Problema : Sebenta

Waiz

276)

a) $N(T) = \{X \in \mathbb{R}^3 : T(X) = (0,0,0)\}$

$T(x,y,z) = (x-2z, 0, -2x+4z) = (0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2z=0 \\ 0=0 \\ -2x+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} (x) & (y) & (z) \end{array} \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z \\ \forall y,z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$N(T) = \{X = (2z, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$

Base $N(T) = \{(2,0,1), (0,1,0)\} \Rightarrow \dim N(T) = 2$ (T não é injectiva)

Recorrendo ao teorema da dimensão

$$\dim T(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim N(T) = 3-2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3 \quad (\text{T não é sobrejectiva})$$

Ver NOTA 1 na página 10

$T(\mathbb{R}^3) = \{Y \in \mathbb{R}^3 : Y = T(X), X \in \mathbb{R}^3\}$

Seja $Y = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ (conjunto de chegada)

$T(x,y,z) = (x-2z, 0, -2x+4z) = (a,b,c) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2z=a \\ 0=b \\ -2x+4z=c \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ -2 & 0 & 4 & c \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & c+2a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right]$$

O sistema só é possível, $Y \in T(\mathbb{R}^3)$, se e só se

$$\begin{cases} c+2a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2a \\ b=0 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Convém notar que o sistema, sendo possível, é indeterminado (T não é injectiva).

$T(\mathbb{R}^3) = \{Y = (a, 0, -2a) \in \mathbb{R}^3\}$

Base $T(\mathbb{R}^3) = \{(1,0,-2)\}$

pág

b) Em primeiro lugar há que definir a transformação linear S, considerando, para o efeito, as imagens dos vectores da base canónica $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ para o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$S(1,0,1) = S(\vec{i}+\vec{k}) = S(\vec{i}) + S(\vec{k}) = (2,-1,2)$$
$$S(-1,1,0) = S(-\vec{i}+\vec{j}) = -S(\vec{i}) + S(\vec{j}) = (0,1,-1)$$
$$S(0,0,1) = S(\vec{k}) = (1,-1,1)$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} S(\vec{i}) + S(\vec{k}) = (2,-1,2) \\ -S(\vec{i}) + S(\vec{j}) = (0,1,-1) \\ S(\vec{k}) = (1,-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S(\vec{i}) = (2,-1,2) - (1,-1,1) \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S(\vec{i}) = (1,0,1) \\ S(\vec{j}) = (0,1,-1) + (1,0,1) \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S(\vec{i}) = (1,0,1) \\ S(\vec{j}) = (1,1,0) \\ S(\vec{k}) = (1,-1,1) \end{cases}$$

A matriz que representa a transformação linear S em relação à base canónica, E, para $\mathbb{R}^3$ é

$$\mathcal{S} = m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$S(x,y,z) = \mathcal{S}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ y-z \\ x+z \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (x+y+z,\ y-z,\ x+z)$$

S é injectiva $\Leftrightarrow N(S) = \{(0,0,0)\} \Leftrightarrow \mathcal{S} = m(S)$ é não singular

ou seja,

$$S \text{ é injectiva} \Leftrightarrow |\mathcal{S}| \neq 0$$

Assim,

$$|\mathcal{S}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - (1) = -1 \neq 0$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

→ ver NOTA 2 na página 11

Então $\mathcal{S}$ é uma matriz não singular e, portanto, a transformação linear S é injectiva, ou seja, admite função inversa.

Tendo em atenção que $\dim N(S) = 0$ (S é injectiva), o recurso ao teorema da dimensão permite concluir que

$$\dim S(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim N(S) = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3 \quad (S \text{ é sobrejectiva})$$

O cálculo da função S^{-1} pode ser realizado determinando a matriz inversa de $\mathcal{S} = m(S)$.

$$\operatorname{Adj} \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{S}^{-1} = \frac{1}{(-1)} \left[\operatorname{Adj} \mathcal{S}\right]^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

→ matriz que representa a transformação linear S^{-1} em relação à base canónica, E, para $\mathbb{R}^3$.

Sabendo que $Y = S(X) \Leftrightarrow (a,b,c) = S(x,y,z)$

então $X = S^{-1}(Y) \Leftrightarrow (x,y,z) = S^{-1}(a,b,c)$

em que

$$S^{-1}(a,b,c) = \mathcal{S}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+b+2c \\ a-c \\ a-b-c \end{bmatrix}$$

Obtém-se, então,

$$S^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(a,b,c) \longrightarrow (-a+b+2c,\ a-c,\ a-b-c)$$

e) Obtenha a transformação linear $S^{-1}T^2$

Nair

$$m(S^{-1}T^2) = m(S^{-1})\, m(T^2)$$

$$m(T^2) = m(T)\, m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} (=)$$

<u>NOTA</u>: $T(1,0,0) = (1,0,-2)$
$T(0,1,0) = (0,0,0)$
$T(0,0,1) = (-2,0,4)$
$\Rightarrow \quad T = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica, E, para $\mathbb{R}^3$.

$$(=) \quad m(T^2) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$ → matriz que representa a transformação linear T^2 em relação à base canónica, E, para $\mathbb{R}^3$.

$$m(S^{-1}T^2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 20 \end{bmatrix} (=)$$

$$(=) \quad m(S^{-1}T^2) = \begin{bmatrix} -25 & 0 & 50 \\ 15 & 0 & -30 \\ 15 & 0 & -30 \end{bmatrix}$$ → matriz que representa a transformação linear $S^{-1}T^2$ em relação à base canónica, E, para $\mathbb{R}^3$.

$$S^{-1}T^2(x,y,z) = \begin{bmatrix} -25 & 0 & 50 \\ 15 & 0 & -30 \\ 15 & 0 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25x + 50z \\ 15x - 30z \\ 15x - 30z \end{bmatrix}$$

Assim

$$S^{-1}T^2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (-25x+50z,\ 15x-30z,\ 15x-30z)$$

c1) Obtenha a transformação linear ST

$$m(ST) = m(S)\, m(T) \iff m(ST) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff m(ST) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$ matriz que representa a transformação linear ST em relação à base canónica, E, para $\mathbb{R}^3$

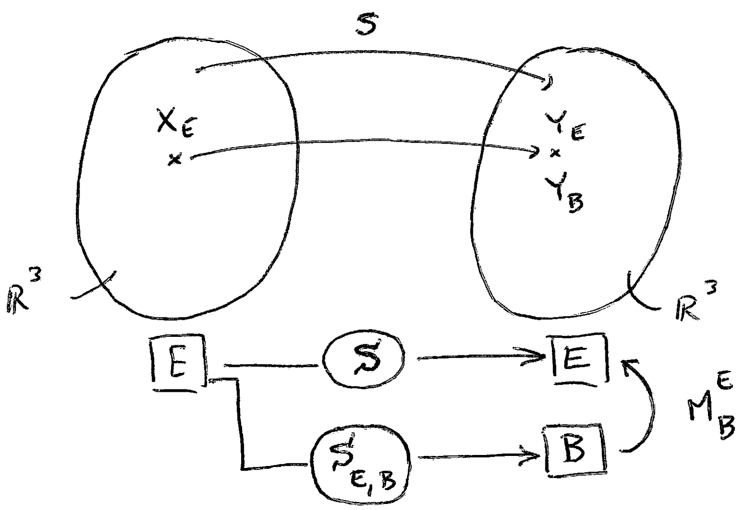
Então

$$ST(x,y,z) = m(ST)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2z \\ 2x-4z \\ -x+2z \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$ST : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (-x+2z,\ 2x-4z,\ -x+2z)$$

e)



Base $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

Base $B = \{(1,0,1), (-1,1,0), (0,0,1)\}$

M_B^E : matriz mudança de base $B \rightarrow E$

$$E\, Y_E = B\, Y_B$$

em que

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se, então,

$$Y_E = M_B^E \, Y_B$$

em que

$$M_B^E = E^{-1} B = B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{já que } E = I$$

Assim

$$S'_{E,B} = (M_B^E)^{-1} \, S' \qquad \Rightarrow \qquad Y_B = S'_{E,B} \, X_E \quad \text{com}$$

$$X_E = (x, y, z)$$

Cálculo da matriz inversa de M_B^E

$$|M_B^E| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (0) = 1$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\text{Adj } M_B^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (M_B^E)^{-1} = \frac{1}{(1)} \left[\text{Adj } M_B^E \right]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

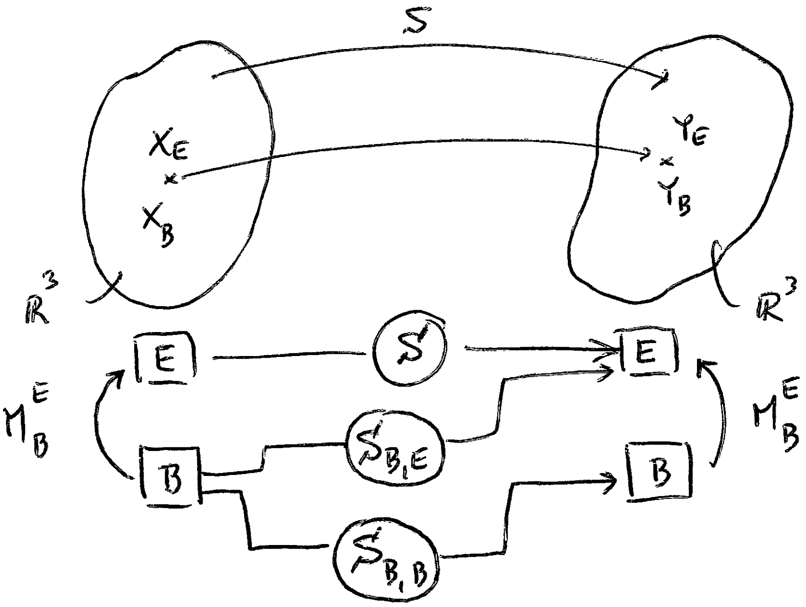
Obtém-se, então,

$$S'_{E,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{E,B}$$

$$S(x,y,z) = S'_{E,B} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{E,B} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} x + 2y \\ y - z \\ -2y + z \end{bmatrix}_B$$

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longrightarrow (x+2y,\ y-z,\ -2y+z)_B \end{aligned}$$

e_1) Determine as matrizes $S'_{B,E}$ e $S'_{B,B}$



$$Y_E = S'_{B,E}\, X_B \qquad \text{em que} \qquad X_B = (x_1, y_1, z_1)_B$$

$$S'_{B,E} = S'\, M_B^E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{B,E}$$

$$S(x_1, y_1, z_1)_B = S'_{B,E} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{B,E} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2x_1 + z_1 \\ -x_1 + y_1 - z_1 \\ 2x_1 - y_1 + z_1 \end{bmatrix}_E$$

$$S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, y_1, z_1)_B \longrightarrow (2x_1 + z_1, -x_1 + y_1 - z_1, 2x_1 - y_1 + z_1)$$

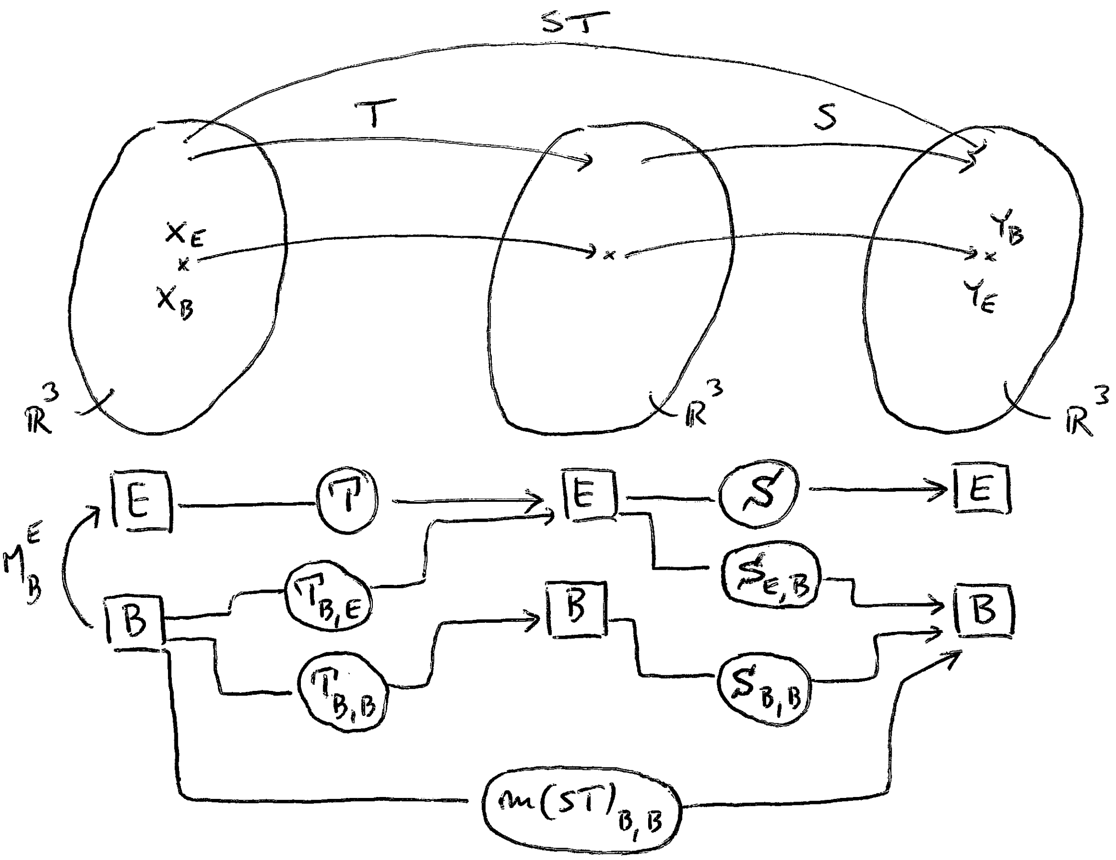
$$Y_B = S'_{B,B}\, X_B$$

$$S'_{B,B} = \left(M_B^E\right)^{-1} \underbrace{S'\, M_B^E}_{S'_{B,E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{B,E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{B,B}$$

$$S(x_1,y_1,z_1)_B = S_{B,B}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}_{B,B}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix}x_1+y_1\\-x_1+y_1-z_1\\x_1-2y_1+z_1\end{bmatrix}_B$$

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1,y_1,z_1)_B &\longrightarrow (x_1+y_1,\ -x_1+y_1-z_1,\ x_1-2y_1+z_1)_B \end{aligned}$$

f)



A matriz $m(ST)_{B,B}$ pode ser encontrada a partir de qualquer uma das seguintes relações matriciais

$$m(ST)_{B,B} = S_{B,B}\ T_{B,B}$$

ou

$$m(ST)_{B,B} = S_{E,B}\ T_{B,E}$$

Recorrendo a esta última expressão, começamos por determinar a matriz $T_{B,E}$

$$T_{B,E} = T\, M_B^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{B,E}$$

pelo que

$$m(ST)_{B,B} = S_{E,B}\, T_{B,E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{E,B} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{B,E} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{B,B}$$

Assim,

$$Y_B = m(ST)_{B,B}\, X_B \quad \text{em que} \quad X_B = (x_1, y_1, z_1)_B$$

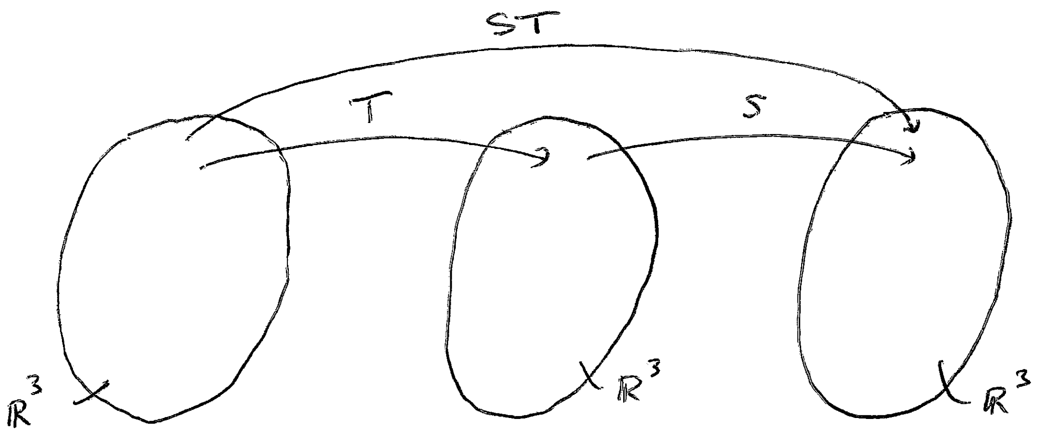
$$(ST)(x_1, y_1, z_1)_B = m(ST)_{B,B} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{B,B} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_B =$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 - y_1 - 2z_1 \\ -2x_1 - 2y_1 - 4z_1 \\ 2x_1 + 2y_1 + 4z_1 \end{bmatrix}_B$$

$$ST : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, y_1, z_1)_B \longrightarrow (-x_1 - y_1 - z_1, -2x_1 - 2y_1 - 4z_1, 2x_1 + 2y_1 + 4z_1)_B$$

A matriz $m(ST)_{B,B}$ poderia ainda ser obtida a partir da matriz $m(ST)$, que representa a transformação linear ST em relação à base canónica, E, para $\mathbb{R}^3$ (ver alínea c)).



$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "m(ST)"'] & E \arrow[r, "S"] & E \\
B \arrow[u, bend left, "M_B^E"] \arrow[rr, "m(ST)_{B,B}"'] & & B \arrow[u, bend right, "M_B^E"']
\end{tikzcd}$$

$$m(ST)_{B,B} = \left(M_B^E\right)^{-1} m(ST) \; M_B^E =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{B,B}$$

NOTA 1: A dimensão do contradomínio de uma transformação linear é igual à característica de uma qualquer representação matricial dessa transformação linear. Assim, considerando a matriz

$$T = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

que representa T em relação à base canónica para $\mathbb{R}^3$ (ver página 4), verifica-se que

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(T) = 1$$

$$r(T) \geq 1$$

pelo que $\dim T(\mathbb{R}^3) = 1$.

Desta forma poderia concluir-se de imediato que

$$T(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3 \quad (T \text{ não é sobrejectiva})$$

e que

$$\dim N(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim T(\mathbb{R}^3) = 2 \quad (T \text{ não é injectiva})$$

<u>NOTA 2</u>: Uma vez que $|S| = -1 \neq 0$ então

$$r(S) = 3$$

pelo que

$$\dim S(\mathbb{R}^3) = 3$$

e, portanto,

$$S(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3 \quad (S \text{ é sobrejectiva})$$

Qualquer transformação linear que seja representada por uma matriz quadrada, será sobrejectiva se for injectiva e vice-versa.

Luís Araújo Barbosa