Folha Nº ....../......

U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano ...... Semestre ......

Nome José Augusto Trigo Barbosa

Espaço reservado para o avaliador

Notas sobre a resolução da 2ª Prova de Avaliação de 2019/2020

1 a)

$$m(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r[m(R)] = 2 = \dim R(\mathbb{R}^2)$. Dado que $\dim R(\mathbb{R}^2) < \dim \mathbb{R}^3$, então $R(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ e R não é sobrejectiva

Sabendo que $\dim N(R) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim R(\mathbb{R}^2) = 2 - 2 = 0$, então

$$N(R) = \{(0,0)\} \text{ e Base } N(R) = \{\,\}$$

pelo que R é injectiva.

Cálculo de $R(\mathbb{R}^2)$:

$$R(\mathbb{R}^2) = \{\bar{y} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \bar{y} = R(\bar{x}),\ \bar{x} \in \mathbb{R}^2\}$$

$$R(x,y) = (x+y,\ x+2y,\ -2x-y) = (a,b,c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \\ -2 & -1 & c \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & c+2a \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ \hline 0 & 0 & c-b+3a \end{array}\right]$$

O sistema de equações é possível e determinado ($\bar{y} \in R(\mathbb{R}^2)$), se e só se $c - b + 3a = 0 \Leftrightarrow c = -3a + b$

$$R(\mathbb{R}^2) = \{\bar{y} = (a, b, -3a+b) \in \mathbb{R}^3\} = \{\bar{y} = a(1,0,-3) + b(0,1,1) \in \mathbb{R}^3\}$$

Base $R(\mathbb{R}^2) = \{(1,0,-3),(0,1,1)\}$.

b) Atendendo ao resultado obtido na alínea a), sabe-se que $N(R) = \{(0,0)\}$ e R é injectiva

função S:

$$m(S) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r[m(S)] = \dim S(\mathbb{R}^3) = 2$

Então $\dim N(S) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim S(\mathbb{R}^3) = 3 - 2 = 1$

Como $N(S) \neq \{(0,0,0)\}$ então S não é injectiva.

função T:

$$m(T) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$r[m(T)] = 3 = \dim T(\mathbb{R}^3)$

Então $\dim N(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim T(\mathbb{R}^3) = 3 - 3 = 0$

Como $N(T) = \{(0,0,0)\}$ então T é injectiva.

c) Uma função é bijectiva se for injectiva e sobrejectiva.

Atendendo ao resultado obtido na alínea a), sabe-se que $R(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ e R não é sobrejectiva; logo R não é bijectiva.

Atendendo ao resultado obtido na alínea b), sabe-se que $\dim S(\mathbb{R}^3) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$, pelo que $S(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$ e S não é sobrejectiva; logo S não é bijectiva.

Atendendo ao resultado obtido na alínea b), sabe-se que $N(T) = \{(0,0,0)\}$ e T é injectiva. Por outro lado, sabendo que $\dim T(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ então $T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ e T é sobrejectiva; logo T é bijectiva.

Notando que $m(T^{-1}) = m^{-1}(T)$, então

$$m(T^{-1}) = \frac{1}{|m(T)|} \left[\operatorname{cof} m(T) \right]^T$$

$$|m(T)| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\operatorname{cof} m(T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$m(T^{-1}) = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(a,b,c) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2a + 2c \\ a + b \\ -a - b + 2c \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(a,b,c) \longrightarrow \left(-a + c, \frac{a+b}{2}, \frac{-a-b+2c}{2} \right)$$

Folha Nº ____ / ____

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso ______ Data __/__/__

Disciplina ______ Ano ______ Semestre ______

Nome ______

Espaço reservado para o avaliador

3 a)

Designando $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$ e $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

então $M_{U \to E_3} = E_3^{-1} U = I_3 U = U$

Por outro lado, $M^{-1}_{U \to E_3} = U^{-1} = \frac{1}{|U|} [\operatorname{cof} U]^T$

$$|U| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\operatorname{Cof} U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}_{U \to E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$m(T)_{E_3, U} = M^{-1}_{U \to E_3} \, m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{E_3, U}$$

Designando $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ então

$$M_{B \to E_2} = E_2^{-1} B = I_2 B = B$$

Obtém-se, portanto,

$$m(R)_{B,E_3} = m(R)\, M_{B \to E_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}_{B,E_3}$$

b)

$$m(TSR)_{B,U} = m(T)_{E_3,U}\ m(S)_{E_3}\ m(R)_{B,E_3} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -1 & -5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -1 & -29 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}_{B,U}$$

Nuj

4) a) A matriz C é não singular se e só se $|C| \neq 0$.

$$|C| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & \beta-1 & 1 \\ 2 & 1 & \beta+1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \beta & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_1 \\ \\ \\ \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta-1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & \beta+1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \beta & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ \\ \end{array} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta-1 & 1 \\ 0 & 1 & 5-5\beta & -1 \\ 0 & 1 & 3-\beta & -1 \\ 0 & \alpha-1 & \beta & 2 \end{vmatrix} = -(1)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 5-5\beta & -1 \\ 1 & 3-\beta & -1 \\ \alpha-1 & \beta & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 5-5\beta & -1 \\ 0 & 4\beta-2 & 0 \\ \alpha+1 & 10-9\beta & 0 \end{vmatrix} = -(-1)(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 4\beta-2 \\ \alpha+1 & 10-9\beta \end{vmatrix} =$$

$$= -\big(0 - (\alpha+1)(4\beta-2)\big) = (\alpha+1)(4\beta-2)$$

$|C| \neq 0$ se e só se $\alpha \neq -1 \wedge \beta \neq 1/2$

b) A operação OP1 altera o valor do determinante da matriz A; o determinante da nova matriz será igual ao $|A|$ multiplicado por $(-2)^n$.
A operação OP2 altera o valor do determinante da matriz anterior; o determinante da nova matriz será igual ao determinante anterior multiplicado por (-4).
A operação OP3 não tem qualquer consequência sobre o valor do determinante.
Assim

$$|B| = (-4)(-2)^n |A|$$

W

5) a) Seja $(1,0,-2)$ um vector próprio associado ao espaço próprio $E(\alpha)$. Então

$$[\alpha I - m(T)]\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha-a & -8 & -b\\ -8 & \alpha-a & -b\\ -b & -b & \alpha-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha-a+2b\\ -8+2b\\ -b-2\alpha+8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-a+2b=0\\ -8+2b=0\\ -b-2\alpha+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=10\\ b=4\\ \alpha=2\end{cases}$$

Então:

$$m(T) = \begin{bmatrix}10 & 8 & 4\\ 8 & 10 & 4\\ 4 & 4 & 4\end{bmatrix} \quad e \quad \lambda_1 = \alpha = 2$$

Cálculo dos restantes valores próprios:

$$\begin{cases}tr[m(T)] = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ |m(T)| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_2+\lambda_3 = 22\\ \lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{2}|m(T)|\end{cases}$$

$$|m(T)| = \begin{vmatrix}10 & 8 & 4\\ 8 & 10 & 4\\ 4 & 4 & 4\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \leftarrow L_2-L_1\\ \leftarrow L_3-L_1\end{matrix} = \begin{vmatrix}10 & 8 & 4\\ -2 & 2 & 0\\ -6 & -4 & 0\end{vmatrix} = 4(-1)^4\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -6 & -4\end{vmatrix} =$$

$$= 4[8+12] = 80$$

$$\begin{cases}\lambda_2+\lambda_3 = 22\\ \lambda_2\lambda_3 = 40\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_2 = 2\\ \lambda_3 = 20\end{cases}$$

Valores próprios: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 20$

Cálculo dos espaços próprios:

Como $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$ então:

$E(2) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+2y+z=0\} = \{(x,y,-2x-2y)\in\mathbb{R}^3\} =$

$= \{x(1,0,-2)+y(0,1,-2)\}$

pelo que

Folha Nº ____ / ____

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso ____ Data ____/____/____

Disciplina ____ Ano ____ Semestre ____

Nome ____

Espaço reservado para o avaliador

Base $E(2) = \{(1,0,-2), (0,1,-2)\}$ e $\dim E(2) = 2$

Seja $\lambda_3 = 20$

$$[20I - m(T)]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -8 & -4 & 0 \\ -8 & 10 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 16 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 9 & -18 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2z \wedge x = 2z$$

$$E(20) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 2z\} = \{(2z, 2z, z) \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= \{z(2,2,1) \in \mathbb{R}^3\}$$

pelo que Base $E(20) = \{(2,2,1)\}$ e $\dim E(20) = 1$

b) Considere-se o conjunto formado pelos três vectores próprios

$U = \text{Base } E(20) \cup \text{Base } E(2) = \{(2,2,1), (1,0,-2), (0,1,-2)\}$.

O conjunto U é um conjunto de três vectores próprios linearmente independentes, já que resulta da reunião de bases de vectores próprios associados a valores próprios distintos, logo U é uma base de vectores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$.

Nestas condições a matriz $m(T)$ é diagonalizável.

Wm

Sabendo que

$$T(2,2,1) = 20(2,2,1) = (40,40,20)$$
$$T(1,0,-2) = 2(1,0,-2) = (2,0,-4)$$
$$T(0,1,-2) = 2(0,1,-2) = (0,2,-4)$$

então

$$m(T)_{U,E} = \begin{bmatrix} 40 & 2 & 0 \\ 40 & 0 & 2 \\ 20 & -4 & -4 \end{bmatrix}_{U,E}$$

Sabendo que

$$T(2,2,1) = 20(2,2,1) = (20,0,0)_U$$
$$T(1,0,-2) = 2(1,0,-2) = (0,2,0)_U$$
$$T(0,1,-2) = 2(0,1,-2) = (0,0,2)_U$$

então

$$m(T)_{U,U} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{U,U}$$

c) Considerando

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{então}$$

$$M_{B\to E} = E^{-1} B = I B = B$$

$$M^{-1}_{B\to E} = \frac{1}{|B|} [\text{Cof } B]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$m(T)_{B,B} = M^{-1}_{B\to E}\, m(T)\, M_{B\to E} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 8 & 4 \\ 8 & 10 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 & 10 & 2 \\ 40 & 8 & 0 \\ 20 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 80 & 16 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{B,B}$$

Papel 100% Reciclado

A matriz $m(T)_{B,B}$ é semelhante à matriz $m(T)_{U,U}$ já que existe uma matriz P não singular, tal que

$$m(T)_{B,B} = P^{-1}\, m(T)_{U,U}\, P$$

A matriz P representa a matriz de mudança de base de B para U, isto é,

$$M_{B \to U} = U^{-1} B$$

em que

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Wnj