Diagonalização de uma transformação linear

- Pretende-se estabelecer as condições que deverão ser verificadas para que uma transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que V é um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$, admita uma *base ordenada de vectores próprios* para o espaço linear V.

Teorema [5.9]: Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que V é um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$. Se $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathrm{V}$ são *vectores próprios* de T associados, respectivamente, aos *valores próprios distintos* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Omega$, então o conjunto $\mathrm{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ é *linearmente independente*.

Teorema [5.10]: Considere a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que V é um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Omega$ *valores próprios distintos* de T e admita-se que U_{λ_i} é uma *base para* o *espaço próprio* $\mathrm{E}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Então

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_{\lambda_1} \cup \mathrm{U}_{\lambda_2} \cup \ldots \cup \mathrm{U}_{\lambda_k}$$

é um conjunto *linearmente independente*.

Exemplo 7 [5.12]: Em relação à transformação linear $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ do **exemplo 3**, verifica-se que ela possui *três valores próprios distintos*

$$\lambda_1 = -1 , \ \lambda_2 = 1 , \ \lambda_3 = 3$$

Os *espaços próprios* associados aos valores próprios são

$$\mathrm{E}(-1)=\left\{(y,y,5y)\in\mathbb{R}^3\right\}\ ,\ \text{Base } \mathrm{E}(-1)=\left\{(1,1,5)\right\}\ \text{ e }\ \dim \mathrm{E}(-1)=1$$

$$\mathrm{E}(1)=\left\{(-z,z,z)\in\mathbb{R}^3\right\}\ ,\ \text{Base } \mathrm{E}(1)=\left\{(-1,1,1)\right\}\ \text{ e }\ \dim \mathrm{E}(1)=1$$

$$\mathrm{E}(3)=\left\{(z,z,z)\in\mathbb{R}^3\right\}\ ,\ \text{Base } \mathrm{E}(3)=\left\{(1,1,1)\right\}\ \text{ e }\ \dim \mathrm{E}(3)=1$$

Podemos concluir que o conjunto de *vectores próprios*

$$\mathrm{U}=\left\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\right\}=\left\{(1,1,5),(-1,1,1),(1,1,1)\right\}$$

é *linearmente independente*, constituindo uma *base ordenada* (de *vectores próprios*) *para o espaço* $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 8 [5.13]: A transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ do **exemplo 4**, possui *dois valores próprios distintos*

$$\lambda_1=\lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=4$$

aos quais estão associados os *espaços próprios*

$$\mathrm{E}(2)=\left\{(y,y,0)\in\mathbb{R}^3\right\}\ ,\ \text{Base } \mathrm{E}(2)=\left\{(1,1,0)\right\}\ \text{ e }\ \dim \mathrm{E}(2)=1$$

$$\mathrm{E}(4)=\left\{(z,0,z)\in\mathbb{R}^3\right\}\ ,\ \text{Base } \mathrm{E}(4)=\left\{(1,0,1)\right\}\ \text{ e }\ \dim \mathrm{E}(4)=1$$

O conjunto de *vectores próprios*

$$\mathrm{U}=\left\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\right\}=\left\{(1,1,0),(1,0,1)\right\}$$

é *linearmente independente*, não definindo, contudo, uma *base* (de *vectores próprios*) *para o espaço* $\mathbb{R}^3$.

- O teorema seguinte apresenta uma *condição suficiente* (mas *não necessária*) para que uma transformação linear seja *diagonalizável*.

Teorema [5.11]: Considere a transformação linear $T : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{V}$, em que V é um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$. Se T possui exactamente *n valores próprios distintos*, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Omega$, então T é *diagonalizável*.
Além disso, o conjunto dos n vectores próprios $\mathrm{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset \mathrm{V}$, tais que $u_i \in \mathrm{E}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, é uma *base ordenada para* V e a *representação matricial* de *T em relação à base* U é uma *matriz diagonal*, possuindo os valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ como elementos principais.

Exemplo 9 [5.15]: Em relação à transformação linear $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos **exemplos 3** e **7**, o conjunto de *vectores próprios*

$$\mathrm{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(1,1,5), (-1,1,1), (1,1,1)\}$$

constitui uma *base ordenada para* $\mathbb{R}^3$.
A *representação matricial* de *Q em relação à base* U é

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{U}} = m(Q)_{\mathrm{U}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{\mathrm{U}} = \operatorname{diag}(-1,1,3)_{\mathrm{U}}$$

Quer a transformação linear *Q*, quer a sua representação matricial em relação à base canónica para $\mathbb{R}^3$, a matriz

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{E}_3} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

dizem-se *diagonalizáveis*.

Com efeito, verifica-se

$$\boldsymbol{Q}_{\text{U}} = \left(\boldsymbol{M}_{\text{U}\to\text{E}_3}\right)^{-1} \boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{M}_{\text{U}\to\text{E}_3}$$

onde a *matriz mudança de base* de U para E_3 (base canónica)

$$\boldsymbol{M}_{\text{U}\to\text{E}_3} = (\boldsymbol{E}_3)^{-1}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é, neste caso, designada por *matriz diagonalizadora* de $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_{\text{E}_3}$.

- O problema seguinte evidencia que a proposição enunciada no teorema anterior *não é uma condição necessária* para que uma transformação linear seja *diagonalizável*.

Exemplo 10 [5.16]: Seja a transformação linear $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$H(x,y,z) = (2x + 2y + 3z, x + 3y + 3z, x + 2y + 4z)$$

a) Determine os seus valores próprios.

b) Obtenha os vectores próprios e os espaços próprios associados a cada um dos seus valores próprios. Para cada um dos subespaços obtidos indique uma base e a sua dimensão.

c) Mostre que a transformação H é diagonalizável.

Solução:

a) A *representação matricial* de H em relação à *base canónica*, $\text{E}_3 = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, *para* $\mathbb{R}^3$ é

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{E_3} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

e tem como *polinómio característico*

$$p(\lambda) = \left| \lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{H} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & -3 \\ -1 & \lambda - 3 & -3 \\ -1 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 7)$$

O *polinómio característico é factorizável em* $\mathbb{R}$ (as *raízes* são todas *reais*); a transformação linear H possui, apenas, *dois valores próprios distintos*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \, , \ \lambda_3 = 7$$

e, neste caso,

$$\mathrm{m_a}(1) = 2 \, , \ \ \mathrm{m_a}(7) = 1$$

b) Conclui-se, desde já, que

$$\dim \mathrm{E}(1) \leq 2 \quad \mathrm{e} \quad \dim \mathrm{E}(7) = 1$$

Seja o valor próprio $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; resolvendo o sistema de equações homogéneo

$$\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H} \right] \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x - 2y - 3z = 0 \\ -x - 2y - 3z = 0 \\ -x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Os *vectores próprios* associados a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ são

$$x(1) = \left\{(-2y - 3z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y \neq 0 \ \vee \ z \neq 0\right\}$$

O *espaço próprio* associado a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ é

$$\mathrm{E}(1) = \left\{(-2y - 3z, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

e, portanto,

$$\text{Base } \mathrm{E}(1) = \{(-2,1,0), (-3,0,1)\} \quad \Rightarrow \quad \dim \mathrm{E}(1) = 2$$

Constata-se que, no caso do valor próprio $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, se verifica

$$\mathrm{m_g}(1) = \mathrm{m_a}(1) = 2$$

Seja o valor próprio $\lambda_3 = 7$; resolvendo o sistema de equações homogéneo

$$[7\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}]\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x - 2y - 3z = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Os *vectores próprios* associados a $\lambda_3 = 7$ são

$$x(7) = \left\{(z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \neq 0\right\}$$

O *espaço próprio* associado a $\lambda_3 = 7$ é

$$\mathrm{E}(7) = \left\{(z, z, z) \in \mathbb{R}^3\right\} \ \text{ e } \ \text{Base } \mathrm{E}(7) = \{(1,1,1)\}$$

c) Apesar de H possuir apenas dois valores próprios distintos, verifica-se que o conjunto de vectores próprios

$$\mathrm{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(-2,1,0), (-3,0,1), (1,1,1)\}$$

constitui uma *base ordenada para* $\mathbb{R}^3$.
A *representação matricial* de H *em relação à base* U é

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{U}} = m(H)_{\mathrm{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{\mathrm{U}} = \mathrm{diag}(1,1,7)_{\mathrm{U}}$$

Quer a transformação linear H, quer a sua representação matricial em relação à base canónica para $\mathbb{R}^3$, a matriz

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{E}_3} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

dizem-se *diagonalizáveis*.
Com efeito, verifica-se

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{U}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}_3}\right)^{-1} \boldsymbol{H}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}_3}$$

onde a *matriz mudança de base* de U para E_3 (base canónica)

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}_3} = \left(\boldsymbol{E}_3\right)^{-1} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é a *matriz diagonalizadora* de $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{E}_3}$.

- O teorema seguinte apresenta uma *condição necessária e suficiente* alternativa para que uma transformação linear seja *diagonalizável*.

Teorema [5.12]: Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que V é um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$. Considere que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Omega$ $(k \leq n)$ são os *valores próprios distintos* de T com *multiplicidades algébricas* iguais a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, respectivamente, tais que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \dim \mathrm{V} = n$$

Então a transformação linear T é *diagonalizável*, se e só se a multiplicidade algébrica de cada valor próprio for igual à respectiva multiplicidade geométrica, isto é,

$$\mathrm{m_a}(\lambda_i) = \mathrm{m_g}(\lambda_i) = \alpha_i \quad \text{com} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

- O teorema seguinte é uma consequência das propriedades atrás apresentadas.

Teorema [5.13]: O *polinómio característico* de qualquer transformação linear *diagonalizável* $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que V é um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$, é *factorizável*.

- Concluindo, a análise da viabilidade da diagonalização de uma transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que V é um espaço linear sobre um corpo Ω, pode ser reduzida à verificação dos seguintes aspectos fundamentais:

  i) O polinómio característico de T é *factorizável* em Ω;

  ii) $\mathrm{m_a}(\lambda) = \mathrm{m_g}(\lambda)$ para cada um dos seus valores próprios.

Exemplo 11: A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos **exemplos 4** e **8** *não é diagonalizável*.
Apesar do *polinómio característico* ser *factorizável em* $\mathbb{R}$, de que resultam os três valores próprios (não distintos)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \ , \ \ \lambda_3 = 4$$

verifica-se

$$m_g(2) = 1 < m_a(2) = 2$$

$$m_g(4) = m_a(4) = 1$$

pelo que não é possível encontrar uma *base ordenada de vectores próprios para o espaço* $\mathbb{R}^3$; a transformação linear *T* admite, no máximo, dois vectores próprios linearmente independentes.

Exemplo 12: A transformação linear $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ do **exemplo 5** *não é diagonalizável*. O seu *polinómio característico não é factorizável em* $\mathbb{R}$; a transformação linear possui um único valor próprio, $\lambda_1 = -2$.
Assim, não é possível encontrar uma *base ordenada de vectores próprios para o espaço* $\mathbb{R}^3$; a transformação linear *R* admite, no máximo, um vector próprio linearmente independente.

Outras propriedades

Teorema [5.14]: Sendo ***T*** uma matriz quadrada, de ordem *n*, num corpo Ω, verifica-se:

i) As matrizes ***T*** e $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ possuem os *mesmos valores próprios*.

ii) Se ***A*** é uma matriz quadrada, de ordem *n*, num corpo Ω, então as matrizes $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{A}$ possuem os *mesmos valores próprios*.

Teorema [5.15]: Seja ***T*** uma matriz quadrada não singular, de ordem *n*, num corpo Ω. Se $\lambda \in \Omega$ é valor próprio de ***T***, então λ^{-1} é valor próprio da sua matriz inversa, $\boldsymbol{T}^{-1}$.

- Relativamente ao enunciado no teorema anterior, convém referir que se $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{O}$ é um vector próprio de ***T*** associado ao valor próprio (não nulo) λ, então ***X*** será vector próprio da matriz $\boldsymbol{T}^{-1}$ associado ao valor próprio λ^{-1}.

Teorema [5.16]: Uma *matriz ortogonal* só admite valores próprios iguais a $+1$ ou a -1.

Teorema [5.17]: Seja ***T*** uma matriz quadrada de ordem *n*. Se ***T*** é *diagonalizável*, então a sua *característica*, $r(\boldsymbol{T})$, é igual ao número dos seus valores próprios não nulos.

Teorema [5.18]: Seja $\boldsymbol{T}$ uma matriz quadrada e k um número inteiro positivo. Se λ é valor próprio de $\boldsymbol{T}$, então λ^k é valor próprio da matriz $\boldsymbol{T}^k$.

- Relativamente ao enunciado no teorema anterior, convém referir que se $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{O}$ é um vector próprio de $\boldsymbol{T}$ associado ao valor próprio λ, então $\boldsymbol{X}$ será vector próprio de $\boldsymbol{T}^k$ associado ao valor próprio λ^k.

Teorema [5.19]: Seja $\boldsymbol{T}$ uma matriz quadrada não singular e k um número inteiro positivo. Se λ é valor próprio de $\boldsymbol{T}$, então λ^{-k} é valor próprio da matriz $\boldsymbol{T}^{-k}$.