FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI Data /02/21

Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano 1º Semestre 1º

Nome José Augusto Trigo Barbosa

Espaço reservado para o avaliador

Descritores de desempenho considerados como critérios de correcção da 2ª Prova de Avaliação (01/02/2021).

GRUPO I

1 a)

$$m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$r[m(S)] = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$\dim S(\mathbb{R}^3) = r[m(S)] = 2 < \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow S(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$: S não é sobrejectiva

$\dim N(S) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim S(\mathbb{R}^3) = 1 \Rightarrow N(S) \neq \{(0,0,0)\}$: S não é injectiva

- Cálculo de $N(S)$

$$N(S) = \{\vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : S(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema homogéneo é possível e simplesmente indeterminado, tendo como solução $y = -z \wedge x = z$

$$N(S) = \{\vec{x} = (z, -z, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{\vec{x} = z(1,-1,1) \in \mathbb{R}^3\}$$

Base $N(S) = \{(1,-1,1)\}$

- Cálculo de $S(\mathbb{R}^3)$

$$S(\mathbb{R}^3) = \{\vec{y} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \vec{y} = S(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\begin{cases} x - z = a \\ -x + y + 2z = b \\ 2y + 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ -1 & 1 & 2 & b \\ 0 & 2 & 2 & c \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 2 & 2 & c \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a-2b \end{array}\right]$$

O sistema é possível e simplesmente indeterminado, se e só se $c - 2a - 2b = 0 \Leftrightarrow c = 2a + 2b$

$$S(\mathbb{R}^3) = \{ \vec{y} = (a, b, 2a+2b) \in \mathbb{R}^3 \} = \{ \vec{y} = a(1,0,2) + b(0,1,2) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Base $S(\mathbb{R}^3) = \{ (1,0,2), (0,1,2) \}$

b) • Como S não é injectiva nem sobrejectiva (verificado na alínea anterior), então S não é bijectiva

• Relativamente à função T

$$r[m(T)] = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

$\dim T(\mathbb{R}^3) = r[m(T)] = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ ∴ T é sobrejectiva

$\dim N(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim T(\mathbb{R}^3) = 0 \Rightarrow N(T) = \{(0,0,0)\}$ ∴ T é injectiva

Conclui-se, então, que T é bijectiva.

• Cálculo de T^{-1}

$$m(T^{-1}) = m^{-1}(T) = \frac{1}{|m(T)|} \left[\operatorname{Cof} m(T) \right]^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|m(T)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\operatorname{Cof} m(T) = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Wiv

Designando $\vec{y} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$m(T^{-1}) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} a+b \\ 4a-2b+3c \\ -2a+b \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(a,b,c) \longrightarrow \left(\frac{a+b}{3}, \frac{4a-2b+3c}{3}, \frac{-2a+b}{3} \right)$$

2)

a)

- Se Q é uma base para $N(T)$, então Q é linearmente independente

(1) $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

- Se Q_1 é uma base para $T(V)$, então Q_1 é linearmente independente

(2) $\beta_1 T(\vec{v}_{k+1}) + \beta_2 T(\vec{v}_{k+2}) + \dots + \beta_{n-k} T(\vec{v}_n) = \vec{0}_W \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{n-k} = 0$

- Uma vez que $\dim N(T) = k$ e $\dim T(V) = n-k$, então

$\dim V = \dim N(T) + \dim T(V) = k + n - k = n$

Assim, uma vez que S é constituído por n elementos de V, então S é uma base para V se for linearmente independente

$\gamma_1 \vec{v}_1 + \gamma_2 \vec{v}_2 + \dots + \gamma_k \vec{v}_k + \gamma_{k+1} \vec{v}_{k+1} + \gamma_{k+2} \vec{v}_{k+2} + \dots + \gamma_n \vec{v}_n = \vec{0}_V \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_k = \gamma_{k+1} = \gamma_{k+2} = \dots = \gamma_n = 0$

$\rightarrow$ Aplicando T:

$\gamma_1 T(\vec{v}_1) + \gamma_2 T(\vec{v}_2) + \dots + \gamma_k T(\vec{v}_k) + \gamma_{k+1} T(\vec{v}_{k+1}) + \gamma_{k+2} T(\vec{v}_{k+2}) + \dots +$

$+ \gamma_n T(\vec{v}_n) = T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ (3)

Como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in N(T)$, então

$$T(\vec{v}_1) = T(\vec{v}_2) = \dots = T(\vec{v}_k) = \vec{0}_W$$

e, portanto, na expressão (3) obtém-se

$$\gamma_{k+1} T(\vec{v}_{k+1}) + \gamma_{k+2} T(\vec{v}_{k+2}) + \dots + \gamma_n T(\vec{v}_n) = 0_W$$

isto é, atendendo a (2)

$$\gamma_{k+1} = \gamma_{k+2} = \dots = \gamma_n = 0$$

Substituindo em (3)

$$\gamma_1 \vec{v}_1 + \gamma_2 \vec{v}_2 + \dots + \gamma_k \vec{v}_k = \vec{0}_V$$

isto é, atendendo a (1)

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_k = 0$$

Conclui-se que S é um conjunto linearmente independente.

b) Uma vez que Q é uma base para $N(T)$, então $\dim N(T) = k$ e, portanto,

$$N(T) \neq \{\vec{0}_V\} \Rightarrow T \text{ não é injectiva}$$

Sabendo que

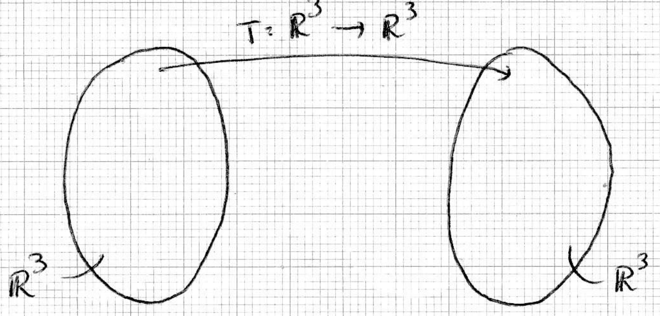
$$\dim T(V) = \dim V - \dim N(T) = n - k$$

então T é sobrejectiva se $n - k = m$ e $m < n$.

Jrmj

GRUPO II

3 a)



$$\begin{tikzcd} \boxed{E} \arrow[r, "m(T)"] \arrow[dr, "m(T)_{E,V}"'] & \boxed{E} \\ & \boxed{V} \arrow[u, bend right, "M_{V\to E}"'] \end{tikzcd}$$

- $m(T)_{E,V} = M^{-1}_{V\to E} \; m(T)$

- Sabendo que $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ e $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

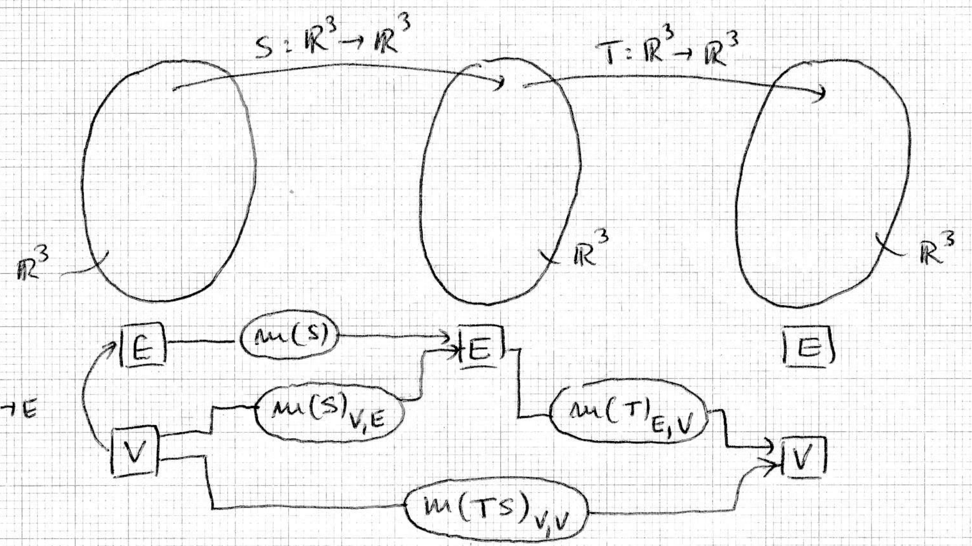
$$M_{V\to E} = E^{-1} V = I V = V$$

$$M^{-1}_{V\to E} = V^{-1} = \frac{1}{|V|}\left[\operatorname{Cof} V\right]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$m(T)_{E,V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{E,V}$$

b)



- $m(TS)_{V,V} = m(T)_{E,V} \; m(S)_{V,E}$

- $m(S)_{V,E} = m(S) \; M_{V\to E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{V,E}$

- $m(-TS)_{V,V} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -5 \\ -5 & -3 & 2 \end{bmatrix}_{V,V}$

GRUPO III

4)

a)

$$|C| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 2\beta & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & & & \uparrow \\ C_1-C_2 & & & C_4+C_2 \end{array} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha-1 & 1 & \alpha & 1 \\ \beta & 0 & 2\beta & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (1)\,(-1)^3 \begin{array}{c} \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha & 1 \\ \beta & 2\beta & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & C_2-2C_1 & \end{array} \end{array} = -\begin{vmatrix} \alpha-1 & 2-\alpha & 1 \\ \beta & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -(2-\alpha)(-1)^3 \begin{vmatrix} \beta & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (2-\alpha)(5\beta-1)$$

A matriz C é não singular, se e só se $|C| \neq 0$, ou seja,

$$\alpha \neq 2 \wedge \beta \neq 1/5$$

b)

- OP1 : da aplicação desta operação obtém-se um determinante que é igual a $(-5)^2|A| = 25|A|$
- OP2 : da aplicação desta operação obtém-se um determinante que é igual a $-|A|$
- OP3 : da aplicação desta operação obtém-se um determinante que é igual a $2|A|$

Então $|B| = -2(25)|A| = -50|A|$

GRUPO IV

5)

a)

Seja o vector próprio $\vec{x} = (1,2,-2) \in E(\alpha)$

$$[\alpha I - m(T)] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha-1 & 4 & 4 \\ -8 & \alpha+11 & 8 \\ 8 & -8 & \alpha-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-1+8-8=0 \\ -8+2\alpha+22-16=0 \\ 8-16-2\alpha+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \alpha=1 \\ \alpha=1 \end{cases} \quad \text{Valor próprio } \lambda_1 = \alpha = 1$$

- Sabendo que $tr(m(T)) = -5$

$$|m(T)| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 21 & 24 \\ -8 & -24 & -27 \end{vmatrix} = (1)(-1)^2 \begin{vmatrix} 21 & 24 \\ -24 & -27 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -8 & -9 \end{vmatrix} = 9\,[-63+64] = 9$$

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = -5 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2+\lambda_3 = -6 \\ \lambda_2\lambda_3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$$

- Espaço próprio para $\lambda_1 = 1 = \alpha$

$E(1) = \{\vec{x} = (x, 2x, -2x) \in \mathbb{R}^3\} = \{\vec{x} = x(1,2,-2) \in \mathbb{R}^3\}$

Base $E(1) = \{(1,2,-2)\}$ e $\dim E(1) = 1$

- Espaço próprio para $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$

$$[-3I - m(T)] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 4 & 0 \\ -8 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & -8 & -8 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x = y + z$$

$E(-3) = \{\vec{x} = (y+z, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{\vec{x} = y(1,1,0) + z(1,0,1) \in \mathbb{R}^3\}$

Base $E(-3) = \{(1,1,0), (1,0,1)\}$ e $\dim E(-3) = 2$

b) O vector $(\delta, 2, -2) \in E(1)$, se $\delta = 1$.
Neste caso o vector $(2,1,1) \in E(-3)$

- Base $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ em que

$\vec{u}_1 = (1,2,-2) \in E(1)$

$\vec{u}_2 = (2,1,1) \in E(-3)$

O vector $\vec{u}_3$ deverá pertencer a $E(-3)$ e não pode ser colinear com $\vec{u}_2$; seja, por exemplo,

$\vec{u}_3 = (1,1,0) \in E(-3)$

- Determinação da matriz $m(T)_{U,E}$

Uma vez que

$$T(\vec{u}_1) = T(1,2,-2) = (1)(1,2,-2) = (1,2,-2)$$

$$T(\vec{u}_2) = T(2,1,1) = (-3)(2,1,1) = (-6,-3,-3)$$

$$T(\vec{u}_3) = T(1,1,0) = (-3)(1,1,0) = (-3,-3,0)$$

então

$$m(T)_{U,E} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{U,E}$$

- Determinação da matriz $m(T)_{U,U}$

Uma vez que

$$T(\vec{u}_1) = (1)(1,2,-2) = (1,0,0)_U$$

$$T(\vec{u}_2) = (-3)(2,1,1) = (0,-3,0)_U$$

$$T(\vec{u}_3) = (-3)(1,1,0) = (0,0,-3)_U$$

então

$$m(T)_{U,U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{U,U}$$

Wij