Álgebra Linear B

COM+MEC

Teste 3 – ano lectivo 2006/2007 – 11 de Dezembro de 2006

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia – Guimarães – Universidade do Minho

Curso: Nome: Número: Classificação:

A prova tem a duração de 45 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. Durante a realização da prova os telemóveis devem estar desligados e só se pode abandonar a sala passados 20 minutos do seu início. A prova é constituído por dois grupos e termina com a palavra "Fim". No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 200.

Grupo I

— Para cada questão deste grupo, assinale através de uma cruz na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações qual das cinco proposições é verdadeira (existe apenas uma por questão). Cotações — resposta certa: 16; nenhuma proposição seleccionada ou resposta errada: 0.

I.1 Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in M_{4n\times 4n}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^i & \text{se} \quad i \geq j, \\ 0 & \text{se} \quad i < j. \end{cases}$ Assinale a opção correcta.

(a) $\det(A) = -1$.

(b) $\det(A) = 0$.

(c) $\det(A) = 1$.

(d) $\det(A) = 4n$.

(e) Nenhuma das alíneas anteriores.

I.2 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$. Assinale a opção correcta.

(a) $\mathrm{adj}(A) = I_4$.

(b) $A \in \mathrm{fe}(A)$ mas $\mathrm{fer}(A) \neq A$.

(c) $\det(A) = 1$.

(d) A é uma matriz ortogonal.

(e) Nenhuma das alíneas anteriores.

I.3 Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 2&1&0&1\\ 3&3&k_1&5\\ 3&0&-3&-2 \end{bmatrix}$, $k_1 \in \mathbb{R}$, e cujo vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 2\\ 3\\ k_2 \end{bmatrix}$, $k_2 \in \mathbb{R}$.

(a) Assinale a opção correcta.

i. Se $k_1 = 1$ e $k_2 = 3$ o sistema (S) é possível e determinado.

ii. Se $k_1 = 3$ e $k_2 = 3$ o sistema (S) é possível e indeterminado.

iii. Se $k_1 = 3$ e $k_2 = 1$ o sistema (S) é possível e indeterminado.

iv. Se $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$ o sistema (S) é impossível.

v. Nenhuma das alíneas anteriores.

(b) Assinale a opção correcta.

i. Se $k_1 \in [1, 2]$ e $k_2 \in [2, 3]$ o sistema (S) é possível e determinado.

ii. Se $k_1 \in [1, 3]$ e $k_2 \in [1, 2]$ o sistema (S) é possível e indeterminado.

iii. Se $k_1 \in [0, 1]$ e $k_2 \in [0, 1]$ o sistema (S) é impossível.

iv. Se $k_1 \in [1, 2]$ e $k_2 \in [0, 3]$ o sistema (S) é possível e determinado.

v. Nenhuma das alíneas anteriores.

I.4 Considere as seguintes operações

$$\begin{array}{cccc} \oplus : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \longmapsto & (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1, x_2), \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \odot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\alpha, (x_1, x_2)) & \longmapsto & \alpha \odot (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2), \end{array}$$

e proposições

P1: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : x \oplus y = y \oplus x$.

P2: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2 : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

P3: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^2 : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

P4: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^2 : (\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$.

Assinale a opção correcta.

(a) A proposição P1 é verdadeira e a proposição P2 é falsa.

(b) P1, P2, P3 e P4 são proposições verdadeiras.

(c) A proposição P3 é verdadeira e a proposição P1 é falsa.

(d) P1 e P4 são proposições falsas.

(e) Nenhuma das alíneas anteriores.

I.5 Considere as seguintes operações

$$\begin{array}{cccc} \oplus : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x \oplus y = x + y + 1, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \odot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha \odot x = \frac{\alpha x + \alpha + x - 1}{2}, \end{array}$$

e proposições

P1: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2 : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

P2: $\exists^1$elemento de $\mathbb{R}$ (representado por Δ)$, \forall x \in \mathbb{R} : x \oplus \Delta = x$.

P3: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^2 : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

P4: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$.

Assinale a opção correcta.

(a) A proposição P1 é verdadeira e a proposição P2 é falsa.

(b) P1, P2, P3 e P4 são proposições verdadeiras.

(c) A proposição P3 é verdadeira e a proposição P1 é falsa.

(d) P1 e P4 são proposições falsas.

(e) Nenhuma das alíneas anteriores.

I.6 Assinale a opção correcta.

(a) $F_1 = \{(a, 0, a) | a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) $F_2 = \{(a, 1, a) | a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(c) $F_3 = \{(0, 0, a^2) | a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(d) $F_4 = \{(1, 1, 1)\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(e) Nenhuma das alíneas anteriores.

I.7 Assinale a opção correcta.

(a) $F_1 = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) | \det(A) = 0\}$ é um subespaço de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(b) $F_2 = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}$ é um subespaço de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(c) $F_3 = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) | A^2 = I_n\}$ é um subespaço de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(d) $F_4 = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) | A = A^T\}$ é um subespaço de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(e) Nenhuma das alíneas anteriores.

Grupo II — Complete, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, as seguintes frases de modo a obter proposições verdadeiras. Cotações — resposta certa: (7+7+7)+15+18+18; resposta em branco ou errada: 0.

II.1 Condidere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) $\mathrm{adj}(A) = \boxed{}$.

(b) $\det(A) = \boxed{}$.

(c) Se a matriz A for invertível, indique a sua inversa. Caso contrário, responda "0": $\boxed{}$

II.2 Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então, $CS_{(S)} = \boxed{}$.

II.3 Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então, $CS_{(S)} = \boxed{}$.

II.4 Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então, $CS_{(S)} = \boxed{}$.

Fim.