Prova sem consulta. Duração: 3h (20m de tolerância). Prova de Reavaliação Global

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**3,3**] Sejam as aplicações lineares $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $S \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ e $R \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ dadas por

$$T(x,y,z) = (x-z, x+y-z, x+z), \qquad S(x,y) = (-x+y, x+2y, 2x+y)$$

$$R(x,y,z) = (x-z, -x+y+z)$$

em relação às bases canónicas E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *S*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que duas das funções são injetivas e obtenha as suas funções inversas.

2) [**2,0**] Seja o plano $M = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \; : \; X = P + s\vec{a} + t\vec{b} \; , \; s,t \in \mathbb{R} \right\}$. Mostre que todos os pontos $X \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem a condição $(X-P) \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$ pertencem ao plano *M*.

3. [**3,6**] Considere o plano $M : x + 2y + z = 0$ e a reta, *r*, com a equação vetorial $X(t) = P + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, em que $P = (3,1,1)$ e $\vec{a} = (1,1,0)$. Determine:

a) A distância da origem à reta *r* e a equação cartesiana do plano, M_1, que contém a reta *r* e é perpendicular ao plano *M*.

b) A equação cartesiana de um plano, M_2, perpendicular à reta *r* e que passa num ponto, *Q*, desta reta que dista $2\sqrt{6}$ unidades do plano *M*.

GRUPO II

4) [**1,7**] Sejam as transformações lineares definidas na pergunta 1) e a base $\mathrm{V} = \{(0,1,0), (1,1,0), (1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Calcule a matriz $m(SRT)_{\mathrm{V,V}}$, representação matricial de SRT em relação à base V.

.... ***(continua no verso)***

GRUPO III

5) [**1,8**] Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o determinante da matriz real

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} k & k^2 & 0 & -k^2 \\ 2 & 0 & 2 & -6 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2k+4 & 0 \end{bmatrix}$$

GRUPO IV

6. [**4,5**] Considere o conjunto $\mathrm{S}=\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right\}\subset\mathbb{R}^3$, em que $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(1,1,1)$, $\vec{c}=(1,3,-1)$ e $\vec{d}=(1,1,-1)$, e o subespaço $\mathrm{H}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x+y+2z=0\}$.

- **a)** Determine o subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$. Indique uma base para o subespaço obtido que contenha apenas elementos de S e conclua em relação à sua dimensão.
- **b)** Será o conjunto S linearmente dependente? Justifique.
- **c)** Determine uma base ortogonal, W, para o espaço $\mathbb{R}^3$ que contenha o maior número possível de elementos de H.

7) [**3,1**] Seja a transformação linear $H\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{H}=m(H)=\begin{bmatrix} a & 1 & -b \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a-3 & 1-b \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$ e o conjunto $\mathrm{V}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$, tal que $\vec{v}_1=(1,1,-2)$ e $\vec{v}_2=(1,1,0)$.

- **a)** Verifique, justificando, se H admite uma base de vetores próprios, U, para o espaço $\mathbb{R}^3$ que inclua os elementos de V. Em caso afirmativo, obtenha essa base.
- **b)** Calcule a matriz $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{H}_{\mathrm{U,U}}^{-1}$ e indique uma matriz que lhe seja semelhante. Justifique devidamente a resposta, apresentando a relação de semelhança entre as duas matrizes.