Dep. Matem., Univ. Minho		16 de Fevereiro de 2009
	Álgebra Linear	
	Exame - A	
LEI		Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ **Nº:** __________

Nota. *Preencha devidamente o cabeçalho deste enunciado e da sua folha de exame. As respostas aos grupos* **I** *e* **II** *devem ser indicadas no enunciado, enquanto que o grupo* **III** *deve ser resolvido na folha de exame.* **O enunciado deve ser portanto entregue com a folha de exame.** *Para cada resposta* **errada** *dos grupos* **I, II** *desconta-se* 20% *do seu valor.*

I. *Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (*V*) ou falsa (*F*), colocando uma circunferência no símbolo correspondente.*

1. Seja A uma matriz real, quadrada de ordem 3, tal que $\det(A) = 3$ e seja $B = 3A$.

a) $\det(A^T) = \frac{1}{3}$. V F

b) A matriz B é invertível. V F

c) $\det(B) = 9$. V F

d) O sistema homogéneo $Bx = 0$ tem soluções não nulas. V F

2. Sejam x_1, x_2 e x_3 três vectores linearmente independentes do espaço vectorial $\mathbb{R}^4$.

a) Os vectores x_1, $3x_2$ e $x_1 + x_3$ são linearmente independentes. V F

b) Os vectores x_1, x_2, x_3 e $\mathbf{0}$ geram $\mathbb{R}^4$. V F

c) O vector nulo não é combinação linear dos vectores x_1, x_2 e x_3. V F

d) Se $x_4 \in \mathbb{R}^4 \backslash <x_1, x_2, x_3>$, então $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$. V F

3. Considere a matriz A seguinte

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) 1 e 3 são valores próprios de A. V F

b) O sistema $(A - I_3)x = 0$ tem duas soluções distintas. V F

c) -1 é valor próprio de $-A$. V F

d) $\det(A) = 9$. V F

Cotações

Parte I	Parte II	Parte III-1	Parte III-2	Parte III-3
2+2+2	1.5+1.5	1.5+1+1.5+1+1	2+1	2

II. *Para cada questão deste grupo, indique a (única) alínea que contém uma afirmação verdadeira, colocando uma circunferência no símbolo correspondente.*

1. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) A matriz A é simétrica.

b) A transposta de A é a matriz $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

c) A matriz A tem característica igual a 2.

d) A matriz A é invertível e a sua inversa é a matriz $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Considere o seguinte subespaço F de $\mathbb{R}^3$

$$F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_3 = 0 = x_1 + x_2 + 4x_3\Big\},$$

e seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) $\dim(F) = 3$.

b) $2e_1 - e_2 \in F$.

c) F é gerado pelo vector $(2, 2, -1)$.

d) Existem vectores $u, v \in F$ tais que $u + v \notin F$.

III. *Responda às questões deste grupo justificando a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.*

1. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x + 3z, -y - 2z)$$

a) Mostre que a aplicação f é linear.

b) Determine a matriz da aplicação linear f relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

c) Determine o núcleo da aplicação e a sua dimensão.

d) Verifique se a aplicação é injectiva.

e) Verifique se $(0, -1, 0) \in \mathrm{Im}(f)$.

2. Considere o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x + 3y - 2z = \alpha - 2 \\ 2x - y + (\beta + 2)z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta o sistema em função dos parâmetros reais α e β.

b) Para $\alpha = 2$ e $\beta = 0$, verifique se $(-1, 0, 1)$ é solução do sistema.

3. Sejam u_1, u_2, u_3 três vectores linearmente independentes de um espaço vectorial real V. Prove que, se $v \in V$ é tal que os vectores u_1, u_2, u_3, v são linearmente dependentes, então v pode ser escrito como combinação linear de u_1, u_2, u_3.