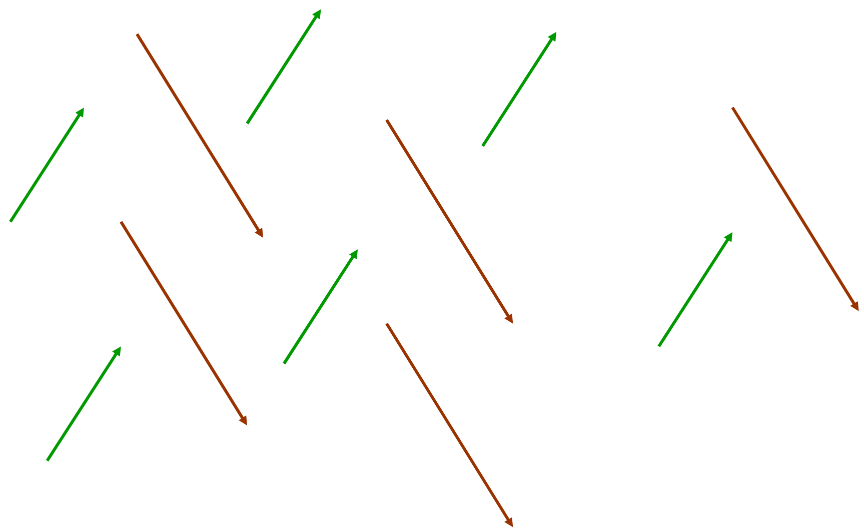
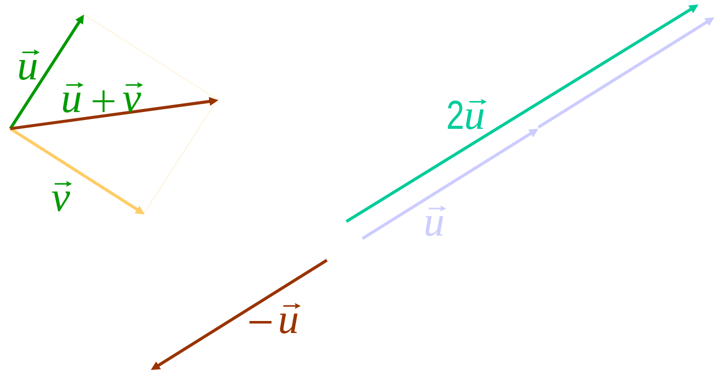
Espaços Vectoriais



Espaços Vectoriais



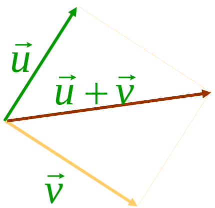
Espaços Vectoriais

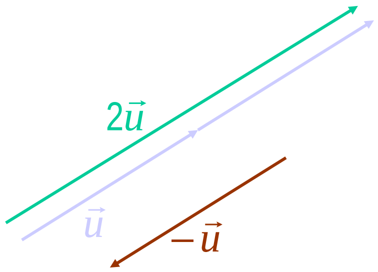
Espaço Vectorial

Seja V um conjunto não vazio e R o corpo dos reais.

Diz-se que V é um espaço vectorial real se:

1. Em V está definida uma operação binária que se designa por adição, e se representa por +, tal que (V,+) é um grupo comutativo;
2. Está definida uma aplicação de $\Re$xV em V que a cada par (λ,x) de $\Re$xV faz corresponder um elemento λx de V tal que:





Espaços Vectoriais

Espaço Vectorial

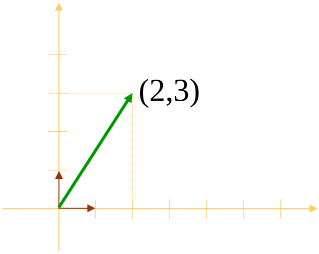
Seja V um conjunto não vazio e R o corpo dos reais.

Diz-se que V é um espaço vectorial real se:

1. Em V está definida uma operação binária que se designa por adição, e se representa por +, tal que (V,+) é um grupo comutativo;
2. Está definida uma aplicação de $\Re$xV em V que a cada par (l,x) de $\Re$xV faz corresponder um elemento λx de V tal que:

- $\forall\ x, y \in V,\ \forall \alpha \in \Re;\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
- $\forall\ x \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \Re;\ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
- $\forall\ x \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \Re;\ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- $\forall\ x \in V\ ;\ 1x = x$

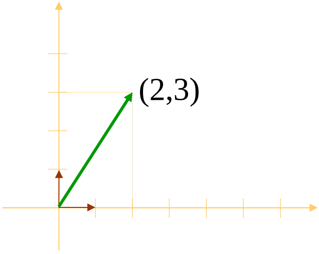
Espaços Vectoriais



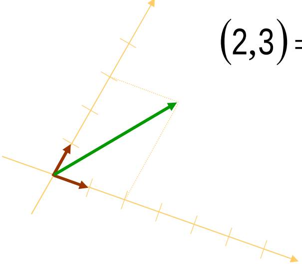
(2,3)=2(1,0)+3(0,1)

Espaços Vectoriais

(2,3)=2(1,0)+3(0,1)



$$(2,3) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$



$$(2,3) = 2\,\vec{f}_1 + 3\,\vec{f}_2$$

Espaços Vectoriais

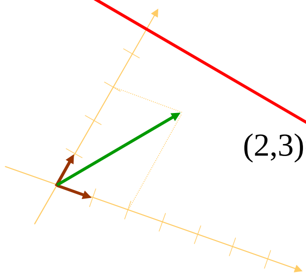
Combinação Linear

Seja V um espaço vectorial sobre **R** e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n vectores de V

Um vector **v** de V diz-se uma **combinação linear** de $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Se existirem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Re$ tais que:

$$\mathbf{v} = \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 + \ldots + \lambda_n\, x_n$$



(2,3)=2(1,0)+3(0,1)

Espaços Vectoriais

Vectores Linearmente Independentes

Seja V um espaço vectorial sobre **R** e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n vectores de V

Diz-se que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são **linearmente independentes**

se a única combinação linear nula de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é a trivialmente nula,

isto é, se para quaisquer escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Re$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_V \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

$$\underline{\lambda_1(2,3) + \lambda_2(1,2) = (0,0)} \longrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \underline{\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}}$$

$$\underline{\lambda_1(2,3) + \lambda_2(1,2) + \lambda_3(1,1) = (0,0)} \longrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \underline{\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}}$$

Espaços Vectoriais

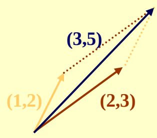
Teorema

Seja V um espaço vectorial sobre **R** e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n vectores de V

Então os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são **linearmente independentes** se e só se qualquer combinação linear dos vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tem coeficientes únicos.

$\Re^2 \quad \{(2,3)\ (1,2)\}$

$$\underline{(x,y) = \lambda_1(2,3) + \lambda_2(1,2)} \longrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = x \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2x - y \\ \lambda_2 = \underline{-3x + 2y} \end{cases}$$



Espaços Vectoriais

Teorema

Seja V um espaço vectorial sobre **R** e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (n>1) n vectores de V

Então os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são **linearmente dependentes** se e só se pelo menos **um deles for uma combinação linear dos restantes.**

Proposição

Seja V um espaço vectorial sobre **R** e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n vectores de V

se $x_i = x_j$ com i $\neq$ j . $\longrightarrow$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **são lin. dependentes**

se x_i for o vector nulo $\longrightarrow$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **são lin. dependentes**

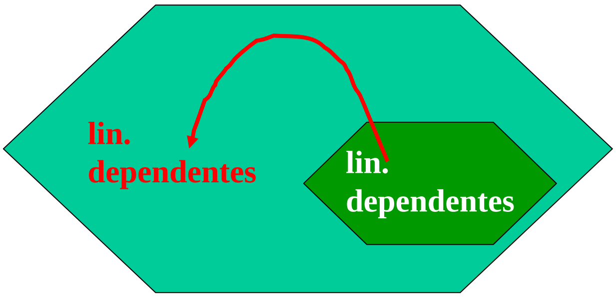
$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ lin. ind.} \\ x_1, x_2, \ldots, x_n, y \textbf{ são lin. dependentes} \end{array}\right\} \longleftrightarrow y \textbf{ é combinação linear dos restantes.}$$

Espaços Vectoriais

Teorema

Seja V um espaço vectorial sobre **R** e $x_1, x_2, \ldots, x_p$ p vectores de V

se $x_1, x_2, \ldots, x_p$ são **lin. dependentes** → qualquer **conjunto** que os contenha é ainda **lin. dependente**

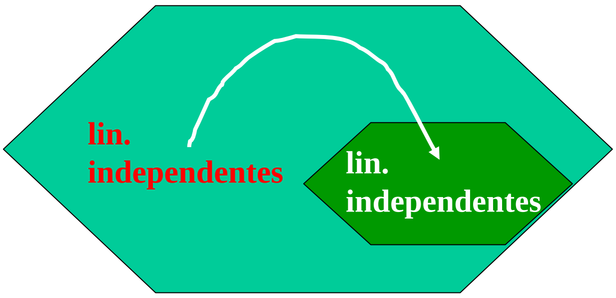


Espaços Vectoriais

Teorema

Seja V um espaço vectorial sobre **R** e $x_1, x_2, \ldots, x_p$ p vectores de V

se $x_1, x_2, \ldots, x_p$ são **lin. independentes** → qualquer sub**conjunto** é ainda **lin. independente**



Espaços Vectoriais

Teorema

Seja V um espaço vectorial sobre **R** e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n vectores de V

Então

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \boxed{x_i + x_j}, x_{i+1}, \ldots, x_n \\ \text{são lin. independentes} \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ \text{são lin. independentes} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \boxed{\lambda x_i}, x_{i+1} \ldots, x_n \quad com\ \lambda \neq 0 \\ \text{são lin. independentes} \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ \text{são lin. independentes} \end{array}\right.$$

Espaços Vectoriais

Conjunto de Geradores

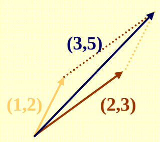
Seja V um espaço vectorial sobre **R** e **C** um subconjunto não vazio de V

Diz-se que **C é um conjunto de geradores de V** se qualquer vector de V se escreve com combinação linear de vectores de C.

Escreve **V = < C >**

$\Re^2 = \langle (2,3)\ (1,2) \rangle$?

$$\underline{(x, y) = \lambda_1 (2,3) + \lambda_2 (1,2)} \longrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = x \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2x - y \\ \lambda_2 = \underline{-3x + 2y} \end{cases}$$



Espaços Vectoriais

Teorema

Seja V um espaço vectorial sobre **R**
que admite um conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de geradores lin. independentes
Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Quaisquer m vectores de V com m > n são lin. dependentes
2. Qualquer conjunto de geradores de E tem no mínimo n vectores
3. Qualquer conjunto de n vectores lin ind. de E são geradores
4. Qualquer conjunto de n vectores geradores de E são lin. independentes
5. Qualquer conjunto de geradores de E constituído por vectores lin. ind. são exactamente n

Espaços Vectoriais

Teorema

Seja V um espaço vectorial sobre **R**

Qualquer conjunto finito de geradores de V contém ainda um subconjunto de geradores de V constituído por vectores linearmente independentes

Definição

Seja V um espaço vectorial sobre **R**
Denomina-se de base de um espaço vectorial a qualquer conjunto de vectores geradores e linearmente independentes.

Definição

Seja V um espaço vectorial sobre **R**
Denomina-se de dimensão de um espaço vectorial ao número de vectores de uma sua base.

Espaços Vectoriais

Característica de uma matriz

Denomina-se característica de uma matriz ao número **de linhas ou colunas** linearmente independentes.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espaços Vectoriais

Característica de uma matriz

Denomina-se característica de uma matriz ao número **de linhas ou colunas** linearmente independentes.

(1)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(-3)

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Método de Eliminação de Gauss

Espaços Vectoriais

Característica de uma matriz

$$\overset{(-2)}{}\begin{bmatrix} \boxed{1 & 2 & 0 & 3 & 1} \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Método de Eliminação de Gauss

Espaços Vectoriais

Característica de uma matriz

$$\overset{(-3)}{}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -8 & -2 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Método de Eliminação de Gauss

Espaços Vectoriais

Característica de uma matriz

$$(-5)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & -6 & 4 & -14 & -3 \end{bmatrix}$$

Método de Eliminação de Gauss

Espaços Vectoriais

Característica de uma matriz

$$(-5)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (-5)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & -6 & 4 & -14 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 22 & 3 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Método de Eliminação de Gauss

Espaços Vectoriais

Característica de uma matriz

(-5)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(-6)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & -6 & 4 & -14 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 22 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 22 & 3 \end{bmatrix}$$

Método de Eliminação de Gauss

Espaços Vectoriais

Característica de uma matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & -6 & 4 & -14 & -3 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 22 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 22 & 3 \end{bmatrix}$$

(-6) (-1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 22 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Método de Eliminação de Gauss