2.

Alice: *I'm very glad I happened to be in the way.*

conjunto solução

equação linear	$ax + by = c$	$S = \{(x, y) : ax + by = c\}$
	$2x + 3y = -5$	
	$x/3 = 25$	$S = \{75\}$

equação não linear	$x + y^2 = 6$
	$2x + 3xy - 4y = 10$
	$\sqrt{u} + \sqrt{v} = -10$
	$ax + \frac{b}{y}c$

2.

Alice:*I'm very glad I happened to be in the way.*

			conjunto solução
equação linear		$ax + by = c$	$S = \{(x, y) : ax + by = c\}$
		$2x + 3y = -5$	
		$x/3 = 25$	$S = \{75\}$

equação não linear

$$x + y^2 = 6$$
$$2x + 3xy - 4y = 10$$
$$\sqrt{u} + \sqrt{v} = -10$$
$$ax + \frac{b}{y}c$$

sist. de duas equações

com duas incógnitas

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

exemplo

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

conj$\underline{\text{to}}$ solução

$$S = \{(x, y) : ax + by = c \text{ e } a'x + b'y = c'\}$$

S conj$\underline{\text{to}}$ vazio, finito, infinito

sist. de três equações

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d' \end{cases}$$

com três incógnitas

conj$\underline{\text{to}}$ solução

$$S = \{(x, y, z) : ax + by + cz = d \text{ e } a'x + b'y + c'z = d'$$
$$a''x + b''y + c'z = d''\}$$

sist. de duas equações

com duas incógnitas

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

exemplo

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

conj$\underline{\text{to}}$ solução $S = \{(x, y) : ax + by = c \text{ e } a'x + b'y = c'\}$

S conj$\underline{\text{to}}$ vazio, finito, infinito

sist. de três equações

com três incógnitas

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d' \end{cases}$$

conj$\underline{\text{to}}$ solução $S = \{(x, y, z) : ax + by + cz = d \text{ e } a'x + b'y + c'z = d'$
$a''x + b''y + c'z = d''\}$

Sistema de m equações nas n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

na forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e em notação abreviada

$$Ax = b$$

com: $A = (A_{ij})$ matriz dos coeficientes, $m \times n$, $x = (x_i)$ vector das incógnitas, $b = (b_i)$ vector dos termos independentes.

Sistema de m equações nas n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

na forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e em notação abreviada

$$Ax = b$$

com: $A = (A_{ij})$ matriz dos coeficientes, $m \times n$, $x = (x_i)$ vector das incógnitas, $b = (b_i)$ vector dos termos independentes.

Consideremos os dois seguintes sistemas

$$\left\{\begin{array}{lcr} x_1 + x_2 & = & 1 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcr} x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = & -3 \\ x_2 + x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

Verificamos que ambos os sistemas têm solução única igual a $(2/3, 1/3, -4/3)$.

O que podemos dizer da $2^{\underline{a}}$ equação do $2^{\underline{0}}$ sistema?

Note-se que: $-1\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{linha 1}} + 1 \times \underbrace{(2x_1 + x_3)}_{\text{linha 2}} + 2 \times \underbrace{(x_2 + x_3)}_{\text{linha 3}} = x_1 + x_2 + 3x_3$

Os sistemas dizem-se equivalentes

Definição

Dois sistemas dizem-se equivalentes se admitem o mesmo conjunto solução.

Consideremos os dois seguintes sistemas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = & -3 \\ x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Verificamos que ambos os sistemas têm solução única igual a $(2/3, 1/3, -4/3)$.

O que podemos dizer da $2^{\underline{a}}$ equação do $2^{\underline{0}}$ sistema?

Note-se que: $-1\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{linha 1}} + 1 \times \underbrace{(2x_1 + x_3)}_{\text{linha 2}} + 2 \times \underbrace{(x_2 + x_3)}_{\text{linha 3}} = x_1 + x_2 + 3x_3$

Os sistemas dizem-se equivalentes

Definição

Dois sistemas dizem-se equivalentes se admitem o mesmo conjunto solução.

Consideremos os dois seguintes sistemas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = & -3 \\ x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Verificamos que ambos os sistemas têm solução única igual a $(2/3, 1/3, -4/3)$.

O que podemos dizer da $2^{\underline{a}}$ equação do $2^{\underline{0}}$ sistema?

Note-se que: $-1\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{linha 1}} + 1 \times \underbrace{(2x_1 + x_3)}_{\text{linha 2}} + 2 \times \underbrace{(x_2 + x_3)}_{\text{linha 3}} = x_1 + x_2 + 3x_3$

Os sistemas dizem-se equivalentes

Definição

Dois sistemas dizem-se equivalentes se admitem o mesmo conjunto solução.

Consideremos os dois seguintes sistemas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= -3 \\ x_2 + x_3 &= -1 \end{cases}$$

Verificamos que ambos os sistemas têm solução única igual a $(2/3, 1/3, -4/3)$.

O que podemos dizer da $2^{\underline{a}}$ equação do $2^{\underline{0}}$ sistema?

Note-se que: $-1\underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{linha 1}} + 1 \times \underbrace{(2x_1+x_3)}_{\text{linha 2}} + 2 \times \underbrace{(x_2+x_3)}_{\text{linha 3}} = x_1 + x_2 + 3x_3$

Os sistemas dizem-se equivalentes

Definição

Dois sistemas dizem-se equivalentes se admitem o mesmo conjunto solução.

Consideremos os dois seguintes sistemas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = & -3 \\ x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Verificamos que ambos os sistemas têm solução única igual a $(2/3, 1/3, -4/3)$.

O que podemos dizer da $2^{\underline{a}}$ equação do $2^{\underline{0}}$ sistema?

Note-se que: $-1\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{linha 1}} + 1 \times \underbrace{(2x_1 + x_3)}_{\text{linha 2}} + 2 \times \underbrace{(x_2 + x_3)}_{\text{linha 3}} = x_1 + x_2 + 3x_3$

Os sistemas dizem-se equivalentes

Definição

Dois sistemas dizem-se equivalentes se admitem o mesmo conjunto solução.

Que operações se podem fazer sobre as equações de um sistema de modo a obter um sistema equivalente?

$$\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

$$E_1 \leftrightarrow E_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

$$E_3 \leftarrow (-1)E_1 + E_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ -y+2z=3 \end{cases}$$

$$E_3 \leftarrow E_3 + E_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{cases}$$

substituindo da 3ª equação para a 1ª,

obtemos $z=2$, $y=1$ e $x=1$.

Que operações se podem fazer sobre as equações de um sistema de modo a obter um sistema equivalente?

$$\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

$$E_1 \leftrightarrow E_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

$$E_3 \leftarrow (-1)E_1 + E_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ -y+2z=3 \end{cases}$$

$$E_3 \leftarrow E_3 + E_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{cases}$$

substituindo da 3ª equação para a 1ª, obtemos $z=2$, $y=1$ e $x=1$.

As operações se podem efectuar num sistema de modo a obter-se um sistema equivalente são:

- OE1 troca da ordem das equações,
- OE2 multiplicar por um escalar, não nulo, ambos os membros de uma equação,
- OE3 substituir uma equação pela soma com outra multiplicada por um escalar.

Estas operações designam-se por **operações elementares**.

Consideremos, em paralelo, a notação matricial do sistema

$$\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_1 \leftrightarrow E_2 \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \leftarrow (-1)E_1 + E_3 \qquad L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3$$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ -y+2z=3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \leftarrow E_3 + E_2 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Consideremos, em paralelo, a notação matricial do sistema

$$\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$E_1 \leftrightarrow E_2$ $\qquad$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$E_3 \leftarrow (-1)E_1 + E_3$ $\qquad$ $L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ -y+2z=3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$E_3 \leftarrow E_3 + E_2$ $\qquad$ $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Consideremos, em paralelo, a notação matricial do sistema

$$\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_1 \leftrightarrow E_2 \qquad\qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \leftarrow (-1)E_1 + E_3 \qquad\qquad L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3$$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ -y+2z=3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \leftarrow E_3 + E_2 \qquad\qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Consideremos, em paralelo, a notação matricial do sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$E_1 \leftrightarrow E_2$ $\qquad$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=3 \\ y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$E_3 \leftarrow (-1)E_1 + E_3$ $\qquad$ $L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3$

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ -y+2z=3 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$E_3 \leftarrow E_3 + E_2$ $\qquad$ $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Consideremos, em paralelo, a notação matricial do sistema

$$\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$E_1 \leftrightarrow E_2$ $\qquad$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$E_3 \leftarrow (-1)E_1 + E_3$ $\qquad$ $L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ -y+2z=3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$E_3 \leftarrow E_3 + E_2$ $\qquad$ $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

obtendo-se o sistema simplificado, e para o qual é fácil obter a solução (primeiro o valor de z, depois de y e depois de x)

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y-z=1 \\ y+z=3 \\ 3z=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}\right.$$

$$S=\{(1,1,2)\}$$

Observação: Note-se que $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{A}} . \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{solução}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{b}}$

As operações se podem efectuar sobre as linhas de uma matriz são:

- OL1 troca da ordem das linhas,
- OL2 multiplicação de uma linha por um escalar, não nulo,
- OL3 substituir uma linha pela soma com outra linha multiplicada por um escalar.

Estas operações designam-se por **operações elementares**.

Considerando a matriz ampliada do sistema $(A|b)$ podemos escrever:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

matriz triangular superior

terminamos o método de eliminação de Gauss

Considerando a matriz ampliada do sistema $(A|b)$ podemos escrever:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

matriz triangular superior

terminamos o método de eliminação de Gauss

Considerando a matriz ampliada do sistema $(A|b)$ podemos escrever:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

matriz triangular superior

terminamos o método de eliminação de Gauss

Considerando a matriz ampliada do sistema $(A|b)$ podemos escrever:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 4 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & 2 & | & 3 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 3 & | & 6 \end{array}\right)$$

matriz triangular superior

terminamos o método de eliminação de Gauss

Considerando a matriz ampliada do sistema $(A|b)$ podemos escrever:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

matriz triangular superior

terminamos o método de eliminação de Gauss

Considerando a matriz ampliada do sistema $(A|b)$ podemos escrever:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

matriz triangular superior

terminamos o método de eliminação de Gauss

Considerando a matriz ampliada do sistema $(A|b)$ podemos escrever:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow (-1)L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

matriz triangular superior

terminamos o método de eliminação de Gauss

Método de eliminação de Gauss

Teorema

Seja $\tilde{A}x = \tilde{b}$ um sistema que resulta da realização de uma sequência de operações elementares sobre as equações de $Ax = b$. Então, os sistemas são equivalentes.

Nota: as operações *equivalentes* ao serem realizadas sobre a matriz ampliada do sistema, simplificam a aplicação do método.

Teorema

Seja $\tilde{A}x = \tilde{b}$ um sistema determinado, de n de equações a n incógnitas. Então é possível, realizando uma sequência finita de operações elementares sobre as equações, transformá-lo num sistema equivalente cuja matriz dos coeficientes é triangular superior.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow (-1)L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow (-2)L_1 + L_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow 2L_2 + L_4}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

matriz triangular superior

Exemplo

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow (-1)L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow (-2)L_1 + L_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow 2L_2 + L_4}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

matriz triangular superior

obtendo-se o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ \qquad -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 1 \end{cases}$$

que permite obter a solução pelo designado método de substituição inversa.
Obtendo-se primeiro o valor de x_4, depois x_3, seguido de x_2, e finalmente x_1 tem-se

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(1, 0, -1, 1)\}$$

Sistemas triangulares - método de substituição inversa e método de substituição directa

Considere-se o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots & & \\ & & a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right.$$

ao qual corresponde uma matriz dos coeficientes triangular superior.

Da última equação obtém-se: $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$

que, substituindo-se na penúltima equação: $x_{n-1} = \dfrac{(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)}{a_{n-1,n-1}}$

e, assim sucessivamente, obtêm-se: $x_1 = \dfrac{(b_1 - a_{1,2}x_2) - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{1,1}}$

este é chamado método de substituição inversa.

Um sistema cuja matriz dos coeficientes é triangular inferior, invertível, pode ser resolvido pelo método de substituição directa.

Exemplo Considerando o sistema seguinte

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x + 3y = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 1 \end{cases}$$

cuja matriz dos coeficientes é: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

tem-se: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1/3 \\ z = -2/9 \end{cases}$

sendo o conjunto solução do sistema inicial: $S = \{(1, -1/3, -2/9)\}$

Para matrizes rectangulares, em que a matriz ampliada do sistema de tem m equações a n incógnitas, com $m \neq n$, o método de eliminação de Gauss consiste na aplicação das mesmas operações elementares sobre linhas, com o objectivo de se obterem matrizes **escada de linhas.**

Definição

Diz-se que uma matriz é uma matriz **escada de linhas** se:

1. por debaixo do 1º elemento não nulo de cada linha da matriz, e por debaixo dos elementos anteriores da mesma linha, todas as componentes da matriz são nulos,
2. não há linhas totalmente nulas seguidas de linhas não nulas.

Esquematicamente:

$$\begin{pmatrix} \circledast & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & \circledast & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & \circledast & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \circledast & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \circledast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\circledast$: ele^{tos} não nulos,
$\bigstar$: ele^{tos} que podem ser nulos ou não,
a cor azul: ele^{tos} da diagonal principal.

Exemplos de matrizes escada de linhas:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} \quad ; \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} c(A) = 3 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(C) = 1 \; ; \; D = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} c(D) = 4$$

$$E = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(E) = 3$$

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & \vert\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & \vert 6 \end{pmatrix} c(A) = 3 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & \vert\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(C) = 1 \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \vert\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vert\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \vert 4 & -8 \end{pmatrix} c(D) = 4$$

$$E = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \vert\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vert\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(E) = 3$$

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} \; c(A) = 3 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(C) = 1 \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} \; c(D) = 4$$

$$E = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(E) = 3$$

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} \; c(A) = 3 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(C) = 1 \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} \; c(D) = 4$$

$$E = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(E) = 3$$

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} \; c(A) = 3 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(C) = 1 \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} \; c(D) = 4$$

$$E = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(E) = 3$$

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$.

Exemplos

$$A=\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} c(A)=3 \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(B)=2$$

$$C=\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(C)=1 \quad ; \quad D=\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} c(D)=4$$

$$E=\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(E)=3$$

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} c(A) = 3 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(C) = 1 \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} c(D) = 4$$

$$E = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(E) = 3$$

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} \; c(A) = 3 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(C) = 1 \; ; \; D = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} \; c(D) = 4$$

$$E = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(E) = 3$$

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} c(A) = 3 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(C) = 1 \;\; ; \;\; D = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} c(D) = 4$$

$$E = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(E) = 3$$

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} \; c(A) = 3 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(C) = 1 \;\; ; \;\; D = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} \; c(D) = 4$$

$$E = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; c(E) = 3$$

Definição

O número de linhas **não** nulas no final do processo de transformação de uma matriz A em matriz escada de linhas, chama-se **característica da matriz** e denota-se por $c(A)$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & |\underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & |6 \end{pmatrix} c(A) = 3 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & |\underline{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{-1} & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(C) = 1 \ ; \ D = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & |\underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & |4 & -8 \end{pmatrix} c(D) = 4$$

$$E = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(E) = 3$$

Classificação de Sistemas

Exemplo 1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \qquad S = \{(1, -1)\} \quad \text{(solução única)}$$

Exemplo 2.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 = 1 \end{cases} \qquad S = \{\} \quad \text{(não existe solução)}$$

Exemplo 3.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad S = \{(1, \alpha, \alpha) : \alpha \in R\}$$

(existem uma infinidade de soluções)

Classificação de Sistemas

Consideremos o sistema de m equações nas n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

cuja matriz ampliada se representa por $(A|b)$.

Podem definir-se, à custa da característica da matriz dos coeficientes e da característica da matriz ampliada, condições de existência e unicidade para a solução.

$$\begin{cases} \text{sistema possível} \begin{cases} \text{determinado} \\ c(A) = n \\ \text{indeterminado} \\ c(A) < n \end{cases} \\ c(A) = c(A|b) \\ \\ \text{sistema impossível} \\ c(A) \neq c(A|b) \end{cases}$$

Discussão de Sistemas

Exemplo

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + kx_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + (k-3)x_3 = 0 \end{array}\right. \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right)$$

- se $k = -4$ $\quad c(A) = 2;\ c(A|b) = 3$ logo $c(A) \neq c(A|b)$ sistema impossível

$$S = \{\}$$

- se $k \neq -4$ $\quad \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & k & \frac{k}{k+4} \end{array}\right)$

  - se $k = 0$
  - se $k \neq 0$

Discussão de Sistemas

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + kx_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + (k-3)x_3 = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right)$$

- se $k = -4$ $\quad c(A) = 2;\ c(A|b) = 3$ logo $c(A) \neq c(A|b)$ sistema impossível

$$S = \{\}$$

- se $k \neq -4$ $\quad \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & k & \frac{k}{k+4} \end{array}\right)$

  - se $k = 0$
  - se $k \neq 0$

Discussão de Sistemas

Exemplo

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + kx_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + (k-3)x_3 = 0 \end{array}\right. \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right)$$

- se $k = -4$ $\quad c(A) = 2;\ c(A|b) = 3$ logo $c(A) \neq c(A|b)$ sistema impossível

$$S = \{\}$$

- se $k \neq -4$ $\quad \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & k & \frac{k}{k+4} \end{array}\right)$
  - se $k = 0$
  - se $k \neq 0$

- se $k = 0$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - 3x_3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$c(A) = 2 = c(A|b)$ sistema possível
$c(a) < 3 = n$ sistema possível indeterminado, $\quad S = \{(-3-3\alpha, 1, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

- se $k \neq 0$ $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & k & \frac{k}{k+4} \end{array}\right)$

$c(A) = 3 = c(A|b) = n$ sistema possível determinado

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ (k+4)x_2 = 4 \\ kx_3 = \frac{k}{k+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11+k}{k+4} \\ x_2 = \frac{4}{k+4} \\ x_3 = \frac{1}{k+4} \end{cases},$$

$S = \{(\frac{11+k}{k+4}, \frac{4}{k+4}, \frac{1}{k+4}), k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0 \wedge k \neq -4\}$

Sistemas Homogéneo

Seja $Ax = b$ a equação matricial de um sistema de m equações a n incógnitas. Se $b = 0$, o sistema diz-se um sistema homogéneo.

Um sistema homogéneo tem sempre solução, dita solução trivial $x = 0$.
Exemplo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

não há necessidade de *trabalhar* com a matriz ampliada do sistema!

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ matriz escada de linhas

$$\begin{cases} x_2 = (-1/2)x_3 \\ x_1 = x_4 - (1/2)x_3 \end{cases}$$

$$S = \{(\beta - (1/2)\alpha, \ -(1/2)\alpha, \ \alpha, \ \beta) : \alpha, \beta, \in \mathbb{R}\}$$

Teorema

Sejam $AX = B$ um sistema possível de p equações lineares em n incógnitas e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ uma sua solução. Então o conjunto das soluções do sistema é:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} : \quad A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Demonstração:

Se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ é solução do sistema $Ax = b$, então $A(x - y) = Ax - Ay = b - b = 0$, logo $x - y$ é solução do sistema homogéneo $Ax = 0$. Fazendo $z = x - y$ resulta $x = y + z$.

Demonstração: (cont.)

Reciprocamente, seja z solução do sistema homogéneo $Ax = 0$, e y uma solução de $Ax = b$.
Tem-se $Ax = A(y + z) = Ay + Az = b + 0 = b$ e portanto x é também solução de $Ax = b$.

Observação O teorema garante que qualquer solução do sistema $Ax = b$ pode ser escrita como a soma de uma solução particular do sistema, y, com a solução do sistema homogéneo associado, z (tendo-se $x = y + z$).

Inversa de uma matriz

Se A é uma matriz de ordem n, invertível, a sua inversa verifica

$$AX = XA = I_n$$

Consideremos $AX = I_n$, e as matrizes X e I_n fraccionadas por colunas, tendo-se então

$$A(x_1 x_2 \ldots x_n) = (e_1 e_2 \ldots e_n) \qquad \text{com } e_i = (0 \ldots 0 \underbrace{1}_{\text{posição } i} 0 \ldots 0)^T$$

$$\Leftrightarrow (Ax_1 \;\; Ax_2 \;\; \ldots \;\; Ax_n) = (e_1 \;\; e_2 \;\; \ldots \;\; e_n)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ax_1 = e_1 \\ Ax_2 = e_2 \\ \quad\vdots \\ Ax_n = e_n \end{cases}$$

consequentemente, a coluna i da matriz inversa de A é a solução do sistema $Ax_i = e_1$, que tem solução única, porque A é invertível.

Para calcular a matriz inversa de A resolvem-se n sistemas $Ax_i = e_1$, todos com a mesma matriz dos coeficientes.
Se for usada eliminação Gaussiana, para não repetir operações elementares sobre a matriz dada, faz-se-se

$$(A|I_n) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (I_n|X)$$

e então $X = A^{-1}$.

Exemplo

Determinar a inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

donde a matriz inversa de A é: $A^{-1} \begin{pmatrix} -2/3 & 4/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Teorema

Seja S uma matriz de ordem n. Então a matriz A é invertível se e só se $Ax = 0$ não tem soluções além da solução nula (trivial).

Demonstração:

$"\Longrightarrow"$

Se A é invertível, existe A^{-1}, e podemos multiplicar ambos os membros de $Ax = 0$, à esquerda, por A^{-1}, obtendo-se:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 \Rightarrow A^{-1}(Ax) = 0 \Rightarrow Ix = 0 \Rightarrow x = 0$$

$"\Longleftarrow"$

Teorema

Seja A uma matriz invertível. Então, para qualquer inteiro m, a matriz A^m é invertível tendo-se

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$$

Demonstração:

Por indução em m.

Para $m = 1$ trivial!

Consideremos que a *afirmação* é válida ate m e verifiquemos que é válida para $m + 1$.

Então, e uma vez que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, tem-se que:

$$(A^{-1})^{m+1} = A^{-1}(A^{-1})^m = A^{-1}(A^m)^{-1} = (A^m A)^{-1} = (A^{m+1})^{-1}$$