

Funções reais de várias variáveis

1. Determina o domínio das seguintes funções reais de várias variáveis:

a) $f(x, y) = \sqrt{x+y}$	b) $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$
c) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2-y^2}$	d) $g(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$
e) $f(x, y, z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$	f) $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$
g) $f(x, y) = \sqrt{(x^2+y^2-16)\sin x}$	h) $f(x, y) = \frac{1}{\sin(xy)}$
i) $f(x, y) = \ln(x^2+y^2-4)$	j) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{\ln(x^2-y)}$
l) $f(x, y) = \arccos\left(\frac{x}{y^2}\right)$	m) $g(x, y) = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}-x^2\right)}$
n) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x+y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$	o) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\ln(x-y+2)} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ e & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

2. Uma loja vende cada unidade de um produto A a 2,5 euros e cada unidade do produto B a 1,4 euros. A expressão que descreve o dinheiro da venda dos produtos A e B em função do número de unidades vendidas do produto A (x) e do número de unidades vendidas do produto B (y) é $f(x, y) = 2,5x + 1,4y$.

Determina $f(100, 10)$ e diz qual o significado deste valor.

3. Considerando uma taxa de inflação a 5%, o valor actual de A euros daqui a t anos transforma-se em $P(A, t) = A \exp(-0.05t)$ euros.

Determina $P(100, 10)$ e diz qual o significado desse valor.

4. Um método de amostragem para determinar o número de indivíduos de uma determinada espécie animal numa área circunscrita consiste em:

- Primeiro, marcar R animais recolhidos nessa área e voltar a libertá-los para se misturarem com os não marcados.
- Numa data posterior, recolhe-se uma amostra de M animais dessa mesma área e são contados aqueles que foram marcados na primeira vez S .

É feita uma estimativa do número de animais existentes nessa área usando a fórmula $N = f(R, M, S) = \frac{RM}{S}$.

Determina $f(400, 400, 80)$ e diz qual o significado desse valor.

5. Considere-se que, num determinado período de tempo, o número de unidades de produto produzidas quando se usa x unidades de trabalho e y unidades de material é $f(x, y) = 60x^{3/4}y^{1/4}$.

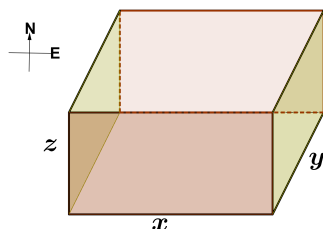
- (a) Se considerarmos 81 unidades de trabalho e 16 unidades de material, quantas unidades de produto são produzidas.
- (b) Verifica que, se a quantidade de trabalho e a quantidade de material duplicam, também o número de unidades de produto duplica.

6. Sob determinadas condições, se um casal com olhos castanhos tem k filhos, a probabilidade $P = P(r, k)$ de terem r filhos com olhos azuis é dada por

$$P(r, k) = \frac{k! \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{k-r}}{r!(k-r)!}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, k$$

Determina a probabilidade de um casal com 4 filhos ter 3 com olhos azuis.

7. Considere-se um edifício com dimensões x, y, z como mostra a figura.



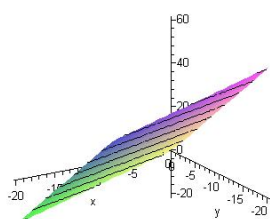
A perda diária de calor em cada lado do edifício, medida em unidades convenientes de calor por unidade de área é indicada na tabela.

Tecto	Lado Este	Lado Oeste	Norte	Sul	Chão
10	8	6	10	5	1

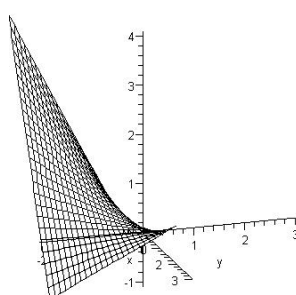
Represente-se por $f(x, y, z)$ a perda diária de calor no edifício.

- Escreve uma fórmula para $f(x, y, z)$.
 - Se a altura do edifício for de 50m, comprimento 100m e largura 70m, qual a perda diária de calor.
8. Represente geometricamente o gráfico das seguintes funções:
- $f(x, y) = x^2 + y^2$
 - $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
 - $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
 - $f(x, y) = x + y$
9. Considere as seguintes funções reais definidas em \mathbb{R}^2 :
- $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$
 - $f(x, y) = x - 3y$
 - $f(x, y) = y^2$
 - $f(x, y) = xy$

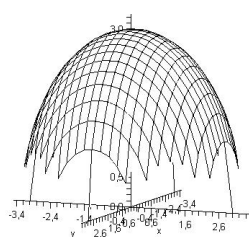
Estabeleça a correspondência correta entre as funções acima e os gráficos abaixo:



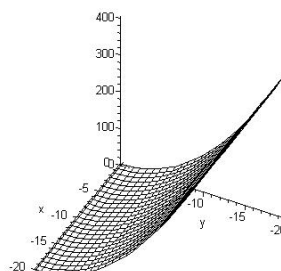
1)



2)



3)



4)

10. Representa as curvas de nível das funções:

(a) $f(x, y) = 3(1 - x - y)$

(b) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

(c) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(d) $f(x, y) = x^2$

(e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$

(f) $f(x, y) = \sin y$