Prova sem consulta. Duração: 2h (30m de tolerância).

*** Não são consideradas as folhas sem identificação. Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não é possível a utilização de máquinas de calcular gráficas nem de microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**8,9**] Considere as transformações lineares $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $S(x, y, z) = (-x + 2z, x - 3z)$, e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, representada pela matriz

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação às bases canónicas E_2 e E_3 para os espaços lineares $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respetivamente. Sejam, ainda, as bases $\mathrm{U} = \{(0,1,0), (0,0,1), (1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathrm{V} = \{(1,1), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Obtenha o núcleo e o contradomínio de *T*. Identifique, para cada um destes subespaços, uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Classifique as transformações *S*, *T* e *TS* quanto à injetividade e determine, se tal for possível, as respetivas transformações inversas. Justifique.

c) Usando o cálculo matricial, obtenha as matrizes $\boldsymbol{S}_{\mathrm{U,V}} = m(S)_{\mathrm{U,V}}$, representação matricial de *S* em relação às bases U e V, e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,U}} = m(T)_{\mathrm{V,U}}$, representação matricial de *T* em relação às bases V e U.

d) Determine a matriz $m(STS)_{\mathrm{U,E_2}}$ que representa a transformação composta *STS* relativamente às bases U e E_2.

2. [**1,2**] Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada real, de ordem *n*, e diagonalizável. Mostre que a sua característica é igual ao número de valores próprios não nulos da matriz.

....*(continua no verso)*

Prova sem consulta. Duração: 2h (30m de tolerância).

GRUPO II

3. [**2,7**] Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & -1 & k+1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & k \\ k+5 & 1 & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

Determine a sua característica em função do parâmetro k e indique para que valores de k a matriz é não singular.

GRUPO III

4. [**1,3**] Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que $\dim \mathrm{V} = n$ e admita que $\mathrm{U} = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ é uma base para V. Mostre que se T é sobrejetiva, então $\overline{\mathrm{U}} = \{T(u_1), T(u_2), T(u_3), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base para V.

5. [**5,9**] Considere a transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz real

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ 3 & 6 & -3 \\ \varphi & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

relativamente à base canónica para o espaço linear $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule α, β, δ e φ de forma que o traço de A seja 6, $\vec{x} = (1,1,2)$ seja um dos seus vetores próprios e o cofator do elemento $a_{3,2}$ tenha o valor 9.

b) Determine os valores próprios e os espaços próprios da matriz, indicando, para cada um destes subespaços, uma base e a dimensão (se não resolveu a alínea anterior considere $\alpha = 0$ e $\beta = -\delta = -\varphi = -3$).

c) Mostre que a matriz A é diagonalizável; indique, justificando, a matriz diagonal que lhe é semelhante e a respetiva matriz diagonalizadora.