MATRIZES QUADRADAS

Seja $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ (i=1,2,…,n ; j=1,2,…,n) a *matriz quadrada do tipo* $n \times n$, ou *de ordem n*, num corpo Ω,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Os elementos da matriz $\boldsymbol{A}$ que possuem os dois índices iguais, isto é, os elementos a_{ii} (i=1,2,…,n) são designados por *elementos principais*.

- A diagonal $(a_{11},a_{22},a_{33},\ldots,a_{nn})$ chama-se *diagonal principal*.

- A diagonal $(a_{12},a_{23},a_{34},\ldots,a_{n-1,n})$, situada acima da diagonal principal, chama-se *diagonal superior*.

- A diagonal $(a_{21},a_{32},a_{43},\ldots,a_{n,n-1})$, situada abaixo da diagonal principal, chama-se *diagonal inferior*.

- A diagonal $(a_{1n},a_{2,n-1},a_{3,n-2},\ldots,a_{n1})$ chama-se *diagonal secundária*.

- Os elementos a_{ij} e a_{ji}, com $i \neq j$, ocupando posições simétricas em relação à diagonal principal, chamam-se *elementos opostos*.

Traço de uma matriz quadrada

Definição [2.11]: Traço de uma matriz quadrada
Chama-se *traço* de uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, designando-se por $tr(\boldsymbol{A})$, à soma dos seus elementos principais, isto é,

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Teorema [2.7]: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes quadradas, num corpo Ω, de ordem n e $k \in \Omega$. Então:

a) $tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B})$.

b) $tr(k\boldsymbol{A}) = k\ tr(\boldsymbol{A})$.

c) $tr(\boldsymbol{AB}) = tr(\boldsymbol{BA}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$.

d) $tr(\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

Teorema [2.8]: Seja $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \ldots, \boldsymbol{A}_{p-1}, \boldsymbol{A}_p\}$ um conjunto constituído por p matrizes quadradas de ordem n, num corpo Ω. Então

$$tr(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3 \ldots \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{A}_p) = tr(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3 \ldots \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{A}_1) = \ldots = tr(\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3 \ldots \boldsymbol{A}_{p-1})$$

Exemplo 12 [2.16]: Relativamente às matrizes quadradas de ordem 3

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$tr(\boldsymbol{A}) = 2 + 1 + 1 = 4 \qquad tr(\boldsymbol{B}) = -1 + 1 - 2 = -2$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad 2\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$tr(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = 1 + 2 - 1 = tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B}) = 4 - 2 = 2$$

$$tr(2\boldsymbol{A}) = 4 + 2 + 2 = 2tr(\boldsymbol{A}) = 8$$

$$tr(\boldsymbol{AB}) = -1 + 7 + 4 = tr(\boldsymbol{BA}) = 10 + 2 - 2 = 10$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$tr(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = 2 + 1 + 1 = tr(\boldsymbol{A}) = 4$$

Matriz identidade

Definição [2.12]: Matriz identidade
Designa-se por *matriz identidade* de ordem n, representando-se por $\boldsymbol{I}_n$, ou simplesmente por $\boldsymbol{I}$, a matriz quadrada em que os elementos principais tomam o valor 1, sendo nulos todos os seus restantes elementos, isto é,

$$\boldsymbol{I} = (i_{ij}) \; : \; i_{ij} = 1 \;\; , \;\; i = j \;\; \wedge \;\; i_{ij} = 0 \;\; , \;\; i \neq j$$

Exemplo 13 [2.18]: A matriz identidade de ordem 3 é

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A matriz $\boldsymbol{I}$ pode ser considerada o *elemento neutro* do produto de matrizes quadradas da mesma ordem; se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n, obtém-se

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$$

- A matriz $\boldsymbol{I}$ é uma *matriz comutativa* (*permutável*) com qualquer outra matriz quadrada da mesma ordem n.

Matriz escalar

Definição [2.13]: Matriz escalar
A matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem *n*, num corpo Ω, chama-se *matriz escalar*, se todos os elementos principais forem iguais, sendo nulos todos os seus restantes elementos. Se $k \in \Omega$, então

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \;:\; a_{ij} = k \;,\; i = j \;\wedge\; a_{ij} = 0 \;,\; i \neq j \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A} = k\boldsymbol{I}$$

Exemplo 14:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -2\boldsymbol{I} \quad (k = -2)$$

- A matriz identidade, $\boldsymbol{I}$, é uma matriz escalar $(k = 1)$.

- A matriz escalar $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{I}$ é *comutativa* (*permutável*) com qualquer matriz quadrada $\boldsymbol{B}$ da mesma ordem

$$\boldsymbol{AB} = (k\boldsymbol{I})\boldsymbol{B} = k(\boldsymbol{IB}) = k(\boldsymbol{BI}) = \boldsymbol{B}(k\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{BA} \Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = k\boldsymbol{B}$$

Matriz diagonal

Definição [2.14]: Matriz diagonal
A matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, chama-se *matriz diagonal*, se forem nulos todos os elementos situados fora da diagonal principal, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \ : \ a_{ij} = 0 \ , \ i \neq j$$

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn})$$

Exemplo 15:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(-2, 0, 5)$$

- Qualquer matriz escalar é um caso particular de uma matriz diagonal, onde os elementos principais são todos idênticos entre si.

Exemplo 16:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -2\boldsymbol{I} = \mathrm{diag}(-2, -2, -2)$$

- A matriz identidade, $\boldsymbol{I}$, de ordem n é uma matriz diagonal

$$\boldsymbol{I} = \mathrm{diag}\ (1, 1, 1, \ldots, 1)$$

Matriz triangular superior

Definição **[2.15]**: **Matriz triangular superior**
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, chama-se *matriz triangular superior*, se forem nulos todos os elementos situados abaixo da diagonal principal, isto é,

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \ : \ a_{ij} = 0 \ , \ i > j$$

Exemplo 17 **[2.20]**:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Qualquer matriz diagonal e toda a matriz escalar, podem ser encaradas como casos particulares de uma matriz triangular superior.

Exemplo 18:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(-2,1,3) \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = -3\boldsymbol{I}$$

Matriz triangular inferior

Definição [2.15]: Matriz triangular inferior
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, chama-se *matriz triangular inferior*, se forem nulos todos os elementos situados acima da diagonal principal, isto é,

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \;:\; a_{ij} = 0 \;,\; i < j$$

Exemplo 19 [2.20]:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Qualquer matriz diagonal e toda a matriz escalar, podem ser encaradas como casos particulares de uma matriz triangular inferior.

Exemplo 20:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(-2,1,3) \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = -3\boldsymbol{I}$$

Decomposição triangular de matrizes quadradas

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n. Pretende-se resolver o problema de factorização

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$$

- $\boldsymbol{L}$ uma *matriz triangular inferior* de ordem n.

- $\boldsymbol{U}$ uma *matriz triangular superior* de ordem n.

- A factorização nem sempre é possível; se existir, ela será única, se todos os elementos principais de $\boldsymbol{U}$ forem iguais a 1.

- A *decomposição triangular* de uma matriz quadrada pode ser aplicada na resolução de um sistema com *n equações lineares* a *n incógnitas* e *possível e determinado* (*sistema de Cramer*).

Exemplo 21 [2.21]: Aplicar a decomposição triangular à matriz quadrada

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ -2 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

Solução:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ -2 & -3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11} & 0 & 0\\ l_{21} & l_{22} & 0\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & u_{12} & u_{13}\\ 0 & 1 & u_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ -2 & -3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13}\\ l_{21} & l_{21}u_{12}+l_{22} & l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23}\\ l_{31} & l_{31}u_{12}+l_{32} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}l_{11}=1\\ l_{11}u_{12}=2\\ l_{11}u_{13}=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}l_{11}=1\\ u_{12}=2\\ u_{13}=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}l_{21}=2\\ l_{21}u_{12}+l_{22}=1\\ l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}l_{21}=2\\ 2l_{21}+l_{22}=1\\ -l_{21}+l_{22}u_{23}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}l_{21}=2\\ l_{22}=-3\\ u_{23}=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}l_{31}=-2\\ l_{31}u_{12}+l_{32}=-3\\ l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33}=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}l_{31}=-2\\ 2l_{31}+l_{32}=-3\\ -l_{31}-2\;l_{32}+l_{33}=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}l_{31}=-2\\ l_{32}=1\\ l_{33}=-1\end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ -2 & -3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matriz simétrica

Definição [2.16]: Matriz simétrica
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, é uma *matriz simétrica*, se for igual à sua matriz transposta, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

Exemplo 22 [2.22]: A matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}$$

Teorema [2.9]: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω. A matriz $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz simétrica*, se e só se os seus elementos opostos são iguais, isto é,

$$a_{ij} = a_{ji} \quad , \quad i \neq j$$

Teorema [2.9]: Sejam as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, num corpo Ω, tais que $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n e $\boldsymbol{B}$ é uma matriz do tipo $m\times n$. Então:

a) A matriz soma $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ é uma *matriz simétrica* de ordem n.

b) As matrizes produto $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ e $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ são *matrizes simétricas* de ordem n.

c) As matrizes produto $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ e $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ são *matrizes simétricas*; a matriz $\boldsymbol{F}$ é de ordem m, enquanto que a matriz $\boldsymbol{G}$ é de ordem n.

Exemplo 23 [2.23]: Dadas as matrizes

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

São matrizes simétricas

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(ordem 3)}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(ordem 3)}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{(ordem 2)}$$

Matriz hemi-simétrica

Definição [2.17]: Matriz hemi-simétrica
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, constitui uma *matriz hemi-simétrica*, se for igual à simétrica da sua matriz transposta, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

Exemplo 24 [2.24]: A matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 5 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz hemi-simétrica

$$-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = -\begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 5 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = -\begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 5 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}$$

Teorema [2.10]: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω. A matriz $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz hemi-simétrica*, se e só se os seus elementos opostos são simétricos e todos os elementos principais são nulos, isto é,

$$a_{ij} = -a_{ji} \;\;,\;\; i \neq j \;\; \wedge \;\; a_{ij} = 0 \;\;,\;\; i = j$$

Teorema [2.10]: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω. Então:

a) A matriz subtração $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ é uma *matriz hemi-simétrica* de ordem n.

b) A matriz $\boldsymbol{A}$ pode ser escrita como o resultado da soma de uma matriz simétrica com uma matriz hemi-simétrica, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{simétrica}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{hemi-simétrica}}}$$

Exemplo 25 [2.25]: Relativamente à matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ordem 3)}$$

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{simétrica}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{hemi-simétrica}}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz normal

Definição [2.18]: Matriz normal
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem *n*, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$, diz-se uma *matriz normal*, se

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$$

Exemplo 26 [2.26]: As matrizes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ são matrizes normais.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & -1 & -i \\ 4 & i & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 4 \\ 2+i & -1 & i \\ 4 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 4 \\ 2+i & -1 & i \\ 4 & -i & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & -1 & -i \\ 4 & i & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} i & 2 \\ -2 & -i \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -2 & i \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -2 & i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -i & -2 \\ 2 & i \end{bmatrix} = -\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C} = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}$$

Matriz hermitiana

Definição **[2.19]**: **Matriz hermitiana**
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem *n*, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$, é uma *matriz hermitiana*, ou *de Hermite*, se for igual à sua matriz transconjugada, ou seja, se

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$$

Exemplo 27 **[2.27]**: São matrizes hermitianas

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & -1 & -i \\ 4 & i & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 4 \\ 2+i & -1 & i \\ 4 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 4 \\ 2+i & -1 & i \\ 4 & -i & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & -1 & -i \\ 4 & i & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}$$

Teorema **[2.11]**: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes hermitianas de ordem *n*. Então:

a) A matriz $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ é uma *matriz hermitiana* de ordem *n*.

b) Se $k \in \mathbb{R}$, a matriz $\boldsymbol{D} = k\boldsymbol{A}$ é uma *matriz hermitiana* de ordem *n*.

c) Se $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, a matriz $\boldsymbol{AB}$ é uma *matriz hermitiana* de ordem *n*.

Teorema **[2.12]**: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem *n*, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$. São verdadeiras as seguintes proposições:

a) A matriz soma $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ é uma *matriz hermitiana* de ordem *n*.

b) As matrizes produto $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ e $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ são *matrizes hermitianas* de ordem *n*.

c) A matriz $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz hermitiana*, se e só se os seus elementos opostos são conjugados e todos os elementos principais são reais, ou seja,

$$a_{ij} = \overline{a}_{ji} \quad , \quad i \neq j \quad \wedge \quad \forall a_{ii} \in \mathbb{R}$$

d) Se $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz simétrica* com todos os seus *elementos reais*, então $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz hermitiana*.

e) Se $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz hermitiana*, então será ainda uma *matriz normal*.

Exemplo 28 **[2.27]**: São matrizes hermitianas

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & -1 & -i \\ 4 & i & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz hemi-hermitiana

Definição [2.20]: Matriz hemi-hermitiana
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$, será uma *matriz hemi-hermitiana*, se for igual à simétrica da sua matriz transconjugada, ou seja, se

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$$

Exemplo 29 [2.28]: É uma matriz hemi-hermitiana

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} i & 2 \\ -2 & -i \end{bmatrix} \qquad \overline{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -2 & i \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -2 & i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -i & -2 \\ 2 & i \end{bmatrix} = -\boldsymbol{C}$$

Teorema [2.13]: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$. Verifica-se:

a) A matriz $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz hemi-hermitiana*, se e só se os seus elementos opostos são simétrico-conjugados e os elementos principais são nulos ou imaginários puros, isto é,

$$a_{ij} = -\bar{a}_{ji} \quad , \quad i \neq j \quad \wedge \quad (a_{ij} = 0 \vee a_{ij} = b\,i \quad , \quad b \neq 0) \quad , \quad i = j$$

b) A matriz subtração $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ é uma *matriz hemi-hermitiana* de ordem n.

c) Se $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz hemi-simétrica* com todos os seus *elementos reais*, então $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz hemi-hermitiana*.

d) Se $\boldsymbol{A}$ é uma *matriz hermi-hermitiana*, então também será uma *matriz normal*.

Teorema **[2.13]**: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem *n*, no corpo $\Omega = \mathbb{C}$, então $\boldsymbol{A}$ pode ser escrita como o resultado da soma de uma matriz hermitiana com uma matriz hemi-hermitiana, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{hermitiana}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{hemi-hermitiana}}}$$

Exemplo 30 **[2.29]**: Em relação à matriz $\boldsymbol{A}$ (quadrada de ordem 3)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 2-i & i & 1-i \\ 4+2i & 2 & 1+i \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 2-i & i & 1-i \\ 4+2i & 2 & 1+i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4-2i \\ 1-i & -i & 2 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 2-i & i & 1-i \\ 4+2i & 2 & 1+i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4-2i \\ 1-i & -i & 2 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3+2i & 4-2i \\ 3-2i & 0 & 3-i \\ 4+2i & 3+i & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 2-i & i & 1-i \\ 4+2i & 2 & 1+i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4-2i \\ 1-i & -i & 2 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4+2i \\ 1 & 2i & -1-i \\ 4+2i & 1-i & 2i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{hermitiana}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{hemi-hermitiana}}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 3+2i & 4-2i \\ 3-2i & 0 & 3-i \\ 4+2i & 3+i & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4+2i \\ 1 & 2i & -1-i \\ 4+2i & 1-i & 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 2-i & i & 1-i \\ 4+2i & 2 & 1+i \end{bmatrix}$$