Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Avaliação

*** Não são consideradas as folhas sem identificação. Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não é possível a utilização de máquinas de calcular gráficas nem de microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**9,2**] Considere as transformações lineares $S \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, tal que $S(x, y) = (2x - y, x - y, -x + 2y)$, e $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, representada pela matriz

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Sejam as bases E_2, base canónica para o espaço $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{U} = \{(1,-1), (0,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathrm{B} = \{(1,0,1), (0,0,1), (1,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *S*. Para cada um destes subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que ambas as funções são injetivas e que apenas *T* é bijetiva; determine as respetivas transformações inversas.

c) Usando o cálculo matricial, obtenha as matrizes $\boldsymbol{S}_{\mathrm{U,E_3}} = m(S)_{\mathrm{U,E_3}}$, representação matricial de *S* em relação às bases U e E_3, e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E_3,B}} = m(T)_{\mathrm{E_3,B}}$, representação matricial de *T* em relação às bases E_3 e B.

d) Determine a matriz da composição possível de *S* com T^2 em relação às bases U e B (tenha em atenção a informação decorrente das alíneas anteriores).

2) [**1,3**] Seja a transformação linear $S : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, em que $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{W} = n$, e admita que *S* é injetiva. Mostre que *S* é bijetiva e que a sua inversa é também uma transformação linear.

.... ***(continua no verso)***

GRUPO II

3) [**2,8**] Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o determinante da matriz real

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ 2 & -2 & k & 8 \\ 5 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Admitindo que ***D*** é não singular, obtenha o valor de *k* para que $|\boldsymbol{D}|=\left|4\boldsymbol{D}^{-1}\right|$.

GRUPO III

4) [**5,5**] Seja a transformação linear $G\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{G}=m(G)=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule o valor do parâmetro real α, tal que $\vec{x}=(\alpha,\alpha,0)$ é um dos vetores próprios da matriz ***G***.

b) Determine os valores próprios e os respetivos espaços próprios e indique, para cada um desses subespaços, uma base e a dimensão.

c) Verifique, justificando devidamente, se a transformação linear admite uma base, U, de vetores próprios para o espaço $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, obtenha as matrizes $\boldsymbol{G}_{\mathrm{U,U}}$ e $\boldsymbol{G}_{\mathrm{U,E}}$, e diga se alguma destas matrizes é semelhante à matriz ***G***, apresentando as expressões matriciais que as relacionam.

5) [**1,2**] Seja a transformação linear $S\ :\ \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, em que $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{W} = n$, e admita que S é injetiva; considere o conjunto $\mathrm{U}=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_k\}\subset \mathrm{V}$. Estabeleça as condições para que o conjunto $\mathrm{U}_S=\{S(u_1),S(u_2),S(u_3),\ldots,S(u_k)\}$ seja uma base para W. Justifique a resposta.