Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Reavaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta.**

GRUPO I

1. [**5,7**] Considere as transformações lineares $R \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $S \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ e $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dadas por

$$R(x,y,z) = (x - z, -x + y + z), \qquad S(x,y) = (-x + y, x + 2y, 2x + y),$$

$$T(x,y,z) = (x + z, 2y - z, x + z)$$

em relação às bases canónicas E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *R*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Verifique quais das funções dadas são sobrejetivas. Justifique.

c) Mostre que apenas uma das funções é injetiva, mas não bijetiva, e obtenha a sua função inversa.

2. [**2,0**] Seja V um espaço linear de dimensão finita, $\dim \mathrm{V} = n$. Mostre que a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ é injetiva, se e só se o seu núcleo possuir apenas o elemento zero de V. Além disso, verifica-se a relação $\dim T(\mathrm{V}) = \dim \mathrm{V}$.

GRUPO II

3. [**4,0**] Sejam as transformações lineares definidas na questão 1. e as bases $\mathrm{U} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathrm{B} = \{(0,1),(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Usando o cálculo matricial, obtenha as matrizes $m(T)_{\mathrm{U},\mathrm{E}_3}$, representação matricial de *T* em relação às bases U e E_3, e $m(R)_{\mathrm{E}_3,\mathrm{B}}$, representação matricial de *R* em relação às bases E_3 e B.

b) Usando preferencialmente as matrizes obtidas na alínea anterior, calcule a matriz $m(RT + R)_{\mathrm{U},\mathrm{B}}$, representação matricial de $RT + R$ em relação às bases U e B.

.... ***(continua no verso)***

4. [**2,5**] Seja a matriz real:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ \alpha & \beta & \beta & 1 \\ 2 & \beta & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o determinante e a característica da matriz $\boldsymbol{A}$.

b) Obtenha os valores dos parâmetros reais α e β, de modo que $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=1/4$ e $Cof\,(a_{42})=4$.

GRUPO III

5. [**5,8**] Considere a transformação linear $T\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$m(T)=\begin{bmatrix} 0 & -3 & b \\ b & 6 & -3 \\ 3 & b & 0 \end{bmatrix},\ b\in\mathbb{R}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Seja o conjunto de vetores $\mathrm{W}=\{(-\alpha,\alpha,\alpha),(\alpha,\alpha,2)\}\subset\mathbb{R}^3$. Determine:

a) O valor do parâmetro b, de modo que $\lambda=b$ seja um dos seus valores próprios.

b) Os seus valores próprios e os respetivos espaços próprios; indique, para cada um destes subespaços, uma base e a dimensão.

c) O valor do parâmetro α, de modo que o conjunto W possa estar incluído numa base de vetores próprios, U, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Obtenha a base U, justificando devidamente.