Análise Matemática para Engenharia

folha de exercícios 1 — 2021/2022

- **Limite e continuidade**

1. Calcule o limite das seguintes funções quando (x, y) tende para $(0, 0)$ segundo as rectas $y = 0$, $x = 0$ e $y = mx$, com $m \neq 0$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$

(f) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^4}{(x^2+y^4)^2}$

Diga, justificando, se existe limite destas funções quando (x, y) tende para $(0, 0)$.

2. Determine, caso existam, os limites seguintes.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} (2x - y^2)$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} y \sin\left(\frac{x}{y}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^3+y^3}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{3xy}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^4}{1+x^4}$

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^3+y)\,\text{sen}\,\frac{1}{y+x}$

(m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,\text{sen}\,xy}{x^2+y^2}$

(n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}\,xy}{3xy}$

(o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+y^3}{x^2+y^2}$

3. Estude a continuidade na origem das funções seguintes.

$$g(x,y) = \begin{cases} \cos(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ k & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

seja contínua em $(x, y) = (0, 0)$.

4. Determine o domínio das seguintes funções e estude a existência de limite nos pontos indicados:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x+y} & \text{se } x \neq y \\ 1 & \text{se } x = y. \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x \\ 1+\cos xy & \text{se } y \neq x \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq x \\ 0 & \text{se } y = x \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

5. Discuta a continuidade das funções apresentadas a seguir.

(a) $f(x,y,z) = x^2y + x^3y^2 + z$

(b) $f(x,y) = \ln(x+y-1)$

(c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{5x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$