FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI Data /01/21

Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano 1º Semestre 1º

Nome José Augusto Trigo Barbosa

Espaço reservado para o avaliador

Aula Teórica - Prática - Valores e Vectores próprios

31)

a)

$$m(T) = \begin{bmatrix} 7 & -2 & b \\ -2 & c & -2 \\ -1 & a & 7 \end{bmatrix} , \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$tr[m(T)] = 18 \Leftrightarrow 14 + c = 18 \Leftrightarrow c = 4$$

$$[\lambda I - m(T)] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 7 & 2 & -b \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 1 & -a & \lambda - 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 7 + 4 - b \\ 2 + 2\lambda - 8 + 2 \\ 1 - 2a + \lambda - 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ \lambda = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 2$ é um dos valores próprios de $m(T) = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

Como $\lambda_1 = 2 \neq 0$, então

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr[m(T)] \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |m(T)| \end{cases}$$

$$|m(T)| = \begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} \leftarrow L_2/2 = 2 \begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\,(2)\,(-1)^4 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 4\,(36-4) =$$

$$= 128$$

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 18 - 2 \\ \lambda_2 \lambda_3 = 128/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 16 \\ \lambda_2 \lambda_3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 8 \\ \lambda_3 = 8 \end{cases}$$

Os valores próprios de $m(T)$ são

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow ma(2) = 1 \Rightarrow \dim E(2) = 1$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 8 \Rightarrow ma(8) = 2 \Rightarrow \dim E(8) \leq 2$$

b)

Seja $\lambda_1 = 2$

$$[2I - m(T)] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$E(2) = \{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \wedge y = 2z \} =$$

$$= \{ \vec{x} = (z, 2z, z) \in \mathbb{R}^3 \} = \{ \vec{x} = z\,(1,2,1) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Base $E(2) = \{ (1,2,1) \}$ e $\dim E(2) = 1$

Seja $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$

$$[8I - m(T)] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \{ x = -2y - z \quad , \; y, z \in \mathbb{R}$$

$$E(8) = \{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y - z \} =$$

$$= \{ \vec{x} = (-2y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \} =$$

$$= \{ \vec{x} = y(-2, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Base $E(8) = \{ (-2,1,0), (-1,0,1) \}$ e $\dim E(8) = 2$

c) A matriz $m(T)$ é diagonalizável se possuir três valores próprios (distintos ou não) e uma base de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$.
Com efeito, verificou-se que

$$\lambda_1 = 2 \quad e \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 8$$

são os três valores próprios (não distintos) de $m(T)$.
Por outro lado, dado que

Base $E(2) = \{\vec{u}_1\} = \{ (1,2,1) \}$
Base $E(8) = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{ (-2,1,0), (-1,0,1) \}$

então o conjunto

$$U = \text{Base } E(2) \cup \text{Base } E(8) =$$
$$= \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \} = \{ (1,2,1), (-2,1,0), (-1,0,1) \} \subset \mathbb{R}^3$$

é um conjunto formado por três vectores próprios linearmente independentes, definindo uma base de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$.
Conclui-se, assim, que $m(T)$ é diagonalizável.

Wiz

Uma vez que

$$T(\vec{u}_1) = T(1,2,1) = 2\,(1,2,1) = (2,0,0)_U$$
$$T(\vec{u}_2) = T(-2,1,0) = 8\,(-2,1,0) = (0,8,0)_U$$
$$T(\vec{u}_3) = T(-1,0,1) = 8\,(-1,0,1) = (0,0,8)_U$$

a representação matricial da transformação linear T em relação à base U é a matriz diagonal

$$m(T)_{U,U} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{U,U} = \text{diag}\,(2,8,8)_{U,U}$$

Trata-se de uma matriz que é semelhante à matriz $m(T)$, já que existe uma matriz não singular P tal que

$$m(T)_{U,U} = P^{-1}\, m(T)\, P$$

onde a matriz P, designada, neste caso, por matriz diagonalizadora da matriz $m(T)$, é a matriz de mudança de base de U para E_3

$$P = M_{U \to E_3}$$

Designando

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$E_3 X_{E_3} = U X_U \Rightarrow X_{E_3} = E_3^{-1} U X_U \Rightarrow M_{U \to E_3} = E_3^{-1} U = I_3 U = U$$

15/16)

d) $D : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$m(D) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$p(\lambda) = |\lambda I - m(D)| = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 0 & -1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ 8 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+2)(-1)^4 \begin{vmatrix} \lambda-6 & -1 \\ 8 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda^2-3\lambda-10) =$$

$$= (\lambda+2)(\lambda+2)(\lambda-5)$$

Os valores próprios de $m(D)$ são

$\lambda_1 = \lambda_2 = -2 \Rightarrow ma(-2) = 2 \Rightarrow \dim E(-2) \leq 2$

$\lambda_3 = 5 \Rightarrow ma(5) = 1 \Rightarrow \dim E(5) = 1$

Seja $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$

$$[-2I - m(D)] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$E(-2) = \{\vec{x} = (0, y, 0) \in \mathbb{R}^3\} = \{\vec{x} = y(0,1,0) \in \mathbb{R}^3\}$

Base $E(-2) = \{(0,1,0)\}$ e $\dim E(-2) = 1$

Wnj

Vectores próprios : $\vec{x}(-2) = \{ \vec{x} = (0, y, 0) \in \mathbb{R}^3,\ y \neq 0 \}$

Seja $\lambda_3 = 5$

$$[5I - m(D)] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -3z/7 \end{cases},\ z \in \mathbb{R}$$

$$E(5) = \{ \vec{x} = (-z, -\tfrac{3z}{7}, z) \in \mathbb{R}^3 \} =$$

$$= \{ \vec{x} = z(-1, -3/7, 1) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Base $E(5) = \{(-7, -3, 7)\}$ e $\dim E(5) = 1$

Vectores próprios : $\vec{x}(5) = \{ \vec{x} = (-z, -3z/7, z) \in \mathbb{R}^3,\ z \neq 0 \}$

A matriz $m(D)$ é diagonalizável se possuir três valores próprios (distintos ou não) e uma base de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$.
Com efeito, verificou-se que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 5$$

são os três valores próprios (não distintos) de $m(T)$.
Por outro lado, dado que

Base $E(-2) = \{\vec{u}_1\} = \{(0,1,0)\}$
Base $E(5) = \{\vec{u}_2\} = \{(-7,-3,7)\}$

então o conjunto

$$U = \text{Base } E(-2) \cup \text{Base } E(5) =$$
$$= \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{(0,1,0), (-7,-3,7)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Papel 100% Reciclado

Wiz

é um conjunto formado por dois vectores próprios linearmente independentes, contudo, não definindo uma base de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$. A transformação linear não admite mais do que dois vectores próprios linearmente independentes.
Conclui-se, assim, que a $m(D)$ não é diagonalizável.

15/16)

e) $E : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$m(E) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{bmatrix} \qquad E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$p(\lambda) = |\lambda I - m(E)| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -3 \\ -1 & \lambda-2 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-20 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & -3 \\ -3 & -6 & \lambda-20 \end{vmatrix} =$$

$$\uparrow C_2 + C_1$$

$$= (\lambda-1)(-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda-3 & -3 \\ -6 & \lambda-20 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2 - 23\lambda + 42) =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-21)$$

Os valores próprios de $m(E)$ são

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow ma(1) = 1 \Rightarrow \dim E(1) = 1$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow ma(2) = 1 \Rightarrow \dim E(2) = 1$$

$$\lambda_3 = 21 \Rightarrow ma(21) = 1 \Rightarrow \dim E(21) = 1$$

Uma vez que a transformação linear possui três valores próprios distintos, verificamos que a matriz $m(E)$ é diagonalizável.

Seja $\lambda_1 = 1$

$$[I - m(E)] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -19 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}, \ y \in \mathbb{R}$$

$$E(1) = \{ \vec{x} = (-y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \} = \{ \vec{x} = y(-1,1,0) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Base $E(1) = \{(-1,1,0)\}$ e $\dim E(1) = 1$

Vectores próprios : $\vec{x}(1) = \{ \vec{x} = (-y, y, 0) \in \mathbb{R}^3, \ y \neq 0 \}$

Seja $\lambda_2 = 2$

$$[2I - m(E)] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -18 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = -3z \end{cases}, \ z \in \mathbb{R}$$

$$E(2) = \{ \vec{x} = (-3z, -3z, z) \in \mathbb{R}^3 \} = \{ \vec{x} = z(-3,-3,1) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Base $E(2) = \{(-3,-3,1)\}$ e $\dim E(2) = 1$

Vectores próprios : $\vec{x}(2) = \{ \vec{x} = (-3z, -3z, z) \in \mathbb{R}^3, \ z \neq 0 \}$

Seja $\lambda_3 = 21$

$$[21 I - m(E)] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 19 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 19 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 19 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 19 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 19 & -3 & 0 \\ 0 & -60 & 10 & 0 \\ 0 & 360 & -60 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 19 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 6y \end{cases}, \ y \in \mathbb{R}$$

$$E(21) = \{ \vec{x} = (y, y, 6y) \in \mathbb{R}^3 \} = \{ \vec{x} = y(1,1,6) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Base $E(21) = \{(1,1,6)\}$ e $\dim E(21) = 1$

Vectores próprios : $\vec{x}(21) = \{ \vec{x} = (y, y, 6y) \in \mathbb{R}^3, \ y \neq 0 \}$

A matriz $m(E)$ é diagonalizável se possuir três valores próprios (distintos ou não) e uma base de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$.
Com efeito, verificou-se que

$$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 2 \ \text{ e } \ \lambda_3 = 21$$

são os três valores próprios (distintos) de $m(E)$.
Por outro lado, dado que

Base $E(1) = \{\vec{u}_1\} = \{(-1,1,0)\}$

Base $E(2) = \{\vec{u}_2\} = \{(-3,-3,1)\}$

Base $E(21) = \{\vec{u}_3\} = \{(1,1,6)\}$

então o conjunto

Wn

$$U = \text{Base } E(1) \cup \text{Base } E(2) \cup \text{Base } E(21) =$$

$$= \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(-1,1,0), (-3,-3,1), (1,1,6)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é um conjunto formado por três vectores próprios linearmente independentes, definindo uma base de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$.

Conclui-se, assim, que $m(E)$ é diagonalizável.

Uma vez que

$$E(\vec{u}_1) = E(-1,1,0) = 1\ (-1,1,0) = (1,0,0)_U$$

$$E(\vec{u}_2) = E(-3,-3,1) = 2\ (-3,-3,1) = (0,2,0)_U$$

$$E(\vec{u}_3) = E(1,1,6) = 21\ (1,1,6) = (0,0,21)_U$$

a representação matricial da transformação linear E em relação à base U é a matriz diagonal

$$m(E)_{U,U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}_{U,U} = \text{diag}(1,2,21)_{U,U}$$

Trata-se de uma matriz que é semelhante à matriz $m(E)$, já que existe uma matriz não singular P tal que

$$m(E)_{U,U} = P^{-1}\, m(E)\, P$$

onde a matriz P, designada, neste caso, por matriz diagonalizadora da matriz $m(E)$, é a matriz de mudança de base de U para E_3

$$P = M_{U \to E_3}$$

Designando

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$E_3 X_{E_3} = U X_U \Rightarrow X_{E_3} = E_3^{-1} U X_U \Rightarrow M_{U \to E_3} = E_3^{-1} U = I_3 U = U$$

1)

d)

$$p(\lambda) = |\lambda I - D| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix} = 0$$

$p(\lambda) = 0$, se $\lambda = 2 \lor \lambda = 0 \lor \lambda = -4$

Assim, os valores próprios são

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -4$$

e)

$$p(\lambda) = |\lambda I - E| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$$

$p(\lambda) = 0$, se $\lambda = 3 \lor \lambda = -1$

Designando $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, então

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(E) = 1 \Leftrightarrow \lambda_3 = 1 - 3 + 1 = -1$$

Assim, os valores próprios são

$$\lambda_1 = 3 \quad e \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Wnig

f)

$$p(\lambda) = |\lambda I - F| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & -7 & \lambda+4 \end{vmatrix} = 0$$

$p(\lambda) = 0$, se $\lambda = -4$

Designando $\lambda_1 = -4 \neq 0$, então

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(F) = 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |F| = 0 \end{cases}$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} \quad L_2 = L_1 \quad = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ \lambda_2 \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Assim, os valores próprios são

$\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 0$

g)

$$p(\lambda) = |\lambda I - G| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -3 \\ -8 & \lambda+7 & -8 \\ -3 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$p(\lambda) = 0$, se $\lambda = -7$

Designando $\lambda_1 = -7 \neq 0$, então

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(G) = -5 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |G| = 56 \end{cases}$$

$$|G| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & -7 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-7)(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 56$$

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 \lambda_3 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

Assim, os valores próprios são

$$\lambda_1 = -7 \quad , \quad \lambda_2 = -2 \quad e \quad \lambda_3 = 4$$

h)

Sabe-se que $tr(H) = 8$ e

$$|H| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$$

$$\uparrow \; \uparrow$$
$$c_1 = c_2$$

Então $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(H) = 8 \Leftrightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 8 \qquad (1)$

Verifica-se, ainda, que

$$r(H) = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad ,$$

pelo que o núcleo da transformação $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão

$$\dim N(H) = \dim \mathbb{R}^3 - r(H) = 3 - 1 = 2$$

Uma vez que

$$N(H) = E(0)$$

então

Wmj

$\dim E(0) = 2 \Rightarrow m_a(0) \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Recorrendo a (1) conclui-se que $\lambda_3 = 8$

Assim, os valores próprios de G são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad e \quad \lambda_3 = 8$$