Álgebra Linear e Geometria Analítica

EGI+EIC

Teste – ano lectivo 2005/2006 – 19 de Novembro de 2005

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia – Guimarães – Universidade do Minho

Curso: Nome: Número: Classificação:

A prova tem a duração de 60 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. Durante a realização da prova os telemóveis devem estar desligados e só se pode abandonar a sala passados 20 minutos do seu início. A prova é constituído por três grupos e termina com a palavra "Fim". No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 200.

Grupo I — Indique, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas usando para tal os caracteres "V" ou "F", respectivamente. Cotações — resposta certa: 10; resposta em branco: 0; resposta errada: -10, sendo 0 é cotação mínima neste grupo.

I.1 ☐ No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, tem-se que $\langle(2,2,2)\rangle = \langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle$.

I.2 ☐ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz hermítica.

I.3 ☐ Sejam A e B matrizes diagonais da mesma ordem. Então, AB é uma matriz diagonal.

I.4 ☐ $\{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

I.5 ☐ Seja $U = \langle(1,0),(0,1)\rangle$. Então, $\dim(U) = 2$.

I.6 ☐ Seja C um conjunto gerador de $\mathbb{R}^n$. Então, C tem no mínimo n elementos.

I.7 ☐ Seja A uma matriz ortogonal. Então, A é uma matriz simétrica.

I.8 ☐ Seja A uma matriz simétrica. Então, A é uma matriz ortogonal.

Grupo II — Complete, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, as seguintes frases de modo a obter proposições verdadeiras. Cotações — resposta certa: 10; resposta em branco ou errada: 0.

II.1 Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido das operações $(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ e $\alpha \odot (x_1,x_2) =$ ☐. Então, o axioma $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x,y \in \mathbb{R}^2 : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$ não é válido.

II.2 A matriz de ordem 2 dada por $A =$ ☐ é ortogonal.

II.3 Diz-se que $X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz tridiagonal se $|i-j| > 1 \Rightarrow x_{ij} = 0$. Então, a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $A =$ $\boxed{}$ é uma matriz tridiagonal mas não é diagonal.

II.4 No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, o conjunto de vectores $\{(1,2),(\alpha,-1)\}$ é linearmente independente se e só se $\alpha \in$ $\boxed{}$.

Grupo III — Responda, nas folhas que lhe foram distribuídas e por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar, bem como as respectivas justificações. Cotações: 40+40.

III.1 Considere as matrizes $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $b_{ij} = j$, e $u = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Efectue as seguintes operações:

(a) A^2B.

(b) $B^T u u^T B$.

III.2 Indique quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^3$:

(a) $A = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$.

(b) $B = \{(1,1,0),(0,2,1)\}$.

(c) $C = \{(1,1,0),(0,2,0),(0,0,0)\}$.

(d) $D = \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\}$.

Fim.