

Sinais e Sistemas

TP5

Séries de *Fourier* – Exercícios



Séries de *Fourier* – Exercícios

- Recordar:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) e^{jn2\pi f_0 t} \quad (\text{equação de síntese})$$

$$c(nf_0) = C_n = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) \cdot e^{-jn2\pi f_0 t} dt \quad (\text{equação de análise})$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \quad \text{----- Sinal par}$$

$$c_n = -j \frac{2}{L} \int_0^{L/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{L}\right) dt \quad \text{----- Sinal ímpar}$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- 1. Determinar na forma de série exponencial de *Fourier* a função definida por:
- $f(t) = e^{2t}$
- No intervalo: $-1 < t < 1$ e $T_0 = 2$

- Solução:

$$c_n = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-1}^1 e^{2t} e^{-j \frac{2\pi n t}{2}} dt \right\} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{2t - j\pi n t} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{t(2 - j\pi n)}}{2 - j\pi n} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(2 - j\pi n)} - e^{-(2 - j\pi n)}}{2 - j\pi n} \right]$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n t}{L}} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{(2 - j\pi n)} - e^{-(2 - j\pi n)}}{2 - j\pi n} \right) e^{j\pi n t}$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

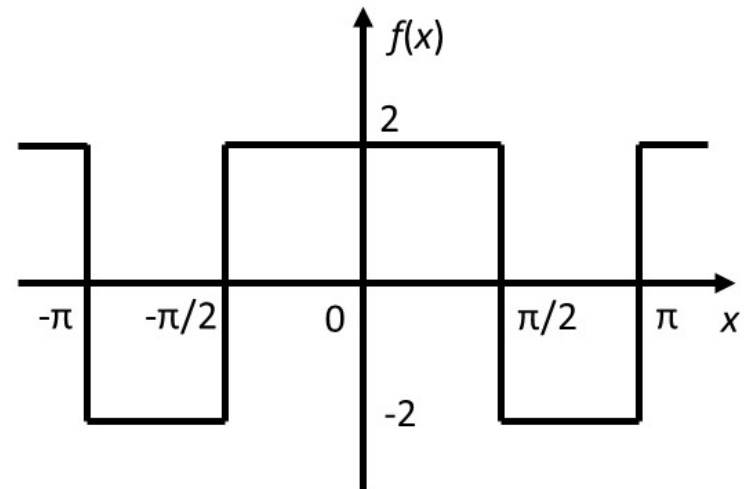
- 2. Determinar na forma de série exponencial de *Fourier* a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 2, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\frac{\pi}{2} \\ -2, & +\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\pi \end{cases}$$

- $T_0 = 2\pi$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- Solução:
- A forma de onda é:



- Notar que o sinal é periódico e par \rightarrow a série não irá ter termos em seno $\rightarrow b_n = 0$
- Entre: $-\pi < x < \pi$, o valor médio é 0 $\rightarrow a_0 = 0$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- Solução:

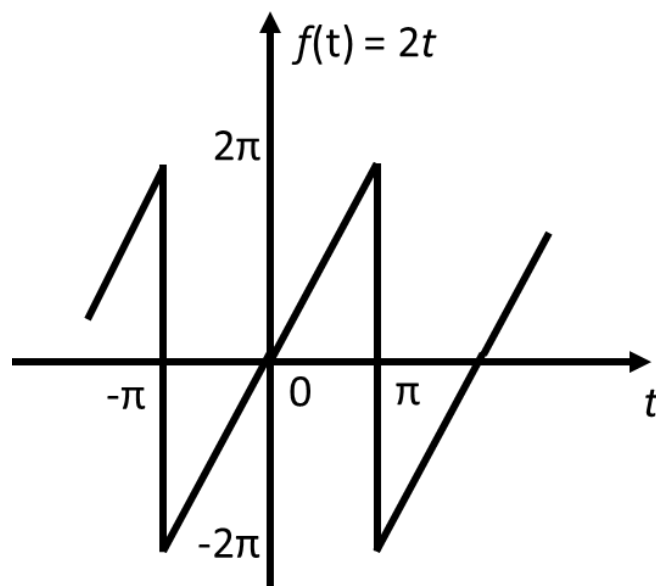
$$\begin{aligned}c_n &= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{2\pi}\right) dx \quad L = 2\pi \\&= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} 2 \cos nx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -2 \cos nx \, dx \right\} \\&= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{2 \sin nx}{n} \right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{2 \sin nx}{n} \right]_{\pi/2}^{\pi} \right\} \\&= \frac{1}{\pi n} \left[\left(2 \sin \frac{n\pi}{2} - 0 \right) - \left(2 \sin n\pi - 2 \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right] = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{2}\end{aligned}$$

- Logo:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi nx}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{4}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\} e^{jn x}$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- 3. Determinar na forma de série exponencial de *Fourier* a função definida por:
- $f(t) = 2t$ no intervalo: $-\pi < t < +\pi$
- $T_0 = 2\pi$



Séries de *Fourier* – Exercícios

- Solução:

$$\begin{aligned}c_n &= -j \frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{L}\right) dt \\&= -j \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} 2t \sin\left(\frac{2\pi nt}{2\pi}\right) dt = -j \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt \, dt \\&= -j \frac{2}{\pi} \left[\frac{-t \cos nt}{n} + \frac{\sin nt}{n^2} \right]_0^{\pi} = -j \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{-\pi \cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n^2} \right) - (0 + 0) \right]\end{aligned}$$

- Logo:

$$c_n = j \frac{2}{n} \cos n\pi \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi nt}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{j2}{n} \cos n\pi \right) e^{jnt}$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- 4. Mostre que a série do problema anterior é equivalente a:

$$f(t) = 4 \left(\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \frac{1}{4} \sin 4t + \dots \right)$$

- Solução:

$$c_n = j \frac{2}{n} \cos n\pi$$

$$c_1 = j \frac{2}{(1)} \cos \pi = j \frac{2}{(1)} (-1) = -\frac{j2}{1}$$

$$c_2 = j \frac{2}{2} \cos 2\pi = j \frac{2}{2}$$

$$c_3 = j \frac{2}{3} \cos 3\pi = j \frac{2}{3} (-1) = -\frac{j2}{3}$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- Solução:

$$c_{-1} = j \frac{2}{(-1)} \cos(-\pi) = +j \frac{2}{(-1)} (-1) = \frac{j2}{1}$$

$$c_{-2} = j \frac{2}{(-2)} \cos(-2\pi) = j \frac{2}{(-2)} (1) = -\frac{j2}{2}$$

- Como o sinal é ímpar: $c_0 = a_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{j2}{1} e^{jt} + \frac{j2}{2} e^{j2t} - \frac{j2}{3} e^{j3t} + \frac{j2}{4} e^{j4t} - \dots + \frac{j2}{1} e^{-jt} - \frac{j2}{2} e^{-j2t} + \frac{j2}{3} e^{-j3t} - \frac{j2}{4} e^{-j4t} + \dots \\ &= \left(-\frac{j2}{1} e^{jt} + \frac{j2}{1} e^{-jt} \right) + \left(\frac{j2}{2} e^{j2t} - \frac{j2}{2} e^{-j2t} \right) + \left(-\frac{j2}{3} e^{j3t} + \frac{j2}{3} e^{-j3t} \right) + \dots \end{aligned}$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- Solução:

$$\begin{aligned}f(t) &= -j4\left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2}\right) + \frac{j4}{2}\left(\frac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2}\right) - \frac{j4}{3}\left(\frac{e^{j3t}-e^{-j3t}}{2}\right) + \dots \\&= -j^2 4\left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right) + \frac{j^2 4}{2}\left(\frac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2j}\right) - \frac{j^2 4}{3}\left(\frac{e^{j3t}-e^{-j3t}}{2j}\right) + \dots \\&= 4\sin t - \frac{4}{2}\sin 2t + \frac{4}{3}\sin 3t + \dots \\f(t) &= 4\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \dots\right)\end{aligned}$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- 5. Determinar na forma de série exponencial de *Fourier* a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 < x < 4 \\ x - 6 & 4 < x < 8 \end{cases}$$

- $T_0 = 8$
- Solução:

$$\frac{8}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{\pi x}{4} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{4} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{4} + \dots \right\}$$