Produto escalar

- Permite estabelecer as chamadas *propriedades métricas*, essenciais no estudo dos vectores e da geometria (euclidiana): *norma*, *ângulo*, *ortogonalidade* e *projecção ortogonal*.

Definição: Sejam os vectores de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \text{ e } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$$

Chama-se *produto escalar* de $\vec{a}$ por $\vec{b}$, designando-se por $\vec{a} \cdot \vec{b}$, ao escalar real dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

- A designação de produto escalar para esta operação tem a ver com o facto de ela ter como resultado um escalar (real) e não um vector.

Propriedades: Sejam os vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

a) Propriedade *comutativa*: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

b) Propriedade *distributiva em relação à adição de vectores*:

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$$

c) Propriedade *homogénea*: $\alpha(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\alpha \vec{y})$

d) Propriedade *positiva*:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} > 0 \iff \vec{x} \neq \vec{0}, \text{ em que } \vec{0} \text{ é o vector nulo}$$

e) $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

f) $\vec{0} \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot \vec{0} = 0$

Norma de um vector

- Espaço unidimensional, $\mathbb{R}$:

$$\|\vec{a}\| = \|(a)\| = |a| = \sqrt{a^2} = \left(\vec{a} \cdot \vec{a}\right)^{1/2}$$

- Espaço bidimensional, $\mathbb{R}^2$ (*teorema de Pitágoras*):

$$\|\vec{a}\| = \|(a_1, a_2)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \left(\vec{a} \cdot \vec{a}\right)^{1/2}$$

- Espaço tridimensional, $\mathbb{R}^3$ (*teorema de Pitágoras*):

$$\|\vec{a}\| = \|(a_1, a_2, a_3)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \left(\vec{a} \cdot \vec{a}\right)^{1/2}$$

Definição: **Norma de um vector**
Seja o vector de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

Define-se *norma* de $\vec{a}$, designando-se por $\|\vec{a}\|$, o escalar real dado por

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2} = \left(\vec{a} \cdot \vec{a}\right)^{1/2}$$

- A *norma* do vector $\vec{a}$ é, por vezes, designada por *módulo* de $\vec{a}$, designando-se por $|\vec{a}|$.

Propriedades: Seja o vector $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

a) Propriedade *positiva*:

$$\|\vec{x}\| > 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \neq \vec{0}\text{, em que } \vec{0} \text{ é o vector nulo}$$

b) $\|\vec{x}\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{x} = \vec{0}$

c) $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$

- Chama-se *vector unitário* a qualquer vector com norma igual a um.

- A qualquer vector não nulo $\vec{a}$ é possível associar dois *vectores unitários*, com a mesma direcção de $\vec{a}$ (*paralelos* ou *colineares*) e sentidos opostos, que são designados por *versores* da direcção definida por $\vec{a}$.

Definição: **Versor da direcção definida por um vector**
Dado o vector não nulo de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

chama-se *versor* da direcção definida por $\vec{a}$ a qualquer *vector unitário* com a mesma direcção do vector $\vec{a}$, isto é, aos vectores

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

se tiver o mesmo sentido do vector $\vec{a}$**,** e

$$\vec{u}_{-\vec{a}} = -\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

no caso de possuir o sentido oposto ao de $\vec{a}$.

- Na definição anterior, o processo que corresponde à multiplicação do vector $\vec{a}$ pelo inverso da sua norma chama-se *normalização* de $\vec{a}$, podendo afirmar-se, nesse caso, que $\vec{a}$ se encontra *normalizado*.

Ortogonalidade entre vectores

Teorema [2.3]: Os vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ são *ortogonais* entre si, se e só se o seu produto escalar for nulo, isto é,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Definição [2.7]: Os vectores de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \text{ e } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$$

dizem-se *ortogonais*, escrevendo-se $\vec{a} \perp \vec{b}$, se o seu produto escalar for nulo, isto é, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

- O *vector nulo* pode ser considerado *ortogonal* a qualquer outro vector.

- A *lei do anulamento do produto* **não é válida** para o produto escalar.

- É possível aplicar o *teorema de Pitágoras* aos vectores de $\mathbb{R}^n$, de que resulta a propriedade seguinte.

Teorema [2.21]: Sendo $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores ortogonais de $\mathbb{R}^n$, então

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Ângulo entre vectores

Teorema [2.4]: **Teorema de Carnot** (*Teorema de Pitágoras generalizado*) Considere o triângulo $[ABC]$, tal que $a = \overline{AC}$, $b = \overline{AB}$ e $c = \overline{BC}$, sendo $0 < \theta < \pi$ o seu ângulo interno no vértice *A*. Então

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \quad (\textit{lei dos cossenos})$$

Teorema [2.5]: Sejam $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$. Designando por $\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ o ângulo por eles formado, em que $\theta \in [0, \pi]$, então

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta \iff \theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\right)$$

- Convém realçar o seguinte:

  i) Se $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, então $0 < \cos\theta \le 1$ e $0 \le \theta < \pi/2$;

  ii) Se $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, então $-1 \le \cos\theta < 0$ e $\pi/2 < \theta \le \pi$;

  iii) Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, então $\cos\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ (vectores ortogonais);

  iv) Se $\vec{a} \parallel \vec{b}$ e possuírem o mesmo sentido, então $\cos\theta = 1$, $\theta = 0$ e $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| > 0$ (valor máximo para o produto escalar);

  v) Se $\vec{a} \parallel \vec{b}$ e possuírem sentidos opostos, então $\cos\theta = -1$, $\theta = \pi$ e $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| < 0$ (valor mínimo para o produto escalar).

Definição **[2.8]**: Sejam os vectores não nulos de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \text{ e } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$$

Define-se o *ângulo* formado formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$ como sendo o escalar real $\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$, tal que

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\right)$$

Exemplo 1 **[2.8]**: Sejam os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ de $\mathbb{R}^3$, tais que

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{c}\| = 5, \ \|\vec{b}\| = 1, \ \|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| \text{ e } \alpha = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi / 8$$

Determine o valor do ângulo $\theta = \measuredangle(\vec{b}, \vec{c})$.

Solução: $\theta = \measuredangle(\vec{b}, \vec{c}) = 7\pi / 8$.

Exemplo 2: Sejam os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ de $\mathbb{R}^n$, tais que

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{2}, \ \|\vec{b}\| = \|\vec{d}\| = 1, \ \vec{a} \parallel \vec{d}, \ \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \text{ e } \alpha = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi / 4$$

Determine a norma do vector $\vec{c}$ e o valor do ângulo $\theta = \measuredangle(\vec{c}, \vec{d})$.

Solução: $\|\vec{c}\| = \sqrt{5}$;

$\theta = \measuredangle(\vec{c}, \vec{d}) = \cos^{-1}\left(3\sqrt{10} / 10\right)$ se $\vec{a}$ e $\vec{d}$ tiverem o mesmo sentido;

$\theta = \measuredangle(\vec{c}, \vec{d}) = \cos^{-1}\left(-3\sqrt{10} / 10\right)$ se $\vec{a}$ e $\vec{d}$ tiverem sentidos opostos.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Teorema **[2.12;18]**: Sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Então

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leq (\vec{x}\cdot\vec{x})(\vec{y}\cdot\vec{y})$$

ou ainda

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$$

O sinal de igualdade apenas se verificará, se e só se os vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ forem *múltiplos*.

- Designando $\theta = \measuredangle(\vec{x},\vec{y})$, a *desigualdade de Cauchy-Schwarz* permite estabelecer

$$\frac{|\vec{x}\cdot\vec{y}|}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

Desigualdade triangular

Teorema **[2.13;19]**: Sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Então

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

O sinal de igualdade apenas se verificará, se e só se

$$\vec{x} = \vec{0} \;\vee\; \vec{y} = \vec{0} \;\vee\; \vec{y} = \alpha\vec{x} \;,\; \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Projecção ortogonal entre vectores

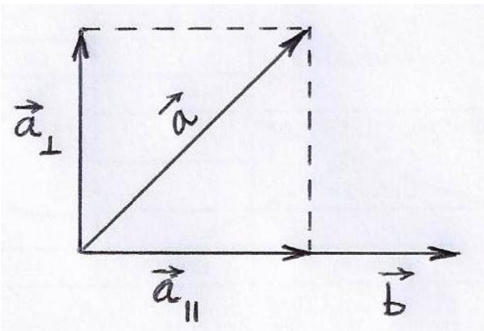
- Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$. É sempre possível decompor o vector $\vec{a}$ em duas parcelas relativamente ao vector $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\|} + \vec{a}_{\perp} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a} + \vec{a}_{\perp}$$

em que:

i) $\vec{a}_{\|} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a}$ – *vector projecção ortogonal de* $\vec{a}$ *sobre* $\vec{b}$ ou *componente vectorial de* $\vec{a}$ *na direcção de* $\vec{b}$;

ii) $\vec{a}_{\perp}$ – *componente vectorial de* $\vec{a}$ *ortogonal a* $\vec{b}$.



- Convém realçar o seguinte:

i) Se $\vec{a} \parallel \vec{b}$, então $\vec{a}_{\|} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a} = \vec{a}$ e $\vec{a}_{\perp} = \vec{0}$;

ii) Se $\vec{a} \perp \vec{b}$, então $\vec{a}_{\|} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a} = \vec{0}$ e $\vec{a}_{\perp} = \vec{a}$.

Teorema [2.7;22]: Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b} \neq \vec{0}$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Então

$$\vec{a}_{||} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$$

e

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a} = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$$

- Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores não nulos e não paralelos de $\mathbb{R}^n$, verifica-se:

  i) Se $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, então $\vec{a}_{||} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a}$ tem o mesmo sentido de $\vec{b}$;

  ii) Se $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, então $\vec{a}_{||} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a}$ tem o sentido oposto ao de $\vec{b}$;

  iii) Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, então $\vec{a}_{||} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a} = \vec{0}$;

  iv) A norma do vector $\vec{a}_{||} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a}$ é dada por

$$\|\vec{a}_{||}\| = \|\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a}\| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{b}\|}$$

  v) Se $\vec{b}$ é versor, então

$$\vec{a}_{||} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b} \ \Rightarrow\ \|\vec{a}_{||}\| = \|\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{b}}\ \vec{a}\| = |\vec{a} \cdot \vec{b}|$$

Exemplo 3 [2.11]: Seja a força $\vec{f} = (3,-1)$ aplicada no centro de massa de um corpo rígido inicialmente localizado no ponto $P = (3,2)$. Determine o trabalho realizado pela força, quando se desloca, seguindo uma trajectória rectilínea, de P para o ponto $Q = (-5,-4)$ (unidades no S.I.).

Solução: $W_{\vec{f}} = -18$ J (trabalho *resistente*).

- Relativamente ao vector de $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

verifica-se

$$\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{i})\vec{i} + (\vec{a}\cdot\vec{j})\vec{j} = \overrightarrow{\mathrm{proj}_{\vec{i}}\ \vec{a}} + \overrightarrow{\mathrm{proj}_{\vec{j}}\ \vec{a}}$$

Definição: **Ângulos directores e cossenos directores de um vector**
Designam-se por *ângulos directores* de um vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ de $\mathbb{R}^2$, os ângulos $\alpha = \measuredangle(\vec{a},\vec{i})$ e $\beta = \measuredangle(\vec{a},\vec{j})$.
Os valores definidos por $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ chamam-se *cossenos directores* do vector.

Teorema: Seja $\vec{a}$ um vector não nulo de $\mathbb{R}^2$. Então

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j}$$

Teorema: Os cossenos directores de um vector não nulo de $\mathbb{R}^2$ satisfazem a relação trigonométrica

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

- Relativamente ao vector de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

verifica-se

$$\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{i})\vec{i} + (\vec{a}\cdot\vec{j})\vec{j} + (\vec{a}\cdot\vec{k})\vec{k} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{i}}\ \vec{a} + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{j}}\ \vec{a} + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{k}}\ \vec{a}$$

Definição: **Ângulos directores e cossenos directores de um vector**
Designam-se por *ângulos directores* de um vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ de $\mathbb{R}^3$, os ângulos $\alpha = \measuredangle(\vec{a},\vec{i})$, $\beta = \measuredangle(\vec{a},\vec{j})$ e $\gamma = \measuredangle(\vec{a},\vec{k})$.
Os valores definidos por $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ chamam-se *cossenos directores* do vector.

Teorema [2.10]: Seja $\vec{a}$ um vector não nulo de $\mathbb{R}^3$. Então

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$$

Teorema: Os cossenos directores de um vector não nulo de $\mathbb{R}^3$ satisfazem a relação trigonométrica

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

- Relativamente ao vector de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + \ldots + a_n\vec{e}_n$$

verifica-se

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\vec{a} \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_n = \sum_{k=1}^{n} (\vec{a} \cdot \vec{e}_k)\vec{e}_k$$

ou

$$\vec{a} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{e}_1}\vec{a} + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{e}_2}\vec{a} + \ldots + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{e}_n}\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{e}_k}\vec{a}$$