Álgebra Linear EE

1º semestre do ano letivo 2014/2015 — LEAP+MIEP+MIEM

Teste modelo 3 — 15 de setembro de 2014

Departamento de Matemática e Aplicações — Universidade do Minho

Curso: Número de inscrição: Nome: Número de aluno:

A prova tem a duração de 70 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. A prova é constituída por dois grupos e termina com a palavra "Fim". No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 20.

Grupo I — Para cada questão deste grupo, assinale através de uma cruz na tabela ao lado qual das quatro proposições é verdadeira (existe apenas uma por questão). Cotações — resposta certa: 1.5; nenhuma proposição selecionada: 0; resposta errada: −0.5, sendo 0 a cotação mínima neste grupo.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A								
B								
C								
D								

I.1 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $T(x, y, z) = (x - 2y - 2z, x - 2z, -2x + 4z)$. Então:

A $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

B $\mathrm{Im}(T) = \langle(-2, 0, 0)\rangle$.

C $\mathrm{Im}(T) = \langle(1, 1, -2), (-2, -2, 4)\rangle$.

D $\mathrm{Im}(T) = \langle(1, 1, -2), (-2, 0, 0)\rangle$.

I.2 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $T(x, y, z) = (x - 2y - 2z, x - 2z, -2x + 4z)$. Então:

A $\mathrm{Nuc}(T) = \langle(1, 1, -2), (-2, 0, 0), (-2, -2, 4)\rangle$.

B $\mathrm{Nuc}(T) = \{(0, 0, 0)\}$.

C $\mathrm{Nuc}(T) = \langle(2, 0, 1)\rangle$.

D $\mathrm{Nuc}(T) = \mathbb{R}^3$.

I.3 Seja A uma matriz de ordem três tal que $\lambda(A) = \{-1, 0, 1\}$. Então:

A A é invertível e $\lambda(A^{-1}) = \{0, 1\}$.

B A é singular e $\lambda(A^2) = \{0, 1\}$.

C A é invertível e $\lambda(A^{-1}) = \{-1, 0, 1\}$.

D A é invertível e $\lambda(A^2) = \{0, 1\}$.

I.4 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $T(a, b) = (a + b, 0, a + b)$. Então:

A $\mathrm{Nuc}(T) \subset \mathbb{R}^3$ e $c_T = 1$.

B $\mathrm{Im}(T) = \langle(1, 0, 1)\rangle$ e $n_T = 1$.

C $\mathrm{Nuc}(T) = \langle(1, 0)\rangle$ e $c_T = 1$.

D $c_T + n_T = 3$.

I.5 Sejam $T_1,\ T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = T_1(x)T_2(x)$ é uma aplicação linear.
- $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = T_1(x) + T_2(x)$ é uma aplicação linear.

A São ambas verdadeiras.

B São ambas falsas.

C Apenas a primeira é verdadeira.

D Apenas a segunda é verdadeira.

I.6 Seja $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tal que $f(p, q, r) = p + q - r$. Então, a matriz da transformação linear f é:

A $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

B $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

C $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

D $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

I.7 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ a & b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. A condição que a e b devem verificar para que $(3, 1)$ seja um vetor próprio de A é:

A $a + b = 1$.

B $3a + b = 6$.

C $a + b = 6$.

D $3a + b = 2$.

I.8 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Então:

A $E_3 = \{(a, -a) : a \in \mathbb{C}\}$.

B $E_3 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{C}\}$.

C $E_3 = \{(a, a) : a \in \mathbb{C}\}$.

D $E_3 = \{(0, a) : a \in \mathbb{C}\}$.

Grupo II — Responda, nas folhas que lhe foram distribuídas e por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar, bem como as respetivas justificações. Cotações: 4.0+4.0.

II.1 Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 2) = (2, 2, 0)$ e $T(1, 0) = (0, 0, 1)$. Determine $T(x, y)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

II.2 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $\lambda(A) = \{0, 2\}$.

(b) Determine o espaço próprio do valor próprio de maior módulo da matriz A (mesmo que não tenha conseguido resolver a alínea anterior, nesta alínea deve calcular E_2).

Fim.

Álgebra Linear EE

1º semestre do ano letivo 2014/2015 — LEAP+MIEP+MIEM

Soluções do Teste modelo 3 — 15 de setembro de 2014

Departamento de Matemática e Aplicações — Universidade do Minho

Curso: Número de inscrição: Nome: Número de aluno:

A prova tem a duração de 70 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. A prova é constituída por dois grupos e termina com a palavra "Fim". No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 20.

Grupo I — Para cada questão deste grupo, assinale através de uma cruz na tabela ao lado qual das quatro proposições é verdadeira (existe apenas uma por questão). Cotações — resposta certa: 1.5; nenhuma proposição selecionada: 0; resposta errada: −0.5, sendo 0 a cotação mínima neste grupo.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A						X	X	
B			X	X				
C		X						X
D	X				X			

I.1 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $T(x, y, z) = (x - 2y - 2z, x - 2z, -2x + 4z)$. Então:

A $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

B $\text{Im}(T) = \langle(-2, 0, 0)\rangle$.

C $\text{Im}(T) = \langle(1, 1, -2), (-2, -2, 4)\rangle$.

D $\text{Im}(T) = \langle(1, 1, -2), (-2, 0, 0)\rangle$.

I.2 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $T(x, y, z) = (x - 2y - 2z, x - 2z, -2x + 4z)$. Então:

A $\text{Nuc}(T) = \langle(1, 1, -2), (-2, 0, 0), (-2, -2, 4)\rangle$.

B $\text{Nuc}(T) = \{(0, 0, 0)\}$.

C $\text{Nuc}(T) = \langle(2, 0, 1)\rangle$.

D $\text{Nuc}(T) = \mathbb{R}^3$.

I.3 Seja A uma matriz de ordem três tal que $\lambda(A) = \{-1, 0, 1\}$. Então:

A A é invertível e $\lambda(A^{-1}) = \{0, 1\}$.

B A é singular e $\lambda(A^2) = \{0, 1\}$.

C A é invertível e $\lambda(A^{-1}) = \{-1, 0, 1\}$.

D A é invertível e $\lambda(A^2) = \{0, 1\}$.

I.4 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $T(a, b) = (a + b, 0, a + b)$. Então:

A $\text{Nuc}(T) \subset \mathbb{R}^3$ e $c_T = 1$.

B $\text{Im}(T) = \langle(1, 0, 1)\rangle$ e $n_T = 1$.

C $\text{Nuc}(T) = \langle(1, 0)\rangle$ e $c_T = 1$.

D $c_T + n_T = 3$.

I.5 Sejam $T_1,\ T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = T_1(x)T_2(x)$ é uma aplicação linear.
- $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = T_1(x) + T_2(x)$ é uma aplicação linear.

A São ambas verdadeiras.

B São ambas falsas.

C Apenas a primeira é verdadeira.

D Apenas a segunda é verdadeira.

I.6 Seja $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tal que $f(p, q, r) = p + q - r$. Então, a matriz da transformação linear f é:

$\boxed{A}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. $\boxed{B}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. $\boxed{C}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\boxed{D}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

I.7 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ a & b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. A condição que a e b devem verificar para que $(3, 1)$ seja um vetor próprio de A é:

$\boxed{A}$ $a + b = 1$. $\boxed{B}$ $3a + b = 6$. $\boxed{C}$ $a + b = 6$. $\boxed{D}$ $3a + b = 2$.

I.8 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Então:

$\boxed{A}$ $E_3 = \{(a, -a) : a \in \mathbb{C}\}$. $\boxed{B}$ $E_3 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{C}\}$. $\boxed{C}$ $E_3 = \{(a, a) : a \in \mathbb{C}\}$. $\boxed{D}$ $E_3 = \{(0, a) : a \in \mathbb{C}\}$.

Grupo II — Responda, nas folhas que lhe foram distribuídas e por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar, bem como as respetivas justificações. Cotações: 4.0+4.0.

II.1 Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 2) = (2, 2, 0)$ e $T(1, 0) = (0, 0, 1)$. Determine $T(x, y)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução

$T(x, y) = (y, y, x - \frac{y}{2})$.

II.2 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $\lambda(A) = \{0, 2\}$.

(b) Determine o espaço próprio do valor próprio de maior módulo da matriz A (mesmo que não tenha conseguido resolver a alínea anterior, nesta alínea deve calcular E_2).

Solução

(b) $E_2 = \{(a, -a, a) : a \in \mathbb{C}\}$.

Fim.