Análise Matemática para Engenharia

folha de exercícios 2 2021/2022

- **Limite e continuidade – Resolução abreviada de algumas alíneas**

1. (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

Calculando os seguintes limites direcionais

$$\mathcal{C}_1: \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{y\to0}\frac{-y}{y} = \lim_{y\to0} -1 = -1$$

$$\mathcal{C}_2: \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to0}\frac{x}{x} = \lim_{y\to0} 1 = 1$$

prova-se, por unicidade de limite, que $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Calculando os seguintes limites direcionais

$$\mathcal{C}_1: \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to0} 0 = 0$$

$$\mathcal{C}_2: \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0}\frac{0}{x^2} = \lim_{y\to0} 0 = 0$$

$$\mathcal{C}_3: \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_3}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2} = \lim_{y\to0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

prova-se, por unicidade de limite, que $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(c)

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Calculando os seguintes limites relativos

$$\mathcal{C}_1: \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to0}\frac{0}{y^4} = \lim_{y\to0} 0 = 0$$

$$\mathcal{C}_2: \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^2+x^4} = \lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^2(1+x^2)} == \lim_{x\to0}\frac{x}{1+x^2} = 0$$

$$\mathcal{C}_3: \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_3}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to0}\frac{y^4}{2y^4} = \lim_{y\to0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

prova-se, por unicidade de limite, que $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

2. Determine, caso existam, os limites seguintes.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} (2x-y^2)$,

$(2,3) \in D_f = \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} (2x-y^2) = -5$$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} y\sin\left(\frac{x}{y}\right)$,

$(0,2) \in D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} y\sin\left(\frac{x}{y}\right) = 2\sin\left(\frac{0}{2}\right) = 0$$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$

$(0,0) \in D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3+xy \neq 0\}$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy} = \frac{-2}{3}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

$D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\}$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ (ind.)

Como

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2y+xy^2-y^3 & x^2+y^2 \\ \hline -x^3 \qquad -xy^2 & x-y \\ \hline 0-x^2y \quad +0 \quad -y^3 & \\ 0+x^2y \quad +0 \quad +y^3 & \\ \hline 0 \quad +0 \quad +0 \quad +0 & \end{array}$$

então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x-y = 0$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

$D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\}$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ (ind.)

$\mathcal{C}_1$: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{y\to0} \frac{-y^2}{2y^2} = \lim_{y\to0} \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2}.$

$\mathcal{C}_2$: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{y\to0} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{y\to0} 2 = 2.$

Portanto, $\displaystyle\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2} =$

$D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\}$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ (ind.)

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\mathcal{C}_1$: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2} = \lim_{y\to0} \frac{5y^2}{4y^2} = \lim_{y\to0} \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$

$\mathcal{C}_2$: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x\to0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Portanto, $\displaystyle\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^3+y^3} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\mathcal{C}_1$: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{4x^2y}{x^3+y^3} = \lim_{y\to0} \frac{0}{y^3} = \lim_{y\to0} 0 = 0$

$\mathcal{C}_2$: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^3+y^3} = \displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{4x^2y}{x^3+y^3} = \lim_{x\to0} \frac{4x^3}{2x^3} = 2$

Portanto, $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^3+y^3}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

$D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\}$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ (ind.)

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2-y^2 = 0$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$

$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \neq x, \quad y \neq -x\}$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ (ind.)

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{(x+y)} = \frac{1}{2}$$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{3xy}{(x-1)^2+(y-2)^2} = \frac{6}{0} = \infty$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^4}{1+x^4} = \frac{0}{1} = 0$

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$ porque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

e

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \ \text{ ou } \quad \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2}{x^2} = 1$$

(m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x-2)^2y^2}{(x-2)^2+y^2} = 0$ porque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$$

e

$$\left|\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2+y^2}\right| = \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2+y^2} \leq \frac{(x-2)^2+y^2}{(x-2)^2+y^2} = 1$$

(n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\mathcal{C}_1$: $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_1}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{0}{y^2} = \lim_{x\to0} 0 = 0$

$\mathcal{C}_2$: $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$

Portanto, $\displaystyle\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln(xy) = 0\times\infty$ (Sugestão: Considere o caminho dado por $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$).

$\mathcal{C}_1$: $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_1}} x\ln(xy) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} x\ln(xy) = \lim_{x\to0} x\ln x^2 = \lim_{x\to0} 2x\ln x = \lim_{x\to0} 2\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0} 2\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$
0

$\mathcal{C}_2$: $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}_2}} x\ln(xy) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=e^{-\frac{1}{x^2}}}} x\ln(xy) = \lim_{x\to0} x\ln(xe^{-\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x\to0} x\ln(x) + \lim_{x\to0} x\ln(e^{-\frac{1}{x^2}}) =$
$\displaystyle\lim_{x\to0} x\ln(x) + \lim_{x\to0} -\frac{x}{x^2} = 0 + \lim_{x\to0} -\frac{1}{x} = \infty$- Portanto, $\displaystyle\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln(xy)$

(p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2\ln x}{(x-1)^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Como

$$\left|\frac{(x-1)^2\ln x}{(x-1)^2+y^2}\right| \leq \frac{(x-1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2} = 1 \ \text{ e } \ \lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln x = 0,$$

prova-se que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2\ln x}{(x-1)^2+y^2} = 0.$$

3. Determine o domínio das seguintes funções e estude a existência de limite nos pontos indicados:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ em $P_0 = (0,0)$;

$D_f = \mathbb{R}^2$.

Calculemos, então, o seguinte limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Calculando os seguintes limites direcionais

$$\mathcal{C}_1 : \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in\mathcal{C}_1}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in\mathcal{C}_2}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

prova-se, por unicidade de limite, que

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ em $P_0 = (0,0)$;

$D_f = \mathbb{R}^2$.

Calculemos, então, o seguinte limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Uma vez que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \quad (\mathit{limitada})$$

, porva-se que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x+y}, & x \neq y \\ 1, & x = y. \end{cases}$

Estudemos a existência de limite na origem $(0,0)$, calculando o seguinte limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Como (x,y) pode aproximar-se da origem por pontos da forma $y = x$, tem-se o seguinte limite relativo

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0) \\ y\,=\,x}} f(x,y) = \lim_{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0)} 1 = 1$$

Por outro lado, a aproximação à orgigem pode fazer-se por pontos da forma $y \neq x$, obtendo-se o seguinte limite relativo

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0) \\ y\,\neq\,x}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = 0$$

Logo, não existe limite de f quando (x,y) tende para $(0,0)$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} 1+\cos(xy), & x \neq y \\ 1, & x = y. \end{cases}$ em $P_1 = (0,0)$;

Estudemos a existência de limite na origem $(0,0)$, calculando o seguinte limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Como (x,y) pode aproximar-se da origem por pontos da forma $y=x$, tem-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1=1$$

Por outro lado, a aproximação à origem pode dar-se por pontos da forma $y\neq x$, obtendo-se o seguinte limite restrito:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq x}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1+\cos(xy)=2.$$

Logo, não existe limite de f quando (x,y) tende para $(0,0)$.

(e)

(f) Se $f(x,y)=\begin{cases} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

então o limite na origem vale 0, porque

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0=0$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)==\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{limitada}}=0$$

4. Determine o domínio de continuidade das funções definidas por:

(a) $f(x,y,z)=x^2y+x^3y^2+z$

$D_f=\mathbb{R}^3$.

Todos os polinómios são funçãoes contínuas. Logo, $f(x,y,z)=x^2y+x^3y^2+z$ é contínua em todos os pontos do seu domínio, $\mathbb{R}^3$.

(b) $f(x,y)=\ln(x+y-1)$

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+y-1>0\}$.

A função polinomial $x+y-1$ é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}^2$. A função $\ln z$ é contínua em $\mathbb{R}^+$. Então, a função definida pela expressão $\ln(x+y-1)$ é contínua em D_f porque é a composição de um polinómio com a função logarítmica, que é contínua $\mathbb{R}^+$.

(c) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$

$D_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2-z^2\neq 0\}=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$

A função f é contínua em todos os pontos do seu domínio, pois é o quociente de funções contínuas cujo denominador não se anula nesses pontos .

(d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{5x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Para $(x,y)\neq(0,0)$, f é uma função racional (quocinete de polinómios), pelo que é contínua em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$

Para $(x,y)=(0,0)$, a função não é contínua pois $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Para tal, calculemos os seguintes limites relativos a $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, respetivamente:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\mathcal{C}_1}}\frac{2xy}{5x^2+y^2}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\frac{2xy}{5x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{y^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\mathcal{C}_2}}\frac{2xy}{5x^2+y^2}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{2x^2}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Como os limites direcionais têm diferentes valores, prova-se que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2xy}{5x^2+y^2}$ e, portanto, f não é contínua na origem.

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}^2$.

Nos pontos da forma $x^2+y^2<1$ a função é constante, pelo que é contínua. Nos pontos da forma $x^2+y^2>1$ a função é constante, pelo que é contínua.

Nos pontos da forma (a,b) satisfazendo $a^2+b^2=1$ prova-se que, considerando que (x,y) se aproxima de (a,b) por pontos dos conjuntos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, os seguintes limites relativos são diferentes:

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in\mathcal{C}_1}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\x^2+y^2<1}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} 2 = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} 2 = 2$

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in\mathcal{C}_2}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\x^2+y^2>1}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} 0 = 0$

Logo, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \Rightarrow f$ não é contínua em (a,b).

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{2x^2+3y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Para $(x,y)\neq(0,0)$, trata-se de uma função racional, pelo que é contínua.

Para $(x,y)=(0,0)$ a função é contínua, pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^2+3y^4} = 0 = f(0,0),$$

uma vez que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

e

$$\left|\frac{x^2}{2x^2+3y^4}\right| \le \frac{x^2}{2(x^2+y^4)} \le \frac{(x^2+y^4)}{2(x^2+y^4)} = \frac{1}{2}$$

5. Determine o valor da constante k de modo que a função

$$g(x,y) = \begin{cases} \cos(x^2+y^2) & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ k & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

seja contínua em $(x,y)=(0,0)$.

Resp. g é contínua em $(0,0)$ se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = k \Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos(x^2+y^2) = k \Leftrightarrow 1 = k$