Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Teste 2

MIEMEC
2012/2013
Análise Matemática EE
12 de junho de 2013
Duração: 1h30m

---

1. [3 valores] Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^3 + y^4 - 27x + 32y$.
   (a) Verifique que $(-3,-2)$ e $(3,-2)$ são os únicos pontos críticos de f.
   (b) Averigue se algum dos pontos críticos é ponto extremante de f.

2. [4 valores] Responda a cada uma das questões seguintes.
   (a) Invertendo a ordem de integração, calcule
   $$\int_0^2 \int_{x/2}^1 \cos(y^2)\, dy\, dx\,.$$
   (b) Usando coordenadas polares, calcule $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\, dy\, dx$, onde
   $$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 1, \quad y \ge x, \quad y > 0\big\}\,.$$
   (c) Escreva um integral duplo que permita calcular a área da região D apresentada na alínea anterior.

3. [4 valores] Seja $\mathcal{U}$ a região do espaço limitada pelos parabolóides de equações $z = 6 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$.
   (a) Faça um esboço de $\mathcal{U}$. Represente também a projeção de $\mathcal{U}$ no plano xOy.
   (b) Escreva, em coordenadas cartesianas, um integral triplo que permita calcular o volume de $\mathcal{U}$.
   (c) Calcule o volume de $\mathcal{U}$, mudando para coordenadas cilíndricas o integral encontrado na alínea anterior.

4. [4 valores] Uma partícula em movimento encontra-se no instante $t = 2$ na posição $\mathbf{r}(2) = (14, 5, 2)$ e a sua velocidade é dada por $\mathbf{v}(t) = (6t, 2t, t)$, em cada instante $t \ge 0$.
   (a) Determine a posição $\mathbf{r}(t)$ em cada instante t e a posição inicial da partícula.
   (b) Calcule o comprimento da curva percorrida entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$.
   (c) Determine as equações da reta tangente e do plano normal à curva no instante $t = 1$.

(Continua)

5. [4 valores] Considere o campo elétrico $\mathbf{E}$ definido em cada ponto (x, y, z) por

$$\mathbf{E}(x, y, z) = (yz, xz, xy + 1)$$

e o campo de forças $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, para uma dada carga elétrica q.

(a) Calcule o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ no deslocamento de uma partícula de carga elétrica $q = 2$ ao longo da curva $\mathcal{C}$ constituida pela arco da parábola

$$y = x^2 + 1, \quad z = 0, \quad \text{de } x = 0 \text{ para } x = 3,$$

e pelo segmento de reta que une o ponto $(3, 10, 0)$ ao ponto $(3, 10, 2)$ no sentido ascendente.

Nota: Recorde que o trabalho é dado pelo integral de linha $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds$ *e comece por obter uma parametrização da curva* $\mathcal{C}$*.*

(b) Diga se o campo elétrico $\mathbf{E}$ é um campo gradiente e, em caso afirmativo, determine a função potencial.

Nota: Um campo vetorial $\mathbf{G}\colon D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *diz-se um campo vetorial conservativo ou campo gradiente se existir uma função real diferenciável* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\mathbf{G} = \overrightarrow{\nabla} f$*; a função* f *diz-se, então, uma função potencial.*

6. [1 valor] Sendo $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar e $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial, ambos de classe $\mathcal{C}^2$, mostre que, em cada ponto (x, y, z),

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\mathbf{F}) = f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\mathbf{F} + \overrightarrow{\nabla} f \times \mathbf{F}.$$