FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI Data / 11 / 20

Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano 1º Semestre 1º

Nome José Augusto Trigo Barbosa

Espaço reservado para o avaliador

Notas de apoio ao Capítulo 4 do manual:
"Noções sobre Matrizes e Sistemas de Equações Lineares".

Seja o sistema de n equações lineares a n incógnitas, expresso através da equação matricial

$$AX = B \iff$$

$$\iff \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz dos} \\ \text{coeficientes do sistema} \\ \text{matriz do tipo } n\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz das} \\ \text{incógnitas do sistema} \\ \text{matriz do tipo } n\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz dos termos} \\ \text{independentes do sistema} \\ \text{matriz do tipo } n\times 1}}$$

O sistema diz-se um sistema de Cramer se $r(A) = n$, pelo que:

- $|A| \neq 0$;
- A é uma matriz não singular ;
- Existe A^{-1}
- O sistema é possível e determinado, tendo como solução

$$X = A^{-1} B$$

Exemplo 1 [4.2]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -7 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

○ : elementos com cofactor com sinal positivo

A matriz A é não singular, já que $|A| = 21 \neq 0$

Cálculo dos cofactores dos elementos da matriz A:

- Cofactores com <u>sinal positivo</u>

$\text{cof } a_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +11$ $\qquad$ $\text{cof } a_{13} = + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10$

$\text{cof } a_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8$ $\qquad$ $\text{cof } a_{31} = + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = +13$

$\text{cof } a_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -8$

- Cofactores com <u>sinal negativo</u>

$\text{cof } a_{12} = - \begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13$ $\qquad$ $\text{cof } a_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +10$

$\text{cof } a_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11$ $\qquad$ $\text{cof } a_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} = -2$

$$\text{Cof } A = \begin{bmatrix} 11 & -13 & -10 \\ 10 & -8 & -11 \\ 13 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

Wmf

Exemplo

Seja o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -3x + 4y = -17 \end{cases}$, ou seja,

$$AX = B \quad \text{em que} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 12 \\ -17 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, o sistema é um sistema de Cramer.
A sua solução é:

- $$\text{Cof } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[\text{Cof } A\right]^T = -\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- <u>Regra de Cramer</u>

$$x = \frac{1}{|A|}\left|A_x\right| = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -17 & 4 \end{vmatrix} = -(48 - 51) = 3$$

$$y = \frac{1}{|A|}\left|A_y\right| = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -3 & -17 \end{vmatrix} = -(-34 + 36) = -2$$