FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI Data / 01 / 21

Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano 1º Semestre 1º

Nome José Augusto Trigo Barbosa

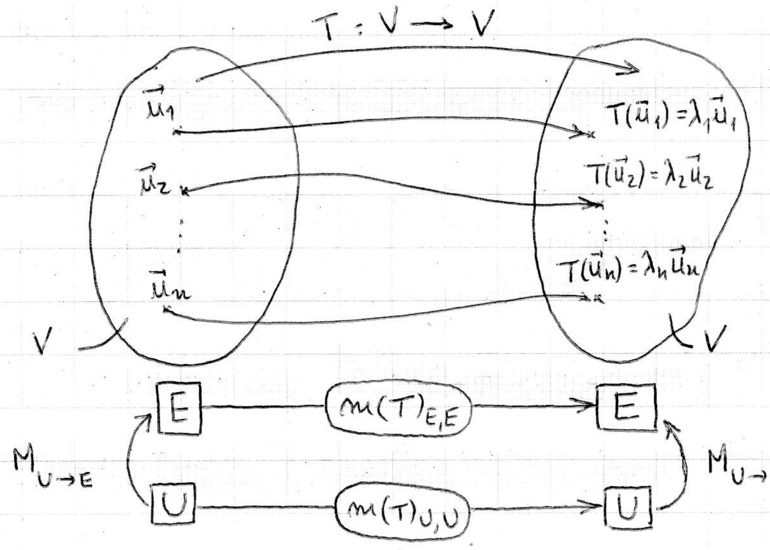
Espaço reservado para o avaliador

Notas de apoio ao Capítulo 5 do manual:
"Noções sobre Álgebra Linear".

Matriz diagonal numa transformação linear

Seja a transformação linear $T : V \longrightarrow V$ em que $\dim V = n$.

Seja $m(T)_{E,E}$ a representação matricial da transformação linear $T : V \rightarrow V$ em relação à base $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subset V$ para o espaço V.



$X_E = M_{U \to E}\, X_U$

$M_{U \to E} = E^{-1} U$

Neste caso, pretende-se determinar uma base ordenada U para o espaço V, de modo que a representação matricial de T em relação à base $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} \subset V$ seja uma matriz diagonal:

$$m(T)_{U,U} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_{U,U}$$

Como veremos, o problema acabado de referir nem sempre terá solução. <u>No caso de ser possível</u>, então:

i) A <u>transformação linear</u> $T: V \rightarrow V$ diz-se <u>diagonalizável</u>.

ii) As matrizes $m(T)_{U,U}$ e $m(T)_{E,E}$ são <u>matrizes semelhantes</u>

$$m(T)_{U,U} \approx m(T)_{E,E}$$

já que existe uma matriz não singular $P = M_{U \to E}$ tal que

$$m(T)_{U,U} = P^{-1}\, m(T)_{E,E}\, P = M_{U\to E}^{-1}\, m(T)_{E,E}\, M_{U\to E}$$

iii) A <u>matriz</u> $m(T)_{E,E}$ diz-se <u>diagonalizável</u>, sendo, neste caso, a matriz

$$P = M_{U\to E}$$

designada por <u>matriz diagonalizadora da matriz</u> $m(T)_{E,E}$.

iv) A condição necessária e suficiente para que a matriz $m(T)_{E,E}$ seja diagonalizável é que exista uma base ordenada para V

$$U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$$

e um conjunto de escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Omega$ (distintos ou não), tal que

$$\begin{aligned}
T(\vec{u}_1) &= \lambda_1 \vec{u}_1 = (\lambda_1, 0, \dots, 0)_U \\
T(\vec{u}_2) &= \lambda_2 \vec{u}_2 = (0, \lambda_2, \dots, 0)_U \\
&\vdots \\
T(\vec{u}_n) &= \lambda_n \vec{u}_n = (0, 0, \dots, \lambda_n)_U
\end{aligned}$$

Wij

Assim, a representação matricial de T em relação à base U é

$$m(T)_{U,U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}_{U,U} = M_{U\to E}^{-1}\, m(T)_{E,E}\, M_{U\to E}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ T(\vec{u}_1)_U & T(\vec{u}_2)_U & \cdots & T(\vec{u}_n)_U \end{matrix}$$

v) Como veremos de seguida os vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ são <u>vectores próprios</u> e os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são <u>valores próprios</u> da matriz $m(T)_{E,E}$.

<u>Definição [5.3]</u> : Um escalar $\lambda \in \Omega$ é designado por <u>valor próprio</u> da transformação linear $T : V \to V$ se

$$\exists_{\vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}_V\}} \quad : \quad T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

Neste caso o elemento $\vec{x} \neq \vec{0}_V$ chama-se <u>vector próprio</u> de T <u>associado ao valor próprio</u> λ ; diz-se, ainda, que o escalar $\lambda \in \Omega$ é um <u>valor próprio</u> de T <u>correspondente ao vector próprio</u> $\vec{x}$.

<u>Teorema [5.2]</u>

a) Seja o vector próprio $\vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ e admita-se que $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$ são valores próprios correspondentes a $\vec{x}$:

$$T(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x} \quad \text{e} \quad T(\vec{x}) = \lambda_2 \vec{x}$$

Subtraindo as expressões

$$T(\vec{x}) - T(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x} - \lambda_2 \vec{x} \iff$$

$$\iff (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x} = \vec{0}_V \xLeftrightarrow[\vec{x} \neq \vec{0}_V]{} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2$$

b) Seja $\vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}_V\}$ um vector próprio de T associado ao valor próprio $\lambda \in \Omega$.

Considere-se o vector $\vec{y} = k\vec{x}$, $k \neq 0$.
Então

$$T(\vec{y}) = \underbrace{T(k\vec{x}) = k\,T(\vec{x})}_{T \text{ é linear}} \underbrace{= k(\lambda\vec{x})}_{T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}} =$$

$$= \lambda(k\vec{x}) = \lambda\vec{y}, \quad \vec{y} \neq \vec{0}_V$$

Conclui-se que $\vec{y}$ é um vector próprio de T associado ao valor próprio $\lambda \in \Omega$.

<u>pág. 3</u>

- Conjunto dos vectores próprios da transformação linear $T: V \to V$ associado ao valor próprio λ:

$$\vec{x}(\lambda) = \{\vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}_V\} : T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}, \lambda \in \Omega\} \subset V$$

Não é um subespaço de V (não possui elemento zero).

<u>Definição [5.4]</u> : <u>Espaço próprio</u> associado a um valor próprio

$$E(\lambda) = \{\vec{x} \in V : T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}, \lambda \in \Omega\} \subset V$$

$$E(\lambda) = \vec{x}(\lambda) \cup \{\vec{0}_V\}$$

<u>pág. 3/4</u>

- O espaço próprio $E(\lambda)$ é um subespaço de V
- Admite uma <u>base</u> e possui uma <u>dimensão</u> que é designada por <u>multiplicidade geométrica do valor próprio λ</u>:

$$\text{Base } E(\lambda)$$

$$\dim E(\lambda) = mg(\lambda)$$

<u>pág. 4</u>

<u>Exemplo 2 [5.2]</u> : Seja a transformação linear $T: V \to V$ e admita-se que $\lambda = 0$ é um dos seus valores próprios. Então:

- Conjunto dos vectores próprios associados a $\lambda = 0$

$$\vec{x}(0) = \{ \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}_V\} : T(\vec{x}) = 0\vec{x} = \vec{0}_V \} \subset V$$

- Espaço próprio associado a $\lambda = 0$

$$E(0) = \{ \vec{x} \in V : T(\vec{x}) = 0\vec{x} = \vec{0}_V \} \subset V$$

- Conclui-se, neste caso, que

$$E(0) = N(T)$$

$$\text{Base } E(0) = \text{Base } N(T)$$

$$\dim E(0) = \dim N(T)$$

$$mg(0) = \text{nulidade de } T$$

- Uma vez que $N(T) = E(0) \neq \{\vec{0}_V\}$, conclui-se que uma transformação linear que possua o valor próprio $\lambda = 0$ <u>nunca será uma função injectiva</u>.

<u>pág. 5</u>

Wag

Cálculos dos valores próprios

Seja a transformação linear $T : V \to V$, tal que $\dim V = n$. Designe-se por $T_{E,E} = m(T)_{E,E}$ a representação matricial da transformação linear T em relação à base ordenada $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ para V; seja I_n a matriz identidade do tipo $n \times n$ (ordem n).

Se X_E é a matriz-coluna do tipo $n \times 1$ que contém as coordenadas do vector $\vec{x} \in V$ em relação à base E, então

$$T_{E,E}\, X_E = \lambda X_E \,,\ \lambda \in \Omega \iff T_{E,E}\, X_E = \lambda\, I_n\, X_E \,,\ \lambda \in \Omega \iff$$

$$\iff \lambda\, I_n X_E - T_{E,E}\, X_E = 0 \,,\ \lambda \in \Omega \iff$$

$$\iff \underbrace{[\lambda\, I_n - T_{E,E}]}_{(n \times n)}\ \underbrace{X_E}_{(n\times 1)} = \underbrace{0}_{(n \times 1)} \,,\ \lambda \in \Omega \qquad (1)$$

A equação matricial (1) representa um sistema homogéneo de n equações lineares a n incógnitas (as n coordenadas do vector $\vec{x} \in V$) onde $\lambda\, I_n - T_{E,E}$ é a matriz (do tipo $n \times n$) dos coeficientes do sistema; tem-se então:

i) O sistema pode ser <u>possível e determinado</u>:
Neste caso a solução nula $X_E = 0$ é a única solução do sistema. Sendo um sistema de Cramer, para que tal aconteça deve verificar-se

$$|\lambda\, I_n - T_{E,E}| \neq 0$$

ii) O sistema pode ser <u>possível e indeterminado</u>:
Neste caso o sistema possui uma infinidade de soluções (onde se inclui a solução nula). Sendo um sistema de

Cramer, para que tal aconteça deve verificar-se

$$|\lambda I_n - T_{E,E}| = 0$$

Esta é a condição que deve ser considerada para se obterem os valores próprios e os vectores próprios.

pág. 6

- O determinante $p(\lambda) = |\lambda I_n - T_{E,E}|$ define um polinómio de grau n que designado por polinómio característico da matriz $T_{E,E}$:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Tem n raízes (reais e/ou complexas) que satisfazem as seguintes condições:

$$tr(T_{E,E}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad ; \quad |T_{E,E}| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

i) Se $T_{E,E}$ é uma matriz real ($\Omega = \mathbb{R}$), então os seus valores próprios serão as raízes reais de $p(\lambda)$; neste caso o polinómio $p(\lambda)$ pode ou não ser factorizável.
Assim, a transformação linear terá, no máximo, n valores próprios (distintos ou não), podendo esse número ser inferior a n se algumas das raízes forem imaginárias.
Se o número de valores próprios for inferior a n então a matriz $T_{E,E}$ não será diagonalizável.

ii) Se $T_{E,E}$ é uma matriz complexa ($\Omega = \mathbb{C}$), então todas as raízes de $p(\lambda)$ são valores próprios da matriz; neste caso o polinómio $p(\lambda)$ é sempre factorizável:

pág. 7/8

$$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$$

Assim, a transformação linear terá sempre n valores próprios (distintos ou não), podendo ser, ou não, diagonalizável

iii) Chama-se multiplicidade algébrica de um valor próprio λ, $m_a(\lambda)$, ao número de vezes que ele é raiz do polinómio característico:

$$m_g(\lambda) = \dim E(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

iv) Como veremos oportunamente se a transformação linear tiver n valores próprios distintos será sempre diagonalizável.

Se a transformação linear tiver n valores próprios não todos distintos, então poderá ser, ou não, diagonalizável.

Teorema [5.6] : Sejam as matrizes semelhantes $B \simeq A$, tal que

$$B = P^{-1} A P$$

Seja $p(\lambda) = |\lambda I - A|$ o polinómio característico de A e $q(\lambda) = |\lambda I - B|$ o polinómio característico de B.

Então

$$q(\lambda) = |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1} A P| =$$

$$= |\lambda P^{-1} I P - P^{-1} A P| = |P^{-1}(\lambda I - A) P| =$$

$$= |P^{-1}|\,|\lambda I - A|\,|P| = |\lambda I - A| = p(\lambda)$$

Notas:

$|AB| = |A|\,|B|$

$|P^{-1}| = 1/|P|$ $(|P| \neq 0)$

Cálculo dos vectores próprios

Depois de calculados os valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Omega$ $(k \leq n)$ de $T: V \to V$, obtêm-se os vectores próprios associados a cada um dos valores próprios, resolvendo os sistemas de equações lineares homogéneos (1)

$$[\lambda_i I_n - T_E] X_E = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, k \qquad (2)$$

que são possíveis e indeterminados (os vectores próprios obtidos X_E estão expressos em relação à base ordenada E).

i) A multiplicidade geométrica de cada valor próprio

$$mg(\lambda_i) = \dim E(\lambda_i)$$

é igual ao grau de indeterminação do sistema (2).

ii) Uma vez que

$$mg(\lambda_i) = \dim E(\lambda_i) \leq ma(\lambda_i)$$

então

$$\text{grau de indeterminação de } (2) \leq ma(\lambda_i)$$

iii) Se $ma(\lambda_i) = 1 \implies mg(\lambda_i) = \dim E(\lambda_i) = 1$

Teorema [5.7]

$$T_E \approx T_U \iff T_U = M_{U\to E}^{-1}\, T_E\, M_{U\to E}$$

Se $T_E X_E = \lambda_1 X_E$ e $X_E = M_{U\to E} X_U$

então

$$T_E M_{U\to E} X_U = \lambda_1 M_{U\to E} X_U \iff$$

$$\Leftrightarrow \left[M^{-1}_{U \to E} \; T_E \; M_{U \to E} \right] X_U = \lambda_1 \underbrace{M^{-1}_{U \to E} \, M_{U \to E}}_{= I} X_U \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_U \, X_U = \lambda_1 X_U \quad , \quad \text{ou seja,}$$

X_U é um vector próprio de T_U associado ao valor próprio λ_1.

pág. 9

Teorema [5.9]

Seja a transformação linear $T : V \longrightarrow V$, tal que $\dim V = n$.
Admita-se que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_K \in \Omega$ $(K \leq n)$ são valores próprios distintos da transformação linear.
Se

$$\vec{u}_1 \in E(\lambda_1) \; , \; \vec{u}_2 \in E(\lambda_2) \; , \ldots , \; \vec{u}_K \in E(\lambda_K)$$

são vectores próprios da transformação linear, então o conjunto de K vectores próprios

$$U = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_K \} \subset V$$

é um conjunto linearmente independente.

Teorema [5.10]

Seja a transformação linear $T : V \longrightarrow V$, tal que $\dim V = n$.
Admita-se que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_K \in \Omega$ $(K \leq n)$ são valores próprios distintos da transformação linear.
Se

$$U_{\lambda_1} = \text{Base } E(\lambda_1) \; , \; U_{\lambda_2} = \text{Base } E(\lambda_2) \; , \ldots , \; U_{\lambda_K} = \text{Base } E(\lambda_K)$$

então o conjunto

pág. 20

Papel 100% Reciclado

$$U = U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2} \cup \ldots \cup U_{\lambda_k} \subset V$$

é um conjunto linearmente independente.

pág. 20

Teorema [5.11]

Seja a transformação linear $T: V \longrightarrow V$, tal que $\dim V = n$. Se T possui exactamente n valores próprios distintos

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Omega$$

então a transformação linear é diagonalizável.

Neste caso verifica-se

$$\dim E(\lambda_1) = 1 \quad e \quad U_1 = \text{Base } E(\lambda_1) = \{\vec{u}_1\}$$
$$\dim E(\lambda_2) = 1 \quad e \quad U_2 = \text{Base } E(\lambda_2) = \{\vec{u}_2\}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\dim E(\lambda_n) = 1 \quad e \quad U_n = \text{Base } E(\lambda_n) = \{\vec{u}_n\}$$

e

$$U = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\} \subset V$$

é um conjunto de n vectores próprios linearmente independente, definindo uma base de vectores próprios para o espaço V. Uma vez que

$$T(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1 = (\lambda_1, 0, \ldots, 0)_U$$
$$T(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2 = (0, \lambda_2, \ldots, 0)_U$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$T(\vec{u}_n) = \lambda_n \vec{u}_n = (0, 0, \ldots, \lambda_n)_U$$

a representação matricial da transformação linear T em relação à base U é a matriz diagonal

pág. 22

Wang

$$m(T)_{U,U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}_{U,U} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_{U,U}$$

pág. 22

Exemplos 3 [5.8] / 7 [5.12] / 9 [5.15]

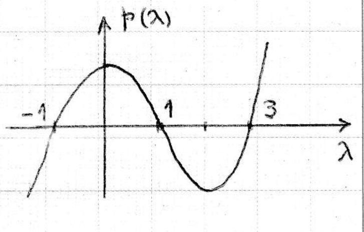
$$p(\lambda) = |\lambda I - Q| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & 1 \\ -1 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ C_2 + C_1}}{-\lambda-1} & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-4 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)(-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 \\ -\lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\left[(\lambda+1)(\lambda-4) + (\lambda+1)\right] =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-4+1) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

O polinómio característico é factorizável em $\Omega = \mathbb{R}$ (as raízes de $p(\lambda)$ são todas reais), pelo que a matriz Q possui três valores próprios distintos (a matriz Q é diagonalizável)



$$\lambda_1 = -1 \ , \quad \lambda_2 = 1 \ , \quad \lambda_3 = 3$$

Convém referir que

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 3 = \mathrm{tr}(Q) \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = -3 = |Q|$$

pág. 11

Dado que

$$\text{Base } E(-1) = \{\vec{u}_1\} = \{(1,1,5)\} \quad ; \quad \dim E(-1) = 1$$

$$\text{Base } E(1) = \{\vec{u}_2\} = \{(-1,1,1)\} \quad ; \quad \dim E(1) = 1$$

$$\text{Base } E(3) = \{\vec{u}_3\} = \{(1,1,1)\} \quad ; \quad \dim E(3) = 1$$

pág. 12/13

então o conjunto

$$U = \text{Base } E(-1) \cup \text{Base } E(1) \cup \text{Base } E(3) =$$

$$= \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(1,1,5), (-1,1,1), (1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é um conjunto formado por 3 vectores próprios linearmente independentes, definindo uma <u>base de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$</u>; neste caso, <u>a matriz Q é diagonalizável.</u>

pág. 20/21

Uma vez que

$$Q(\vec{u}_1) = Q(1,1,5) = (-1)(1,1,5) = (-1,0,0)_U$$

$$Q(\vec{u}_2) = Q(-1,1,1) = (1)(-1,1,1) = (0,1,0)_U$$

$$Q(\vec{u}_3) = Q(1,1,1) = (3)(1,1,1) = (0,0,3)_U$$

a representação matricial da transformação linear Q em relação à base U é a matriz diagonal

$$Q_U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_U = \operatorname{diag}(-1,1,3)_U$$

Trata-se de uma matriz que é semelhante à matriz $Q = Q_{E_3}$, já que existe uma matriz não singular P tal que

pág. 22

Wrig

$$Q_U = P^{-1} Q P$$

onde a matriz P (designada por <u>matriz diagonalizadora</u> da matriz Q) é a matriz de mudança de base de U para E_3

$$P = M_{U \to E_3}$$

Designando

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$E_3 X_{E_3} = U X_U \Rightarrow M_{U \to E_3} = E_3^{-1} U = I_3 U = U$$

pág. 22 / 23

Exemplos 5 [5.10] / 12

$$p(\lambda) = |\lambda I - R| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & -3 \\ -4 & \lambda-2 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ C_1 - C_2 & & C_3 + 3C_2 \end{array}$$

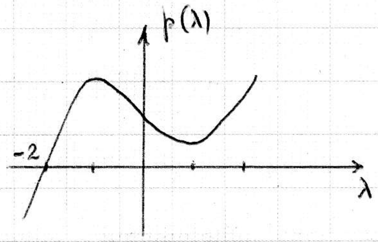
$$= \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 0 \\ -2-\lambda & \lambda-2 & 3\lambda-4 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} \leftarrow L_2 + L_1 =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 3\lambda-4 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3\lambda-4 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} =$$

pág. 17

$$= (\lambda+2)\left[(\lambda-1)(\lambda+2) - (3\lambda-4)\right] =$$

$$= (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+2)$$



Uma vez que $\Omega = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^3$ é um espaço vectorial real), então o polinómio característico $p(\lambda)$ não é factorizável, já que o polinómio

$$r(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

não admite raízes reais (são complexas conjugadas).
Conclui-se então que a matriz $\mathbf{R}$ possui um único valor próprio

$$\lambda_1 = -2$$

pelo que $\mathbf{R}$ é uma matriz não diagonalizável. pág. 17

Não é possível encontrar uma base ordenada de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$. Uma vez que

$$\text{Base } E(-2) = \{\vec{u}_1\} = \{(-1,1,0)\}$$

a transformação linear admite, no máximo, um vector próprio linearmente independente.

pág. 18/28

Exemplos 4 [5.9] / 8 [5.13] / 11

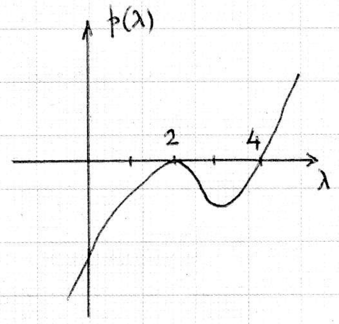
$$p(\lambda) = |\lambda I - T| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ \lambda-2 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \leftarrow L_2 - L_1 =$$

$$\uparrow C_1 + C_2$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} =$$

pág. 14

$$= (\lambda-2)\left[(\lambda-3)^2-1\right] = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-4)$$



O polinómio característico <u>é factorizável em $\Omega = \mathbb{R}$</u> (as raízes de $p(\lambda)$ são todas reais), pelo que a matriz T possui três valores próprios, neste caso, não todos distintos (<u>a matriz T pode</u>, <u>ou não</u>, <u>ser diagonalizável</u>)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad ma(2) = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim E(2) \leq 2$$

$$\lambda_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad ma(4) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dim E(4) = 1$$

Convém referir que

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 8 = tr(T) \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = 16 = |T|$$

pág. 14

Dado que

$$\text{Base } E(2) = \{\vec{u}_1\} = \{(1,1,0)\} \quad ; \quad \dim E(2) = 1$$

$$\text{Base } E(4) = \{\vec{u}_2\} = \{(1,0,1)\} \quad ; \quad \dim E(4) = 1$$

pág. 15/16

então o conjunto

$$U = \text{Base } E(2) \cup \text{Base } E(4) = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{(1,1,0),(1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é um conjunto formado por 2 vectores próprios linearmente independentes, contudo, não definindo uma base de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$; neste caso, a matriz T não é diagonalizável.
A transformação linear admite, no máximo, 2 vectores próprios linearmente independentes.

pág. 21/28

Exemplo 10 [5.16]

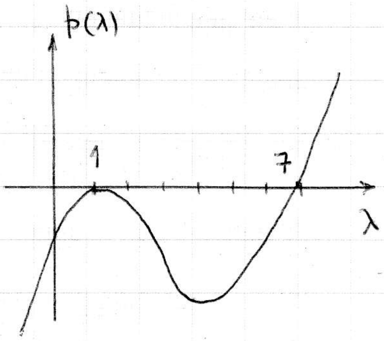
$$p(\lambda) = |\lambda I - H| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -3 \\ -1 & \lambda-3 & -3 \\ -1 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & \lambda-3 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-4 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$\uparrow C_2 + C_1$$

$$= (\lambda-1)(-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda-4 & -3 \\ 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)(\lambda-4) + (\lambda-1)(-3)\right] =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-7)$$



O polinómio característico é factorizável em $\Omega = \mathbb{R}$ (as raízes de $p(\lambda)$ são todas reais), pelo que a matriz H possui três valores próprios, neste caso, não todos distintos (a matriz H pode, ou não, ser diagonalizável)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow ma(1) = 2 \Rightarrow \dim E(1) \leq 2$$
$$\lambda_3 = 7 \Rightarrow ma(7) = 1 \Rightarrow \dim E(7) = 1$$

Convém referir que

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 9 = tr(H) \quad e \quad \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = 7 = |H|$$

pág 23 / 24

Dado que

$$\text{Base } E(1) = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{(-2,1,0), (-3,0,1)\} \quad ; \quad \dim E(1) = 2$$

$$\text{Base } E(7) = \{\vec{u}_3\} = \{(1,1,1)\} \quad ; \quad \dim E(7) = 1$$

pág. 24/25

então o conjunto

$$U = \text{Base } E(1) \cup \text{Base } E(7) =$$

$$= \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(-2,1,0), (-3,0,1), (1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é um conjunto formado por 3 vectores próprios linearmente independentes, definindo uma base de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$; neste caso, a matriz H é diagonalizável.

Uma vez que

$$H(\vec{u}_1) = H(-2,1,0) = (1)(-2,1,0) = (1,0,0)_U$$

$$H(\vec{u}_2) = H(-3,0,1) = (1)(-3,0,1) = (0,1,0)_U$$

$$H(\vec{u}_3) = H(1,1,1) = (7)(1,1,1) = (0,0,7)_U$$

a representação matricial da transformação linear H em relação à base U é a matriz diagonal

$$H_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_U = \text{diag}(1,1,7)_U$$

Trata-se de uma matriz que é semelhante à matriz $H = H_{E_3}$, já que existe uma matriz não singular P tal que

pág. 26

$$H_U = P^{-1} H P$$

onde a matriz P (designada por <u>matriz diagonalizadora da matriz H</u>) é a matriz de mudança de base de U para E_3

$$P = M_{U \to E_3}$$

Designando

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \quad e \quad U = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$E_3 X_{E_3} = U X_U \Rightarrow M_{U \to E_3} = E_3^{-1} U = I_3 U = U$$

<u>pág. 26</u>

<u>Exemplo 6 [5.11]</u>

$$p(\lambda) = |\lambda I - S| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 & -5 \\ 0 & \lambda-7 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$$

Então $\lambda = 7$ é raiz do polinómio característico.
Sabe-se que

$$tr(S) = 9$$

$$|S| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 7(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7(-8) = -56$$

<u>pág. 19</u>

<u>Exemplo</u>: Quais são os valores próprios da matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \; ?$$

Sabendo que $tr(T) = 5$ e $|T| = 4+2 = 6$, então

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

A matriz possui <u>2 valores próprios distintos</u>, pelo que <u>é diagonalizável</u>.

<u>Outras propriedades</u>

<u>Teorema [5.14]</u>

i) Seja $p(\lambda) = |\lambda I - T|$ o polinómio característico da matriz T e $q(\lambda) = |\lambda I - T^T|$ o polinómio característico da matriz T^T.

$$p(\lambda) = |\lambda I - T| = |[\lambda I - T]^T| =$$

$$= |\lambda I^T - T^T| = |\lambda I - T^T| = q(\lambda)$$

Notas

$|A| = |A^T|$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

<u>Teorema [5.15]</u>

Como T é uma matriz não singular, então

$$|T| \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$$

Seja

$$TX = \lambda X \;, \; X \neq 0$$

então

<u>pág. 29</u>

Nuij

$$T^{-1}(TX) = \lambda T^{-1}X \iff \lambda T^{-1}X = X \iff$$

$$\iff T^{-1}X = \lambda^{-1}X \;, \; X \neq 0$$

Conclui-se que λ^{-1} é valor próprio da matriz T^{-1}. A expressão anterior permite, ainda, concluir que se X é vector próprio de T associado ao valor próprio λ, então X é vector próprio de T^{-1} associado ao valor próprio λ^{-1}.

Teorema [5.16]

Seja a matriz ortogonal T, isto é, $T^{-1} = T^T$. Atendendo às propriedades enunciadas nos teoremas [5.14] e [5.15], conclui-se que

$$\lambda = \lambda^{-1} \;, \; \lambda \neq 0 \iff \lambda^2 = 1 \iff \lambda = 1 \vee \lambda = -1$$

pág. 29