Universidade do Minho (DMA) — MIEM/MIETELI/MIET
Análise Matemática EE — 8 abril 2015
Teste 1 — Duração: 90 minutos

Instruções:

- É **obrigatória** a apresentação de um documento de identificação.
- O abandono da sala só poderá efetuar-se depois de decorridos 35 minutos a partir do início da prova.
- É **permitida** a consulta de um **formulário de primitivas** e do **formulário disponível na plataforma** elearning.
- **Não é permitido** a utilização de **máquinas de calcular**.
- **Não é permitido** o manuseamento ou exibição de **telemóveis** durante a prova.

Questões:

1. (4,5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{\ln(x^2-y)}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.
   (a) Determine e represente graficamente o domínio de f.
   (b) Determine a curva de nível $\mathcal{N}_0$ e represente-a geometricamente.
   (c) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x,y,z) = (0,-1,f(0,-1))$.

2. (4,5 valores) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma aplicação dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Diga, justificando, se existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
   (b) Calcule, caso exista, o vetor gradiente $\nabla f(0,0)$.
   (c) Será f diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

3. (4,5 valores) Diga se as seguintes afirmações são **verdadeiras** ou **falsas** e **apresente** uma **justificação** para a sua resposta.
   (a) Seja (a,b,c) um ponto da superfície S de equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

   O plano tangente à superfície S no ponto (a,b,c) passa pela origem.
   (b) A equação $x + y + z - \sin(xyz) = 0$ define, numa vizinhança do ponto $(0,0,0)$, implicitamente z como função de x e de y. Então $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -1$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$.
   (c) Se f é a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$, então $D_{\vec{v}} f(1,-2) = 0$ para todo o $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. (1,5 valores) Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas aplicações diferenciáveis tais que $g(x,y) = f(v,w)$ com $v = x^2 - y^2$ e $w = y^2 - x^2$. Mostre que a função composta g satisfaz a equação

$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

5. (4 valores) O astronauta Spiff na sua ida para Mercúrio observa que o seu fato espacial começa a derreter-se. Numa vizinhança de Spiff a temperatura $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$T(x, y, z) = \ln x + \ln y + xyz.$$

   (a) Se ele estiver na posição $(1, 1, 0)$, em que direção se deve mover para arrefecer mais rapidamente? Justifique.

   (b) Usando diferenciais, calcule, aproximadamente, $\ln 0.9 + \ln 1.2 + 0.9 \times 1.2 \times 0.1$.

6. (1 valor) Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$. Mostre que, se $\nabla(f-g)(x, y) = (0, 0)$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, então $f - g$ é constante em $\mathbb{R}^2$.