Estudo do Plano

Definições

Definição: Sejam, no espaço $\mathbb{R}^n$, um ponto P e os vectores *linearmente independentes* $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Chama-se *plano que passa em P e é gerado pelos vectores* $\vec{a}$ e $\vec{b}$, designando-se por $L(P;\vec{a},\vec{b})$, ao conjunto de pontos de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$L(P;\vec{a},\vec{b}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n \ : \ X = P + s\vec{a} + t\vec{b} \ , \ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

ou, simplesmente,

$$L(P;\vec{a},\vec{b}) = \left\{ P + s\vec{a} + t\vec{b} \right\}$$

Os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são designados por *vectores geradores* ou *vectores directores* do plano $L(P;\vec{a},\vec{b})$.

- Se o plano $L(P;\vec{a},\vec{b})$ passa na origem, O, então:

  $$L(P;\vec{a},\vec{b}) = L(O;\vec{a},\vec{b}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n \ : \ X = s\vec{a} + t\vec{b} \ , \ s,t \in \mathbb{R} \right\} = L(\vec{a},\vec{b})$$

  Neste caso, o *plano* $L(P;\vec{a},\vec{b})$ coincide com o *subespaço* gerado pelos vectores *linearmente independentes* $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Definição: Diz-se que o ponto $Q \in \mathbb{R}^n$ *está no plano* $L(P;\vec{a},\vec{b})$, se

$$Q \in L(P;\vec{a},\vec{b}) \ \Leftrightarrow \ \exists^1 (s,t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ Q = P + s\vec{a} + t\vec{b} \ \Leftrightarrow \ \exists^1 (s,t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ Q - P = s\vec{a} + t\vec{b}$$

ou ainda,

$$Q \in L(P;\vec{a},\vec{b}) \ \Leftrightarrow \ Q - P \in L(\vec{a},\vec{b})$$

Planos paralelos

Definição: **planos paralelos**

No espaço $\mathbb{R}^n$, os planos $M = \{P + s\vec{a} + t\vec{b}\}$ e $M_1 = \{Q + u\vec{c} + v\vec{d}\}$ dizem-se *paralelos*, se os *subespaços gerados* por $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ e por $\{\vec{c}, \vec{d}\}$ forem *iguais*, isto é, $L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{c}, \vec{d})$.

- No espaço $\mathbb{R}^n$, os planos *paralelos* podem ser classificados em:

  i) *Iguais* ou *coincidentes*;

  ii) *Estritamente paralelos*.

Planos iguais ou coincidentes

Teorema: Considere, no espaço $\mathbb{R}^n$, os planos $M = \{P + s\vec{a} + t\vec{b}\}$ e $M_1 = \{P + u\vec{c} + v\vec{d}\}$, que *passam no mesmo ponto P*. Os planos dados dizem-se *iguais* ou *coincidentes*, se e só se os *subespaços gerados* por $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ e por $\{\vec{c}, \vec{d}\}$ forem *iguais*, isto é,

$$M = M_1 \iff L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{c}, \vec{d})$$

Teorema: Considere, no espaço $\mathbb{R}^n$, os planos $M = \{P + s\vec{a} + t\vec{b}\}$ e $M_1 = \{Q + u\vec{a} + v\vec{b}\}$, que são gerados pelos *mesmos vectores linearmente independentes* $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Os planos dados dizem-se *iguais* ou *coincidentes*, se e só se $Q \in M$, isto é,

$$M = M_1 \iff Q \in M$$

- As duas proposições atrás apresentadas podem ser reduzidas à seguinte proposição que lhes é equivalente:
  Dados os planos $M=\{P+s\vec{a}+t\vec{b}\}$ e $M_1=\{Q+u\vec{c}+v\vec{d}\}$ no espaço $\mathbb{R}^n$, então

$$M=M_1 \;\Leftrightarrow\; L(\vec{a},\vec{b})=L(\vec{c},\vec{d}) \;\wedge\; Q\in M$$

Planos estritamente paralelos

Teorema: Considere, no espaço $\mathbb{R}^n$, o plano $M=\{P+s\vec{a}+t\vec{b}\}$ e o ponto $Q\notin M$. Então, existe um e um só plano que *passa em Q* e é *estritamente paralelo* ao plano $M=\{P+s\vec{a}+t\vec{b}\}$; é o caso, por exemplo, do plano $M_1=\{Q+u\vec{a}+v\vec{b}\}$.

Teorema: Considere, no espaço $\mathbb{R}^n$, os planos $M=\{P+s\vec{a}+t\vec{b}\}$ e $M_1=\{Q+u\vec{c}+v\vec{d}\}$. Os planos dados dizem-se *estritamente paralelos*, se e só se os *subespaços gerados* por $\{\vec{a},\vec{b}\}$ e por $\{\vec{c},\vec{d}\}$ forem *iguais* e $Q\notin M$, isto é,

$$M \parallel M_1 \;\Leftrightarrow\; L(\vec{a},\vec{b})=L(\vec{c},\vec{d}) \;\wedge\; Q\notin M$$

Propriedades

Definição: **vector paralelo a um plano**
No espaço $\mathbb{R}^n$, um vector $\vec{v}$ diz-se *paralelo ao plano* $M = \{P + s\vec{a} + t\vec{b}\}$, se o vector $\vec{v}$ é gerado por $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, isto é, $\vec{v} \in L(\vec{a}, \vec{b})$.

Teorema: Sejam *P*, *Q* e *R* três pontos distintos e *não colineares* do espaço $\mathbb{R}^n$. Então, existe um e um só plano que *passa em P, Q e R*; é o caso, por exemplo, do plano que *passa em P e é gerado pelos vectores* $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ e $\overrightarrow{PR} = R - P$, isto é,

$$L(P; \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n \ : \ X = P + s(Q-P) + t(R-P) \ , \ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

Teorema: Os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ são *linearmente dependentes*, se e só se estão no mesmo plano que passa na origem.

Representação analítica do plano – $\mathbb{R}^n$

- No espaço $\mathbb{R}^n$, seja o plano

$$M = L(P;\vec{a},\vec{b}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n \ : \ X = P + s\vec{a} + t\vec{b} \ , \ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

- Neste caso, é possível associar ao plano $M = L(P;\vec{a},\vec{b})$ a *função vectorial a duas variáveis reais*

$$X(s,t) = P + s\vec{a} + t\vec{b}$$

Trata-se de uma *função injectiva*, tal que:

Domínio: $\mathbb{R}^2$

Conjunto de Chegada: $\mathbb{R}^n$

Contradomínio: $M = L(P;\vec{a},\vec{b})$

- A expressão

$$X(s,t) = P + s\vec{a} + t\vec{b} \ , \ (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

é designada por **equação vectorial** do plano $M = L(P;\vec{a},\vec{b})$.

Representação analítica do plano – $\mathbb{R}^3$

- Substituindo na *equação vectorial* do plano $M = L(P;\vec{a},\vec{b})$

$$X(s,t) = P + s\vec{a} + t\vec{b}$$

as coordenadas dos vectores

$$X = (x,y,z)\,,\; P = (p_1,p_2,p_3)\,,\; \vec{a} = (a_1,a_2,a_3) \text{ e } \vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$$

obtêm-se as (três) **equações paramétricas** do plano

$$\begin{cases} x = p_1 + sa_1 + tb_1 \\ y = p_2 + sa_2 + tb_2 \\ z = p_3 + sa_3 + tb_3 \end{cases} \quad , \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

- Eliminando os parâmetros reais s e t nas *equações paramétricas*, obtém-se a **equação cartesiana** do plano

$$n_1x + n_2y + n_3z = k$$

que depende unicamente das variáveis cartesianas x, y e z.

- Em relação à *equação cartesiana*, convém notar o seguinte:

i) Se $k = 0$, então o plano *passa* na origem, O;

ii) Se, por exemplo, $n_1 = 0$, então o plano é *paralelo* ao eixo dos xx;

iii) Admitindo que n_1, n_2 e n_3 são diferentes de zero, então

$$\left(k/n_1,0,0\right),\; \left(0,k/n_2,0\right) \text{ e } \left(0,0,k/n_3\right)$$

são, respectivamente, os *pontos de intersecção* do plano com os eixos dos xx, dos yy e dos zz.

Exemplo 2: Sejam os pontos $P=(1,2,1)$, $Q=(0,1,0)$ e $R=(1,1,4)$.

a) Mostre que os três pontos definem um plano, *M*.

b) Determine uma *equação vectorial* para o plano *M*.

c) Determine a *equação cartesiana* para o plano *M*.

Solução:

a) Os vectores $\overrightarrow{PQ}=(-1,-1,-1)$ e $\overrightarrow{PR}=(0,-1,3)$ não são paralelos, logo os três pontos não são colineares, definindo, portanto, um plano.

b) Equação vectorial para o plano *M*:

$$X(s,t)=P+s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PR}\ ,\ (s,t)\in\mathbb{R}^2\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (x,y,z)=(1,2,1)+s(-1,-1,-1)+t(0,-1,3)\ ,\ (s,t)\in\mathbb{R}^2$$

c) Equação cartesiana para o plano *M*:

$$4x-3y-z=-3$$

Vectores normais a planos – $\mathbb{R}^3$

Definição: **vector normal a um plano**

No espaço $\mathbb{R}^3$, seja o plano $M=\{P+s\vec{a}+t\vec{b}\}$. Um vector $\vec{n}\in\mathbb{R}^3$ diz-se *perpendicular ao plano M*, se o vector $\vec{n}$ for *ortogonal* aos *vectores geradores* do plano, $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Além disso, se $\vec{n}\neq\vec{0}$, então $\vec{n}$ chama-se *vector normal ao plano M*.

- Em relação ao *vector normal ao plano M* atrás definido, convém notar o seguinte:

  i) Se $\vec{n}$ é um vector ortogonal aos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, então $\vec{n}$ também será ortogonal a qualquer vector $\vec{v}\in L(\vec{a},\vec{b})$;

  ii) Se $\vec{n}$ é um *vector normal ao plano M*, então qualquer vector $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}$ também será um *vector normal ao plano M*.

Teorema: No espaço $\mathbb{R}^3$, seja o plano $M=\{P+s\vec{a}+t\vec{b}\}$. Verifica-se:

i) O vector $\vec{a}\times\vec{b}$ é um *vector normal ao plano M*;

ii) Se $\vec{n}\in\mathbb{R}^3$ é um *vector normal ao plano M*, então

$$M=\left\{X\in\mathbb{R}^3 \ : \ (X-P)\cdot\vec{n}=0\right\}$$

- A definição atrás apresentada para o plano *M* no espaço $\mathbb{R}^3$, sugere uma forma alternativa para obter a **equação cartesiana** do plano *M*. Substituindo as coordenadas dos vectores

$$X = (x, y, z)\,,\ P = (p_1, p_2, p_3) \text{ e } \vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

na equação

$$(X - P) \cdot \vec{n} = 0 \ \Leftrightarrow\ X \cdot \vec{n} = P \cdot \vec{n}$$

obtém-se

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = k$$

em que

$$k = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 = P \cdot \vec{n}$$

- Sendo $\vec{a} \times \vec{b}$ um *vector normal ao plano* $M = \left\{P + s\vec{a} + t\vec{b}\right\}$, a **equação cartesiana** do plano pode ainda ser obtida a partir do *produto misto*

$$(X - P) \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

Exemplo 3: Considere o plano *M* definido pelos pontos $P = (1,2,1)$, $Q = (0,1,0)$ e $R = (1,1,4)$. Determine:

a) Um *vector normal ao plano M*.

b) A *equação cartesiana* para o plano *M*.

Solução:

a) Seja o *vector perpendicular ao plano M*:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-4,3,1)$$

Um *vector normal ao plano M* será qualquer vector paralelo ao vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. Assim, seja, por exemplo,

$$\vec{n} = -\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (4,-3,-1)$$

b) Equação cartesiana para o plano *M*:

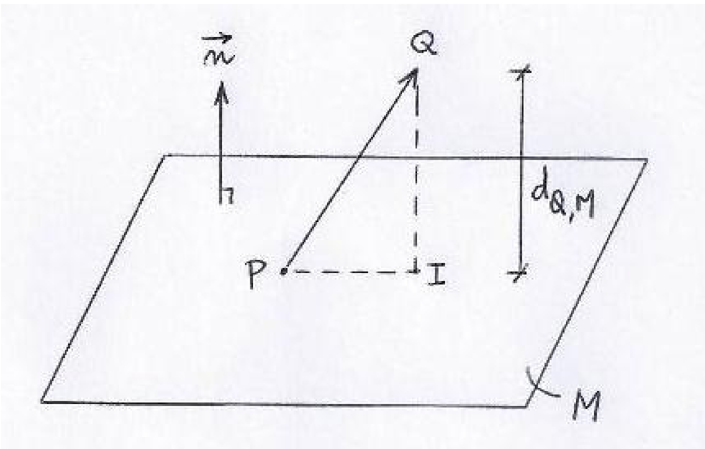
$$(X - P) \cdot \vec{n} = 0 \;\Leftrightarrow\; X \cdot \vec{n} = P \cdot \vec{n} \;\Leftrightarrow\; 4x - 3y - z = -3$$

Distância de um ponto a um plano – $\mathbb{R}^3$

Teorema: Sejam o plano $M = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ : \ (X - P) \cdot \vec{n} = 0 \right\}$ e o ponto Q. A *distância do ponto Q ao plano M*, designada por $d_{Q,M}$, é dada por

$$d_{Q,M} = \left\| \overrightarrow{IQ} \right\| = \left\| \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{n}} \ \overrightarrow{PQ} \right\| = \frac{\left| \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} \right|}{\|\vec{n}\|}$$

em que I é o ponto do plano M mais próximo do ponto Q.



- A *distância* do plano *M à origem*, *O*, é

$$d_{O,M} = \frac{|P \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$