

32)

c)

$$C = \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 3 & 1 & -4 \\ 0 & \textcircled{-8} & -6 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_2/2 \\ \leftarrow L_3/5 \end{matrix} \Rightarrow$$

$r(C) \geq 1$ $r(C) \geq 2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 3 & 1 & -4 \\ 0 & \textcircled{-4} & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \leftarrow 4L_3 + L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 3 & 1 & -4 \\ 0 & \textcircled{-4} & -3 & 5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow r(C) = 3$$

$r(C) \geq 2$

f)

$$F = \begin{bmatrix} \textcircled{3} & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 2 & 0 & -6 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_2/2 \\ \leftarrow L_4/3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{3} & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$r(F) \geq 1$ $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ C_2 & C_1 \end{matrix}$ $r(F) \geq 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_2 - L_1 \\ \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ \leftarrow L_4 + 2L_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 2 & -8 \\ 0 & 7 & 1 & -4 \end{bmatrix} \leftarrow L_3/2 \Rightarrow$$

$r(F) \geq 1$ $r(F) \geq 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \\ \leftarrow L_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 3 & 0 & -3 \\ 0 & \textcircled{7} & 1 & -4 \\ 0 & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow L_3 - L_2 \Rightarrow$$

$r(F) \geq 1$ $r(F) \geq 2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 3 & 0 & -3 \\ 0 & \textcircled{7} & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(F) = 2$$

33)

g)

$$G = \begin{bmatrix} g & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2f \\ f & 0 & f \\ g & -1 & f \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_4 \\ \\ \\ \leftarrow L_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} g & -1 & f \\ 1 & -2 & 2f \\ f & 0 & f \\ g & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{-1} & f & g \\ -2 & 2f & 1 \\ 0 & f & f \\ 0 & 1 & g \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{matrix}$ $r(G) \geq 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{-1} & f & g \\ 0 & 0 & 1-2g \\ 0 & f & f \\ 0 & 1 & g \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_4 \\ \\ \leftarrow L_2 \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{-1} & f & g \\ 0 & \textcircled{1} & g \\ 0 & f & f \\ 0 & 0 & 1-2g \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow L_3 - fL_2 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$r(G) \geq 1$ $r(G) \geq 2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{-1} & f & g \\ 0 & \textcircled{1} & g \\ 0 & 0 & f(1-g) \\ 0 & 0 & 1-2g \end{bmatrix}$$

$r(G) \geq 2$

i) $r(G) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2g = 0 \\ f(1-g) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g = 1/2 \\ f = 0 \end{cases}$

ii) $r(G) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2g \neq 0 \\ f \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} 1-2g = 0 \\ f(1-g) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g \neq 1/2 \\ f \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} g = 1/2 \\ f \neq 0 \end{cases}$

Concluindo:

$r(G) = 2 \Leftrightarrow g = 1/2 \wedge f = 0$

$r(G) = 3 \Leftrightarrow (g \neq 1/2 \wedge f \in \mathbb{R}) \vee (g = 1/2 \wedge f \neq 0)$

33)

h

$$H = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & h \\ -1 & 4 & g & 5 \\ 2 & 1 & g & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_2 + L_1 \\ \leftarrow L_3 + L_1 \\ \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{3} & 1 & h+1 \\ 0 & 6 & g+1 & 6 \\ 0 & -3 & g-2 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \Rightarrow$$

$$r(H) \geq 1$$

$$r(H) \geq 2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{3} & 1 & h+1 \\ 0 & 0 & g-1 & -2h+4 \\ 0 & 0 & g-1 & h-2 \end{bmatrix} \leftarrow L_4 - L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{3} & 1 & h+1 \\ 0 & 0 & g-1 & -2h+4 \\ 0 & 0 & 0 & 3h-6 \end{bmatrix}$$

$$r(H) \geq 2$$

$$r(H) \geq 2$$

$$i) \quad r(H) = 4 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} g-1 \neq 0 \\ 3h-6 \neq 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} g \neq 1 \\ h \neq 2 \end{cases}$$

$$ii) \quad r(H) = 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} g-1 = 0 \\ -2h+4 = 0 \\ 3h-6 = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} g = 1 \\ h = 2 \end{cases}$$

$$iii) \quad r(H) = 3 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} g-1 \neq 0 \\ 3h-6 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g-1 = 0 \\ 3h-6 \neq 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} g \neq 1 \\ h = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} g = 1 \\ h \neq 2 \end{cases}$$

Concluindo :

$$r(H) = 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad g = 1 \wedge h = 2$$

$$r(H) = 4 \quad (\Leftrightarrow) \quad g \neq 1 \wedge h \neq 2$$

$$r(H) = 3 \quad (\Leftrightarrow) \quad (g \neq 1 \wedge h = 2) \vee (g = 1 \wedge h \neq 2)$$