Departamento de Matemática e Aplicações 5 /07/ 2013

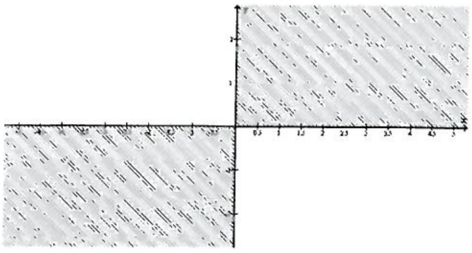
Duração: 120 minutos **Exame de Análise Matemática EE - versão A**

Nome: ______________________ Nr.: __________ Curso: LEAP

GRUPO I (8 valores)

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correcta no quadrado correspondente. Cada resposta correcta vale 1 valor.

1. Qual das seguintes funções reais tem por domínio a região sombreada na figura abaixo?



- [ ] $f(x,y) = \frac{1}{\ln(xy)}$
- [ ] $f(x,y) = \frac{1}{xy}$
- [x] $f(x,y) = \sqrt{xy}$
- [ ] $f(x,y) = \sin(xy)$
- [ ] Nenhuma das anteriores.

2. Considere a função real $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ k & \text{se } x = y \end{cases}$ definida no seu domínio. Qual o valor de k de modo que a função f seja contínua em $(1,1)$?

[x] 2; [ ] 1; [ ] 0; [ ] 4; [ ] Nenhuma das anteriores.

3. Qual das seguintes funções reais **não** satisfaz a equação diferencial $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$?

- [ ] $f(x,y) = 5x + 5y + 9$
- [x] $f(x,y) = x^2 - y^2 + x^2y^2$
- [ ] $f(x,y) = x^2 - y^2$
- [ ] $f(x,y) = 3xy$
- [ ] Nenhuma das anteriores.

4. A taxa de variação de f no ponto (a,b), na direção do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é dada por:

- [ ] $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu_1,b)-f(a,b)}{h}$
- [x] $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu_1,b+hu_2)-f(a,b)}{h}$
- [ ] $\lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+hu_2)-f(a,b)}{h}$
- [ ] $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+u_1,b+u_2)-f(a,b)}{h}$
- [ ] Nenhuma das anteriores.

5. Considere a função real dada $w = \sqrt{x} + y^2$ onde $x = e^{2t}$ e $y = t^3 + 4t$. A expressão de $\frac{dw}{dt}$ é:

☐ $e^{2t}(\sqrt{x} + y^2)(3t + 4)$

☐ $e^{2t}\sqrt{x} + y^2(t^3 + 4t)$

☐ $2e^{2t}\sqrt{x} + y^2(3t + 4)$

☐ $\frac{e^{2t}}{\sqrt{x}} + 2y(3t + 4)$

☒ Nenhuma dos anteriores. $\frac{dw}{dt} = \frac{e^{2t}}{\sqrt{x}} + 2y\left(3t^2 + 4\right)$

6. Considere a função real $f(x, y) = y.\cos x$ definida no seu domínio. A aproximação do valor da diferença $f(dx, 1 + dy) - f(0, 1)$ é dada por:

☐ dx; ☒ dy; ☐ $dx + dy$; ☐ $-dx + dy$; ☐ Nenhuma das anteriores.

7. Seja $f(x, y)$ uma função real diferenciável e (a, b) um maximizante de f. Então:

☒ $\vec{\nabla} f(a, b) = (0, 0)$.

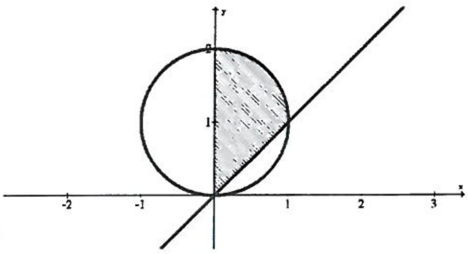
☐ $f''_{x^2}(a, b) = 0$.

☐ $|H(a, b)| = 0$, onde $H(a, b)$ representa a matriz hessiana de f em (a, b).

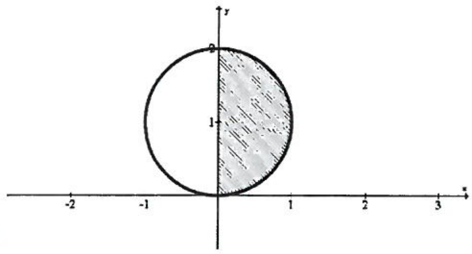
☐ $f''_{xy}(a, b) = 0$.

☐ Nenhum dos anteriores.

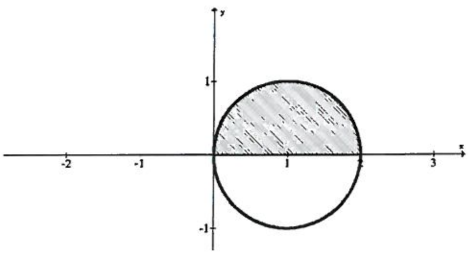
8. Considere o integral duplo $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\sin\theta} r \; dr d\theta$. Qual das seguintes regiões sombreadas representa a região de integração do integral dado?



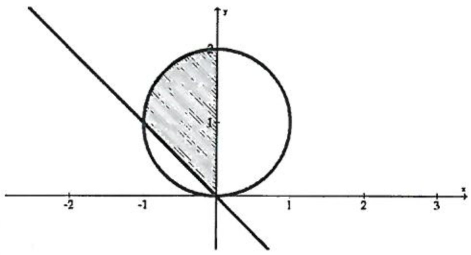
☒



☐



☐



☐

☐ Nenhum dos anteriores.

GRUPO II (12 valores)

Apresente todos os cálculos efectuados.

1. Considere a função $f(x, y) = x^3 + x^2y - \frac{y^2}{2}$

(a) Determine os pontos críticos de f.

$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 2xy = 0 \\ f'_y = x^2 - y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{---} \\ x^2 = y \end{cases}$ $\begin{cases} 3y + 2xy = 0 \\ \text{---} \end{cases}$ $\begin{cases} y(3 + 2x) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee x = -\frac{3}{2} \\ \text{---} \end{cases}$

se $y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

se $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = y \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

$(0,0)$ e $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ são os pt^{os} críticos de f.

(b) Classifique os pontos críticos.

$f''_{x^2} = 6x + 2y$

$f''_{y^2} = -1$

$f''_{xy} = 2x$

$|H(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ caso duvidoso

$\left|H\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)\right| = \begin{vmatrix} -\frac{9}{2} & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} < 0$ não há extremo em $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

2. A temperatura num local (x, y) do plano XOY é dada, em graus Celsius, pela fórmula $T(x, y) = 3x^2e^{-y}$.

(a) Determina o valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$.

$T'_x(x,y) = 6xe^{-y} \Rightarrow T'_x(2,1) = 12e^{-1} = \frac{12}{e}$

$T'_y(x,y) = -3x^2e^{-y} \Rightarrow T'_y(2,1) = -\frac{12}{e}$

(b) Qual a taxa de variação da temperatura no ponto $(2, 1)$ na direcção que vai do ponto $(2, 1)$ para o ponto $(1, 2)$?

$\vec{u} = (1,2) - (2,1) = (-1,1) \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. A taxa de variação é

$D_{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} T(2,1) = \left(\frac{12}{e}, -\frac{12}{e}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{12\sqrt{2}}{e}$

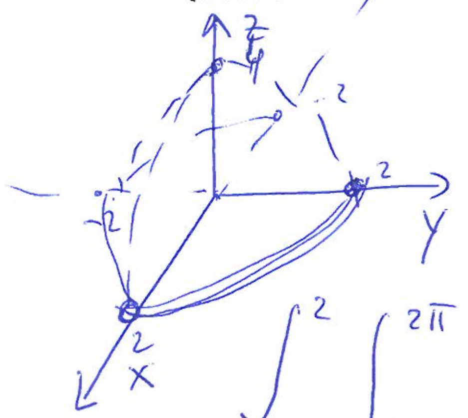
(c) No ponto $(2, 1)$, qual a direção segundo a qual a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa desse aumento?

A temperatura aumenta mais rapidamente na direção do vector gradiente $\vec{\nabla} T(2,1) = \left(\frac{12}{e}, -\frac{12}{e}\right) = \frac{12}{e}(1,-1)$

A taxa de variação nessa direção é $\|\vec{\nabla} T(2,1)\| = \frac{12}{e} \cdot \sqrt{2}$.

3. Utilizando integrais triplos ou duplos, calcule o volume do sólido
$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$.

$0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$



Projeção no plano xOy:

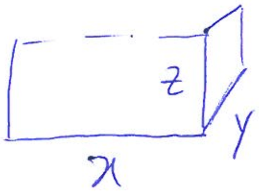
$-\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$

$-2 \le x \le 2$

Usando coordenadas polares

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-R^2} R \, d\theta \, dR = 2\pi \int_0^2 (4R - R^3)\,dR = 2\pi \left[2R^2 - \frac{R^4}{4}\right]_0^2 =$$
$$= 2\pi \times 4 = 8\pi$$

4. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo de modo que a soma dos comprimentos das suas 12 arestas seja 36.



$4x + 4y + 4z = 36 \Leftrightarrow x + y + z = 9$

$\Leftrightarrow z = 9 - x - y$

Volume $= xyz = xy(9-x-y) \to$ volume da caixa

$$\begin{cases} V'_x = 9y - y^2 - 2xy = 0 \\ V'_y = 9x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y(9 - y - 2x) = 0 \\ \_\_\_ \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \quad \vee \quad y = 9 - 2x \\ \_\_\_ \end{cases}$$

• se $y = 0$, substituindo na outra equação: $9x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(9-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 9$

$(0,0)$; $(9,0)$

se $y = 9 - 2x$, substituindo na outra equação: $9x - x^2 - 2x(9-2x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

se $x = 0 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow (0,9)$

se $x = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (3,3)$

pt^{os} críticos: $(0,0)$; $(9,0)$; $(0,9)$ e $(3,3)$

Verificação quais são maximizantes:

$f''_{y^2} = -2x$

$f''_{x^2} = -2y$

$f''_{xy} = 9 - 2x - 2y$

$|H(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} < 0 \to$ não há extremo em $(0,0)$

$|H(9,0)| = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & -18 \end{vmatrix} < 0 \to$ não há extremo em $(9,0)$

$|H(0,9)| = \begin{vmatrix} -18 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix} < 0 \to$ não há extremo em $(0,9)$

$|H(3,3)| = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} > 0$ e $f''_{x^2}(3,3) = -6 < 0$, logo $f(3,3)$ é máximo da função $f(3,3) = 3^3$.