Prova sem consulta. Duração: 1h30m (10m de tolerância) — 1ª Prova de Reavaliação

---

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta. Em cada pergunta da prova é apresentada a cotação prevista.**

GRUPO I

1. [7,0] Considere o conjunto $S=\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}\subset\mathbb{R}^4$, onde $\vec{a}=(2,1,1,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,1,0)$ e $\vec{c}=(1,2,1,0)$. Seja $H=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\ :\ y=0\ \wedge\ z-2w=0\right\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Determine:

a) O subespaço gerado pelo conjunto S, $L(S)$, e conclua em relação à sua dimensão. Indique uma base, U, para o subespaço obtido que inclua o maior número possível de elementos de S. Justifique.

b) A dimensão do subespaço H e uma base, W, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que inclua dois elementos não ortogonais de H e um elemento de $L(S)$. Justifique.

GRUPO II

2. [3,5] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|=1$, $\left\|\vec{c}\right\|=\sqrt{2}$, $S=\{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\}$ é um conjunto ortonormal, $\theta=\measuredangle(\vec{a},\vec{c})=\pi/3$, $\alpha=\measuredangle(\vec{b},\vec{c})=\pi/6$ e $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2(\vec{a}\times\vec{c})$. Calcule:

a) A norma do vetor $\vec{a}\times\vec{b}$.

b) A norma de vetor $\vec{d}$.

....*(continua no verso)*

GRUPO III

3. [**3,8**] Sejam as retas $r\ :\ X(u) = R + u\vec{a}\ ,\ u \in \mathbb{R}$, em que $R = (1,-1,2)$ e $\vec{a} = (1,-1,1)$, e $s\ :\ X(v) = S + v\vec{b}\ ,\ v \in \mathbb{R}$, tal que $S = (2,2,2)$ e $\vec{b} = (-1,2,1)$. Determine a equação cartesiana do plano, *M*, que é paralelo às retas dadas e que passa no ponto, *P*, do eixo dos *yy* mais próximo do ponto *R*.

4. [**2,0**] Sejam os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, e o ponto *P*.

a) Mostre que qualquer ponto X que verifique a condição $(X - P) \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$, pertence ao plano $M = \{P + s\vec{a} + t\vec{b}\ ,\ s,t \in \mathbb{R}\}$.

b) Recorrendo à Identidade de Lagrange, mostre que $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\operatorname{sen}(\theta)$, em que θ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

GRUPO IV

5. [**3,7**] Considere o plano $M\ :\ x + y = 1$ e a reta, *r*, com a equação vetorial $X(t) = P + t\vec{a}\ ,\ t \in \mathbb{R}$, tal que $P = (0,1,3)$ e $\vec{a} = (1,1,1)$. Obtenha a equação vetorial de uma reta, *h*, que passa no ponto $Q = (2,0,-1)$, é concorrente com a reta *r* e faz o ângulo $\alpha = \pi / 6$ com o plano *M*.

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI — Data / 02/ 21
Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica — Ano 1º — Semestre 1º
Nome José Augusto Trigo Barbosa

Espaço reservado para o avaliador

Descritores de desempenho considerados como critérios de correcção da 1ª Prova de Reavaliação (19/02/2021).

GRUPO I

1) a)

i) Cálculo do subespaço L(S):

$$L(S) = \{ \vec{x}\ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$\vec{x} = (x,y,z,w) = \alpha_1 (2,1,1,-1) + \alpha_2 (1,-1,1,0) + \alpha_3 (1,2,1,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad\quad\quad \\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 2 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ -1 & 0 & 0 & w \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ \leftarrow 2L_4 + L_1 \end{array} \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & 3 & 2y - x \\ 0 & 1 & 1 & 2z - x \\ 0 & 1 & 1 & 2w + x \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 3L_3 + L_2 \\ \leftarrow 3L_4 + L_2 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & 3 & 2y - x \\ 0 & 0 & 6 & 6z - 4x + 2y \\ 0 & 0 & 6 & 6w + 2x + 2y \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & 3 & 2y - x \\ 0 & 0 & 6 & 6z - 4x + 2y \\ 0 & 0 & 0 & 6w + 6x - 6z \end{array}\right]$$

O vector $\vec{x} = (x,y,z,w) \in L(S)$, se o sistema de equações for possível e determinado, ou seja, se

$$6w + 6x - 6z = 0 \Leftrightarrow z = x + w$$

Então

$$L(S) = \{ \vec{x} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z = x + w \} =$$
$$= \{ \vec{x} = (x, y, x+w, w) \in \mathbb{R}^4 \}$$

ii) Determinação da dimensão de L(S):

Sabendo que

$$\vec{x} = (x, y, x+w, w) =$$
$$= x\,(1,0,1,0) + y\,(0,1,0,0) + w\,(0,0,1,1) \in L(S)$$

então

$$V = \text{Base } L(S) = \{(1,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim L(S) = 3$$

iii) Determinação da base U para L(S):

Uma vez que $\dim L(S) = 3$ e sendo $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ um conjunto gerador de L(S) formado por três elementos de L(S), conclui-se que S é um conjunto linearmente independente, sendo, portanto, a base para L(S). Conclui-se, então, que

$$U = S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$$

b)

i) Determinação da dimensão de H:

Considerando

$$H = \{\vec{x} = (x, 0, 2w, w) \in \mathbb{R}^4\} =$$
$$= \{\vec{x} = x\,(1,0,0,0) + w\,(0,0,2,1) \in \mathbb{R}^4\}$$

conclui-se que

$$Q = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2\} = \{(1,0,0,0), (0,0,2,1)\}$$ é uma base

para H $\Rightarrow$ $\dim H = 2$

ii) Escolha de dois elementos linearmente independentes e não ortogonais de H:

Considerando $\vec{w}_1 = (1,0,0,0) \in H$, seleccione-se em H um elemento não colinear e não ortogonal a $\vec{w}_1$; seja, por exemplo,

$$\vec{w}_2 = (1,0,2,1) \in H$$

iii) Escolha de um elemento de $L(S)$:

O vector $\vec{w}_3 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}$ deve verificar as seguintes condições:

- $\vec{w}_3 \in L(S)$
- $\vec{w}_3 \notin H$, para que $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ seja linearmente independente

Seja, por exemplo, $\vec{w}_3 = (0,1,0,0)$.

iv) Escolha do vector $\vec{w}_4$

O vector $\vec{w}_4 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}$ deve verificar a seguinte condição:

- $\vec{w}_4 \notin L(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$, para que

$$W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$$

seja um conjunto linearmente independente e, portanto, uma base para $\mathbb{R}^4$.

Seja, por exemplo, o vector

$$\vec{w}_4 = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}$$

tal que

$$\begin{cases} \vec{w}_4 \cdot \vec{w}_1 = 0 \\ \vec{w}_4 \cdot \vec{w}_2 = 0 \\ \vec{w}_4 \cdot \vec{w}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2z + w = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ w = -2z \end{cases}$$

Seleccione-se, por exemplo, o vector $\vec{w}_4 = (0,0,1,-2)$

Wir

GRUPO II

2) a)

i) Definição do valor de $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \underbrace{\|\vec{a}\|^2}_{=1}\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

ii) Determinação de $\|\vec{b}\|$:

$$\|\vec{b}\times\vec{c}\| = \|\vec{b}\|\,\|\vec{c}\|\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \|\vec{b}\|\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \|\vec{b}\| = \sqrt{2}$$

iii) Determinação de $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 1 \Leftrightarrow (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\|\vec{a}\|^2}_{=1} + \underbrace{\|\vec{b}\|^2}_{=2} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 1 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 1$$

iv) Determinação de $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = 2 - 1 = 1 \Leftrightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\| = 1$$

b)

i) Definição do valor de $\|\vec{d}\|$:

$$\|\vec{d}\|^2 = (\vec{a}-\vec{b}+2(\vec{a}\times\vec{c}))\cdot(\vec{a}-\vec{b}+2(\vec{a}\times\vec{c})) =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 4\|\vec{a}\times\vec{c}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})}_{=0} -$$

$$- 4\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{d}\|^2 = 1 + \cancel{2} + 4\|\vec{a}\times\vec{c}\|^2 - \cancel{2} - 4\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{d}\|^2 = 1 + 4\|\vec{a}\times\vec{c}\|^2 - 4\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$$

ii) Determinação de $\|\vec{a}\times\vec{c}\|$:

$$\|\vec{a}\times\vec{c}\| = \underbrace{\|\vec{a}\|}_{=1}\underbrace{\|\vec{c}\|}_{=\sqrt{2}}\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

iii) Determinação de $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$:

Sabendo que $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$, então

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = 0 \iff$$

$$\iff \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = -\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = 0$$

iv) Determinação de $\|\vec{d}\|$:

$$\|\vec{d}\|^2 = 1 + 4\left[\frac{\sqrt{6}}{2}\right]^2 - 4(0) = 7 \iff$$

$$\iff \|\vec{d}\| = \sqrt{7}$$

Wij

GRUPO III

3)

i) Determinação do vector normal ao plano M:

Seja $\vec{n}$ o vector normal ao plano M.

$$\begin{array}{lll} M \parallel r & \Rightarrow & \vec{n} \perp \vec{a} \\ M \parallel s & \Rightarrow & \vec{n} \perp \vec{b} \end{array} \quad , \text{ ou seja, } \vec{n} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$$

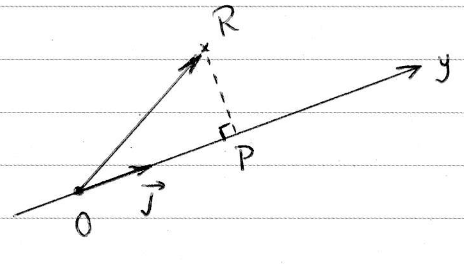
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, 1)$$

Seja, por exemplo, $\vec{n} = (3, 2, -1) \parallel \vec{a} \times \vec{b}$

ii) Determinação do ponto P:

$$P \in yy \Rightarrow P = (0, y, 0) \,,\ y \in \mathbb{R}$$

$$P = O + \vec{OP} = \vec{OP}$$



$$\vec{OP} = \text{proj}_{\vec{j}} \vec{OR} =$$

$$= \frac{\vec{OR} \cdot \vec{j}}{\|\vec{j}\|^2} \vec{j} =$$

$$= \frac{(1,-1,2) \cdot (0,1,0)}{1} (0,1,0) = -(0,1,0) = (0,-1,0)$$

$$P = \vec{OP} = (0,-1,0)$$

iii) Equação cartesiana do plano M:

$$(X-P) \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{n} = P \cdot \vec{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y - z = -2$$

Papel 100% Reciclado

4)

a)

Se $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, então $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto linearmente independente, sendo, portanto, uma base para $\mathbb{R}^3$.

O vector $X - P$ é uma combinação linear dos elementos do conjunto S, isto é,

$$X - P = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{a} \times \vec{c}$$

para um determinado conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, cuja solução é única, já que S é uma base para $\mathbb{R}^3$.
Impondo a condição (hipótese)

$$(X - P) \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

resulta

$$(X-P) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \underbrace{\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}_{=0} + \alpha_3 \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_3 \underbrace{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2}_{>0} = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 = 0$$

Verifica-se, então,

$$X - P = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} \Rightarrow X = P + \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} \Rightarrow X \in M$$

b) Considerando a Identidade de Lagrange

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

e notando que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\theta)$, resulta

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2(\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 [1 - \cos^2(\theta)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \, |\operatorname{sen}(\theta)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \operatorname{sen}(\theta), \text{ já que } \theta \in [0, \pi].$$

Wuij

GRUPO IV

5) i) Definição do vector director da recta h:
Seja $\vec{b} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ o vector director de h.

h é concorrente com $r \Rightarrow \vec{PQ} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

$$\vec{PQ} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2(c-b) + (c-a) - 4(b-a) = 0 \Leftrightarrow 3c - 6b + 3a = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a - 2b + c = 0$

h faz um ângulo $\alpha = \pi/6$ com o plano M ($\vec{n} = (1,1,0)$ é o vector normal a M)

$\vec{b} \cdot \vec{n} = \|\vec{b}\| \, \|\vec{n}\| \operatorname{sen}(\pi/6) \Leftrightarrow a + b = \|\vec{b}\| \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\,\|\vec{b}\|}{2}$

Considerando, por exemplo, $\|\vec{b}\| = \sqrt{2}$ obtém-se

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ a + b = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 - 3a \\ b = 1 - a \\ a^2 + (1-a)^2 + (2-3a)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 11a^2 - 14a + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ a = \dfrac{14 \pm \sqrt{14^2 - 13 \cdot 2}}{22} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ a = \dfrac{14 \pm 8}{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} c = 13/11 \\ b = 8/11 \\ a = 3/11 \end{cases}$$

ii) Equação vectorial de uma recta h:
Considerando, por exemplo, $\vec{b} = (1,0,-1)$ obtém-se
$h: X(u) = Q + u\vec{b}, \; u \in \mathbb{R}$ em que $Q = (2,0,-1)$.

Wij