Folha 6 - Aplicações Lineares

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação definida por:

$$f(x, y, z) = (x - 2z, 0, -2x + 4z)$$

Mostre que f é uma aplicação linear.

2. Diga quais das aplicações seguintes, entre espaços vectoriais reais, são aplicações lineares:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (y, x)$.
   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (x^2, y^2)$.
   (c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $h(x, y) = (x + 1, y + 1)$.
   (d) $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $t(x, y) = (x + 2y, x - y, y)$.
   (e) $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $r(x, y, z) = (x, y, 0)$.
   (f) $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $s(x, y, z) = (yz, 2x)$.
   (g) $m : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ definida por $m(ax^2 + bx + c) = (1, a + b - c)$.
   (h) $n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $n(a, b) = 5a - 2b$.

3. Considere os espaços vectoriais reais $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.
Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $g_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por:

$$g_k(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_4 - k, k + 1, 2a_1 + a_3),$$

para qualquer $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in R^4$.
Determine o conjunto dos valores de k para os quais g_k é aplicação linear.

4. Seja P uma determinada matriz quadrada de ordem n, invertível e seja $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ a aplicação definida por

$$T(A) = P^{-1}AP, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Mostre que T é uma aplicação linear.

5. Sendo $f : V \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que $f(v_1) = 1$ e $f(v_2) = -1$, determine $f(3v_1 - 5v_2)$.

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que $f(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$.

   (a) Quais dos seguintes vectores pertencem ao núcleo de f: $u = (5, 10), v = (3, 2), w = (1, 1)$.
   (b) Quais dos seguintes vectores pertencem ao espaço imagem de f: $u = (1, -4), v = (5, 0), w = (-3, 12)$.

7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x, y, z) = (z, x - z, 0, y - z)$.

   (a) Determine Nuc_f e uma sua base.
   (b) Determine $Im(f)$ e uma sua base.

8. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x + 2y, 2x - y, -x)$.

   (a) Determine $f(1, 1)$.

(b) Escreva a matriz da aplicação linear f (relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

(c) Usando a alínea anterior, determine a imagem, por meio de f, de $(1,1)$.

9. Sendo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por:

$$g(1,0,0) = (2,-1), g(0,1,0) = (0,1), g(0,0,1) = (3,1)$$

Determine a matriz da aplicação linear g (relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$).

10. Represente-se por $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Seja $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$\begin{array}{l} h(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 3e_3 \\ h(e_2 + e_3) = e_1 \\ h(e_1 + e_2 + e_3) = e_2 - e_3. \end{array}$$

.

(a) Calcule $h(e_1 + 2e_2 + 3e_3)$.

(b) Escreva a matriz da aplicação linear h (relativamente à base canónicas de $\mathbb{R}^3$).

11. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida pela seguinte matriz, em relação as bases canónicas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Determine a imagem, por meio da aplicação linear f, do elemento genérico de $\mathbb{R}^3$.

12. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\begin{array}{l} f(1,0,0) = (2,3,-2) \\ f(1,1,0) = (4,1,4) \\ f(1,1,1) = (5,1,-7) \end{array}$$

(a) Escreva a matriz da aplicação linear f (relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

(b) Determine a imagem, por meio de f, de (x,y,z).

13. Para cada uma das aplicações lineares seguintes, determine o núcleo e a sua dimensão.

Deduza qual o valor da característica da aplicação e classifique a aplicação quanto à sua injectividade e/ou sobrejectividade.

(a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$\begin{array}{l} f(e_1) = (1,-1,2) \\ f(e_2) = (-2,5,3) \\ f(e_3) = (-7,16,7) \\ f(e_4) = (-3,6,1). \end{array}$$

(b) $g : P_3 \to P_3$ que a cada polinómio $P \in P_3$ associa o polinómio $x^2P'' + P'$.

(c) h é a aplicação linear cuja representação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por:

$$f(1,1,1) = (3,3,0), \quad f(-1,1,0) = (0,-6,12), \quad f(1,0,0) = (0,2,4)$$

   (a) Determine para $f(x,y,z),\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Determine o subespaço Nuc_f e uma sua base.
   (c) Diga qual a dimensão de Im_f.
   (d) Indique uma base para Im_f.
   (e) Classifique f.

15. Determine a expressão geral da imagem um elemento de $\mathbb{R}^4$, por meio da uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, que verifique as seguintes condições:

$$dim\ Nuc_f = 1, \quad f(1,0,0,0) = (-2,0,1,3), \quad f(0,1,0,0) = (0,1,2,3)$$

16. Seja θ_k a aplicação linear cuja representação matricial é

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & k-2 & 1 \\ 2 & 8 & k \\ k+1 & 2k & -k-1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Diga para que valores de k a aplicação linear θ_k injectiva.