U.PORTO FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA UNIVERSIDADE DO PORTO

Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância) 1ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos dois grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. **[8,0]** Seja $\mathrm{T}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$, em que $\vec{a}=(3,1,-1,3)$, $\vec{b}=(1,1,0,2)$ e $\vec{c}=(-1,1,2,2)$, um conjunto de elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$. Considere, também, o subespaço de $\mathbb{R}^4$, $W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : w=x-y\}$.

a) Classifique, justificando, o conjunto T quanto à (in)dependência linear dos vetores que o constituem e conclua em relação à dimensão do subespaço gerado por T. Indique uma base, U, para este subespaço, formada unicamente por elementos de T.

b) Determine uma base, V, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que contenha o maior número possível de elementos de T.

c) Obtenha uma base ortogonal, S, para o subespaço *W*.

d) Verifique, justificando, se é possível exprimir o vetor $\vec{r}=(1,3,-1,-2)$ como combinação linear dos elementos da base S; em caso afirmativo, obtenha a respetiva combinação linear.

2. **[1,8]** Seja $\mathrm{W}=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3,\ldots,\vec{w}_m\}$ um conjunto linearmente independente formado por *m* elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Prove, justificando devidamente, que o conjunto $\mathrm{W}_1=\{\vec{w}_1,\vec{w}_1+\vec{w}_2,\vec{w}_1+\vec{w}_2+\vec{w}_3,\ldots,\vec{w}_1+\vec{w}_2+\vec{w}_3+\ldots+\vec{w}_m\}$ é uma base para o subespaço gerado por W, $L(\mathrm{W})$.

....*(continua no verso)*

GRUPO II

3. [**2,5**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{c}\| = 2$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = 45°$, $\vec{d} = \vec{c} + \vec{a} + 4\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{c}$ é paralelo a $\vec{b}$ e $\vec{c}\cdot\vec{b} < 0$.

a) Determine a norma do vetor $\vec{d}$.

b) Calcule $\vec{b}\cdot\vec{d}\times\vec{a}$ e conclua em relação à (in)dependência linear de $\{\vec{a},\vec{b},\vec{d}\}$.

c) Obtenha a norma do vetor $\vec{c}\times(2\vec{a}+\vec{b})$.

4. [**0,7**] Seja o elemento não nulo do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Mostre que $\vec{a} = \|\vec{a}\|\left(\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}\right)$, em que α, β e γ são os ângulos diretores de $\vec{a}$, e que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

5. [**7,0**] Seja o plano $M : x - z = -3$, a reta $r : X(s) = P + s\vec{u}$, $s \in \mathbb{R}$, em que $P = (1,1,0)$ e $\vec{u} = (0,1,1)$, e o ponto $R = (0,3,1)$. Determine:

a) Os ângulos que o plano *M* faz com a reta *r* e com o plano coordenado *xOy*.

b) A equação cartesiana do plano, α, que contém a reta *r* e que passa no ponto, *T*, do plano *M* mais próximo de *R*.

c) A equação vetorial das retas que passam no ponto *R*, são concorrentes com a reta *r* e fazem, com esta reta, um ângulo de $60°$.