MATRIZES

1. Sejam as matrizes

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Determine as matrizes

$\boldsymbol{D}=2\,\boldsymbol{A}+3\,\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-(2\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{G}=2\,\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{C}^{2}-\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}/2$

b) Execute todos os produtos possíveis que envolvam as matrizes dadas, de modo a que as matrizes resultantes desses produtos sejam matrizes quadradas de ordem 2.

c) Adoptando o método de eliminação de Gauss-Jordan, calcule a matriz inversa de $\boldsymbol{C}$; comprove o resultado obtido.

d) Nos casos em que tal for possível, determine os traços de todas as matrizes anteriormente definidas.

3. Sejam as matrizes

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} , \ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} , \ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Dos seguintes produtos matriciais calcule aqueles que são possíveis.

$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}$ $\qquad$ $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$ $\qquad$ $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

Justifique a resposta.

b) Adoptando o método de eliminação de Gauss-Jordan, obtenha a matriz inversa das matrizes $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$; comprove os resultados encontrados.

5. Considere as matrizes

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & -6 & 2\\ 5 & -11 & 3\\ -3 & 7 & -2\end{bmatrix}\ \text{e}\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

a) Obtenha a matriz $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}$.

b) Adoptando o método de eliminação de Gauss-Jordan, calcule a matriz inversa de $\boldsymbol{B}$; comprove o resultado encontrado.

c) Sabendo que $\boldsymbol{A}$ é uma matriz regular e recorrendo, unicamente, às matrizes obtidas nas alíneas anteriores, determine a matriz $\boldsymbol{E}$ tal que $\boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$.

7. Considere as matrizes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ dadas por

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ -2 & 2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-2\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$$

e $\boldsymbol{D}$ é uma matriz regular de ordem 3.

a) Adoptando o método de eliminação de Gauss-Jordan, determine $\boldsymbol{B}^{-1}$; confirme o resultado obtido.

b) Dos seguintes produtos matriciais seleccione e calcule os que são possíveis.

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}\right)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{B}^{-2}\right)\boldsymbol{C}$$

Justifique a resposta.

c) Obtenha a matriz $\boldsymbol{E}$ que verifica a relação matricial $\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\right)=\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{D}^{-1}\right)\boldsymbol{D}$.

9. Considere as matrizes

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\\ -2 & -3\\ 6 & 9\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 7\\ -1 & 3 & 4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}8 & 3 & -5\\ 4 & -3 & -3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4\\ -5\\ -6\end{bmatrix}\ \text{e}\ \boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}5\\ 8\end{bmatrix}$$

Introduza parêntesis na expressão matricial $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}$ de forma a que ela seja possível e calcule o seu valor.

11. Mostre que $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz idempotente.

15. Aplique a decomposição triangular, $\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{U}$, às matriz quadradas

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \;,\; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \;\text{ e }\; \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

17. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz simétrica e não singular que verifica a relação $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{O}$, onde $\boldsymbol{I}$ e $\boldsymbol{O}$ são, respectivamente, as matrizes identidade e nula da mesma ordem de $\boldsymbol{A}$. Usando a definição, determine a matriz $\boldsymbol{A}^{-1}$.

18. Sejam $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ matrizes quadradas de ordem *n*, em que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes regulares. Resolva em ordem a $\boldsymbol{C}$ a equação matricial $\left((\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\,\boldsymbol{C}\right)^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}$.

20. Seja a matriz quadrada de ordem 2, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -12 & -9 \end{bmatrix}$. Determine todas as matrizes, $\boldsymbol{P}$, não singulares, tais que $\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

21. Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ matrizes quadradas de ordem *n* e não singulares. Mostre que se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes ortogonais, então $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ é uma matriz ortogonal.

22. Considere as matrizes quadradas reais

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \frac{\sqrt{2}}{10}\begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -4\sqrt{2} & 3 \\ 4 & 3\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

a) Recorrendo às propriedades expressas no teorema 2.19, mostre que as matrizes dadas são ortogonais.

b) Identifique as respectivas matrizes inversas.

23. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n e não singulares. Mostre que se A e AB são matrizes ortogonais, então B é uma matriz ortogonal.

32. Aplicando o método da condensação da matriz, determine a característica das matrizes.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & -7 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -9 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -14 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 2 & 0 & -6 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

33. Aplicando o método da condensação da matriz, estude a variação da característica das matrizes em função dos respectivos parâmetros reais.

a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & h & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & g \\ 1 & 1 & h & g+1 \end{bmatrix}$, $g,h \in \mathrm{R}$

b) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & k \\ -1 & 4 & w & 5 \end{bmatrix}$, $k,w \in \mathrm{R}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & k & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & m & -3 & 3 \end{bmatrix}$, $k,m \in \mathrm{R}$

d) $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & t & t \\ -1 & t\,(t+1) & 0 \\ 2 & t\,(t+4) & t\,(t+4) \end{bmatrix}$, $t \in \mathrm{R}$

e) $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2a \\ 1 & 3 & -3a \\ 2 & a-1 & 1-a \\ 1 & -1 & -a \end{bmatrix}$, $a \in \mathrm{R}$

f) $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & q \\ 1-q & 1-q & 0 \\ 2 & 1-q & 1+q \\ q & q & q \end{bmatrix}$, $q \in \mathrm{R}$

g) $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2f \\ f & 0 & f \\ g & -1 & f \end{bmatrix}$, $f,g \in \mathrm{R}$

h) $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & h \\ -1 & 4 & g & 5 \\ 2 & 1 & g & -1 \end{bmatrix}$, $g,h \in \mathrm{R}$

i) $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -a & 0 \\ 1 & a & 1 & b \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a,b \in \mathrm{R}$

35. Determine a matriz inversa da matriz diagonal por blocos

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$