FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI Data / /

Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano 1º Semestre 1º

Nome José Augusto Trigo Barbosa (Regente)

Espaço reservado para o avaliador

Notas de apoio ao Capítulo 1 do manual "Noções sobre Geometria Analítica e Análise Matemática"

Produto Vectorial

Propriedades

a) Propriedade antisimétrica

Sejam $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$

Recorrendo à definição

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Por outro lado, recorrendo uma vez mais à definição

$$\vec{b} \times \vec{a} = (b_2 a_3 - b_3 a_2;\ b_3 a_1 - b_1 a_3,\ b_1 a_2 - b_2 a_1)$$

e, portanto,

$$\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$$

d) Ortogonalidade em relação ao vector $\vec{a}$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

$$= a_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

$$= \cancel{a_1 a_2 b_3} - \cancel{a_1 a_3 b_2} + \cancel{a_2 a_3 b_1} - \cancel{a_2 a_1 b_3} + \cancel{a_3 a_1 b_2} - \cancel{a_3 a_2 b_1} =$$

$$= 0$$

pelo que os vectores $\vec{a}$ e $\vec{a} \times \vec{b}$ são vectores ortogonais.

Propriedade

Sejam $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ e $\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$.

Sabendo que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\theta)$$

e

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad \left(\begin{array}{c}\text{Identidade de} \\ \text{Lagrange}\end{array}\right)$$

obtém-se

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \left[\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\theta)\right]^2 =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \left[1 - \cos^2(\theta)\right] =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \operatorname{sen}^2(\theta)$$

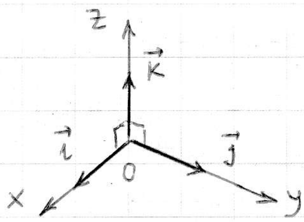
ou seja, atendendo a que $\theta \in [0, \pi]$ e $\operatorname{sen}(\theta) \in [0, 1]$,

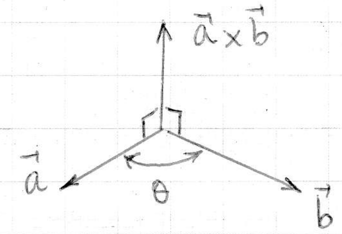
$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \operatorname{sen}(\theta)$$

Interpretação geométrica

- Referencial directo (referencial considerado)

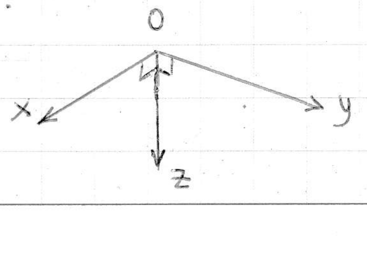
$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$
$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$
$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

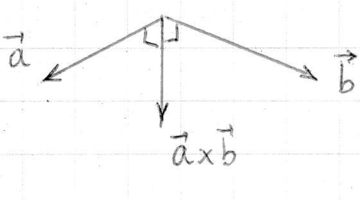




$\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$
$\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

- Referencial inverso

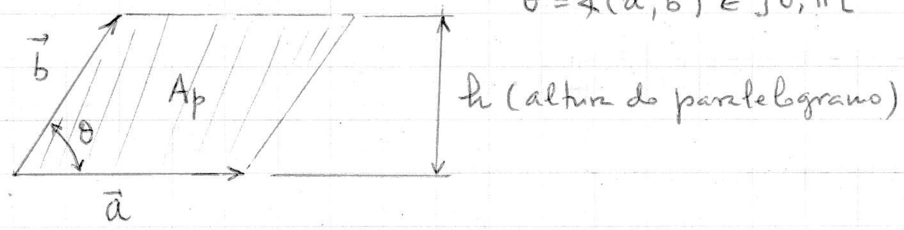




$\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$
$\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

- $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ tem o valor da <u>área do paralelogramo</u> definido pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$

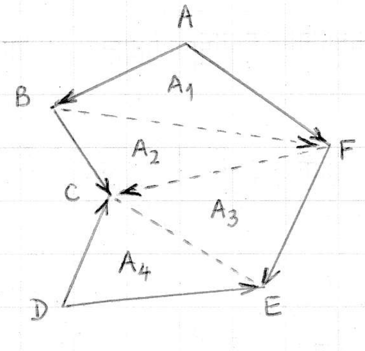
$$\theta = \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) \in \,]0,\pi[$$



$A_p = b\,h$, em que $b = \|\vec{a}\|$ (base) e $h = \|\vec{b}\|\,\mathrm{sen}(\theta)$, ou seja,

$$A_p = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\mathrm{sen}(\theta) = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$$

- O produto vectorial é utilizado na determinação da <u>área</u> de <u>superfícies poligonais</u> (divisão em triângulos).



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\,\|\vec{AB}\times\vec{AF}\|$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\,\|\vec{BC}\times\vec{BF}\|$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\,\|\vec{FC}\times\vec{FE}\|$$

$$A_4 = \frac{1}{2}\,\|\vec{DC}\times\vec{DE}\|$$

<u>pág. 2</u>

Exemplo 2

Sejam $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tais que $\|\vec{b}\| = 1$ (versor), $\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$,

$\|\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{a}\times\vec{b}\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Pretende-se calcular $\|\vec{a}\|$.

$$\|\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{a}\times\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{a}\times\vec{b}) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\Big[\|\vec{a}\|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} - 2\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{a}\times\vec{b}}_{=0} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \|\vec{b}\|^2 - 2\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}\times\vec{b}}_{=0} - 2\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{a}}_{=0} -$$
$$- 2\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{b}}_{=0} + 4\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2\Big] = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 1 + 4\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2\right] = 3$$

Sabe-se que $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\|\vec{a}\|$ e

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \left[\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\operatorname{sen}(\theta)\right]^2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\|\vec{a}\|\right]^2 = \frac{1}{2}\|\vec{a}\|^2$$

pelo que

$$2\left[\|\vec{a}\|^2 + \sqrt{2}\|\vec{a}\| + 1 + 2\|\vec{a}\|^2\right] = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\|\vec{a}\|^2 + 2\sqrt{2}\|\vec{a}\| - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a}\| = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8+24}}{12} = \frac{-2\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2}}{12} \text{ e } \|\vec{a}\| > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a}\| = \frac{2\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

pág. 3

Exemplo 3

Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ tais que $S = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ é um conjunto ortogonal, isto é, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\|\vec{b}\| = 1$ (versor), $\theta = \measuredangle(\vec{c}, \vec{d}) = \pi/3$, $\|\vec{d}\| = \sqrt{6}$, $\vec{c} \in L(S)$, ou seja, $\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $\vec{d} = \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b})$

Pretende-se calcular $\|\vec{a}\|$.

$$\|\vec{d}\| = \sqrt{6} \Leftrightarrow (\vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b})) \cdot (\vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b})) = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{c}\|^2 + \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} + \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{c}\|^2 + \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 6 \qquad (1)$$

Sabe-se que

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{=0})^2 = \|\vec{a}\|^2$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = (\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b}) \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \alpha_1 \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{b}}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{b}}_{=0} = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \|\vec{c}\| \|\vec{d}\| \cos(\theta) = \|\vec{c}\| \sqrt{6} \cos(\pi/3) = \frac{\sqrt{6}}{2} \|\vec{c}\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{c} \cdot [\vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b})] = \frac{\sqrt{6}}{2} \|\vec{c}\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{c}\|^2 + \underbrace{\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}}_{=0} = \frac{\sqrt{6}}{2} \|\vec{c}\| \text{ e } \|\vec{c}\| > 0 \Leftrightarrow \|\vec{c}\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Substituindo em (1) obtém-se

$$\frac{3}{2} + \|\vec{a}\|^2 + 0 = 6 \Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a}\| = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

pág. 3

Teorema

Seja $S_1 = \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Mostrar que

$$S_1 \text{ é linearmente dependente} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

a) Se S_1 é linearmente dependente $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Se S_1 é linearmente dependente, então S_1 gera de forma não única o vector nulo, isto é, existe uma solução não nula para α_1 e α_2 tal que

$$\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} = \vec{0}$$

Admitindo que, por exemplo, $\alpha_2 \neq 0$, então

$$\vec{b} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{a} = k\vec{a}, \quad k \in \mathbb{R}$$

e, portanto,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{a}) = k\,\vec{a} \times \vec{a} = k\vec{0} = \vec{0}$$

b) Se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow S_1$ é linearmente dependente

Se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, então $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 0$, ou seja, recorrendo à Identidade de Lagrange

$$\underbrace{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2}_{=0} = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$$

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra-nos que o sinal de igualdade em

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}), \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$$

só se verifica se os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem múltiplos escalares, isto é, se $\vec{b} = k\vec{a}$, $k \in \mathbb{R}$, ou seja, se S_1 for um conjunto linearmente dependente. pág. 3

Papel 100% Reciclado

Teorema

Seja $S_1 = \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto linearmente independente.

i) Pretende-se mostrar que

$$S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$$

é também um conjunto linearmente independente.

Se S_1 é um conjunto linearmente independente, então

$$\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{0}$$

Pretende-se mostrar que S gera de forma única o vector nulo, ou seja,

(1) $\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (solução nula)

Como $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{0}$, considere-se

$$(\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{a}\times\vec{b}) . \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} . \vec{a}\times\vec{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \underbrace{\vec{a} . \vec{a}\times\vec{b}}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\vec{b} . \vec{a}\times\vec{b}}_{=0} + \alpha_3 \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_3 \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = 0 \text{ e } \|\vec{a}\times\vec{b}\| > 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \quad \checkmark$$

Substituindo $\alpha_3 = 0$ em (1) resulta

$$\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} = \vec{0} \qquad (2)$$

e como, por hipótese, o conjunto S_1 é linearmente independente, então a única solução possível para (2) é

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (solução nula).

– Regra prática para o cálculo do vector $\vec{a} \times \vec{b}$ (recorrendo ao conceito de determinante).

Sejam $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= + (a_2 b_3 - b_2 a_3)\vec{\imath} - (a_1 b_3 - b_1 a_3)\vec{\jmath} +$$

$$+ (a_1 b_2 - b_1 a_2)\vec{k} =$$

$$= (a_2 b_3 - b_2 a_3 \, , \, b_1 a_3 - a_1 b_3 \, , \, a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

NOTA: O desenvolvimento atrás apresentado será justificado com o estudo do conceito do determinante de uma matriz de ordem 3 e de uma matriz de ordem 2.

Exemplo 4

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

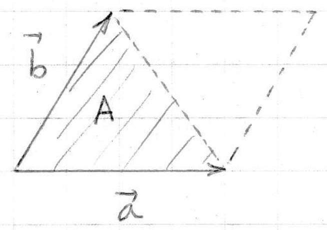
$$= + (2-(-2))\vec{\imath} - (4-(-1))\vec{\jmath} + (4-1)\vec{k} =$$

$$= (4, -5, 3)$$

pág. 4

Wrz

Assim, a área do triângulo definido pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$



é metade da área do paralelogramo definido por esses mesmos vectores, isto é,

$$A = \frac{1}{2} \| \vec{a} \times \vec{b} \| = \frac{1}{2} \sqrt{16+25+9} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ u.a.}$$

pág 4

Wmj

Produto Misto

- Regra prática para o cálculo do produto misto dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ (recorrendo ao conceito de determinante).

Sejam $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

Sabendo que

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

então

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (c_1, c_2, c_3) \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

$$= c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \checkmark$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 =$$

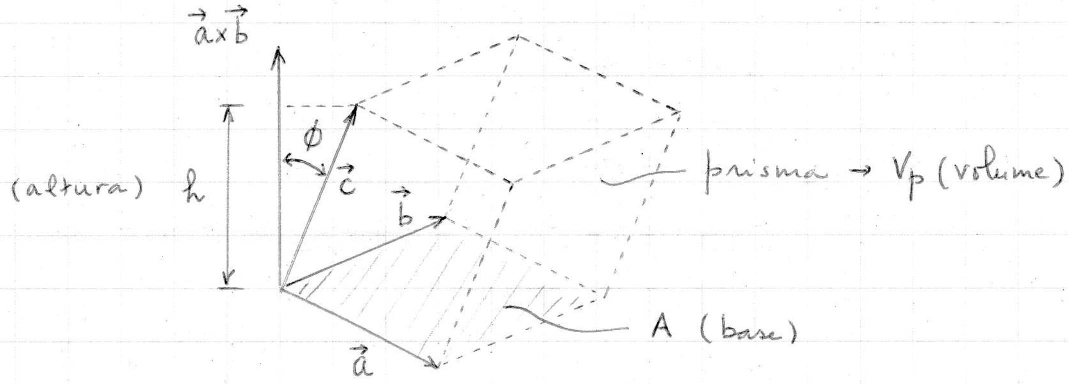
$$= c_1 (a_2 b_3 - b_2 a_3) - c_2 (a_1 b_3 - b_1 a_3) + c_3 (a_1 b_2 - b_1 a_2) =$$

$$= c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \checkmark$$

pág. 5

Wuj

- Interpretação geométrica para o produto misto



Volume do prisma:

$$V_p = A\,h \quad \text{em que} \quad A = \|\vec{a}\times\vec{b}\| \text{ (Área da base)}$$

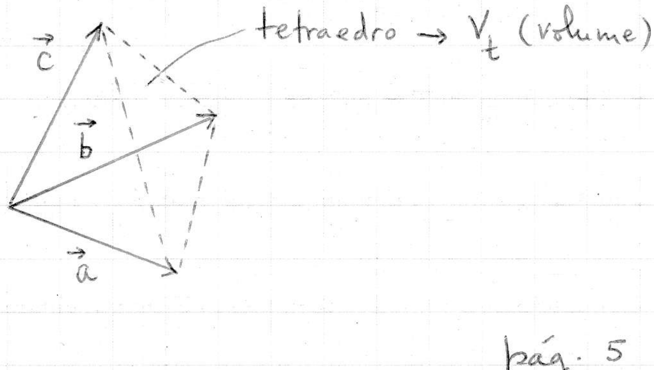
$$\phi = \measuredangle(\vec{c}, \vec{a}\times\vec{b}) \quad , \quad \phi \in [0, \pi/2[\,\cup\,]\pi/2, \pi]$$

Altura do prisma: $h = \|\vec{c}\|\,|\cos(\phi)|$

$$V_p = \|\vec{c}\|\,\|\vec{a}\times\vec{b}\|\,|\cos(\phi)| = |\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}|$$

- O produto misto pode ser utilizado na determinação do volume de poliedros (divisão em tetraedros)

Volume do tetraedro: $V_t = \frac{1}{6} V_p = \frac{1}{6}\,|\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}|$



Exemplo 5

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{ccc} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}$$

$$= [-4-8-2] - [-2+4+8] = (-14) - (10) = -24$$

(Regra de Sarrus)

Assim, o volume do tetraedro definido pelos vectores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ é

$$V = \frac{1}{6} \left| \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} \right| = \frac{1}{6} |-24| = 4 \text{ u.v.}$$

Uma vez que $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} < 0$, então

$$\phi = \measuredangle(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b}) \in \left] \pi/2, \pi \right]$$

pág. 6

Teorema

Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$

i) Mostrar que $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a}$

Considerem-se os vectores $(\vec{b}+\vec{c})$ e $(\vec{b}+\vec{c}) \times \vec{a}$; trata-se de vectores ortogonais, pelo que

$$(\vec{b}+\vec{c}) \cdot \left[(\vec{b}+\vec{c}) \times \vec{a} \right] = 0 \iff$$

$$\iff (\vec{b}+\vec{c}) \cdot \left[(\vec{b} \times \vec{a}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \right] = 0 \iff$$

$$\iff \underbrace{\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})}_{=0} + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) + \underbrace{\vec{c} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})}_{=0} = 0 \iff$$

$$\iff \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

pág. 7

ii) Mostrar que $\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$

A demonstração é semelhante à da alínea anterior, devendo-se considerar, neste caso, a condição inicial

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\left[(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\right] = 0 \iff$$

$$\iff \dots \iff \vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$$

Teorema

Seja $S = \{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Mostrar que

S é linearmente dependente $\iff \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = 0$

a) Admite-se que um dos vectores é o vector nulo; seja, por exemplo, $\vec{a} = \vec{0}$.
Neste caso, verifica-se

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = 0$$

e o conjunto S é linearmente dependente, já que um dos seus elementos é o vector nulo (visto anteriormente).

b) Admite-se, agora, que nenhum dos vectores é o vector nulo, mas que dois dos seus elementos são colineares (paralelos); seja, por exemplo, $\vec{a} = k\vec{b}$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Neste caso, verifica-se

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = (k\vec{b})\cdot\vec{b}\times\vec{c} = k(\vec{b}\cdot\vec{b}\times\vec{c}) = 0$$

sendo S um conjunto linearmente dependente, já que possui dois elementos que são paralelos (visto anteriormente).

c) Admite-se, agora, a não existência, no conjunto S, de elementos que sejam múltiplos entre si (não nulos e não colineares).

c.1) Se S é linearmente dependente $\Rightarrow$ $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0$

Sendo $S_1 = \{\vec{b}, \vec{c}\} \subset S$ um conjunto linearmente independente, então $\vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{0}$.

Se S é linearmente dependente, então gera de forma não única o vector nulo, ou seja,

$$\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c} = \vec{0}$$

para um conjunto de escalares reais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ não todos nulos, mas onde, necessariamente, $\alpha_1 \neq 0$.

Então

$$(\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c}) \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0} \cdot \vec{b} \times \vec{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} + \alpha_2 \underbrace{\vec{b} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}_{=0} + \alpha_3 \underbrace{\vec{c} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}_{=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0 \text{ e } \alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0$$

c.2) Se $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0$ $\Rightarrow$ S é linearmente dependente

Sendo $S_1 = \{\vec{b}, \vec{c}\} \subset S$ um conjunto linearmente independente e $\vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{0}$, então o conjunto

$$S_2 = \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{b} \times \vec{c}\} \subset \mathbb{R}^3$$

é linearmente independente, sendo uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$.

O conjunto S_2 gera de forma única qualquer vector do espaço $\mathbb{R}^3$, pelo que

pág. 7

$$\vec{a} = \delta_1 \vec{b} + \delta_2 \vec{c} + \delta_3 \vec{b}\times\vec{c} \quad , \quad \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Então

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = (\delta_1 \vec{b} + \delta_2 \vec{c} + \delta_3 \vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{b}\times\vec{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \delta_1 \underbrace{\vec{b}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}_{=0} + \delta_2 \underbrace{\vec{c}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}_{=0} + \delta_3 \|\vec{b}\times\vec{c}\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \delta_3 \|\vec{b}\times\vec{c}\|^2 \text{ e } \|\vec{b}\times\vec{c}\| > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \delta_3 = 0$ já que, por hipótese, $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = 0$

Substituindo em (1)

$$\vec{a} = \delta_1 \vec{b} + \delta_2 \vec{c} \quad , \quad \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$$

ou seja, $\vec{a} \in L(S_1)$ e, portanto, o conjunto $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é linearmente dependente.

Teorema

O conjunto $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subset \mathbb{R}^3$ é uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$, se e só se $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} \neq 0$.

pág. 7