Problema : Sebenta

238 c) $R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longrightarrow (x+z,\ 0,\ x+y)$$

Vamos começar por provar que R é uma transformação linear.

1.) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \quad R(\vec{x}+\vec{y}) = R(\vec{x}) + R(\vec{y})$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow R(\vec{x}) = R(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_3, 0, x_1+x_2)$

$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \Rightarrow R(\vec{y}) = R(y_1, y_2, y_3) = (y_1+y_3, 0, y_1+y_2)$

$R(\vec{x}) + R(\vec{y}) = (x_1+x_3+y_1+y_3,\ 0,\ x_1+x_2+y_1+y_2)$

$R(\vec{x}+\vec{y}) = R(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3) \Leftrightarrow$

$\vec{x}+\vec{y} = (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)$

$\Leftrightarrow R(\vec{x}+\vec{y}) = (x_1+y_1+x_3+y_3,\ 0,\ x_1+y_1+x_2+y_2)$

Conclui-se que

$$R(\vec{x}+\vec{y}) = R(\vec{x}) + R(\vec{y})$$

2.) $\forall_{\vec{x} \in \mathbb{R}^3} \quad \forall_{k \in \mathbb{R}} \quad R(k\vec{x}) = k\,R(\vec{x})$

$k\,R(\vec{x}) = k\,R(x_1, x_2, x_3) = k\,(x_1+x_3, 0, x_1+x_2) =$

$= (kx_1+kx_3,\ 0,\ kx_1+kx_2)$

$k\vec{x} = k(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, kx_2, kx_3)$

$R(k\vec{x}) = R(kx_1, kx_2, kx_3) = (kx_1+kx_3,\ 0,\ kx_1+kx_2)$

Conclui-se que

$$R(k\vec{x}) = k\,R(\vec{x})$$

A função R é uma transformação linear.

Wiz

Caracterização do núcleo:

$$N(R) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : R(\vec{x}) = (0,0,0) \}$$

$$R(x,y,z) = (x+z, 0, x+y) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ 0=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases} \forall_{z\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{N(R) = \{\vec{x}=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=-z \wedge y=z\} = \{ \vec{x} = (-z,z,z) \in \mathbb{R}^3 \}}$$

Base $N(R) = \{(-1,1,1)\}$

$\dim N(R) = 1 > 0 \Rightarrow R$ não é injectiva

Caracterização do contradomínio

$$R(\mathbb{R}^3) = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 : R(\vec{x}) = \vec{y} \}$$

Recorrendo ao teorema da dimensão tem-se:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(R) + \dim R(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dim R(\mathbb{R}^3) = 3-1 = 2 \Rightarrow R(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow R$ não é sobrejectiva

Seja $\vec{y} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$$R(x,y,z) = (x+z, 0, x+y) = (a,b,c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=a \\ 0=b \\ x+y=c \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right] \quad (*)$$

O sistema é <u>impossível</u>, se $b \neq 0 \Rightarrow \vec{y} \notin R(\mathbb{R}^3)$

O sistema é <u>possível</u>, se $b=0 \Rightarrow \vec{y} \in R(\mathbb{R}^3)$

Então

$$\boxed{R(\mathbb{R}^3) = \{ \vec{y} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b=0 \} = \{ \vec{y} = (a,0,c) \in \mathbb{R}^3 \}}$$

Base $R(\mathbb{R}^3) = \{ (1,0,0), (0,0,1) \}$

$\dim R(\mathbb{R}^3) = 2$

Convém referir que se $b=0$ o sistema $(*)$ é possível e simplesmente indeterminado e tem como solução

$$\begin{cases} x = a - z \\ y = (c-a) - z \end{cases} \quad (b=0)$$

Tal permite concluir que cada elemento de $R(\mathbb{R}^3)$ é imagem de uma infinidade de elementos do domínio, pelo que a transformação linear R não é injectiva.

José Araújo Barbosa