3.

There's a house, away there to the left.
Let's go.- said Sylvie
It looks a very comfable house!- said Bruno
Alice's Adventures in Wonderland, Lewis Carroll

$\mathbb{R}^n$ o conjunto de matrizes colunas de n números reais $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Este conjunto *algebrizado* com uma operação de **adição** e uma operação de **multiplicação por um escalar** constitui um **espaço vectorial.**

Os elementos de um espaço vectorial chamam-se vectores.

- conjunto das matrizes de ordem $m \times n$,
- conjunto das matrizes colunas $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$,
- conjunto dos polinómios de coeficientes reais,

$$P = \{p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}\}$$

- conjunto das funções reais e contínuas,
- $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
- $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$
- $C = \{(x, y, z) : x = y = z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$

- conjunto das matrizes de ordem $m \times n$,
- conjunto das matrizes colunas $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$,
- conjunto dos polinómios de coeficientes reais,

$$P = \{p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}\}$$

- conjunto das funções reais e contínuas,
- $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
- $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$
- $C = \{(x, y, z) : x = y = z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$

- conjunto das matrizes de ordem $m \times n$,
- conjunto das matrizes colunas $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$,
- conjunto dos polinómios de coeficientes reais,

$$P = \{p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}\}$$

- conjunto das funções reais e contínuas,
- $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
- $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$
- $C = \{(x, y, z) : x = y = z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$

- conjunto das matrizes de ordem $m \times n$,
- conjunto das matrizes colunas $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$,
- conjunto dos polinómios de coeficientes reais,

$$P = \{p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}\}$$

- conjunto das funções reais e contínuas,
- $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
- $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$
- $C = \{(x, y, z) : x = y = z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Seja V um conjunto. Diz-se que V é um espaço vectorial (espaço linear) real se estão definidas duas operações:

adição, $+$, que associa a $x, y \in V$ um elemento $x + y \in V$,
e **multiplicação por um escalar**, que associa a cada número real α, e a cada $x \in V$ um elemento $\alpha x \in V$,

que gozam das seguintes propriedades:

(i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$,

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V$,

(iii) existe um único elemento, representado por $\mathbf{0}$, em V, tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V$,

(iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V, representado por **-x** tal que: $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V$,

(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(viii) $\mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x, \quad \forall x \in V$,

Seja V um conjunto. Diz-se que V é um espaço vectorial (espaço linear) real se estão definidas duas operações:

> **adição**, $+$, que associa a $x, y \in V$ um elemento $x + y \in V$,
> e **multiplicação por um escalar**, que associa a cada número real α, e a cada $x \in V$ um elemento $\alpha x \in V$,

que gozam das seguintes propriedades:

(i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$,

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V$,

(iii) existe um único elemento, representado por $\mathbf{0}$, em V, tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V$,

(iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V, representado por **-x** tal que: $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V$,

(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(viii) $\mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x, \quad \forall x \in V$,

Seja V um conjunto. Diz-se que V é um espaço vectorial (espaço linear) real se estão definidas duas operações:

> **adição**, $+$, que associa a $x, y \in V$ um elemento $x + y \in V$,
> e **multiplicação por um escalar**, que associa a cada número real α, e a cada $x \in V$ um elemento $\alpha x \in V$,

que gozam das seguintes propriedades:

(i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V,$

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V,$

(iii) existe um único elemento, representado por $\mathbf{0}$, em V, tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V,$

(iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V, representado por **-x** tal que: $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V,$

(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$

(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

(vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

(viii) $\mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x, \quad \forall x \in V,$

Seja V um conjunto. Diz-se que V é um espaço vectorial (espaço linear) real se estão definidas duas operações:

> **adição**, $+$, que associa a $x, y \in V$ um elemento $x + y \in V$,
> e **multiplicação por um escalar**, que associa a cada número real α, e a cada $x \in V$ um elemento $\alpha x \in V$,

que gozam das seguintes propriedades:

(i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$,

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V$,

(iii) existe um único elemento, representado por **0**, em V, tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V$,

(iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V, representado por **-x** tal que: $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V$,

(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(viii) $\mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x, \quad \forall x \in V$,

Seja V um conjunto. Diz-se que V é um espaço vectorial (espaço linear) real se estão definidas duas operações:

adição, $+$, que associa a $x, y \in V$ um elemento $x + y \in V$,
e **multiplicação por um escalar**, que associa a cada número real α,
e a cada $x \in V$ um elemento $\alpha x \in V$,

que gozam das seguintes propriedades:

(i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$,
(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V$,
(iii) existe um único elemento, representado por **0**, em V, tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V$,
(iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V, representado por **-x** tal que:
$x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V$,
(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
(vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
(viii) $\mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x, \quad \forall x \in V$,

Seja V um conjunto. Diz-se que V é um espaço vectorial (espaço linear) real se estão definidas duas operações:

> **adição**, $+$, que associa a $x, y \in V$ um elemento $x + y \in V$,
> e **multiplicação por um escalar**, que associa a cada número real α, e a cada $x \in V$ um elemento $\alpha x \in V$,

que gozam das seguintes propriedades:

(i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V,$

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V,$

(iii) existe um único elemento, representado por **0**, em V, tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V,$

(iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V, representado por **-x** tal que: $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V,$

(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$

(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

(vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

(viii) $\mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x, \quad \forall x \in V,$

Seja V um conjunto. Diz-se que V é um espaço vectorial (espaço linear) real se estão definidas duas operações:

> **adição**, $+$, que associa a $x, y \in V$ um elemento $x + y \in V$,
> e **multiplicação por um escalar**, que associa a cada número real α, e a cada $x \in V$ um elemento $\alpha x \in V$,

que gozam das seguintes propriedades:

(i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$,

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V$,

(iii) existe um único elemento, representado por $\mathbf{0}$, em V, tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V$,

(iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V, representado por **-x** tal que: $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V$,

(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(viii) $\mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x, \quad \forall x \in V$,

Seja V um conjunto. Diz-se que V é um espaço vectorial (espaço linear) real se estão definidas duas operações:

adição, $+$, que associa a $x, y \in V$ um elemento $x + y \in V$,
e **multiplicação por um escalar**, que associa a cada número real α, e a cada $x \in V$ um elemento $\alpha x \in V$,

que gozam das seguintes propriedades:

(i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$,
(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V$,
(iii) existe um único elemento, representado por **0**, em V, tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V$,
(iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V, representado por **-x** tal que: $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V$,
(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
(vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
(viii) $\mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x, \quad \forall x \in V$,

Seja V um conjunto. Diz-se que V é um espaço vectorial (espaço linear) real se estão definidas duas operações:

> **adição**, $+$, que associa a $x, y \in V$ um elemento $x + y \in V$,
> e **multiplicação por um escalar**, que associa a cada número real α, e a cada $x \in V$ um elemento $\alpha x \in V$,

que gozam das seguintes propriedades:

(i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$,

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V$,

(iii) existe um único elemento, representado por $\mathbf{0}$, em V, tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V$,

(iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V, representado por **-x** tal que: $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V$,

(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(viii) $\mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x, \quad \forall x \in V$,

um muito importante espaço vectorial real $-R^n$

Como se definem as operações?
adição: $x = (x_i), y = (y_i)$, elementos de R^n

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

multiplicação por um escalar: $x = (x_i) \in R^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha x = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

que gozam das propriedades apresentadas no Teorema seguinte.

Teorema

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $x + y = y + x$,

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(iii) $x + 0 = 0 + x = x$,

(iv) $x + (-x) = (-x) + x = 0$,

(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

(vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

(viii) $\mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x$,

Diz-se que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vectorial real.

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ chamam-se vectores e, são normalmente representados por matrizes, tendo-se o

vector coluna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

e o **vector linha** $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$.

Teorema

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $x + y = y + x$,

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(iii) $x + 0 = 0 + x = x$,

(iv) $x + (-x) = (-x) + x = 0$,

(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

(vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

(vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

(viii) $\mathbf{1}.x = x.\mathbf{1} = x$,

Diz-se que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vectorial real.

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ chamam-se vectores e, são normalmente representados por matrizes, tendo-se o

vector coluna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

e o **vector linha** $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$.

outros importantes espaços vectoriais reais

$$R^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$R^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$\hookrightarrow$ Verificar que R^2 e R^3 são espaços vectoriais reais.

$\hookrightarrow$ Verificar que alguns dos espaços vectoriais apresentados anteriormente são de facto espaços vectoriais.

Definição

Seja U um subconjunto, não vazio, de um espaço vectorial real V. U diz-se um **subespaço vectorial** de V, se:

- $x + y \in U, \forall x, y \in U,$
- $\alpha x \in U, \forall x \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Exemplos

- O conjunto dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de $\mathbb{R}^2$.
- O conjunto dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de $\mathbb{R}^3$.

$\hookrightarrow$ Diz-se que U é fechado relativamente à operação de adição e multiplicação por um escalar.

Definição

Seja U um subconjunto, não vazio, de um espaço vectorial real V. U diz-se um **subespaço vectorial** de V, se:

- $x + y \in U, \forall x, y \in U,$
- $\alpha x \in U, \forall x \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Exemplos

• O conjunto dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de $\mathbb{R}^2$.

• O conjunto dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de $\mathbb{R}^3$.

$\hookrightarrow$ Diz-se que U é fechado relativamente à operação de adição e multiplicação por um escalar.

Definição

Seja U um subconjunto, não vazio, de um espaço vectorial real V. U diz-se um **subespaço vectorial** de V, se:

- $x + y \in U, \forall x, y \in U,$
- $\alpha x \in U, \forall x \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Exemplos

• O conjunto dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de $\mathbb{R}^2$.

• O conjunto dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de $\mathbb{R}^3$.

$\hookrightarrow$ Diz-se que U é fechado relativamente à operação de adição e multiplicação por um escalar.

Teorema

A intersecção de subespaços vectoriais de um espaço vectorial V é um subespaço de V.

(consideremos somente a intersecção de 2 subespaços; do mesmo modo se demonstrava para mais do 2 subespaços)

• Sejam X e Y dois subespaços de V, então, uma vez que X e Y são subespaços contêm o vector nulo, ou seja, $0 \in X$ e $0 \in Y$, logo $0 \in X \cap Y$; donde $X \cap Y \neq \varnothing$.

• Sejam $x, y \in (X \cap Y)$. Então $x, y \in X$ e $x, y \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $x + y \in X$ e $x + y \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $x + y \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.

• Seja $x \in (X \cap Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $x \in X$ e $x \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $\alpha x \in X$ e $\alpha x \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $\alpha x \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.

Teorema

A intersecção de subespaços vectoriais de um espaço vectorial V é um subespaço de V.

(consideremos somente a intersecção de 2 subespaços; do mesmo modo se demonstrava para mais do 2 subespaços)

• Sejam X e Y dois subespaços de V, então, uma vez que X e Y são subespaços contêm o vector nulo, ou seja, $0 \in X$ e $0 \in Y$, logo $0 \in X \cap Y$; donde $X \cap Y \neq \varnothing$.

• Sejam $x, y \in (X \cap Y)$. Então $x, y \in X$ e $x, y \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $x + y \in X$ e $x + y \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $x + y \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.

• Seja $x \in (X \cap Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $x \in X$ e $x \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $\alpha x \in X$ e $\alpha x \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $\alpha x \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.

... um conjunto que não é um subespaço vectorial

Em $\mathbb{R}^2$, sejam X be Y dois subespaços reais definidos por:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = 0 \right\}$$

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = 0 \right\}$$

O conjunto $X \cup Y$ não é um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^2$.

Note-se que, por exemplo,

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in X$$

e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Y$,

mas $a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin X \cup Y$

$X \cup Y$ não é fechado relativamente à adição.

Em $\mathbb{R}^2$, sejam X be Y dois subespaços reais definidos por:

$$X = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) : y = 0 \right\}$$

$$Y = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) : x = 0 \right\}$$

O conjunto $X \cup Y$ não é um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^2$.
Note-se que, por exemplo,

$$a = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \in X$$

e $b = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \in Y$,

mas $a + b = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) \notin X \cup Y$

$X \cup Y$ não é fechado relativamente à adição.

... uma definição muito importante

Em $\mathbb{R}^2$ sejam $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Note-se que:

$$x = 5e_1 + 7e_2.$$

Diz-se que x é **combinação linear dos vectores** e_1 e e_2.

Definição

Sejam $x_1, x_2 \ldots x_n$ vectores de um espaço vectorial real V. Diz-se que $x \in V$ é **combinação linear** dos vectores dos $x_1, x_2 \ldots x_n$ se

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Exemplo Se $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ tem-se que:

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} f_1 + \frac{7}{2} f_2,$$

ou seja

x é combinação linear dos vectores f_1 e f_2.

Se $x_1, x_2, \dots x_n$ vectores de um espaço vectorial V.
Então U, o conjunto formado por todas as combinações lineares destes vectores é um subespaço de V.

- U não é vazio, $0 = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$
- $u, v \in U$ tem-se

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \qquad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

então

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

Logo $x + y$ é combinação linear de $x_1, x_2, \dots x_n$, logo pertence a U.

Tem-se também que

$$\alpha u = (\alpha\alpha_1)x_1 + (\alpha\alpha_2)x_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n)x_n$$

donde $\alpha u \in U$.

U é um subespaço vectorial de V
é o subespaço gerado por $x_1, x_2, \dots x_n$
$U = < x_1, x_2, \dots x_n >$

Se $x_1, x_2, \ldots x_n$ vectores de um espaço vectorial V.
Então U, o conjunto formado por todas as combinações lineares destes vectores é um subespaço de V.

- U não é vazio, $0 = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$
- $u, v \in U$ tem-se

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \qquad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

então

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

Logo $x + y$ é combinação linear de $x_1, x_2, \ldots x_n$, logo pertence a U.

Tem-se também que

$$\alpha u = (\alpha\alpha_1)x_1 + (\alpha\alpha_2)x_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n)x_n$$

donde $\alpha u \in U$.

U é um subespaço vectorial de V
é o subespaço gerado por $x_1, x_2, \ldots x_n$
$U = < x_1, x_2, \ldots x_n >$

Se $x_1, x_2, \ldots x_n$ vectores de um espaço vectorial V.
Então U, o conjunto formado por todas as combinações lineares destes vectores é um subespaço de V.

- U não é vazio, $0 = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$
- $u, v \in U$ tem-se

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \qquad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

então

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

Logo $x + y$ é combinação linear de $x_1, x_2, \ldots x_n$, logo pertence a U.

Tem-se também que

$$\alpha u = (\alpha\alpha_1)x_1 + (\alpha\alpha_2)x_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n)x_n$$

donde $\alpha u \in U$.

U é um subespaço vectorial de V
é o subespaço gerado por $x_1, x_2, \ldots x_n$
$U = < x_1, x_2, \ldots x_n >$

Se $x_1, x_2, \dots x_n$ vectores de um espaço vectorial V.
Então U, o conjunto formado por todas as combinações lineares destes vectores é um subespaço de V.

- U não é vazio, $0 = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$
- $u, v \in U$ tem-se

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \qquad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

então

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

Logo $x + y$ é combinação linear de $x_1, x_2, \dots x_n$, logo pertence a U.

Tem-se também que

$$\alpha u = (\alpha\alpha_1)x_1 + (\alpha\alpha_2)x_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n)x_n$$

donde $\alpha u \in U$.

U é um subespaço vectorial de V

é o subespaço gerado por $x_1, x_2, \dots x_n$

$U = < x_1, x_2, \dots x_n >$

Se $x_1, x_2, \ldots x_n$ vectores de um espaço vectorial V.
Então U, o conjunto formado por todas as combinações lineares destes vectores é um subespaço de V.

- U não é vazio, $0 = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$
- $u, v \in U$ tem-se

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \qquad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

então

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

Logo $x + y$ é combinação linear de $x_1, x_2, \ldots x_n$, logo pertence a U.

Tem-se também que

$$\alpha u = (\alpha\alpha_1)x_1 + (\alpha\alpha_2)x_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n)x_n$$

donde $\alpha u \in U$.

U é um subespaço vectorial de V
é o subespaço gerado por $x_1, x_2, \ldots x_n$
$U = < x_1, x_2, \ldots x_n >$

Exemplo

O espaço gerado pelo vector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

subespaço de $\mathbb{R}^2$ cujos vectores têm a segunda componente nula.

Escrevemos: $U = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$

Que vectores constituem um sistema de geradores de $\mathbb{R}^2$?

Seja $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$
temos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

logo
$\mathbb{R}^2 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = < e_1, e_2 >$
considerando $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Que subespaço geram os vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$S = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

tendo-se $S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

Que subespaço geram os vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$S = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

tendo-se $S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

Que subespaço geram os vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$S = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

tendo-se $S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

Que subespaço geram os vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$S = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

tendo-se $S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

Teorema

Se $a_1, a_2, \ldots a_n$ são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, então o subespaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n$ coincide com o espaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n, b$.

Demonstração:

Seja $U =< a_1, a_2, \ldots a_n >$ e $U' =< a_1, a_2, \ldots a_n, b >$.

Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

- $U \subset U'$

seja $x \in U$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + 0b$ logo $x \in U'$.

- $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$

mas b é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, ou seja

$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$

donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x = & \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1}(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) \\ = & (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2)a_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n)a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

Teorema

Se $a_1, a_2, \ldots a_n$ são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, então o subespaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n$ coincide com o espaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n, b$.

Demonstração:

Seja $U =< a_1, a_2, \ldots a_n >$ e $U' =< a_1, a_2, \ldots a_n, b >$.

Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

- $U \subset U'$

seja $x \in U$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + 0b$ logo $x \in U'$.

- $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$

mas b é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, ou seja

$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$

donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x = & \ \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1}(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) \\ = & \ (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2) a_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n) a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

Teorema

Se $a_1, a_2, \ldots a_n$ são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, então o subespaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n$ coincide com o espaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n, b$.

Demonstração:

Seja $U =< a_1, a_2, \ldots a_n >$ e $U' =< a_1, a_2, \ldots a_n, b >$.
Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

- $U \subset U'$

seja $x \in U$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + 0b$ logo $x \in U'$.

- $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$
mas b é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, ou seja
$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$
donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x = & \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1}(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) \\ = & (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2)a_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n)a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

Teorema

Se $a_1, a_2, \ldots a_n$ são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, então o subespaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n$ coincide com o espaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n, b$.

<u>Demonstração:</u>

Seja $U =< a_1, a_2, \ldots a_n >$ e $U' =< a_1, a_2, \ldots a_n, b >$.
Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

- $U \subset U'$

seja $x \in U$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + 0b$ logo $x \in U'$.

- $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$
mas b é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, ou seja
$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$
donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x = & \ \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1}(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) \\ = & \ (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2)a_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n)a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

Teorema

Se $a_1, a_2, \ldots a_n$ são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, então o subespaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n$ coincide com o espaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n, b$.

Demonstração:

Seja $U =< a_1, a_2, \ldots a_n >$ e $U' =< a_1, a_2, \ldots a_n, b >$.
Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

- $U \subset U'$

seja $x \in U$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + 0b$ logo $x \in U'$.

- $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$
mas b é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, ou seja
$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$
donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x = & \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1}(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) \\ = & (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2) a_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n) a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

Teorema

Se $a_1, a_2, \dots a_n$ são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de $a_1, a_2, \dots a_n$, então o subespaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \dots a_n$ coincide com o espaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \dots a_n, b$.

Demonstração:

Seja $U =< a_1, a_2, \dots a_n >$ e $U' =< a_1, a_2, \dots a_n, b >$.

Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

- $U \subset U'$

seja $x \in U$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + 0b$ logo $x \in U'$.

- $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$

mas b é combinação linear de $a_1, a_2, \dots a_n$, ou seja

$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$

donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x = & \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1}(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) \\ = & (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2) a_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n) a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

Teorema

Se $a_1, a_2, \ldots a_n$ são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, então o subespaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n$ coincide com o espaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n, b$.

Demonstração:

Seja $U =< a_1, a_2, \ldots a_n >$ e $U' =< a_1, a_2, \ldots a_n, b >$.

Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

- $U \subset U'$

seja $x \in U$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + 0b$ logo $x \in U'$.

- $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$

mas b é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, ou seja

$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$

donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x = & \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1}(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) \\ = & (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2)a_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n)a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

Teorema

Se $a_1, a_2, \ldots a_n$ são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, então o subespaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n$ coincide com o espaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n, b$.

Demonstração:

Seja $U =< a_1, a_2, \ldots a_n >$ e $U' =< a_1, a_2, \ldots a_n, b >$.

Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

- $U \subset U'$

seja $x \in U$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + 0b$ logo $x \in U'$.

- $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$

mas b é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, ou seja

$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$

donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x = & \quad \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1}(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) \\ = & \quad (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2)a_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n)a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

Teorema

Se $a_1, a_2, \ldots a_n$ são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, então o subespaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n$ coincide com o espaço gerado pelos vectores $a_1, a_2, \ldots a_n, b$.

Demonstração:

Seja $U =< a_1, a_2, \ldots a_n >$ e $U' =< a_1, a_2, \ldots a_n, b >$.

Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

- $U \subset U'$

seja $x \in U$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + 0b$ logo $x \in U'$.

- $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$

mas b é combinação linear de $a_1, a_2, \ldots a_n$, ou seja

$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$

donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x = & \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1}(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) \\ = & (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2)a_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n)a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

... uma definição mesmo muito importante.

Definição

Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um espaço vectorial V são linearmente independentes se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

se verifica apenas quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Exemplo Os vectores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes.

... uma definição mesmo muito importante.

Definição

Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um espaço vectorial V são linearmente independentes se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

se verifica apenas quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Exemplo Os vectores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes.

Exemplo Os vectores $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ **não** são linearmente independentes.

Note-se que : $-2f_1 - 3f_2 + f_3 = 0.$

$\hookrightarrow$ Os vectores de um espaço vectorial que não sejam linearmente independentes dizem-se linearmente dependentes.

Teorema

Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um espaço vectorial V são linearmente dependentes se e só se um dos vectores pode ser escrito como combinação linear dos restantes.

Demonstração:

$\Rightarrow$

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vectores linearmente dependentes. Então tem-se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

com, pelo menos um, dos coeficientes diferente de zero.
Suponhamos que $\alpha_1 \neq 0$.
Então podemos escrever:

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

logo x_1 é combinação linear dos restantes vectores.

Teorema

Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um espaço vectorial V são linearmente dependentes se e só se um dos vectores pode ser escrito como combinação linear dos restantes.

Demonstração:

$\Rightarrow$

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vectores linearmente dependentes. Então tem-se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

com, pelo menos um, dos coeficientes diferente de zero.
Suponhamos que $\alpha_1 \neq 0$.
Então podemos escrever:

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

logo x_1 é combinação linear dos restantes vectores.

$\Leftarrow$

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ vectores e, consideremos que pelo menos um deles, por exemplo x_1 é combinação linear dos restantes vectores; isto é:

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

tendo-se então

$$x_1 - \alpha_2 x_2 - \cdots - \alpha_n x_n = 0$$

donde, se tem uma combinação linear nula com pelo menos um dos coeficientes (o de x_1) não nulo.

algumas observações importantes.

$\hookrightarrow$ Qualquer conjunto singular $\{x\}$ de um espaço vectorial V, sendo $x \in V$, $x \neq 0$, é linearmente independente.

$\hookrightarrow$ Nenhum conjunto de vectores linearmente independentes, de um espaço vectorial V, contém o vector nulo.

$\hookrightarrow$ Para matrizes $m \times n$, em escada de linhas tem-se:

- as linhas não nulas são linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$,
- o número de linhas independentes e o número de colunas independentes são ambos iguais à característica da matriz.

Procurando combinar as noções de conjunto de vectores linearmente independentes e geradores obtemos a seguinte definição.

Definição

Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um espaço vectorial V formam uma base de V se são linearmente independentes e geram V.

Exemplos:

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^2$.

  Os vectores constituem a base canónica de $\mathbb{R}^2$

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

  Os vectores constituem a base canónica de $\mathbb{R}^3$

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^2$.

Uma definição muito importante.

Procurando combinar as noções de conjunto de vectores linearmente independentes e geradores obtemos a seguinte definição.

Definição

Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um espaço vectorial V formam uma base de V se são linearmente independentes e geram V.

Exemplos:

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^2$.

Os vectores constituem a base canónica de $\mathbb{R}^2$

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

Os vectores constituem a base canónica de $\mathbb{R}^3$

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^2$.

Se um espaço vectorial V possui uma base com um número finito de elementos, então todas as bases de V têm o mesmo número de elementos.

Ao número de vectores de uma base de um espaço V, chama-se dimensão do espaço V e denota-se por $dim(V)$.

- $dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- $dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- $dim(\mathbb{R}^n) = n$
- se $V = \{0\}$ então $dim(V) = 0$.
- se $V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ então $dim(V) = 2$.

note-se que $V = < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} >$
e que a e b, com $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, são linearmente independentes.

algumas observações importantes.

$\hookrightarrow$ Se V é um espaço vectorial, de dimensão n, então qualquer conjunto de n vectores linearmente independentes constitui uma base de V.

$\hookrightarrow$ Se V é um espaço vectorial, de dimensão n, qualquer subconjunto de V contendo mais do que n vectores é um conjunto de vectores linearmente dependente.

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Designa-se por espaço das colunas da matriz A o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas da matriz A.

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matriz de ordem 3×4.

O espaço das colunas de A é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, gerado pelas colunas da matriz A, ou seja é formado pelos vectores que são combinação lineares das colunas de A, isto é:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Designa-se por espaço das colunas da matriz A o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas da matriz A.

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matriz de ordem 3×4.

O espaço das colunas de A é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, gerado pelas colunas da matriz A, ou seja é formado pelos vectores que são combinação lineares das colunas de A, isto é:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Designa-se por espaço das linhas da matriz A o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas da matriz A.

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

- Designa-se por característica de linha da matriz A a dimensão do espaço gerado pelas linhas de A, e que se representa por $r_l(A)$ (que é o n máximo de linhas linearmente independentes).
- Designa-se por característica de coluna da matriz A a dimensão do espaço gerado pelas colunas de A, que se representa por $r_c(A)$ (que é o n máximo de colunas linearmente independentes).

Nota: Operações elementares nas colunas de uma matriz não alteram a característica de linha da matriz. Mais ainda $r_l(A) = r_c(A) = c(A)$.

Exemplo Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tem-se $r_l(A) = 4 = r_c(A)$

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Designa-se por espaço das linhas da matriz A o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas da matriz A.

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

- Designa-se por característica de linha da matriz A a dimensão do espaço gerado pelas linhas de A, e que se representa por $r_l(A)$ (que é o n máximo de linhas linearmente independentes).
- Designa-se por característica de coluna da matriz A a dimensão do espaço gerado pelas colunas de A, que se representa por $r_c(A)$ (que é o n máximo de colunas linearmente independentes).

Nota: Operações elementares nas colunas de uma matriz não alteram a característica de linha da matriz. Mais ainda $r_l(A) = r_c(A) = c(A)$.

Exemplo Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tem-se $r_l(A) = 4 = r_c(A)$

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Designa-se por espaço das linhas da matriz A o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas da matriz A.

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

- Designa-se por característica de linha da matriz A a dimensão do espaço gerado pelas linhas de A, e que se representa por $r_l(A)$ (que é o n máximo de linhas linearmente independentes).
- Designa-se por característica de coluna da matriz A a dimensão do espaço gerado pelas colunas de A, que se representa por $r_c(A)$ (que é o n máximo de colunas linearmente independentes).

Nota: Operações elementares nas colunas de uma matriz não alteram a característica de linha da matriz. Mais ainda $r_l(A) = r_c(A) = c(A)$.

Exemplo Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tem-se $r_l(A) = 4 = r_c(A)$

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ uma **matriz em escada de linhas**, de ordem 3×4.

O espaço das colunas da matriz A tem dimensão 2 (e é um subespaço de $\mathbb{R}^3$).

Uma base consiste nas colunas que contêm elementos não nulos da diagonal principal: $(1,0,0),(1,1,0)$.

O espaço das linhas da matriz A tem também dimensão 2 (e é um subespaço de $\mathbb{R}^4$).

Uma base consiste nas linhas não nulas $(1,2,1,2),(0,0,1,1)$.

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ uma **matriz em escada de linhas**, de ordem 3×4.

O espaço das colunas da matriz A tem dimensão 2 (e é um subespaço de $\mathbb{R}^3$).

Uma base consiste nas colunas que contêm elementos não nulos da diagonal principal: $(1,0,0),(1,1,0)$.

O espaço das linhas da matriz A tem também dimensão 2 (e é um subespaço de $\mathbb{R}^4$).

Uma base consiste nas linhas não nulas $(1,2,1,2),(0,0,1,1)$.

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ uma **matriz em escada de linhas**, de ordem 3×4.

O espaço das colunas da matriz A tem dimensão 2 (e é um subespaço de $\mathbb{R}^3$).

Uma base consiste nas colunas que contêm elementos não nulos da diagonal principal: $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$.

O espaço das linhas da matriz A tem também dimensão 2 (e é um subespaço de $\mathbb{R}^4$).

Uma base consiste nas linhas não nulas $(1, 2, 1, 2), (0, 0, 1, 1)$.

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ uma **matriz em escada de linhas**, de ordem 3×4.

O espaço das colunas da matriz A tem dimensão 2 (e é um subespaço de $\mathbb{R}^3$).

Uma base consiste nas colunas que contêm elementos não nulos da diagonal principal: $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$.

O espaço das linhas da matriz A tem também dimensão 2 (e é um subespaço de $\mathbb{R}^4$).

Uma base consiste nas linhas não nulas $(1, 2, 1, 2), (0, 0, 1, 1)$.

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ uma **matriz em escada de linhas**, de ordem 3×4.

O espaço das colunas da matriz A tem dimensão 2 (e é um subespaço de $\mathbb{R}^3$).

Uma base consiste nas colunas que contêm elementos não nulos da diagonal principal: $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$.

O espaço das linhas da matriz A tem também dimensão 2 (e é um subespaço de $\mathbb{R}^4$).

Uma base consiste nas linhas não nulas $(1, 2, 1, 2), (0, 0, 1, 1)$.

Teorema

Seja $Ax = 0$ um sistema homogéneo de m equações a n incógnitas. O con$^{\text{junto}}$ das soluções deste sistema constitui um subespaço linear de R^n.

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n.

(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.

Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.

(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.

(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.

Teorema

Seja $Ax = 0$ um sistema homogéneo de m equações a n incógnitas. O con$^{\text{junto}}$ das soluções deste sistema constitui um subespaço linear de R^n.

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n.

(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.
Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.

(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.

(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.

Teorema

Seja $Ax = 0$ um sistema homogéneo de m equações a n incógnitas. O con$^{\text{junto}}$ das soluções deste sistema constitui um subespaço linear de R^n.

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n.
(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.
Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.
(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.
(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.

Teorema

Seja $Ax = 0$ um sistema homogéneo de m equações a n incógnitas.
O con$^{\text{junto}}$ das soluções deste sistema constitui um subespaço linear de R^n.

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n.
(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.
Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.
(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.
(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.

Teorema

Seja $Ax = 0$ um sistema homogéneo de m equações a n incógnitas.
O con$^{\text{junto}}$ das soluções deste sistema constitui um subespaço linear de R^n.

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n.
(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.
Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.
(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.
(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.

Teorema

Seja $Ax = 0$ um sistema homogéneo de m equações a n incógnitas.
O con$^{\text{junto}}$ das soluções deste sistema constitui um subespaço linear de R^n.

<u>Demonstração:</u> As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n.

(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.
Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.

(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.

(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.

Teorema

Seja $Ax = 0$ um sistema homogéneo de m equações a n incógnitas.
O con$^{\text{junto}}$ das soluções deste sistema constitui um subespaço linear de R^n.

<u>Demonstração:</u> As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n.

(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.
Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.

(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.

(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao con$^{\text{junto}}$ das soluções do sistema homogéneo.

Exemplo

Consideremos o sistema homogéneo $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

obtemos: $\begin{cases} x_2 = \frac{-1}{2}x_3 = -0.5x_3 \\ x_1 = -0.5x_3 - x_4 \end{cases}$

Escolhendo valores para x_3 e x_4, por exemplo $x_3 = \alpha$ e $x_4 = \beta$ temos:

$$\begin{cases} x_1 = -0.5\alpha - \beta \\ x_2 = -0.5\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

donde, qualquer solução do sistema dado pode escrever-se como combinação linear dos vectores **a** e **b**.

Estes vectores, **a** e **b** são linearmente independentes, são por isso base, sendo a dimensão do subespaço das soluções do sistema homogéneo 2.

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Designa-se por espaço nulo , ou *nulidade* de A, o espaço das soluções do sistema homogéneo $Ax = 0$.

Tem-se então válido o seguinte teorema:

Teorema

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. A soma da característica de A com a dimensão do núcleo ou espaço nulo de A é igual a n isto é:

$$n = dimN(A) + c(A)$$

Teorema

Seja $Ax = b$ um sistema de equações lineares, sendo A uma matriz de ordem $m \times n$. Então são válidas as seguintes afirmações:

- O sistema $Ax = b$ é impossível se e só se b não pertence ao espaço das colunas de A,
- O sistema $Ax = b$ é indeterminado se e só se b pertence ao espaço das colunas de A e estas são linearmente dependentes, isto é, a característica de A é inferior a n;
- O sistema $Ax = b$ tem solução única se e só se b pertence ao espaço das colunas de A e estas são linearmente independentes, isto é, a característica de A é igual a n.

Proposição

Seja A uma matriz de ordem $n \times n$. então as seguintes afirmações são equivalentes:

- A é não singular,
- A é invertível,
- a característica de A é máxima (igual a n),
- as colunas de A geram $\mathbb{R}^n$,
- as colunas de A são independentes,
- as linhas de A geram R^n,
- as linhas de A são independentes.