Combinação linear de vectores

Definição [1.8]: Combinação linear de elementos de um conjunto
Seja $S=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\ldots,\vec{s}_k\}\subset\mathbb{R}^n$. Um elemento $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ diz-se uma *combinação linear* dos vectores do conjunto S, se existir um conjunto de escalares $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{R}$, tais que

$$\vec{x}=\lambda_1\vec{s}_1+\lambda_2\vec{s}_2+\ldots+\lambda_k\vec{s}_k=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\vec{s}_i$$

- Convém realçar o seguinte:

  i) Os escalares $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ designam-se *coeficientes da combinação linear*;

  ii) Diz-se que o vector $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{s}_1,\vec{s}_2,\ldots,\vec{s}_k$ por intermédio (ou por meio) dos escalares (ou dos coeficientes) $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$, ou, ainda, que o vector $\vec{x}$ *é gerado* pelo conjunto S;

  iii) O vector nulo será sempre combinação linear dos elementos de qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$, isto é, qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$ gera sempre o vector nulo.

Exemplo 4 [1.37]: Seja $S_1=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2\}=\{(1,1,1),(1,-3,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$. Verifique se os vectores $\vec{a}_3=(1,-1,0)$ e $\vec{a}_4=(2,-1,1)$ são combinações lineares dos elementos de S_1.

Solução: Apenas o vector $\vec{a}_3=(1,-1,0)$ é gerado pelo conjunto S_1, ou seja, $\vec{a}_3=\frac{1}{2}\vec{a}_1+\frac{1}{2}\vec{a}_2$; no caso do vector $\vec{a}_4=(2,-1,1)$ o sistema de equações lineares é impossível.

- Pretende-se definir o conjunto de todos os vectores de $\mathbb{R}^n$ que são combinação linear dos elementos de $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$, ou ainda, que são gerados por S.

Teorema [1.10]: O conjunto de todas as combinações lineares dos vectores que constituem o subconjunto $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é um *subespaço linear* do espaço $\mathbb{R}^n$.

Definição: **Subespaço gerado por um conjunto de vectores**

Designa-se por *subespaço gerado por* $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$, representando-se por $L(S)$, ao conjunto de todas as combinações lineares dos elementos que constituem S, isto é,

$$L(S) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{s}_i \ , \ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Convém realçar o seguinte:

  i) O conjunto S é designado por *conjunto gerador* de $L(S)$;

  ii) Diz-se que conjunto S *gera o subespaço* $L(S)$, ou, ainda, que o subespaço $L(S)$ *é gerado* pelo conjunto S;

  iii) $L(S) \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\vec{0} \in L(S)$;

  iv) Como é óbvio, qualquer elemento do conjunto S pertence a $L(S)$;

  v) Qualquer combinação linear de elementos do subespaço $L(S)$ pertence, ainda, a $L(S)$;

  vi) Convenciona-se que o subespaço gerado pelo conjunto vazio é o vector nulo, ou seja, $L\{ \ \} = L(\varnothing) = \{\vec{0}\}$.

- Pretende-se obter o subespaço $L(\mathrm{S}) \subseteq \mathbb{R}^n$ gerado pelo conjunto

$$\mathrm{S} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$$

Considerando o vector genérico $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ resolva-se o seguinte problema

$$\lambda_1\vec{s}_1 + \lambda_2\vec{s}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{s}_k = \vec{x}$$

de que resulta um sistema de *n* equações lineares a *k* incógnitas, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (os *coeficientes da combinação linear*), obtendo-se uma das seguintes situações:

a) *Sistema impossível*:

O vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *não é gerado* pelo conjunto S, isto é,

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \notin L(\mathrm{S})$$

b) *Sistema possível*:

O vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ é *gerado* pelo conjunto S, isto é,

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in L(\mathrm{S})$$

i) *Sistema possível e determinado*:

O vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *é gerado de forma única* pelo conjunto S – o sistema é verificado para um e um só conjunto de valores para as incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

O conjunto S é *linearmente independente*

ii) *Sistema possível e indeterminado*:

O vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *é gerado de forma não única* pelo conjunto S – o sistema é verificado para uma infinidade de conjuntos de valores para as incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

O conjunto S é *linearmente dependente*

Exemplo 5 [1.40]: Determine o subespaço $L(\mathrm{S}_1) \subseteq \mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto $\mathrm{S}_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1),(1,-3,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$ e verifique que $\vec{a}_3 = (1,-1,0) \in L(\mathrm{S}_1)$ e $\vec{a}_4 = (2,-1,1) \notin L(\mathrm{S}_1)$ (ver **exemplo 4**).

Solução: O sistema de equações lineares

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

é *possível e determinado*, obtendo-se

$$L(\mathrm{S}_1) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 = -x_1 + 2x_3\right\} = \left\{(x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

O conjunto S_1 *gera de forma única o subespaço* $L(\mathrm{S}_1)$.

Exemplo 6 [1.43]: Determine o subespaço $L(\mathrm{S}_2) \subseteq \mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto $\mathrm{S}_2 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6\} = \{(2,0,1),(0,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Solução: O sistema de equações lineares

$$\alpha_1 \vec{a}_5 + \alpha_2 \vec{a}_6 = \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

é *possível e determinado*, obtendo-se

$$L(\mathrm{S}_2) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 = -x_1 + 2x_3\right\} = \left\{(x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

ou seja,

$$L(\mathrm{S}_2) = L(\mathrm{S}_1)$$

O conjunto S_2 *gera de forma única o subespaço* $L(\mathrm{S}_2) = L(\mathrm{S}_1)$.

Exemplo 7 [1.44]: Seja $S_3 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{(1,1,1),(1,-3,-1),(1,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto de vectores que resultou do conjunto S_1 (ver **exemplo 5**) pela inclusão do vector $\vec{a}_3 = (1,-1,0) \in L(S_1)$. Obtenha o subespaço $L(S_3) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Solução: Neste caso, o sistema de equações lineares

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

é *possível e indeterminado*, obtendo-se

$$L(S_3) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 = -x_1 + 2x_3\right\} = \left\{(x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

ou seja,

$$L(S_3) = L(S_2) = L(S_1)$$

O conjunto S_3 *gera de forma não única o subespaço* $L(S_3) = L(S_1)$.

Dependência e independência linear de vectores

- O subespaço

$$L(\mathrm{S}_1)=\left\{(x_1,-x_1+2x_3,x_3)\in\mathbb{R}^3\right\}\subset\mathbb{R}^3$$

pode ser gerado por variados conjuntos de vectores do espaço $\mathbb{R}^3$; por exemplo, os conjuntos

$$\mathrm{S}_1=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2\}=\{(1,1,1),(1,-3,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$$

$$\mathrm{S}_2=\{\vec{a}_5,\vec{a}_6\}=\{(2,0,1),(0,2,1)\}\subset\mathbb{R}^3$$

$$\mathrm{S}_3=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}=\{(1,1,1),(1,-3,-1),(1,-1,0)\}\subset\mathbb{R}^3$$

- O subespaço $L(\mathrm{S}_1)\subset\mathbb{R}^3$ pode ser gerado por variados conjuntos de vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, ainda que de formas distintas:

  i) *De forma única*: pelos conjuntos S_1 e S_2;

  ii) *De forma não única*: pelo conjunto S_3.

Definição [1.11]: Independência linear
O conjunto de vectores $\mathrm{S}=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\ldots,\vec{s}_k\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ diz-se *linearmente independente*, se *gerar de forma única o vector nulo*, ou seja, se

$$\lambda_1\vec{s}_1+\lambda_2\vec{s}_2+\ldots+\lambda_k\vec{s}_k=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\vec{s}_i=\vec{0}\ \Rightarrow\ \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$$

(*combinação linear trivialmente nula*). Neste caso diz-se, ainda, que os *vectores* do conjunto S são *linearmente independentes*.

Definição [1.12]: Dependência linear

O conjunto de vectores $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ diz-se *linearmente dependente*, se *gerar de forma não única o vector nulo*, ou seja, se existir um conjunto de escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ não todos nulos, tal que

$$\lambda_1\vec{s}_1 + \lambda_2\vec{s}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{s}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\vec{s}_i = \vec{0}$$

Neste caso diz-se, ainda, que os *vectores* do conjunto S são *linearmente dependentes*.

- Convenciona-se que conjunto vazio é *linearmente independente*.

Teorema [1.12]: O conjunto de vectores $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ gera de forma única qualquer vector $\vec{x} \in L(S)$, se e só se gerar de forma única o vector nulo.

- Relativamente ao subespaço

$$L(S_1) = \left\{(x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

obtido nos **exemplos 5, 6 e 7** pode-se concluir o seguinte:

i) $S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1)\}$ gera $L(S_1)$ *de forma única*, logo é *linearmente independente*.

ii) $S_2 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6\} = \{(2,0,1), (0,2,1)\}$ gera $L(S_1)$ *de forma única*, logo é *linearmente independente*.

iii) $S_3 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1), (1,-1,0)\}$ gera $L(S_1)$ *de forma não única*, logo é *linearmente dependente*.

- No espaço $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\} = \{(1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), (0,0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,0,\ldots,1)\}$$

é *linearmente independente*.

Teorema [1.13]: O conjunto de vectores $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ é *linearmente dependente*, se um dos seus elementos for o vector nulo.

Teorema [1.14]: No espaço $\mathbb{R}^n$, qualquer conjunto constituído por um único vector não nulo é *linearmente independente*.

Teorema [1.16]: O conjunto de vectores $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ é *linearmente dependente*, se um dos seus elementos for combinação linear dos restantes.

Teorema [1.17]: O conjunto de vectores $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ é *linearmente dependente*, se dois dos seus elementos forem múltiplos.

Teorema [1.18]: No espaço $\mathbb{R}^n$, qualquer conjunto constituído por dois vectores não nulos e não paralelos é *linearmente independente*.

Teorema **[1.15]**: Sejam S e T dois conjuntos não vazios de vectores do espaço $\mathbb{R}^n$, tais que $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{S}$. Verifica-se:

i) Se T é *linearmente dependente*, então S é também *linearmente dependente*.

ii) Se S é *linearmente independente*, então T é também *linearmente independente*.

Teorema **[1.19]**: Seja $\mathrm{S} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ um conjunto *linearmente independente*, formado por k vectores do espaço $\mathbb{R}^n$ e seja $L(\mathrm{S})$ o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado (*de forma única*) por S. Então qualquer conjunto de $k+1$ vectores de $L(\mathrm{S})$ é *linearmente dependente*.

Exemplo 8 **[1.52]**: Relativamente ao conjunto *linearmente independente* do **exemplo 5**, $\mathrm{S}_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$, conclua que qualquer um dos seguintes conjuntos é *linearmente dependente*:

$$\mathrm{S}_3 = \{(1,1,1), (1,-3,-1), (1,-1,0)\},\ \mathrm{S}_4 = \{(1,1,1), (2,0,1), (0,4,2)\}$$

$$\mathrm{S}_5 = \{(2,4,3), (1,-5,-2), (-2,6,2)\},\ \mathrm{S}_6 = \{(1,1,1), (2,0,1), (1,-1,0), (0,4,2)\}$$

$$\mathrm{S}_7 = \{(1,1,1), (2,0,1), (0,4,2), (2,4,3), (-2,6,2)\}$$

Solução: Os conjuntos S_3, S_4 e S_5 são constituídos por 3 vectores do subespaço gerado pelo conjunto S_1,

$$L(\mathrm{S}_1) = \left\{(x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Os conjuntos S_6 e S_7 são formados por 4 vectores do subespaço $L(\mathrm{S}_1)$.

Teorema **[1.20]**: Seja $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ um conjunto *linearmente independente* do espaço $\mathbb{R}^n$, que gera (*de forma única*) o subespaço $L(S)$. Se $\vec{s}_{k+1}$ é um vector do espaço $\mathbb{R}^n$ tal que $\vec{s}_{k+1} \notin L(S)$, então o conjunto $S_1 = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k, \vec{s}_{k+1}\}$ é *linearmente independente*.

Exemplo 9 **[1.53]**: Seja o conjunto $S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$ que gera *de forma única* (S_1 é *linearmente independente*) o subespaço

$$L(S_1) = \left\{(x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Mostre que o conjunto de vectores

$$S_8 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1), (2,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é *linearmente independente* e determine o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto S_8, $L(S_8) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Solução: O conjunto S_8 é *linearmente independente*, já que gera de forma única o vector nulo. Em alternativa, o conjunto S_8 é *linearmente independente*, já que $\vec{a}_4 = (2,-1,1) \notin L(S_1)$. O subespaço gerado pelo conjunto S_8 é

$$L(S_8) = \mathbb{R}^3$$

Teorema **[1.21]**: Sejam os conjuntos $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ e $S_1 = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k, \vec{s}_{k+1}\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$, em que $\vec{s}_{k+1} \notin L(S)$. Então $L(S) \subset L(S_1)$.

Exemplo 10: No espaço $\mathbb{R}^2$, o subespaço gerado pelo conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$\mathrm{E} = \left\{\vec{i}, \vec{j}\right\} = \{(1,0),(0,1)\}$$

é

$$L(\mathrm{E}) = \mathbb{R}^2$$

Exemplo 11: No espaço $\mathbb{R}^3$, o subespaço gerado pelo conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$\mathrm{E} = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

é

$$L(\mathrm{E}) = \mathbb{R}^3$$

Exemplo 12: No espaço $\mathbb{R}^n$, o subespaço gerado pelo conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$\mathrm{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\} = \{(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),(0,0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,1)\}$$

é

$$L(\mathrm{E}) = \mathbb{R}^n$$