ESPAÇOS LINEARES ou VECTORIAIS

Definição

- Sejam Ω um *corpo* (normalmente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e V um conjunto não vazio de elementos, onde estão definidas uma condição de *igualdade* entre elementos de V e as seguintes operações:
  i) *Operação interna – Adição*: envolvendo elementos de V;
  ii) *Operação externa – Multiplicação por escalar*: multiplicação de um elemento de V por um elemento de Ω (*escalar*).

Definição **[1.6]**: **Espaço linear (vectorial) sobre um corpo Ω**
O conjunto V diz-se um espaço linear (vectorial) sobre o corpo Ω, se são verificados os seguintes *axiomas*:

Axiomas de Fecho

Axioma 1) *Axioma de fecho para a adição*

$$\forall x, y \in \mathrm{V} \quad x + y \in \mathrm{V}$$

Axioma 2) *Axioma de fecho para a multiplicação por escalar*

$$\forall x \in \mathrm{V}\ \forall \alpha \in \Omega \quad \alpha x \in \mathrm{V}$$

Axiomas para a Adição

Axioma 3) *Propriedade comutativa*

$$\forall x, y \in \mathrm{V} \quad x + y = y + x$$

Axioma 4) *Propriedade associativa*

$$\forall x, y, z \in \mathrm{V} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

Axioma 5) *Existência de elemento zero*

$$\exists o \in \mathrm{V}\ \forall x \in \mathrm{V} \quad x + o = x$$

Axioma 6) *Existência de elemento simétrico (oposto)*

$$\forall x \in \mathrm{V}\ \exists (-x) \in \mathrm{V} \quad x + (-x) = o$$

Axiomas para a Multiplicação por Escalar

Axioma 7) *Propriedade associativa*

$$\forall x \in \mathrm{V}\ \forall \alpha, \beta \in \Omega \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x = \beta(\alpha x)$$

Axioma 8) *Propriedade distributiva em relação à adição em* V

$$\forall x, y \in \mathrm{V}\ \forall \alpha \in \Omega \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

Axioma 9) *Propriedade distributiva em relação à adição em* Ω

$$\forall x \in \mathrm{V}\ \forall \alpha, \beta \in \Omega \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

Axioma 10) *Existência de elemento unidade*

$$\forall x \in \mathrm{V} \quad 1x = x$$

- Convém realçar o seguinte:

  i) O *elemento zero* de V pode ainda ser representado por 0_{V};

  ii) Os elementos de V são, muitas vezes, designados por *vectores*;

  iii) Se $\Omega = \mathbb{R}$, então V é um *espaço linear (vectorial) real*;

  iv) Se $\Omega = \mathbb{C}$, então V é um *espaço linear (vectorial) complexo*;

  v) Se os elementos de V são funções, então V é um *espaço funcional*.

Exemplo 1 **[1.9]**: O conjunto $\mathbb{R}$ é um *espaço linear real*; *não é um espaço linear complexo*.

Exemplo 2 **[1.9;10]**: O conjunto $\mathbb{C}$ tanto poderá ser um *espaço linear real* como um *espaço linear complexo*.

Exemplo 3 **[1.11]**: Os conjuntos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são *espaços lineares reais*.

Exemplo 4 [1.11]: O conjunto $\mathbb{R}^n$ é um *espaço linear real*.

Exemplo 5 [1.23]: O conjunto de elementos de $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{T} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

não é um espaço linear real.

Exemplo 6: O conjunto de elementos de $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{U} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

é um *espaço linear real*.

Exemplo 7 [1.13]: O conjunto de elementos de $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{W} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_3 = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

é um *espaço linear real*.

Exemplo 8 [1.14]: Seja $\mathrm{P}_n(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinómios reais a uma variável real que não têm grau superior a *n*, em que *n* tem um valor fixo

$$\mathrm{P}_n(\mathbb{R}) = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ : \ a_i \in \mathbb{R} \ , \ i = 0,1,2,\ldots,n\right\}$$

Trata-se de um *espaço linear real* (*espaço funcional real*).

Exemplo 9 [1.25]: O conjunto de elementos de $P_n(\mathbb{R})$

$$S = \{ p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \ : \ p(2) = 2 + p(0) \} \subset P_n(\mathbb{R})$$

não é um espaço linear real.

Exemplo 10 [1.15]: O conjunto de elementos de $P_3(\mathbb{R})$

$$Q = \left\{ a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in P_3(\mathbb{R}) \ : \ a(0) = a(1) \right\} \subset P_3(\mathbb{R})$$

é um *espaço linear real*.

Exemplo 11 [1.26]: O conjunto dos polinómios reais a uma variável real de grau exactamente igual a *n*, em que *n* tem um valor fixo, *não é um espaço linear real*.

Exemplo 12 [1.16]: O conjunto V das funções reais de variável real definidas no domínio $U \subset \mathbb{R}$ é um *espaço linear real* (*espaço funcional real*).

Exemplo 13 [1.17]: O conjunto V das funções reais de variável real contínuas num dado intervalo é um *espaço linear real* (*espaço funcional real*).

Exemplo 14 [1.18]: O conjunto V das funções reais de variável real deriváveis num dado ponto é um *espaço linear real* (*espaço funcional real*).

Exemplo 15 [1.19]: O conjunto V das funções reais de variável real integráveis num dado intervalo é um *espaço linear real* (*espaço funcional real*).

Exemplo 16 [1.12]: Seja $\mathrm{M}_{(m,n)}$ o conjunto de todas as matrizes do tipo $m \times n$, num corpo Ω. Conforme veremos oportunamente, trata-se de um *espaço linear sobre o corpo* Ω, sendo um *espaço linear real* se $\Omega = \mathbb{R}$, e um *espaço linear complexo* no caso de $\Omega = \mathbb{C}$.

Propriedades de um espaço linear

Teorema [1.5]: Unicidade do elemento zero
O *elemento zero* de um espaço linear é único.

Teorema [1.6]: Unicidade do elemento simétrico (ou oposto)
Num espaço linear, o *elemento simétrico* de qualquer elemento é único.

Teorema [1.7]: Lei de cancelamento na adição
Seja V um espaço linear. Então

$$\forall x, y, z \in \mathrm{V} \; : x + y = z + y \;\; \Rightarrow \;\; x = z$$

Teorema **[1.8]**: Em qualquer espaço linear V sobre um corpo Ω, que tem 0_V como *elemento zero*, são verdadeiras as seguintes proposições:

a) $\forall x \in V \;\; 0x = 0_V$

b) $\forall \alpha \in \Omega \;\; \alpha 0_V = 0_V$

c) $\forall x \in V \; \forall \alpha \in \Omega \;\; (-\alpha)x = -(\alpha x) = \alpha(-x)$

d) $\forall x \in V \; \forall \alpha \in \Omega \;\; \alpha x = 0_V \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0 \vee x = 0_V$

e) $\forall x, y \in V \; \forall \alpha \in \Omega \setminus \{0\} \;\; \alpha x = \alpha y \;\Leftrightarrow\; x = y$

f) $\forall x \in V \setminus \{0_V\} \; \forall \alpha, \beta \in \Omega \;\; \alpha x = \beta x \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta$

g) $\forall x, y \in V \;\; -(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$

h) $\forall x \in V \; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \sum_{i=1}^{n} x = nx$

Subespaço linear (ou vectorial)

Definição [1.7]: **Subespaço linear (vectorial)**
Sejam V um *espaço linear (vectorial)* sobre um corpo Ω e S um subconjunto não vazio de V. Se S tem estrutura de espaço linear, com a mesma condição de *igualdade* e as mesmas operações *adição* e *multiplicação por escalar* definidas em V, então S diz-se um *subespaço linear (vectorial)* de V ou, simplesmente, um *subespaço* de V.

Teorema [1.9]: Se S é um subconjunto não vazio de um espaço linear V, com a mesma condição de *igualdade* e as mesmas operações *adição* e *multiplicação por escalar* definidas em V, então S é um *subespaço linear (vectorial)* de V, se e só se S satisfaz os *axiomas de fecho*.

Exemplo 17: O conjunto de elementos de $\mathbb{R}^3$ (**exemplo 6**)

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

é um *subespaço* de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 18 [1.27]: O conjunto de elementos de $\mathbb{R}^3$ (**exemplo 7**)

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

é um *subespaço* de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 19 **[1.29]**: O conjunto de elementos de $\mathbb{R}^3$

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 - 2x_2 = 0 \;\wedge\; x_1 - 3x_2 = x_3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

é um *subespaço* de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 20 **[1.30]**: O conjunto de elementos de $P_3(\mathbb{R})$ (**exemplo 10**)

$$Q = \left\{ a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in P_3(\mathbb{R}) \;:\; a(0) = a(1) \right\} \subset P_3(\mathbb{R})$$

é um *subespaço* de $P_3(\mathbb{R})$.