UNIVERSIDADE DO MINHO	19 de novembro de 2011
Álgebra Linear	
$1^{\underline{o}}$ Teste - **A**	
LEI	Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ **Nº:** __________

Responda às seguintes questões, do grupo I e II, justificando convenientemente a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** *têm cotação negativa.*

1. **a)** Se $2\left(3A+\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}-2A$ então $A=\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$. V F

b) A matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verifica $A^2-5A+4I_2=O$. V F

c) As matrizes $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$ são comutáveis, se $k=4$ ou $k=-11$. V F

d) Se A e B são matrizes de ordem n invertíveis, tais que $ABA=A$, então $B=A^{-1}$. V F

e) Se A é uma matriz idempotente ($A^2=A$) então $A^k=A$, para qualquer $k\in\mathbb{N}$. V F

2. Considere a matriz $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$, onde α é um número real.

a) A matriz A é simétrica, para qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$. V F

b) A matriz A é ortogonal, para qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$. V F

c) A matriz A é invertível tendo-se $A^{-1}=A$, para qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$. V F

d) O subespaço das soluções do sistema homogéneo associado a A é gerado pelo conjunto $\{\mathbf{0}\}$. V F

3. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ e S um subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por estes.

a) Os vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ geram S. V F

b) Os vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{0}$ são linearmente dependentes. V F

c) Existem reais α e β tais que $\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}=\mathbf{0}$. V F

d) A caracteristica da matriz $A=(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{u}+\mathbf{v})$ é igual 3. V F

II

1. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ \alpha y + \beta z &= 1 \end{cases} \quad \text{com } \alpha, \beta \in R.$$

a) Complete, de acordo com os valores de α e β, de modo a obter afirmações verdadeiras.

(i) O sistema é impossível se ....

(ii) O sistema é possível indeterminado se ....

b) Existem valores para α e β que tornam o sistema possível determinado? Se sim, quais?

c) Sendo $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ determine o conjunto solução do sistema.

d) Considere o respectivo sistema homogéneo associado ao sistema dado e determine, tendo em atenção as diferentes possibilidades para os parâmetros α e β, o seu conjunto solução.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}\,b & 3 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Determine os valores de a e b para os quais:

(i) a característica de A é igual a 2,

(ii) a característica de A é igual a 3.

3. Seja U_α, uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, definida por:

$$U_\alpha = \{(3a, b+\alpha, b) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

a) Considere $\alpha = 0$ e mostre que $U = U_0$ é um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine um conjunto de vectores geradores de U_0 que sejam linearmente independentes.

c) Para que valores de α, U_α é um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^3$? Justifique.

4. Mostre que:

a) Se A, B e C são matrizes de ordem n, invertíveis, tais que, $C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n$, então $X = CB - A$.

b) Sejam A e S matrizes de ordem n.
Se A é uma simétrica e S é ortogonal, então $S^{-1}AS$ é uma matriz simétrica.

Cotação:

I	II - 1	II - 2	II - 3	II - 4
6.5	1+1+1+1.5	3	1.5+2+1	0.75+0.75