maf@math.uminho.pt
Departamento de Matemática
Universidade do Minho

MIECOM
Álgebra Linear

Folha 2 - Determinantes

1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule $\det A$ e $\det B$.

   (b) Calcule $\det(A+B)$ e compare o resultado com $\det(A) + \det(B)$.

2. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 \\ -1 & 9 & 14 \\ -6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule $|A|$ e $|B|$.

   (b) Compare $|A|$,$|B|$ e $|AB|$.

   (c) Verifique que A é não singular. Relacione $|A|$ com $|A^{-1}|$.

   (d) Verifique se $\det(A+B) = \det A + \det B$.

   (e) Verifique $\det A^T = \det A$.

3. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que A, B são não-singulares.

   (b) Compare $|A|$,$|B|$ e $|AB|$.

   (c) Considere $C = B^{-1}AB$. Compare $|C|$ com $|A|$. Que resultado pode conjecturar?

4. Calcule o determinante das matrizes seguintes:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   (c) $C = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$

   (d) $D = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{pmatrix}$

5. Use o teorema de Laplace para calcular o determinante das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{pmatrix}$

6. Sendo A e B matrizes quadradas de ordem 3, tais que $\det A = 3$ e $\det B = 5$, determine:

(a) $\det(AB)$; (b) $\det(2A)$; (c) $\det(A^{-1}B)$.

7. Sabendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ determine:

(a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

8. A matriz A diz-se ortogonal se $AA^T = I$. Mostre que, se A é ortogonal então $\det(A) = \pm 1$.

9. Resolva a seguinte equação $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

10. Para que valores de a ($a \in \mathbb{R}$) existe a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

11. Determine quando possível, a matriz adjunta das seguintes matrizes.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

   (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

12. Relativamente às matrizes do exercício **??**, determine quando possível, a sua matriz inversa.