Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**5,2**] Sejam as transformações lineares $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $R, S \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dadas por

$$T(x,y) = (x-2y, -x-y, 4x-2y), \qquad S(x,y,z) = (x-z, x-y, -x+y+z)$$

$$R(x,y,z) = (x-y, -x+2y+z, -x+3y+2z)$$

em relação às bases canónicas E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *T*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Verifique quais das funções dadas são injetivas. Justifique.

c) Mostre que apenas uma das funções é bijetiva e obtenha a sua função inversa.

2) [**1,7**] Sejam a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ e o conjunto de vetores próprios de *T*, $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_k\} \subset E(\alpha)$, em que $E(\alpha)$ é o espaço próprio associado ao valor próprio α. Mostre que o vetor não nulo $\vec{v} \in L(U)$ é também um vetor próprio de *T*.

GRUPO II

3) [**4,5**] Considere as transformações lineares definidas na pergunta 1) e as bases $\mathrm{W} = \{(1,-1),(1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathrm{U} = \{(1,0,-1),(0,1,1),(-1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Usando o cálculo matricial, calcule as matrizes $\boldsymbol{R}_{\mathrm{U},\mathrm{E}_3} = m(R)_{\mathrm{U},\mathrm{E}_3}$, representação matricial de *R* em relação às bases U e E_3, e $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}_3,\mathrm{U}} = m(S)_{\mathrm{E}_3,\mathrm{U}}$, representação matricial de *S* em relação às bases E_3 e U.

b) Recorrendo preferencialmente às matrizes obtidas na alínea anterior, obtenha a matriz $m(RST-2T)_{\mathrm{W},\mathrm{E}_3}$, representação matricial de $RST-2T$ em relação às bases W e E_3.

....***(continua no verso)***

GRUPO III

4) [**2,8**] Determine, indicando todas as operações efetuadas, o determinante e a característica da matriz real:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & k & 2k-8 & 1 \\ k & 2k & 0 & k \\ k^2 & 1-k^2 & 1-5k^2 & 2 \end{bmatrix}$$

GRUPO IV

5) [**5,8**] Considere a transformação linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{S}=m(S)=\begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathrm{B}=\{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}\subset\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os valores próprios.

b) Determine os espaços próprios e indique, para cada um desses subespaços, uma base e a dimensão.

c) Verifique, justificando devidamente, se a transformação linear admite uma base de vetores próprios, U, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, obtenha as matrizes $\boldsymbol{S}_{\mathrm{U,U}}$ e $\boldsymbol{S}_{U,B}$ e conclua se alguma destas matrizes é semelhante à matriz $\boldsymbol{S}_{B,B}$, apresentando as expressões matriciais que as relacionam.