Exercício 316 : Transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal

Nair

que

$$A = m(T) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & a \\ -6 & -4 & b \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

é a matriz que representa T em relação à base $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ para o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

a) O vector $X = (-1, 3, 3) \in \mathbb{R}^3$ é vector próprio de A (ou de T) se

$$\exists_{\lambda_1 \in \mathbb{R}} : T(X) = \lambda_1 X \Leftrightarrow AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow [\lambda_1 I - A] X = 0$$

Tem-se então

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - 4 & -2 & -a \\ 6 & \lambda_1 + 4 & -b \\ 6 & 6 & \lambda_1 - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda_1 + 4 - 6 - 3a \\ -6 + 3\lambda_1 + 12 - 3b \\ -6 + 18 + 3\lambda_1 - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 - 3a = 2 \\ 3\lambda_1 - 3b = -6 \\ 3\lambda_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases}$$

Assim,

$$A = m(T) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda_1 = 1$$

b) O cálculo dos valores próprios de A pode, neste caso, ser feito recorrendo a dois processos alternativos:

<u>PROCESSO I</u> : recorrendo ao polinómio característico

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 & 1 \\ 6 & \lambda + 4 & -3 \\ 6 & 6 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 1 \\ 2 - \lambda & \lambda + 4 & -3 \\ 0 & 6 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \leftarrow L_2 + L_1 = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda + 2 & -2 \\ 0 & 6 & \lambda - 5 \end{vmatrix} =$$

$\uparrow C_1 - C_2$

$$= (\lambda - 2)(-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -2 \\ 6 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\left[(\lambda + 2)(\lambda - 5) + 12\right] = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) =$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

$$p(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$ma(1) = 1 \wedge ma(2) = 2$$

PROCESSO II : Sabendo que $\lambda_1 = 1 \neq 0$ e que

$$tr(A) = 4 + (-4) + 5 = 5 \quad e \quad |A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -80-36-36-(-24-72-60) = 4$$

obtém-se

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 5 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2+\lambda_3 = 4 \\ \lambda_2\lambda_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

Calculemos os vectores próprios e espaços próprios associados a cada um dos va

$\lambda_1 = 1$

$$[1I-A]X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \\ 6 & 6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3/3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \quad \forall_{x_3 \in \mathbb{R}}$$

Vectores Próprios : $X(1) = \{ X = (-\frac{x_3}{3}, x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \}$

Espaço Próprio : $E(1) = \{ X = (-\frac{x_3}{3}, x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3 \}$

$$\text{Base } E(1) = \{ (-1, 3, 3) \}$$

$$\dim E(1) = 1 = mg(1)$$

NOTA : $mg(1) \leq ma(1) = 1 \Rightarrow mg(1) = 1$

$\underline{\lambda_2 = \lambda_3 = 2}$

$$[2I - A]X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 6 & 6 & -3 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 6 & 0 \\ -3 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left\{ x_3 = 2x_1 + 2x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right.$$

Vectores Próprios : $X(2) = \{ X = (x_1, x_2, 2x_1 + 2x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \}$

Espaço Próprio : $E(2) = \{ X = (x_1, x_2, 2x_1 + 2x_2) \in \mathbb{R}^3 \}$

Base $E(2) = \{ (1,0,2), (0,1,2) \}$

$\dim E(2) = 2 = mg(2)$

<u>NOTA</u> : Ainda que $mg(2) \leq ma(2)$, neste caso verifica-se a condição de igualdade $mg(2) = ma(2) = 2$.

c) A análise dos resultados encontrados na alínea anterior permite concluir que a matriz A é diagonalizável, isto é, é possível encontrar uma matriz diagonal semelhante à matriz A, que representa a mesma transformação linear T em relação a uma base de vectores próprios para o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

Com efeito, tendo em atenção que

i) $\dim E(1) = 1$

$\dim E(2) = 2$

ii) vectores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes

Conclui-se que o conjunto de vectores próprios de T

$$U = \{(-1,3,3),\ (1,0,2),\ (0,1,2)\}$$

é linearmente independente, constituindo uma base de vectores próprios para o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

Nestas condições a matriz diagonal

$$\Delta = A_{U,U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{U,U} = \mathrm{diag}\,(1,2,2)_{U,U}$$

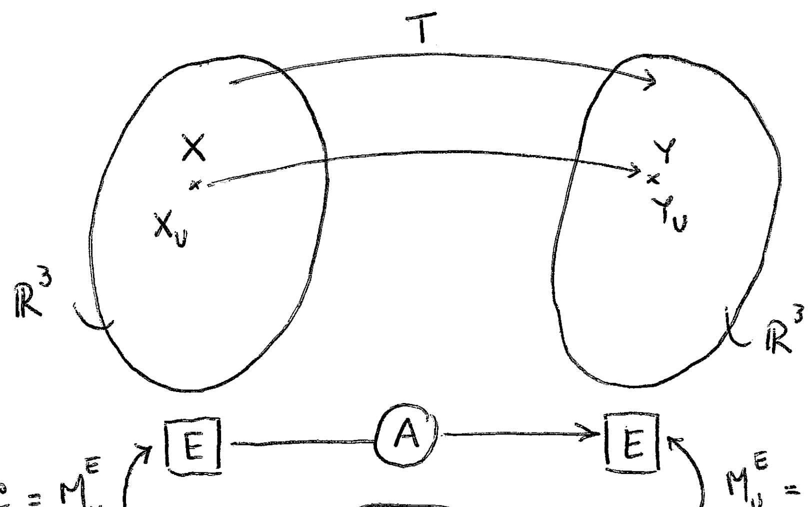
definida em relação à base de vectores próprios U, representa a transformação linear T em relação à base U, sendo, assim, uma matriz diagonal semelhante à matriz A. Neste caso, tem-se

$$\Delta = C^{-1} A\, C$$

ou ainda,

$$A_{U,U} = (M_U^E)^{-1} A\, M_U^E$$

onde $C = M_U^E$ é a matriz de mudança de base de U para E e é designada por matriz diagonalizadora da matriz A.



$X_E = M_U^E X_U$

$Y_E = M_U^E Y_U$

$$\begin{tikzcd} \boxed{E} \arrow[r, "A"] & \boxed{E} \\ \boxed{U} \arrow[u, bend left, "C = M_U^E"] \arrow[r, "\Delta = A_{U,U}"] & \boxed{U} \arrow[u, bend right, "M_U^E = C"'] \end{tikzcd}$$

Sabendo que

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \qquad U = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$E X_E = U X_U \Leftrightarrow X_E = E^{-1} U X_U$$

e, portanto,

$$C = M_U^E = E^{-1} U = U = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

já que $E = E^{-1} = I$.

A matriz $C = M_U^E$ atrás definida é, neste caso, a matriz diagonalizadora da matriz A.

É possível verificar que

$$C^{-1} A C = (M_U^E)^{-1} A M_U^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{U,U} = A_{U,U} = \Delta$$

d) Designando por $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ um vector próprio de A associado ao valor próprio λ, isto é,

$$AX = \lambda X \quad \text{com } X \neq 0$$

então

$$A(AX) = A(\lambda X) \Leftrightarrow A^2 X = \lambda(AX) \Leftrightarrow A^2 X = \lambda(\lambda X) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^2 X = \lambda^2 X \ , \quad \text{com } X \neq 0$$

Conclui-se, assim, que $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ é também vector próprio de A^2 associado ao valor próprio λ^2.

Tem-se ainda

$$A(A^2X) = A(\lambda^2 X) \Leftrightarrow A^3X = \lambda^2(AX) \Leftrightarrow A^3X = \lambda^2(\lambda X) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^3X = \lambda^3 X \quad \text{com} \quad X \neq 0$$

Conclui-se, agora, que $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ é ainda vector próprio de A^3 associado ao valor próprio λ^3.

Pode-se, então, escrever o seguinte relativamente à matriz A^3:

i) Valores próprios de A^3

$$\lambda_1 = 1^3 = 1 \quad e \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2^3 = 8$$

ii) Vectores próprios de A^3

$$X(1) = \{X = (-\tfrac{x_3}{3}, x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$$

$$X(8) = \{X = (x_1, x_2, 2x_1 + 2x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$$

iii) Espaços próprios de A^3

$$E(1) = \{X = (-\tfrac{x_3}{3}, x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$E(8) = \{X = (x_1, x_2, 2x_1 + 2x_2) \in \mathbb{R}^3\}$$

José Araújo Barbosa