
Departamento de Matemática e Aplicações 21 /06/ 2013

Duração: 90 minutos **Teste de Análise Matemática EE - versão C**

Nome: ______________________ Nr.: __________ Curso: ________

GRUPO I (7 valores)

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correcta no quadrado correspondente. Cada resposta correcta vale 1 valor.

1. Considere a função real $f(x,y) = xy - 5\ln x$. Então f satisfaz a relação:
   - ☐ $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$
   - ☐ $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$
   - ☐ $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial x} = 0$
   - ☒ $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$
   - ☐ Nenhuma das anteriores.

   $f'_x = y - \frac{5}{x}$ $f''_{xy} = 1$

   $f'_y = x$ $f''_{y^2} = 0$

   $f''_{x^2} = \frac{5}{x^2}$

2. Considere a função real $f(x,y)$ definida e diferenciável no seu domínio. A função gradiente de f é dada por:
   - ☒ $\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$
   - ☐ $\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$
   - ☐ $\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$
   - ☐ $\nabla f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
   - ☐ Nenhuma das anteriores.

3. Considere a função real $f(x,y)$ definida e diferenciável no seu domínio. A taxa de variação de f no ponto (x_0, y_0) do seu domínio, na direção do vetor $\vec{u}$ é dada por:
   - ☐ $D_{\vec{u}/\|\vec{u}\|} f(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(\vec{u}).(x_0,y_0)$
   - ☒ $D_{\vec{u}/\|\vec{u}\|} f(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0).\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$
   - ☐ $D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0)$
   - ☐ $D_{(x_0,y_0)} f(\vec{u}/\|\vec{u}\|) = \vec{\nabla} f(\vec{u}).(x_0,y_0)$
   - ☐ Nenhuma das anteriores.

4. Considere a função real dada $f(x,y) = xy^2$ onde $x = t + \ln t^2$ e $y = e^t u$, com $t \neq 0$. A expressão de $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ é:
   - ☒ $2xe^{2t}$
   - ☐ $2u[e^{2t}(t + \ln t^2)]$
   - ☐ $2e^{2t}xy$
   - ☐ $2e^{2t}\frac{\partial y}{\partial u}$
   - ☐ Nenhuma dos anteriores.

   $f - x - t$

   $f - y - t$, $y - u$

   $f'_y = 2xy$

   $f''_{y^2} = 2x$

   - $f'_u = f'_y \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 2xy \cdot e^t$
   - $f''_{u^2} = \left(f'_y \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right)'_u = \left(f'_y\right)'_u \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + f'_y \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} =$

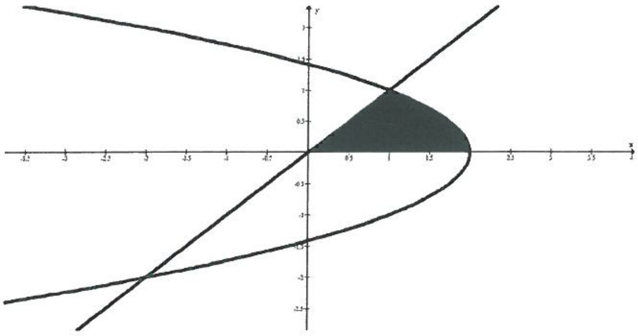
   $= f''_{y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + f'_y \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 2x e^{2t}.$

$f(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ $f'_x = \cos x \Rightarrow f'_x(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $f''_{x^2} = -\operatorname{sen} x$

$f'_y = -\operatorname{sen} y \Rightarrow f'_y(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $f''_{y^2} = -\cos y$

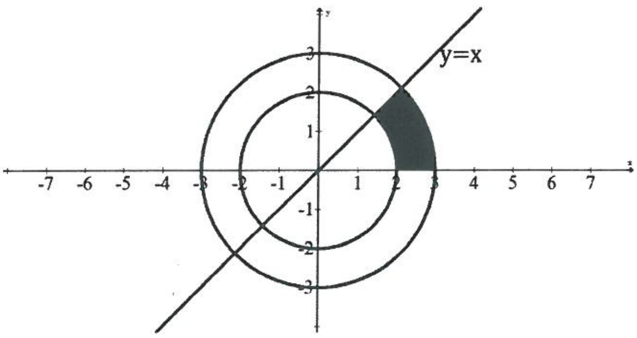
5. Seja $f(x,y) = \sin x + \cos y$. O polinómio de Taylor de grau 2 da função f na vizinhança do ponto $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$ é:
   - ☐ $P_2(x,y) = 2 + x + y - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 - (y + \frac{\pi}{4})^2$
   - ☐ $P_2(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}[x + y + (x - \frac{\pi}{4})^2 + (y + \frac{\pi}{4})^2]$
   - ☐ $P_2(x,y) = x + y + (x - \frac{\pi}{4})^2 + (y + \frac{\pi}{4})^2$
   - ☒ $P_2(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}[2 + x + y - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{2}(y + \frac{\pi}{4})^2]$
   - ☐ Nenhum dos anteriores.

6. Considere o integral duplo $\iint_R dA$ definido na região sombreada na figura abaixo, limitada pelas curvas $y = x$ e $x = 2 - y^2$. Qual dos seguintes integrais iterados representa o integral duplo?



   - ☐ $\int_0^2 \int_x^{2-x^2} dydx$
   - ☒ $\int_0^1 \int_y^{2-y^2} dxdy$
   - ☐ $\int_0^2 \int_0^{2-x^2} dydx$
   - ☐ $\int_0^1 \int_0^{2-y^2} dxdy$
   - ☐ Nenhum dos anteriores.

7. Considere a região sombreada na figura abaixo. A área da região sombreada é dada no seguinte integral iterado em coordenadas polares:



   - ☐ $\int_2^3 \int_0^r r.\ d\theta dr$
   - ☐ $\int_2^3 \int_0^{\pi/4} d\theta dr$
   - ☒ $\int_2^3 \int_0^{\pi/4} r.\ d\theta dr$
   - ☐ $\int_2^3 \int_0^{\pi/2} d\theta dr$
   - ☐ Nenhuma das anteriores.

GRUPO II (13 valores)

Apresente todos os cálculos efectuados.

1. Considere a função $f(x,y) = x^2 - 4x + 2y^2 + 4y - 1$.

   (a) Determine os pontos críticos de f.

$\begin{cases} f'_x = 2x - 4 = 0 \\ f'_y = 4y + 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ $(2,-1) \to$ ptº crítico.

(b) Verifique quais dos pontos críticos é maximizante ou minimizante da função.

$f''_{x^2} = 2$

$f''_{y^2} = 4$

$f''_{xy} = 0$

$$|H(2,-1)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$(2,-1)$ é minimizante de f.
pois $|H(2,-1)| > 0$ e $f''_{x^2}(2,-1) > 0$.

2. Considere-se que, num determinado período de tempo, o número de unidades de produto produzidas quando se usa x unidades de trabalho e y unidades de material é $f(x, y) = 10x^{1/2}y^{1/4}$.

(a) Se considerarmos 25 unidades de trabalho e 16 unidades de material, quantas unidades de produto são produzidas?

$f(25,16) = 10 \times \sqrt{25}\,\sqrt[4]{16} = 10 \times 5 \times 2 = 100$ unidades de produto.

(b) Determina o valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(25, 16)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(25, 16)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5\, y^{1/4} \cdot x^{-1/2} \Rightarrow f'_x(25,16) = \frac{5 \times \sqrt[4]{16}}{\sqrt{25}} = 2$

(c) Qual o significado do valor obtido para $\frac{\partial f}{\partial x}(25, 16)$?

Significa que quando se tem 25 unidades de trabalho e 16 unidades de material, se fizer uma alteração h nas unidades de trabalho então haverá uma alteração $2h$ nas unidades de produto produzidas.
Pois $\frac{f(25+h, 16) - f(25,16)}{h} \approx 2$.

3. Usando diferenciais, obtenha um valor aproximado de $\sqrt{1.001^2 + 0.003^2}$.

Considerando $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, pretende-se determinar um valor aproximado de $f(1.001, 0.003) \approx f(1,0) + df\,(0{,}001, 0{,}003)$

$f(1,0) = 1$ e $df = f'_x\,dx + f'_y\,dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}dy = \frac{1}{1} \times 0{,}001 + 0$

Assim, $f(1.001, 0.003) \approx 1.001$

4. Determine o produto máximo de três números cuja soma é 24.

3 Números x, y, z, cuja soma é 24: $x+y+z = 24 \Leftrightarrow z = 24-x-y$.
Maximizar $xyz = \underbrace{xy(24-x-y)}_{f(x,y)}$ → Procurar os máximos desta função

(v.s.f.f.)

$f(x,y) = xy(24-x-y)$

$$\begin{cases} f'_x = y(24-x-y) + xy(-1) = 0 \\ f'_y = x(24-x-y) + xy(-1) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 24y - xy - y^2 - xy = 0 \\ 24x - x^2 - xy - xy = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} 24y - y^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow y(24-y-2x) = 0 \\ 24x - x^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow x(24-x-2y) = 0 \end{cases}$$

$\overbrace{y=0}^{1^{\underline{o}}} \lor \overbrace{24-y-2x=0}^{2^{\underline{o}}}$

$1^{\underline{o}}$. Se $y=0 \underset{\text{na equação de baixo}}{\Rightarrow} x(24-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \lor x=24$

$(0,0)$ $(24,0)$

$2^{\underline{o}}$. Se $24-y-2x=0 \Leftrightarrow y = 24-2x \overset{\text{na eq. debaixo}}{\Rightarrow} x(24-x-48+4x)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \lor 3x=24 \Leftrightarrow x=0 \lor x=8$

substituindo em $y=24-2x$, tem-se

$x=0 \Rightarrow y=24$ $(0,24)$

$x=8 \Rightarrow y=8$ $(8,8)$

Pt^{os} críticos $(0,0)$ $(24,0)$ $(0,24)$ $(8,8)$

Verificação quais são maximizantes.

$f''_{x^2} = -2y$ $f''_{xy} = 24-2y-2x$

$f''_{y^2} = -2x$

$|H(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{vmatrix} < 0$

$\rightarrow \bar{n}$ há extremo em $(0,0)$

$|H(0,24)| = \begin{vmatrix} -48 & -24 \\ -24 & 0 \end{vmatrix} < 0 \rightarrow \bar{n}$ há extremo em $(0,24)$

$|H(24,0)| = \begin{vmatrix} 0 & -24 \\ -24 & -48 \end{vmatrix} < 0$ $\bar{n}$ há extremo em $(24,0)$

$|H(8,8)| = \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} > 0$

e $f''_{x^2}(8,8) = -16 < 0$, logo

$f(8,8)$ é máximo $f(8,8) = 8^3$ máximo.