Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**5,7**] Considere as transformações lineares $T \in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$, $R \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ e $S \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, dadas por

$$T(x,y) = (x+y, x+3y, -x+y), \qquad R(x,y,z) = (x-z, 2x+y+z),$$

$$S(x,y,z) = (x+y-z, x-z, -x-y+z)$$

em relação às bases canónicas E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *S*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Verifique quais das funções dadas são sobrejetivas. Justifique.

c) Mostre que apenas a função *T* é injetiva e obtenha a sua função inversa.

GRUPO II

2. [**4,0**] Considere as transformações lineares definidas na questão 1 e a base $\mathrm{B} = \{(1,0,-1),(1,0,0),(-1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Recorrendo ao cálculo matricial, obtenha a matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{B,B}} = m(S)_{\mathrm{B,B}}$, representação matricial de *S* em relação à base B.

b) Usando preferencialmente à matriz obtida na alínea anterior, calcule a matriz $m(TRS)_{\mathrm{B,E_3}}$, representação matricial de *TRS* em relação às bases B e E_3.

....***(continua no verso)***

GRUPO III

3. [**2,5**] Seja a matriz real:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & a^2+3b+2 & ab \\ 0 & 1 & a & b \\ 1 & a & a^2+b & a+ab \end{bmatrix}$$

a) Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o determinante e a característica.

b) Sejam $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ duas matrizes do tipo $n \times n$. Admita que $\boldsymbol{C}$ é obtida a partir de $\boldsymbol{B}$ por aplicação consecutiva das seguintes operações (OP) sobre as linhas (L) de $\boldsymbol{B}$:

$\text{OP1}: L_2 - L_3 \to L_3$; $\qquad$ $\text{OP2}: L_4 + 2L_1 \to L_4$;

$\text{OP3}: 2L_1 \to L_1$.

Relacione o determinante de $\boldsymbol{C}$ com o determinante de $\boldsymbol{B}$. Justifique.

GRUPO IV

4. [**5,8**] Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{T}=m(T)=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os valores próprios e os respetivos espaços próprios; indique, para cada um destes subespaços, uma base e a dimensão.

b) Verifique, justificando, se T admite uma base de vetores próprios, U, para $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, obtenha essa base e as matrizes $\boldsymbol{T}_{\text{U,U}}$ e $\boldsymbol{T}_{\text{U,E}}$.

c) Identifique uma matriz que represente a transformação linear T e que seja semelhante à matriz $m(T)$; apresente as expressões matriciais que as relacionam.

5. [**2,0**] Seja $\text{V}=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ o conjunto dos valores próprios da matriz $\boldsymbol{A}$ e admita que $\boldsymbol{u}$ é um vetor próprio associado ao valor próprio λ_k. Mostre que se α é um escalar tal que $\alpha \notin \text{V}$, então:

$$(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{u}=\frac{1}{\alpha-\lambda_k}\boldsymbol{u}.$$