Prova sem consulta. Duração: 1h30m (10m de tolerância) 1ª Prova de Reavaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta. Em cada pergunta da prova é apresentada a cotação prevista.**

GRUPO I

1. [**7,0**] Considere o conjunto $\mathrm{S}=\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}\subset\mathbb{R}^4$, onde $\vec{a}=(2,1,1,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,1,0)$ e $\vec{c}=(1,2,1,0)$. Seja $\mathrm{H}=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\ :\ y=0\ \wedge\ z-2w=0\right\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Determine:

a) O subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$, e conclua em relação à sua dimensão. Indique uma base, U, para o subespaço obtido que inclua o maior número possível de elementos de S. Justifique.

b) A dimensão do subespaço H e uma base, W, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que inclua dois elementos não ortogonais de H e um elemento de $L(\mathrm{S})$. Justifique.

GRUPO II

2. [**3,5**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|=1$, $\left\|\vec{c}\right\|=\sqrt{2}$, $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\}$ é um conjunto ortonormal, $\theta=\measuredangle(\vec{a},\vec{c})=\pi/3$, $\alpha=\measuredangle(\vec{b},\vec{c})=\pi/6$ e $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2(\vec{a}\times\vec{c})$. Calcule:

a) A norma do vetor $\vec{a}\times\vec{b}$.

b) A norma de vetor $\vec{d}$.

....***(continua no verso)***

GRUPO III

3. [**3,8**] Sejam as retas $r\ :\ X(u) = R + u\vec{a}$, $u \in \mathbb{R}$, em que $R = (1,-1,2)$ e $\vec{a} = (1,-1,1)$, e $s\ :\ X(v) = S + v\vec{b}$, $v \in \mathbb{R}$, tal que $S = (2,2,2)$ e $\vec{b} = (-1,2,1)$. Determine a equação cartesiana do plano, *M*, que é paralelo às retas dadas e que passa no ponto, *P*, do eixo dos *yy* mais próximo do ponto *R*.

4. [**2,0**] Sejam os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, e o ponto *P*.

a) Mostre que qualquer ponto X que verifique a condição $(X - P) \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$, pertence ao plano $M = \{P + s\vec{a} + t\vec{b}\ ,\ s,t \in \mathbb{R}\}$.

b) Recorrendo à Identidade de Lagrange, mostre que $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\mathrm{sen}(\theta)$, em que θ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

GRUPO IV

5. [**3,7**] Considere o plano $M\ :\ x + y = 1$ e a reta, *r*, com a equação vetorial $X(t) = P + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, tal que $P = (0,1,3)$ e $\vec{a} = (1,1,1)$. Obtenha a equação vetorial de uma reta, *h*, que passa no ponto $Q = (2,0,-1)$, é concorrente com a reta *r* e faz o ângulo $\alpha = \pi / 6$ com o plano *M*.