FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso: MIEM / MIEGI Data: /11/20
Disciplina: Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano: 1º Semestre: 1º

Nome: José Augusto Trigo Barbosa

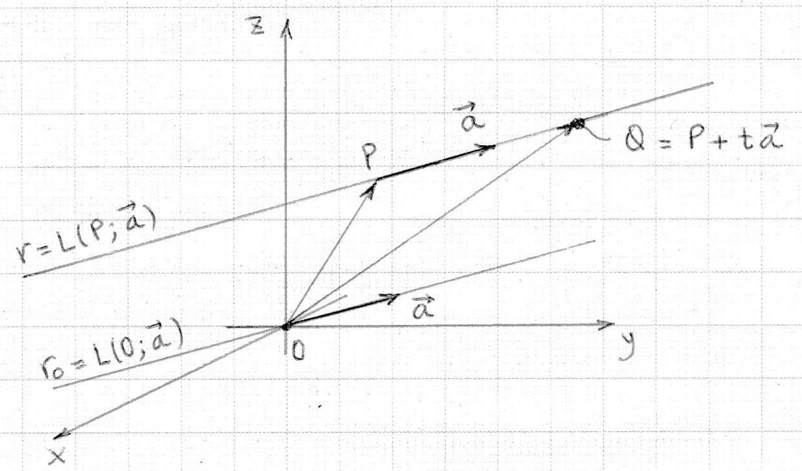
Espaço reservado para o avaliador

Notas de apoio ao Capítulo 2 do manual:
"Noções sobre Geometria Analítica e Análise Matemática".

Estudo da Recta

Recta $r = L(P;\vec{a}) = \{X \in \mathbb{R}^n : X = P + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}\}$

P: ponto particular da recta
$\vec{a}$: vector direcção (ou director) da recta



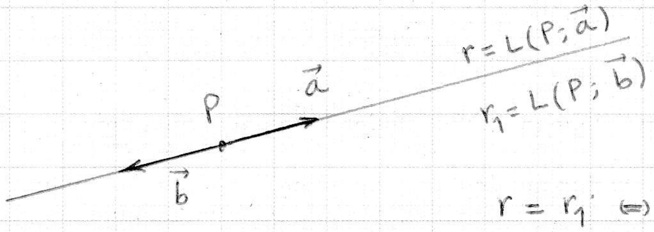
Recta $r_0 = L(0;A) = \{X \in \mathbb{R}^n : X = t\vec{a}, t \in \mathbb{R}\} = L(\vec{a})$

Subespaço gerado pelo vector $\vec{a}$.

pág. 2

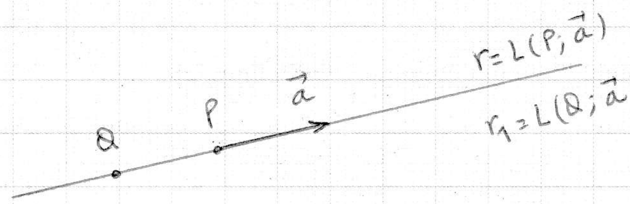
Rectas iguais ou coincidentes

Teorema



$$r = r_1 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Teorema



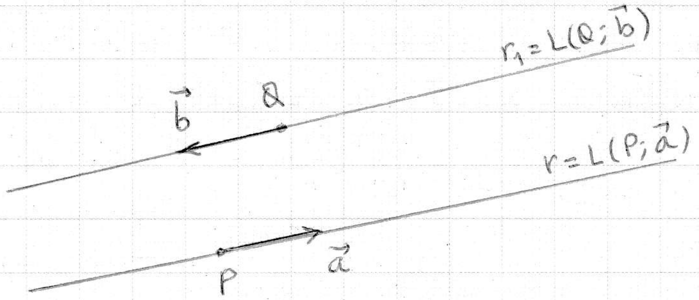
$$r = r_1 \iff Q \in r \quad (\text{ou } P \in r_1)$$

Generalizando: $r = L(P; \vec{a})$ e $r_1 = L(Q; \vec{b})$

$$r = r_1 \iff \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ e } Q \in r \quad (\text{ou } P \in r_1)$$

pág. 3

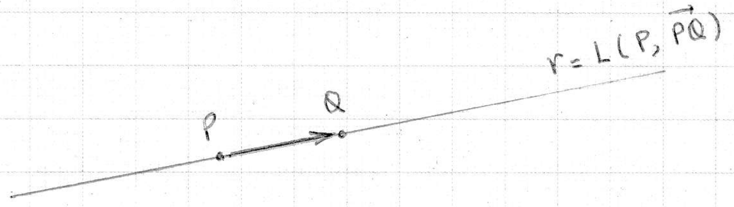
Rectas estritamente paralelas



$$r \parallel r_1 \iff \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ e } Q \notin r \quad (\text{ou } P \notin r_1)$$

pág. 4

Propriedades



$$r = L(P; \overrightarrow{PQ}) = \{ X \in \mathbb{R}^n : X = P + t\,\overrightarrow{PQ},\ t \in \mathbb{R} \}$$

$\overrightarrow{PQ}$: vector direcção (ou director) da recta

pág. 4

Distância de um ponto a uma recta

Teorema

$r = L(P; \vec{a}) \subset \mathbb{R}^n$

$Q \notin r$

$$d_{Q,r} = \| Q - I \|$$

I : ponto da recta r mais próximo do ponto Q

$$I = P + \overrightarrow{PI}$$

$$\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{a}}\, \overrightarrow{PQ} = k\,\vec{a} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\, \vec{a}$$

Notando que

$$\|\overrightarrow{PI}\| = |k|\,\|\vec{a}\| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a}|}{\|\vec{a}\|^2}\, \|\vec{a}\| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a}|}{\|\vec{a}\|}$$

então $$d_{Q,r} = \sqrt{\|\overrightarrow{PQ}\|^2 - \|\overrightarrow{PI}\|^2}$$

pág. 8

W[illegible]

Teorema

$$r = L(P; \vec{a}) \subset \mathbb{R}^3$$
$$Q \notin r$$

Área do paralelogramo definido por $\vec{PQ}$ e $\vec{a}$

$$A = \| \vec{PQ} \times \vec{a} \|$$

Sabendo que $\| \vec{a} \|$ corresponde à base do paralelogramo, então a altura do paralelogramo é igual à distância do ponto Q à recta r, ou seja,

$$d_{Q,r} = \frac{\| \vec{PQ} \times \vec{a} \|}{\| \vec{a} \|}$$

pág. 9

Exemplo 1:

a) A recta passa no ponto $P = (-3,1,1)$ e tem como vector direcção o vector $\vec{a} = (1,-2,3)$. Então a equação vectorial da recta é:

$$X(t) = P + t\vec{a} = (-3,1,1) + t(1,-2,3) \ , \ t \in \mathbb{R}$$

b) Designando $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ o ponto genérico da recta, da equação vectorial resultam as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}$$

pág. 10

Eliminando o parâmetro t nas equações paramétricas resulta, por exemplo,

$$\begin{cases} t = x+3 \\ y = 1-2(x+3) \\ z = 1+3(x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = -5 \\ -3x+z = 10 \end{cases}$$

que são as equações cartesianas da recta.
Uma forma alternativa à anterior, seria

$$\begin{cases} t = x+3 \\ t = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{y-1}{-2} \\ t = \dfrac{z-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x+3 = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$$

c) Como o problema está definido em $\mathbb{R}^3$, então a distância do ponto $S = (1,1,1)$ (o ponto S não pertence à recta r) é dada por:

$$d_{S,r} = \frac{\| \vec{PS} \times \vec{a} \|}{\| \vec{a} \|}$$

$$\vec{PS} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (0)\vec{i} - (12)\vec{j} + (-8)\vec{k} =$$

$$= (0, -12, -8)$$

$$\| \vec{PS} \times \vec{a} \| = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{9(2^4) + 2^6} = 4\sqrt{13}$$

$$d_{S,r} = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{182}}{7}$$

~~pág. 10~~

Wuiz

d)

$$I = P + \overrightarrow{PI} = P + k\vec{a}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{PI} = \text{proj}_{\vec{a}} \overrightarrow{PS} = k\vec{a} = \frac{\overrightarrow{PS} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PS} \cdot \vec{a} = (4,0,0) \cdot (1,-2,3) = 4 > 0$$

$$\overrightarrow{PI} = \frac{4}{14} \vec{a} = \frac{2}{7}(1,-2,3)$$

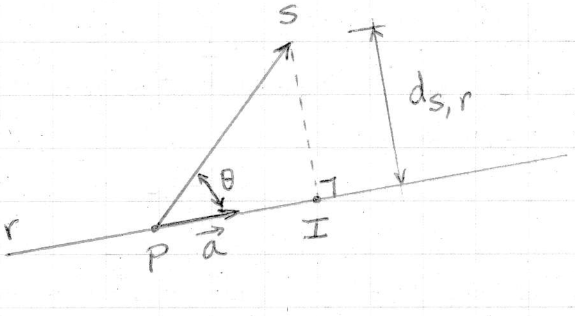
$$I = (-3,1,1) + \frac{2}{7}(1,-2,3) = \left(-\frac{19}{7}, \frac{3}{7}, \frac{13}{7}\right) = X\left(\frac{2}{7}\right)$$

Confirmação do valor da distância $d_{S,r}$ (obtida na alínea anterior):

$$d_{S,r} = \|\overrightarrow{IS}\| = \|S - I\| = \left\| \left(\frac{26}{7}, \frac{4}{7}, \frac{-6}{7}\right) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{2}{7}(13, 2, -3) \right\| = \left|\frac{2}{7}\right| \sqrt{13^2 + 2^2 + (-3)^2} =$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{182} \quad \checkmark$$



$$\overrightarrow{PS} \cdot \vec{a} > 0 \Rightarrow \theta \in [0, \pi/2[$$

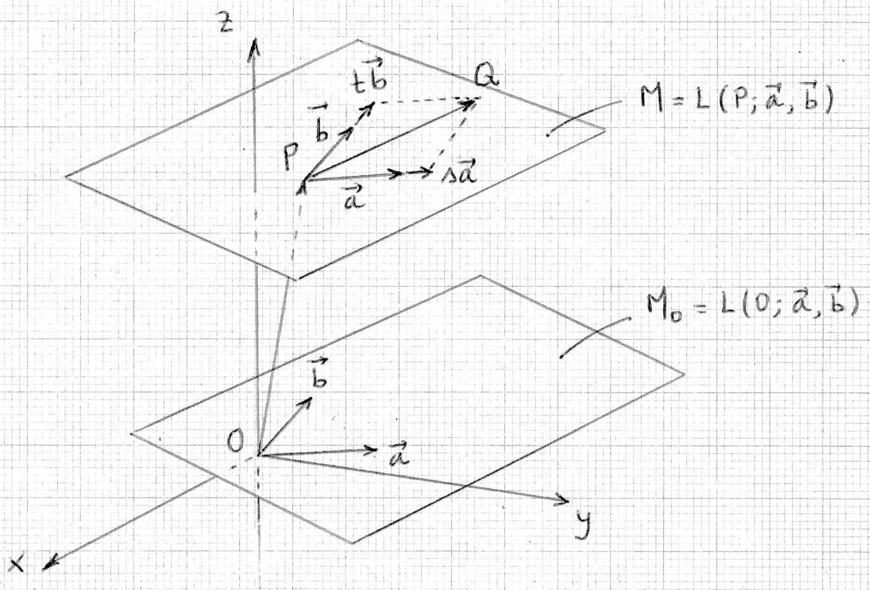
pág. 10

Estudo do Plano

Plano $M = L(P; \vec{a}, \vec{b}) = \{ X \in \mathbb{R}^n : X = P + s\vec{a} + t\vec{b} \,,\ s,t \in \mathbb{R} \}$

P : ponto particular do plano

$\vec{a}, \vec{b}$: vectores geradores (ou directores) do plano ; os vectores são linearmente independentes (não paralelos)



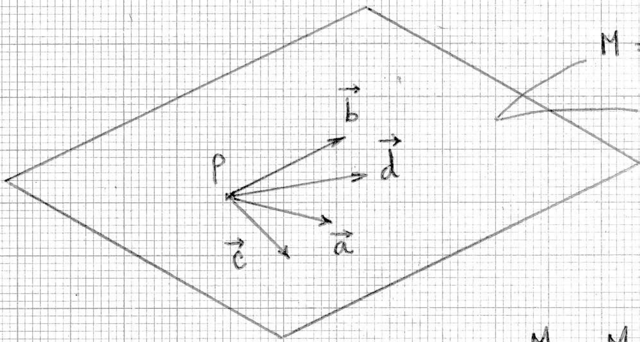
Plano $M_0 = L(0; \vec{a}, \vec{b}) = \{ X \in \mathbb{R}^n : X = s\vec{a} + t\vec{b} \,,\ s,t \in \mathbb{R} \} = L(\vec{a}, \vec{b})$

subespaço gerado pelo conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}\}$

~~pág. 11~~

Planos iguais ou coincidentes

Teorema

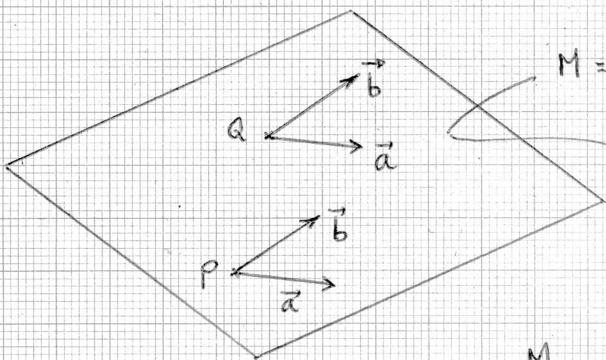


$M = L(P; \vec{a}, \vec{b})$

$M_1 = L(P; \vec{c}, \vec{d})$

$$M = M_1 \Leftrightarrow L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{c}, \vec{d})$$

Teorema



$M = L(P; \vec{a}, \vec{b})$

$M_1 = L(Q; \vec{a}, \vec{b})$

$$M = M_1 \Leftrightarrow Q \in M \quad (\text{ou } P \in M_1)$$

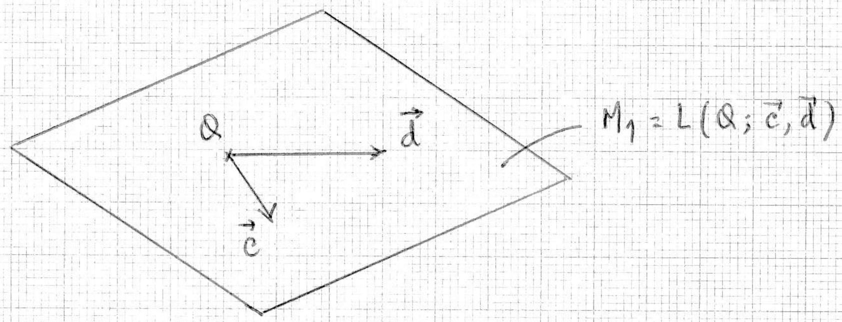
Generalizando : $M = L(P; \vec{a}, \vec{b})$ e $M_1 = L(Q; \vec{c}, \vec{d})$

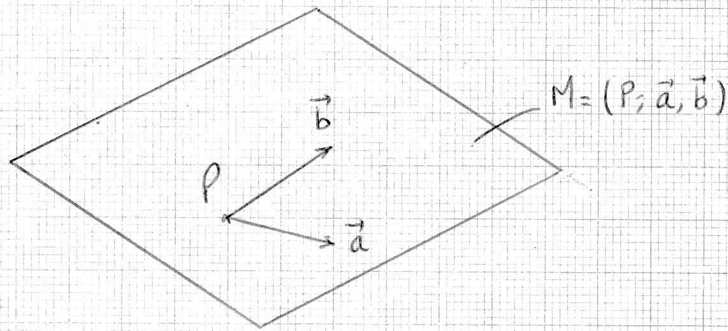
$$M = M_1 \Leftrightarrow L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{c}, \vec{d}) \text{ e } Q \in M \quad (\text{ou } P \in M_1)$$

pág. 12/13

Papel 100% Reciclado

Planos estritamente paralelos





$$M \parallel M_1 \iff L(\vec a, \vec b) = L(\vec c, \vec d) \text{ e } Q \notin M \quad (\text{ou } P \notin M_1)$$

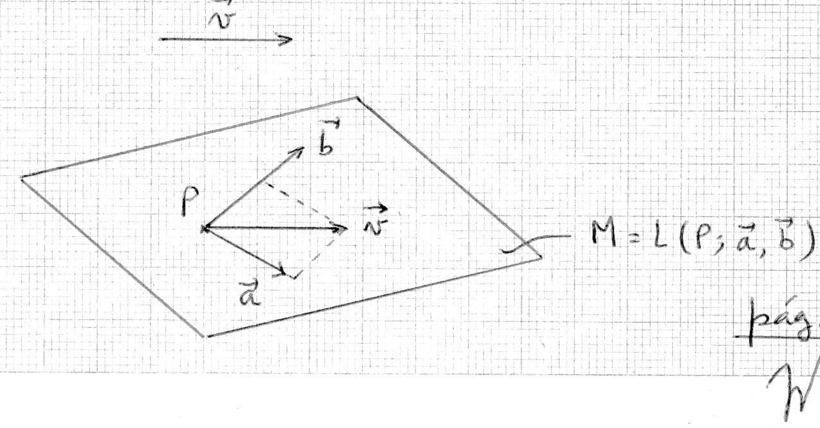
pág. 13

Propriedades

Definição : Dado: plano $M = \{P + s\vec a + t\vec b\}$

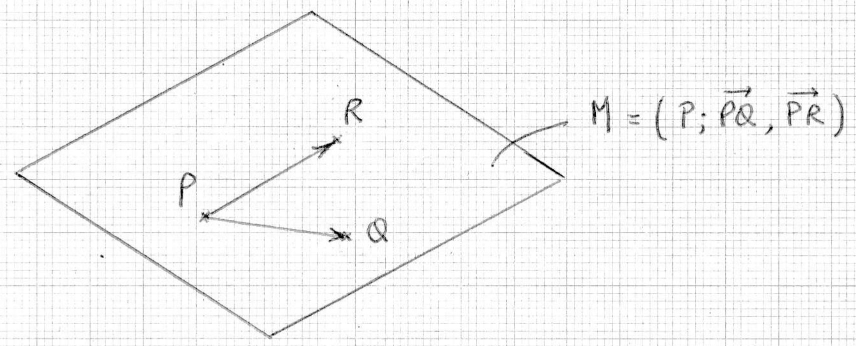
vector $\vec v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec 0\}$

$$\vec v \parallel M \iff \vec v \in L(\vec a, \vec b)$$



pág. 14

Teorema



P : ponto particular do plano

$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$: vectores geradores do plano ; os vectores são não colineares (linearmente independentes)

pág. 14

Exemplo 2 Sejam $P = (1,2,1)$, $Q = (0,1,0)$, $R = (1,1,4)$.

a) Os pontos P, Q e R definem o plano M se não forem colineares, ou seja, se os vectores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ não forem paralelos.
Sabendo que $\overrightarrow{PQ} = (-1,-1,-1)$ e $\overrightarrow{PR} = (0,-1,3)$ então conclui-se que não existe qualquer escalar $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\overrightarrow{PQ} = k\, \overrightarrow{PR}$$

Conclui-se, então, que os vectores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são vectores geradores do plano.

b) Equação vectorial do plano:

$$X(s,t) = P + s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}\,,\ s,t \in \mathbb{R} =$$

$$= (1,2,1) + s(-1,-1,-1) + t(0,-1,3)\,,\ s,t \in \mathbb{R} =$$

$$= (1-s\,,\ 2-s-t\,,\ 1-s+3t)\,,\ s,t \in \mathbb{R}$$

pág. 17

c) Designando $X = (x,y,z)$ um ponto genérico do plano, da equação vectorial resultam as equações paramétricas

$$(x,y,z) = (1-s,\ 2-s-t,\ 1-s+3t)\ ,\ s,t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-s \\ y = 2-s-t \\ z = 1-s+3t \end{cases} ,\ s,t \in \mathbb{R}$$

Eliminando os parâmetros s e t nas equações paramétricas, obtém-se

$$\begin{cases} s = 1-x \\ y = 2-(1-x)-t \\ z = 1-(1-x)+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ t = 1+x-y \\ z = x+3(1+x-y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 4x-3y-z=-3 \end{cases}$$

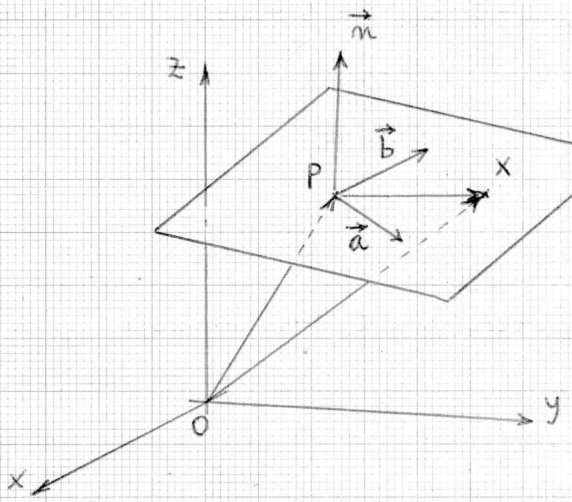
que é a equação cartesiana do plano M.
Para confirmar o resultado encontrado, podemos verificar que os pontos P, Q e R satisfazem a equação cartesiana, ou seja,

$$P = (1,2,1) \Rightarrow 4-6-1=-3 \checkmark$$
$$Q = (0,1,0) \Rightarrow 0-3-0=-3 \checkmark$$
$$R = (1,1,4) \Rightarrow 4-3-4=-3 \checkmark$$

pág. 17

Wmj

Vectores normais a planos ($\mathbb{R}^3$)



$\vec{n} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$

$\overrightarrow{PX} \perp \vec{n}$

Teorema Seja o plano $M = L(P; \vec{a}, \vec{b}) = \{ P + s\vec{a} + t\vec{b} \}$

i) Mostrar que $\vec{a} \times \vec{b}$ é um vector normal ao plano M.

Uma vez que $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ é um conjunto linearmente independente, então $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$.
Por outro lado, sabe-se que

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \quad \text{e} \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$

Então, conclui-se que $\vec{a} \times \vec{b}$ é um vector normal ao plano.

ii) Mostrar que se $\vec{n}$ é um vector normal ao plano, então o plano é o conjunto de pontos

$$M = \{ X \in \mathbb{R}^3 : (X - P) \cdot \vec{n} = 0 \} \subset \mathbb{R}^3$$

Seja o plano $M = \{ P + s\vec{a} + t\vec{b} \}$ (conjunto de pontos) e admite-se que existe um plano tal que

$$M_1 = \{ X \in \mathbb{R}^3 : (X - P) \cdot \vec{n} = 0 \} \text{ (Conjunto de pontos)}$$

em que $\vec{n}$ é um vector normal a M.

pág. 18

Wm

Para mostrar que $M = M_1$ (igualdade entre conjuntos) tem que se verificar as seguintes proposições:

a) $\forall_{X \in M}\ ,\ X \in M_1 \Rightarrow M \subseteq M_1$

b) $\forall_{X \in M_1}\ ,\ X \in M \Rightarrow M_1 \subseteq M$

a) Seja $X \in M$, então

$$X = P + s\vec{a} + t\vec{b}\ ,\ s,t \in \mathbb{R} \Rightarrow X - P = s\vec{a} + t\vec{b}\ ,\ s,t \in \mathbb{R}$$

e, portanto,

$$(X-P)\cdot\vec{n} = (s\vec{a} + t\vec{b})\cdot\vec{n} = s\,\vec{a}\cdot\vec{n} + t\,\vec{b}\cdot\vec{n}$$

Uma vez que $\vec{n}$ é um vector normal ao plano, então

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = \vec{b}\cdot\vec{n} = 0$$

concluindo-se que

$$(X-P)\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow X \in M_1 \Rightarrow M \subseteq M_1$$

b) Seja $X \in M_1$, tal que $(X-P)\cdot\vec{n} = 0$.

Uma vez que $\vec{n} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$ então o conjunto

$$S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\} \subset \mathbb{R}^3$$

é:
- um conjunto linearmente independente
- uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$

Portanto, o vector $X - P$ é gerado de forma única pelos elementos do conjunto S, isto é,

$$X - P = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{n},$$

para um determinado conjunto de valores para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

pág. 18

Resulta, então

$$(X-P)\cdot\vec{n} = (\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{n})\cdot\vec{n} =$$

$$= \alpha\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{n}}_{=0} + \beta\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{n}}_{=0} + \gamma\,\vec{n}\cdot\vec{n} = \gamma\,\|\vec{n}\|^2$$

Como, por hipótese, $(X-P)\cdot\vec{n}=0$ e $\|\vec{n}\|>0$, então

$$\gamma = 0$$

pelo que

$$X-P = \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\ ,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

ou seja,

$$X = P+\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\ ,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R} \Rightarrow X\in M \Rightarrow M_1\subseteq M$$

Concluindo:

$$M\subseteq M_1 \ \wedge\ M_1\subseteq M \Rightarrow M=M_1$$

pág. 18

Exemplo 3 Seja o plano M definido pelos pontos: $P=(1,2,1)$, $Q=(0,1,0)$ e $R=(1,1,4)$.

a) O plano M é definido por

$$M = L(P;\vec{PQ},\vec{PR}) = \{X\in\mathbb{R}^3 : X = P+s\vec{PQ}+t\vec{PR}\ ,\ s,t\in\mathbb{R}\}$$

onde $\vec{PQ}=(-1,-1,-1)$ e $\vec{PR}=(0,-1,3)$ são vectores geradores do plano. Então o vector

$$\vec{PQ}\times\vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k} = (-4,3,1)$$

é um vector normal ao plano.

b) Sendo $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = (-4, 3, 1)$ um vector normal ao plano, então o plano M é o conjunto de pontos

$$M = \{X \in \mathbb{R}^3 : (X-P) \cdot \vec{n} = 0\}$$

Designando $X = (x, y, z)$ um ponto genérico do plano, obtém-se a equação cartesiana do plano:

$$(X-P) \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{n} = P \cdot \vec{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) \cdot (-4,3,1) = (1,2,1) \cdot (-4,3,1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x + 3y + z = 3$$

pág. 20

Distância de um ponto a um plano ($\mathbb{R}^3$)

Teorema

$$\vec{IQ} = \operatorname{proj}_{\vec{n}} \vec{PQ} = k\,\vec{n} = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}$$

$$d_{Q,M} = \|\vec{IQ}\| = \|k\,\vec{n}\| = |k|\,\|\vec{n}\| =$$

$$= \left|\frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right| \|\vec{n}\| = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2}\|\vec{n}\| = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

NOTA: O ponto I, ponto do plano mais próximo de Q, é dado por:

$$I = Q + \vec{QI} = Q + (-\vec{IQ}) = Q - \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}$$

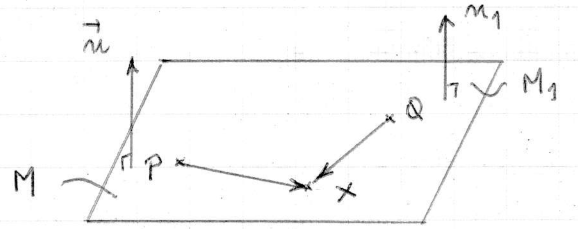
pág. 21

Posição relativa de dois planos ($\mathbb{R}^3$)

Sejam os planos $M = \{X \in \mathbb{R}^3 : (X-P)\cdot\vec{n} = 0\}$

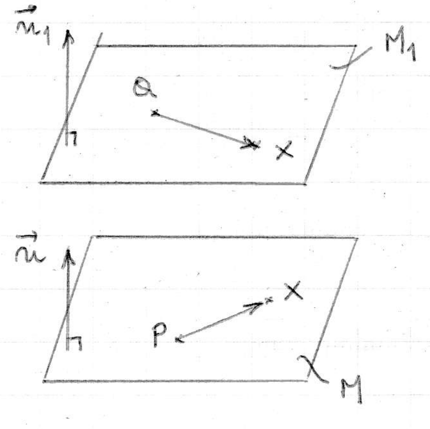
$M_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (X-Q)\cdot\vec{n}_1 = 0\}$

- Planos iguais ou coincidentes



$M = M_1 \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{n}_1 \wedge Q \in M$ (ou $P \in M_1$)

- Planos estritamente paralelos



$M \parallel M_1 \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{n}_1 \wedge Q \notin M$ (ou $P \notin M_1$)

- Planos concorrentes : $\vec{n} \nparallel \vec{n}_1$

  A intersecção dos planos define uma recta: $r = M \cap M_1$

  Neste caso os planos podem ser:
  - oblíquos : $\vec{n} \nparallel \vec{n}_1 \wedge \vec{n} \not\perp \vec{n}_1$
  - perpendiculares : $\vec{n} \perp \vec{n}_1$

pág. 23

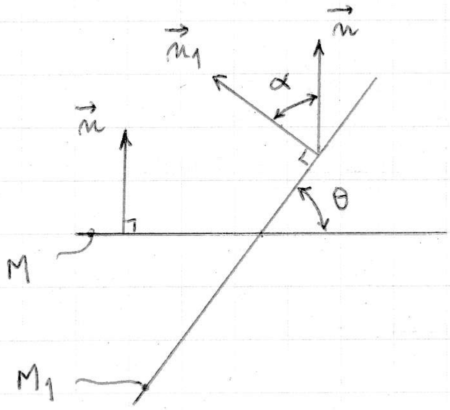
Ângulo entre dois planos ($\mathbb{R}^3$)

Sejam os planos $M = \{ X \in \mathbb{R}^3 : (X - P) \cdot \vec{n} = 0 \}$

$M_1 = \{ X \in \mathbb{R}^3 : (X - Q) \cdot \vec{n}_1 = 0 \}$

Seja $\theta = \measuredangle(M, M_1)$, tal que $\theta \in [0, \pi/2]$

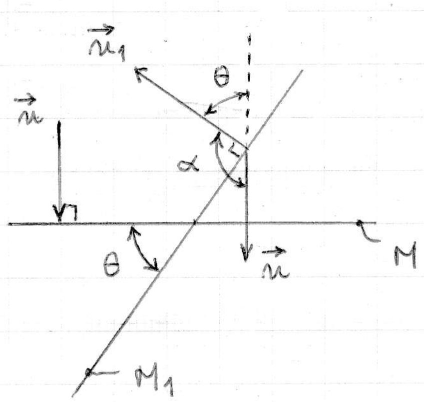
$\alpha = \measuredangle(\vec{n}, \vec{n}_1)$, tal que $\alpha \in [0, \pi]$



$\alpha \in [0, \pi/2]$

$\theta = \alpha$

$\cos(\theta) = \cos(\alpha)$



$\alpha \in]\pi/2, \pi]$

$\theta = \pi - \alpha$

$\cos(\theta) = -\cos(\alpha)$

$$\cos(\theta) = |\cos(\alpha)| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{\|\vec{n}\| \, \|\vec{n}_1\|} , \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

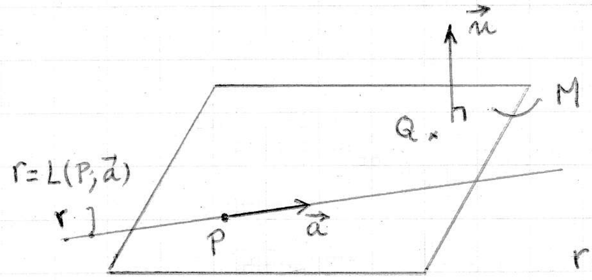
pág. 24/25

Posição de uma recta em relação ao plano ($\mathbb{R}^3$)

Sejam a recta $r = L(P; \vec{a}) = \{ X \in \mathbb{R}^3 : X = P + t\vec{a}, t \in \mathbb{R} \}$

o plano $M = \{ X \in \mathbb{R}^3 : (X - Q) \cdot \vec{n} = 0 \}$

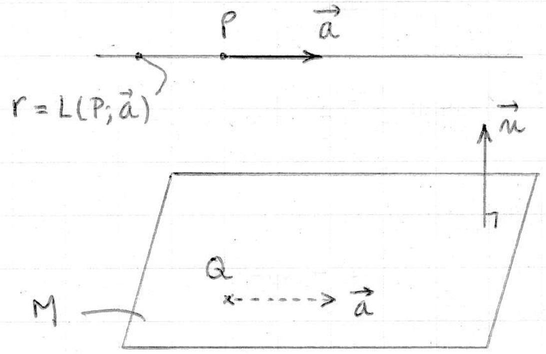
- Recta contida no plano



$r \subset M \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \wedge P \in M$

- Recta estritamente paralela ao plano

Sabe-se que $\vec{a} \parallel M$



$r \parallel M \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \wedge P \notin M$

- Recta secante ao plano : $\vec{a} \not\perp \vec{n}$

A recta intersecta o plano num ponto : $I = r \cap M$

Neste caso verifica-se uma das seguintes situações:

- a recta é oblíqua ao plano : $\vec{a} \not\perp \vec{n} \wedge \vec{a} \not\parallel \vec{n}$
- a recta é perpendicular ao plano : $\vec{a} \parallel \vec{n}$.

pág. 26

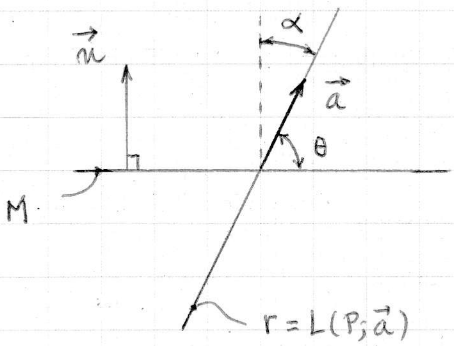
Ângulo entre uma recta e um plano ($\mathbb{R}^3$)

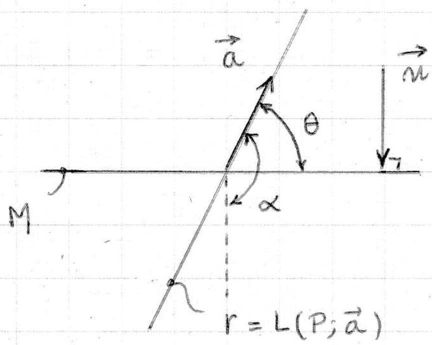
Sejam a recta $r = L(P;\vec{a}) = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = P + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}\}$

o plano $M = \{X \in \mathbb{R}^3 : (X-Q)\cdot\vec{n} = 0\}$

$\theta = \measuredangle(r, M)$, tal que $\theta \in [0, \pi/2]$

$\alpha = \measuredangle(\vec{a}, \vec{n})$, tal que $\alpha \in [0, \pi]$





$\alpha \in [0, \pi/2]$

$\theta = \pi/2 - \alpha$

$\text{sen}(\theta) = \cos(\alpha)$

$\alpha \in]\pi/2, \pi]$

$\theta = \alpha - \pi/2$

$\text{sen}(\theta) = -\cos(\alpha)$

$$\text{sen}(\theta) = |\cos(\alpha)| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{n}\|}, \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

pág. 27/28

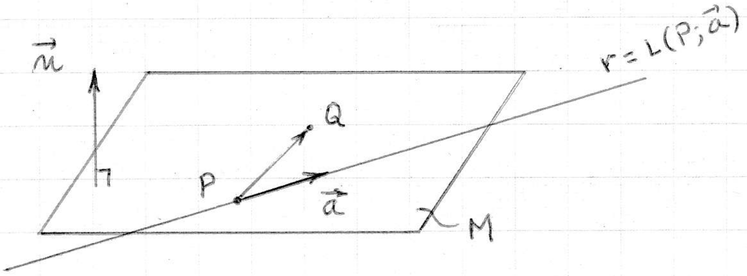
Exemplo 4 Sejam a recta $r: X(t) = P + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, em que $P = (1,2,3)$ e $\vec{a} = (1,1,1)$ e os pontos $Q = (2,3,5)$ e $R = (4,1,1)$.

a) Sabe-se que o vector $\overrightarrow{PQ} = (1,1,2)$ não é paralelo ao vector $\vec{a}$, pelo que

$$Q \notin r$$

A equação vectorial do plano M é

$$M: X(u,v) = P + u\vec{a} + v\overrightarrow{PQ} =$$
$$= (1,2,3) + u(1,1,1) + v(1,1,2), \quad u,v \in \mathbb{R}$$



b) Uma vez que $\vec{a}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são vectores geradores de M, então o vector normal, $\vec{n}$, é

$$\vec{n} = \vec{a} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} = (1,-1,0)$$

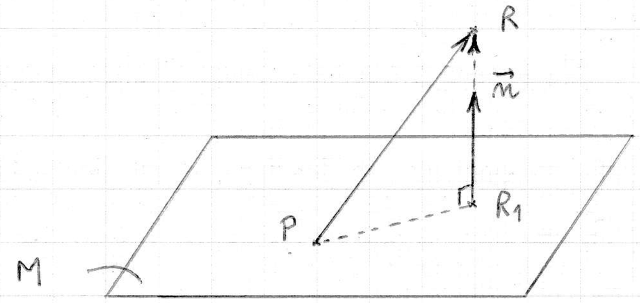
A equação cartesiana do plano M é

$$(X - P) \cdot \vec{n} = 0 \iff X \cdot \vec{n} = P \cdot \vec{n} \iff x - y = -1$$

Trata-se de um plano que é paralelo ao eixo dos ZZ, mais precisamente, o eixo dos ZZ é estritamente paralelo ao plano M (o plano M não passa na origem).

pág. 29

c) Seja R_1 o ponto do plano M mais próximo do ponto R.



A distância do ponto R ao plano M é

$$d_{R,M} = \| \overrightarrow{R_1R} \| = \| \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{n}} \overrightarrow{PR} \|$$

em que

$$\overrightarrow{R_1R} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{n}} \overrightarrow{PR} = k\,\vec{n} = \frac{\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n} .$$

Notando que $\overrightarrow{PR} = (3,-1,-2)$ obtém-se

$$\overrightarrow{R_1R} = \frac{4}{2}\,(1,-1,0) = (2,-2,0)$$

e, portanto,

$$d_{R,M} = \| (2,-2,0) \| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

d) O ponto R_1 é dado por

$$R_1 = R + (-\overrightarrow{R_1R}) = (4,1,1) - (2,-2,0) = (2,3,1)$$

Exemplo 5 Sejam os planos

$M: x-y=-1$, com vector normal $\vec{n}=(1,-1,0)$

$M_1: 2x+y+z=1$, com vector normal $\vec{n}_1=(2,1,1)$

e os pontos $Q=(0,2,1)$ e $S=(0,1,0)$, em que $S\in M$.

a) A equação vectorial da recta r é

$$r: X(t)=P+t\vec{a}, \; t\in\mathbb{R}$$

Comecemos por determinar o vector director da recta r. Sabe-se que

$$r\subset M \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{n}$$
$$r\subset M_1 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{n}_1$$

logo $\vec{a}\parallel\vec{n}\times\vec{n}_1$.

Tem-se, então,

$$\vec{n}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}=(-1,-1,3)$$

Seja, por exemplo,

$$\vec{a}=-\vec{n}\times\vec{n}_1=(1,1,-3)$$

Considerando a intersecção dos planos (equações cartesianas da recta)

$$\begin{cases}x-y=-1\\ 2x+y+z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x+1\\ z=-3x\end{cases}, \; x\in\mathbb{R}$$

seleccione-se, por exemplo, o ponto $P=(0,1,0)$.

Obtém-se finalmente

$$r: X(t)=P+t\vec{a}=(0,1,0)+t(1,1,-3), \; t\in\mathbb{R}$$

pág. 30/31

b) Uma vez que o ponto $Q=(0,2,1)$ não pertence aos planos M e M_1, a recta h é estritamente paralela aos planos em causa.
A equação vectorial da recta h é

$$h: X(u) = Q + u\vec{h}, \quad u \in \mathbb{R}$$

em que o vector director $\vec{h}$ deverá satisfazer as seguintes condições

$$h \parallel M \Rightarrow \vec{h} \perp \vec{n}$$
$$h \parallel M_1 \Rightarrow \vec{h} \perp \vec{n}_1$$

pelo que $\vec{h} \parallel \vec{n} \times \vec{n}_1$, ou seja, $\vec{h} \parallel \vec{a}$ (a recta h é estritamente paralela à recta $r = M \cap M_1$).
Assim, admitindo, por exemplo,

$$\vec{h} = \vec{a} = (1,1,-3)$$

obtém-se finalmente

$$h: X(u) = Q + u\vec{h} = (0,2,1) + u(1,1,-3), \quad u \in \mathbb{R}$$

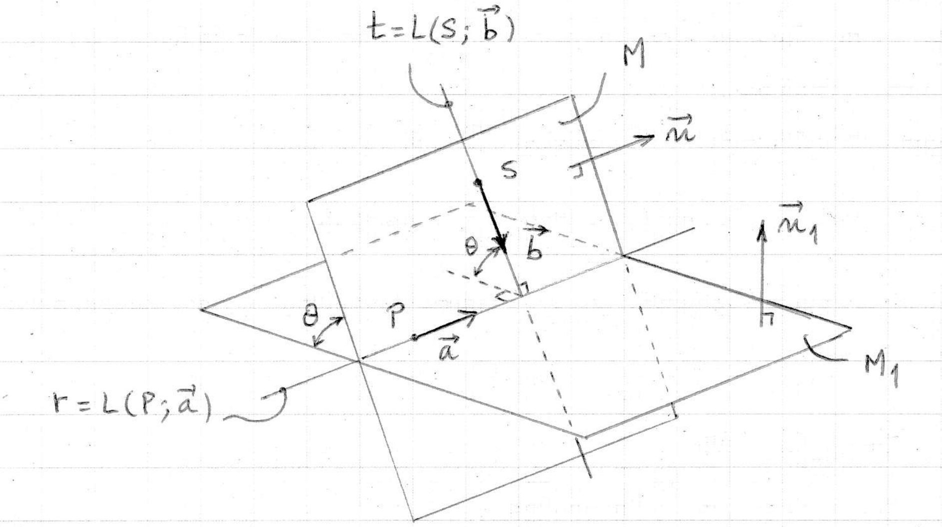
c) As rectas do plano M de maior inclinação em relação ao plano M_1 são todas rectas contidas em M e que fazem o maior ângulo possível com o plano M_1; este ângulo é igual entre estes dois planos. Todas estas rectas são paralelas entre si e são perpendiculares à recta de intersecção dos planos M e M_1, a recta r obtida na alínea a).
A equação vectorial da recta t é

$$t: X(v) = S + v\vec{b}, \quad v \in \mathbb{R}$$

em que $S=(0,1,0) \in M$.

pág. 30/31

Wing



O vector director da recta t satisfaz as seguintes condições:

$$t \subset M \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{n}$$

$$t \perp r \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{a}$$

pelo que $\vec{b} \parallel \vec{a} \times \vec{n}$.

Tem-se, então,

$$\vec{a} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k} = (-3,-3,-2)$$

Seja, por exemplo,

$$\vec{b} = -\vec{a} \times \vec{n} = (3,3,2)$$

Obtém-se finalmente

$$t : X(v) = S + v\vec{b} = (0,1,0) + v(3,3,2) \;,\; v \in \mathbb{R}$$

NOTA: Poderá confirmar-se que os ângulos $\theta = \measuredangle(M, M_1)$ e $\beta = \measuredangle(t, M_1)$ são iguais.

pág. 30/31

Posição relativa de duas rectas ($\mathbb{R}^3$)

Sejam as rectas $r = L(P;\vec{a}) = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = P + s\vec{a},\ s \in \mathbb{R}\}$

$r_1 = L(Q;\vec{b}) = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = Q + t\vec{b},\ t \in \mathbb{R}\}$

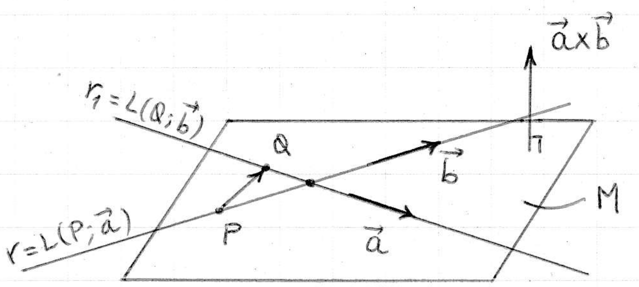
- Rectas complanares e paralelas : $\vec{a} \parallel \vec{b}$
  - Rectas iguais (coincidentes)

    $$r = r_1 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \wedge Q \in r \quad (\text{ou } P \in r_1)$$

  - Rectas estritamente paralelas

    $$r \parallel r_1 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \wedge Q \notin r \quad (\text{ou } P \notin r_1)$$

- Rectas complanares e concorrentes : $\vec{a} \not\parallel \vec{b} \wedge \vec{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$



$r \subset M \wedge r_1 \subset M$

$\vec{a} \times \vec{b}$ é um vector normal ao plano M

$\vec{PQ} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

  - Rectas oblíquas

    $$\vec{a} \not\parallel \vec{b} \wedge \vec{a} \not\perp \vec{b} \wedge \vec{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

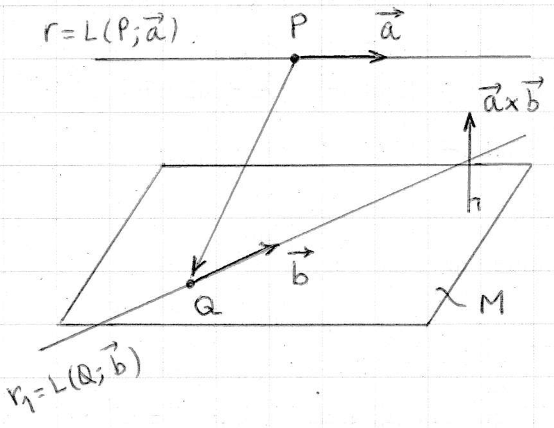
  - Rectas perpendiculares

    $$\vec{a} \perp \vec{b} \wedge \vec{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

pág. 32

Wm

- Rectas não complanares : $\vec{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} \neq 0$



$r_1 \subset M \ \wedge \ r \parallel M$

$\vec{a} \times \vec{b}$ é um vector normal ao plano M

$\vec{PQ} \not\perp \vec{a} \times \vec{b}$

- Rectas ortogonais

$$\vec{a} \perp \vec{b} \ \wedge \ \vec{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} \neq 0$$

- Enviesadas

$$\vec{a} \not\perp \vec{b} \ \wedge \ \vec{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} \neq 0$$

pág. 32

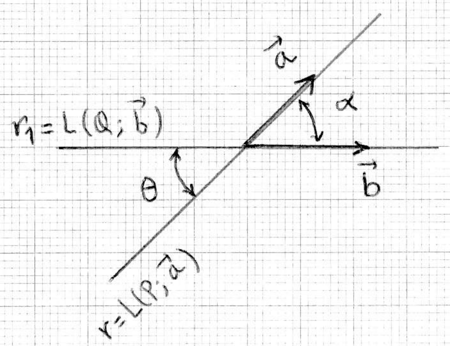
Ângulo entre duas rectas ($\mathbb{R}^3$)

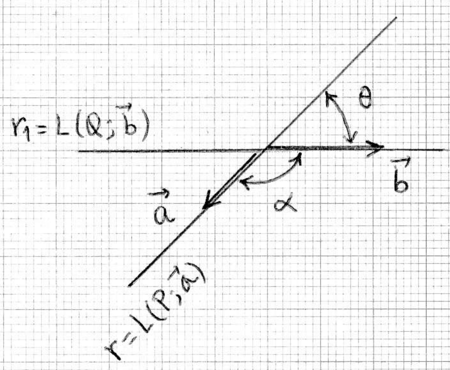
Sejam as rectas $r = L(P; \vec{a}) = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = P + s\vec{a}, s \in \mathbb{R}\}$

$$r_1 = L(Q; \vec{b}) = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = Q + t\vec{b}, t \in \mathbb{R}\}$$

$\theta = \measuredangle(r, r_1)$, tal que $\theta \in [0, \pi/2]$

$\alpha = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$, tal que $\alpha \in [0, \pi]$





$\alpha \in [0, \pi/2]$	$\alpha \in]\pi/2, \pi]$
$\theta = \alpha$	$\theta = \pi - \alpha$
$\cos(\theta) = \cos(\alpha)$	$\cos(\theta) = -\cos(\alpha)$

$$\cos(\theta) = |\cos(\alpha)| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}, \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

pág. 33/34

Exemplo 6 : Sejam as rectas

$r : X(u) = P + u\vec{a}, \ u \in \mathbb{R}$, tal que $P = (2,0,-1)$ e $\vec{a} = (1,1,1)$

$r_1 : X(t) = Q + t\vec{b}, \ t \in \mathbb{R}$, tal que $Q = (1,1,-4)$ e $\vec{b} = (2,0,1)$

a) Uma vez que os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são paralelos, então as rectas r e r_1 não são rectas paralelas, verificando-se uma das seguintes situações:

- rectas complanares e concorrentes $\begin{cases} \text{perpendiculares} \\ \text{oblíquas} \end{cases}$

- rectas não complanares $\begin{cases} \text{ortogonais} \\ \text{enviesadas} \end{cases}$

Recorrendo ao produto misto

$$\vec{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1 + 0 + 2) - (-6 + 0 + 1) = 6 \neq 0$$

$$\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

pelo que as rectas são não complanares. Além disso, dado que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \neq 0$, verifica-se que as rectas não são ortogonais, sendo, portanto, enviesadas.

b) Sabendo que

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (1,1,-2)$$

resulta

$$d_{r,r_1} = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b}|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

pág. 37

c) Sabe-se que o vector $\vec{a}\times\vec{b} = (1,1,-2)$ é o vector direcção da recta h (recta perpendicular comum às rectas r e r_1).
Pretende-se obter um dos pontos

$$I = r \cap h$$

$$I_1 = r_1 \cap h$$

Tem-se, então,

$$I \in r \Rightarrow I = P + u\vec{a} = (2+u, u, -1+u), \ u \in \mathbb{R}$$

$$I_1 \in r_1 \Rightarrow I_1 = Q + t\vec{b} = (1+2t, 1, -4+t), \ t \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{I_1 I} \parallel \vec{a}\times\vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{I_1 I} \times (\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0}$$

ou seja,

$$\overrightarrow{I_1 I} = (1+u-2t, u-1, 3+u-t)$$

$$\overrightarrow{I_1 I} \times (\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1+u-2t & u-1 & 3+u-t \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2u+2-3-u+t, 3+u-t+2+2u-4t, 1+u-2t-u+1) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1-3u+t, 5+3u-5t, 2-2t) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3u+t = 1 \\ 3u-5t = -5 \\ -2t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \quad V \\ u = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Obtêm-se os seguintes pontos $I = (2,0,-1) = P$ e $I_1 = (3,1,-3)$.
A equação vector de h é dada por

$$h: X(\alpha) = P + \alpha\, \vec{a}\times\vec{b} = (2,0,-1) + \alpha(1,1,-2), \ \alpha \in \mathbb{R}$$

pág. 37/38

Exemplo 7 : Sejam o plano $M: x+y-z=3$, com vector normal $\vec{n}=(1,1,-1)$

os pontos $P=(3,5,2)$ e $Q=(1,5,2)$.

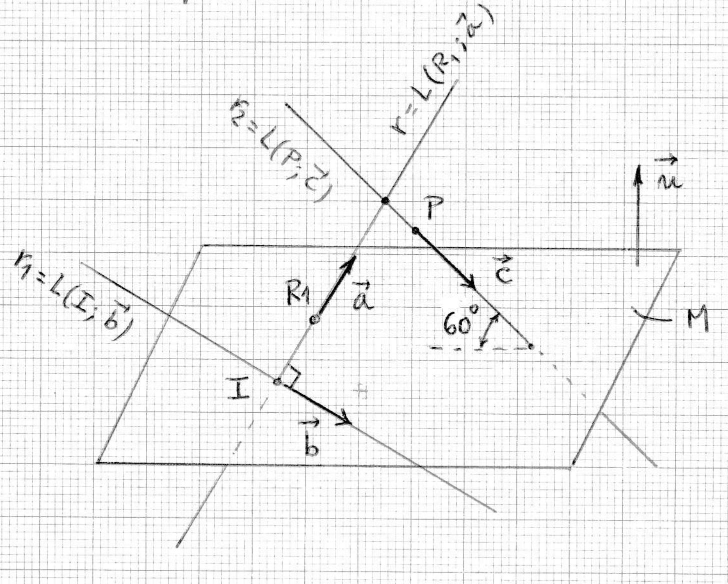
a recta $r: X(t)=R_1+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$

em que $R_1=(1,2,3)$ e $\vec{a}=(2,1,0)$.

a) Se a recta r_1 está contida no plano M e é complanar (perpendicular) com a recta r, então r_1 tem de passar no ponto

$$I = r \cap M$$

Uma vez que $\vec{a}\cdot\vec{n}=3\neq 0$, verifica-se que a recta r é secante ao plano M.



$R_1 \notin M$

$P \notin M$

$P \notin r$

$$I = r\cap M \Rightarrow \begin{cases} (x,y,z)=(1,2,3)+t(2,1,0), \; t\in\mathbb{R} \\ x+y-z=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=3 \\ x+y-z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=3 \\ t=1 \end{cases} \qquad I=(3,3,3)$$

pág. 38

Relativamente ao vector direcção da recta r_1, seja

$$\vec{b} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$$

verifica-se

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \subset M \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{n} \\ r_1 \perp r \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{a} \end{array}\right., \text{ logo } \vec{b} \parallel \vec{a} \times \vec{n}$$

Recorrendo ao produto vectorial

$$\vec{a} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (-1,2,1)$$

Considere-se, por exemplo, $\vec{b} = \vec{a} \times \vec{n} = (-1,2,1)$.
A equação vectorial da recta r_1 é

$$r_1 : X(u) = I + u\vec{b} = (3,3,3) + u(-1,2,1),\ u \in \mathbb{R}$$

b) Seja $\vec{c} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ o vector direcção da recta r_2. Como a recta r_2 é complanar e concorrente com a recta r, então

$$\vec{c} \nparallel \vec{a} \ \wedge\ \overrightarrow{R_1P} \cdot \vec{a} \times \vec{c} = 0$$

ou seja,

$$\overrightarrow{R_1P} \cdot \vec{a} \times \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix} \end{array} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2c - 2b + 0) - (-a + 0 + 6c) = 0 \Leftrightarrow a - 2b - 4c = 0$$

Dado que a recta r faz um ângulo de 60° com o plano M, verifica-se

pág. 38/39

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{|\vec{c}\cdot\vec{m}|}{\|\vec{c}\|\,\|\vec{m}\|} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{n}}{\|\vec{c}\|\,\|\vec{n}\|} \Leftrightarrow$$

$(\operatorname{sen} 60^\circ > 0)$

$$\Leftrightarrow \vec{c}\cdot\vec{n} = \|\vec{c}\|\,\|\vec{n}\| \operatorname{sen} 60^\circ \Leftrightarrow a+b-c = \|\vec{c}\|\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+b-c = \frac{3}{2}\|\vec{c}\|$$

O cálculo do vector $\vec{c} = (a,b,c)$ resulta da resolução do sistema de equações

$$\begin{cases} a-2b-4c = 0 \\ a+b-c = \frac{3}{2}\|\vec{c}\| = \frac{3}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

De modo a simplificar a sua resolução, admite-se que, por exemplo, $\|\vec{c}\| = 2$, resultando

$$\begin{cases} a-2b-4c=0 \\ a+b-c = 3 \\ a^2+b^2+c^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+4c \\ 3b+3c = 3 \\ — \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+4c \\ b = 1-c \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2+2c \\ b = 1-c \\ (2+2c)^2+(1-c)^2+c^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ 6c^2+6c+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = (3-\sqrt{3})/3 \\ b = (9+\sqrt{3})/6 \\ c = (-3-\sqrt{3})/6 \end{cases} \vee \begin{cases} a = (3+\sqrt{3})/3 \\ b = (9-\sqrt{3})/6 \\ c = (-3+\sqrt{3})/6 \end{cases}$$

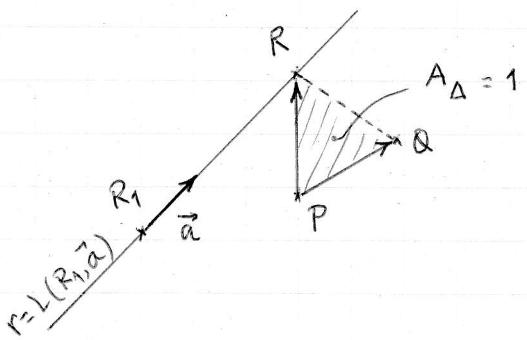
pág. 38/39

O problema admite duas soluções para a recta r_2. Uma delas é, por exemplo,

$$r_2: X(\sigma) = P + \sigma\vec{c} = (3,5,2) + \sigma\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{9+\sqrt{3}}{6}, \frac{-3-\sqrt{3}}{6}\right), \quad \sigma\in\mathbb{R}$$

c) Sabe-se que

$$R\in r \Rightarrow R = R_1 + t\vec{a} = (1+2t, 2+t, 3), \ t\in\mathbb{R}$$



A área do triângulo [PQR] é dada por

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\|\vec{PQ}\times\vec{PR}\| = 1 \Leftrightarrow \|\vec{PQ}\times\vec{PR}\| = 2$$

Sabendo que $\vec{PR} = (2t-2, t-3, 1)$ e $\vec{PQ} = (-2,0,0)$, obtém-se

$$\vec{PQ}\times\vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 2t-2 & t-3 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} + (6-2t)\vec{k} =$$

$$= (0, 2, 6-2t) = 2(0,1,3-t)$$

e, portanto,

$$\|\vec{PQ}\times\vec{PR}\| = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{1+(3-t)^2} = 2 \Leftrightarrow (3-t)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

e $R = (7,5,3)$

pág. 38/39

Wm