus valores próprios, obtenha:

a) Os valores próprios de $\boldsymbol{A}$.

b) Os valores próprios das matrizes $\boldsymbol{A}^{-1}$ e $\boldsymbol{A}^3$.

15. Obtenha os valores próprios de cada uma das seguintes matrizes quadradas, num corpo Ω ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{(3)}(\mathbb{R})$.

b) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{(3)}(\mathbb{R})$.

c) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{(3)}(\Omega)$.

d) $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{(3)}(\mathbb{R})$.

e) $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{(3)}(\mathbb{R})$.

f) $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{(3)}(\mathbb{R})$.

g) $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{(4)}(\mathbb{R})$.

h) $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{(4)}(\mathbb{R})$.

i) $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{(5)}(\mathbb{R})$.

16. Em cada uma das alíneas do exercício 15, obtenha os vectores próprios e os espaços próprios associados a cada valor próprio da matriz; apresente, para cada um dos espaços obtidos, uma base e a dimensão. Conclua se a matriz é diagonalizável, indicando, se tal for possível, a matriz diagonal que lhe é semelhante.

18. Verifique se existe uma base U em relação à qual as transformações lineares referidas em cada uma das alíneas seguintes possuem uma representação matricial diagonal; no caso de ela existir, defina a matriz que representa a transformação linear em relação a essa base e indique a respectiva matriz diagonalizadora.

a) $P:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $P(x,y,z)=(x+y,3x+3y+7z,-4z)$.

b) $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $Q(x,y,z)=(3x+2y-z,-2x-2y+2z,3x+6y-z)$.

c) $R:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $R(x,y,z)=(3x-2y,-x+3y-z,-5x+7y-z)$.

d) $S:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tal que $S(x,y,z,w)=(x+w,-y,z,x-w)$.

e) $T:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que $T(x,y,z)=(2y,4z,x)$.

23. Sendo $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω, o que pode concluir em relação aos valores próprios, λ, da matriz $\boldsymbol{A}$, se $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$, em que $\boldsymbol{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n?

26. Considere a transformação linear $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{S}=m(S)=\begin{bmatrix} a & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & b & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad a,b\in\mathbb{R}$$

em relação à base canónica, $\mathrm{E}_3=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, para $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os valores próprios de S sabendo que $\vec{x}=(-1,2,1)$ é um vector próprio da matriz.

b) Determine os espaços próprios associados a cada um dos valores próprios e indique, para cada um dos subespaços obtidos, uma base e a dimensão.

c) Mostre que a matriz $\boldsymbol{S}$ é diagonalizável. Indique a respectiva matriz diagonalizadora e a matriz diagonal que lhe é semelhante.

27. Seja a transformação linear $R:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujos espaços próprios são

$$\mathrm{E}(-1)=\left\{\vec{x}=t(1,-1,1)\in\mathbb{R}^3\right\},\ \mathrm{E}(1)=\left\{\vec{x}=t(1,0,-2)\in\mathbb{R}^3\right\}\text{ e }\mathrm{E}(2)=\left\{\vec{x}=t(1,-1,0)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

definidos em relação à base canónica, $\mathrm{E}_3=\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$, para $\mathbb{R}^3$. Determine:

a) A representação matricial de *R* em relação à base ordenada:

$$\mathrm{V}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}=\{(1,-1,1),(1,0,-2),(1,-1,0)\}$$

b) A representação matricial de *R* em relação à base canónica.

28. Mostre que as matrizes reais

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\text{ e }\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

possuem os mesmos valores próprios mas não são matrizes semelhantes.

31. Seja a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{T}=m(T)=\begin{bmatrix}7&-2&b\\-2&c&-2\\-1&a&7\end{bmatrix}\ ,\ a,b,c\in\mathbb{R}$$

em relação à base canónica, $\mathrm{E}_3=\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$, para $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os valores próprios de *T* sabendo que $\vec{x}=(1,2,1)$ é um dos seus vectores próprios e que o traço da matriz ***T*** é 18.

b) Determine os espaços próprios associados a cada um dos valores próprios e indique, para cada um dos subespaços obtidos, uma base e a dimensão.

c) Mostre que a matriz ***T*** é diagonalizável. Justifique devidamente a resposta, identificando a matriz diagonal semelhante a ***T*** e a respectiva matriz diagonalizadora.

35. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, $\mathrm{E}_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, para $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os valores próprios e vectores próprios de *T*. Caracterize o espaço próprio associado a cada valor próprio, indicando uma base e a dimensão. Será a matriz $\boldsymbol{T}$ invertível? Justifique.

b) Obtenha uma matriz $\boldsymbol{C}$, tal que $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{C}^{-1}\ \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{C}$ seja uma matriz diagonal semelhante a $\boldsymbol{T}$.

c) Recorrendo à matriz $\boldsymbol{\Delta}$ obtida na alínea anterior, determine a matriz $\boldsymbol{T}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

37. Considere a transformação linear $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{H} = m(H) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ a \in \mathbb{R}$$

em relação à base canónica, $\mathrm{E}_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os valores próprios e vectores próprios de *H*. Caracterize o espaço próprio associado a cada valor próprio, indicando uma base e a dimensão.

b) Obtenha, se possível, uma matriz $\boldsymbol{C}$, tal que $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{C}^{-1}\ \boldsymbol{H}\ \boldsymbol{C}$ seja uma matriz diagonal semelhante a $\boldsymbol{H}$.