Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) **[4,7]** Sejam as transformações lineares $S \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ e $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dadas por

$$S(x,y,z) = (x-z, -x+y+z) \text{ e } T(x,y,z) = (x+z, 2y-z, 2x+z)$$

em relação às bases canónicas E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *S*. Para cada um destes subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que apenas uma das funções é bijetiva; obtenha, se possível, as respetivas transformações inversas.

2) **[2,0]** Seja A uma matriz do tipo $n \times n$ e não singular. Mostre que A e A^T possuem os mesmos valores próprios e que $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

GRUPO II

3) **[4,7]** Considere as transformações lineares $S \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ e $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ da pergunta 1) e as bases $D = \{(1,-1),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ e $V = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Usando o cálculo matricial, calcule as matrizes $S_{E_3,D} = m(S)_{E_3,D}$, representação matricial de *S* em relação às bases E_3 e D, e $T_{V,E_3} = m(T)_{V,E_3}$, representação matricial de *T* em relação às bases V e E_3.

b) Obtenha a matriz da função que é a soma de *S* com a composição possível de *S* com *T* em relação às bases V e D.

....(continua no verso)

GRUPO III

4) **[2,8]** Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o determinante e a característica da matriz real

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 2 \\ 1 & h & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

GRUPO IV

5) **[5,8]** Seja a transformação linear $H\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{H}=m(H)=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Determine o valor do parâmetro real α, tal que $\vec{x}=(0,\alpha,\alpha)$ é um dos vetores próprios da matriz $\boldsymbol{H}$ e calcule os valores próprios.

b) Determine os espaços próprios e indique, para cada um desses subespaços, uma base e a dimensão.

c) Verifique, justificando devidamente, se a matriz $\boldsymbol{H}$ é diagonalizável. Em caso afirmativo, obtenha a sua matriz diagonalizadora e a matriz diagonal que é semelhante à matriz $\boldsymbol{H}$.

1 a) A matriz de S em relação à base canónica é

$$m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o método de condensação de matriz obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r[m(S)] = 2$$

Assim

$$\dim S(\mathbb{R}^3) = r[m(S)] = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2 : \text{ S é sobrejectiva}$$

$$\text{Base } S(\mathbb{R}^3) = \text{Base } \mathbb{R}^2 = \{(1,0),(0,1)\}$$

Relativamente ao núcleo obtém-se

$$\dim N(S) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim S(\mathbb{R}^3) = 1 \Rightarrow N(S) \subset \mathbb{R}^3$$

Considerando

$$S(x,y,z) = (0,0)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$N(S) = \{ \vec{x} = (z,0,z) \in \mathbb{R}^3 \} \quad \text{e} \quad \text{Base } N(S) = \{(1,0,1)\}$$

Pode-se já concluir que S não é injectiva, $N(S) \neq \{(0,0,0)\}$

b) Como se viu na alínea anterior, S não é bijectiva, já que não é injectiva.

A matriz de T em relação à base canónica é

$$m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |m(T)| = 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Uma vez $|m(T)| \neq 0$ então

$$r[m(T)] = 3 = \dim T(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3$$

$$T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3 : \text{ T é sobrejectiva}$$

Relativamente ao núcleo obtém-se

$$\dim N(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim T(\mathbb{R}^3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(T) = \{(0,0,0)\} \text{ e T é injectiva}$$

Conclui-se que T é bijectiva, já que é injectiva e sobrejectiva.

Calculando a matriz inversa de $m(T)$

$$\mathrm{Cof}\,[m(T)] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$m^{-1}(T) = m(T^{-1}) = \frac{1}{|m(T)|}\left[\mathrm{Cof}\,[m(T)]\right]^T =$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(a,b,c) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2a+2c \\ 2a+b-c \\ 4a-2c \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{aligned} T^{-1} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c) &\longrightarrow \left(-a+c,\ \frac{2a+b-c}{2},\ 2a-c\right) \end{aligned}$$

2) Para mostrar que A e A^T possuem os mesmos valores próprios basta mostrar que

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = q(\lambda) = |\lambda I - A^T|$$

Então

$$q(\lambda) = |\lambda I - A^T| = |\lambda I^T - A^T| = |(\lambda I - A)^T| =$$

$$= |\lambda I - A| = p(\lambda)$$

Nota:
$|B| = |B^T|$

Para mostrar que $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ temos de mostrar que

i) $A^T(A^{-1})^T = I$ e ii) $(A^{-1})^T A^T = I$

i) Sabe-se que

$$A^T(A^T)^{-1} = I \Rightarrow A^T(A^{-1})^T = [A^{-1}A]^T = I^T = I$$

ii) Sabe-se que

$$(A^T)^{-1}A^T = I \Rightarrow (A^{-1})^T A^T = [A A^{-1}]^T = I^T = I$$

NOTA:
$(AB)^T = B^T A^T$

3 a)

$$m(S)_{E_3,D} = M^{-1}_{D\to E_2}\; m(S)_{E_3,E_2}$$

$$m(T)_{V,E_3} = m(T)_{E_3}\; M_{V\to E_3}$$

Designando $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ então

$$M_{D\to E_2} = E_2^{-1} D = I_2 D = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|D| = 1 \Rightarrow M^{-1}_{D\to E_2} = D^{-1} = \frac{1}{|D|}[\text{Cof } D]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Designando $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ então

$$M_{V\to E_3} = E_3^{-1} V = I_3 V = V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$m(S)_{E_3,D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{E_3,D}$$

$$m(T)_{V,E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{V,E_3}$$

b) A composição possível de S com T é

$$ST : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Pretende-se então a matriz de transformação

$$ST + S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

relativamente à base V (domínio) e D (conjunto de chegada), isto é

$$m(ST+S)_{V,D} = m(ST)_{V,D} + m(S)_{V,D}$$

Wiz

ou seja

$$m(ST+S)_{V,D} = m(S)_{E_3,D}\ m(T)_{V,E_3} + m(S)_{V,D}$$

$$m(S)_{E_3,D}\ m(T)_{V,E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{V,D}$$

Por outro lado

$$m(S)_{V,D} = m(S)_{E_3,D}\ M_{V\to E_3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{V,D}$$

Então

$$m(ST+S)_{V,D} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{V,D} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{V,D} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}_{V,D}$$

4) Comecemos por calcular o determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 2 \\ 1 & h & -4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1+2L_2 \\ \\ \\ \leftarrow L_4+L_2 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -6 & 6 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 2 \\ 0 & h & -6 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -6 & 6 \\ 1 & k & 2 \\ h & -6 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_3-L_1 \end{matrix} =$$

$$= (+1) \begin{vmatrix} 1 & -6 & 6 \\ 1 & k & 2 \\ h-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (h-1)(-1)^4 \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ k & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (h-1)(-12-6k) = -6(h-1)(k+2)$$

(signature)

Calculemos agora a característica

$$r[A] \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 2 \\ 1 & h & -4 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \quad & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \quad & C_4 & C_2 & C_3 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & k \\ 1 & 5 & h & -4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_1 \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & k \\ 1 & 5 & h & -4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \\ \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & k \\ 0 & 6 & h & -6 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 3L_2 - L_2 \\ \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 3k+6 \\ 0 & 0 & h-1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \quad & \quad & \uparrow & \uparrow \\ \quad & \quad & C_4 & C_3 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 3k+6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & h-1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$-2 \leq r(A) \leq 4$$

$$r(A) = 4 \Leftrightarrow 3k+6 \neq 0 \wedge h-1 \neq 0$$

$$r(A) = 4 \Leftrightarrow k \neq -2 \wedge h \neq 1$$

A $r(A)$ nunca será 2 já que não é possível anular simultâneamente as duas últimas linhas da matriz (1).

Considerando $h = 1 \Rightarrow r(A) = 3, \forall k \in \mathbb{R}$

Considerando $k = -2 \Rightarrow r(A) = 3, \forall h \in \mathbb{R}$

Concluindo

$$r(A) = 3 \Leftrightarrow h = 1 \vee k = -2$$

Nuno

5 a) $\vec{x} = (0, \alpha, \alpha)$ é vector próprio de H se $\alpha \neq 0$ e

$$[\lambda I - H]\begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}\lambda & 2 & -2\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ -2 & -2 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2\alpha - 2\alpha\\ \alpha(\lambda-4)+2\alpha\\ -2\alpha+\alpha\lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$\alpha \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0 = 0\\ \alpha\lambda - 2\alpha = 0\\ \lambda\alpha - 2\alpha = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 = 0\\ \lambda = 2\\ 0 = 0\end{cases} \quad (\alpha \neq 0)$$

Conclusão $\vec{x} = (0, \alpha, \alpha)$ é vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$ se e só se $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Sabendo que $\lambda_1 = 2 \neq 0$ então

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(H) = 4\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |H| = 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$|H| = \begin{vmatrix}0 & -2 & 2\\ 2 & 4 & -2\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix} \underset{C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix}0 & -2 & 0\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix} = (-2)(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_2 + \lambda_3 = 2\\ \lambda_2\lambda_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_2 = 2\\ \lambda_3 = 0\end{cases}$$

Os valores próprios de H são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad e \quad \lambda_3 = 0$$

b) Sabe-se que $\lambda_3 = 0 \Rightarrow ma(0) = 1 \Rightarrow \dim E(0) = 1$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \Rightarrow ma(2) = 2 \Rightarrow \dim E(2) \leq 2$

Seja $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$$[2I - H]X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & -2 & 0\\ -2 & -2 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 2 & 0\end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow z = x + y, \quad x, y \in \mathbb{R}$

$E(2) = \{ \vec{x} = (x, y, x+y) \in \mathbb{R}^3 \}$

$\vec{x} = (x, y, x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1) \ , \quad x,y \in \mathbb{R}$

Base $E(2) = \{ (1,0,1), (0,1,1) \} \Rightarrow \dim E(2) = 2$

Seja $\lambda_3 = 0$

$$[0I - H]X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}, \ z \in \mathbb{R}$$

$E(0) = \{ \vec{x} = (-z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \}$

Base $E(0) = \{ (-1,1,1) \} \Rightarrow \dim E(0) = 1$

c) A matriz $m(H)$ é diagonalizável se possuir três valores próprios e admitir uma base de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$.

Neste caso, verificou-se na alínea a) que a matriz possui três valores próprios (não distintos) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 0$.

Por outro lado, a partir dos resultados obtidos na alínea b) podemos concluir que o conjunto

$U = $ Base $E(2) \cup$ Base $E(0) = \{ (1,0,1), (0,1,1), (-1,1,1) \}$ é linearmente independente, pelo que constitui uma base de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$. Estão, então, reunidas as condições para que a matriz $m(H)$ seja diagonalizável. Notando que

$$H(1,0,1) = 2(1,0,1) = (2,0,0)_U$$
$$H(0,1,1) = 2(0,1,1) = (0,2,0)_U$$
$$H(-1,1,1) = 0(-1,1,1) = (0,0,0)_U$$

a matriz que representa a transformação linear em relação à base U é a matriz diagonal

$$m(H)_U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_U$$

A matriz $m(H)_U$ é uma matriz semelhante a $m(H)$ já que existe uma matriz não singular P tal que

$$m(H)_U = P^{-1}\, m(H)\, P$$

em que P é, neste caso, designada por matriz diagonalizadora da matriz $m(H)$. A matriz P é a matriz de mudança de base de U para E

$$P = M_{U\to E}$$

sendo dada por

$$M_{U\to E} = E^{-1}\, U$$

em que

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \qquad e \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$M_{U\to E} = I\,U = U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[illegible]