Problema: Considere as transformações lineares $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ [illegible] definida através das imagens dos elementos da base canónica para $\mathbb{R}^3$

$$T(1,0,0) = T(\vec{i}) = (3,0)$$
$$T(0,1,0) = T(\vec{j}) = (0,1)$$
$$T(0,0,1) = T(\vec{k}) = (-2,1)$$

e $T_1: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida através das imagens dos elementos da base ordenada $V = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$ em que

$$T_1(\vec{V}_1) = T(1,-1,0) = (3,-1)$$
$$T_1(\vec{V}_2) = T(0,1,1) = (-2,2)$$
$$T_1(\vec{V}_3) = T(1,0,-1) = (5,-1)$$

Verifique que $T = T_1$, determinando as leis de transformação que estão associadas a T e T_1.

Resolução: Seja $\vec{x} = (x,y,z)$ o vector genérico de $\mathbb{R}^3$ expresso em relação à base canónica, isto é,

$$\vec{x} = (x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Calculando a sua imagem através de T

$$T(x,y,z) = T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x\,T(\vec{i}) + y\,T(\vec{j}) + z\,T(\vec{k}) =$$
$$= x(3,0) + y(0,1) + z(-2,1) \iff$$
$$\iff T(x,y,z) = (3x - 2z, y + z)$$

Assim

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (3x-2z, y+z)$$

Relativamente à transformação linear T_1 determinemos as imagens dos elementos da base canónica através de T_1.

Notando que

$$\vec{v}_1 = (1,-1,0) = \vec{i} - \vec{j}$$
$$\vec{v}_2 = (0,1,1) = \vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{v}_3 = (1,0,-1) = \vec{i} - \vec{k}$$

pode escrever-se

$$T_1(\vec{v}_1) = T_1(\vec{i} - \vec{j}) = T_1(\vec{i}) - T_1(\vec{j}) = (3,-1)$$

$$T_1(\vec{v}_2) = T_1(\vec{j} + \vec{k}) = T_1(\vec{j}) + T_1(\vec{k}) = (-2,2)$$

$$T_1(\vec{v}_3) = T_1(\vec{i} - \vec{k}) = T_1(\vec{i}) - T_1(\vec{k}) = (5,-1)$$

Resolvendo o sistema de equações lineares em ordem a $T_1(\vec{i})$, $T_1(\vec{j})$, $T_1(\vec{k})$, obtém-se

$$\begin{cases} T_1(\vec{i}) - T_1(\vec{j}) = (3,-1) \\ T_1(\vec{j}) + T_1(\vec{k}) = (-2,2) \\ T_1(\vec{i}) - T_1(\vec{k}) = (5,-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ T_1(\vec{i}) + T_1(\vec{k}) = (1,1) \\ T_1(\vec{i}) - T_1(\vec{k}) = (5,-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 2\,T_1(\vec{i}) = (6,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_1(\vec{j}) = (3,0) - (3,-1) = (0,1) \\ T_1(\vec{k}) = (1,1) - (3,0) = (-2,1) \\ T_1(\vec{i}) = (3,0) \end{cases}$$

Uma vez que

$$T_1(\vec{i}) = T(\vec{i}) = (3,0)$$
$$T_1(\vec{j}) = T(\vec{j}) = (0,1)$$
$$T_1(\vec{k}) = T(\vec{k}) = (-2,1)$$

Conclui-se que $T = T_1$ e, portanto,

$$T_1 = T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (3x-2z,\, y+z)$$

[signature]