Álgebra Linear EE

1º semestre do ano letivo 2014/2015 — LEAP+MIEP+MIEM

Exame modelo — 15 de setembro de 2014

Departamento de Matemática e Aplicações — Universidade do Minho

Curso: Nome: Número de aluno:

A prova tem a duração de 120 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. A prova é constituída por dois grupos e termina com a palavra "Fim". No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 20.

Grupo I — Para cada questão deste grupo, assinale através de uma cruz na tabela ao lado qual das quatro proposições é verdadeira (existe apenas uma por questão). Cotações — resposta certa: 1.0; nenhuma proposição selecionada: 0; resposta errada: -0.3, sendo 0 a cotação mínima neste grupo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A												
B												
C												
D												

I.1 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, A é uma matriz invertível se e só se

A $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. B $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq \alpha$. C $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. D $\beta \neq 0$ e $\beta \neq \alpha$.

I.2 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $\det(A) = 2$ e $\det(B) = -2$. Então:

A $\det(A + B) = 0$. B $\det(-A) = -\det(A)$. C $\det(-A) = \det(A)$. D $\det(AB) = 0$.

I.3 Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto gerador de um espaço vetorial V. Então:

A $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto linearmente independente;

B $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto gerador de V.

C $\dim(V) \leqslant 3$.

D $\dim(V) = 3$.

I.4 Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = \begin{cases} j^2 & \text{se } i > j \\ i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i < j. \end{cases}$ Então:

A $0 \in \lambda(A)$. B $\lambda(A^{-1}) = \{1, \frac{1}{2}\}$. C $\lambda(A^2) = \{-1, 1, 4\}$. D $\lambda(A) = \{1, 2, 3\}$.

I.5 Seja (S) um sistema de equações lineares $Ax = b$ de cinco equações a cinco incógnitas tal que $c(A) = 5$. Então:

A $\#\,\mathrm{CS}_{(S)} = 0$. B $\#\,\mathrm{CS}_{(S)} = 1$. C $\#\,\mathrm{CS}_{(S)} = 2$. D $\#\,\mathrm{CS}_{(S)} = \infty$.

I.6 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$. Então:

A $A_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. B $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. C $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. D $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

I.7 Seja X um espaço vetorial tal que $X = \langle x_1, x_2 \rangle$. Então:

A $\dim(X) = 2$.

B $X = \mathbb{R}^2$.

C $\forall x \in X, \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.

D $\{x_1, x_2\}$ é uma base de X.

I.8 Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Então:

- A $A^2 + 2A = 5I_2$.
- B $A^2 + 2A = 3A$.
- C $A^2 + 2A = A^2$.
- D $A^2 + 2A = 15I_2$.

I.9 Considere o sistema de equações lineares (S) cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 & 1+\alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 3+\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Então:

- A (S) é possível e determinado se e só se $\alpha \neq 0$.
- B (S) é possível e indeterminado se e só se $\alpha = 0$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- C (S) é impossível se e só se $\alpha = -1$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- D (S) é possível e determinado se e só se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$.

I.10 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 2$. Então:

- A $c(A) = n$.
- B A é uma matriz singular.
- C A é uma matriz escalar.
- D $c(A) = 2$.

I.11 Seja $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ a matriz de uma transformação linear T. Então:

- A $T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, 2x + 4z)$.
- B $\operatorname{Im}(T) = \langle (1, 2), (2, 4) \rangle$.
- C $c_T = 1$
- D $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

I.12

- A $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, 3x)$ é uma transformação linear.
- B $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = (x + 1, x)$ é uma transformação linear.
- C $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (\operatorname{sen} x, \cos x)$ é uma transformação linear.
- D $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $i(x) = (1, 1)$ é uma transformação linear.

Grupo II — Responda, nas folhas que lhe foram distribuídas e por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar, bem como as respetivas justificações. Cotações: 1.0+2.0+1.0+2.0+2.0.

II.1 Sejam A, B e C matrizes de ordem n tais que A e C são matrizes simétricas e $(AB + C)^{-1} = B^T A + C$. Mostre que a matriz $AB + C$ é ortogonal.

II.2 Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) Determine $CS_{(S)}$ através do método de Gauss.

(b) Determine $CS_{(S)}$ através do método de Gauss-Jordan.

II.3 Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre, sem o resolver, que (S) é um sistema de equações lineares possível e determinado.

(b) Determine $CS_{(S)}$ através da Regra de Cramer.

II.4 Verifique que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e indique a sua dimensão.

II.5 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine o espectro da matriz A.

(b) Determine E_2 (mesmo que não tenha obtido na alínea anterior o escalar 2 como valor próprio da matriz A, nesta alínea deve determinar o espaço próprio associado a este valor próprio).

Fim.

Álgebra Linear EE

1º semestre do ano letivo 2014/2015 — LEAP+MIEP+MIEM

Soluções do Exame modelo — 15 de setembro de 2014

Departamento de Matemática e Aplicações — Universidade do Minho

Curso: Nome: Número de aluno:

A prova tem a duração de 120 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. A prova é constituída por dois grupos e termina com a palavra "Fim". No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 20.

Grupo I — Para cada questão deste grupo, assinale através de uma cruz na tabela ao lado qual das quatro proposições é verdadeira (existe apenas uma por questão). Cotações — resposta certa: 1.0; nenhuma proposição selecionada: 0; resposta errada: -0.3, sendo 0 a cotação mínima neste grupo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A										X	X	X
B	X				X							
C		X	X			X	X					
D				X				X	X			

I.1 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, A é uma matriz invertível se e só se

A $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. B $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq \alpha$. C $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. D $\beta \neq 0$ e $\beta \neq \alpha$.

I.2 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $\det(A) = 2$ e $\det(B) = -2$. Então:

A $\det(A+B) = 0$. B $\det(-A) = -\det(A)$. C $\det(-A) = \det(A)$. D $\det(AB) = 0$.

I.3 Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto gerador de um espaço vetorial V. Então:

A $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto linearmente independente; C $\dim(V) \leqslant 3$.

B $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto gerador de V. D $\dim(V) = 3$.

I.4 Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = \begin{cases} j^2 & \text{se } i > j \\ i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i < j. \end{cases}$ Então:

A $0 \in \lambda(A)$. B $\lambda(A^{-1}) = \{1, \frac{1}{2}\}$. C $\lambda(A^2) = \{-1, 1, 4\}$. D $\lambda(A) = \{1, 2, 3\}$.

I.5 Seja (S) um sistema de equações lineares $Ax = b$ de cinco equações a cinco incógnitas tal que $c(A) = 5$. Então:

A $\#\,\mathrm{CS}_{(S)} = 0$. B $\#\,\mathrm{CS}_{(S)} = 1$. C $\#\,\mathrm{CS}_{(S)} = 2$. D $\#\,\mathrm{CS}_{(S)} = \infty$.

I.6 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$. Então:

A $A_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. B $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. C $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. D $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

I.7 Seja X um espaço vetorial tal que $X = \langle x_1, x_2 \rangle$. Então:

A $\dim(X) = 2$. C $\forall x \in X, \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.

B $X = \mathbb{R}^2$. D $\{x_1, x_2\}$ é uma base de X.

I.8 Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 8 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$. Então:

[A] $A^2 + 2A = 5I_2$. [B] $A^2 + 2A = 3A$. [C] $A^2 + 2A = A^2$. [D] $A^2 + 2A = 15I_2$.

I.9 Considere o sistema de equações lineares (S) cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1+\alpha & 0 & 1+\alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 3+\alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e cujo vetor dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{smallmatrix}\right]$, $\beta \in \mathbb{R}$. Então:

[A] (S) é possível e determinado se e só se $\alpha \neq 0$.

[B] (S) é possível e indeterminado se e só se $\alpha = 0$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

[C] (S) é impossível se e só se $\alpha = -1$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

[D] (S) é possível e determinado se e só se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$.

I.10 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 2$. Então:

[A] $c(A) = n$. [B] A é uma matriz singular. [C] A é uma matriz escalar. [D] $c(A) = 2$.

I.11 Seja $A_T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ a matriz de uma transformação linear T. Então:

[A] $T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, 2x + 4z)$.

[B] $\mathrm{Im}(T) = \langle (1, 2), (2, 4) \rangle$.

[C] $c_T = 1$

[D] $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

I.12 [A] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (x, 3x)$ é uma transformação linear.

[B] $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ g(x) = (x + 1, x)$ é uma transformação linear.

[C] $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ h(x) = (\operatorname{sen} x, \cos x)$ é uma transformação linear.

[D] $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ i(x) = (1, 1)$ é uma transformação linear.

Grupo II — Responda, nas folhas que lhe foram distribuídas e por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar, bem como as respetivas justificações. Cotações: 1.0+2.0+1.0+2.0+2.0.

II.1 Sejam A, B e C matrizes de ordem n tais que A e C são matrizes simétricas e $(AB + C)^{-1} = B^T A + C$. Mostre que a matriz $AB + C$ é ortogonal.

II.2 Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Determine $\mathrm{CS}_{(S)}$ através do método de Gauss.

(b) Determine $\mathrm{CS}_{(S)}$ através do método de Gauss-Jordan.

Solução

$\mathrm{CS}_{(S)} = \{(2 - \alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

II.3 Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Mostre, sem o resolver, que (S) é um sistema de equações lineares possível e determinado.

(b) Determine $\mathrm{CS}_{(S)}$ através da Regra de Cramer.

Solução

(b) $\mathrm{CS} = \{(0, 0, 0, 1)\}$.

II.4 Verifique que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e indique a sua dimensão.

Solução

$\dim(S) = 2$.

II.5 Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Determine o espectro da matriz A.

(b) Determine E_2 (mesmo que não tenha obtido na alínea anterior o escalar 2 como valor próprio da matriz A, nesta alínea deve determinar o espaço próprio associado a este valor próprio).

Solução

(a) $\lambda(A) = \{-3, 2\}$.

(b) $E_2 = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}$.

Fim.