

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ Matriz de ordem **m por n** de elementos a_{ij}

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \textcircled{2} & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \textcircled{7} & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$$

$a_{13} = 2$

$a_{34} = 7$

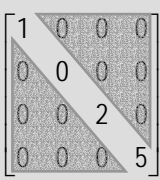
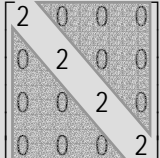
$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ Matriz de ordem **m por n** de elementos a_{ij}

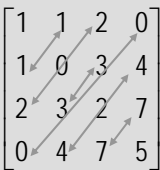
Matrizes	Conceitos Básicos
$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$	
<p>As matrizes podem ser classificadas segundo:</p>	
<p>A forma</p>	
<p>A natureza dos elementos</p>	

Matrizes	Conceitos Básicos
Segundo a forma em:	$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$
Rectangular	
Se o número de linhas é diferente do número de colunas	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$
Quadrada	
Se o número de linhas é igual do número de colunas	
Uma matriz quadrada do tipo m por m diz-se de ordem m	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$
Linha	
Se o número de linhas é igual a um	$[1 \ 2 \ 2]_{1 \times 3}$
Coluna	
Se o número de colunas é igual a um	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

Matrizes	Conceitos Básicos
Segundo a natureza dos elementos em:	$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$
Real se todos os seus elementos são reais	
$\forall a_{ij} \in A : a_{ij} \in \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Complexa se pelo menos um dos seus elementos é complexo	
$\exists a_{ij} \in A : a_{ij} \in \mathbb{C}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}$
Nula se todos os seus elementos são nulos	
$\forall a_{ij} \in A : a_{ij} = 0$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matrizes	Conceitos Básicos
Segundo a natureza dos elementos em:	$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$
Triangular Superior uma matriz quadrada em que os elementos abaixo da diagonal principal são nulos	
$\forall a_{ij} \in A : i > j \quad a_{ij} = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
Triangular Inferior uma matriz quadrada em que os elementos acima da diagonal principal são nulos	
$\forall a_{ij} \in A : i < j \quad a_{ij} = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Matrizes		Conceitos Básicos
Segundo a natureza dos elementos em:		$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$
Diagonal	uma matriz quadrada em que os elementos não principais são nulos	$\forall a_{ij} \in A: i \neq j \quad a_{ij} = 0$
		
Escalar	uma matriz diagonal em que os elementos principais são iguais	$\forall a_{ij} \in A: i \neq j \quad a_{ij} = 0$ $i = j \quad a_{ij} = \lambda$
		

Matrizes		Conceitos Básicos
Segundo a natureza dos elementos em:		$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$
Simétrica	se os elementos a_{ij} são iguais aos a_{ji}	
Densa	se a maioria dos seus elementos são não nulos	
Dispersa	se a maioria dos seus elementos são nulos	

Soma de Matrizes

Sejam A e B duas matrizes **do mesmo tipo** denomina-se soma de A com B a uma matriz C do mesmo tipo que se obtêm somando os elementos da matriz A com os elementos da matriz B da mesma posição.

$$\forall A, B \in M_{m \times n} \quad \exists C \in M_{m \times n} : C = A + B$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} ; i = 1, \dots, m \wedge j = 1, \dots, n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

A soma de matrizes **do mesmo tipo** goza das seguintes propriedades:

Comutativa

$$\forall A, B \in M_{m \times n} \quad A + B = B + A$$

Associativa

$$\forall A, B, C \in M_{m \times n} \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

Tem elemento neutro

$$\forall A \in M_{m \times n} \quad \exists O \in M_{m \times n} : A + O = A$$

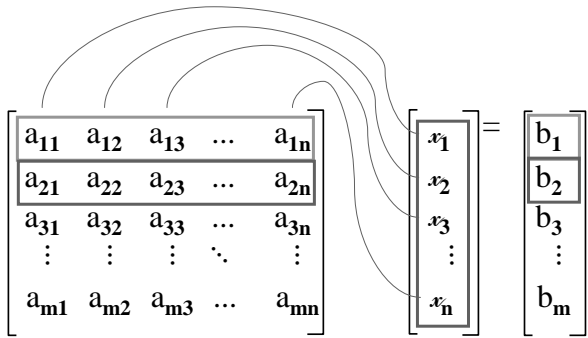
Todos os elementos têm inversa

$$\forall A \in M_{m \times n} \quad \exists B \in M_{m \times n} : A + B = O$$

Matrizes	Operações com Matrizes
A soma de matrizes do mesmo tipo goza das seguintes propriedades:	
Comutativa	
Associativa	Assim o conjunto $M_{m \times n}$ forma um Grupo Aditivo Comutativo
Tem elemento neutro	
Todos os elementos têm inversa	

Matrizes	Operações com Matrizes
<u>Produto por um escalar</u>	
Sejam A uma matriz e λ um escalar	
O produto de λ por A é uma matriz C do mesmo tipo de A que se obtêm de A multiplicando todos os seus elementos por λ	
$\forall A \in M_{m \times n} \quad \lambda A \in M_{m \times n} : C = \lambda A$ $c_{ij} = \lambda a_{ij} ; i = 1, \dots, m \wedge j = 1, \dots, n$	
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad 3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 15 & 3 & 0 \\ 6 & 12 & 9 \end{bmatrix}$	

Matrizes	Operações com Matrizes
Dadas as matrizes A e B do mesmo tipo e os escalares λ e μ as seguintes propriedades são válidas:	
$(\lambda \mu)A = \lambda (\mu A)$	
$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$	
$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$	
$1 A = A$	

Matrizes	Operações com Matrizes
Consideremos o sistema	
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$	
	
$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ Matriz de ordem m por n de elementos a_{ij}	

Matrizes **Operações com Matrizes**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Matrizes **Operações com Matrizes**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & \quad & \quad \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Matrizes
Operações com Matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ & \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Matrizes
Operações com Matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ & & \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Matrizes
Operações com Matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & & \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Matrizes
Operações com Matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & 29 & \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & 29 & 27 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Produto de Matrizes

Seja A uma matriz de tipo $m \times n$ e B uma matriz do tipo $n \times p$.

O produto de A por B é uma matriz C do tipo $m \times p$

cujos elementos são dados por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

e escreve-se $C=AB$.

O produto de matrizes não é comutativo

Matrizes	Operações com Matrizes
<p>Dadas as matrizes A, B e C, e α um escalar.</p> <p>Então, se todos os produtos a seguir indicados forem definidos, as seguintes propriedades são válidas:</p>	
$(AB)C = A(BC)$	
$(A+B)C = AC + BC$	
$A(B+C) = AB + AC$	
$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$	

Matrizes	Operações com Matrizes
<p><u>Transposição de Matrizes</u></p> <p>Seja A uma matriz de tipo mxn.</p> <p>Denomina-se transposta de A a uma matriz B do tipo nxm tal que:</p> $b_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ <p>e escreve-se $B = A^T$</p>	
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 3}$	

Matrizes	Operações com Matrizes
<p>Dadas as matrizes A e B e α um escalar.</p> <p>Então, se todos as operações a seguir indicados forem definidas, as seguintes propriedades são válidas:</p>	
	$(A^T)^T = A$
	$(A + B)^T = A^T + B^T$
	$(\alpha A^T)^T = (\alpha A)$
	$(AB)^T = B^T A^T$