Determinante de uma Matriz Diagonal por Blocos

Definição [2.32]: Matriz diagonal por blocos
A matriz quadrada $\boldsymbol{A}$, de ordem n, diz-se uma *matriz diagonal por blocos*, se apresentar a forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O}_{12} & \cdots & \boldsymbol{O}_{1p} \\ \boldsymbol{O}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O}_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O}_{p1} & \boldsymbol{O}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pp} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}, \ldots, \boldsymbol{A}_{pp})$$

onde as submatrizes:

i) $\boldsymbol{A}_{ii}$ (i=1,2,…,p) são *matrizes quadradas*;

ii) $\boldsymbol{O}_{kl}$, $k \neq l$ (k,l=1,2,…,p) são *matrizes nulas*.

Teorema [3.14]: O *determinante* da *matriz diagonal por blocos*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O}_{12} & \cdots & \boldsymbol{O}_{1p} \\ \boldsymbol{O}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O}_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O}_{p1} & \boldsymbol{O}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pp} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}, \ldots, \boldsymbol{A}_{pp})$$

é dado por

$$|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{p} |\boldsymbol{A}_{ii}|$$

Exemplo 25 [3.42]: O determinante da *matriz diagonal por blocos*

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pode ser escrito sob a forma

$$|\boldsymbol{T}| = \prod_{i=1}^{3} |\boldsymbol{T}_{ii}| = |\boldsymbol{T}_{11}||\boldsymbol{T}_{22}||\boldsymbol{T}_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \left| -2 \right| \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sabendo que

$$|\boldsymbol{T}_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \qquad |\boldsymbol{T}_{22}| = \left| -2 \right| = -2$$

$$|\boldsymbol{T}_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

obtém-se

$$|\boldsymbol{T}| = |\boldsymbol{T}_{11}||\boldsymbol{T}_{22}||\boldsymbol{T}_{33}| = 4 \times (-2) \times (-4) = 32$$

Propriedades

Teorema [3.4]: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω, e $k \in \Omega$. Então

$$|k\boldsymbol{A}| = k^n\,|\boldsymbol{A}|$$

Teorema [3.5]: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ matrizes quadradas de ordem n, ambas num mesmo corpo Ω. Então

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

- Recorrendo à Propriedade 4 dos determinantes, a igualdade anterior pode ser reescrita sob qualquer uma das seguintes formas:

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$$

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|$$

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}|$$

Teorema [3.6]: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n, então:

a) O determinante de $\boldsymbol{A}$ é nulo, se e só se $r(\boldsymbol{A}) < n$.

b) O determinante de $\boldsymbol{A}$ é não nulo, se e só se $r(\boldsymbol{A}) = n$.

Teorema [3.7]: Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n é *não singular* (ou *regular*), isto é, possui matriz inversa, se e só se $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

Teorema [3.8]: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n e não singular, então

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$$

Exemplo 26 [3.35]: Sejam as matrizes

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ -3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adoptando um desenvolvimento laplaceano ao longo da 2ª coluna:

$$|\boldsymbol{F}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$|\boldsymbol{F}^{-1}| = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4^3} \times (-4) \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} = \frac{1}{|\boldsymbol{F}|}$$

Teorema [3.9]: Se $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz unitária* de ordem n, então o seu determinante tem valor absoluto (módulo) igual à unidade.

Exemplo 27 [3.36]: Determine o determinante das seguintes *matrizes unitárias*

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$$

Solução:

Adoptando a *regra dos produtos cruzados*:

$$|\boldsymbol{B}| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(i^2 - 1\right) = -1 \text{ e } |-1| = 1$$

$$|\boldsymbol{U}| = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\left((1+i)^2 - (1-i)^2\right) = \frac{4i}{4} = i$$

Verifica-se então

$$|-1| = 1 \text{ e } |i| = 1$$

Teorema [3.9]: Se $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz ortogonal* de ordem n, então o seu determinante tomará sempre os valores $(+1)$ ou (-1).

Exemplo 28 [3.36]: Obtenha o determinante das *matrizes ortogonais*

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

Adoptando um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da 2ª coluna:

$$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = +1$$

Adoptando a *regra dos produtos cruzados*:

$$|\boldsymbol{H}| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Inversão de Matrizes com Determinantes

- Pretende-se apresentar um novo processo de inversão de matrizes, que será derivado a partir da noção de determinante.

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, tal que $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, isto é, a matriz é não singular.

Definição [3.8]: Matriz dos cofactores da matriz *A*
Chama-se **matriz dos cofactores** da matriz $\boldsymbol{A}$, representando-se por $\boldsymbol{Cof\ A}$, a matriz quadrada de ordem n que se obtém, a partir de $\boldsymbol{A}$, substituindo cada um dos seus elementos a_{ij} pelos respectivos cofactores (complementos algébricos), isto é,

$$\boldsymbol{Cof\ A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{A}_{33} & \cdots & \boldsymbol{A}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n1} & \boldsymbol{A}_{n2} & \boldsymbol{A}_{n3} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

- Esta matriz é, ainda, designada por **matriz dos complementos algébricos**.

Teorema [3.10]: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n e não singular, então a sua matriz inversa é dada por

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{Cof\ A})^{\mathrm{T}}$$

Demonstração:

Seja a matriz $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Cof\ A})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{31} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{32} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{33} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \boldsymbol{A}_{3n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\boldsymbol{A}_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\boldsymbol{A}_{nj} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\boldsymbol{A}_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\boldsymbol{A}_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\boldsymbol{A}_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\boldsymbol{A}_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\boldsymbol{A}_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\boldsymbol{A}_{nj} \end{bmatrix}$$

Atendendo ao **teorema de Laplace**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{A}_{kj} = |\boldsymbol{A}| \quad \text{se} \quad i = k$$

Atendendo ao **corolário do teorema de Laplace**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{A}_{kj} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq k$$

Então

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |\boldsymbol{A}| \end{bmatrix} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$$

ou seja, notando que $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,

$$\boldsymbol{A}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\left(\boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}\right] = \boldsymbol{I}$$

Multiplicando à esquerda, ambos os membros da expressão anterior, pela matriz $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\left(\boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}\right] = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\left(\boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}$$

- Se a matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ for de ordem n:

  i) O número total de cofactores a determinar é n^2;

  ii) Cada cofactor exige o cálculo de um determinante de ordem $n-1$.

  iii) Este método é pouco adequado para ser usado, sem o recurso ao computador, sempre que a ordem da matriz for superior a 3.

Exemplo 29 [3.38]: Mostre que a matriz

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

é não singular e determine a sua *matriz inversa*.

Solução:

$$|\boldsymbol{F}| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{F}| = \begin{vmatrix} -11 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ \leftarrow L_2 - L_3 \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{F}| = (-1)\times(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

A matriz ***F*** é **não singular**.

$$\boldsymbol{Cof\ F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{11} & \boldsymbol{F}_{12} & \boldsymbol{F}_{13} \\ \boldsymbol{F}_{21} & \boldsymbol{F}_{22} & \boldsymbol{F}_{23} \\ \boldsymbol{F}_{31} & \boldsymbol{F}_{32} & \boldsymbol{F}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & 6 \\ -3 & -24 & -11 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{Cof\ F})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & 6 \\ -3 & -24 & -11 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 16 & -24 & -4 \\ 6 & -11 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{F}|}(\boldsymbol{Cof\ F})^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 16 & -24 & -4 \\ 6 & -11 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -16 & 24 & 4 \\ -6 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

Confirmação do resultado encontrado

$$\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -16 & 24 & 4 \\ -6 & 11 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 30 [3.38]: Mostre que a matriz

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -13 \end{bmatrix}$$

é singular, não admitindo matriz inversa.

Solução:

$$|\boldsymbol{G}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -13 \end{vmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{G}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & -11 & -22 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \\ C_2 - 3C_1 & \\ & \uparrow \\ & C_3 - 3C_1 \end{array}$$