"Oh dear! Oh dear!
I shall be too late!".- said the White Rabbit
Alice's Adventures in Wonderland, Lewis Carroll

5. Valores e Vectores Próprios

- Definição de valores e vectores próprios de uma matriz.
- Cálculo de valores e vectores próprios de uma matriz
- Diagonalização.

Definição

Seja A uma matriz de ordem n. Diz-se que λ é um valor próprio de A se e só existir um vector $x \in R^n$, não nulo, tal que

$$Ax = \lambda x.$$

Designa-se o vector x por vector próprio associado ao valor próprio λ.

Exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tem-se para $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\lambda = 2$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda = 2$ é um valor próprio de A associado ao vector próprio $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exemplos:

1. Seja A a matriz nula O_n de ordem n. Então,

$$\{\text{valores próprios de A}\} = \{0\} \quad \text{e}$$

$$\{\text{vectores próprios de A}\} = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Cada elemento de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ é um vector próprio associado ao valor próprio 0 de A.

2. Para $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, tem-se

$$Ax = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x$$

Portanto, 3 é valor próprio de A associado a cada vector de $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

• Chama-se espectro da matriz A ao conjunto de todos os valores próprios da matriz A, que se representa por $\lambda(A)$.

• Um vector próprio está associado apenas a um valor próprio

De facto, se λ' é outro valor próprio associado a x, então tem-se $Ax = \lambda x$ e $Ax = \lambda' x$.

Logo, $\lambda x = \lambda' x$ donde $(\lambda - \lambda')x = 0$. Dado que $x \neq 0$, deduz-se assim que $\lambda - \lambda' = 0$, ou seja, que $\lambda = \lambda'$.

• Um valor próprio está associado uma infinidade de vectores próprios.

Na verdade, se x é um vector próprio associado ao valor próprio λ, então, αx, com $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, também é um vector próprio associado ao valor próprio λ.

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A(\alpha x) = \lambda(\alpha x), \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Teorema

Seja A uma matriz de ordem n. Um escalar λ é um valor próprio de A se e só

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Demonstração:

Para um número real λ são válidas as seguintes equivalências,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ é valor próprio de } A \quad &\Leftrightarrow \quad Ax = \lambda x \text{ para algum } x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)x = 0 \text{ para algum } x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)x = 0 \text{ é um sistema indeterminado} \\
&\Leftrightarrow \quad A - \lambda I \text{ é uma matriz não invertível} \\
&\Leftrightarrow \quad |A - \lambda I| = 0
\end{aligned}$$

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -2-\lambda & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -(2+\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -(2+\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -(2+\lambda)(4-\lambda)(-2-\lambda) = (2+\lambda)^2(4-\lambda)
\end{aligned}$$

Os valores próprios sao $\lambda = -2$ e$\lambda = 4$

• Designa-se por polinómio característico o polinómio, em λ, $det(A - \lambda I_n)$. Este polinómio é de grau n, ordem da matriz A.

• Chama-se equação característica à equação $p(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$.

Note-se que as raízes da equação característica são os valores próprios da matriz A.

Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, (m \leq n)$, são raízes do polinómio característico (ou seja valores próprios de A), então este pode ser factorizado do seguinte modo:

$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots (\lambda - \lambda_n)^{r_n}.$$

em que $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = n$.
Diz-se que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ têm multiplicidade algébrica $r_1, r_2, \ldots, r_n$, respectivamente.

polinómio característico: $p(\lambda) = (2+\lambda)^2(4-\lambda)$

equação característica: $p(\lambda) = (2+\lambda)^2(4-\lambda) = 0$

Donde os valores próprios de A são $\lambda = -2$ de multiplicidade (algébrica) 2 e $\lambda = 4$ de multiplicidade 1 (simples).

um subespaço próprio importante

Se λ é um valor próprio de uma matriz A, de ordem n então o conjunto

$$U_\lambda = \{x : Ax = \lambda x\},$$

incluindo o vector nulo, é um subespaço, designado por subespaço próprio associado ao valor próprio λ.

À dimensão do subespaço próprio chama-se multiplicidade geométrica do valor próprio λ

Exemplo

A matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, com valores próprios $\lambda = -2$, de multiplicidade algébrica 2, e $\lambda = 4$ simples.

De modo a determinar o subespaço associado a $\lambda = 4$ temos que resolver o sistema $(A - 4I_3)X = 0$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sistema reduz-se a $x = 0, y - z = 0$, sendo então o conjunto solução, constituído por vectores da forma:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix},$$

tendo-se, o subespaço próprio associado a $\lambda = 4$:

$U_{\lambda=4} = \{(0, y, y), y \in \mathbb{R}\}$, o qual tem dimensão 1, sendo $\lambda = -2$ de multiplicidade geométrica 1.

De modo a determinar o subespaço associado a $\lambda = -2$ temos que resolver o sistema $(A + 2I_3)X = 0$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sistema reduz-se a $x = y, z = 0$, sendo então o conjunto solução, constituído por vectores da forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

tendo-se, o subespaço próprio associado a $\lambda = -2$:

$$U_{\lambda=-2} = \{(x, x, 0), x \in \mathbb{R}\}$$

o qual tem dimensão 1, sendo $\lambda = -2$ de multiplicidade geométrica 1.

Propriedades

- Os valores próprios de uma matriz diagonal são os elementos da diagonal.

- Os valores próprios de uma matriz triangular superior (inferior) são os elementos da diagonal.

- Seja A uma matriz de ordem n. Se λ é valor próprio de A então $\alpha\lambda$ é valor próprio de αA, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

- Se β é um número, então $\lambda + \beta$ é um valor próprio de $A + \beta I$ e x é um vector próprio associado.

- Seja A uma matriz de ordem n. Se λ é valor próprio de A associado ao vector próprio x, então λ^n é valor próprio de A^n associado ao vector próprio x.

- A é invertível se e só se $\lambda \neq 0$. Neste caso, $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de A^{-1} e x é um vector próprio associado.

- λ é um valor próprio de A^T.

Definição

Duas matrizes A e B dizem-se semelhantes se existir uma matriz S, invertível , tal que

$$B = S^{-1}AS$$

Teorema

Duas matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios.

Demonstração

Sejam A e B duas matrizes semelhantes. Então existe uma matriz S, invertível tal que $B = SAS^{-1}$.

Assim, vejamos que têm iguais polinómios característicos

$$p_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |SAS^{-1} - \lambda(SS^{-1})| = |SAS^{-1} - S\lambda S^{-1}|$$

$$= |S(A - \lambda I)S^{-1}| = |S||(A - \lambda I)||S^{-1}| = |S||(A - \lambda I)|\frac{1}{|S|}$$

$$= |A - \lambda I| =$$

$$= p_A(\lambda)$$

Teorema

Sejam A e B matrizes semelhantes.
Se x é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ, então $S^{-1}x$ é vector próprio de B associado ao valor próprio λ.

Demonstração:

Seja B semelhante a A, ou seja, existe S, invertível, tal que: $B = S^{-1}AS$.
Se x é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ, então

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x \quad & \Rightarrow S^{-1}ASS^{-1}x = S^{-1}\lambda x \\ & \Rightarrow (S^{-1}AS)(S^{-1}x) = \lambda(S^{-1}x) \\ & \Rightarrow B(S^{-1}x) = \lambda(S^{-1}x) \end{aligned}$$

ou seja $S^{-1}x$ é vector próprio de B associado ao valor próprio λ.

Relativamente à matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

- **Subespaço próprio associado a $\lambda = -1$**

$(A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow (A + I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x = 0$; $U_{\lambda=-1} = \{(-2y, y) : y \in \mathbb{R}\}$

- **Subespaço próprio associado a $\lambda = 5$**

$(A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow (A - 5I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x = 0$;

$U_{\lambda=5} = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ Tem-se: $S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $S^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

e então $D = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Note-se que:

$$dimU_{\lambda=-1} + dimU_{\lambda=5} = 1 + 1 = 2 = n$$

Teorema

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e suponhamos que A tem n vectores próprios $v_1, \ldots, v_n$ associados, respectivamente, a valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (não necessariamente distintos), linearmente independentes. Seja S a matriz que tem esses vectores próprios como colunas e seja D a matriz diagonal com elementos diagonais iguais a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, i.e.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Então:

1. S é uma matriz invertível;
2. $D = S^{-1}AS$

Demonstração:

1. Sendo S a matriz $n \times n$ definida por $S = (v_1 \;\; v_2 \ldots v_n)$ e, por hipótese, $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, ter-se-á $car(S) = n$, o que garante que S é invertível.

2. Como $Av_i = \lambda_i v_i$, tem-se

$$\begin{aligned}
AS &= A(v_1, v_2 \ldots, v_n) \\
&= (Av_1, Av_2 \ldots, Av_n) \\
&= (A\lambda_1, A\lambda_2 \ldots, A\lambda_n) \\
&= (v_1, v_2 \ldots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= SD
\end{aligned}$$

De $AS = SD$ vem, multiplicando ambos os membros, à esquerda, por S^{-1}, que $D = S^{-1}AS$.

Definição

Uma matriz é diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal. Ou seja se existir uma matriz S, invertível, tal que

$$D = S^{-1}AS$$

é uma matriz diagonal.

Teorema

Uma matriz de ordem n é diagonalizável se e só se tem n vectores próprios linearmente independentes.

Corolário

Uma matriz de ordem n é diagonalizável se e só se existir uma base de R^n formada vectores próprios de A.

Exemplo

A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é diagonalizável.

Note-se que, sendo o polinómio característico de A, $p(\lambda) = (1-\lambda)^2$, o único valor próprio é 1.

Sendo $U_{\lambda=1} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, subespaço de dimensão 1, não é possível determinar 2 vectores próprios independentes.

Exemplo A matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável, uma vez que $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ e $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ são vectores próprios linearmente independentes.

Tem-se $S^{-1}AS = D$ com $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

A matriz S é a matriz cujas colunas são os vectores próprios, l. independentes, associados aos valores próprios.

A matriz D é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os valores próprios da matriz A.

Diagonalizacao de Matrizes Ortogonais Sendo P uma matriz ortogonal $P.P^T = I \Longrightarrow P^T = P^{-1}$ A matriz diagonal D obtém-se da igualdade $D = P^T.A.P$

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ são valores próprios da matriz A, de ordem n, distintos, e u_k é um vector próprio de A associado a λ_k, para cada k, então $u_1, \dots, u_s$ são vectores linearmente independentes.

Corolário

Se uma matriz A, de ordem n, tem n valores próprios distintos, então é A diagonalizável.

Corolário

Se uma matriz A, de ordem n, e suponhamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são todos os valores próprios distintos de A. Então A é diagonalizável se e só se

$$dim(U_{\lambda_1}) + \cdots + dim(U_{\lambda_k}) = n,$$

ou seja, o somatório das multiplicidades geométricas de $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ é igual a n.

Em síntese:
se A é de ordem n, então,

- se A tem valores próprios distintos, então A tem n vectores próprios linearmente independentes e é, portanto, diagonalizável;
- se A não tem n valores próprios distintos, A pode ou não ser diagonalizável; se a equação característica de A tiver uma raíz real múltipla, seria necessário averiguar se A tem ou não n vectores próprios linearmente independentes.

Exemplo
A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável, uma vez que tem dois valores próprios distintos -1 e 5.