Ficha 3

① a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h,-1)-f(2,-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{2+h+1}{2+h-1} - \frac{2+1}{2-1}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{h+3}{h+1} - 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{h+3-3(h+1)}{h+1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h+3-3h-3}{h(h+1)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2h}{h(h+1)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2}{h+1} = -2$ //

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2,-1+h)-f(2,-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{2-h+1}{2+h-1} - 3}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{-h+3}{h+1} - \frac{3(h+1)}{h+1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h+3-3h-3}{h(h+1)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-4\cancel{h}}{\cancel{h}(h+1)} = -4$ //

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3}{h^3} = 1$ //

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1$ //

② a) $f(x,y) = 3x - 3y$

$f'_x(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 \longrightarrow f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$

$\searrow f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -5$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$$

$$f''_{y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

b) $f(x,y) = x^3y + 7x^2 - 2y^3 - 1$

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 14x$$

$$f''_{x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy + 14$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 - 6y^2$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2$$

$$f''_{y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -12y^2$$

c) $g(x,y) = \frac{3x + y^2}{7x + y}$

$$g'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3(7x+y) - 7(3x+y^2)}{(7x+y)^2} = \frac{21x + 3y - 21x - 7y^2}{(7x+y)^2} = \frac{3y - 7y^2}{(7x+y)^2}$$

$$g''_{x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(3y - 7y^2)(7x+y)^{-2}\right] = -2(3y-7y^2)(7x+y)^{-3} \times 7$$

$$= -14(3y - 7y^2)(7x+y)^{-3} = \frac{14(7y^2 - 3y)}{(7x+y)^3}$$

$$g''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = 14 \times \frac{(14y-3)(7x+y)^3 - \left[3(7x+y)^2 \times 1\right] \times (7y^2 - 3y)}{(7x+y)^6}$$

$$= 14\,\frac{(14y-3)(7x+y)^3 - 3(7x+y)^2(7y^2-3y)}{(7x+y)^6} = 14\,\frac{(14y-3)(7x+y) - 3(7y^2-3y)}{(7x+y)^4}$$

$$= 14\,\frac{98xy + 14y^2 - 21x - 3y - 21y^2 + 9y}{(7x+y)^4} = 14\,\frac{-7y^2 + 98xy - 21x + 6y}{(7x+y)^4}$$

$$g'_y(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{2y(7x+y) - 1 \times (3x+y^2)}{(7x+y)^2} = \frac{14xy+2y^2-3x-y^2}{(7x+y)^2} =$$

$$= \frac{y^2+14xy-3x}{(7x+y)^2}$$

$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)$ pelo Teorema de Schwarz satisfeito no domínio de $g(x,y)$.

$$f''_{y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(2y+14x)(7x+y)^2 - [2(7x+y)] \times (y^2+14xy-3x)}{(7x+y)^4} =$$

$$= \frac{(2y+14x)(7x+y) - 2(y^2+14xy-3x)}{(7x+y)^3} =$$

$$= \frac{14xy+2y^2+98x^2+14y-2y^2-28xy+6x}{(7x+y)^3} = \frac{98x^2-14xy+6x+14y}{(7x+y)^3}$$

d) $g(s,t) = \exp(2s-t) = e^{2s-t}$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = 2e^{2s-t} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(s,t) = 4e^{2s-t} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}(s,t) = -2e^{2s-t} \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = -e^{2s-t} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(s,t) = -2e^{2s-t} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(s,t) = e^{2s-t} \end{cases}$$

e) $h(u,v) = \mathrm{sen}(u^2+4v)$

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = 2u\cos(u^2+4v) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,v) = 2\cos(u^2+4v) - 4u^2\,\mathrm{sen}(\\ \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(u,v) = -8u\,\mathrm{sen}(u^2+4v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 4\cos(u^2+4v) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 h}{\partial v \partial u}(u,v) = -8u\, \text{sen}(u^2+4v) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 h}{\partial v^2}(u,v) = -16\, \text{sen}(u^2+4v) \end{cases}$$

f) $m(x,y) = \cos(1+e^{xy})$

$$\frac{\partial m}{\partial x}(x,y) = -y e^{xy}\, \text{sen}(1+e^{xy})$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}(x,y) = -y \left\{ \left[y e^{xy}\right] \times \text{sen}(1+e^{xy}) + \left[y \cos(1+e^{xy})\right] \times e^{xy} \right\} =$$

$$= -y e^{xy}\left[y\, \text{sen}(1+e^{xy}) + y\cos(1+e^{xy})\right] =$$

$$= -y^2 e^{xy}\left[\text{sen}(1+e^{xy}) + \cos(1+e^{xy})\right]$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(-y e^{xy}) \times \text{sen}(1+e^{xy}) + x e^{xy}\cos(1+e^{xy}) \times (-y e^{xy})$$

$$= \left[-1 e^{xy} + x e^{xy} \times (-y)\right] \text{sen}(1+e^{xy}) - xy e^{2xy}\cos(1+e^{xy}) =$$

$$= -e^{xy}(1+xy)\, \text{sen}(1+e^{xy}) - xy e^{2xy} \cos(1+e^{xy})$$

$$\frac{\partial m}{\partial y}(x,y) = -x e^{xy}\, \text{sen}(1+e^{xy})$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y}$$ pelo Teorema de Schwarz satisfeito no domínio de $m(x,y)$.

$$\frac{\partial^2 m}{\partial y^2}(x,y) = -x\left[x e^{xy} \times \text{sen}(1+e^{xy}) + \left(x e^{xy}\cos(1+e^{xy})\right) \times e^{xy}\right]$$

$$= -x^2 e^{xy}\left[\text{sen}(1+e^{xy}) + e^{xy}\cos(1+e^{xy})\right]$$

g) $g(v,w) = v \ln w$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(v,w) = \ln w \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(v,w) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial w}(v,w) = \dfrac{1}{w} \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial w}(v,w) = \frac{v}{w} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial w \partial v}(v,w) = \dfrac{1}{w} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 g}{\partial w^2}(v,w) = \dfrac{-v}{w^2} \end{cases}$$

h) $h(x,y) = e^{x} \ln(y^2+3x)$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = e^{x} \times \ln(y^2+3x) + \frac{3}{y^2+3x} \times e^{x} = e^{x}\left(\ln(y^2+3x) + \frac{3}{y^2+3x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = e^{x} \times \left(\ln(y^2+3x) + \frac{3}{y^2+3x}\right) + \left[\frac{3}{y^2+3x} - 3(y^2+3x)^{-2} \times 3\right] \times e^{x} =$$

$$= e^{x}\left[\ln(y^2+3x) + \frac{3}{y^2+3x} + \frac{3}{y^2+3x} - \frac{9}{(y^2+3x)^2}\right] =$$

$$= e^{x}\left[\ln(y^2+3x) + \frac{6}{y^2+3x} - \frac{9}{(y^2+3x)^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{x} \times \left[\frac{2y}{y^2+3x} - 3(y^2+3x)^{-2} \times 2y\right] = 2y e^{x}\left(\frac{1}{y^2+3x} - \frac{3}{(y^2+3x)^2}\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = e^{x} \times \left[\frac{2y}{y^2+3x}\right] = \frac{2y e^{x}}{y^2+3x}$$

$\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial h}$ pelo T. Schwarz satisfeito no domínio de $h(x,$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = e^{x} \times \frac{2(y^2+3x) - 2y \times 2y}{(y^2+3x)^2} = \frac{-2y^2+6x}{(y^2+3x)^2} \times e^{x}$$

i) $u(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = -y\left[-1\left(x^2+y^2\right)^{-2}\times 2x\right] = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1\times(x^2+y^2)-2y\times y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)$ pelo T. S. satisfeito no domínio de $u(x,y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = x\times\left[-1\left(x^2+y^2\right)^{-2}\times 2y\right] = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

f) $f(x,y,z) = \int_0^{y \operatorname{sen} z} x\times 4^{2t}\,dt = x\times\int_0^{y\operatorname{sen} z} 4^{2t}\,dt$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1\times\int_0^{y\operatorname{sen} z} 4^{2t}\,dt = \int_0^{y\operatorname{sen} z} 4^{2t}\,dt$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \operatorname{sen} z\times 4^{2y\operatorname{sen} z} - 0 = \operatorname{sen} z\times 4^{2y\operatorname{sen} z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = y\cos z\times 4^{2y\operatorname{sen} z} - 0 = y\cos z\times 4^{2y\operatorname{sen} z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x,y,z) = x \times \left[\operatorname{sen} z \times 4^{2y \operatorname{sen} z} - 0 \right] = x \operatorname{sen} z \times 4^{2y \operatorname{sen} z}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}(x,y,z) = 1 \times \operatorname{sen} z \times 4^{2y \operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} z \times 4^{2y \operatorname{sen} z}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(x,y,z) = x \operatorname{sen} z \times \left[2 \operatorname{sen} z \times 4^{2y \operatorname{sen} z} \times \ln 4 \right] =$$

$$= 2x \ln 4 \operatorname{sen}^2 z \times 4^{2y \operatorname{sen} z}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z}(x,y,z) = x \times \left[\cos z \times 4^{2y \operatorname{sen} z} + \left(2y \cos z \times 4^{2y \operatorname{sen} z} \times \ln 4 \right) \times \operatorname{sen} z \right]$$

$$= x \times 4^{2y \operatorname{sen} z} \times \left(\cos z + \left(2y \cos z \times \ln 4 \right) \operatorname{sen} z \right) =$$

$$= x \times 4^{2y \operatorname{sen} z} \cos z \left(1 + 2y \ln 4 \operatorname{sen} z \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}(x,y,z) = x\left(y \cos z \times 4^{2y \operatorname{sen} z} - 0 \right) = xy \cos z \times 4^{2y \operatorname{sen} z}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x}(x,y,z) = y \cos z \times 4^{2y \operatorname{sen} z}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial y}(x,y,z) = x \cos z \times \left[1 \times 4^{2y \operatorname{sen} z} + \left(2 \operatorname{sen} z \times 4^{2y \operatorname{sen} z} \times \ln 4 \right) \times y \right] =$$

$$= x \cos z \times 4^{2y \operatorname{sen} z} \left[1 + 2y \ln 4 \operatorname{sen} z \right]$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(x,y,z) = xy \times \left[- \operatorname{sen} z \times 4^{2y \operatorname{sen} z} + \left(2y \cos z \times 4^{2y \operatorname{sen} z} \times \ln 4 \right) \times \cos z \right]$$

$$= xy \times 4^{2y \operatorname{sen} z} \left[- \operatorname{sen} z + 2y \ln 4 \cos^2 z \right]$$

3. $z = (x^2+y^2)^{1/3}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-\frac{2}{3}} \times (2y) = \frac{2}{3}y(x^2+y^2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{2}{3}y \times \left[-\frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-5/3} \times (2x)\right] = -\frac{8}{9}xy(x^2+y^2)^{-5/3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x,y)$$ pelo T.S. satisfeito no domínio de z

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{3} \times \left[1 \times (x^2+y^2)^{-2/3} + \left(-\frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-5/3} \times 2y\right) \times y\right] =$$

$$= \frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} - \frac{8}{9}y^2(x^2+y^2)^{-5/3}$$

Vamos verificar a igualdade

$$3x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) + 3y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x\left[-\frac{8}{9}xy(x^2+y^2)^{-5/3}\right] + 3y\left[\frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} - \frac{8}{9}y^2(x^2+y^2)^{-5/3}\right] + \frac{2}{3}y(x^2+y^2)^{-2/3} =$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{8}{3}x^2y(x^2+y^2)^{-5/3}} + \underbrace{2y(x^2+y^2)^{-2/3}} - \underbrace{\frac{8}{3}y^3(x^2+y^2)^{-5/3}} + \underbrace{\frac{2}{3}y(x^2+y^2)^{-2/3}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^{-5/3} \times \left[-\frac{8}{3}x^2y - \frac{8}{3}y^3\right] + (x^2+y^2)^{-2/3} \times \left[2y + \frac{2}{3}y\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{3}y(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{-5/3} + \frac{8}{3}y(x^2+y^2)^{-2/3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{3}y(x^2+y^2)^{-2/3} + \frac{8}{3}y(x^2+y^2)^{-2/3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

c.q.p.

(4) a) $z = e^{Kx}\cos(Ky)$, $K \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = K e^{Kx}\cos(Ky)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) = K^2 e^{Kx}\cos(Ky)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = -K^2 e^{Kx}\operatorname{sen}(Ky)$

$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -K e^{Kx}\operatorname{sen}(Ky)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x,y) = -K^2 e^{Kx}\operatorname{sen}(Ky)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = -K^2 e^{Kx}\cos(Ky)$

Todas estas funções são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Logo, $z = e^{Kx}\cos(Ky)$ é uma função harmónica.

b) $z = 3x^2y - y^3$

$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 6xy$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) = 6y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x$

$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 3x^2 - 3y^2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = -6y$

Todas estas funções são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Logo, $z = 3x^2y - y^3$ é uma função harmónica.

(5) $f(x,y) = x^2 + \lambda y^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\lambda y \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\lambda \end{cases}$$

Todas estas funções são contínuas e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$. Logo, $f(x,y) = x^2 + \lambda y^2$ é harmónica com $\lambda = -1$.

(6) Como $u(x,y)$ e $v(x,y)$ têm derivadas parciais de 2ª ordem contínuas (Classe C^2), basta mostrar que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ e que $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Tem-se que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \text{ pelo T.S. } \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

A equação satisfaz a eq. de Laplace. Logo, a função $u(x,y)$ é harmónica.

Tem-se que:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \text{ pelo T.S. } -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

A equação satisfaz a eq. de Laplace. Logo, a função $v(x,y)$ é harmónica.

(7) Seja $u(x,t) = t^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2 t^{-1}}{4}}$

Tem-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{2} t^{-3/2} \times \left(e^{-\frac{x^2 t^{-1}}{4}}\right) + \left(-1 t^{-2} \times \left(-\frac{x^2}{4}\right) e^{-\frac{x^2 t^{-1}}{4}}\right) \times t^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} t^{-3/2} e^{-\frac{x^2 t^{-1}}{4}} + \frac{x^2}{4} t^{-5/2} e^{-\frac{x^2 t^{-1}}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{2} t^{-3/2} e^{-\frac{x^2 t^{-1}}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{4} t^{-1}\right) = -\frac{1}{2} t^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(1 - \frac{x^2}{4t}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\frac{x}{2} t^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{1}{2} t^{-3/2} \times e^{-\frac{x^2}{4t}} + \left(-\frac{2x}{4t} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) \times \left(-\frac{x}{2} t^{-3/2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} t^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{x^2}{4t} \times t^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} =$$

$$= -\frac{1}{2} t^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(1 - \frac{x^2}{4t}\right)$$

Como a função $u(x,t)$ satisfaz a eq. dif. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ então $u(x,t)$ satisfaz a eq. do Calor.

(8) $V(T,P) = 0.08 \frac{T}{P}$

T - Temperatura

P - Pressão

V - Volume ocupado por uma certa quantidade de gás

$\frac{\partial V}{\partial T}(T,P)$ - é a taxa de variação instantânea do volume V, relativamente à temperatura T.

$\frac{\partial V}{\partial P}(T,P)$ - é a taxa de variação instantânea do volume V, relativamente à pressão P.

Tem-se

$$\frac{\partial V}{\partial T}(T,P) = \frac{0{,}08}{P} \longrightarrow \frac{\partial V}{\partial T}(150,20) = \frac{\frac{8}{100}}{20} = \frac{8}{2000} = \frac{4}{1000} = 0{,}004$$

$$\frac{\partial V}{\partial P}(T,P) = -0{,}08 \times \frac{T}{P^2} \rightarrow \frac{\partial V}{\partial P}(150,20) = -\frac{8}{100} \times \frac{150}{400} = -\frac{8}{100} \times \frac{3}{8} = -0.03$$

Como $\frac{\partial V}{\partial T}(150,20) = \lim_{h \to 0} \frac{V(150+h,20) - V(150,20)}{h} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0{,}004 = \lim_{h \to 0} \frac{V(150+h,20) - V(150,20)}{h}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &V(150,20) = \\ &= 0{,}08 \times \frac{150}{20} = \\ &= \frac{8}{100} \times \frac{15}{2} = 0{,}6 \end{aligned} \right.$$

significa que, nas condições $T = 150$ e $P = 20$, se tem, para valores de h suficientemente pequenos:

$$0{,}004 \times h \approx V(150+h,20) - V(150,20) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}004h \approx V(150+h,20) - 0{,}6$$

Se existir uma alteração h no valor da temperatura (T), então o volume sofrerá uma alteração de aproximadamente 0,004h.

Como $\frac{\partial V}{\partial P}(150,20) = \lim_{h \to 0} \frac{V(150,20+h) - V(150,20)}{h} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -0.03 = \lim_{h \to 0} \frac{V(150,20+h) - V(150,20)}{h}$$

significa que, nas condições $T = 150$ e $P = 20$, se tem, para valores de h suficientemente pequenos:

$$-0{,}03 \times h \approx V(150,20+h) - V(150,20) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}03h \approx V(150,20+h) - 0{,}6$$

Se existir uma alteração h no valor da pressão (P), então o volume sofrerá uma alteração de aproximadamente -0,03h.

(9) $f(x,y)$ - nº de televisões vendidas

x - preço de cada televisão

y - gasto semanal em publicidade

$f(400, 2000)$ - nº de televisões vendidas quando o preço unitário de cada televisão é de 400 € e o valor gasto em publicidade semanal é de 2000 €.

a) Como será $\frac{\partial f}{\partial x}(400, 2000)$?

Tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(400,2000) = \lim_{h\to 0} \frac{f(400+h, 2000) - f(400, 2000)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(400,2000) \times h \simeq f(400+h, 2000) - f(400,2000)$$

Se existir uma alteração h no preço de cada televisão, mantendo o gasto em publicidade, como ficará a diferença $f(400+h, 2000) - f(400, 2000)$? Isto é, como será a alteração do nº de televisões vendidas?

- se existir um aumento do preço das televisões ($h>0$) então o nº de televisões diminuirá, isto é, $f(400+h, 2000) - f(400,2000) < 0$

Como $f(400+h, 2000) - f(400, 2000) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(400,2000) \times h$ tem-se que, neste caso, com $h>0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(400, 2000) < 0$$

b) Com um raciocínio análogo, se aumentarmos o gasto em publicidade, então o nº de televisões vendidas aumentará

$$\frac{\partial f}{\partial y}(400, 2000) > 0.$$

10. $A = 92000 \to$ valor da hipoteca

$R\% = 9\% \to$ taxa de juro

$f(92000, 9) = 740{,}25 \to$ valor mensal da prestação quando o valor da hipoteca é 92000 e a taxa de juro é 9%.

$\frac{\partial f}{\partial R}(92000, 9) = 66{,}2 \to$ taxa de variação instantânea do valor da prestação mensal, relativamente à taxa de juro, isto é,

$$f(92000, 9+h) - f(92000, 9) \simeq 66{,}2 \cdot h$$

Se, nas condições $A = 92000$, $R\% = 9\%$ houver uma alteração h na taxa de juro, então o valor da prestação mensal ~~terá~~ uma alteração de 66,2h.

11. t - temperatura (em graus Celsius)

w - velocidade do vento (em m/seg.)

$H(t,w)$ - taxa de perda de calor (kcal/m²/h)

a) $H(0,4) = (10{,}45 + 10\sqrt{4} - 4)(33 - 0) = 26{,}45 \times 33 = 872{,}85$ kcal/m

b) $\frac{\partial H}{\partial w}(t,w) = \left(\frac{5}{\sqrt{w}} - 1\right)(33 - t) \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial w}(0,4) = 49{,}5$.

Nas condições $t = 0°C$ e $w = 4$ m/s, a taxa de variação instantânea da taxa perda de calor H, relativamente à velocidade do vento é $\frac{\partial H}{\partial w}(0,4) = 49{,}5$.

Se houver uma alteração h na velocidade do vento, a taxa perda de calor terá uma alteração de, aproximadamente, 49,5h.

$$H(0, 4+h) - H(0,4) \simeq 49{,}5h.$$

11.b) $\frac{\partial H}{\partial t}(t,w) = w - 10\sqrt{w} - 10.45 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t}(0,4) = -26,45.$

Nas mesmas condições $t=0°C$ e $w = 4\,m/s$, a taxa de variação instantânea da taxa de perda de calor relativamente à temperatura é $\frac{\partial H}{\partial t}(0,4) = -26,45.$

Se houver uma alteração h na temperatura, a taxa de perda de calor terá uma alteração de, aproximadamente, $-26,45h$.

12. E – estatuto das habilitações literárias
G – estatuto da remuneração
S(E,G) – estatuto social.

$\frac{\partial S}{\partial E}(E,G) = \frac{7\sqrt{G}}{3\sqrt[3]{E^2}} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial E}(125,100) = \frac{14}{15}$ → taxa de variação instantânea de S relativamente a E.

Quando $E=125$ e $G=100$, se houver uma alteração h no estatuto das habilitações literárias, então o estatuto social sofrerá uma alteração $\frac{14}{15}\cdot h$.

$\frac{\partial S}{\partial G}(E,G) = \frac{7}{2}\frac{\sqrt[3]{E}}{\sqrt{G}} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial G}(125,100) = \frac{7}{4}$ → taxa de variação instantânea de S relativamente a G.

Quando $E=125$ e $G=100$, se houver uma alteração h no estatuto da remuneração então o estatuto social sofrerá uma alteração de $\frac{7}{4}\cdot h$.

13. $w \to$ nº médio de palavras em cada frase
s – nº " de sílabas

$R = f(w, s) \to$ legibilidade do texto com w médio palavras em cada frase e s médio de sílabas.

a) $\frac{\partial R}{\partial w} = -1.015$ $\qquad$ $\frac{\partial R}{\partial s} = -0.846.$

Qual é mais fácil de ler? A legibilidade de um texto com $w = w_0$ e $s = s_0$ é $f(w_0, s_0)$
a legibilidade de um texto com $w = w_0 + 1$ e $s = s_0$ é $f(w_0 + 1, s_0)$.

Será que $R(w_0+1, s_0) - R(w_0, s_0)$ é positivo ou negativo?

$$R(w_0+1, s_0) - R(w_0, s_0) \simeq \frac{\partial R}{\partial w}(w_0, s_0) \cdot 1$$
$$\simeq -1{,}015 .$$

Então $R(w_0+1, s_0) - R(w_0, s_0) < 0 \Leftrightarrow R(w_0+1, s_0) < R(w_0, s_0)$

Logo um texto nas condições (w_0+1, s_0) é menos legível que um texto nas condições (w_0, s_0).

14. a) p_1 – preço do bilhete de autocarro
p_2 – " " de comboio
$f(p_1, p_2)$ – nº de pessoas que escolhem o autocarro.

Sabemos que, se o preço do autocarro (p_1) aumentar, então o nº de pessoas ~~f~~ que escolhem o autocarro diminui.
Isto é, para $h>0$,

$$f(p_1+h, p_2) - f(p_1, p_2) < 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} \cdot h < 0, \text{ com } h>0$$

Logo $\frac{\partial f}{\partial p_1} < 0$.

Raciocínio semelhante para justificar $\frac{\partial f}{\partial p_2} > 0$.

b) $g(p_1, p_2) \rightarrow$ nº de pessoas que escolhem o comboio.

se o preço do autocarro aumentar $p_1 \longrightarrow p_1+h$ com $h>0$, então haverá um aumento do nº pessoas no comboio:

$$g(p_1+h, p_2) > g(p_1, p_2)$$

$$g(p_1+h, p_2) - g(p_1, p_2) > 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial p_1} \cdot h > 0 \quad \text{com } h>0$$

Logo $\frac{\partial g}{\partial p_1} > 0$.

E do mesmo modo, se mostra que $\frac{\partial g}{\partial p_2} < 0$.

15.

p_1 – preço de cada carro

p_2 – " do combustível por litro.

$f(p_1, p_2) \to$ nº de pessoas que compram o carro.

$\frac{\partial f}{\partial p_1} < 0 \to$ pois crescimento da variável p_1 $\left(p_1 \xrightarrow[\text{com } h>0]{} p_1+h\right)$ provocará diminuição da função f.

$$f(p_1+h, p_2) - f(p_1, p_2) \approx \frac{\partial f}{\partial p_1} \cdot h$$

$\frac{\partial f}{\partial p_2} < 0 \to$ porque aumento da variável p_2 $\left(p_2 \xrightarrow[\text{com } h>0]{} p_2+h\right)$ provocará uma diminuição da função f.

16.

m – salário real de uma pessoa

p – preço médio dos alimentos

R – " de outros bens e serviços.

$f(m, p, R)$ – consumo anual de alimentos.

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0{,}6 \times 2{,}186 \times m^{-0{,}4} p^{-0{,}5} R^{0{,}9}$$

$\frac{\partial f}{\partial m} > 0$, pois se o salário aumentar $(m \longrightarrow m+h, \text{ com } h>0)$ então o consumo anual de comida também aumenta

$$f(m+h, p, R) > f(m, p, R)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -0{,}5 \times 2{,}186 \times m^{0{,}6} p^{-1{,}5} R^{0{,}9}$$

$\frac{\partial f}{\partial p} < 0 \to$ se o preço da comida aumentar, o consumo de comida diminuirá

$$f(m, p+h, R) < f(m, p, R) \quad \text{para } h>0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 0{,}9 \times 2{,}186\, m^{0,6}\, p^{-0,5}\, R^{-0,1}$$

$\frac{\partial f}{\partial R} > 0$ → se os preços de outros bens e serviços aumentarem, o consumo de comida aumenta.

17. $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 5y$

a) $f(1+h,4) = 3(1+h)^2 + 2(1+h) \times 4 + 5 \times 4$

$= 3h^2 + 14h + 31$

$f(1,4) = 3 + 8 + 20 = 31$

$f(1+h,4) - f(1,4) = 3h^2 + 14h$

b) Para $h = 0{,}01$

se usar a aproximação dada de $14h$

$f(1{,}01,4) - f(1,4) \approx 0{,}14$

isto é $f(1.01,4) \approx f(1.4) + 0{,}14$

E o erro é $3 \times h^2 \Rightarrow 3 \times (0{,}01)^2 = 0{,}0003$

$h = 0{,}01$.