ÁLGEBRA VECTORIAL

14. Sejam os vectores $\vec{u} = (1, -2, 3)$ e $\vec{v} = (3, 1, 2)$. Em cada alínea seguinte, obtenha os vectores unitários e paralelos ao vector dado.

a) $\vec{u} + \vec{v}$.

b) $\vec{u} - \vec{v}$.

c) $\vec{u} + 2\vec{v}$.

d) $2\vec{u} - \vec{v}$.

17. Determine os vectores com norma igual a 4 e paralelos a $(1, \sqrt{3}, -2)$.

21. Considere o triângulo $[PQR]$, em que $P = (-1, 2, -2)$ e $Q = (-3, 0, -4)$.

a) Calcule o ponto R do eixo dos *zz*, de modo que o triângulo seja isósceles de base $[PQ]$.

b) Determine o seu perímetro.

37. Considere o conjunto de vectores do espaço linear $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{A} = \left\{(1, 0, \sqrt{2}), (1, \sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 1, 1)\right\}$.

a) Verifique se o conjunto A é linearmente independente.

b) Obtenha o subespaço, $L(\mathrm{A})$, gerado por A e indique a sua dimensão.

c) Identifique uma base, U, para o subespaço $L(\mathrm{A})$.

d) Obtenha uma base, S, para o espaço linear $\mathbb{R}^3$ que seja uma extensão de U.

38. Seja o conjunto de vectores do espaço linear $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{T} = \left\{(2, -1, 6), (0, 2, -1)\right\}$; considere os vectores $\vec{u} = (-4, -4, -9)$ e $\vec{v} = (10, 7, 25)$.

a) Mostre, recorrendo à noção de combinação linear, que apenas um dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pertence ao subespaço gerado por T.

b) Calcule o subespaço gerado por T e confirme o resultado encontrado na alínea anterior.

c) Justifique que T é um conjunto linearmente independente.

d) Obtenha uma base para o espaço linear $\mathbb{R}^3$ que seja uma extensão de T.

43. Obtenha os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, de forma que o conjunto de vectores $\{(\alpha,0,1),(0,\alpha,1),(1,0,\alpha)\}$ seja uma base para o espaço linear $\mathbb{R}^3$.

44. Determine os valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$, de forma que o conjunto de vectores $\{(0,b,-c),(c,-a,0),(b,0,a)\}$ seja uma base para o espaço linear $\mathbb{R}^3$.

45. Considere o conjunto de vectores do espaço linear $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{P}=\{(1,1,2),(2,-1,1),(1,-1,0)\}$.

a) Verifique se o vector $\vec{u}=(2,4,-6)$ é combinação linear dos vectores de P.

b) Verifique se o vector $\vec{v}=(3,-5,-2)$ é combinação linear dos vectores de P.

c) Mostre que é possível escrever de duas formas distintas o vector $\vec{s}=(-2,5,3)$ como combinação linear dos vectores de P.

d) Obtenha os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais o vector $\vec{t}=(-4,\alpha,3)$ é combinação linear dos vectores de P.

47. Será que o conjunto de vectores $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}=\{(1,-1,3),(-2,4,5),(3,-2,-1)\}$ constitui uma base para o espaço linear $\mathbb{R}^3$? Justifique a resposta.

48. Sejam os vectores do espaço linear $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}=\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{w}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

a) Mostre que o conjunto $\mathrm{T}=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é linearmente independente.

b) Prove que T é uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$.

c) Exprima os vectores $\vec{j}$ e $\vec{k}$ como combinação linear dos vectores do conjunto T.

d) Obtenha as coordenadas do vector $\vec{s}=2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$ em relação à base ordenada T.

49. Considere que $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ é um conjunto de vectores linearmente independentes do espaço linear $\mathbb{R}^3$. Verifique se algum dos seguintes conjuntos é uma base para $\mathbb{R}^3$.

a) $\mathrm{P}=\{2\vec{u}_1-\vec{u}_2,\vec{u}_1+\vec{u}_2,-\vec{u}_1+5\vec{u}_2\}$.

b) $\mathrm{Q}=\{2\vec{u}_1,3\vec{u}_2,\vec{u}_1+\vec{u}_2-\vec{u}_3\}$.

c) $\mathrm{R}=\{\vec{u}_1-\vec{u}_2,\vec{u}_1+2\vec{u}_2+\vec{u}_3,\vec{u}_2+\vec{u}_3\}$.

d) $\mathrm{S}=\{\vec{u}_1+2\vec{u}_3,\vec{u}_1+\vec{u}_2,2\vec{u}_1-\vec{u}_2+6\vec{u}_3\}$.

52. Sejam $\vec{s}_1=(1,1,-1,0)$, $\vec{s}_2=(0,-1,1,1)$ e $\vec{s}_3=(1,1,0,0)$ três vectores do espaço linear $\mathbb{R}^4$.

a) Verifique se $\mathrm{S}_1=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\vec{s}_3\}$ é conjunto linearmente independente.

b) Determine $L(\mathrm{S}_1)$, o subespaço gerado pelo conjunto S_1.

c) Obtenha um vector não nulo $\vec{v}$, de forma que $\mathrm{V}=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\vec{s}_3,\vec{v}\}$ seja um conjunto linearmente dependente.

d) Seleccione um vector $\vec{s}_4$, de modo que $\mathrm{S}=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\vec{s}_3,\vec{s}_4\}$ seja um conjunto linearmente independente.

e) Mostre que o conjunto S é uma base para o espaço linear $\mathbb{R}^4$.

f) Obtenha as coordenadas do vector $\vec{w}=(1,-1,-2,5)\in\mathbb{R}^4$ em relação à base ordenada S.

53. Seja o conjunto de vectores $\mathrm{S}=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \;:\; x_1=x_2+2x_3 \;\wedge\; x_4=2x_2-x_3\right\}$ do espaço linear $\mathbb{R}^4$.

a) Mostre que S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

b) Identifique uma base, U, para S e indique a dimensão do subespaço.

c) Obtenha uma base ordenada V para o espaço linear $\mathbb{R}^4$ que seja uma extensão de U.

d) Exprima o vector $(1,-1,2,-3)\in\mathbb{R}^4$ como combinação linear dos elementos da base ordenada V.

55. Sejam os vectores do espaço linear $\mathbb{R}^4$, $\vec{u}_1 = (1,2,0,0)$, $\vec{u}_2 = (1,-2,1,-1)$ e $\vec{u}_3 = (2,1,-1,1)$.

a) Prove que $\mathrm{U}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é conjunto linearmente independente.

b) Qual a dimensão do subespaço gerado pelo conjunto U_1? Justifique a resposta.

c) Será que $L(\vec{r}, \vec{s}) = L((1,1,1,-1),(0,1,-1,1)) = L(\mathrm{U}_1)$? Justifique a resposta.

d) Obtenha um conjunto U, que contenha U_1 e que seja uma base para o espaço $\mathbb{R}^4$.

e) Obtenha as coordenadas do vector $\vec{w} = (2,0,4,1) \in \mathbb{R}^4$ em relação à base ordenada U.

63. Sejam os vectores do espaço linear $\mathbb{R}^4$, $\vec{u} = (1,\varepsilon,0,0)$, $\vec{v} = (\varepsilon,0,1,0)$, $\vec{w} = (0,1,\varepsilon,0)$ e $\vec{z} = (0,1,0,\varepsilon)$.

a) Obtenha os valores de $\varepsilon \in \mathbb{R}$, tais que o conjunto $\mathrm{T} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ seja uma base para o espaço $\mathbb{R}^4$.

b) Considerando $\varepsilon = 1$, calcule as coordenadas dos vectores $\vec{s} = (1,-1,0,1)$ e $\vec{t} = (2,3,-1,0)$ em relação à base ordenada T.