Prova sem consulta. Duração: 1h30m (10m de tolerância). 2ª Prova de Reavaliação

---

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta. Em cada pergunta da prova é apresentada a cotação prevista.**

GRUPO I

1. **[5,5]** Sejam as transformações lineares $S \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ e $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, definidas por

$$S(x,y) = (x+2y, -x-y, -3x-4y) \quad \text{e} \quad T(x,y,z) = (x+y-z, -x+z)$$

em relação às bases canónicas, E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Obtenha o núcleo e o contradomínio de S. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Classifique as funções dadas quanto à sua injetividade e sobrejetividade. Determine a função inversa para os casos em que tal é possível.

2. **[2,0]** Sejam A e $C = (A - \alpha I)^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, matrizes quadradas de ordem n, sendo I a matriz identidade. Seja X um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ.

a) Mostre que X é um vetor próprio de C associado ao valor próprio $(\lambda - \alpha)^2$.

b) Para que valores de λ a matriz C é não singular? Justifique.

GRUPO II

3. **[3,8]** Considere as transformações lineares definidas na questão **1.** e a base $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{(1,2),(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Usando o cálculo matricial, obtenha $m(S)_{V,E_3}$, representação matricial de S em relação às bases V (domínio) e E_3 (conjunto de chegada).

b) Usando preferencialmente a matriz obtida na alínea anterior, obtenha a representação matricial da composição possível de S com T em relação à base V (domínio e conjunto de chegada).

....*(continua no verso)*

GRUPO III

4. [3,2] Seja a matriz real:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & -1 & k+1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & k \\ k+1 & 1 & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

a) Obtenha, indicando todas as operações efetuadas, os valores do parâmetro k para os quais a matriz $\boldsymbol{A}$ é não singular.

b) Sejam $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ matrizes quadradas de ordem 4, tais que $|\boldsymbol{B}|=4$ e $\boldsymbol{C}=2(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})\boldsymbol{B}^{-2}$. Relacione o $|\boldsymbol{C}|$ com o $|\boldsymbol{D}|$.

GRUPO IV

5. [5,5] Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$m(T)=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Seja $\mathrm{U}=\{(\alpha,0,\delta),(1,2,1),(\delta,1,-\delta)\}$ um conjunto de vetores próprios de $m(T)$ e $\mathrm{B}=\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$. Determine:

a) Os valores próprios e os respetivos vetores próprios e espaços próprios; indique, para cada um dos espaços próprios, uma base e a dimensão.

b) Os valores de $\alpha,\delta \in \mathbb{R}$, de modo que U seja uma base de vetores próprios para $\mathbb{R}^3$. Obtenha as matrizes $m(T)_{\mathrm{U,U}}$ e $m(T)_{\mathrm{B,B}}$ e verifique se estas matrizes são semelhantes, apresentando as expressões matriciais que as relacionam. Justifique devidamente.

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEM / MIEGI Data / 02/21

Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano 1º Semestre 1º

Nome José Augusto Trigo Barbosa

Espaço reservado para o avaliador

Descritores de desempenho considerados como critérios de Correção da 2ª Prova de Reavaliação (19/02/2021)

GRUPO I

1)

a)

i) Determinação das dimensões de $S(\mathbb{R}^2)$ e $N(S)$:

$$r[m(S)] = r\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$\dim S(\mathbb{R}^2) = 2$ e $\dim N(S) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim S(\mathbb{R}^2) = 0$

ii) Determinação de $N(S)$

Uma vez que $\dim N(S) = 0 \Rightarrow N(S) = \{(0,0)\}$ e

Base $N(S) = \{\ \}$

iii) Determinação de $S(\mathbb{R}^2)$

Uma vez que $\dim S(\mathbb{R}^2) = 2 < \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow S(\mathbb{R}^2) \in \mathbb{R}^3$

$S(\mathbb{R}^2) = \{\vec{y} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \vec{y} = S(\vec{x}),\ \vec{x} \in \mathbb{R}^2\}$

$$\begin{cases} x+2y = a \\ -x-y = b \\ -3x-4y = c \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ -1 & -1 & b \\ -3 & -4 & c \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 2 & 3a+c \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & a+c-2b \end{array}\right]$$

O sistema é possível e determinado, se e só se

$$a+c-2b=0 \Leftrightarrow c=2b-a$$

$S(\mathbb{R}^2)=\{\vec{y}=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : c=2b-a\}=\{\vec{y}=(a,b,2b-a)\in\mathbb{R}^3\}=$

$=\{\vec{y}=a(1,0,-1)+b(0,1,2)\in\mathbb{R}^3\}$

Base $S(\mathbb{R}^2)=\{(1,0,-1),(0,1,2)\}$

b)

i) Classificação da função S:

Sabendo que $N(S)=\{(0,0)\}$, conclui-se que S é injectiva.

Uma vez que $S(\mathbb{R}^2)\subset\mathbb{R}^3$, conclui-se que S não é sobrejectiva.

ii) Classificação da função T:

$$r[M(T)]=r\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=2$$

$\dim T(\mathbb{R}^3)=2=\dim\mathbb{R}^2 \Rightarrow T(\mathbb{R}^3)=\mathbb{R}^2$ e T é sobrejectiva

Uma vez que $\dim N(T)=\dim\mathbb{R}^3-\dim T(\mathbb{R}^3)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow N(T)\neq\{(0,0,0)\}$ e T não é injectiva

iii) Determinação da função inversa de S:

Recorrendo ao sistema de equações resolvido na alínea a) obtém-se

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & a\\ 0 & 1 & a+b\\ 0 & 0 & a+c-2b\end{array}\right]$$

Se $c=2b-a$ o sistema é possível e determinado, tendo como solução

$$\begin{cases}x=-a-2b\\ y=a+b\end{cases}$$

A função inversa de S é:

Wij

$$S^{-1}: S(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(a,b,2b-a) \longrightarrow (-a-2b,\ a+b)$$

2)

a) $X \neq 0$ é vector próprio de A, isto é,

$$AX = \lambda X$$

Pretende-se mostrar que X é vector próprio de C associado ao valor próprio $(\lambda-\alpha)^2$, isto é,

$$CX = (\lambda-\alpha)^2 X$$

$$CX = [A-\alpha I]^2 X = [A-\alpha I][A-\alpha I]X =$$
$$= [AA + \alpha^2 I - 2\alpha A]X =$$
$$= A(AX) + \alpha^2 X - 2\alpha(AX) = A(\lambda X) + \alpha^2 X - 2\alpha(\lambda X) =$$
$$= \lambda(AX) + \alpha^2 X - 2\alpha\lambda X = \lambda^2 X + \alpha^2 X - 2\alpha\lambda X =$$
$$= (\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2)X = (\lambda-\alpha)^2 X$$

b) A matriz C é não singular, se e só se $|C| \neq 0$, ou seja, se todos os seus valores próprios forem diferentes de zero. Convém notar que

$$|C| = \prod \text{valores próprios}$$

Assim, C é não singular, se e só se $(\lambda-\alpha)^2 \neq 0$, ou seja,

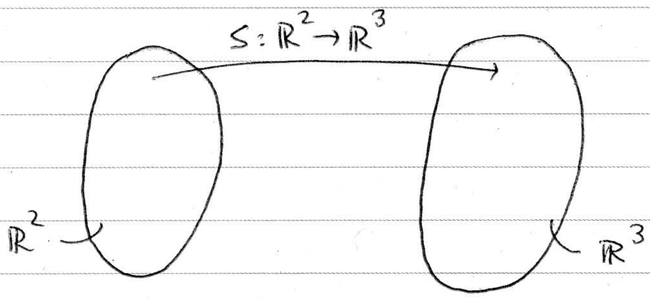
$$\lambda \neq \alpha$$

Wy

GRUPO II

3)

a)



$$\begin{tikzcd} \boxed{E_2} \arrow[rr, "m(S)"] & & \boxed{E_3} \\ \boxed{V} \arrow[u, bend left, "M_{V\to E_2}"] \arrow[rr, "m(S)_{V,E_3}"] & & \arrow[u] \end{tikzcd}$$

i) Definição da matriz $m(S)_{V,E_3}$:

$$m(S)_{V,E_3} = m(S)\, M_{V\to E_2}$$

ii) Determinação da matriz de mudança de base:

Sabendo que $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$ e $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
então

$$M_{V\to E_2} = E_2^{-1} V = I_2 V = V$$

iii) Determinação da matriz $m(S)_{V,E_3}$:

$$m(S)_{V,E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \\ -11 & -7 \end{bmatrix}_{V,E_3}$$

b)

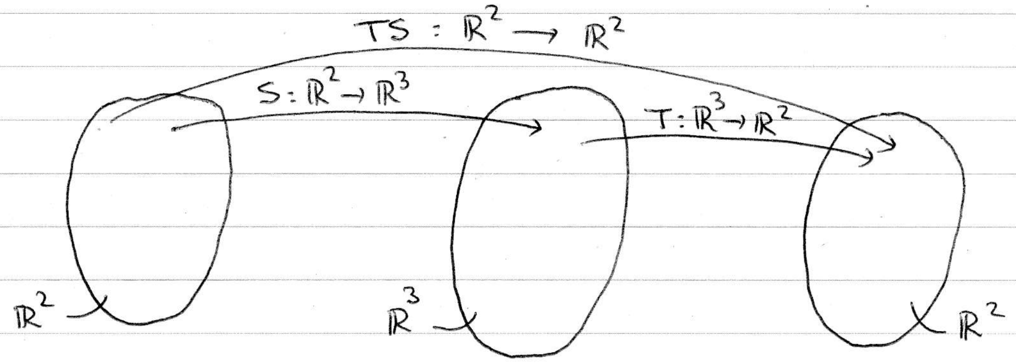
i) Identificação da função composta

Neste caso, deve-se considerar a função composta

$$TS : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

já que V é uma base para $\mathbb{R}^2$.

ii) Definição da matriz $m(TS)_{V,V}$:



$$\begin{tikzcd}
E_2 & & E_3 \arrow[rr, "m(T)"] \arrow[drr, "m(T)_{E_3,V}"] & & E_2 \\
V \arrow[urr, "m(S)_{V,E_3}"] \arrow[rrrr, bend right, "m(TS)_{V,V}"'] & & & & V \arrow[u, bend right, "M_{V\to E_2}"']
\end{tikzcd}$$

$$m(TS)_{V,V} = m(T)_{E_3,V}\; m(S)_{V,E_3}$$

iii) Determinação da matriz $m(T)_{E_3,V}$:

$$m(T)_{E_3,V} = M^{-1}_{V\to E_2}\; m(T)$$

$$M^{-1}_{V\to E_2} = V^{-1} = \frac{1}{|V|}\,[\mathrm{cof}\,V]^T = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$m(T)_{E_3,V} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}_{E_3,V}$$

iv) Determinação da matriz $m(TS)_{V,V}$:

$$m(TS)_{V,V} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}_{E_3,V}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \\ -11 & -7 \end{bmatrix}_{V,E_3} =$$

$$= \begin{bmatrix} -29 & -18 \\ 42 & 26 \end{bmatrix}_{V,V}$$

GRUPO III

4) a)

i) Cálculo do determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & -1 & k+1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & k \\ k+1 & 1 & 0 & 2k \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow L_2+L_1 \\ \\ \leftarrow L_4-L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 2 & 0 & k & k+2 \\ 1 & 0 & 1 & k \\ k & 0 & 1 & k \end{vmatrix} =$$

$$= 1\,(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & k & k+2 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_3-L_2 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 2 & k & k+2 \\ 1 & 1 & k \\ k-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(k-1)(-1)^4 \begin{vmatrix} k & k+2 \\ 1 & k \end{vmatrix} = (1-k)\left[k^2-k-2\right] =$$

$$= (1-k)(k-2)(k+1)$$

ii) Condição para que C seja não singular

A matriz C é não singular, se e só se $|C| \neq 0$, ou seja, se e só se

$$k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$$

b)

Sabendo que $|B^T| = |B|$, $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|}$,

$|B^{-2}| = |B^{-1}B^{-1}| = |B^{-1}||B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|^2}$, obtém-se

$$|C| = |2\,(B^T D)\,B^{-2}| = 2^4\,|(B^T D)\,B^{-2}| = 2^4\,|B^T D|\,|B^{-2}| =$$

$$= \frac{2^4}{4^2}\,|B^T|\,|D| = \frac{2^4}{4}\,|D| = 4\,|D|$$

GRUPO IV

5)

a)

i) Cálculo dos valores próprios:

$\vec{x} = (1,2,1)$ é vector próprio de $m(T)$, pelo que

$$[\lambda I - m(T)] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda-1 & -3 & -4 \\ -2 & \lambda-6 & -8 \\ -1 & -3 & \lambda-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda-1-6-4=0 \\ -2+2\lambda-12-8=0 \\ -1-6+\lambda-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=11 \\ \lambda=11 \\ \lambda=11 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 11$ é valor próprio de $m(T)$.

Sabendo que $tr[m(T)] = 11$ e

$$|m(T)| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(as linhas da matriz são colineares)}$$

então

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Os valores próprio são $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

ii) Cálculo dos vectores próprios e espaços próprios para $\lambda_1 = 11$.

Uma vez que $ma(11) = 1$, então $\dim E(11) = 1$, pelo que $\text{Base } E(11) = \{(1,2,1)\}$, sendo o espaço próprio

$$E(11) = \{\vec{x} = k(1,2,1) \in \mathbb{R}^3\}$$

Wij

Os vectores próprios são:

$$\vec{x}(11) = \{ \vec{x} = k(1,2,1) \in \mathbb{R}^3, \ k \neq 0 \}$$

iii) Cálculo dos vectores próprios e espaços próprios para $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$[0I - m(T)] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & -4 & 0 \\ -2 & -6 & -8 & 0 \\ -1 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema é possível e duplamente indeterminado, tendo a solução
$$x = -3y - 4z$$

O espaço próprio é

$$E(0) = \{ \vec{x} = (-3y-4z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \} = \{ \vec{x} = y(-3,1,0) + z(-4,0,1) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$\text{Base } E(0) = \{ (-3,1,0), (-4,0,1) \} \Rightarrow \dim E(0) = 2$$

Os vectores próprios são:

$$\vec{x}(0) = \{ \vec{x} = (-3y-4z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0 \vee z \neq 0 \}$$

b) i) Cálculo dos valores de α e δ:

Sabe-se que $(1,2,1) \in E(11)$, pelo que

$(\alpha, 0, \delta) \in E(0)$ e $(\delta, 1, -\delta) \in E(0)$, já que $\dim E(0) = 2$.

Então

$$\begin{cases} (\alpha, 0, \delta) \in E(0) \\ (\delta, 1, -\delta) \in E(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4\delta \\ \delta = -3 + 4\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

A base $\mathcal{U}$ é

$$\mathcal{U} = \{ (-4,0,1), (1,2,1), (1,1,-1) \}$$

ii) Determinação da matriz $m(T)_{U,U}$:

Uma vez que

$$T(-4,0,1) = 0\,(-4,0,1) = (0,0,0)_U$$
$$T(1,2,1) = 11\,(1,2,1) = (0,11,0)_U$$
$$T(1,1,-1) = 0\,(1,1,-1) = (0,0,0)_U$$

a matriz $m(T)_{U,U}$ é

$$m(T)_{U,U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{U,U}$$

iii) Determinação da matriz $m(T)_{B,B}$:

Uma vez que

$$T(0,0,1) = T(\vec{k}) = (4,8,4) = (4,8,4)_B$$
$$T(0,1,0) = T(\vec{j}) = (3,6,3) = (3,6,3)_B$$
$$T(1,0,0) = T(\vec{i}) = (1,2,1) = (1,2,1)_B$$

a matriz $m(T)_{B,B}$ é

$$m(T)_{B,B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{B,B}$$

iv) Mostrar que $m(T)_{U,U}$ e $m(T)_{B,B}$ são matrizes semelhantes

As matrizes $m(T)_{U,U}$ e $m(T)_{B,B}$ são matrizes semelhantes, já que existe uma matriz P, de ordem 3, não singular, tal que

$$m(T)_{U,U} = P^{-1}\, m(T)_{B,B}\, P$$

Wiz

Neste caso, a matriz P é a matriz de mudança de base de U para B, $M_{U \to B}$, sendo definida por

$$M_{U \to B} = B^{-1} U$$

em que

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa de B é

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \left[\operatorname{cof} B \right]^T = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$M_{U \to B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$