Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância) — 1ª Prova de Reavaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**6,2**] Considere o conjunto $S=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}\subset\mathbb{R}^4$, em que $\vec{a}=(1,2,-1,2)$, $\vec{b}=(1,0,3,1)$ e $\vec{c}=(-1,-2,1,0)$, e o subespaço de $\mathbb{R}^4$, $H=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\ :\ x+z=0\}$.

a) Calcule o subespaço gerado pelo conjunto S, $L(S)$; indique uma base para o subespaço obtido que só inclua elementos de S e conclua em relação à sua dimensão; justifique devidamente.

b) Determine uma base ortogonal, W, para $L(S)$, que inclua dois elementos de H.

c) Obtenha uma base, V, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que inclua o maior número possível de elementos de H.

2. [**2,0**] Sejam a reta $r\ :\ X(\alpha)=A+\alpha\vec{u}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ e os pontos P e Q exteriores à reta r. Mostre que se C e D são, respetivamente, os pontos de r mais próximos de P e Q, então:

a) $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}\right|$, tal que $\vec{v}=\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$.

b) $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|\geq\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$.

GRUPO II

3. [**1,6**] Seja o conjunto $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}\subset\mathbb{R}^3$, tal que $\vec{u}_1=(1,\alpha,\alpha)$, $\vec{u}_2=(1,\alpha,1)$, $\vec{u}_3=(0,\alpha,1)$ e $\vec{u}_4=(\alpha,-1,-1)$. Obtenha os valores de α de modo que o subespaço gerado por U, $L(U)$, tenha dimensão igual a dois. Justifique.

....***(continua no verso)***

4. [**2,5**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\|=1$, $\|\vec{a}+\vec{c}\|=\sqrt{7}$, $\|\vec{b}\|=\|\vec{b}\times\vec{c}\|=\sqrt{3}$, $\measuredangle(\vec{c},\vec{b})=\pi/6$, $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{b}\times\vec{c}\}$ é um conjunto ortogonal e $\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{c})+\vec{a}-\vec{b}$. Calcule:

a) O ângulo, α, formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{c}$.

b) A norma do vector $\vec{d}$.

GRUPO III

5. [**5,1**] Sejam o plano M : $2x+y-z=-3$, o ponto $R=(1,1,0)$ e a reta, *s*, com a equação vetorial $X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(-1,0,2)$ e $\vec{a}=(-1,0,1)$. Calcule:

a) A distância do ponto *R* ao plano *M* e o ponto, *I*, deste plano mais próximo de *R*.

b) A equação vetorial da reta, *r*, que passa no ponto *R*, é paralela ao plano *M* e é complanar com a reta *s*. Classifique, justificando, as retas *s* e *r* quanto à sua posição relativa.

6. [**2,6**] Considere a reta *s* e o plano *M* da questão 5. Determine as equações cartesianas de todos os planos que contêm a reta *s* e fazem um ângulo de $60°$ com o plano *M*.