Prova sem consulta. Duração: 1h30m (15m de tolerância) — Prova de Reavaliação Global

---

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta. Em cada pergunta da prova é apresentada a cotação prevista.**

GRUPO I

1. **[4,0]** Considere o conjunto $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}\subset\mathbb{R}^4$, onde $\vec{a}=(2,1,1,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,1,0)$ e $\vec{c}=(1,2,1,0)$. Seja $\mathrm{H}=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\ :\ y=0\ \wedge\ z-2w=0\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Determine:

a) O subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$, e conclua em relação à sua dimensão. Indique uma base, U, para o subespaço obtido que inclua o maior número possível de elementos de S. Justifique.

b) Uma base, W, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que inclua dois elementos não ortogonais de H e um elemento de $L(\mathrm{S})$. Justifique.

2. **[4,5]** Considere a transformação linear $T\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$m(T)=\begin{bmatrix}1&3&4\\2&6&8\\1&3&4\end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Seja $\mathrm{U}=\{(\alpha,0,\delta),(1,2,1),(\delta,1,-\delta)\}$ um conjunto de vetores próprios de $m(T)$ e $\mathrm{B}=\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$. Determine:

a) Os valores próprios e os respetivos vetores próprios e espaços próprios; indique, para cada um dos espaços próprios, uma base e a dimensão.

b) Os valores de $\alpha,\delta\in\mathbb{R}$, de modo que U seja uma base de vetores próprios para $\mathbb{R}^3$ e as matrizes $m(T)_{\mathrm{U,U}}$ e $m(T)_{\mathrm{B,B}}$. Justifique devidamente.

.... *(continua no verso)*

GRUPO II

3. [2,5] Considere o plano $M : x+y=1$ e a reta, r, com a equação vetorial $X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, tal que $P=(0,1,3)$ e $\vec{a}=(1,1,1)$. Obtenha a equação vetorial de uma reta, h, que passa no ponto $Q=(2,0,-1)$, é concorrente com a reta r e faz o ângulo $\alpha=\pi/6$ com o plano M.

GRUPO III

4. [2,0] Sejam A e $C=(A-\alpha I)^2$, $\alpha\in\mathbb{R}$, matrizes quadradas de ordem n, sendo I a matriz identidade. Seja X um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ.

a) Mostre que X é um vetor próprio de C associado ao valor próprio $(\lambda-\alpha)^2$.

b) Para que valores de λ a matriz C é não singular? Justifique.

5. [4,5] Sejam as transformações lineares $S\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ e $T\in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$, definidas por

$$S(x,y)=(x+2y,-x-y,-3x-4y) \quad \text{e} \quad T(x,y,z)=(x+y-z,-x+z)$$

em relação às bases canónicas, E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Obtenha o núcleo e o contradomínio de S. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que apenas S é uma função injetiva e determine a sua função inversa.

GRUPO IV

6. [2,5] Considere as transformações lineares definidas na questão **5.** e a base $\mathrm{V}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}=\{(1,2),(1,1)\}\subset\mathbb{R}^2$. Usando o cálculo matricial, obtenha a representação matricial da composição possível de S com T em relação à base V (domínio e conjunto de chegada).

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI Data / 02/ 21
Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano 1º Semestre 1º
Nome José Augusto Trigo Barbosa

Espaço reservado para o avaliador
Descritores de desempenho considerados como critérios
Correcção da Prova de Reavaliação Global (19/02/2021)

GRUPO I

1) a) Descritores idênticos aos considerados na pergunta 1) a) da 1ª Prova de Reavaliação.

b) Descritores idênticos aos considerados na pergunta 1) b) da 1ª Prova de Reavaliação.

2) a) Descritores idênticos aos considerados na pergunta 5) a) da 2ª Prova de Reavaliação.

b) São apenas considerados os descritores dos itens i), ii) e iii) da pergunta 5) b) da 2ª Prova de Reavaliação.

GRUPO II

3) Descritores idênticos aos considerados na pergunta 5) da 1ª Prova de Reavaliação.

GRUPO III

4) a) Descritores idênticos aos considerados na pergunta 2) a) da 2ª Prova de Reavaliação.

b) Descritores idênticos aos considerados na pergunta 2) b) da 2ª Prova de Reavaliação.

5) a) Descritores idênticos aos considerados na pergunta 1) a) da 2ª Prova de Reavaliação.

b)

i) Mostrar que S é injectiva:
Sabendo, da alínea a), que $N(S) = \{(0,0)\}$, conclui-se que S é injectiva

ii) Mostrar que T não é injectiva:

$$r[m(T)] = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$\dim T(\mathbb{R}^3) = 2 \Rightarrow \dim N(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim T(\mathbb{R}^3) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow N(T) \neq \{(0,0,0)\}$ e T não é injectiva.

iii) Determinação da função inversa de S:
Ver item iii) da pergunta 1) b) da 2ª Prova de Reavaliação.

GRUPO IV

6)

i) Identificação da função composta:

Neste caso, deve-se considerar a função composta

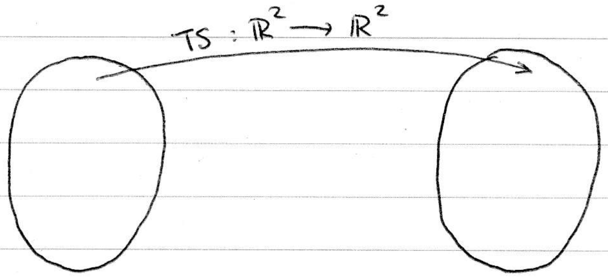
$$TS : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

já que V é uma base para $\mathbb{R}^2$.

ii) Determinação da matriz $m(TS)$ definida em relação à base E_2:

$$m(TS) = m(T)\, m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

iii) Definição da matriz $m(TS)_{V,V}$:



$$\begin{tikzcd} \boxed{E_2} \arrow[rr, "m(TS)"] & & \boxed{E_2} \\ \boxed{V} \arrow[u, bend left, "M_{V\to E_2}"] \arrow[rr, "m(TS)_{V,V}"] & & \boxed{V} \arrow[u, bend right, "M_{V\to E_2}"'] \end{tikzcd}$$

$$m(TS)_{V,V} = M^{-1}_{V\to E_2}\ m(TS)\ M_{V\to E_2}$$

iv) Determinação da matriz de mudança de base:

Sabendo que

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \quad e \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

então $M_{V \to E_2} = E_2^{-1} V = I_2 V = V$

$$M_{V \to E_2}^{-1} = V^{-1} = \frac{1}{|V|} [\operatorname{Cof} V]^T = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

v) Determinação da matriz $m(TS)_{V,V}$:

$$m(TS)_{V,V} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} M_{V \to E_2} =$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -11 \\ 10 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 & -18 \\ 42 & 26 \end{bmatrix}_{V,V}$$