SISTEMAS EQUAÇÕES LINEARES

1. Escreva os sistemas de equações lineares sob a forma matricial.

a) $\begin{cases} 4x+2y=-2 \\ 5x+6y=15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x = -9 \\ 2x+4y = 2 \\ -x+3y-2z=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y+z-4u=8 \\ 4x-2y-4z+2u=0 \\ x+4y+3z-7u=9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-2y-8z=0 \\ -4x-7y-13z=0 \\ 6x+8y+12z=0 \end{cases}$

2. Considere o sistema, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, de três equações lineares a três incógnitas (x, y, z)

$$\begin{cases} 2x-3y+7z=-7 \\ x+y-2z=5 \\ 5x+4y+2z=2 \end{cases}$$

a) Recorrendo aos determinantes, mostre que se trata de um sistema de Cramer e obtenha a sua solução através da regra de Cramer.

b) Resolva-o recorrendo à matriz inversa da matriz dos coeficientes do sistema.

c) Resolva-o aplicando o processo de decomposição triangular da matriz dos coeficientes do sistema, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$.

d) Usando ainda a matriz inversa da matriz dos coeficientes do sistema, obtenha as novas soluções do sistema, se forem agora consideradas as seguintes matrizes-coluna de termos independentes: $\boldsymbol{B}_1=[9 \quad -1 \quad 3]^T$ e $\boldsymbol{B}_2=[3 \quad -2 \quad -5]^T$.

3. Recorrendo aos determinantes, mostre que os sistemas de equações lineares são sistemas de Cramer. Determine as suas soluções aplicando a regra de Cramer.

a) $\begin{cases} x - 4y = -9 \\ 3y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x = 8 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ 5x + 6y = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y - 4z = 3 \\ -3y + 2z = 7 \\ 2z = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x = -9 \\ 2x + 4y = 2 \\ -x + 3y - 2z = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = -16 \\ -3x + 3y - 6z = 15 \\ 5x + y + 7z = 5 \end{cases}$

4. Resolva os sistemas de equações lineares do exercício anterior, recorrendo à matriz inversa da matriz dos coeficientes do sistema, $\boldsymbol{A}$.

7. Sejam $\boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{Z}$ duas soluções distintas do sistema de equações lineares $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. Mostre que $a\boldsymbol{Y} + b\boldsymbol{Z}$, em que $a, b \in \mathbb{R}$, será uma solução do sistema $\boldsymbol{AX} = u\boldsymbol{B}$, com $u \in \mathbb{R}$, se $u = a + b$.

11. Sejam $\boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{Z}$ duas soluções distintas do sistema de equações lineares $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. Mostre que, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, $a\boldsymbol{Y} + (1 - a)\boldsymbol{Z}$ é ainda solução desse mesmo sistema.