Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

MIEMEC
2012/2013
Análise Matemática EE

Exame de recurso

8 de julho de 2013
Duração: 2h

1. [1.25 valores] Considere a função real definida por
$$f(x,y) = \frac{y^2}{x-y^2}\ln(4-x^2-y^2).$$
Determine e esboce graficamente o domínio de f.

2. [1.25 valores] Considere a função g definida por
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3yx^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   (a) Verifique que existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.
   (b) Qual o domínio de continuidade de g? Justifique.

3. [1.5 valores] Seja $z = f(x,y)$, com f diferenciável, $x = re^{-t}$ e $y = re^{t}$. Use a regra de derivação da cadeia para mostrar que
$$\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial t} = 2e^t\frac{\partial z}{\partial y}$$

4. [1 valor] Verifique que qualquer função da forma
$$u(x,t) = e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}\, x, \quad \text{com } \alpha > 0 \text{ constante},$$
é solução da equação do calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

5. [3 valores] Considere a função f definida por
$$f(x,y,z) = \mathrm{sen}(zx) + \mathrm{e}^{-x^2+y^3-3z^2}.$$
   (a) Verifique que a taxa de variação de f na direção do eixo dos yy é sempre não negativa.
   (b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $P = (1,1,0)$ na direção de P para $Q = (2,1,2)$.
   (c) Qual a direção segundo a qual a taxa de variação é maxima? Qual o valor dessa taxa?

6. [2 valores] Considere a função f definida por
$$f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y + 4.$$
Verifique que $(1,-1)$ e $(-1,-1)$ são pontos de sela e que $(0,0)$ é minimizante local.

(Continua)

7. [2 valores] Considere o integral

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \cos(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

onde D é a região do plano definida por

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq x, \quad x \geq 0\big\}.$$

(a) Esboce a região D e descreva-a usando coordenadas polares.

(b) Calcule o valor do integral I.

8. [3 valores] Considere em $\mathbb{R}^3$ o integral triplo

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dz\, dy\, dx$$

(a) Faça um esboço da região da integração. Comece por observar que a projeção desta região no plano xOy é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) Escreva o integral apresentado mudando para coordenadas cilíndricas.

(c) Calcule o valor do integral.

9. [4 valores] Sejam $\mathcal{C}$ a curva parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, 2t + 1), \; t \geq 0,$$

descrevendo o movimento de uma partícula no espaço, e $\mathbf{F}$ o campo de forças

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(x - y, x + y, z\big).$$

(a) Calcule a velocidade e aceleração iniciais da partícula.

(b) Verifique que a curvatura de $\mathcal{C}$ é constante.

(c) Calcule o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ no deslocamento da partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$.

(d) Verifique que o campo $\mathbf{F}$ não é um campo gradiente.

10. [1 valor] Seja $\mathbf{r} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função vetorial de classe $\mathcal{C}^3$ e $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$. Sabendo que

$$\big[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)\big]' = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t),$$

mostre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \big[\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)\big]\,.$$