Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Teste 1

MIEEICOM
2012/2013
Análise Matemática EE
10 de Abril de 2013
Duração: 1h30m

---

1. [3 valores] Considere a função real definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 + 1.$$

   (a) Calcule o valor de f nos pontos $(2,1)$ e $(-2,1)$.

   (b) Dada uma constante $k \geq 1$, chama-se *curva de nível* de valor k de f ao subconjunto

$$C_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = k\right\}.$$

   Represente as curvas de nível de valores $k = 1, 5, 10$.

   (c) Esboce o gráfico de f.

2. [4 valores] Cada uma das afirmações seguintes é *verdadeira.* Justifique.

   (a) O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{y^3 + x^2}$ não existe.

   (b) A função f definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)y^2}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   é contínua em $\mathbb{R}^2$.

   (c) A interseção da superfície $z = 2y^2 + x$ com o plano $x = 1$ é uma parábola. O declive da reta tangente a esta parábola no ponto $(1,-1,3)$ é negativo.

   (d) A taxa de variação de $z = x^2y + 2y^2x$ na direção do eixo dos xx é nula para os pontos da reta $x = -y$.

3. [1.5 valores] Mostre que qualquer função da forma

$$z(x,t) = x + at + e^{x-at}, \quad a \in \mathbb{R},$$

   é solução da equação da onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

   onde a é a velocidade de propagação da onda.

4. [1.5 valores] Seja $z = g(x,y)$ com $x = s + t$ e $y = s - t$. Use a regra de derivação da função composta para mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

(Continua)

5. [2 valores] Use diferenciais para obter uma aproximação da variação do valor de

$$f(x, y, z) = x^2 y^3 (z + 1)^4$$

quando (x, y, z) varia de $(1, 1, 0)$ para $(1.05, 0.9, 0.01)$.

6. [4 valores] Suponha que o potencial elétrico V no ponto (x, y, z) de uma certa região do espaço é dado por

$$V(x, y, z) = 2x^2 - 3xy + xyz.$$

   (a) Determine o campo elétrico de V no ponto (x, y, z) sabendo que é definido por

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla} V(x, y, z).$$

   (b) Determine a taxa de variação de V no ponto $P = (2, 1, 0)$ na direção do vetor $\vec{v} = (1, 1, -1)$.

   (c) Qual a direção segundo a qual a taxa de variação de V em P é mínima? Qual o valor dessa taxa?

7. [3 valores] Considere a superfície de equação

$$y^2 z\, \mathrm{e}^x - \operatorname{sen}(xyz) = 1.$$

   (a) Determine o plano tangente à superfície no ponto $(0, 1, 1)$.

   (b) Sabendo que a equação define implicitamente z como função de x e y numa vizinhança do ponto $(0, 1, 1)$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0, 1)$.

8. [1 valor] Se $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$, com f e g diferenciáveis, mostre que

$$\vec{\nabla}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v}{v^2}, \quad v \neq 0.$$