Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Avaliação

*** Não são consideradas as folhas sem identificação. Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não é possível a utilização de máquinas de calcular gráficas nem de microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**8,9**] Considere as transformações lineares $S, T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, tais que $S(x,y,z) = (x+y-z, x-y, x-5y+2z)$, e T é representada pela matriz

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço linear $\mathbb{R}^3$. Seja a base $\mathrm{B} = \{(1,1,0),(0,-1,1),(1,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Obtenha o núcleo e o contradomínio de S. Identifique, para cada um desses subespaços, uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que apenas a transformação T é bijetiva e determine a sua transformação inversa. Justifique.

c) Usando o cálculo matricial, obtenha as matrizes $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E,B}} = m(S)_{\mathrm{E,B}}$, representação matricial de S em relação às bases E e B, e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{B,E}} = m(T)_{\mathrm{B,E}}$, representação matricial de T em relação às bases B e E.

d) A partir das matrizes obtidas na alínea anterior, calcule a matriz $m(S^2T)_{\mathrm{B,B}}$, que representa a transformação S^2T relativamente à base B.

2. [**1,4**] Seja a transformação linear $Q : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, em que $\dim \mathrm{V} = n$. Mostre que Q é injetiva se e só se o núcleo de Q possuir apenas o elemento zero de V; além disso, verifica-se $\dim Q(\mathrm{V}) = n$.

....*(continua no verso)*

GRUPO II

3. [**2,7**] Calcule o determinante e a característica da matriz

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & k \\ k & -2 & k & k^2 \\ 0 & 1 & 3k & 0 \\ 3 & 2 & -3k & -3 \end{bmatrix}$$

GRUPO III

4. [**1,1**] Mostre que a matriz $\boldsymbol{R}\in \mathrm{M}_{(n)}(\Omega)$ possui os mesmos valores próprios da sua matriz transposta.

5. [**5,9**] Seja a transformação linear $H\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{H}=m(H)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço linear $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os valores próprios de $\boldsymbol{H}$, notando que $\vec{x}=(1,-1,0)$ é um dos seus vetores próprios.

b) Obtenha os espaços próprios associados aos valores próprios de $\boldsymbol{H}$, indicando, para cada um desses subespaços, uma base e a dimensão.

c) Mostre, justificando devidamente, se a transformação linear admite uma base, U, de vetores próprios para $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, indique a matriz $\boldsymbol{H}_{\mathrm{U,U}}$ que representa H em relação à base U e apresente as expressões matriciais que permitem relacionar as matrizes $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{H}_{\mathrm{U,U}}$.