UNIVERSIDADE DO MINHO		6 de fevereiro de 2012
	Álgebra Linear	
	Exame de Recurso - **A**	
LEI	Esboço de possível resolução	Duração: 2 horas

Nome: ____ **Nº:** _________

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** *têm cotação negativa.*

1. **a)** Se $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, com $b \in \mathbb{R}$, e $AC = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ então $A(B+C) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & b \end{pmatrix}$. V F

b) A matriz, de ordem n, $A = [a_{ij}]$ com $a_{ij} = i^2 + j^2$ é uma matriz simétrica. V F

c) Se $A = \begin{pmatrix} x & 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $AB^T = 0$. V F

2. **a)** A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k-3 \\ -2 & k-2 \end{pmatrix}$ tem característica 2 para qualquer valor real, não nulo, k. V F

b) A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ tem determinante nulo, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$. V F

c) Sendo A e B matrizes de ordem $n > 1$ invertíveis e $AB = I_n$, tem-se $A^{-1} = B$ e $B^{-1} = A$. V F

3. Sejam $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{y} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$ e $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$ quatro vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) Os vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ geram um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$. V F

b) $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. V F

c) Existem reais α, β e γ, tais que, $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \gamma\mathbf{z} = \mathbf{w}$. V F

4. Seja f uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, tal que, $f((-1, 3)) = (-1, 2, 1)$ e $f((-2, 3)) = (3, 3, 3)$.

a) $f((1, 0)) = (-2, -5, -4)$. V F

b) $f((0, 0)) = (1, 1, 1)$. V F

c) A matriz da aplicação linear f é de ordem 3×2. V F

II

Responda às questões deste grupo justificando a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

1. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

considere o sistema $AX = \mathbf{b}$, de variáveis x, y, z, cuja matriz ampliada é $[A|\mathbf{b}]$.

a) Complete de modo a obter afirmações verdadeiras.

i) O sistema $AX = \mathbf{b}$ é impossível se e só se $\alpha = 7$ e $\beta \neq 8$.

ii) O sistema $AX = \mathbf{b}$ é possível e indeterminado se e só se $\alpha = 7$ e $\beta = 8$.

iii) O sistema $AX = \mathbf{b}$ é possível e determinado se e só se $\alpha \neq 7$.

b) Considere o sistema homogéneo $AX = \mathbf{0}$, para $\alpha = 7$, e determine o seu conjunto solução.

A matriz dos coeficientes do sistema homogéneo é: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, tendo-se

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donde vem } \begin{cases} x + 2y + 3z &= 0 \\ \phantom{x+{}} 2y + 5z &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 2z \\ y &= -5z/2 \end{cases}$$

e assim o conjunto solução é $S = \{(2z, -5z/2, z), z \in \mathbb{R}\}$.

III

Responda às questões deste grupo justificando a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

1. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{(x, y, z) : \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$

a) Mostre que S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

b) Calcule, justificando, a dimensão de S.

c) Considere $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 2)\}$. Verifique se B é uma base de S.

d) Averigúe se o vector $(1, 2, 3)$ pertence ao subespaço gerado pelos vectores $(1, 0, 1)$ e $(-1, 1, 0)$.

a) De $x + y - z = 0 \Leftrightarrow x = z - y$ vem $S = \{(z - y, y, z) : \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}$.

- $S \neq \emptyset$, pois, por exemplo, $(0, 0, 0) \in U_0$.
- Sejam $\mathbf{a} = (z - y, y, z)$ e $\mathbf{b} = (z' - y', y', z)'$ elementos de S, com $y, y', z, z' \in \mathbb{R}$. Então $\mathbf{a} + \mathbf{b} = ((z + z') - (y + y'), y + y', z + z')$ e, portanto, é também um elemento de S.
- Seja $k \in \mathbb{R}$ e seja $\mathbf{a} = (z - y, y, z)$ um elemento de S, com $y, z \in \mathbb{R}$. Então $k\mathbf{a} = (k(z - y), ky, kz)$ e, portanto, é também um elemento de S.

Sendo S um subconjunto de $\mathbb{R}^3$, não vazio, fechado relativamente à soma de vectores e relativamente ao produto escalar, conclui-se que é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Tendo-se $(z-y,y,z)=z(1,0,1)+y(-1,1,0)$ vem que $S=\langle(1,0,1),(-1,1,0)\rangle$.

Tendo-se ainda $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, matriz cuja característica é 2, pode concluir-se que os vectores $\{(1,0,1),(-1,1,0)\}$ são linearmente independentes. Assim o conjunto $\{(1,0,1),(-1,1,0)\}$ constituí uma base do subespaço S, já que é formado por um conjunto de vectores geradores, de S, linearmente independentes.

c) Os vectores $(1,0,1)$ e $(1,1,2)$ pertencem ao subespaço S já que se tem $1+0-1=0$ e $1+1-2=0$.

De $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ temos uma matriz cuja característica é 2. Assim os dois vectores que constituem o conjunto B, e são também vectores de S, são linearmente independentes e, sendo pela alinea b) S um subespaço de dimensão 2, temos dois vectores linearmente independesntes num subespaço de dimensão 2, formando então uma base desse subespaço, S.

d) De $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ tendo-se $\begin{cases} x-y=1 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

E assim podemos escrever $(1,2,3)=3(1,0,1)+2(-1,1,0)$, e concluir que o vector $(1,2,3)$ pertence aos espaço gerado por $(1,0,1)$ e $(-1,1,0)$.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Escreva o polinómio característico da matriz A.

b) Verifique, justificando, que $\lambda=1$ é valor próprio de A.

c) Calcule os restantes valores próprios da matriz A.

d) Considere o valor próprio $\lambda=1$ e calcule o respectivo subespaço próprio.

[**a**) $p(\lambda)=|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{-2-\lambda} \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)$.

b) Se 1 é valor próprio então $|A-1.I|=0$.

Calculando $|A-1.I| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$, já que a matriz tem uma coluna toda de zeros, e pode concluir-se que $\lambda=1$ é valor próprio da matriz A.

c) Da alínea a), se $p(\lambda)=(-2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)$ e, sendo os valores próprios de A os valores que anulam os zeros do polinómio característico, tem-se

$$\begin{aligned} p(\lambda)=0 &\Leftrightarrow (-2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)=0 \\ &\Leftrightarrow (-2-\lambda)=0 \vee (4-\lambda)=0 \vee (1-\lambda)=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda=-2 \vee \lambda=4 \vee \lambda=1 \end{aligned}$$

sendo os restantes valores próprios da matriz A, -2 e 4.

d) De $Ax=\lambda x$ com $\lambda=1$ vem $(A-1I)x=0$.

$(A-1I) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

tendo-se o sistema homógeneo $\left\{\begin{array}{r} x+3z=0 \\ -7z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array}\right.$ com solução $S=\{(0,y,0): y\in\mathbb{R}\}$.
Assim, o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda=1$ é $U_{\lambda=1}=\{(0,y,0): y\in\mathbb{R}\}$.

3. Considere a aplicação linear $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f((1,1))=(1,2,1), \quad f((-1,1))=(-1,0,3).$$

a) Determine $f((1,0))$ e $f((0,1))$ e indique, justificando, qual a matriz da aplicação linear f relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

$f((1,0)) = f(\frac{1}{2}(1,1)-\frac{1}{2}(-1,1)) = \frac{1}{2}f((1,1))-\frac{1}{2}f((-1,1)) = \frac{1}{2}(1,2,1)-\frac{1}{2}(-1,0,3) = (1,1,-1)$
$f((0,1)) = f(\frac{1}{2}(1,1)+\frac{1}{2}(-1,1)) = \frac{1}{2}f((1,1))+\frac{1}{2}f((-1,1)) = \frac{1}{2}(1,2,1)+\frac{1}{2}(-1,0,3) = (0,1,2)$

Os vectores, $(1,0)$ e $(0,1)$, constituem a base canónica de $\mathbb{R}^2$, pelo que a matriz da aplicação linear f em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Determine $f((x,y))$ com $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Veja-se que, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ -x+2y \end{pmatrix}$, pelo que, $f((x,y))=(x,x+y,-x+2y)$.

c) Determine $Nuc(f)$ e classifique, justificando, f quanto à injectividade.

O $Nuc(f)$ corresponde ao conjunto solução do sistema homogéneo associado à matriz da aplicação.

Logo, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right.$ e $Nuc(f)=\{(0,0)\}$.

Como $Nuc(f)$ é apenas constituído pelo vector nulo de $\mathbb{R}^2$, conclui-se que f é injectiva.

4. Seja P uma matriz quadrada de ordem n, invertível, e seja $T:\mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ a aplicação definida por

$$T(A)=P^{-1}AP, \quad \forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

Mostre que T é uma aplicação linear.

Veja-se que, $\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\begin{array}{rcl} T(A+B) & \underset{(1)}{=} & P^{-1}(A+B)P \\ & \underset{(2)}{=} & P^{-1}AP+P^{-1}BP \\ & \underset{(1)}{=} & T(A)+T(B) \end{array}$$

com (1): definição da aplicação T.
com (2): operação válida em $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Tem-se ainda que, $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(\alpha A) &\underset{(1)}{=} P^{-1}(\alpha A)P \\ &\underset{(2)}{=} \alpha P^{-1}AP \\ &\underset{(1)}{=} \alpha T(A) \end{aligned}$$

com (1): definição da aplicação T, e sabendo que $\alpha A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
com (2): operação válida em $\mathbb{R}^{n\times n}$.
E verificando a aplicação T, $T(A+B) = T(A) + T(B)$ e $T(\alpha A) = \alpha T(A)$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos concluir que T é uma aplicação linear.

Cotação:

I	II	III - 1	III - 2	III - 3	III - 4
3	1.5+1	1+1+1+1	1+1+1+1.5	2+1+1.5	1.5
3	2.5	4	4.5	4.5	1.5