4.

Tell us a story!- said the March Hare.
Yes, please do!.- said Alice
And be quick about it!
Once upon a time there were three little sisters!- said Hatter
What did they live on?- said Alice, who always took a great interest in questions of eating and drinking.

Alice's Adventures in Wonderland, Lewis Carroll

Definição

Sejam V e W dois subespaços reais. Designa-se por **aplicação linear**, *transformação linear*, a aplicação $f : V \longrightarrow W$ tal que:

- $\forall x, y \in V \qquad f(x+y) = f(x) + f(y),$ (f perversa $+$)
- $\forall x \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad f(\alpha x) = \alpha f(x),$ (f perversa .).

Exemplo

Considere-se a função:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y,-y+3z) \end{array}$$

- $\forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$,

  $$\begin{aligned} & f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = f((x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)) = \\ & = (2(x_1+x_2)+(y_1+y_2),-(y_1+y_2)+3(z_1+z_2)) = \cdots = \\ & = f((x_1,y_1,z_1))+f((x_2,y_2,z_2)), \end{aligned}$$

- $\forall (x_1,y_1,z_1) \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$f(\alpha(x_1,y_1,z_1)) = f((\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)) = (2(\alpha x_1)+\alpha y_1,-\alpha y_1+3\alpha z_1) = \cdots = \alpha f((x_1,y_1,z_1))$.

f é uma aplicação linear

Exemplo

Considere-se a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y,-y+3z) \end{array}$$

- $\forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3,$
  $$\begin{aligned} & f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = f((x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)) = \\ &= (2(x_1+x_2)+(y_1+y_2),-(y_1+y_2)+3(z_1+z_2)) = \cdots = \\ &= f((x_1,y_1,z_1))+f((x_2,y_2,z_2)), \end{aligned}$$

- $\forall (x_1,y_1,z_1) \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$f(\alpha(x_1,y_1,z_1)) = f((\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)) = (2(\alpha x_1)+\alpha y_1,-\alpha y_1+3\alpha z_1) = \cdots = \alpha f((x_1,y_1,z_1)).$

f é uma aplicação linear

Exemplo

Considere-se a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, -y+3z) \end{array}$$

- $\forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3,$
$$\begin{aligned} & f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = f((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) = \\ & = (2(x_1+x_2)+(y_1+y_2), -(y_1+y_2)+3(z_1+z_2)) = \cdots = \\ & = f((x_1,y_1,z_1)) + f((x_2,y_2,z_2)), \end{aligned}$$

- $\forall (x_1,y_1,z_1) \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$f(\alpha(x_1,y_1,z_1)) = f((\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)) = (2(\alpha x_1)+\alpha y_1, -\alpha y_1+3\alpha z_1) = \cdots = \alpha f((x_1,y_1,z_1)).$

f é uma aplicação linear

Exemplo

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \end{array}$$

g é uma aplicação linear

Exemplo

(a função que a cada polinómio de grau 3 associa o polinómio-derivada)

$$\begin{array}{cccc} \psi: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & ax^3 + bx^2 + cx + d & \longmapsto & 3ax^2 + 2bx + c \end{array}$$

ψ é uma aplicação linear

Exemplo

$$
\begin{array}{rccc}
g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
& \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}
\end{array}
$$

g é uma aplicação linear

Exemplo

(a função que a cada polinómio de grau 3 associa o polinómio-derivada)

$$
\begin{array}{rccc}
\psi: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\
& ax^3 + bx^2 + cx + d & \longmapsto & 3ax^2 + 2bx + c
\end{array}
$$

ψ é uma aplicação linear

Teorema

Se f é uma aplicação linear definida de V para W então:

1. $f(0_V) = 0_W$, (f preserva o vector nulo)

2. $\forall x \in V, \quad f(-x) = -f(x)$. (f preserva os simétricos)

Demonstração:

1. Tem-se que $f(0_V) = f(0_{\mathbb{R}} 0_V) = 0_{\mathbb{R}} f(0_V) = 0_W$

2. Usando (1) tem-se que, para todo $x \in V$,

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0_V) = 0_W.$$

Teorema

Se f é uma aplicação linear definida de V para W então:

1. $f(0_V) = 0_W$, (f preserva o vector nulo)
2. $\forall x \in V, \quad f(-x) = -f(x)$. ($f$ preserva os simétricos)

Demonstração:

1. Tem-se que $f(0_V) = f(0_{\mathbb{R}} 0_V) = 0_{\mathbb{R}} f(0_V) = 0_W$

2. Usando (1) tem-se que, para todo $x \in V$,

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0_V) = 0_W.$$

Teorema

Se f é uma aplicação linear definida de V para W então:

1. $f(0_V) = 0_W$, (f preserva o vector nulo)
2. $\forall x \in V, \quad f(-x) = -f(x)$. (f preserva os simétricos)

Demonstração:

1. Tem-se que $f(0_V) = f(0_{\mathbb{R}} 0_V) = 0_{\mathbb{R}} f(0_V) = 0_W$

2. Usando (1) tem-se que, para todo $x \in V$,

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0_V) = 0_W.$$

Teorema

Se f é uma aplicação linear definida de V para W então:

1. $f(\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots \alpha_n f(v_n)$, para $v_1, \ldots, v_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (f preserva as combinações lineares)

2. Se $v_1, \ldots, v_n \in V$, são vectores linearmente dependentes de V, então $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ são linearmente dependentes de W. (f preserva a dependência linear)

Note-se que, em geral, uma aplicação linear não preserva a independência linear.
A aplicação $f : R^3 \rightarrow R^2$ tal que $f(x, y, z) = (x, z)$ é um exemplo dessa afirmação.

importantes conjuntos associados às aplicações lineares

Se $f : V \longrightarrow W$ é uma aplicação linear, e X um subconjunto de V, $(X \subset V)$, define-se $f^{-1}(X)$ como o subconjunto de W tal que:

$$f^{-1}(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

e, para todo o subconjunto Y de W, define-se $f^{-1}(Y)$ um subconjunto de V dado por:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in V : f(x) \in Y\}$$

Observe-se que as seguintes relações são válidas:

- $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f^{-1}(X_1) \subseteq f^{-1}(X_2)$ com $X_1, X_2 \subseteq V$,
- $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$ com $Y_1, Y_2 \subseteq W$.

importante conclusão

Teorema

Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear.
Se X **é um subespaço de** V então $f^{-1}(X)$ é um subespaço de W;
e se Y **é um subespaço de** W então $f^{-1}(Y)$ é um subespaço de V.

Demonstração:

$[f^{-1}(X)$ subespaço$]$

(i) se X é subespaço de V, $0_V \in X$, tendo-se $0_W = f(0_V) \in f^{-1}(X)$, logo $f^{-1}(X) \neq \emptyset$.

(ii) sejam $y_1, y_2 \in f^{-1}(X)$, então existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$,

$$y_1 + y_2 = \underbrace{f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)}_{\text{pois } f \text{ é linear}} \in f^{-1}(X)$$

$(x_1 + x_2 \in X,$ pois X é subespa

(iii) se $y_1 \in f^{-1}(X)$ para todo α escalar,

$$\alpha y_1 = \underbrace{\alpha f(x_1) = f(\alpha x_1)}_{\text{pois } f \text{ é linear}} \in f^{-1}(X)$$

$(\alpha x_1 \in X,$ pois X é subespaço$)$

Teorema

Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear.
Se X **é um subespaço de** V então $f^{-1}(X)$ é um subespaço de W;
e se Y **é um subespaço de** W então $f^{-1}(Y)$ é um subespaço de V.

Demonstração:

[$f^{-1}(X)$ subespaço]

(i) se X é subespaço de V, $0_V \in X$, tendo-se $0_W = f(0_V) \in f^{-1}(X)$, logo $f^{-1}(X) \neq \emptyset$.

(ii) sejam $y_1, y_2 \in f^{-1}(X)$, então existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$,

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pois } f \text{ é linear}}}{=} f(x_1 + x_2) \in f^{-1}(X) \quad (x_1 + x_2 \in X, \text{ pois } X \text{ é subespa}$$

(iii) se $y_1 \in f^{-1}(X)$ para todo α escalar,

$$\alpha y_1 = \alpha f(x_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pois } f \text{ é linear}}}{=} f(\alpha x_1) \in f^{-1}(X) \quad (\alpha x_1 \in X, \text{ pois } X \text{ é subespaço})$$

Teorema

Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear.
Se X **é um subespaço de** V então $f^{-1}(X)$ é um subespaço de W;
e se Y **é um subespaço de** W então $f^{-1}(Y)$ é um subespaço de V.

Demonstração:

[$f^{-1}(X)$ subespaço]

(i) se X é subespaço de V, $0_V \in X$, tendo-se $0_W = f(0_V) \in f^{-1}(X)$, logo $f^{-1}(X) \neq \emptyset$.

(ii) sejam $y_1, y_2 \in f^{-1}(X)$, então existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$,

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pois } f \text{ é linear}}}{=} f(x_1 + x_2) \in f^{-1}(X) \qquad (x_1 + x_2 \in X, \text{ pois } X \text{ é subespa}$$

(iii) se $y_1 \in f^{-1}(X)$ para todo α escalar,

$$\alpha y_1 = \alpha f(x_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pois } f \text{ é linear}}}{=} f(\alpha x_1) \in f^{-1}(X) \qquad (\alpha x_1 \in X, \text{ pois } X \text{ é subespaço})$$

Teorema

Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear.
Se X **é um subespaço de** V então $f^{-1}(X)$ é um subespaço de W;
e se Y **é um subespaço de** W então $f^{-1}(Y)$ é um subespaço de V.

Demonstração:

$[f^{-1}(X)$ subespaço$]$

(i) se X é subespaço de V, $0_V \in X$, tendo-se $0_W = f(0_V) \in f^{-1}(X)$, logo $f^{-1}(X) \neq \emptyset$.

(ii) sejam $y_1, y_2 \in f^{-1}(X)$, então existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$,

$$y_1 + y_2 = \underbrace{f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)}_{\text{pois } f \text{ é linear}} \in f^{-1}(X)$$

$(x_1 + x_2 \in X,$ pois X é subespa

(iii) se $y_1 \in f^{-1}(X)$ para todo α escalar,

$$\alpha y_1 = \underbrace{\alpha f(x_1) = f(\alpha x_1)}_{\text{pois } f \text{ é linear}} \in f^{-1}(X)$$

$(\alpha x_1 \in X,$ pois X é subespaço$)$

Teorema

Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear.
Se X **é um subespaço de** V então $f^{-1}(X)$ é um subespaço de W;
e se Y **é um subespaço de** W então $f^{-1}(Y)$ é um subespaço de V.

Demonstração:

[$f^{-1}(X)$ subespaço]

(i) se X é subespaço de V, $0_V \in X$, tendo-se $0_W = f(0_V) \in f^{-1}(X)$, logo $f^{-1}(X) \neq \emptyset$.

(ii) sejam $y_1, y_2 \in f^{-1}(X)$, então existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$,

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pois } f \text{ é linear}}}{=} f(x_1 + x_2) \in f^{-1}(X) \qquad (x_1 + x_2 \in X, \text{ pois } X \text{ é subespa}$$

(iii) se $y_1 \in f^{-1}(X)$ para todo α escalar,

$$\alpha y_1 = \alpha f(x_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pois } f \text{ é linear}}}{=} f(\alpha x_1) \in f^{-1}(X) \qquad (\alpha x_1 \in X, \text{ pois } X \text{ é subespaço})$$

Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear.

Im f- conjunto das imagens de V, por meio da aplicação linear f, o qual é um subconjunto de W, ao conjunto:

$$\mathrm{Im} f = \{y \in W, \exists x \in V : \quad f(x) = y\}$$

Nuc_f - designado por **núcleo de** f, ou espaço nulo, ou kernel de f, denotado por ou $Ker\ f$ ou $f^{-1}(0_W)$, o conjunto dos elementos de V que têm como imagem o zero de W:

$$Ker\ f = \{x \in V : \quad f(x) = 0_W\}$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

$Nuc_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$

$\mathbf{Im\ f} =< (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) >$

$=< (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) >= \mathbb{R}^3$ uma vez que os vectores são l.i.

$Nuc_f = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) = (0, 0, 0)\}$

$Nuc_f = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$

Exemplo

$$
\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1
\end{array}
$$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

$Nuc_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$

$\mathbf{Im\ f} =< (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) >$

$=< (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) >= \mathbb{R}^3$ uma vez que os vectores são l.i.

$Nuc_f = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) = (0, 0, 0)\}$

$Nuc_f = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$

Exemplo

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

$Nuc_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$

Im f $= < (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) >$

$= < (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) > = \mathbb{R}^3$ uma vez que os vectores são l.i.

$Nuc_f = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) = (0, 0, 0)\}$

$Nuc_f = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$

Exemplo

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

$Nuc_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$

Im f $= < (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) >$

$= < (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) > = \mathbb{R}^3$ uma vez que os vectores são l.i.

$Nuc_f = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) = (0, 0, 0)\}$

$Nuc_f = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

$Nuc_f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$

Im f $=< (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) >$

$=< (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) >= \mathbb{R}^3$ uma vez que os vectores são l.i.

$Nuc_f = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) = (0, 0, 0)\}$

$Nuc_f = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$

Exemplo

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

$Nuc_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$

Im f $= < (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) >$

$= < (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) > = \mathbb{R}^3$ uma vez que os vectores são l.i.

$Nuc_f = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) = (0, 0, 0)\}$

$Nuc_f = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$

Sejam:

- V e W espaços vectoriais reais, de dimensão m e n,
- $B = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ uma base de V
- $B' = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ uma base de W.

Então para qualquer vector de V, em particular um vector da sua base, $v_i,\ i = 1, \dots n$, pode-se determinar $f(v_i)$, escrevendo-o na base de W, ou seja:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1n}w_n \\ f(v_2) &= a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{2n}w_n \\ &\vdots \\ f(v_m) &= a_{m1}w_1 + a_{m2}w_2 + \cdots + a_{mn}w_n \end{aligned}$$

A acção de f sobre cada um dos v_i é determinada pelos escalares a_{ij}, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Estes escalares formam uma matriz de ordem $m \times n$. A matriz transposta desta, designa-se por matriz da aplicação linear f, nas bases $\{v_i\}$ de V, e $\{w_j\}$ de W, é uma matriz de ordem $n \times m$.

Sejam:

- V e W espaços vectoriais reais, de dimensão m e n,
- $B = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ uma base de V
- $B' = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ uma base de W.

Então para qualquer vector de V, em particular um vector da sua base, $v_i,\ i = 1, \ldots n$, pode-se determinar $f(v_i)$, escrevendo-o na base de W, ou seja:

$$\begin{aligned}
f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1n}w_n \\
f(v_2) &= a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{2n}w_n \\
&\vdots \\
f(v_m) &= a_{m1}w_1 + a_{m2}w_2 + \cdots + a_{mn}w_n
\end{aligned}$$

A acção de f sobre cada um dos v_i é determinada pelos escalares a_{ij}, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$. Estes escalares formam uma matriz de ordem $m \times n$. A matriz transposta desta, designa-se por matriz da aplicação linear f, nas bases $\{v_i\}$ de V, e $\{w_j\}$ de W, é uma matriz de ordem $n \times m$.

Escreve-se, A, a matriz da aplicação linear f, de V (dimensão m) em W (dimensão n), é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_1) & & f(v_1) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por:

$$f(x, y, z) = (2x - 3y + z, 3x - 2y).$$

Uma vez que:
$f(1, 0, 0) = (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1),$
$f(0, 1, 0) = (-3, -2) = -3(1, 0) - 2(0, 1),$
$f(0, 0, 1) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1),$
tem-se que, a matriz da aplicação linear f é: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Note-se que: $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ 3x - 2y \end{pmatrix}$

Sendo então, *fácil* determinar a imagem por meio de f de qualquer elemento de $\mathbb{R}^2$, por exemplo:

$$f(1, 2, 3) = A. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por:

$$f(x, y, z) = (2x - 3y + z, 3x - 2y).$$

Uma vez que:

$f(1, 0, 0) = (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$,
$f(0, 1, 0) = (-3, -2) = -3(1, 0) - 2(0, 1)$,
$f(0, 0, 1) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$,

tem-se que, a matriz da aplicação linear f é: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Note-se que: $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ 3x - 2y \end{pmatrix}$

Sendo então, *fácil* determinar a imagem por meio de f de qualquer elemento de $\mathbb{R}^2$, por exemplo:

$$f(1, 2, 3) = A. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por:

$$f(x, y, z) = (2x - 3y + z, 3x - 2y).$$

Uma vez que:

$f(1, 0, 0) = (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1),$
$f(0, 1, 0) = (-3, -2) = -3(1, 0) - 2(0, 1),$
$f(0, 0, 1) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1),$

tem-se que, a matriz da aplicação linear f é: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Note-se que: $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ 3x - 2y \end{pmatrix}$

Sendo então, *fácil* determinar a imagem por meio de f de qualquer elemento de $\mathbb{R}^2$, por exemplo:

$$f(1, 2, 3) = A. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Seja A a matriz da aplicação linear f (relativamente às bases canónicas) definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine-se f.

A aplicação f será definida de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^3$, tendo-se:

$$f(a,b,c,d) = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ a+d \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (a,b,c,d) & \longmapsto & (a+b, b-c, a+d) \end{array}$$

Exemplo

Seja A a matriz da aplicação linear f (relativamente às bases canónicas) definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine-se f.

A aplicação f será definida de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^3$, tendo-se:

$$f(a,b,c,d) = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ a+d \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (a,b,c,d) & \longmapsto & (a+b, b-c, a+d) \end{array}$$

Exemplo

Seja A a matriz da aplicação linear f (relativamente às bases canónicas) definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine-se f.

A aplicação f será definida de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^3$, tendo-se:

$$f(a,b,c,d) = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ a+d \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (a,b,c,d) & \longmapsto & (a+b, b-c, a+d) \end{array}$$

Vejamos um exemplo.
Seja,

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, x+y+2z, 2x+y+3z) \end{array}$$

O núcleo de f, $Nuc_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad f((x,y,z)) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Sendo A, a matriz da aplicação linear f, podemos escrever que, para $(x,y,z) \in Nuc_f$:

$$f((x,y,z)) = (0,0,0) \Leftrightarrow A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ sistema homogéneo,

cujo conjunto solução é o núcleo de f.

ou seja, recorrendo ao método de eliminação de Gauss, para a A,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

tendo-se, por substituição inversa,

$$\left\{ \begin{array}{r} x + z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 4z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \qquad c(A) = 3 = n \text{ sistema possível determinado}$$

donde

$$Nuc_f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{o qual é um conjunto singular.}$$

(Há só um elemento cuja imagem é o zero de $\mathbb{R}^3$.)

Teorema

Sejam V, W espaços vectoriais reais e $f : V \to W$ uma aplicação linear. Então Nuc_f é um subespaço vectorial de V e $Im(f)$ é um subespaço vectorial de W.

Demonstração:

[Nuc_f é um subespaço vectorial]

(i) $0_W \in W$ (pois W é subespaço) , e porque f é linear
$0_W = f(0_v), 0_v \in Nuc_f, Nuc_f \neq \{\}$

(ii) sejam $x, x' \in Nu_f$ então, porque f é linear,
$f(x + x') = f(x) + f(x') = 0 + 0$, logo $x + x' \in Nu_f$

(iii) sejam $x \in Nu_f$ então, porque f é linear, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$, logo $\alpha x \in Nuc_f$

Nuc_f é um subespaço vectorial de V

[Im_f é um subespaço vectorial]

...

Teorema

Sejam V, W espaços vectoriais reais e $f : V \to W$ uma aplicação linear. Então Nuc_f é um subespaço vectorial de V e $Im(f)$ é um subespaço vectorial de W.

Demonstração:

[Nuc_f é um subespaço vectorial]

(i) $0_W \in W$ (pois W é subespaço) , e porque f é linear
$0_W = f(0_v), 0_v \in Nuc_f, Nuc_f \neq \{\}$

(ii) sejam $x, x' \in Nu_f$ então, porque f é linear,
$f(x + x') = f(x) + f(x') = 0 + 0$, logo $x + x' \in Nu_f$

(iii) sejam $x \in Nu_f$ então, porque f é linear, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$, logo $\alpha x \in Nuc_f$

Nuc_f é um subespaço vectorial de V

[Im_f é um subespaço vectorial]

...

Teorema

Sejam V, W espaços vectoriais reais e $f : V \to W$ uma aplicação linear. Então Nuc_f é um subespaço vectorial de V e $Im(f)$ é um subespaço vectorial de W.

Demonstração:

[Nuc_f é um subespaço vectorial]

(i) $0_W \in W$ (pois W é subespaço) , e porque f é linear
$0_W = f(0_v), 0_v \in Nuc_f, Nuc_f \neq \{\}$

(ii) sejam $x, x' \in Nu_f$ então, porque f é linear,
$f(x + x') = f(x) + f(x') = 0 + 0$, logo $x + x' \in Nu_f$

(iii) sejam $x \in Nu_f$ então, porque f é linear, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$, logo $\alpha x \in Nuc_f$

Nuc_f é um subespaço vectorial de V

[Im_f é um subespaço vectorial]

...

Teorema

Sejam V, W espaços vectoriais reais e $f : V \to W$ uma aplicação linear. Então Nuc_f é um subespaço vectorial de V e $Im(f)$ é um subespaço vectorial de W.

Demonstração:

[Nuc_f é um subespaço vectorial]

(i) $0_W \in W$ (pois W é subespaço) , e porque f é linear
$0_W = f(0_v), 0_v \in Nuc_f, Nuc_f \neq \{\}$

(ii) sejam $x, x' \in Nu_f$ então, porque f é linear,
$f(x + x') = f(x) + f(x') = 0 + 0$, logo $x + x' \in Nu_f$

(iii) sejam $x \in Nu_f$ então, porque f é linear, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$, logo $\alpha x \in Nuc_f$

Nuc_f é um subespaço vectorial de V

[Im_f é um subespaço vectorial]

...

Teorema

Sejam V, W espaços vectoriais reais e $f : V \to W$ uma aplicação linear. Então Nuc_f é um subespaço vectorial de V e $Im(f)$ é um subespaço vectorial de W.

Demonstração:

[Nuc_f é um subespaço vectorial]

(i) $0_W \in W$ (pois W é subespaço) , e porque f é linear
$0_W = f(0_v), 0_v \in Nuc_f, Nuc_f \neq \{\}$

(ii) sejam $x, x' \in Nu_f$ então, porque f é linear,
$f(x + x') = f(x) + f(x') = 0 + 0$, logo $x + x' \in Nu_f$

(iii) sejam $x \in Nu_f$ então, porque f é linear, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$, logo $\alpha x \in Nuc_f$

Nuc_f é um subespaço vectorial de V

[Im_f é um subespaço vectorial]

...

Exemplo

Sendo $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tal que:

$$f(a,b,c,d,e) = (a - c + 3d - e, a + 2d - e, 2a - c + 5d - e, -c + d)$$

determine-se uma base para os subespaços Nuc_f e $Im(f)$.

[base $Im(f)$**]**

$(a - c + 3d - e, a + 2d - e, 2a - c + 5d - e, -c + d) =$
$a(1,1,2,0) + c(-1,0,-1,-1) + d(3,2,5,1) + e(-1,-1,-1,0)$

$Im(f) =< (1,1,2,0), (-1,0,-1,-1), (3,2,5,1), (-1,-1,-1,0) >$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad c(A) = 3$$

$(3,2,5,1) = 2(1,1,2,0) - (-1,0,-1,-1)$

$Im(f) =< (1,1,2,0), (-1,0,-1,-1), (-1,-1,-1,0) >$
que, podemos verificar que são l.i., logo constituem uma base de $Im(f)$

$dim\ Im(f) = 3$

$$f(a,b,c,d,e)=(a-c+3d-e, a+2d-e, 2a-c+5d-e, -c+d)$$

[base Nuc_f**]** resolvendo o sistema homogéneo $Ax=0$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tendo-se $a-c+3d-e=0$ e $c-d=0$ e $e=0$ vem

$$Nuc_f=\{(-2c,b,c,c,0): b,c\in\mathbb{R}\}$$
$$dim\ Nuc_f=2$$

base de $Nuc_f=\{(-2,0,1,1,0),(0,1,0,0,0)\}$

Definição

Uma aplicação linear $f : V \to W$ diz-se **sobrejectiva** se $Im_f = W$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$Im_g = \mathbb{R}$,

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \to W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, 0, x) \end{array}$$

$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y'$e $x = x'$ e então $(x, y) = (x', y')$ h é injectiva

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se bijectiva.

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **sobrejectiva** se $Im_f = W$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$Im_g = \mathbb{R}$,

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, 0, x) \end{array}$$

$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y'$e $x = x'$ e então $(x, y) = (x', y')$ h é injectiva

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se bijectiva.

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Definição

Uma aplicação linear $f : V \to W$ diz-se **sobrejectiva** se $Im_f = W$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$Im_g = \mathbb{R}$,

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \to W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, 0, x) \end{array}$$

$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y'$e $x = x'$ e então $(x, y) = (x', y')$ h é injectiva

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se bijectiva.

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **sobrejectiva** se $Im_f = W$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$Im_g = \mathbb{R}$,

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, 0, x) \end{array}$$

$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y'$e $x = x'$ e então $(x, y) = (x', y')$ h é injectiva

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se bijectiva.

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **sobrejectiva** se $Im_f = W$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$Im_g = \mathbb{R}$,

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, 0, x) \end{array}$$

$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y'$e $x = x'$ e então $(x, y) = (x', y')$ h é injectiva

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se bijectiva.

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Definição

Uma aplicação linear $f : V \to W$ diz-se **sobrejectiva** se $Im_f = W$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$Im_g = \mathbb{R}$,

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \to W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, 0, x) \end{array}$$

$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y'$e $x = x'$ e então $(x, y) = (x', y')$ h é injectiva

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se bijectiva.

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Teorema

Se $f : V \to W$ é uma aplicação linear, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é injectiva,

(ii) $Nuc_f = \{0\}$.

Demonstração:

$(i) \to (ii)$

Suponha-se que f é injectiva. Então $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, ou de modo equivalente $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Seja $x \in Nuc_f$. Então $f(x) = 0_w = f(0_v)$. E, uma vez que f é injectiva, $x = 0_v$, tendo-se $Nuc_f = \{0\}$.

$(ii) \to (i)$

Seja $Nuc_f = \{0\}$ e $f(x) = f(y)$.

Então $f(x-y) = f\big((x) + (-y)\big) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = 0_w$, logo $x - y \in Nuc_f$, e uma vez que $Nuc_f = \{0\}$ tem-se $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, donde f é injectiva.

Teorema

Se $f : V \to W$ é uma aplicação linear, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é injectiva,

(ii) $Nuc_f = \{0\}$.

Demonstração:

$(i) \to (ii)$

Suponha-se que f é injectiva. Então $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, ou de modo equivalente $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Seja $x \in Nuc_f$. Então $f(x) = 0_w = f(0_v)$. E, uma vez que f é injectiva, $x = 0_v$, tendo-se $Nuc_f = \{0\}$.

$(ii) \to (i)$

Seja $Nuc_f = \{0\}$ e $f(x) = f(y)$.

Então $f(x-y) = f\big((x) + (-y)\big) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = 0_w$, logo $x - y \in Nuc_f$, e uma vez que $Nuc_f = \{0\}$ tem-se $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, donde f é injectiva.

Teorema

Se $f : V \to W$ é uma aplicação linear, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é injectiva,

(ii) $Nuc_f = \{0\}$.

Demonstração:

$(i) \to (ii)$

Suponha-se que f é injectiva. Então $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, ou de modo equivalente $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Seja $x \in Nuc_f$. Então $f(x) = 0_w = f(0_v)$. E, uma vez que f é injectiva, $x = 0_v$, tendo-se $Nuc_f = \{0\}$.

$(ii) \to (i)$

Seja $Nuc_f = \{0\}$ e $f(x) = f(y)$.

Então $f(x-y) = f\big((x) + (-y)\big) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = 0_w$, logo $x - y \in Nuc_f$, e uma vez que $Nuc_f = \{0\}$ tem-se $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, donde f é injectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x, 4x-y, 2x+3y-z) \end{array}$$

Determinemos o Nuc_f.

$$Nuc_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2x, 4x-y, 2x+3y-z) = (0,0,0)\}$$

o que equivale a resolver o sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

o qual admite como única solução a solução trivial $(0,0,0)$,

donde $Nuc_f = \{(0,0,0)\}$, e f é injectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x, 4x-y, 2x+3y-z) \end{array}$$

Determinemos o Nuc_f.

$$Nuc_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\right\} =$$
$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2x, 4x-y, 2x+3y-z) = (0,0,0)\right\}$$

o que equivale a resolver o sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

o qual admite como única solução a solução trivial $(0,0,0)$,

donde $Nuc_f = \{(0,0,0)\}$, e f é injectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva e/ou sobrejectiva.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, x+y+2z, 2x+y+3z) \end{array}$$

• Determine-se Im_f.

$(a,b,c) \in Im_f$ se o sistema $\left\{\begin{array}{l} x+z=a \\ x+y+2z=b \\ 2x+y+3z=c \end{array}\right.$ for possível.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right)$$

Donde, concluímos que $(a,b,c) \in Im_f$ se e só $c = a+b$

$Im_f = \{(a,b,a+b), a,b \in \mathbb{R}\}$, $Im_f \neq \mathbb{R}^3$), e logo f não é sobrejectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva e/ou sobrejectiva.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, x+y+2z, 2x+y+3z) \end{array}$$

• Determine-se Im_f.

$(a,b,c) \in Im_f$ se o sistema $\begin{cases} x+z=a \\ x+y+2z=b \\ 2x+y+3z=c \end{cases}$ for possível.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right)$$

Donde, concluímos que $(a,b,c) \in Im_f$ se e só $c = a+b$

$Im_f = \{(a,b,a+b), a,b \in \mathbb{R}\}$, $Im_f \neq \mathbb{R}^3$), e logo f não é sobrejectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva e/ou sobrejectiva.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, x+y+2z, 2x+y+3z) \end{array}$$

• Determine-se Im_f.

$(a,b,c) \in Im_f$ se o sistema $\begin{cases} x+z=a \\ x+y+2z=b \\ 2x+y+3z=c \end{cases}$ for possível.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right)$$

Donde, concluímos que $(a,b,c) \in Im_f$ se e só $c = a+b$

$Im_f = \{(a,b,a+b), a,b \in \mathbb{R}\}$, $Im_f \neq \mathbb{R}^3$), e logo f não é sobrejectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva e/ou sobrejectiva.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, x+y+2z, 2x+y+3z) \end{array}$$

• Determine-se Im_f.

$(a,b,c) \in Im_f$ se o sistema $\begin{cases} x+z=a \\ x+y+2z=b \\ 2x+y+3z=c \end{cases}$ for possível.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right)$$

Donde, concluímos que $(a,b,c) \in Im_f$ se e só $c = a+b$

$Im_f = \{(a,b,a+b), a,b \in \mathbb{R}\}$, $Im_f \neq \mathbb{R}^3)$, e logo f não é sobrejectiva.

• Determine-se Nuc_f.

$(x, y, z) \in Nuc_f$ se o sistema homogéneo $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

tiver solução única, a solução trivial $(0, 0, 0)$.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde, concluímos que $c(A) = 2$, logo o sistema é indeterminado, não tendo solução única.

Então $Nuc_f \neq \{(0, 0, 0)\}$ e f não é injectiva.

$$Nuc_f = \{(x, y, z) : x = 0 \ \ e \ \ y + z = 0\}$$
$$Nuc_f = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$$

• Determine-se Nuc_f.

$(x, y, z) \in Nuc_f$ se o sistema homogéneo $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

tiver solução única, a solução trivial $(0, 0, 0)$.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde, concluímos que $c(A) = 2$, logo o sistema é indeterminado, não tendo solução única.

Então $Nuc_f \neq \{(0, 0, 0)\}$ e f não é injectiva.

$Nuc_f = \{(x, y, z) : x = 0 \;\; e \;\; y + z = 0\}$

$Nuc_f = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$

• Determine-se Nuc_f.

$(x, y, z) \in Nuc_f$ se o sistema homogéneo $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

tiver solução única, a solução trivial $(0, 0, 0)$.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde, concluímos que $c(A) = 2$, logo o sistema é indeterminado, não tendo solução única.

Então $Nuc_f \neq \{(0, 0, 0)\}$ e f não é injectiva.

$Nuc_f = \{(x, y, z) : x = 0 \;\; e \;\; y + z = 0\}$

$Nuc_f = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$

• Determine-se Nuc_f.

$(x, y, z) \in Nuc_f$ se o sistema homogéneo $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

tiver solução única, a solução trivial $(0, 0, 0)$.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde, concluímos que $c(A) = 2$, logo o sistema é indeterminado, não tendo solução única.

Então $Nuc_f \neq \{(0, 0, 0)\}$ e f não é injectiva.

$$Nuc_f = \{(x, y, z) : x = 0 \;\; e \;\; y + z = 0\}$$
$$Nuc_f = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$$

Teorema

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita.
Se $f : V \to W$ é uma aplicação linear então:

$$dim\ V = dim\ Im_f + dim\ Nuc_f$$

Exemplo

Consideremos o exemplo anterior, em que f é uma aplicação linear que não é injectiva nem sobrejectiva.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, x+y+2z, 2x+y+3z) \end{array}$$

Temos que: $dim\ Im_f = 2$ e $dim\ Nuc_f = 1$, logo

$$dim\ V = 3 = 2 + 1 = dim\ Im_f + dim\ Nuc_f$$

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ um conjunto de geradores de V, e $f : V \to W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de Im_f

Consideremos um vector qualquer $u \in Im_f$ então

$$\text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = u$$

Se $v \in V$ então existem escalares $a_1, \dots, a_n$ tais que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ são geradores de Im_f.

Ou seja, **o espaço imagem Im_f é o espaço colunas da matriz A, da aplicação linear**.

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ um conjunto de geradores de V, e $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de Im_f

Consideremos um vector qualquer $u \in Im_f$ então

$$\text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = u$$

Se $v \in V$ então existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ são geradores de Im_f.

Ou seja, **o espaço imagem Im_f é o espaço colunas da matriz A, da aplicação linear**.

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ um conjunto de geradores de V, e $f : V \to W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de Im_f

Consideremos um vector qualquer $u \in Im_f$ então

$$\text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = u$$

Se $v \in V$ então existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ são geradores de Im_f.

Ou seja, **o espaço imagem Im_f é o espaço colunas da matriz A, da aplicação linear**.

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ um conjunto de geradores de V, e $f : V \to W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de Im_f

Consideremos um vector qualquer $u \in Im_f$ então

$$\text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = u$$

Se $v \in V$ então existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ são geradores de Im_f.

Ou seja, **o espaço imagem Im_f é o espaço colunas da matriz A, da aplicação linear**.

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ um conjunto de geradores de V, e $f : V \to W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de Im_f

Consideremos um vector qualquer $u \in Im_f$ então

$$\text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = u$$

Se $v \in V$ então existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ são geradores de Im_f.

Ou seja, **o espaço imagem** Im_f **é o espaço colunas da matriz** A**, da aplicação linear**.

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ um conjunto de geradores de V, e $f : V \to W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de Im_f

Consideremos um vector qualquer $u \in Im_f$ então

$$\text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = u$$

Se $v \in V$ então existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ são geradores de Im_f.

Ou seja, **o espaço imagem Im_f é o espaço colunas da matriz A, da aplicação linear**.

Exemplo

Consideremos uma aplicação linear f definida entre dois e.v., V^3 e W^4, $f : V^3 \to W^4$, sendo A a matriz desta aplicação linear f,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

Sendo (e_1, e_2, e_3), a base canónica de V^3, tem-se que Ae_1, Ae_2 e Ae_3 geram Im_f.

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}}_{1^{\text{a}} \text{ col. } A}, \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}}_{2^{\text{a}} \text{ col. } A}$$

$$Ae_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

o espaço imagem Im_f é o espaço colunas da matriz A, da aplicação

Exemplo

Consideremos uma aplicação linear f definida entre dois e.v., V^3 e W^4, $f : V^3 \to W^4$, sendo A a matriz desta aplicação linear f,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

Sendo (e_1, e_2, e_3), a base canónica de V^3, tem-se que Ae_1, Ae_2 e Ae_3 geram Im_f.

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}}_{1^{\text{a}} \text{ col. } A}, \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}}_{2^{\text{a}} \text{ col. } A}$$

$$Ae_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

o espaço imagem Im_f é o espaço colunas da matriz A, da aplicação

Definição

Chama-se **isomorfismo** a uma **aplicação linear** $f : V \to W$ **bijectiva**.
Os **espaços** V e W dizem-se **isomorfos**, e escreve-se $V \simeq W$

Exemplo

Seja $A = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.
Seja $f : A \to B$ tal que $f(x, y, 0) = (x, 0, y)$

f é um isomorfismo

• vejamos que f é linear

(i) $f((x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0)) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)) = (x_1 + x_2, 0, y_1 + y_2) = (x_1, 0, y_1) + (x_2, 0, y_2) = f((x_1, 0, y_1)) + f((x_2, 0, y_2))$

(ii) $f(\alpha(x_1, y_1, 0)) = f((\alpha x_1, \alpha y_1, 0)) = (\alpha x_1, 0, \alpha y_1) = \alpha(x_1, 0, y_1) = \alpha f(x_1, y_1, 0)$

• verificamos que f é bijectiva (injectiva e sobrejectiva)

Logo f é um isomorfismo e os espaços vectoriais A e B são isomorfos ($A \simeq B$)).

Definição

Chama-se **isomorfismo** a uma **aplicação linear** $f : V \to W$ **bijectiva**.
Os **espaços** V e W dizem-se **isomorfos**, e escreve-se $V \simeq W$

Exemplo

Seja $A = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.
Seja $f : A \to B$ tal que $f(x, y, 0) = (x, 0, y)$

f é um isomorfismo

• vejamos que f é linear

(i) $f((x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0)) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)) = (x_1 + x_2, 0, y_1 + y_2) = (x_1, 0, y_1) + (x_2, 0, y_2) = f((x_1, 0, y_1)) + f((x_2, 0, y_2))$

(ii) $f(\alpha(x_1, y_1, 0)) = f((\alpha x_1, \alpha y_1, 0)) = (\alpha x_1, 0, \alpha y_1) = \alpha(x_1, 0, y_1) = \alpha f(x_1, y_1, 0)$

• verificamos que f é bijectiva (injectiva e sobrejectiva)

Logo f é um isomorfismo e os espaços vectoriais A e B são isomorfos ($A \simeq B$)).

Definição

Chama-se **isomorfismo** a uma **aplicação linear** $f : V \to W$ **bijectiva**.
Os **espaços** V e W dizem-se **isomorfos**, e escreve-se $V \simeq W$

Exemplo

Seja $A = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.
Seja $f : A \to B$ tal que $f(x, y, 0) = (x, 0, y)$

f é um isomorfismo

• vejamos que f é linear

(i) $f((x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0)) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)) = (x_1 + x_2, 0, y_1 + y_2) = (x_1, 0, y_1) + (x_2, 0, y_2) = f((x_1, 0, y_1)) + f((x_2, 0, y_2))$

(ii) $f(\alpha(x_1, y_1, 0)) = f((\alpha x_1, \alpha y_1, 0)) = (\alpha x_1, 0, \alpha y_1) = \alpha(x_1, 0, y_1) = \alpha f(x_1, y_1, 0)$

• verificamos que f é bijectiva (injectiva e sobrejectiva)

Logo f é um isomorfismo e os espaços vectoriais A e B são isomorfos ($A \simeq B$)).

Definição

Chama-se **isomorfismo** a uma **aplicação linear** $f : V \to W$ **bijectiva**.
Os **espaços** V e W dizem-se **isomorfos**, e escreve-se $V \simeq W$

Exemplo

Seja $A = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.
Seja $f : A \to B$ tal que $f(x, y, 0) = (x, 0, y)$

f é um isomorfismo

• vejamos que f é linear

(i) $f((x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0)) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)) = (x_1 + x_2, 0, y_1 + y_2) = (x_1, 0, y_1) + (x_2, 0, y_2) = f((x_1, 0, y_1)) + f((x_2, 0, y_2))$

(ii) $f(\alpha(x_1, y_1, 0)) = f((\alpha x_1, \alpha y_1, 0)) = (\alpha x_1, 0, \alpha y_1) = \alpha(x_1, 0, y_1) = \alpha f(x_1, y_1, 0)$

• verificamos que f é bijectiva (injectiva e sobrejectiva)

Logo f é um isomorfismo e os espaços vectoriais A e B são isomorfos ($A \simeq B$)).