Álgebra Linear e Geometria Analítica para Engenharia

Carolina Ribeiro e Luís Ferrás

Departamento de Matemática (DMAT), Universidade do Minho

8 de outubro de 2021

Notes

Table of contents

Notes

Definição e notação de matriz

Uma **matriz** A, do tipo $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn elementos (números ou expressões) dispostos em m linhas e n colunas, e representa-se por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente:

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n}} = [a_{ij}]_{m\times n}.$$

$(A)_{ij} = a_{ij} \to$ elemento de A situado na linha i e na coluna j
$\to$ entrada (i,j) da matriz A

Notes

Definição e notação de matriz

A linha i de A é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e a coluna j é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notes

Definição e notação de matriz

Exemplo 1

- A matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix}$$
é do tipo 2×3, tendo-se, por exemplo, $a_{11} = 1$, $a_{22} = \sqrt{2}$ e $a_{23} = \pi$.
A 1ª linha e a 2ª coluna de A são $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$, resp..
- A matriz
$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+3i \\ 0 \end{bmatrix}$$
é do tipo 3×1, tendo-se, por exemplo, $b_{11} = 1$ e $b_{21} = 2+3i$.

Notes

Definição e notação de matriz

Notação. O conjunto de todas as matrizes reais (complexas) de m linhas e n colunas é denotado por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$).

Exemplo 2

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$,

$E = \begin{bmatrix} 3 & 4+2i & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$, $F = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ e

$G = \begin{bmatrix} i & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{C})$.

Notes

Matrizes especiais

Seja A uma matriz de tipo $m \times n$. Então:

- se $m \neq n$ a matriz diz-se retangular de tipo $m \times n$;
- se $m = n$, diz-se que A é uma matriz quadrada de tipo $n \times n$ ou de ordem n (neste caso diz-se que a matriz tem ordem n em vez de $n \times n$);
- se as entradas de A são todas iguais a zero, então A diz-se a matriz nula e representa-se por $0_{m\times n}$;
- se $n = 1$ então a matriz diz-se uma matriz coluna ou um vetor coluna:
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$
- se $m = 1$ então a matriz diz-se uma matriz linha ou um vetor linha:
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Notes

Matrizes especiais

se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é uma matriz quadrada, então

- a diagonal principal de A é constituída pelos elementos a_{ij} tais que $i = j$, i.e., aos elementos
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix};$$
- a diagonal secundária de A é dada por $(a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots a_{n1})$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix};$$

Notes

Matrizes especiais

- a matriz diz-se triangular superior se $a_{ij} = 0$, sempre que $i > j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & a_{nn} \end{bmatrix};$$

- a matriz diz-se triangular inferior se $a_{ij} = 0$, sempre que $i < j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & & a_{kn} & & a_{nn} \end{bmatrix};$$

Notes

Matrizes especiais

- a matriz diz-se diagonal se é triangular superior e inferior, isto é, se $a_{ij} = 0$, sempre que $i \neq j$, e representa-se por

$$diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix};$$

- a matriz diagonal diz-se escalar se as entradas da diagonal principal forem todas iguais;
- se A é uma matriz escalar em que $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i=j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$, então diz-se a matriz identidade e representa-se por I_n i.e.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Notes

Matrizes especiais

Exemplo 3

- Matrizes identidade

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}$$

- Matriz escalar

$$C = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}$$

.

Notes

Igualdade de matrizes

Definição 4

As matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{r \times s}$ dizem-se iguais, e escreve-se $A = B$, se são do mesmo tipo, digamos $m \times n$, e se todos os seus elementos homólogos (i.e. na mesma posição) forem iguais, isto é, se

$$\begin{cases} m = r, \\ n = s, \\ a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \; j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

Notes

Igualdade de matrizes

Exemplo 5

- As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = [b_{ij}]_{2\times 3}$: $b_{ij} = (-1)^{i+j}$ são iguais.
- As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ não são iguais pois não são do mesmo tipo.

Notes

Adição de matrizes

Definição 6

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ duas matrizes reais do mesmo tipo. Chama-se soma de A e B, que se representa por $A + B$, à matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ cujos elementos são definidos por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \ (i \in \{1, 2..., m\}; j \in \{1, 2, ..., n\}).$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Notes

Adição de matrizes

Exemplo 7

- $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 117 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & -50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 3+0 & 0+1 \\ -2+0 & 8-8 & 2-3 \\ 4+5 & 0+1 & -1-2 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0+1 & 117-50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 9 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 67 \end{bmatrix}$

  Note que são do mesmo tipo, pelo que a soma está bem definida

Notes

Adição de matrizes

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

  Note que são do mesmo tipo, pelo que a soma está bem definida
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

  Note que não são do mesmo tipo, pelo que a soma não está bem definida

Notes

Propriedades da adição de matrizes

Proposição 8

Se A, B e C são matrizes do tipo $m \times n$, então:

i) *Associatividade:* $A + (B + C) = (A + B) + C$;

ii) *Comutatividade:* $A + B = B + A$;

iii) *Elemento neutro:* $A + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A = A$; *(0 matriz nula);*

iv) *Elemento simétrico,* $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$;

Notes

Propriedades da adição de matrizes

Demonstração.

Demonstremos a segunda destas propriedades, deixando as restantes como exercício. ii) Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes do tipo $m \times n$. Então, de acordo com a definição de soma de matrizes, as operações $A + B$ e $B + C$ estão bem definidas, obtendo-se matrizes do mesmo tipo, $m \times n$. Demonstremos agora que as entradas (i, j) das matrizes de ambos os lados da equação são iguais. A entrada (i, j) da matriz $A + B$ é $a_{ij} + b_{ij}$. Por outro lado, a entrada (i, j) da matriz B é $b_{ij} + a_{ij}$. Além disso, dado que a adição de números reais é comutativa, temos que

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij},$$

pelo que $A + B = B + A$.

□

Notes

Multiplicação Escalar

Definição 9

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz e α um escalar. Chama-se produto do escalar α pela matriz A, que se representa por αA, à matriz do tipo $m \times n$ tal que

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação. A matriz $(-1)A$ será denotada por $-A$

Notes

Multiplicação Escalar

Exemplo 10

$$3\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times(-1) & 3\times 2 & 3\times 0 \\ 3\times 4 & 3\times 1 & 3\times(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 12 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Notes

Multiplicação escalar

Proposição 11

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se:

i) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;

ii) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$;

iii) $\lambda(\mu A) = (\lambda \mu) A$;

iv) $1 \cdot A = A$.

Notes

Multiplicação escalar

Demonstração.

Demonstremos a terceira destas propriedades, sendo as restantes deixadas como exercício. iii) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Então $(\lambda\mu)A$ e $\lambda(\mu A)$ são matrizes do mesmo tipo e o elemento (i, j) de $(\lambda\mu)A$ é $(\lambda\mu)a_{ij}$. Como λ, μ e a_{ij} são elementos de $\mathbb{R}$, da associatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$, sabemos que $(\lambda\mu)a_{ij} = \lambda(\mu a_{ij})$. Como o segundo membro desta igualdade não é mais que o elemento (i, j) de $\lambda(\mu A)$, obtemos então a igualdade de matrizes, i.e., $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$. □

Notes

Produto de matrizes

Definição 12

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ duas matrizes reais. Chama-se produto de A por B à matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ onde, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{in}b_{nj},$$

Neste caso, escreve-se $C = AB$.

Note-se que, para ser possível multiplicar as matrizes A e B, o número de colunas de A tem que ser igual ao número de linhas de B.

Notes

Produto de matrizes

Simbolicamente, sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \dots & a_{m-1,p} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,p} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2,n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p-1,1} & b_{p-1,2} & b_{p-1,3} & b_{p-1,q-1} & b_{p-1,n} \\ b_{p,1} & b_{p,2} & b_{p,3} & \dots & b_{p,n} \end{bmatrix}$$

Notes

Produto de matrizes

Então o produto AB é dado por:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{p} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{p} a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{p} a_{1i}b_{in} \\ \sum_{i=1}^{p} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{p} a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{p} a_{2i}b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{p} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{p} a_{mi}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{p} a_{mi}b_{in} \end{bmatrix}$$

onde

$$(AB)_{11} = \sum_{i=1}^{p} a_{1i}b_{i1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \dots + a_{1p}b_{p1}$$

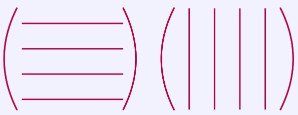
$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \dots \\ b_{p1} \end{bmatrix},$$

etc.

Notes

Produto de matrizes

- O cálculo da entrada (i, j) da matriz AB faz-se multiplicando a linha i pela coluna j da matriz B.
- AB obtém-se multiplicando as linhas de A pela matriz B.



Notes

Produto de matrizes

Exemplo 13

1. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1\times 1 + 2\times 0 + 0\times 7 & -1\times 3 + 2\times(-1) + 0\times 5 \\ 4\times 1 + 1\times 0 + (-2)\times 7 & 4\times 3 + 1\times(-1) + (-2)\times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -8 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ não é possível

Notes

Produto de matrizes

3. $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4\times 2 + (-\frac{1}{2})\times(-1) & 4\times 2 + (-\frac{1}{2})\times 4 \\ 2\times 2 + 1\times(-1) & 2\times 2 + 1\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{2} & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y + 4z \\ 5x - 3z \\ -3x - 6y + 20z \end{bmatrix};$

Notes

Produto de matrizes

5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Tem-se:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Notes

Produto de matrizes

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

deduz-se então que:

$$AB \neq BA$$
$$(A + B)C = AC + BC$$

.

Notes

Produto de matrizes

- A MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES NÃO É COMUTATIVA!!
- A LEI DO ANULAMENTO DO PRODUTO EM MATRIZES NÃO É VÁLIDA !!

$$AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \vee B = 0)$$

Vejamos: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Notes

Produto de matrizes

Proposição 14

Seja A e B e C matrizes tais que as operações indicadas estão bem definidas. Tem-se:

(i) *Associatividade,* $(AB)C = A(BC)$.

(ii) *Distributividade,* $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$.

(iii) $AI_n = A = I_m A$, $A0 = 0 = 0A$.

(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, *para qualquer escalar* α.

Notes

Produto de matrizes

Demonstração.

Demonstraremos a afirmação (ii), ficanda as restantes como exercício.

(ii) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Como $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B + C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, tem-se $A(B + C) \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$. Dado que $AB \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ e $AC \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, então

$$AB + AC \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R}).$$

Logo $A(B + C)$ e $AB + AC$ pertencem ambas a $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$. Da definição de produto de matrizes resulta que o elemento (i, j) da matriz $A(B + C)$ é

$$(A(B + C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(B + C)_{kj}.$$

Notes

Produto de matrizes

Da definição de soma de matrizes, tem-se $(B + C)_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, e portanto

$$(A(B + C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}).$$

Por outro lado,

$$(AB + AC)_{ij} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}.$$

Notes

Produto de matrizes

Utilizando, por esta ordem, as propriedades distributiva da multiplicação em relação à adição, em $\mathbb{R}$, tem-se

$$(A(B + C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$$
$$= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB + AC)_{ij} \Rightarrow A(B + C) = AB + AC.$$

Notes

Produto de matrizes

Definição 15

Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Diz-se que as matrizes A e B são comutáveis se $AB = BA$.

Exemplo 16

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ não são comutáveis, pois

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$

Notes

Produto de matrizes

Definição 17

Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $k \in \mathbb{N}$. A potência k de A, que denotaremos por A^k, é definida por:

$$A^2 = AA, \quad A^3 = A^2 A, \quad \cdots, \quad A^k = A^{k-1}A, \quad A^{k+1} = A^k A, \quad \text{e} \quad A^0 = I_n.$$

Exemplo 18

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Então

$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$

e

$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$

Notes

Matriz Transposta

Definição 19

A transposta de uma matriz A do tipo $m \times n$, que se representa por A^T, é uma matriz do tipo $n \times m$ cujas linhas são as colunas de A pela mesma ordem

Exemplo 20

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Notes

Matriz Transposta

Definição 21

Dizemos que a matriz A é:

- simétrica se $A^T = A$.
- hemi-simétrica (ou anti-simétrica) se $A^T = -A$.

Exemplo 22

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica.

A matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz hemi-simétrica.

Notes

Matriz Transposta

Proposição 23

Considere as matrizes A e B do tipo $m \times n$, C do tipo $n \times p$ e um número α. Tem-se:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AC)^T = C^T A^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Notes

Transposta de uma Matriz Complexa

Definição 24

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz complexa, de dimensão $m \times n$, define-se:

- a matriz conjugadade A, denotada por $\overline{A}$, à matriz obtida de A substituindo cada entrada da matriz pelo seu conjugado. Ou seja, $(\overline{A})_{ij} = \overline{a_{ij}}$
- a matriz transconjugada de A, denotada por A^*, à transposta da matriz conjugada. Ou seja, $A^* = (\overline{A})^T$

Notes

Transposta de uma Matriz Complexa

Exemplo 25

Seja $A = \begin{bmatrix} 5+2i & -3i \\ 4+i & 3 \\ 3 & 1+2i \end{bmatrix}$. Então

$\overline{A} = \begin{bmatrix} 5-2i & +3i \\ 4-i & 3 \\ 3 & 1-2i \end{bmatrix}$, $A^* = \begin{bmatrix} 5-2i & +3i \\ 4-i & 3 \\ 3 & 1-2i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5-2i & 4-i & 3 \\ +3i & 3 & 1-2i \end{bmatrix}$.

Notes

Transposta de uma Matriz Complexa

Definição 26

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz complexa.

- A matriz A diz-se hermitiana se $A^* = A$.
- A matriz A diz-se anti-hermitiana ou anti-hermítica, se $A^* = -A$.

Notes

Transposta de uma Matriz Complexa

Exemplo 27

A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -3i & 4+i \\ 3i & 3 & 2-i \\ 4-i & 2+i & -2 \end{bmatrix}$ é hermítica porque

$A^* = (\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 5 & 3i & 4-i \\ -3i & 3 & 2+i \\ 4+i & 2-i & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -3i & 4+i \\ 3i & 3 & 2-i \\ 4-i & 2+i & -2 \end{bmatrix} = A$.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 4-i & 6-3i \\ -4-i & 0 & 5+2i \\ -6-3i & -5+2i & 0 \end{bmatrix}$ é anti-hermítica, ou seja,

$B^* = (\overline{B})^T = \begin{bmatrix} 0 & 4+i & 6+3i \\ -4+i & 0 & 5-2i \\ -6+3i & -5-2i & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -4+i & -6+3i \\ 4+i & 0 & -5-2i \\ 6+3i & 5-2i & 0 \end{bmatrix} = -B$.

Notes

Transposta de uma Matriz Complexa

Proposição 28

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ *e* $C \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{C})$. *Tem-se:*

i) $(A^*)^* = A$;

ii) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$;

iii) $(AC)^* = C^* A^*$.

Notes

Matrizes invertíveis

Definição 29

Uma matriz quadrada A, de ordem n, diz-se invertível invertível (ou regular ou não singular) se existir uma matriz quadrada B, de ordem n, tal que

$$AB = I_n = BA.$$

Exemplo 30

Sejam $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = I_3 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = BA,$$

donde concluímos que A é invertível, bem como a matriz B.

Notes

Matrizes invertíveis

Teorema 31

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *uma matriz quadrada de ordem* n *invertível. Existe uma e uma só matriz* A' *que satisfaz a equação* $A\,A' = I_n = A' A$.

Notes

Matrizes invertíveis

Demonstração.

Suponha, por redução ao absurdo, que a inversa da matriz não é única, ou seja, que existem duas matrizes nas condições do teorema. Então

$$\begin{cases} A\,A' = I_n \\ A' A = I_n \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} A\,A'' = I_n \\ A'' A = I_n \end{cases}.$$

Multiplicando (à esquerda) a equação $A\,A'' = I_n$ por A', vem

$$A'\,A\,A'' = A'\,I_n,$$

donde, usando a equação $A' A = I_n$, se deduz

$$I_n\,A'' = A' \Leftrightarrow A'' = A'.$$

De forma análoga, se prova que, multiplicando à direita a equação $A'' A = I_n$ por A', a igualdade $A' = A''$.

Notes

Matrizes invertíveis

Definição 32

A solução da equação, quando existir, diz-se a matriz inversa de A e, denota-se por A^{-1}, pelo que $A\,A^{-1} = I_n = A^{-1}A$.

Exemplo 33

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{bmatrix} \text{-}1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ pois $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Notes

Matrizes invertíveis

Definição 34

Uma matriz quadrada que não admite inversa diz-se uma matriz singular ou não invertível.

Exemplo 35

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ não admite inversa. Para o provar, suponhamos que $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é tal que $AX = XA = I_2$. Então,
$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pelo que $0 = a + c = 1$ (contradição).

Notes

Matrizes invertíveis

Proposição 36

Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem $n \in \mathbb{N}$. Então:

i) $(A^{-1})^{-1} = A$;

ii) *AB é invertível e* $(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

iii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Demonstração.

i) Imediata pela própria definição de matriz invertível.
ii) Vejamos então que a inversa da matriz AB é $B^{-1}A^{-1}$. Para tal, provemos que o produto das matrizes AB e $B^{-1}A^{-1}$ é a matriz identidade. Tem-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) \overset{Prop.14(i)}{=} A(BB^{-1})A^{-1} \overset{Def.32}{=} AI_nA^{-1} = AA^{-1} \overset{Def.32}{=} I_n$$

Notes

Matriz Transposta

e

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) \overset{Prop.14(i)}{=} B^{-1}(A^{-1}A)B \overset{Def.32}{=} B^{-1}I_nB = B^{-1}B \overset{Def.32}{=} I_n,$$

ficando, assim, provado que a inversa de AB existe e é $B^{-1}A^{-1}$.
iii) Vejamos que a inversa da matriz A^T é $(A^{-1})^T$. Para tal, provemos que o produto das matrizes A^T e $(A^{-1})^T$ é a matriz identidade. Tem-se

$$(A^{-1})^TA^T \overset{Prop.23}{=} (AA^{-1})^T \overset{Def.32}{=} (I_n)^T = I_n$$

e

$$A^T(A^{-1})^T \overset{Prop.23}{=} (A^{-1}A)^T \overset{Def.32}{=} I_n)^T = I_n.$$

Logo, pela definição de inversa de uma matriz, concluímos que

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Notes

Matriz ortogonal

Definição 37

Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se ortogonal se

$$AA^T = A^T A = I_n.$$

Se A é uma matriz ortogonal, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^T$.

Exemplo 38

A matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal, pois

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = I_2 \text{ e } A^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = I_2.$$

Notes

Matriz ortogonal

Theorem 39

Seja A uma matriz ortogonal. Então, A^{-1} é também uma matriz ortogonal.

Demonstração.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se A é uma matriz ortogonal, temos que $AA^T = A^T A = I_n$ Então,

$$A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = I_n^{-1} = I_n.$$

e

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1}A^{-1} = (AA^T)^{-1} = I_n^{-1} = I_n,$$

pelo que A^{-1} é também uma matriz ortogonal. □

Notes

Traço de uma matriz

Definição 40

Chama-se traço de uma matriz à soma dos elementos da diagonal principal, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exemplo 41

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. O traço da matriz A é $tr(A) = 2 + 5$.

Notes

Traço de uma matriz

Propriedades. Sejam A, B e C matrizes tais que as operações indicadas estão bem definidas. Tem-se:

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$; ($\alpha$ constante)
- $tr(AB) = tr(BA)$
- $tr(A^T) = tr(A)$.

Notes

Matriz escada e escada reduzida

Definição 42

1. Diz-se que uma matriz $A = [a_{ij}]$ está na forma de uma escada se
   (a) Todas as linhas nulas estão abaixo das linhas não nulas.
   (b) Por baixo do 1º elemento não nulo de uma linha, chamado pivô, todos os elementos são nulos.
   (c) O pivô da linha $i+1$ está à direita da linha i.
2. Uma matriz escada está na forma de uma escada reduzida se os seus pivôs são iguais a um e se estes são os únicos elementos não-nulos na sua coluna (chamada coluna pivô).

Notes

Matriz escada e escada reduzida

Exemplo 43

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1&4&1&2&5\\ 0&0&2&3&1\\ 0&0&0&3&6\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&3\\ 0&1&1&0&2\\ 0&0&0&1&1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&4&0\\ 0&0&0&0&0&5&0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1&1\\ 0&1 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes em escada: A, B, E, F e u.
- Matrizes em escada reduzida: B, E e u.

Notes

Matrizes elementares

Definição 44 (Operações elementares)

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Dá-se o nome de operação/transformação elementar do tipo *I* nas linhas da matriz A à troca de duas linhas. A troca da linha l_i com a linha l_j, com $i \neq j$, representa-se por $l_i \leftrightarrow l_j$.

(b) Dá-se o nome de operação elementar do tipo *II* nas linhas da matriz A à substituição de uma linha por um seu múltiplo não-nulo. A Substituição da linha l_i por αl_i , com $\alpha \neq 0$, representa-se por $l_i \leftarrow \alpha l_i$.

(c) Dá-se o nome de operação elementar do tipo *III* nas linhas da matriz A à substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha. Substituição da linha l_i por $l_i + \beta l_j$, com β escalar e $i \neq j$, representa-se por $l_i \leftrightarrow l_i + \beta l_j$.

Notes

Matrizes elementares

Proposição 45

Se A' resulta de A por transformações elementares, então A' é equivalente a A, e representa-se por $A \sim A'$.

Exemplo 46

$$A = \begin{bmatrix} 1&2&0&1\\ 1&0&1&2\\ 0&1&1&0 \end{bmatrix} \sim A' = \begin{bmatrix} 1&2&0&1\\ -2&0&-2&-4\\ 0&1&1&0 \end{bmatrix}.$$

Notes

Matriz escada e escada reduzida

Obs.

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, existe uma única matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz A.

Obs.

Seja A uma matriz não nula. Então, existe uma infinidade de matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.

Definição 47

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

- Representa-se por $fe(A)$ o conjunto das matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.
- Representa-se por $fer(A)$ a única matriz escada reduzida que é equivalente à matriz A.

Notes

Matriz escada e escada reduzida

.

Exemplo 48

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
não é uma matriz em escada, uma vez que por baixo do pivô da linha 1 os elementos são todos não nulos. A redução à forma em escada pode efetuar-se usando as seguintes operações elementares por linhas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 + (-2) l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 + (-3) l_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_2 \leftrightarrow l_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notes

Caraterística de uma matriz

Definição 49

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se caraterística da matriz A, que se representa por $car(A)$ ou , ao número de linhas não nulas de uma matriz escada que seja equivalente à matriz A.

Exemplo 50

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.
A matriz A está na forma de escada, tendo caraterística $car(A) = 3$.
A matriz B está na forma de escada reduzida, tendo caraterística $car(A) = 3$.
Através da execução de uma sequência de operações elementares sobre linhas, vamos transformar a matriz C numa matriz escada.

Notes

Caraterística de uma matriz

Exemplo 51

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \underset{l_2 \leftarrow l_2 + 2 l_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{l_3 \leftarrow l_3 + (-1) l_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underset{l_2 \leftrightarrow l_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{l_3 \leftarrow l_3 + (-3) l_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \in fe(C) \Rightarrow car(C) = 3$$

Notes

Caraterística de uma matriz

Exemplo 52

$$\underset{l_2 \leftarrow (-1)l_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \underset{l_3 \leftarrow (-\frac{1}{3})l_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{l_1 \leftarrow l_1 - 2l_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{l_1 \leftarrow l_1 - 3l_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = fer(C)$$

Notes