Prova sem consulta. Duração: 1h30m (10m de tolerância) 1ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta. Em cada pergunta da prova é apresentada a cotação prevista.**

GRUPO I

1. [7,0] Considere o conjunto $S=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}\subset\mathbb{R}^4$, onde $\vec{a}=(1,0,1,1)$, $\vec{b}=(1,1,2,0)$, $\vec{c}=(2,1,3,1)$ e $\vec{d}=(0,-1,-1,1)$. Seja $H=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \ : \ 2x-z-w=0\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$. Determine:

a) O subespaço gerado pelo conjunto S, $L(S)$, e conclua em relação à sua dimensão. Indique uma base, U, para o subespaço obtido que não inclua nenhum elemento de S. Justifique.

b) A dimensão do subespaço H e uma base não ortogonal, W, para o subespaço H que contenha o maior número possível de elementos de S. Justifique.

GRUPO II

2. [3,5] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ e $\vec{e}$ vetores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\|=1$, $\|\vec{c}\|=2$, $\theta=\measuredangle(\vec{a},\vec{c})=\pi/3$, $\vec{d}=\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{c})$, $\vec{b}=\vec{c}-2\vec{a}$ e $\vec{e}=\vec{b}+(\vec{a}\times\vec{c})$. Calcule:

a) O ângulo, α, formado pelos vetores $\vec{d}$ e $\vec{a}\times\vec{c}$.

b) A norma de vetor $\vec{e}$.

..........(*continua no verso*)

GRUPO III

3. [**3,8**] Sejam o plano $M : x+2y+z=0$, o ponto $R=(-3,-3,-3)$ e a reta, r, com a equação vetorial $X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(3,1,1)$ e $\vec{a}=(-1,-1,0)$. Obtenha a equação cartesiana do plano, M_1, perpendicular à reta r e que passa no ponto, Q, do plano M mais próximo do ponto R. Determine o ângulo, θ, formado pelos planos M e M_1.

4. [**2,0**] Sejam $S=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_k\}$ e $S_1=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_k,\vec{v}\}$ dois conjuntos de vetores do espaço $\mathbb{R}^n$, tal que $k<n$ e $\vec{v}$ é um vetor ortogonal a todos os elementos do conjunto S. Caracterize o conjunto S_1 quanto à sua (in)dependência linear, justificando devidamente a sua resposta.

GRUPO IV

5. [**3,7**] Considere o plano $M : x+2y+z=0$ e a reta, r, com a equação vetorial $X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(3,1,1)$ e $\vec{a}=(-1,-1,0)$. Determine a equação vetorial da reta, s, contida no plano M, que é concorrente com a reta r e que faz, com esta reta, o ângulo $\alpha=\pi/3$.

Folha Nº 1 / 10

FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI — Data /01/21

Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica — Ano 1º — Semestre 1º

Nome José Augusto Trigo Barbosa

Espaço reservado para o avaliador

Descritores de desempenho considerados como critérios de correcção da 1ª Prova de Avaliação (12/12/2020).

GRUPO I

1)

a)

1. Cálculo do subespaço L(S):

$$L(S) = \{ \vec{x} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + c_3 \vec{c} + \alpha_4 \vec{d}, \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R} \}$$

$$\vec{x} = (x,y,z,w) = \alpha_1 (1,0,1,1) + \alpha_2 (1,1,2,0) + \alpha_3 (2,1,3,1) + \alpha_4 (0,-1,-1,1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ 1 & 2 & 3 & -1 & z \\ 1 & 0 & 1 & 1 & w \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_3 - L_1 \\ \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & 1 & -1 & z-x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & w-x \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_3 - L_2 \\ \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-x-y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w-x+y \end{array}\right]$$

O vector $\vec{x} = (x,y,z,w) \in L(S)$ se o sistema for possível e duplamente indeterminado, ou seja, se

$$\begin{cases} z - x - y = 0 \\ w - x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + y \\ w = x - y \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Wm

Então

$$L(S) = \{ \vec{x} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z = x+y \wedge w = x-y \} =$$

$$= \{ \vec{x} = (x, y, x+y, x-y) \in \mathbb{R}^4 \} \subset \mathbb{R}^4$$

2. Determinação da dimensão de L(S):

Sabendo que

$$\vec{x} = (x, y, x+y, x-y) = x(1,0,1,1) + y(0,1,1,-1) \in L(S)$$

então

$$V = \text{Base } L(S) = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \} = \{ (1,0,1,1), (0,1,1,-1) \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim L(S) = 2$$

3. Determinação da base U para L(S):

Dado que $\dim L(S) = 2$ então

$$U = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2 \} \subset L(S)$$

Para que U seja um conjunto linearmente independente deverá ser formado por dois vectores não nulos e não colineares (em particular, dois vectores ortogonais). Por exemplo, os vectores

$$\vec{u}_1 = -\vec{a} = (-1,0,-1,-1)$$

$$\vec{u}_2 = -\vec{b} = (-1,-1,-2,0)$$

são dois vectores linearmente independentes do subespaço L(S) e que não pertencem ao conjunto S.

b)

1. Cálculo da dimensão do subespaço H:
Considerando, por exemplo, $w = 2x - z$ então

$$\vec{x} = (x, y, z, 2x - z) = x(1,0,0,2) + y(0,1,0,0) + z(0,0,1,-1) \in H$$

pelo que

$$Q = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\} = \{(1,0,0,2), (0,1,0,0), (0,0,1,-1)\} \subset H$$

é uma base para H e, portanto, $\dim H = 3$.

2. Determinação da base W para o subespaço H :

Uma vez que $\dim L(S) = 2$, no conjunto S existem, no máximo, 2 vectores linearmente independentes.

Dado que $\dim H = 3$ então a base W deverá ser formada por 3 vectores linearmente independentes:

$$W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} \subset H$$

Dado que $\vec{a} = (1,0,1,1) \in H$ e $\vec{b} = (1,1,2,0) \in H$ e são linearmente independentes (não nulos e não colineares), então

$$\vec{w}_1 = \vec{a} = (1,0,1,1)$$

$$\vec{w}_2 = \vec{b} = (1,1,2,0)$$

Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \neq 0$ os vectores não são ortogonais, pelo que W nunca será uma base ortogonal.

O vector $\vec{w}_3$ da base W deverá satisfazer as seguintes condições

$$\begin{cases} \vec{w}_3 \in H \setminus \{\vec{0}\} \\ \vec{w}_3 \notin L(S) \end{cases}$$

Seja, por exemplo, o vector $\vec{w}_3 = (0,1,0,0)$.

Wang

GRUPO II

2)

a)

1. Definição do ângulo α:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{a} \times \vec{c}}{\|\vec{d}\| \, \|\vec{a} \times \vec{c}\|}$$

2. Determinação de $\|\vec{a} \times \vec{c}\|$:

$$\|\vec{a} \times \vec{c}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{c}\| \operatorname{sen}(\theta) = (1)(2) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

3. Determinação de $\|\vec{d}\|$:

$$\|\vec{d}\|^2 = \left[\vec{a} + (\vec{a} \times \vec{c})\right] \cdot \left[\vec{a} + (\vec{a} \times \vec{c})\right] =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{a} \times \vec{c}\|^2 + \underbrace{2\vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{c}}_{=0} = 1 + 3 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{d}\| = 2$$

4. Determinação de $\vec{d} \cdot \vec{a} \times \vec{c}$:

$$\vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \left[\vec{a} + (\vec{a} \times \vec{c})\right] \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) =$$

$$= \underbrace{\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})}_{=0} + \|\vec{a} \times \vec{c}\|^2 = 3$$

4. Determinação do ângulo α:

$$\cos(\alpha) = \frac{3}{(2)\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

b)

1. Definição da $\|\vec{e}\|$:

$$\|\vec{e}\|^2 = [\vec{b} + (\vec{a} \times \vec{c})] \cdot [\vec{b} + (\vec{a} \times \vec{c})] =$$

$$= \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{a} \times \vec{c}\|^2 + 2\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) =$$

$$= \|\vec{b}\|^2 + 3 + 2\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$$

2. Determinação de $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$:

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = (\vec{c} - 2\vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \underbrace{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})}_{=0} - \underbrace{2\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})}_{=0} = 0$$

3. Determinação de $\|\vec{b}\|^2$:

$$\|\vec{b}\|^2 = (\vec{c} - 2\vec{a}) \cdot (\vec{c} - 2\vec{a}) = \|\vec{c}\|^2 + 4\|\vec{a}\|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{c} =$$

$$= 4 + 4 - 4\|\vec{a}\|\|\vec{c}\| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 8 - 4(1)(2)\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

4. Determinação de $\|\vec{e}\|$:

$$\|\vec{e}\|^2 = 4 + 3 + 0 = 7 \Leftrightarrow \|\vec{e}\| = \sqrt{7}$$

GRUPO IV

5)

1. Cálculo de um ponto, I, da reta s:

Se $s \subset M$, então $I = s \cap r \in M$, tal que $I = r \cap M$

Considerando $r \cap M$

$$\begin{cases} (x,y,z) = (3,1,1) + t(-1,-1,0) \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ — \\ (3-t) + 2(1-t) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ — \\ -3t + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = (1,-1,1) \\ t = 2 \end{cases}$$

2. Determinação do vetor diretor, $\vec{b}$, da reta s:

Seja $\vec{b} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$

Se $s \subset M \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{n} = 0$, em que $\vec{n} = (1,2,1)$ é o vetor normal a M.

Se $\alpha = \pi/3 = \angle(s,r) \Rightarrow \underset{(>0)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Então

$$\begin{cases} \vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c=0 \\ -a-b = \sqrt{2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Admitindo, por exemplo, $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} a+2b+c=0 \\ -a-b=1 \\ a^2+b^2+c^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=a+2 \\ b=-a-1 \\ a^2+(a+1)^2+(a+2)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ 3a^2+6a+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ (a+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=0 \\ a=-1 \end{cases}$$

ou seja, $\vec{b} = (-1,0,1)$

3. Equação vetorial da recta s:

$s: \quad X(u) = I + u\vec{b} = (1,-1,1) + u(-1,0,1), \; u \in \mathbb{R}$

GRUPO III

3)

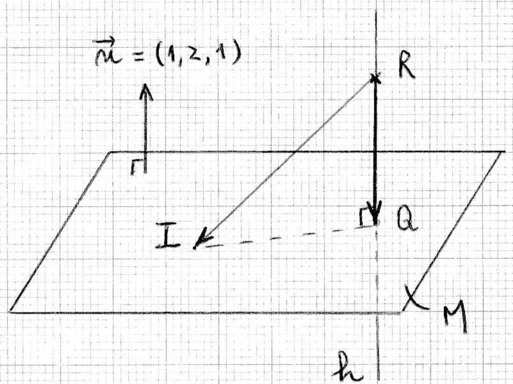
1. Determinação do vetor normal, $\vec{n}_1$, ao plano M_1:

Se $r \perp M_1 \Rightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{a}$

Seja, por exemplo, $\vec{n}_1 = \vec{a} = (-1,-1,0)$

Wmj

2. Determinação do ponto Q :



$$Q = R + \overrightarrow{RQ}$$

$$\overrightarrow{RQ} = \operatorname{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{RI} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{RI} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$$

$$\overrightarrow{RI} \cdot \vec{n} = (I-R) \cdot \vec{n} = (4,2,4) \cdot (1,2,1) = 12$$

$$\overrightarrow{RQ} = \frac{12}{6}(1,2,1) = (2,4,2) \implies Q = (-3,-3,-3) + (2,4,2) = (-1,1,-1)$$

3. Equação cartesiana do plano M_1 :

Designando $X = (x,y,z)$:

$$(X - I) \cdot \vec{n}_1 = 0 \iff (x+1, y-1, z+1) \cdot (-1,-1,0) \iff$$

$$\iff -x-1-y+1 = 0 \iff x+y=0$$

4. Determinação do ângulo θ :

Sendo $\theta = \measuredangle(M, M_1)$ então

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{\|\vec{n}\| \, \|\vec{n}_1\|} = \frac{|(1,2,1) \cdot (-1,-1,0)|}{\sqrt{6} \, \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff$$

$$\iff \theta = \pi/6$$

4)

1. Admita-se que $\vec{v} = \vec{0}$:

Neste caso, a combinação linear

$$\alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_k \vec{b}_k + \alpha_{k+1} \vec{v} = \vec{0}$$

é verificada para uma infinidade de soluções não nulas para os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$; em particular, se for considerada a solução:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \quad \wedge \quad \alpha_{k+1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2. Admita-se que $\vec{v} \neq \vec{0}$ e S é um conjunto linearmente dependente:

Se S é um conjunto linearmente dependente, então a combinação linear

$$\alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_k \vec{b}_k = \vec{0}$$

é verificada para uma infinidade de soluções não nulas para os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$; considere-se que

$$\alpha_i = \beta_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, k$$

é uma dessas soluções não nulas.

Neste caso, verifica-se que a combinação linear

$$\alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_k \vec{b}_k + \alpha_{k+1} \vec{v} = \vec{0}$$

é também satisfeita para uma infinidade de soluções não nulas para os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$, em particular se for considerada a solução não nula

$$\alpha_i = \beta_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \wedge \quad \alpha_{k+1} = 0$$

Wmj

3. Admite-se que $\vec{v} \neq \vec{0}$ e S é um conjunto linearmente independente:

Se S é um conjunto linearmente independente, então a combinação linear

$$\alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_k \vec{b}_k = \vec{0}$$

será apenas verificada para os escalares

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \quad \text{(solução nula)}.$$

Neste caso o conjunto S gera de forma única o vetor nulo.

Considere-se, agora, a combinação linear dos vetores que constituem o conjunto S_1:

$$\alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_k \vec{b}_k + \alpha_{k+1} \vec{v} = \vec{0} \qquad (1)$$

Uma vez que $\vec{v} \neq \vec{0}$ então

$$\left(\alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_k \vec{b}_k + \alpha_{k+1} \vec{v} \right) . \vec{v} = \vec{0} . \vec{v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \vec{b}_1 . \vec{v} + \alpha_2 \vec{b}_2 . \vec{v} + \dots + \alpha_k \vec{b}_k . \vec{v} + \alpha_{k+1} \|\vec{v}\|^2 = 0$$

ou seja, uma vez que $\vec{b}_i . \vec{v} = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$,

$$\alpha_{k+1} \underbrace{\|\vec{v}\|^2}_{>0} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{k+1} = 0$$

Substituindo $\alpha_{k+1} = 0$ em (1) obtém-se

$$\alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_k \vec{b}_k = \vec{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ já que S é, por hipótese, linearmente independente.

Finalmente, conclui-se que S_1 é linearmente independente já que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$ em (1) e, portanto, S_1 gera o vetor nulo de forma única.

Wey