TRANSFORMAÇÕES LINEARES

1. Em cada uma das alíneas seguintes verifique se a função dada é uma transformação linear:

d) $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que $J(x, y) = (y^2, x^2)$.

e) $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, em que $K(x) = (3x, x)$.

f) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, em que $L(x, y) = (2y, 0, 3x, 0)$.

g) $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $M(x, y, z) = (x - y, y - z, x + y + z)$.

h) $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $N(x, y, z) = (yz, xz, x)$.

i) $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $P(x, y, z) = (x - 2, y, z + 1)$.

5. Para cada uma das transformações lineares seguintes, determine o núcleo e o contradomínio e indique, para cada um destes subespaços, uma base e a respectiva dimensão (nulidade e ordem). Além disso, verifique se a transformação linear é injectiva e/ou sobrejectiva e obtenha, se tal for possível, a sua transformação inversa.

f) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, em que $L(x, y) = (2y, 0, 3x, 0)$.

g) $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $M(x, y, z) = (x - y, y - z, x + y + z)$.

h) $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que $N(x, y) = (y, y)$.

i) $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que $P(x, y) = (x + 2y, x - y)$.

m) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, em que $T(x, y, z) = (2x - 3z, y - z)$.

n) $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, em que $U(x, y) = (x - 3y, x + 2y, 2x + y)$.

o) $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $V(x, y, z) = (x - z, 0, x - y)$.

p) $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, em que $W(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z, x + y + z)$.

17. Em cada uma das alíneas seguintes obtenha a transformação composta possível das transformações lineares dadas.

a) $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, em que $K(x) = (3x, x)$;

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, em que $L(x, y) = (2y, 0, 3x, 0)$.

b) $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, em que $W(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z, x + y + z)$;

$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $Q(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, em que $T(x, y, z) = (2x - 3z, y - z)$;

$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $Q(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$.

d) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, em que $S(x, y, z) = (x - y, y - z)$;

$J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que $J(x, y) = (2y, x)$;

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, em que $L(x, y) = (2y, 0, 3x, 0)$.

18. Mostre que se duas transformações lineares *S* e *T*, que possuem o espaço linear V como domínio e conjunto de chegada, são comutativas, então verificam-se as seguintes relações:

$$(S+T)^2 = S^2 + 2ST + T^2 \text{ e } (S+T)^3 = S^3 + 3S^2T + 3ST^2 + T^3$$

Indique como deveriam ser reescritas as referidas relações, se *S* e *T* não fossem comutativas, isto é, se $ST \neq TS$.

19. Sejam as transformações lineares $M, Q \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, definidas por:

$$Q(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z) \text{ e } M(x, y, z) = (x - y, y - z, x + y + z)$$

a) Determine as transformações compostas QM, MQ, $QM - MQ$, $(QM)^2$, $(MQ)^2$, Q^2M^2, M^2Q^2 e $(QM - MQ)^2$.

b) Mostre que QM e MQ são injectivas e obtenha as suas transformações inversas.

21. Mostre que se duas transformações lineares *S* e *T*, que possuem o espaço linear V como domínio e conjunto de chegada, são comutativas, então $(ST)^n = S^n T^n$, $n \in \mathbb{N}$.

23. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma transformação linear injectiva e seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação, tal que $G(x, y, z) = (x - z, h(z), 2y)$. Mostre que:

a) *G* é uma transformação linear.

b) *G* é bijectiva.

30. Seja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma transformação linear injectiva e considere a função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y) = (w, x - 2y)$, em que $w = G(y)$. Mostre que:

a) *T* é uma transformação linear.

b) *T* é injectiva.

c) *T* é bijectiva.

32. Em cada uma das alíneas seguintes defina a transformação linear dada, indicando a sua lei de transformação em relação às bases canónicas, a partir das imagens dos elementos do domínio considerados.

a) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, em que $S(1,-1,0) = (2,-1)$, $S(0,-1,1) = (1,-2)$ e $S(1,0,1) = (1,-1)$.

b) $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $R(1,-1,1) = (0,-1,2)$, $R(2,3,2) = (1,1,-2)$ e $R(1,4,1) = (3,-1,0)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $T(0,1,2) = (1,3,2)$, $T(1,2,2) = (3,5,3)$ e $T(1,1,1) = (2,3,2)$.

d) $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, em que $P(1,0,0) = (1,0,1,1)$, $P(1,0,1) = (1,-1,2,2)$ e $P(0,1,1) = (1,0,1,2)$.

e) $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, em que $Y(1,2) = (4,5,3)$ e $Y(-1,1) = (-1,4,0)$.

33. Para cada uma das transformações lineares seguintes, determine a sua representação matricial em relação às bases canónicas (do domínio e do conjunto de chegada).

a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que $F(x, y) = (0, y)$.

e) $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, em que $K(x) = (3x, x)$.

f) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, em que $L(x, y) = (2y, 0, 3x, 0)$.

g) $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $M(x, y, z) = (x - y, y - z, x + y + z)$.

h) $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que $N(x, y) = (y, y)$.

i) $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que $P(x, y) = (x + 2y, x - y)$.

m) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, em que $T(x, y, z) = (2x - 3z, y - z)$.

n) $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, em que $U(x, y) = (x - 3y, x + 2y, 2x + y)$.

o) $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $V(x, y, z) = (x - z, 0, x - y)$.

p) $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, em que $W(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z, x + y + z)$.

41. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que:

$$T(\vec{j}) = -\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}\ ,\ T(\vec{i} - \vec{j}) = 4\vec{j} + 4\vec{k} \ \text{ e } \ T(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

a) Obtenha a representação matricial de *T* em relação à base canónica para $\mathbb{R}^3$ e escreva a lei de transformação que lhe está associada.

b) Calcule a imagem de $2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ através de *T*.

c) Determine o núcleo e o contradomínio de *T*. Identifique, para cada um destes subespaços, uma base e conclua em relação às suas dimensões.

d) Mostre que *T* é bijectiva e caracterize devidamente a sua transformação inversa.

42. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, tal que:

$$T(-1,0,1)=(0,-1,1,0)\,,\ T(0,-1,1)=(1,0,1,1)\ \text{ e } T(0,0,1)=(1,1,2,1)$$

a) Obtenha a sua representação matricial, $\boldsymbol{T}=m(T)$, em relação às bases canónicas e escreva a lei de transformação que lhe está associada.

b) Recorrendo ao *método da condensação da matriz*, calcule a característica de $\boldsymbol{T}=m(T)$ e conclua em relação às dimensões do núcleo e do contradomínio de *T*.

c) Caracterize o núcleo e o contradomínio de *T*.

d) Mostre que *T* é injectiva e determine a sua transformação inversa.

44. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(\vec{i})=(0,0)$, $T(\vec{j})=(1,1)$ e $T(\vec{k})=(1,-1)$. Determine:

a) A representação matricial de *T* em relação às bases canónicas para os espaços $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$; escreva a lei de transformação que lhe está associada.

b) A imagem de $3\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$ através de *T*.

c) O núcleo e o contradomínio de *T*; identifique, para cada um destes subespaços, uma base e conclua em relação às suas dimensões.

e) A matriz que representa *T* em relação às bases ordenadas $\mathrm{E}_3=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}\subset\mathbb{R}^3$ e $\mathrm{B}=\{(1,2),(-1,-1)\}\subset\mathbb{R}^2$.

46. Sejam as transformações lineares $R:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ e $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, que possuem as representações matriciais

$$\boldsymbol{R}=m(R)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{S}=m(S)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\ \text{e } \boldsymbol{T}=m(T)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_2=\{\vec{i}_1,\vec{j}_1\}\subset\mathbb{R}^2$ e $\mathrm{E}_3=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}\subset\mathbb{R}^3$.

a) Caracterize o núcleo e o contradomínio de *S*. Indique, para cada um destes subespaços, uma base e conclua em relação às suas dimensões. Será *S* sobrejectiva? Justifique.

b) Classifique cada um dos operadores dados quanto à injectividade. Para os casos possíveis, determine a respectiva transformação inversa.

c) Em relação aos operadores RTS, TRS e SRT, obtenha os que são possíveis. Escreva a lei de transformação para cada um desses operadores.

47. Considere as transformações lineares $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definidas por

$$S(x,y,z)=\left(x+y+\frac{4}{3}z,-x-\frac{2}{3}z,2x-y,y+\frac{1}{2}z\right)$$

$$T(-1,1,0,0)=(1,-1,-2)\,,\ T(1,0,1,-1)=(0,3,0)$$

$$T(0,1,0,0)=(2,1,-1)\,,\ T(0,-1,0,1)=(0,-3,1)$$

em relação às bases canónicas para os espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

a) Determine a representação matricial de *T* em relação às bases canónicas e escreva a lei de transformação que lhe está associada.

b) Caracterize o núcleo e o contradomínio de *T*. Identifique, para cada um destes subespaços, uma base e conclua em relação às suas dimensões.

d) Mostre que *S* é injectiva e caracterize devidamente a sua transformação inversa.

e) Obtenha as representações matriciais das transformações compostas ST e TS.

50. Seja a transformação linear $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $S(\vec{i})=\vec{i}-\vec{j}$ e $S(\vec{j})=2\vec{i}+\vec{j}$. Obtenha:

a) As representações matriciais de *S* e S^2 em relação à base canónica para o espaço $\mathbb{R}^2$.

b) As imagens do vector $3\vec{i}-4\vec{j}$ através de *S* e de S^2.

c) As matrizes que representam as transformações S e S^2 em relação à base ordenada $\mathrm{B}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, em que $\vec{e}_1=\vec{i}+\vec{j}$ e $\vec{e}_2=\vec{i}+2\vec{j}$.

51. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$T(x,y,z)=(x-2y+z,x+y,x+y-z)$$

em relação à base canónica $\mathrm{E}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ para o espaço linear $\mathbb{R}^3$. Determine:

a) A representação matricial de *T* em relação à base E.

b) As matrizes que representam as transformações T e T^2 em relação à base ordenada $\mathrm{B}=\{(1,0,1),(1,0,0),(1,1,2)\}$ para $\mathbb{R}^3$.

55. Considere as transformações lineares $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$S(x,y)=(x+y,2x+3y,x+2y)$$

e $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, representada pela matriz

$$\boldsymbol{T}=m(T)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, $\mathrm{E}_3=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, para o espaço linear $\mathbb{R}^3$.

Seja $\mathrm{V}=\{(1,1,0),(0,-1,0),(1,1,-1)\}$ uma base ordenada para $\mathbb{R}^3$ e designe-se por E_2 a base canónica para o espaço linear $\mathbb{R}^2$.

a) Caracterize o núcleo e o contradomínio de *T*.

b) Classifique T e S quanto à sua injectividade e sobrejectividade. Obtenha, se tal for possível, as suas transformações inversas.

c) Determine a transformação composta TS em relação às bases canónicas para $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

d) Obtenha a representação matricial da transformação TS, considerando a base V para o espaço $\mathbb{R}^3$.

e) Obtenha a representação matricial da transformação $TS+S$, considerando a base V para o espaço $\mathbb{R}^3$.

56. Sejam V um espaço linear real e $\mathrm{E}=\{e_1,e_2,e_3\}$ uma base ordenada para V. Considere a transformação linear $T:\mathrm{V}\to\mathrm{V}$, tal que:

$$T(e_1)=-e_3,\ T(e_2)=e_1-e_3 \text{ e } T(e_3)=e_1-e_2+e_3$$

a) Determine a matriz $\boldsymbol{T}_\mathrm{E}=m(T)_\mathrm{E}$, que representa *T* em relação à base E.

b) Mostre que *T* é injectiva e obtenha a representação matricial de T^{-1} em relação à base E.

57. Sejam as transformações lineares $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definidas por

$$T(x,y,z)=(x-2z,0,-2x+4z)$$

$$S(1,0,1)=(2,-1,2)\,,\ S(-1,1,0)=(0,1,-1)\ \text{e}\ S(0,0,1)=(1,-1,1)$$

em relação à base canónica $\mathrm{E}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ para o espaço linear $\mathbb{R}^3$. Considere a base ordenada $\mathrm{B}=\{(1,0,1),(-1,1,0),(0,0,1)\}$ para $\mathbb{R}^3$.

a) Caracterize o núcleo e o contradomínio de *T*. Identifique, para cada um destes subespaços, uma base e conclua em relação às suas dimensões.

b) Obtenha a representação matricial de *S* em relação à base canónica e escreva a lei de transformação que lhe está associada.

c) Mostre que *S* é bijectiva e caracterize devidamente a sua transformação inversa.

d) Calcule as matrizes que representam as transformações ST e $S^{-1}T^2$ em relação à base canónica.

g) Obtenha a matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{B,E}}=m(S)_{\mathrm{B,E}}$, que representa *S* em relação às bases ordenadas B e E.

h) Obtenha a matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E,B}}=m(S)_{\mathrm{E,B}}$, que representa *S* em relação às bases ordenadas E e B.

i) Obtenha a matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{B}}=m(S)_{\mathrm{B}}$, que representa *S* em relação à base ordenada B.

j) Mostre que a transformação composta ST é definida, em relação à base B, através da seguinte lei de transformação

$ST:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $ST(a,b,c)_{\mathrm{B}}=(-a-b-2c,-2a-2b-4c,2a+2b+4c)_{\mathrm{B}}$

58. Sejam as transformações lineares $R:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que

$$R(x,y,z) = (x-y-2z, 2x-y-3z, y+z)$$

$S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$S(1,1,0) = (3,-1,4)\,,\ S(0,-1,1) = (-1,-2,-1) \text{ e } S(1,-1,1) = (0,-4,0)$$

e $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, representada pela matriz

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

todas definidas em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $\mathrm{E}_2 = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\}$ para os espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

a) Recorrendo à representação matricial, mostre que S é definida pela lei de transformação

$$S(x,y,z) = (x+2y+z, -2x+y-z, x+3y+2z)$$

b) Determine a representação matricial de $TR:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases ordenadas $\mathrm{B} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$, para $\mathbb{R}^3$, e $\mathrm{C} = \{(1,-2),(1,2)\}$, para $\mathbb{R}^2$.

c) Obtenha a representação matricial de $(TR+T):\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases B e C.

59. Considere as transformações lineares $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definidas por

$$T(x,y)=(x+y,2x,2y)$$

$$S(1,1,0)=(1,1,3)\,,\ S(0,1,-1)=(1,-1,-1)\ \text{e}\ S(0,0,1)=(-1,0,1)$$

em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_3=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ e $\mathrm{E}_2=\{\vec{i}_1,\vec{j}_1\}$ para os espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja a base ordenada $\mathrm{B}=\{(1,0,1),(0,2,0),(1,2,3)\}$ para $\mathbb{R}^3$.

a) Obtenha o núcleo e o contradomínio de *T*. Identifique, para cada um destes subespaços, uma base e conclua em relação às suas dimensões. Mostre que *T* não é sobrejectiva.

b) Mostre que *T* é injectiva e caracterize devidamente a sua transformação inversa.

d) Determine a representação matricial de *S* em relação à base canónica para $\mathbb{R}^3$ e escreva a lei de transformação que lhe está associada.

e) Mostre que *S* é bijectiva e obtenha uma representação matricial para a sua transformação inversa; caracterize devidamente S^{-1}.

f) Determine a representação matricial, em relação às bases canónicas, da composição possível das transformações lineares *S* e *T*.

g) Obtenha a matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{B,E_3}}=m(S)_{\mathrm{B,E_3}}$, que representa *S* em relação às bases ordenadas B e E_3.

h) Obtenha a matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E_3,B}}=m(S)_{\mathrm{E_3,B}}$, que representa *S* em relação às bases ordenadas E_3 e B.

i) Obtenha a matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{B}}=m(S)_{\mathrm{B}}$, que representa *S* em relação à base ordenada B.

j) Determine a matriz que representa a composição possível de *S* com *T*, usando a matriz obtida na alínea anterior; identifique as bases em relação às quais a matriz encontrada se encontra definida.

64. Considere as transformações lineares $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definidas por

$$S(x,y)=(x+y,2x,x-y)$$

$$T(1,1,0)=(2,0,-1)\,,\ T(1,-1,0)=(0,0,1)\ \text{e}\ T(0,0,1)=(0,1,1)$$

em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_3=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ e $\mathrm{E}_2=\{\vec{i}_1,\vec{j}_1\}$ para os espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja a base ordenada $\mathrm{B}=\{(1,1,0),(0,0,1),(1,-1,0)\}$ para $\mathbb{R}^3$.

a) Obtenha o núcleo e o contradomínio de *S*. Identifique, para cada um destes subespaços, uma base e conclua em relação às suas dimensões.

b) Mostre que *S* é injectiva e caracterize devidamente a sua transformação inversa.

d) Defina de forma adequada a transformação composta possível de *S* com *T*, tendo como referência as bases canónicas e apresente a respectiva representação matricial.

e) Mostre, recorrendo à representação matricial, que a transformação linear *S* é definida, em relação às bases E_2 e B, através da seguinte lei de transformação

$$S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\text{, em que } S(x,y)=\frac{1}{2}(3x+y,2x-2y,-x+y)_{\mathrm{B}}$$

f) Adoptando bases ordenadas adequadas, defina a transformação linear *T* de modo que seja possível obter a transformação composta encontrada em d), se for utilizada, no processo de composição, a lei de transformação para *S* referida na alínea anterior.