Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância) 1ª Prova de Avaliação

---

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o <u>nome completo</u>. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A <u>entrega da prova e a desistência</u> só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos <u>três grupos</u> utilizando <u>folhas de capa distintas</u>.**

GRUPO I

1. [**6,0**] Considere o conjunto $S=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}\subset\mathbb{R}^4$, onde $\vec{a}=(1,1,0,2)$, $\vec{b}=(1,-1,2,0)$, $\vec{c}=(2,1,2,3)$ e $\vec{d}=(-2,2,-4,0)$. Sejam $H=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\ :\ z=x-y\ \wedge\ w=0\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$ e os vetores $\vec{e}=(\alpha,-2\alpha,0,1)$ e $\vec{f}=(2\beta,\beta,1,0)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

a) Determine o subespaço gerado pelo conjunto S, $L(S)$; indique uma base para o subespaço obtido e conclua em relação à sua dimensão.

b) Obtenha os valores de α e β de forma que os vetores $\vec{e}$ e $\vec{f}$ pertençam a uma base ortogonal, W, para $L(S)$; determine essa base.

c) Determine uma base, V, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que inclua dois elementos ortogonais do espaço H e um elemento de S. Justifique devidamente.

GRUPO II

2. [**1,6**] Seja o conjunto $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}\subset\mathbb{R}^4$, tal que $\vec{u}_1=(0,\alpha,\alpha,\alpha)$, $\vec{u}_2=(1,-1,0,1)$, $\vec{u}_3=(1,\alpha,6,2\alpha-3)$ e $\vec{u}_4=(1,0,\beta+1,1)$. Obtenha os valores de α e β de modo que U seja uma base para $L(U)$ e identifique $L(U)$. Justifique.

3. [**2,4**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\|=\|\vec{c}\|=\sqrt{3}$, $\|\vec{b}\|=\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}\times\vec{b}=2$ e $\vec{d}=\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})$. Calcule:

a) A norma de $\overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{a}-\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})$ (vetor projeção ortogonal de $\vec{a}+\vec{b}$ sobre $\vec{a}-\vec{b}$).

b) O ângulo, α, formado pelos vetores $\vec{d}+\vec{c}$ e $\vec{a}\times\vec{b}$.

c) O volume do prisma definido pelos vetores $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}+\vec{c}$.

.... ***(continua no verso)***

GRUPO III

4. [**5,0**] Sejam o plano $M\ :\ x+y-z=3$, o ponto $R=(-1,-1,1)$ e a reta, *r*, com a equação vetorial $X(t)=P+t\vec{a}\ ,\ t\in\mathbb{R}$, em que $P=(1,0,1)$ e $\vec{a}=(-1,1,-2)$.

a) Calcule a distância do ponto *R* à reta *r* e o ângulo que esta reta faz com a reta, *p*, bissetriz dos quadrantes ímpares do plano *yOz*.

b) Obtenha a equação vetorial da reta, r_1, que está contida em *M*, é ortogonal à reta *r* e passa no ponto, R_1, do plano *M* que está mais próximo de *R*.

5. [**2,5**] Considere a reta, *h*, com a equação vetorial $X(t)=P+t\vec{a}\ ,\ t\in\mathbb{R}$, em que $P=(1,0,1)$ e $\vec{a}=(1,-1,0)$ e o ponto $Q=(-1,1,1)$. Determine as equações cartesianas dos planos, α e α_1, que passam no ponto *Q*, são paralelos à reta *h* e fazem um ângulo de $30°$ com o eixo dos *xx*.

6. [**1,1**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$ e $\vec{c}\cdot\vec{b}\neq 0$. Mostre que se $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, então o conjunto $\mathrm{U}=\{\vec{a},\vec{c}\}$ é linearmente dependente. *Sugestão*: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.

7. [**1,4**] Considere o plano $M=\left\{X\in\mathbb{R}^3\ :\ X=P+s\vec{a}+t\vec{b}\right\}$ e seja O_1 o ponto de *M* mais próximo da origem. Mostre que:

$$\left\|\overrightarrow{PO_1}\right\|=\frac{\left\|\overrightarrow{OP}\times(\vec{a}\times\vec{b})\right\|}{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|}.$$