Ficha 2 - Continuidade

(1) a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (2x-y^2) = 4-9 = -5$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{3},2)} y \operatorname{sen}\frac{x}{y} = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}\right) = 2\times\frac{1}{2} = 1$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0+0 = 0$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y-3x}{x} = \frac{1-0}{0} = \pm\infty$

(2) a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y}{x+3y} = \frac{0}{0}$

Pelos limites iterados

i) Aproximação pela recta $y=y_0$, isto é, $y=0$

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{2x-y}{x+3y}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{x}\right) = \lim_{x\to0} 2 = 2$$

ii) Aproximação pela recta $x=x_0$, isto é, $x=0$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{2x-y}{x+3y}\right) = \lim_{y\to0}\left(\frac{-y}{3y}\right) = \lim_{y\to0}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

Como os limites iterados são diferentes então não existe limite.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{y} = = \lim_{y\to 0}\left(\frac{x^2}{y}+y\right) = \pm\infty$$

pelos limite iterados, temos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{y}\right) = \lim_{x\to 0}(\pm\infty) = \pm\infty$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^2}{y}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y} = \lim_{y\to 0} y = 0$$

Como os limites iterados são diferentes, logo não existe limite. Também pelo 1º limite iterado concluímos que não existe limite.

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

pelos limites iterados, temos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

Como os limites iterados são diferentes, logo não existe limite

d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

pelos limites iterados, temos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=\lim_{y\to 0} 0 = 0$$ 3/

Se os limite iterados são iguais então se o limite existir é zero.

Vamos calcular os limites direccionais:

i) <u>ao longo das rectas</u> $(y-y_0=m(x-x_0))$ que passam no ponto $(x_0,y_0)=(0,0)$, isto é, ao longo da família das rectas $y=mx$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\frac{2x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2(mx)}{x^4+(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2mx^3}{x^4+m^2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2mx}{x^2+m^2}=\frac{0}{m^2}=0$$

Como os limites ao longo das rectas $y=mx$ é igual a zero então se o limite existir é zero.

ii) ao longo das parábolas $(y-y_0=m(x-x_0)^2)$ que passam no ponto $(x_0,y_0)=(0,0)$, isto é, ao longo da família de parábolas $y=mx^2$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}}\frac{2x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2(mx^2)}{x^4+(mx^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2mx^4}{x^4+m^2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2m}{1+m^2}=$$

$$=\frac{2m}{1+m^2}$$

Como o limite depende de m, isto é, varia de parábola para parábola $(y=mx^2)$ então o limite não existe.

③ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \left(0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \wedge (x,y) \in D_f \right) \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \left(0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \wedge (x,y) \in D_f \right) \Rightarrow \left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$

Vamos supor que $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{3|x^2y|}{|x^2+y^2|} = \frac{3|x^2||y|}{x^2+y^2} = \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{3x^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \leq \frac{3(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 3\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{y^2} = |y| \\ |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2 \leq x^2+y^2 \end{cases}$$

Assim,

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq 3\sqrt{x^2+y^2}.$$

Como, por hipótese, $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ então $\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq 3\delta$. Logo $\left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon$ desde que $3\delta \leq \varepsilon \Leftrightarrow \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Assim, basta ter $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$ //

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \left(0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \wedge (x,y) \in D_f \right) \Rightarrow \left| \frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$

Vamos supor que $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

$$\left|\frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{4|x^3|}{|\sqrt{x^2+y^2}|} = \frac{4x^2|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{4(x^2+y^2)|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq$$

$$\leq \frac{4(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 4(x^2+y^2)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2} = |x| \\ |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Assim, $\left|\frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq 4(x^2+y^2)$

Como, por hipótese, $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ então $\left|\frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq 4\delta^2$. Logo basta, portanto, considerar $4\delta^2 \leq \varepsilon \Leftrightarrow \delta \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$, ou em particular, $\delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$, para garantir que

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \Rightarrow \left|\frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < \varepsilon$$

ou seja, que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \left(0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \wedge (x,y)\in D_f\right) \Rightarrow \left|\frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \varepsilon$$

Vamos supor que $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

$$\left|\frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|2x^2+3y^2|}{|\sqrt{x^2+y^2}|} \leq \frac{3|x^2+y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\sqrt{x^2+y^2}$$

Assim, $\left|\frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq 3\sqrt{x^2+y^2}$. Basta, portanto, considerar $3\delta \leq \varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$, ou em particular $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, para garantir que

$\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \left|\frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < \varepsilon$ ou seja, que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

4

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{5x^2-y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - y^2 \neq 0\} \cup \{(0,0)\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm\sqrt{5}x\} \cup \{(0,0)\}$

C. Aux

$5x^2-y^2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{5x^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{5}|x| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{5}x$

- Para $(x,y) \in Df$ tal que $(x,y) \neq (0,0)$

$f(x,y) = \dfrac{2xy}{5x^2-y^2}$ é um quociente de dois polinómios, onde o denominador não se anula. Logo $\dfrac{2xy}{5x^2-y^2}$ é contínua para $(x,y) \in Df \setminus \{(0,0)\}$.

- Para $(x,y) = (0,0)$

  - $f(0,0) = 1$

  - $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{5x^2-y^2} = \dfrac{0}{0}$

Vamos estudar o limite pelos limite iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{2xy}{5x^2-y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{5x^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

O limite se exitir é $0 \neq 1$. Logo a função não é contínua em $(0,0)$.

$\therefore$ f é contínua em $Df \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm\sqrt{5}x\}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{5x-y} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 5x\} \cup \{(0,0)\}$

- Para $(x,y) \in Df$ tal que $(x,y) \neq (0,0)$

  $f(x,y) = \dfrac{x+y}{5x-y}$ é um quociente de dois polinómios, onde o denominador não se anula. Logo

$\dfrac{x+y}{5x-y}$ é contínua para $(x,y) \in Df \setminus \{(0,0)\}$.

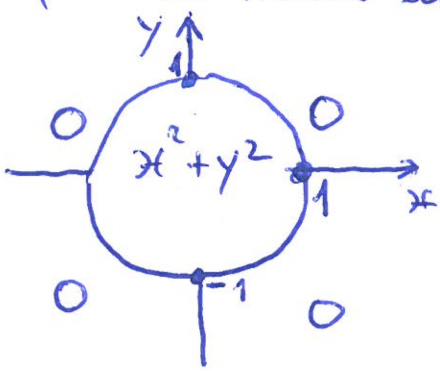
- Para $(x,y) = (0,0)$
  - $f(0,0) = 0$
  - $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{5x-y} = \frac{0}{0}$

Vamos estudar os limites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x+y}{5x-y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

O limite se existir é $\frac{1}{5} \neq 0$. Logo a função não é contínua em $(0,0)$.

$\therefore$ f é contínua em $Df \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 5x\}$.

c) 

$Df = \mathbb{R}^2$

- Para $(x,y): x^2+y^2>1$, $f(x,y)=0$, é uma f. constante, logo f é contínua para $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2>1\}$

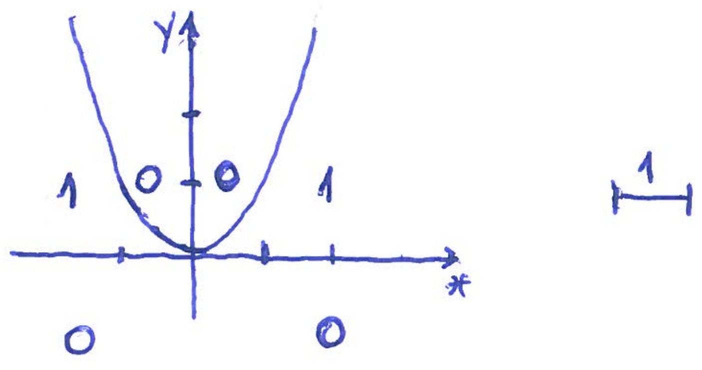
- Para $(x,y): x^2+y^2<1$, $f(x,y)=x^2+y^2$, a função é polinomial, logo é contínua em $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<1\}$

- Para $(x,y): x^2+y^2=1$
  - $f(x,y)=1$
  - $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2\to 1\\ x^2+y^2>1}} f(x,y) = \lim\limits_{x^2+y^2\to 1} 0 = 0$
  - $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2\to 1\\ x^2+y^2<1}} f(x,y) = \lim\limits_{x^2+y^2\to 1} (x^2+y^2) = 1$

Como $\lim\limits_{x^2+y^2\to 1} f(x,y)$ não existe, então f <u>não é contínua</u> em $(x,y)\in Df: x^2+y^2=1$.

$\therefore$ f é contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\}$

d)



$Df=\mathbb{R}^2$

- Para $(x,y)\in Df: y<0 \vee y>x^2$, $f(x,y)=0$, é uma função constante, logo f é contínua para $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y<0 \vee y>x^2\}$

- Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2$, $f(x,y)=1$, é uma função constante, logo f é contínua para $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2\}$ 9/

- Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0 \vee y=x^2$

a) Para $(x,y) : y=0$,

- $f(x,0)=0$

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y>0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y>0}} 1 = 1$

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y<0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y<0}} 0 = 0$

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)$ não existe, logo f não é contínua em $(x,0)$.

b) para $(x,y) : y=x^2$

- $f(x,x^2)=0$

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0^2)\\ y<x^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0^2)\\ y<x^2}} 1 = 1$

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0^2)\\ y>x^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0^2)\\ y>x^2}} 0 = 0$

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0^2)} f(x,y)$ não existe, logo f não é contínua em (x,x^2)

$\therefore$ f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \vee y = x^2\}$. 10/

e) $\therefore$ A função é contínua para $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x\}$

f) $\therefore$ A função é contínua para $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -1\}$

5

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = K \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = K \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(2,2)} (x+y) = K \Leftrightarrow 4 = K.$$

$\therefore$ Para que f seja contínua no ponto $(2,2)$, $K = 4$.