Seja o conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$

$$S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} \subset \mathbb{R}^4$$

com

$$A_1 = (1,1,0,1)$$
$$A_2 = (2,3,-1,4)$$
$$A_3 = (1,2,-1,3)$$
$$A_4 = (3,1,2,-1)$$

a) Verifique que o conjunto S é linearmente dependente.

Analisemos a forma como o conjunto S gera o vector nulo.

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4 = 0 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c_1 + 2c_2 + c_3 + 3c_4,\ c_1 + 3c_2 + 2c_3 + c_4,\ -c_2 - c_3 + 2c_4,\ c_1 + 4c_2 + 3c_3 - c_4) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (c_1) & (c_2) & (c_3) & (c_4) \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema homogéneo é possível e duplamente indeterminado, tendo como solução

$$\begin{cases} c_1 = -2c_2 - c_3 - 3c_4 \\ c_2 = -c_3 + 2c_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_3 - 7c_4 \\ c_2 = -c_3 + 2c_4 \end{cases}, \quad \forall c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

O vector nulo não é gerado de forma única, pelo que o conjunto S é linearmente dependente.

Convém notar que

$$(c_3 - 7c_4) A_1 + (-c_3 + 2c_4) A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4 = 0, \quad \forall c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

b) Determine $L(S)$ e confirme o resultado obtido na alínea anterior.

$$L(S) = \{ X \in \mathbb{R}^4 : X = c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4 \, , \, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \}$$

Considerando $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ e resolvendo um sistema semelhante ao da alínea anterior,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (c_1) & (c_2) & (c_3) & (c_4) \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & x_1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & x_3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & x_4 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & x_3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & x_4 - x_1 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 - x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_4 \end{array}\right]$$

O sistema é possível e duplamente indeterminado, se e só se

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 - x_2 \\ x_4 = -x_1 + 2x_2 \end{cases} \, , \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Tem-se, então,

$$L(S) = \{ X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 = x_1 - x_2 \wedge x_4 = -x_1 + 2x_2 \} =$$

$$= \{ X = (x_1, x_2, x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2) \in \mathbb{R}^4 \}$$

<u>NOTA</u>: $0 \in L(S)$, $A_1 \in L(S)$, $A_2 \in L(S)$, $A_3 \in L(S)$, $A_4 \in L(S)$

Sendo o sistema indeterminado, o conjunto S não gera o subespaço $L(S)$ de forma única, pelo que S é um conjunto linearmente dependente.

A solução do sistema seria:

$$\begin{cases} c_1 = x_1 - 2c_2 - c_3 - 3c_4 \\ c_2 = x_2 - x_1 - c_3 + 2c_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = (3x_1 - 2x_2) + c_3 - 7c_4 \\ c_2 = (x_2 - x_1) - c_3 + 2c_4 \end{cases} \quad \forall c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Wiz

c) Determine uma base, S_1, para o subespaço $L(S)$ e conclua em relação à dimensão de $L(S)$.

Sendo S um conjunto linearmente dependente, então

$$\dim L(S) < 4 \quad e \quad L(S) \subset \mathbb{R}^4$$

Por outro lado, é visível que qualquer subconjunto de 2 elementos do conjunto S é um conjunto linearmente independente (os vectores não são paralelos), pelo que

$$\dim L(S) \geq 2$$

Ter-se-á

$$\dim L(S) = 3$$

se for possível encontrar um subconjunto de 3 elementos do conjunto S que seja linearmente independente (trata-se de uma análise algo trabalhosa).

Para se obter uma possível base para o subespaço $L(S)$ poderá fazer-se, em alternativa,

$$X \in L(S) \Leftrightarrow X = (x_1, x_2, x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2) \in L(S) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = (x_1, 0, x_1, -x_1) + (0, x_2, -x_2, 2x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = x_1(1, 0, 1, -1) + x_2(0, 1, -1, 2) \in L(S)$$

ou seja

$$X = x_1 A_5 + x_2 A_6 \in L(S)$$

em que

$$A_5 = (1, 0, 1, -1) \in L(S)$$
$$A_6 = (0, 1, -1, 2) \in L(S)$$

O conjunto

$$S_1 = \{A_5, A_6\}$$

NOTA: $L(S_1) = L(S)$

é uma base para $L(S)$, pelo que

$$\dim L(S) = 2$$

Conclui-se que no conjunto S existe, no máximo, dois vectores linearmente independentes.

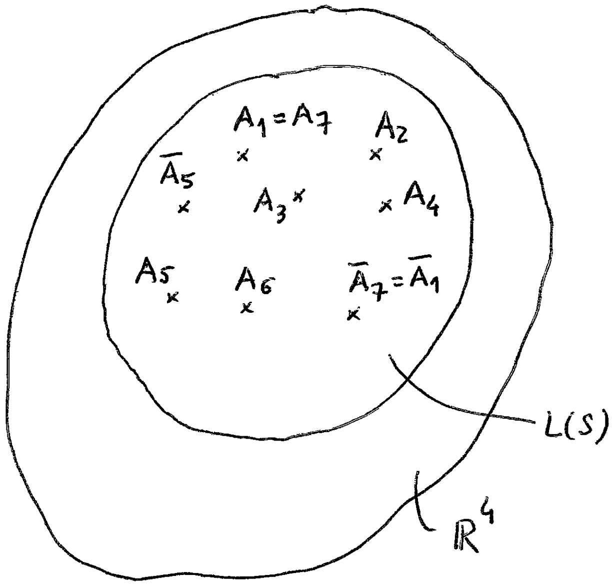
Assim, qualquer um dos seguintes subconjuntos de S

$\{A_1,A_2\}$, $\{A_1,A_3\}$, $\{A_1,A_4\}$, $\{A_2,A_3\}$, $\{A_2,A_4\}$ e $\{A_3,A_4\}$

são possíveis bases para o subespaço $L(S)$.

d) Obtenha uma base ortogonal, S_2, para o subespaço $L(S)$.

A base ortogonal S_2 deverá ser formada por dois vectores ortogonais e não nulos pertencentes ao subespaço $L(S)$, já que $\dim L(S) = 2$.



Uma possível base será

$$S_2 = \{A_5, A_7\} \subset L(S)$$

tal que

$$\begin{cases} A_7 \in L(S)\setminus\{0\} \\ A_7 \perp A_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_7 = (x_1, x_2, x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2) \in L(S)\setminus\{0\} \\ A_7 \cdot A_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x_1 + x_1 - x_2 + x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_7 = (x_2, x_2, 0, x_2),\ x_2 \neq 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

Seja, por exemplo, o vector

$$A_7 = (1,1,0,1) = A_1 \ !$$

Então

$$S_2 = \{A_5, A_7\} = \{(1,0,1,-1), (1,1,0,1)\} \subset L(S)$$

é uma base ortogonal para o subespaço $L(S)$.

<u>NOTA</u>: $L(S_2) = L(S)$

e) Obtenha uma base ortonormal, $\bar{S}_2$, para o subespaço $L(S)$.

Recorrendo à base ortogonal S_2 obtida na alínea anterior, tem-se

$$\bar{S}_2 = \{ \bar{A}_5 , \bar{A}_7 \} \subset L(S)$$

com

$$\bar{A}_5 = \frac{A_5}{\|A_5\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1,0,1,-1)$$

$$\bar{A}_7 = \frac{A_7}{\|A_7\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1,1,0,1) = \bar{A}_1$$

NOTA: $L(\bar{S}_2) = L(S)$

f) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que inclua a base ortogonal S_2.

Neste caso deverá verificar-se

$$S_3 = \{ A_5, A_7, A_8, A_9 \} \subset \mathbb{R}^4$$

tais que os vectores sejam não nulos e ortogonais entre si.

Comecemos por obter o vector A_8; assim,

$$\begin{cases} A_8 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \\ A_8 \cdot A_5 = 0 \\ A_8 \cdot A_7 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_8 \notin L(S)$$

$$\begin{cases} A_8 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_8 = (x_1, -x_1-x_4, -x_1+x_4, x_4), \; x_1 \neq 0 \vee x_4 \neq 0 \\ x_3 = -x_1 + x_4 \\ x_2 = -x_1 - x_4 \end{cases}$$

Seja, por exemplo, o vector

$$A_8 = (1,-1,-1,0)$$

Calculemos agora o vector A_9. Neste caso, tem-se

$$\begin{cases} A_9 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \\ A_9 \cdot A_5 = 0 \\ A_9 \cdot A_7 = 0 \\ A_9 \cdot A_8 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_9 \notin L(A_5, A_7, A_8)$$

$$\begin{cases} A_9 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema homogéneo

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ (x_1)\ (x_2)\ (x_3)\ (x_4) \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

pelo que

$$A_9 = (0, -x_4, x_4, x_4), \quad x_4 \neq 0$$

Seja, por exemplo,

$$A_9 = (0, -1, 1, 1)$$

Conclui-se que o conjunto S_3 é uma base ortogonal para o espaço $\mathbb{R}^3$.

g) Obtenha uma base ortonormal para $\mathbb{R}^4$ a partir da base ortogonal S_3 obtida na alínea anterior.

Neste caso, obtém-se

$$\bar{S}_3 = \{\bar{A}_5, \bar{A}_7, \bar{A}_8, \bar{A}_9\} \subset \mathbb{R}^4$$

em que $\bar{A}_5$ e $\bar{A}_7$ estão definidos na alínea e) e

$$\bar{A}_8 = \frac{A_8}{\|A_8\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1, 0)$$

$$\bar{A}_9 = \frac{A_9}{\|A_9\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, -1, 1, 1)$$

h) Determine as coordenadas do vector $H = (1,1,4,1)$ em relação à base ortogonal S_3.

$$H = (1,1,4,1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{S_3}$$

$$\alpha_1 A_5 + \alpha_2 A_7 + \alpha_3 A_8 + \alpha_4 A_9 = H$$

em que, como S_3 é uma base ortogonal,

$$\alpha_1 A_5 = \overrightarrow{\text{proj}}_{A_5} H \Rightarrow \frac{H \cdot A_5}{\| A_5 \|^2} = \frac{4}{3} = \alpha_1$$

$$\alpha_2 A_7 = \overrightarrow{\text{proj}}_{A_7} H \Rightarrow \frac{H \cdot A_7}{\| A_7 \|^2} = \frac{3}{3} = 1 = \alpha_2$$

$$\alpha_3 A_8 = \overrightarrow{\text{proj}}_{A_8} H \Rightarrow \frac{H \cdot A_8}{\| A_8 \|^2} = -\frac{4}{3} = \alpha_3$$

$$\alpha_4 A_9 = \overrightarrow{\text{proj}}_{A_9} H \Rightarrow \frac{H \cdot A_9}{\| A_9 \|^2} = \frac{4}{3} = \alpha_4$$

$$H = \left(\frac{4}{3}, 1, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)_{S_3}$$

i) Determine as coordenadas do vector H em relação à base ortonormal $\bar{S}_3$.

$$H = (1,1,4,1) = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4)_{\bar{S}_3}$$

$$\bar{\alpha}_1 \bar{A}_5 + \bar{\alpha}_2 \bar{A}_7 + \bar{\alpha}_3 \bar{A}_8 + \bar{\alpha}_4 \bar{A}_9 = H$$

em que, neste caso particular,

$$\bar{\alpha}_1 \bar{A}_5 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\bar{A}_5} H \Rightarrow H \cdot \bar{A}_5 = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \bar{\alpha}_1$$

$$\bar{\alpha}_2 \bar{A}_7 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\bar{A}_7} H \Rightarrow H \cdot \bar{A}_7 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = \bar{\alpha}_2$$

$$\bar{\alpha}_3 \bar{A}_8 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\bar{A}_8} H \Rightarrow H \cdot \bar{A}_8 = -\frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{3} = \bar{\alpha}_3$$

$$\overline{\alpha_4}\,\overline{A_9} = \text{proj}_{\overline{A_9}} H \Rightarrow H \cdot \overline{A_9} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \overline{\alpha_4}$$

$$H = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)_{S_3}$$

j) Obtenha uma base, S_4, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que inclua a base S_1 obtida na alínea c).

O objectivo será encontrar uma base (não ortogonal)

$$S_4 = \{A_5, A_6, A_{10}, A_{11}\} \subset \mathbb{R}^4$$

que deverá ser constituída por 4 vectores linearmente independentes.

O processo de cálculo deverá iniciar-se pela determinação do vector A_{10}.

Assim, o conjunto de 3 vectores

$$S_4' = \{A_5, A_6, A_{10}\}$$

será linearmente independente, se e só se

$$A_{10} \neq 0 \quad \wedge \quad A_{10} \notin L(S_1)$$

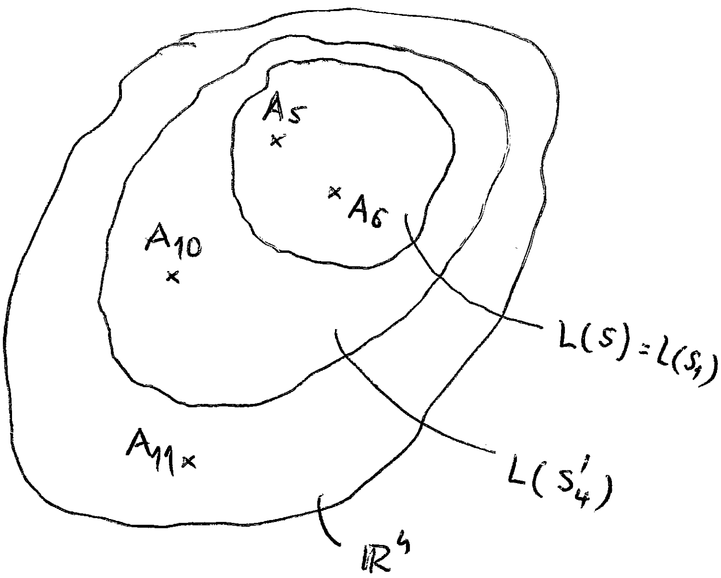
Recorrendo à definição do subespaço $L(S_1) = L(S)$ apresentado na alínea b), podemos escolher o vector

$$A_{10} = (1,0,0,0) \notin L(S_1)$$

Como $S_1 \subset S_4'$ então

$$L(S_1) \subset L(S_4')$$

e $\dim L(S_4') = 3$.



Relativamente ao vector A_{11} deverá verificar-se

$$A_{11} \neq 0 \quad \wedge \quad A_{11} \notin L(S_4')$$

pelo que teremos de determinar o subespaço $L(S_4')$.

$$L(S_4') = \{ X \in \mathbb{R}^4 : X = \omega_1 A_5 + \omega_2 A_6 + \omega_3 A_{10} , \ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R} \}$$

Considerando o vector $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, tem-se

$$\omega_1 (1,0,1,-1) + \omega_2 (0,1,-1,2) + \omega_3 (1,0,0,0) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\omega_1 + \omega_3 , \ \omega_2 , \ \omega_1 - \omega_2 , \ -\omega_1 + 2\omega_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & 0 & x_3 \\ -1 & 2 & 0 & x_4 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} (\omega_1) & (\omega_2) & (\omega_3) \end{array} \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & -1 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 2 & 1 & x_1 + x_4 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 - x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_4 - 2x_2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 - x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 + x_4 - x_2 \end{array}\right]$$

O sistema é possível e determinado, se e só se

$$x_3 + x_4 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_3 + x_4 , \ \forall_{x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \ \forall_{x_1 \in \mathbb{R}}$$

Assim,

$$L(S_4') = \{ X = (x_1, x_3 + x_4, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \}$$

<u>NOTA</u> : $0 \in L(S_4') \wedge A_5 \in L(S_4') \wedge A_{10} \in L(S_4')$

Podemos, portanto, escolher o vector

$$A_{11} = (0,1,0,0) \notin L(S_4')$$

Como se pode constatar, a determinação de uma base não ortogonal envolve um processo de cálculo muito mais trabalhoso do que a obtenção de uma base ortogonal (ver alínea f)).

k) Determine as coordenadas do vector $H = (1,1,4,1)$ em relação à base S_4.

$$H = (1,1,4,1) = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)_{S_4}$$

$$\delta_1 A_5 + \delta_2 A_6 + \delta_3 A_{10} + \delta_4 A_{11} = H \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta_1 (1,0,1,-1) + \delta_2 (0,1,-1,2) + \delta_3 (1,0,0,0) + \delta_4 (0,1,0,0) = (1,1,4,1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\delta_1 + \delta_3, \delta_2 + \delta_4, \delta_1 - \delta_2, -\delta_1 + 2\delta_2) = (1,1,4,1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} (\delta_1) & (\delta_2) & (\delta_3) & (\delta_4) \end{array} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} (\delta_3) & (\delta_4) & (\delta_2) & (\delta_1) \end{array} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_3 = -8 \\ \delta_4 = -4 \\ \delta_2 = 5 \\ \delta_1 = 9 \end{cases}$$

Obtém-se, então,

$$H = (9, 5, -8, -4)_{S_4}$$

[illegible]