DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES 13 /6/ 2014

Duração: 90 minutos **Teste de Análise Matemática EE - versão A**

Nome: ______________________ Nr.: ________ Curso: MIEEIC

Apresente todos os cálculos efectuados.

1. Considere a função real definida em $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^3 + ay^3 - xy$, onde a é uma constante real.

   (a) Determine os pontos críticos de f, em função do parâmetro real a.

$f'_x = 3x^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = 3x^2$

$f'_y = 3ay^2 - x = 0 \Leftrightarrow 3a(3x^2)^2 - x = 0$ $\Big\{ 27ax^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(27ax^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 = \frac{1}{27a} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{3\sqrt[3]{a}}$

$\Downarrow \quad y = 0$ $\qquad \Downarrow \quad y = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$

Se $a \neq 0$, pt^{os} críticos são $(0,0)$, $\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{a}}, \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}\right)$

Se $a = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow (0,0)$

   (b) Determine os valores de a para os quais f admite extremos, justificando com os cálculos.

$f''_{x^2} = 6x$ $\qquad |H(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow (0,0)$ é ponto de sela.

$f''_{xy} = -1$

$f''_{y^2} = 6ay$

$\left|H\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{a}}, \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}\right)\right| = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt[3]{a}} & -1 \\ -1 & \frac{2a}{\sqrt[3]{a^2}} \end{vmatrix} = \frac{4a}{\sqrt[3]{a^3}} - 1 = 4 - 1 = 3 > 0.$

Para $a = 0$, f não admite extremos.

Para $a \neq 0$, f admite extremo em $\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{a}}, \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}\right)$.

   (c) Para $a = 1$ classifique os pontos críticos de f (minimizantes, maximizantes ou pontos de sela), quanto à existência de extremos.

Neste caso, os pontos críticos são $(0,0)$ e $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$|H(0,0)| < 0 \Rightarrow (0,0)$ é pt^{o} de sela.

$\left|H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right| = 3 > 0$ e $f''_{x^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 2 > 0$, logo $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ é minimizante.

2. Determine três números **positivos** cuja soma é $A > 0$ e cujo produto seja máximo.

$x, y, z \rightarrow$ três números

- $x+y+z = A \Leftrightarrow z = A-x-y$
- Maximizar o seu produto $P = xyz = xy(A-x-y) = Axy - x^2y - xy^2$

$$P'_x = Ay - 2xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow y(A-2x-y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \lor y = A-2x$$

$$P'_y = Ax - x^2 - 2xy = 0$$

se $y = 0 \Rightarrow Ax - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(A-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = A \Rightarrow (0,0), (A,0)$

se $y = A-2x \Rightarrow Ax - x^2 - 2x(A-2x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - Ax = 0 \Leftrightarrow x(3x-A) = 0 \Leftrightarrow$

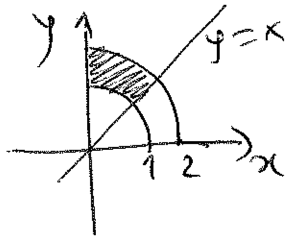
$\Leftrightarrow x = 0 \lor x = \frac{A}{3}$ $\quad \left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right)$ (Continua na última página)

3. Calcule o integral triplo $\iiint_R 1\, dV$ onde a região de integração é $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq z \leq x \land 0 \leq x \leq 1 \land -1 \leq y \leq 1\}$.

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{x} 1\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{-1}^1 (x - x^2)\, dy\, dx = \int_0^1 2(x - x^2)\, dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

4. Determine o valor do integral duplo $\iint_U x\, dxdy$, usando coordenadas polares (r, θ). A região de integração U é a parte do anel que se encontra no 1º quadrante limitado entre as circunferências centradas na origem e de raios 1 e 2 e limitada entre a reta $x = 0$ e a reta $y = x$. **Nota:** a transformação de coordenadas cartesianas em polares é dada por $x = r.\cos\theta$, $y = r.\sin\theta$.



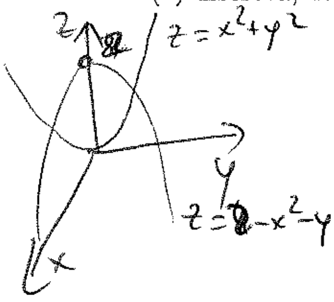
$$\int_1^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} R\cos\theta\,(R)\, d\theta\, dR =$$

$$= \int_1^2 R^2 \left[\operatorname{sen}\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2} dR = \int_1^2 R^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dR =$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2}\left[\frac{R^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3} \times \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

5. Considere o sólido limitado pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$.

(a) Escreva, usando integrais iterados, o integral triplo que permite calcular o volume do sólido.



$x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$

Projeção em xOy

$x^2+y^2 = 2-x^2-y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2=2$

$x^2+y^2=1$

$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$

$-1 \le x \le 1$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} 1\,dz\,dy\,dx.$$

(b) Escreva o integral anterior usando coordenadas cilíndricas (r, θ, z). **Nota:** a transformação de coordenadas cartesianas em cilíndricas é dada por $x = r.\cos\theta$, $y = r.\sin\theta$, $z = z$.

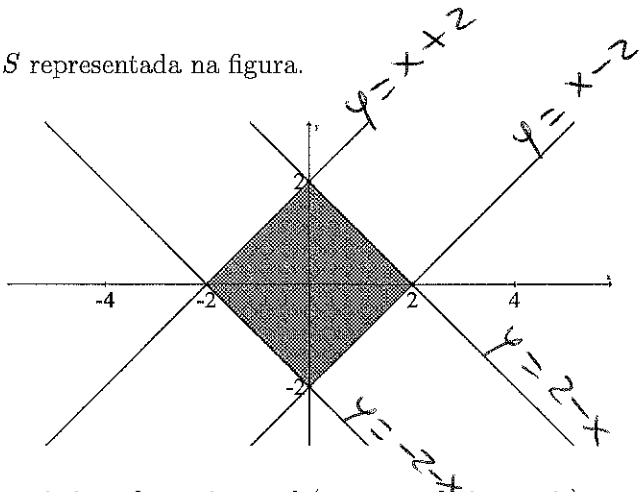
$R^2 \le z \le 2-R^2$

$0 \le R \le 1$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{R^2}^{2-R^2} R\,.\,dz\,d\theta\,dR.$$

6. Considere a região plana S representada na figura.



(a) Escreva, usando integrais iterados, o integral (ou soma de integrais) que permite calcular a área da região plana S.

$$\int_{-2}^{0}\int_{-2-x}^{2+x} 1\,dy\,dx + \int_0^2\int_{x-2}^{2-x} 1.\,dy\,dx$$

(b) Usando a mudança de variáveis $u = y - x$ e $v = y + x$, escreva o integral duplo nas novas variáveis u, v.

$y=2+x \Rightarrow u=2+x-x=2$ $\quad -2 \le u \le 2$

$y=-2+x \Rightarrow u=-2+x-x=-2$

$|J| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{2}$

$y=2-x \Rightarrow v=2-x+x=2$ $\quad -2 \le v \le 2$

$y=-2-x \Rightarrow v=-2-x+x=-2$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}\,du\,dv.$$

(2) $f''_{x^2} = -2y$

$f''_{xy} = A - 2x - 2y$

$f''_{y^2} = -2x$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -2y & A-2x-2y \\ A-2x-2y & -2x \end{bmatrix}$$

$$H\left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{-2A}{3} & -\frac{A}{3} \\ -\frac{A}{3} & \frac{-2A}{3} \end{bmatrix}$$

$\left|H\left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right)\right| = \frac{A^2}{3} > 0$ e $f''_{x^2}\left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right) = \frac{-2A}{3} < 0$

logo $\left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right)$ é maximizante.

E os três números positivos são $\frac{A}{3}, \frac{A}{3}, \frac{A}{3}$.