Problema: Determine a equação cartesiana do plano M que passa nos pontos

$$P=(1,2,1)\ ,\ Q=(0,1,0)\ ,\ R=(1,1,4)$$

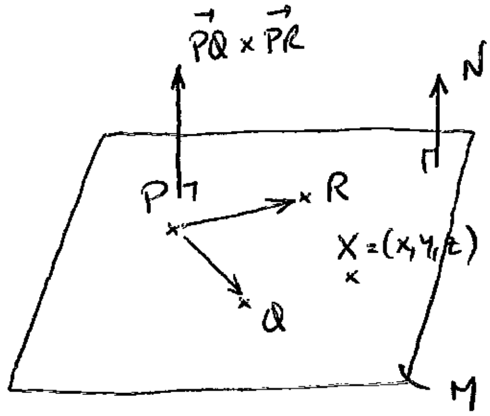
OPÇÃO I

Os pontos P, Q e R definem o plano M se não forem colineares. Verifiquemos:

$$\vec{PQ}=(-1,-1,-1) \quad e \quad \vec{PR}=(0,-1,3)$$

$\vec{PQ}$ não é paralelo a $\vec{PR}$ $\Rightarrow$ P, Q, R não são colineares

Os vectores $\vec{PQ}$ e $\vec{PR}$ são vectores geradores do plano M, pelo que a sua equação vectorial é



$$X(s,t) = P + s\vec{PQ} + t\vec{PR} =$$

$$= (1,2,1) + s(-1,-1,-1) + t(0,-1,3)\ ,\ s,t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (1-s,\ 2-s-t,\ 1-s+3t)\ ,\ s,t\in\mathbb{R}$$

As equações escalares paramétricas são

$$\begin{cases} x = 1-s \\ y = 2-s-t \\ z = 1-s+3t \end{cases} ,\ s,t\in\mathbb{R}$$

obtendo-se, após a eliminação dos parâmetros s e t,

$$\begin{cases} s = 1-x \\ t = 2-1+x-y \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1-x \\ t = 1+x-y \\ z = 1-1+x+3+3x-3y \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ 4x-3y-z=-3$, que é a equação cartesiana de M.

OPÇÃO II

Calculemos o vector $\vec{PQ} \times \vec{PR}$, que é um vector normal a M.

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-4, 3, 1)$$

O vector normal ao plano, N, é qualquer vector não nulo de $\mathbb{R}^3$ que é paralelo a $\vec{PQ} \times \vec{PR}$.

$N \parallel \vec{PQ} \times \vec{PR} \Rightarrow N = (4, -3, -1)$, por exemplo.

Sabendo que

$$P \cdot N = -3$$

a equação cartesiana do plano M é

$$(X - P) \cdot N = 0 \Leftrightarrow X \cdot N = P \cdot N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3y - z = -3$$

José Alegria Barbosa