FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI Data / 11 / 20

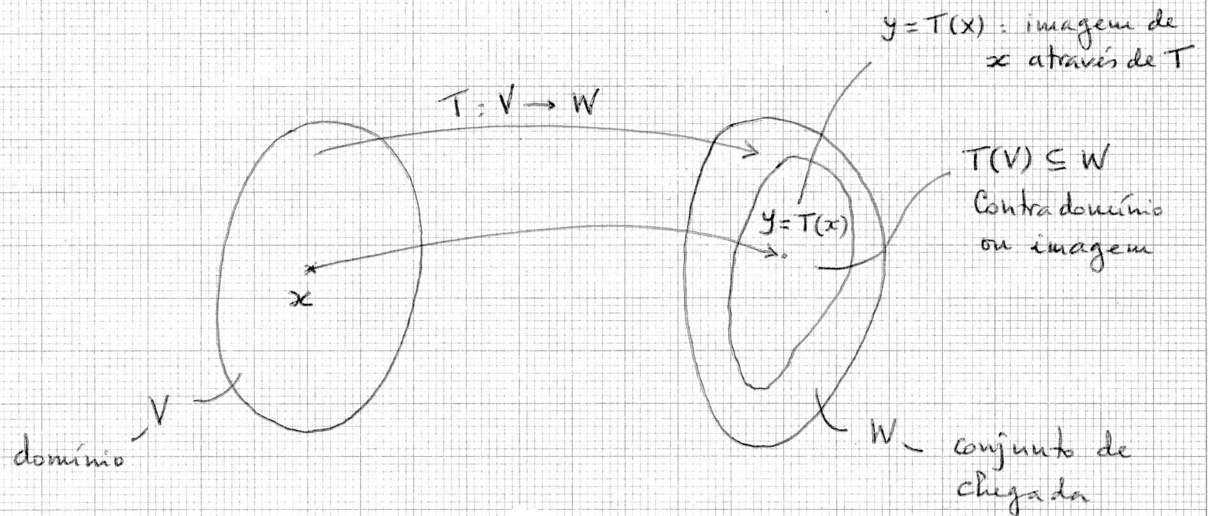
Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano 1º Semestre 1º

Nome José Augusto Trigo Barbosa

Espaço reservado para o avaliador

Notas de apoio ao Capítulo 3 do manual: "Noções sobre Álgebra Linear".

Introdução



Se $T(V) = W$ a função é <u>sobrejectiva</u>.

pág. 1

Definição

A função $T: V \to W$ é uma <u>transformação linear</u> se:

- V e W são espaços lineares (vectoriais) sobre um corpo Ω
- $\forall_{x, y \in V} \; \forall_{\alpha, \beta \in \Omega} \quad T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$

pág. 2

Propriedades:

- Seja 0_V o elemento zero de V e 0_W o elemento zero de W.

  Se $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear, então
  $$T(0_V) = 0_W$$

  Demonstração:

  Se $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear, então
  $$\forall_{x \in V} \ \forall_{\alpha \in \Omega} \ T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

  Considerando $\alpha = 0$, resulta $0x = 0_V$ e $0T(x) = 0_W$ pelo que
  $$T(0_V) = 0_W$$

- Se $T(0_V) \neq 0_W$, então $T: V \rightarrow W$ não é uma transformação linear

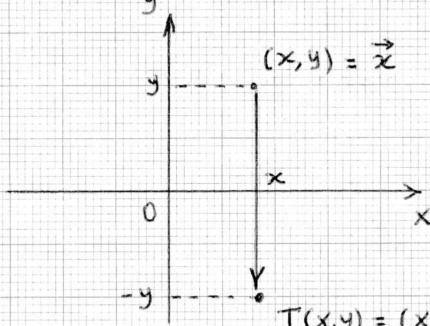
Exemplo:

Sejam as funções lineares
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow mx \ , \ m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

As funções lineares são transformações lineares.
Por outro lado, as funções afins
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow mx + b \ , \ m \in \mathbb{R} \ , \ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

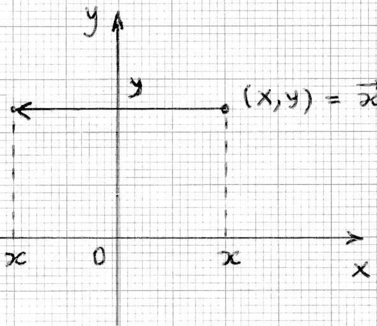
não são transformações lineares.

Exemplo 3: São transformações lineares:



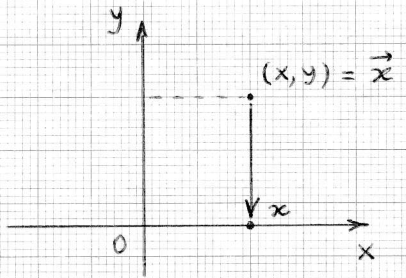
$T(x,y) = (x,-y)$: simetria em torno do eixo dos xx

Simetria em torno do eixo dos yy : $T(x,y) = (-x,y)$



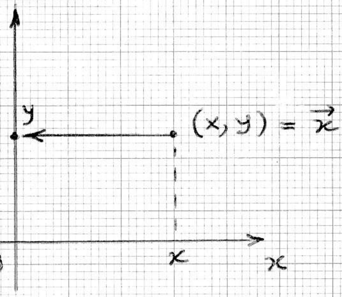
pág. 3

Exemplo 4: São transformações lineares:



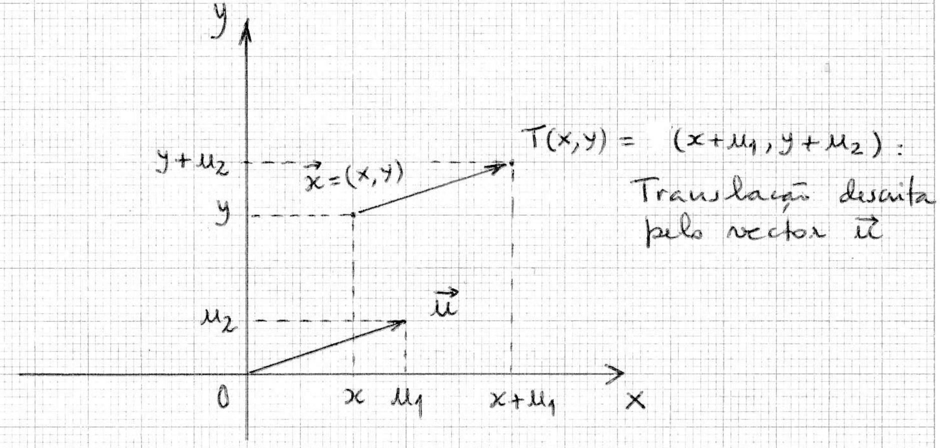
$T(x,y) = (x,0)$: projecção ortogonal sobre o eixo dos xx

Projecção ortogonal sobre o eixo dos yy : $T(x,y) = (0,y)$

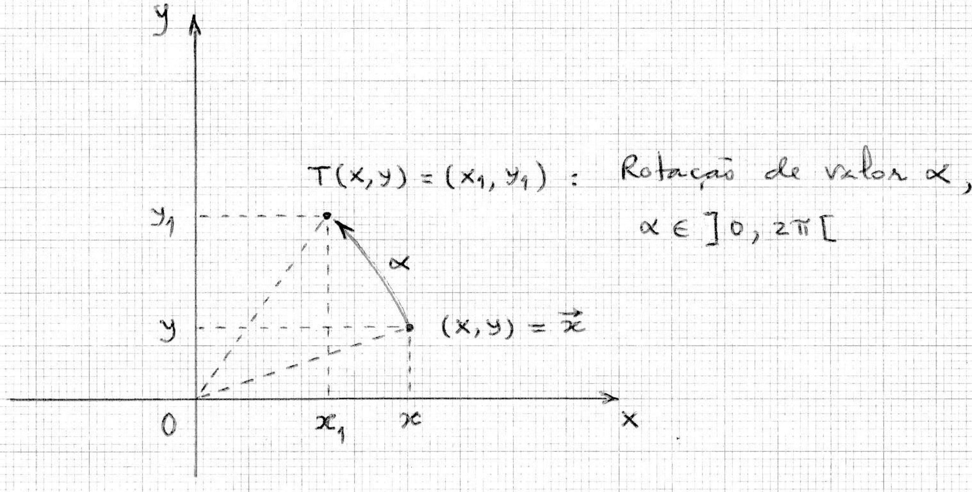


Exemplo 5: O operador translação não é uma transformação linear.

Seja o vector $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$.



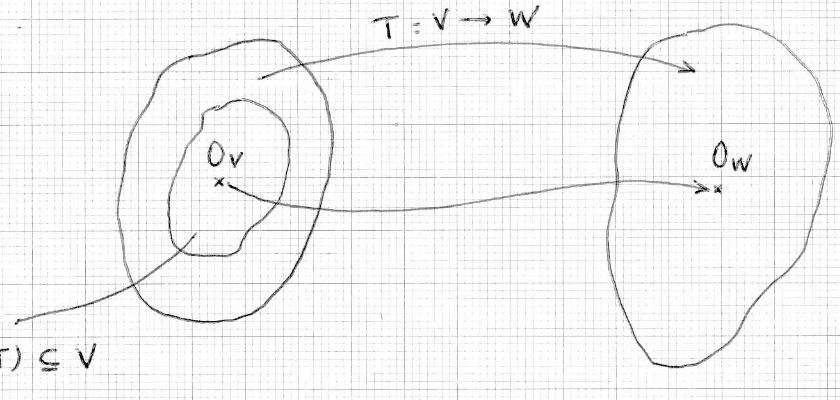
Exemplo 6: É transformação linear:



$$T(x,y) = (x_1, y_1) = \left(x\cos(\alpha) - y\,\mathrm{sen}(\alpha),\ x\,\mathrm{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha) \right)$$

Núcleo

Seja a transformação linear $T : V \longrightarrow W$



$N(T) \subseteq V$

Núcleo de T

- $N(T)$ é um subespaço de V, sendo possível obter:

  Base $N(T)$ e $\dim N(T)$ (nulidade de T)

pág. 8

Exemplo 15 [3,18]

Seja o operador derivação (transformação linear)

$$D : V \longrightarrow V$$
$$f \longrightarrow f'$$

Núcleo:

$$N(D) = \{ f(x) \in V \;:\; \underset{\text{(função nula)}}{f'(x) = 0}, \forall x \in \mathbb{R} \} =$$

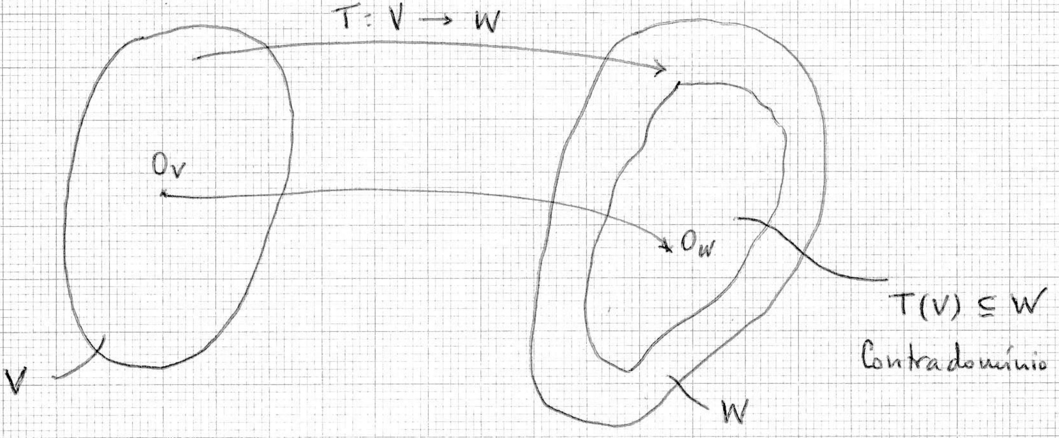
$$= \{ f(x) \in V \;:\; \underset{\text{(função constante)}}{f(x) = K}, \forall x \in \mathbb{R} \}$$

Base $N(D) = \{ 1 \}$ e $\dim N(D) = 1$

função constante $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

pág. 9

Contradomínio



- $T(V)$ é um subespaço de W, sendo possível obter:

  Base $T(V)$ e $\dim T(V)$ (ordem de T)

pág. 10

- Seja a transformação linear $T : V \longrightarrow W$, tal que $\dim V = n$, $\dim W = m$ e

$$\underbrace{\dim V}_{= n} = \dim T(V) + \dim N(T)$$

i) $m > n$

$$0 \leq \dim T(V) \leq n < m \Rightarrow T(V) \subset W$$

T não é sobrejectiva

$$0 \leq \dim N(T) \leq n$$

ii) $m = n$

$$0 \leq \dim T(V) \leq n \quad \Rightarrow \quad T(V) = W \text{ (sobrejectiva)}$$
$$0 \leq \dim N(T) \leq n \quad \text{se } \dim T(V) = n \text{ e } \dim N(T) = 0$$

iii) $m < n$

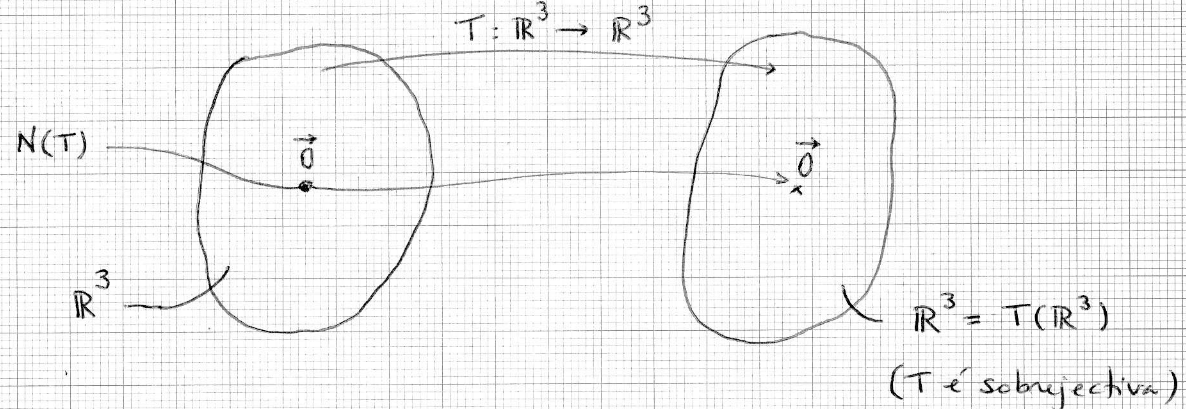
$$0 \leq \dim T(V) \leq m \quad \Rightarrow \quad T(V) = W \text{ (sobrejectiva) se}$$
$$n - m \leq \dim N(T) \leq n \quad \dim T(V) = m \text{ e } \dim N(T) = n - m,$$

pág. 11

Exemplo 18 [3.23]

Transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longrightarrow (x+z,\ y+z,\ x+y)$



Núcleo :

$$N(T) = \{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ T(\vec{x}) = (0,0,0) \} =$$

$$= \{ (0,0,0) \} \subset \mathbb{R}^3$$

$S_N = \text{Base } N(T) = \{ \ \} \Rightarrow \dim N(T) = 0$

Contradomínio :

$$T(\mathbb{R}^3) = \{ \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \vec{w} = T(\vec{x}),\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \} =$$

$$= \{ \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \} = \mathbb{R}^3 \quad (T \text{ é sobrejectiva})$$

$S_T = \text{Base } T(\mathbb{R}^3) = \text{Base } \mathbb{R}^3 = \{ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} \} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim T(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

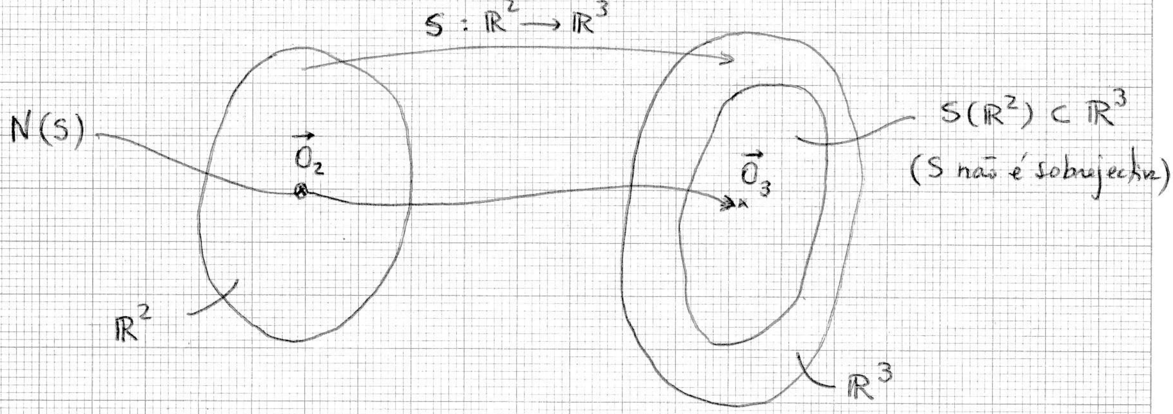
pág 12/13

Wr

Exemplo 19

Transformação linear $\quad S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \longrightarrow (x+y\,,\, 2x+3y\,,\, x+2y)$$



Núcleo :

$$N(S) = \{\vec{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : S(\vec{x}) = (0,0,0)\} =$$

$$= \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$$

S_N = Base $N(S) = \{\ \} \implies \dim N(S) = 0$

Contradomínio :

$$S(\mathbb{R}^2) = \{\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : \vec{w} = S(\vec{x})\,,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^2\} =$$

$$= \{\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : w_3 = -w_1 + w_2\} =$$

$$= \{\vec{w} = (w_1, w_2, -w_1 + w_2) \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= \{\vec{w} = w_1(1,0,-1) + w_2(0,1,1) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^3$$

S_T = Base $S(\mathbb{R}^2) = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{(1,0,-1), (0,1,1)\} \implies$

$$\implies \dim S(\mathbb{R}^2) = 2$$

pág. 14/15

Teorema [3.4]

$T: V \to W$ é uma transformação linear, tal que $\dim V = n$; seja

$$U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\} \text{ uma base para } V.$$

e

$$U' = \{T(\vec{u}_1), T(\vec{u}_2), \ldots, T(\vec{u}_n)\} \subset T(V)$$

Mostrar que $T(V) = L(U')$.

Seja $\vec{y} \in T(V) \Rightarrow \exists_{\vec{x} \in V} : \vec{y} = T(\vec{x})$

Se $\vec{x} \in V$, então

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{u}_n$$

para um determinado conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Omega$ (que é único já que U é uma base para V).
Então

$$\vec{y} = T(\vec{x}) = T(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{u}_n) =$$

$$= \alpha_1 T(\vec{u}_1) + \alpha_2 T(\vec{u}_2) + \ldots + \alpha_n T(\vec{u}_n)$$

pelo que $\vec{y} \in L(U')$
Conclui-se, então, que

$$\vec{y} \in T(V) \Rightarrow \vec{y} \in L(U'), \text{ pelo que } T(V) \subseteq L(U')$$

De modo análogo é possível mostrar que

$$\vec{y} \in L(U') \Rightarrow \vec{y} \in T(V), \text{ pelo que } L(U') \subseteq T(V)$$

Finalmente, conclui-se que $L(U') = T(V)$

pág. 16

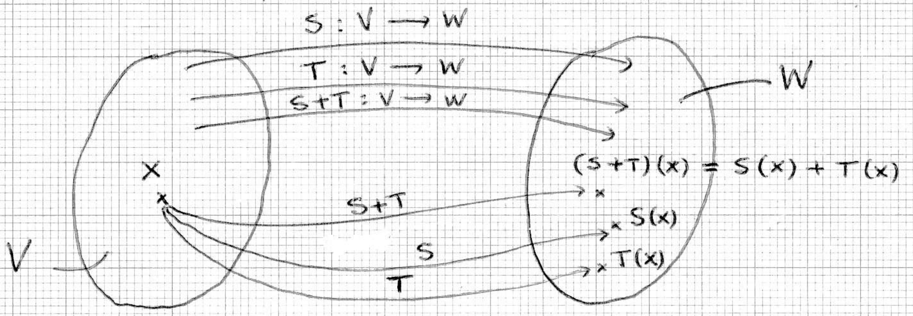
Adição de transformações lineares

Sejam as transformações lineares

$$S : V \longrightarrow W \quad e \quad T : V \longrightarrow W$$

Adição : $\quad S + T : V \longrightarrow W$ tal que

$$\forall_{x \in V} \quad (S+T)(x) = S(x) + T(x)$$



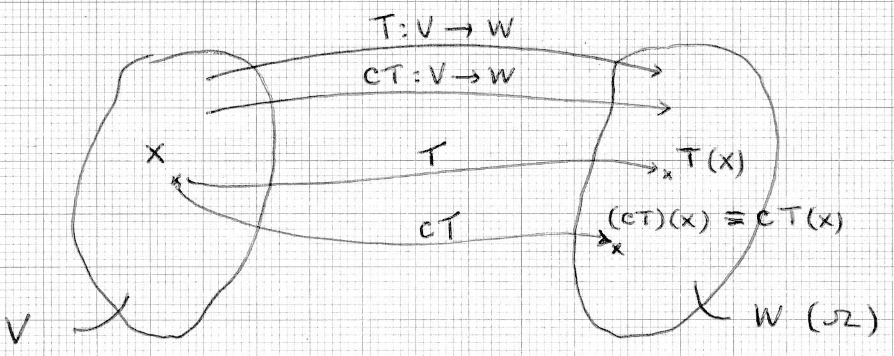
A função $S + T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear.

Multiplicação de uma transformação linear por um escalar

Seja a transformação $T : V \longrightarrow W$ e seja o escalar $c \in \Omega$ em que Ω é o corpo de escalares associado a W.

Multiplicação por escalar : $\quad cT : V \longrightarrow W$ tal que

$$\forall_{x \in V} \quad (cT)(x) = c\,T(x)$$



A função $cT : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear.

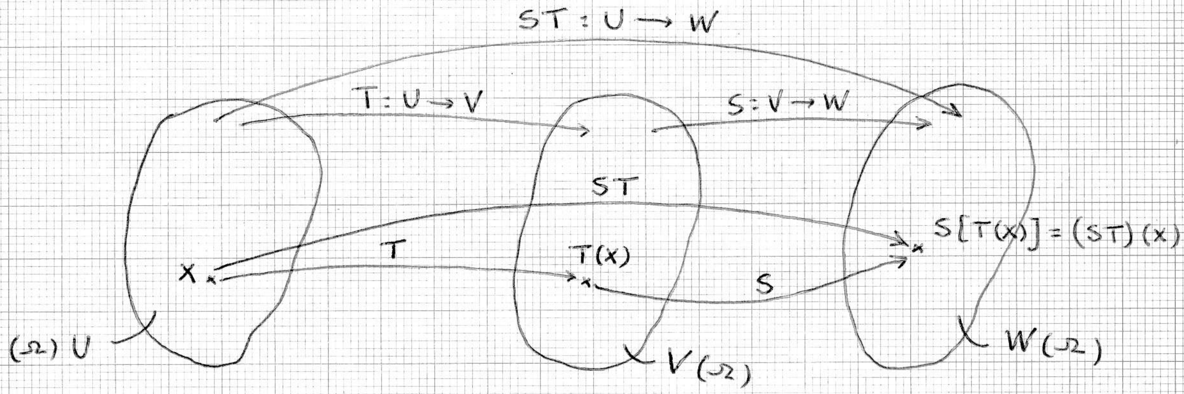
Composição de transformações lineares

Sejam as transformações lineares

$$T : U \longrightarrow V \quad e \quad S : V \longrightarrow W$$

Composição : $ST : U \longrightarrow W$ tal que

$$\forall_{x \in U} \quad (ST)(x) = S[T(x)]$$



Teorema [3.9]

A função composta $ST : U \longrightarrow W$ é uma transformação linear.

Pretende-se mostrar que

$$\forall_{x, y \in U} \quad \forall_{\alpha, \beta \in \Omega} \quad (ST)(\alpha x + \beta y) = \alpha (ST)(x) + \beta (ST)(y)$$

$$(ST)(\alpha x + \beta y) \underset{\text{Composição}}{=} S[T(\alpha x + \beta y)] \underset{T \text{ é linear}}{=} S[\alpha T(x) + \beta T(y)] \underset{S \text{ é linear}}{=}$$

$$= \alpha S[T(x)] + \beta S[T(y)] \underset{\text{Composição}}{=} \alpha (ST)(x) + \beta (ST)(y)$$

pág. 21

Exemplo 23 [3.35]

Sejam as transformações lineares:

$$R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad\qquad U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (z,y,x) \qquad\qquad (x,y,z) \longrightarrow (x, x+y, x+y+z)$$

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \longrightarrow (x-y, -x+y, x+y)$$

- $RU : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(RU)(x,y,z) = R\left[U(x,y,z)\right] = R(x, x+y, x+y+z) =$$

$$= (x+y+z, x+y, x)$$

- $UR : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(UR)(x,y,z) = U\left[R(x,y,z)\right] = U(z,y,x) =$$

$$= (z, y+z, x+y+z)$$

- $RUT : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(RUT)(x,y) = (RU)\left[T(x,y)\right] = (RU)(x-y, -x+y, x+y) =$$

$$= (x+y, 0, x-y)$$

ou

$$= R\left[U(x-y, -x+y, x+y)\right] = R(x-y, 0, x+y) =$$

$$= (x+y, 0, x-y)$$

pág. 23

- $(RU)^2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(RU)^2(x,y,z) = \left[(RU)(RU)\right](x,y,z) =$$

$$= (RU)\left[(RU)(x,y,z)\right] = (RU)(x+y+z,\ x+y,\ x) =$$

$$= (3x+2y+z,\ 2x+2y+z,\ x+y+z)$$

ou

$$= (RU)\left[R\left[U(x,y,z)\right]\right] = (RU)\left[R(x,\ x+y,\ x+y+z)\right] =$$

$$= (RU)(x+y+z,\ x+y,\ x) =$$

$$= R\left[U(x+y+z,\ x+y,\ x)\right] =$$

$$= R(x+y+z,\ 2x+2y+z,\ 3x+2y+z) =$$

$$= (3x+2y+z,\ 2x+2y+z,\ x+y+z)$$

pág. 23

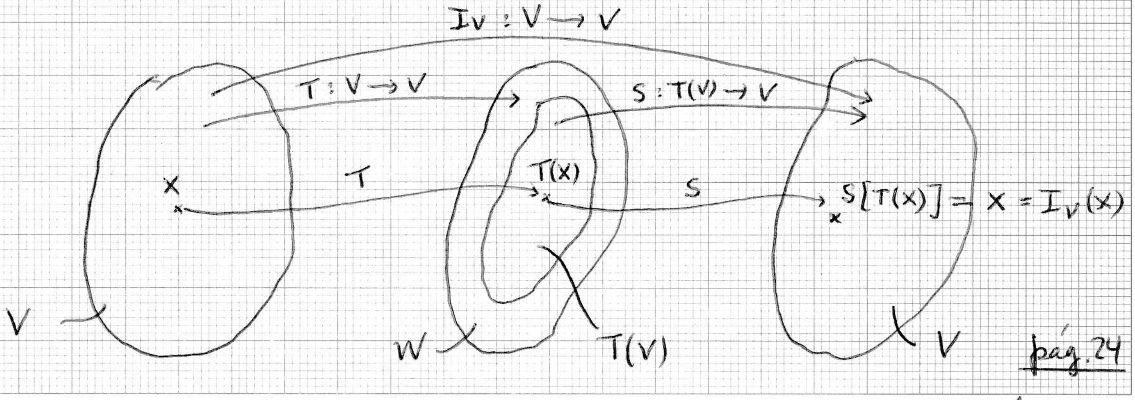
Inversão de transformações lineares

Definição : Seja $T : V \longrightarrow W$

- $S : T(V) \longrightarrow V$ é inversa à esquerda de T, se

$$I_V = ST : V \longrightarrow V$$

$$\forall_{x \in V} \quad (ST)(x) = S[T(x)] = I_V(x) = x$$

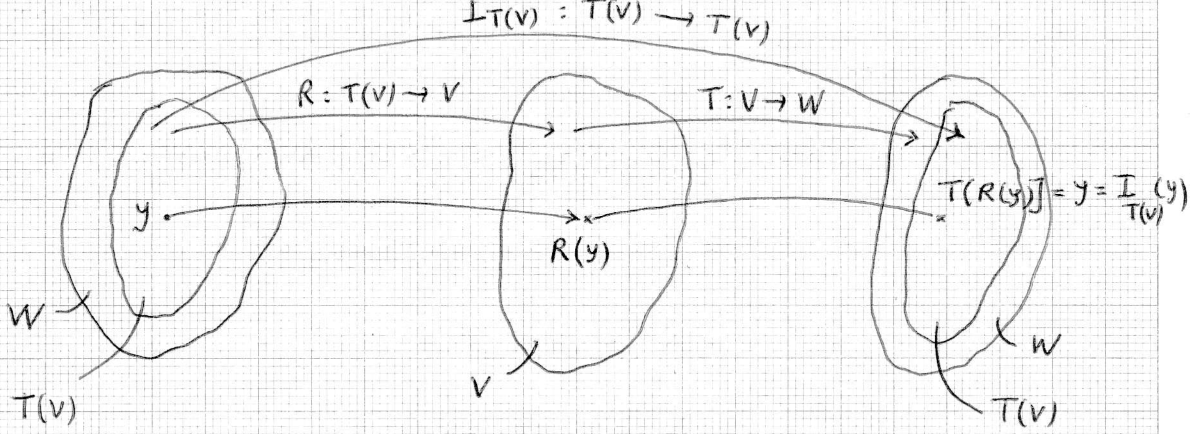


pág. 24

- $R : T(V) \to V$ é inversa à direita de T, se

$$I_{T(V)} = TR : T(V) \longrightarrow T(V)$$

$$\forall_{y \in T(V)} \quad (TR)(y) = T[R(y)] = I_{T(V)}(y) = y$$



pág. 24

Exemplo: Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow x^3$$

A sua função inversa é

$$f^{-1} = h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longrightarrow \sqrt[3]{y}$$

A função h é inversa à direita de f:

$$\forall_{y \in \mathbb{R}} \quad (fh)(y) = f[h(y)] = f[\sqrt[3]{y}] = y$$

A função h é inversa à esquerda de f:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad (hf)(x) = h[f(x)] = h(x^3) = x$$

A função f é injectiva.

pág. 25

Papel 100% Reciclado

Exemplo: Seja a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow x^2$$

A função f não é injectiva.

Por exemplo, a função $h: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$y \longrightarrow \sqrt{y}$$

é inversa à direita de f:

$$\forall_{y \in \mathbb{R}_0^+} \quad (f h)(y) = f\left[h(y)\right] = f(\sqrt{y}) = y$$

mas não é inversa à esquerda de f

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad (h f)(x) = h\left[f(x)\right] = h(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

pág. 25

Transformações lineares injectivas

Teorema [3.13]

Seja a transformação linear $T: V \longrightarrow W$

Mostrar que se T é injectiva, então T é invertível e a função $T^{-1}: T(V) \rightarrow V$ é uma transformação linear.

Se T é injectiva, então T é invertível e a sua função inversa é

$$T^{-1}: T(V) \longrightarrow V$$

Mostremos que T^{-1} é uma transformação linear, isto é,

$$\forall_{y_1, y_2 \in T(V)} \ \forall_{\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega} \quad T^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 T^{-1}(y_1) + \alpha_2 T^{-1}(y_2)$$

pág. 27

Se T é injectiva, então:

$$\exists^1_{x_1 \in V} : y_1 = T(x_1) \Rightarrow x_1 = T^{-1}(y_1)$$

$$\exists^1_{x_2 \in V} : y_2 = T(x_2) \Rightarrow x_2 = T^{-1}(y_2)$$

Seja

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) \underset{T \text{ é linear}}{=} T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

Aplicando T^{-1} à expressão anterior

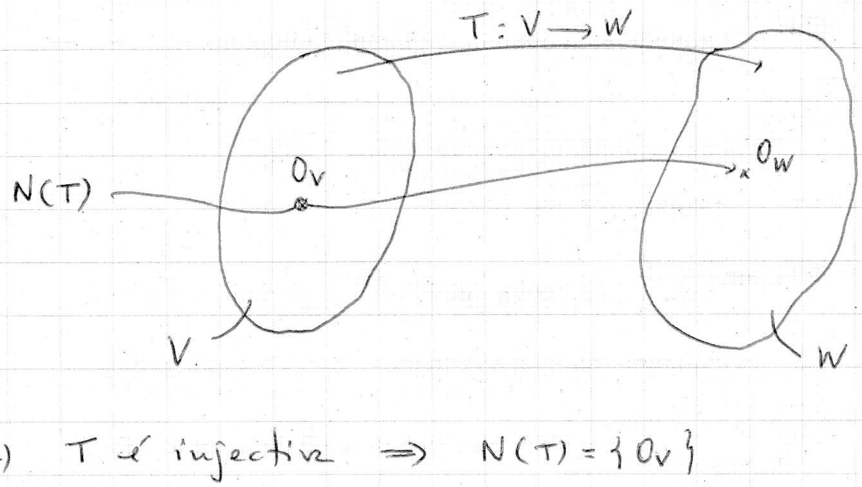
$$T^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = T^{-1}\left[T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\right] = I(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) =$$

$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 T^{-1}(y_1) + \alpha_2 T^{-1}(y_2) \quad \checkmark$$

Teorema [3.14]

Seja a transformação linear $T: V \longrightarrow W$

Mostrar que T é injectiva, se e só se $N(T) = \{0_V\}$



a) T é injectiva $\Rightarrow N(T) = \{0_V\}$

$$N(T) = \{x \in V : T(x) = 0_W\} = \{0_V\}$$

Seja $x \in N(T)$, isto é, $T(x) = 0_W$ pág. 27

Aplicando T^{-1} à expressão anterior

$$T^{-1}[T(x)] = T^{-1}(0_W) \Rightarrow I(x) = T^{-1}(0_W) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = T^{-1}(0_W) \underbrace{\Rightarrow}_{T^{-1}\text{ é linear}} x = 0_V$$

Conclui-se que $N(T) = \{0_V\}$

b) Se $N(T) = \{0_V\} \Rightarrow T$ é injectiva

Pretende-se mostrar que

$$\forall_{x_1, x_2 \in V} \quad T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{se} \quad N(T) = \{0_V\}$$

$$T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow T(x_1) - T(x_2) = 0_W \underbrace{\Rightarrow}_{T\text{ é linear}} T(x_1 - x_2) = 0_W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 \in N(T) \underbrace{\Rightarrow}_{N(T)=\{0_V\}} x_1 - x_2 = 0_V \Rightarrow x_1 = x_2$$

Além disso, se $N(T) = \{0_V\}$ então Base $N(T) = \{\}$ e $\dim N(T) = 0$. Então, se $\dim V = n$ (finita) o teorema da dimensão permite concluir que

$$\dim V = \underbrace{\dim N(T)}_{=0} + \dim T(V) \Rightarrow \dim V = \dim T(V)$$

pág. 27

Wiz

Exemplo 25 [3.39]

Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longrightarrow (x+z,\ y+z,\ x+y)$$

No exemplo 18 verificou-se que

$N(T) = \{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$, Base $N(T) = \{\}$ e $\dim N(T) = 0$

o que permite concluir, uma vez que T é uma transformação linear, que T é injectiva, ou seja, é invertível.

No exemplo 18 verificou-se, ainda, que T é sobrejectiva

$T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$, Base $T(\mathbb{R}^3) =$ Base $\mathbb{R}^3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e

$\dim T(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3$.

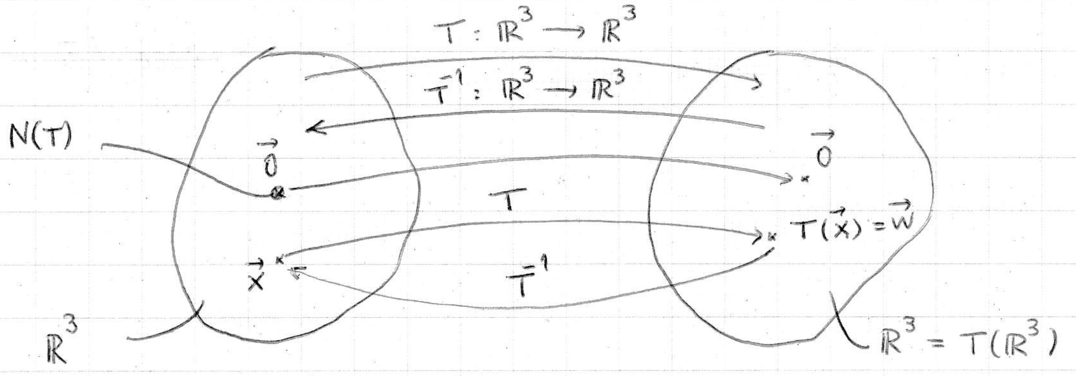
Portanto, a função T é bijectiva, já que é injectiva e sobrejectiva, e a sua função inversa é do tipo

$$T^{-1}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Tendo em atenção os resultados obtidos no exemplo 18 obtém-se

$$T^{-1}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(w_1, w_2, w_3) \longrightarrow \left(\frac{w_1 - w_2 + w_3}{2}, \frac{-w_1 + w_2 + w_3}{2}, \frac{w_1 + w_2 - w_3}{2}\right)$$



~~pág. 28~~

Wrij

Exemplo 26:

Seja a transformação linear $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y) \longrightarrow (x+y,\ 2x+3y,\ x+2y)$$

No exemplo 19 verificou-se que

$$N(S) = \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2 \ , \quad \text{Base } N(S) = \{\ \} \ \text{ e } \dim N(S) = 0$$

o que permite concluir, uma vez que S é uma transformação linear, que S é injectiva, ou seja, é invertível.

No exemplo 19 verificou-se, ainda, que S não é sobrejectiva

$$S(\mathbb{R}^2) = \{ \vec{w} = (w_1, w_2, -w_1+w_2) \in \mathbb{R}^3 \} \subset \mathbb{R}^3 \ ,$$

$$\text{Base } S(\mathbb{R}^2) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\} = \{(1,0,-1), (0,1,1)\} \ \text{ e } \dim S(\mathbb{R}^2) = 2$$

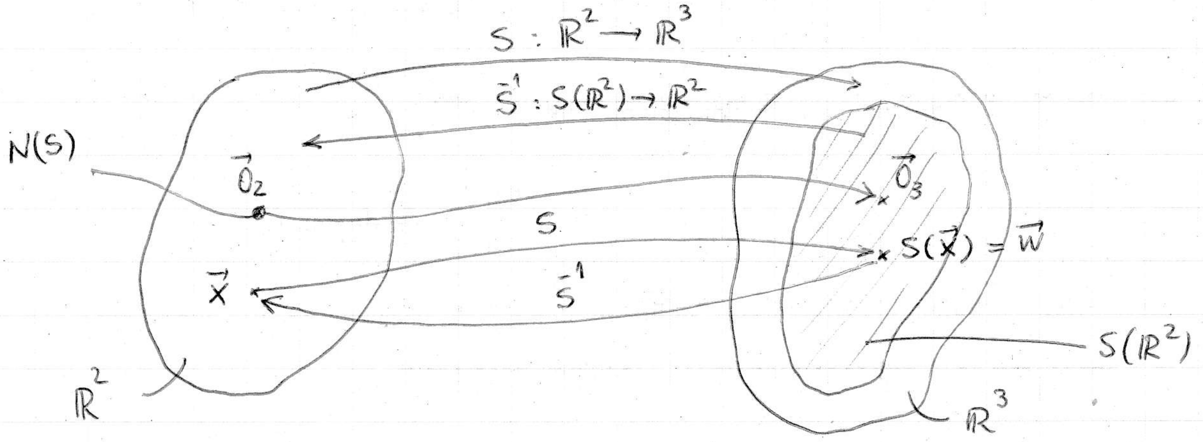
Portanto, a função S não é bijectiva, já que não é sobrejectiva, e a sua função inversa é do tipo

$$S^{-1} : S(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Tendo em atenção os resultados obtidos no exemplo 19 obtém-se

$$S^{-1} : \ S(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(w_1, w_2, -w_1+w_2) \rightarrow (3w_1 - w_2,\ -2w_1 + w_2)$$



Teorema [3.15]

Seja a transformação linear $T: V \longrightarrow W$ em que $\dim V = n$.

Para demonstrar a equivalência das 3 proposições

$$a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c)$$

vamos recorrer ao seguinte procedimento

$$a) \underset{i)}{\Longrightarrow} b) \underset{ii)}{\Longrightarrow} c) \underset{iii)}{\Longrightarrow} a)$$

i) a) $\Rightarrow$ b)

Se T é injectiva e se $U_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_r\}$ é um conjunto linearmente independente $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $U_1^* = \{T(\bar{u}_1), T(\bar{u}_2), \ldots, T(\bar{u}_r)\} \subset T(V)$ é um conjunto linearmente independente

Pretende-se mostrar que

$$\alpha_1 T(\bar{u}_1) + \alpha_2 T(\bar{u}_2) + \cdots + \alpha_r T(\bar{u}_r) = \bar{0}_W \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$$

Sendo T uma transformação linear

$$T(\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \cdots + \alpha_r \bar{u}_r) = 0_W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \cdots + \alpha_r \bar{u}_r \in N(T) \Rightarrow$$

T é injectiva, $N(T) = \{\bar{0}_V\}$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \cdots + \alpha_r \bar{u}_r = \vec{0}_V \Rightarrow$$

U_1 é linearmente independente

$\Rightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$, ou seja, U_1^* é um conjunto linearmente independente.

pág. 30

Wnj

ii) Se $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} \subset V$ é uma base para V, então U é linearmente independente $\xrightarrow{b)}$

$\Rightarrow$ $U^* = \{T(\vec{u}_1), T(\vec{u}_2), \dots, T(\vec{u}_n)\} \subset T(V)$ é um conjunto linearmente independente.

Por outro lado, sabendo que $\dim V = n$ e $\dim N(T) = 0$ (T é injectiva), então

$$\dim T(V) = \underbrace{\dim V}_{=n} - \underbrace{\dim N(T)}_{=0} = n$$

Dado que U^* é um conjunto de n elementos linearmente independentes do subespaço $L(U^*) = T(V)$, conclui-se que U^* é uma base para $T(V)$.

iii) Neste caso pretende-se mostrar que T é injectiva, ou seja, que

$$N(T) = \{\vec{0}_V\}$$

Sabendo que $N(T) = \{\vec{x} \in V : T(\vec{x}) = \vec{0}_W\}$ e tendo em atenção que

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n \in V$$

para um determinado conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (que é único, já que U é uma base para V), então

$$T(\vec{x}) = T(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n) = \vec{0}_W \xrightarrow{T \text{ é linear}}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 T(\vec{u}_1) + \alpha_2 T(\vec{u}_2) + \dots + \alpha_n T(\vec{u}_n) = \vec{0}_W \xrightarrow{U^* \text{ é linearmente independente}}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}_V \in V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(T) = \{\vec{0}_V\} \xrightarrow{T \text{ é linear}} T \text{ é injectiva}$$

pág. 30

Teorema [3.16]

Seja a transformação linear $T: V \to W$, tal que

$\dim V = \dim W = n$

Se T é injectiva, as propriedades demonstradas no teorema anterior permitem observar o seguinte:

- $\dim T(V) = \underbrace{\dim V}_{=n} - \underbrace{\dim N(T)}_{=0} = n$, ou seja,

  $\dim T(V) = \dim W = n \Rightarrow T(V) = W$ (a função é sobrejectiva).

- Assim, conclui-se que se $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ é uma base para V, então

$$U^* = \{T(\vec{u}_1), T(\vec{u}_2), \ldots, T(\vec{u}_n)\} \subset T(V) = W$$

é uma base para W

pág. 30

Exemplo: A transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z) = (x+z,\ y+z,\ x+y)$$

dos exemplos 18 e 25 é uma transformação linear bijectiva (injectiva e sobrejectiva). Assim, se

$$U = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ é uma base para } \mathbb{R}^3 \text{ (domínio)}$$

então

$$U^* = \{T(\vec{i}), T(\vec{j}), T(\vec{k})\} = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é uma base para $\mathbb{R}^3$ (conjunto de chegada).

pág. 30

Exemplo: A transformação linear $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$S(x,y) = (x+y,\ 2x+3y,\ x+2y)$$

dos exemplos 19 e 26 é uma transformação linear <u>injectiva</u> mas <u>não sobrejectiva</u>. Assim, se

$$V = \{(1,0), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ é uma base para } \mathbb{R}^2 \text{ (domínio)}$$

então

$$U^* = \{S(1,0), S(0,1)\} = \{(1,2,1), (1,3,2)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é uma base para $S(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ (contradomínio).

~~pág. 30~~

<u>Transformações lineares definidas por valores prescritos</u>

<u>Teorema [3.17]</u>

Sejam: $S_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ uma base ordenada para o espaço linear V ($\dim V = n$);

$U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ um conjunto de n elementos do espaço linear W.

Então, existe uma e uma só transformação linear

$$T : V \rightarrow W$$

tal que $T(\vec{v}_k) = \vec{u}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$

definida por

$$\forall_{\vec{x} \in V} : \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i \Rightarrow T(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i,\ x_i \in \Omega$$

$$T(\vec{x}) = T\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i T(\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i$$

é linear

~~pág. 31~~

Exemplo 27 [3.46]

$$T(\vec{v}_1) = T(1,0,1) = (2,2,0,1) = T(\vec{i}+\vec{k}) = T(\vec{i}) + T(\vec{k})$$

$$T(\vec{v}_2) = T(0,1,-1) = (0,-1,1,0) = T(\vec{j}-\vec{k}) = T(\vec{j}) - T(\vec{k})$$

$$T(\vec{v}_3) = T(1,-1,0) = (0,1,1,-1) = T(\vec{i}-\vec{j}) = T(\vec{i}) - T(\vec{j})$$

$$\begin{cases} T(\vec{i}) + T(\vec{k}) = (2,2,0,1) \\ T(\vec{j}) - T(\vec{k}) = (0,-1,1,0) \\ T(\vec{i}) - T(\vec{j}) = (0,1,1,-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T(\vec{i}) = (2,2,0,1) - T(\vec{k}) \\ T(\vec{j}) = (0,-1,1,0) + T(\vec{k}) \\ (2,2,0,1) - T(\vec{k}) - (0,-1,1,0) - T(\vec{k}) = (0,1,1,-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ -2T(\vec{k}) = (-2,-2,2,-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(\vec{i}) = (1,1,1,0) \\ T(\vec{j}) = (1,0,0,1) \\ T(\vec{k}) = (1,1,-1,1) \end{cases}$$

Considerando $\vec{x} = (x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, resulta

$$T(\vec{x}) = T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x\,T(\vec{i}) + y\,T(\vec{j}) + z\,T(\vec{k}) =$$

$$= x(1,1,1,0) + y(1,0,0,1) + z(1,1,-1,1)$$

Obtém-se para a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$T(x,y,z) = (x+y+z,\ x+z,\ x-z,\ y+z).$$

pág. 32

Papel 100% Reciclado