Exemplo 3 [4.5]: Considere as transformações lineares $R:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que possuem as *representações matriciais*

$$\boldsymbol{R}=m(R)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{S}=m(S)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\ \text{e}\ \boldsymbol{T}=m(T)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_3=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ e $\mathrm{E}_2=\{\vec{i}_1,\vec{j}_1\}=\{(1,0),(0,1)\}$ para os espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja ainda a *base ordenada* para $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{V}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}=\{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,2)\}$$

Determine as seguintes *representações matriciais*:

a) $\boldsymbol{R}_{\mathrm{V},\mathrm{E}_2}=m(R)_{\mathrm{V},\mathrm{E}_2}$, que representa R em relação às *bases ordenadas* V e E_2.

b) $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}_2,\mathrm{V}}=m(S)_{\mathrm{E}_2,\mathrm{V}}$, que representa S em relação às *bases ordenadas* E_2 e V.

c) $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V},\mathrm{E}_3}=m(T)_{\mathrm{V},\mathrm{E}_3}$, que representa T em relação às *bases ordenadas* V e E_3.

d) $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}_3,\mathrm{V}}=m(T)_{\mathrm{E}_3,\mathrm{V}}$, que representa T em relação às *bases ordenadas* E_3 e V.

e) $m(SR+T^2)_{\mathrm{V}}$, que representa $SR+T^2$ em relação à *base ordenada* V e recorrendo às matrizes obtidas nas alíneas anteriores.

f) $m(SR+T^2)_{\mathrm{V}}$ a partir, neste caso, da sua representação matricial em relação à *base canónica* E_3.

Solução:

a) A matriz $\boldsymbol{R}_{\mathrm{V,E_2}} = m(R)_{\mathrm{V,E_2}}$ é

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{V,E_2}} = \boldsymbol{R}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\to\mathrm{E_3}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{V,E_2}}$$

onde $\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\to\mathrm{E_3}}$ é a matriz *mudança de base de* V *para* $\mathrm{E_3}$, definida por

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\to\mathrm{E_3}} = \boldsymbol{E}_3^{-1}\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}_3\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) A matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E_2,V}} = m(S)_{\mathrm{E_2,V}}$ é

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{E_2,V}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\to\mathrm{E_3}}\right)^{-1}\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}_{\mathrm{E_2,V}}$$

em que

$$\left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\to\mathrm{E_3}}\right)^{-1} = \boldsymbol{V}^{-1} = \frac{1}{|\ \boldsymbol{V}\ |}\left[\boldsymbol{Cof}\ \ \boldsymbol{V}\right]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) A matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,E_3}} = m(T)_{\mathrm{V,E_3}}$ é

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,E_3}} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\to\mathrm{E_3}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{V,E_3}}$$

d) A matriz $\boldsymbol{T}_{E_3,V} = m(T)_{E_3,V}$ é

$$\boldsymbol{T}_{E_3,V} = \left(\boldsymbol{M}_{V \to E_3}\right)^{-1} \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{E_3,V}$$

e) A matriz $m(SR + T^2)_V$ é

$$m(SR + T^2)_V = m(SR)_V + m(T^2)_V = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}_V$$

em que

$$m(SR)_V = \boldsymbol{S}_{E_2,V}\ \boldsymbol{R}_{V,E_2} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}_V$$

$$m(T^2)_V = \boldsymbol{T}_{E_3,V}\ \boldsymbol{T}_{V,E_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_V$$

f) A representação matricial de $SR + T^2$ em relação à *base canónica* E_3 é

$$m(SR + T^2) = m(SR) + m(T^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

em que

$$m(SR) = \boldsymbol{S}\ \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$m(T^2) = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz $m(SR + T^2)_{\mathrm{V}}$ é obtida, neste caso, a partir da relação matricial

$$m(SR + T^2)_{\mathrm{V}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{V} \to \mathrm{E}_3}\right)^{-1} m(SR + T^2)\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{V} \to \mathrm{E}_3} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{\mathrm{V}}$$