

Teste 1

1. [3 valores] Considere a função real definida em \mathbb{R}^2 por

$$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 + 1.$$

- (a) Calcule o valor de f nos pontos $(2, 1)$ e $(-2, 1)$.
(b) Dada uma constante $k \geq 1$, chama-se *curva de nível* de valor k de f ao subconjunto

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\}.$$

Represente as curvas de nível de valores $k = 1, 5, 10$.

- (c) Esboce o gráfico de f .

2. [4 valores] Cada uma das afirmações seguintes é *verdadeira*. Justifique.

- (a) O limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{y^3 + x^2}$ não existe.

- (b) A função f definida em \mathbb{R}^2 por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)y^2}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua em \mathbb{R}^2 .

- (c) A interseção da superfície $z = 2y^2 + x$ com o plano $x = 1$ é uma parábola. O declive da reta tangente a esta parábola no ponto $(1, -1, 3)$ é negativo.
(d) A taxa de variação de $z = x^2y + 2y^2x$ na direção do eixo dos xx é nula para os pontos da reta $x = -y$.

3. [1.5 valores] Mostre que qualquer função da forma

$$z(x, t) = x + at + e^{x-at}, \quad a \in \mathbb{R},$$

é solução da equação da onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

onde a é a velocidade de propagação da onda.

4. [1.5 valores] Seja $z = g(x, y)$ com $x = s + t$ e $y = s - t$. Use a regra de derivação da função composta para mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2.$$

(Continua)

5. [2 valores] Use diferenciais para obter uma aproximação da variação do valor de

$$f(x, y, z) = x^2 y^3 (z + 1)^4$$

quando (x, y, z) varia de $(1, 1, 0)$ para $(1.05, 0.9, 0.01)$.

6. [4 valores] Suponha que o potencial elétrico V no ponto (x, y, z) de uma certa região do espaço é dado por

$$V(x, y, z) = 2x^2 - 3xy + xyz.$$

- (a) Determine o campo elétrico de V no ponto (x, y, z) sabendo que é definido por

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla}V(x, y, z).$$

- (b) Determine a taxa de variação de V no ponto $P = (2, 1, 0)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- (c) Qual a direção segundo a qual a taxa de variação de V em P é mínima? Qual o valor dessa taxa?

7. [3 valores] Considere a superfície de equação

$$y^2 z e^x - \sin(xyz) = 1.$$

- (a) Determine o plano tangente à superfície no ponto $(0, 1, 1)$.

- (b) Sabendo que a equação define implicitamente z como função de x e y numa vizinhança do ponto $(0, 1, 1)$, calcule $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1)$.

8. [1 valor] Se $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$, com f e g diferenciáveis, mostre que

$$\vec{\nabla} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \vec{\nabla} u - u \vec{\nabla} v}{v^2}, \quad v \neq 0.$$