Duração: 90 minutos

Teste de Análise Matemática EE - versão A

Nome: ____________________ Nr.: __________ Curso: MIEEIC

GRUPO I

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correta no quadrado correspondente. Cada resposta correta vale 1 valor.

1. Qual das seguintes funções não é contínua no seu domínio?

   $f(x,y) = \ln(x+y)$ ☐

   $g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ ☐

   $h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ☒

   $j(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ☐

   Nenhuma das anteriores. ☐

2. Qual das seguintes equações diferenciais é satisfeita pela função $f(x,y) = x^2 \exp(y^3)$?

   $3y^2 x f'_x + f''_{xy} = 0$ ☐; $3y^2 x f''_{xy} - f'_x = 0$ ☐;

   $3y^2 x f''_{x^2} - f''_{xy} = 0$ ☒; $3y^2 x f'_y - f''_{xy} = 0$ ☐;

   Nenhuma das anteriores. ☐

3. A taxa de variação de uma função f num ponto (x_0, y_0) do seu domínio $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ é máxima na direção do vetor $\vec{u}$:

   $\vec{u} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0))$ ☒

   $\vec{u} = -(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0))$ ☐

   $\vec{u} = (x_0, y_0)$ ☐

   $\vec{u}$ perpendicular ao vetor $(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0))$ ☐

   Nenhuma das anteriores. ☐

4. A aproximação linear à função $z = x.\ln(y^2 x)$ no ponto $(2,1)$ é:

   $L(x,y) = (x-2) + 4(y-1)$ ☐

   $L(x,y) = (\ln 2 + 1)(x-2) + 4(y-1)$ ☐

   $L(x,y) = (x-2) + \ln 2(y-1) + 2\ln 2$ ☐

   $L(x,y) = (\ln 2 + 1)(x-2) + 4(y-1) + 2\ln 2$ ☒

   Nenhuma das anteriores. ☐

5. Qual dos vetores seguintes é perpendicular ao plano tangente à superfície $z = x^3 y + x y^2$ no ponto $(1,2)$?

   $(10,5,-1)$ ☒; $(5,10,1)$ ☐;

   $(-1,5,10)$ ☐; $(5,1,10)$ ☐;

   Nenhuma das anteriores. ☐

6. A taxa de variação da função $f(x,y) = x^2 \sin(3y)$ no ponto $(1,0)$ na direção do vetor $\vec{u} = (1,2)$ pode calcular-se da forma:

$D_{\vec{u}}f(1,0) = (0,3) \cdot (1,2)$ ☐; $D_{\vec{u}}f(1,0) = (0,3) \cdot (1,0)$ ☐;

$D_{\vec{u}}f(1,0) = (0,1) \cdot (1,0)$ ☐; $D_{\vec{u}}f(1,0) = (0,3) \cdot (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$; ☒;

Nenhuma das anteriores. ☐

7. Considere a função real $f(x,y)$ de duas variáveis reais definida no seu domínio D_f. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

Se f é contínua em D_f então f é diferenciável em D_f. ☐

Se as derivadas parciais f'_x, f'_y existem em D_f então f é contínua em D_f. ☐

Se as derivadas parciais f'_x, f'_y existem e são contínuas em D_f então f é contínua em D_f. ☒

Nenhuma das anteriores. ☐

GRUPO II

Apresente todos os cálculos efectuados.

1. Considere a função real definida em $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{x^3}{y^2}$.

(a) Determine o vetor gradiente da função f no ponto $(-1,1)$.

$f'_x(x,y) = \frac{3x^2}{y^2}$, $f'_y(x,y) = -\frac{2x^3}{y^3}$

$f'_x(-1,1) = 3$ $f'_y(-1,1) = \frac{2}{1} = 2$

$\vec{\nabla} f(-1,1) = (f'_x(-1,1), f'_y(-1,1)) = (3,2)$

(b) Determine as funções $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$f''_{y^2}(x,y) = \frac{6x^3}{y^4}$

$f''_{xy}(x,y) = \frac{-6x^2}{y^3}$

(c) Considerando que $x = \cos(tu)$ e $y = h(4t^3)$, onde u e t são variáveis reais e h uma função derivável em $\mathbb{R}$, determine $\frac{\partial f}{\partial t}$.

$f(x,y) \begin{cases} x \begin{cases} t \\ u \end{cases} \\ y - t \end{cases}$

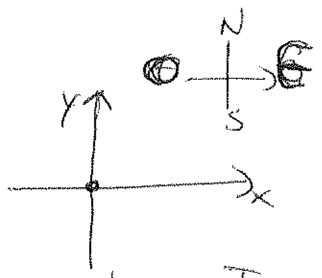
$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

$= \frac{3x^2}{y^2} \cdot (-u\,\mathrm{sen}(tu)) - \frac{2x^3}{y^3} \cdot 12t^2 \cdot h'(4t^3)$

$= -\frac{3u x^2}{y^2} \cdot \mathrm{sen}(tu) - \frac{24 t^2 x^3}{y^3} \cdot h'(4t^3)$

2. Considere um barco que parte de um local e navega na direção nordeste (considere que o ponto de partida do barco é a origem do referencial XOY.) A temperatura nessa região varia de acordo com a expressão $T(x, y) = x^2 - 2y^2 + 3x$.

(a) Determine $\dfrac{\partial T}{\partial x}(0,0)$ e diga qual o seu significado no contexto do problema.



$\dfrac{\partial T}{\partial x}(x,y) = 2x+3 \qquad \dfrac{\partial T}{\partial x}(0,0) = 3$

significa que a taxa de variação instantânea de f relativamente a x é 3. Quando o barco navega na direção ~~oeste~~ este, a temperatura varia na ordem de 3h.

(b) Qual a taxa de variação da temperatura que o barco observa à medida que navega na direção indicada?

Direção Nordeste é na direção do vector $(1,1) = \vec{u}$

$T'_{\vec{u}}(0,0) = \vec{\nabla} T(0,0) \circ \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (3,0) \circ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$T'_y(x,y) = -4y$

$T'_y(0,0) = 0$

(c) Qual a direção (a partir do local de partida) segundo a qual o barco experimentaria um aumento mais rápido da temperatura? Justifique e calcule a taxa de variação nessa direção.

Como $f'_{\vec{u}}(0,0) = \|\vec{\nabla} f(0,0)\| \, \|\vec{u}\| . \cos\alpha$ onde $\alpha = \measuredangle(\vec{\nabla} f, \vec{u})$

e $\|\vec{u}\| = 1$, tem-se $f'_{\vec{u}}(0,0) = \|\vec{\nabla} f(0,0)\| . \cos\alpha$.

A taxa é máxima quando $\cos\alpha = 1$, isto é, quando $\vec{u} = \vec{\nabla} f(0,0)$

$\vec{u} = (3,0)$ e nesse caso $f'_{\vec{u}}(0,0) = \|(3,0)\| = 3$.

3. A potência consumida numa resistência elétrica é dada por $P = \dfrac{E^2}{R}$ watts. Considere $E = 20$ volts e $R = 8$ ohms. Determine o valor aproximado da variação da potência se E é diminuído de $0,5$ volts e R é diminuído de $0,8$ ohm, usando diferenciais.

$dP = P'_E \cdot dE + P'_R \cdot dR$

$P'_E(E,R) = \dfrac{2E}{R}$, $P'_R(E,R) = -\dfrac{E^2}{R^2}$

$P'_E(20,8) = \dfrac{40}{8} = 5$ $\qquad P'_R(20,8) = -\dfrac{400}{64} = -\dfrac{25}{4}$

$dP = 5 . dE - \dfrac{25}{4} dR \Longleftarrow$

se $dE = -0,5$ e $dR = -0,8$, tem-se

$dP = 5 \times (-0,5) - \dfrac{25}{4}(-0,8) = -\dfrac{25}{10} + \dfrac{25}{4} \times \dfrac{8}{10} = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{10}{2} = \dfrac{5}{2}$

$dP = \dfrac{5}{2}$

4. Considere a função real definida em $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4y^3}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4h^3}{h^2} - 0}{h} = 4$$

(b) Determine a função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Para $(x,y) \neq (0,0)$

$$f'_y(x,y) = \frac{12y^2(x^2+y^2) - 2y(4y^3)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{12y^2x^2 + 12y^4 - 8y^4}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{12y^2x^2 + 4y^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 4 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$