2. Determinantes

Twinkle, twinkle, little bat!
How I wonder what you're at!
Up above the world you fly,
Like a teatray in the sky.
Twinkle, twinkle little bat!

How I wonder what you're at!

Lewis Carroll's, Alice's Adventures in Wonderland.

Definição

Seja A uma matriz de ordem n, o determinante de A representa-se por $det(A)$ ou $|A|$, e é um número definido por:

- se $n = 1$, isto é $A = (a_{11})$ então $det(A) = a_{11}$,
- se $n > 1$, então

$$det(A) = a_{11}det(M_{11}) - a_{12}det(M_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}det(M_{1n})$$

onde M_{1j} denota a matriz de ordem $(n-1)$, obtida de A, retirando-lhe a linha 1 e a coluna j.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det\ A = |A| = 2 \times 3 - 1 \times (-4) = 10$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}, |B| = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (4 \times 9 - 0) - 3(-2 \times 9 - 0 \times 3) + 2(-2 \times 0 - 4 \times 3)$$
$$= 36 + 54 - 24 = 66$$

Definição

Seja A uma matriz de ordem n.

Ao $\det(M_{ij})$ chama-se menor principal de A.

A $(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ chama-se complemento algébrico do elemento a_{ij} de A.

Exemplo Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ o complemento algébrico de 9, que está na 3ª linha e 3ª coluna é

$$(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 10$$

Note-se que o determinante de uma matriz é calculado por um desenvolvimento que envolve elementos da 1ª linha e os seus complementos algébricos.
Prova-se que o valor do determinante de uma matriz pode ser obtido considerando o **desenvolvimento segundo qualquer linha ou coluna da matriz.**

Teorema de Laplace

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n. Então

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(k+j)} a_{kj} \det(M_{kj}), \qquad (1 \leq k \leq n)$$

ou

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i+l)} a_{il} \det(M_{il}), \qquad (1 \leq l \leq n)$$

Exemplo Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ tem-se, fazendo o desenvolvimento segundo a 1ª coluna:

$$det(A) = +1 \times det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 0 + 0 \text{-} 1 \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \cdots = 18$$

Propriedades

• Se $D = (d_{ij})$ é uma matriz diagonal, de ordem n, então
$\det D = d_{11} \times \cdots \times d_{nn}$.
Consequentemente $\det(I_n) = 1$.
• Se $A = (A_{ij})$ é uma matriz triangular, de ordem n, então
$\det A = a_{11} \times \cdots \times a_{nn}$.

Teorema

Seja $A = (A_{ij})$ uma matriz de ordem n. Então $\det(A^T) = det(A)$.

Teorema

Seja $A = (A_{ij})$ uma matriz de ordem n. Se todos os elementos de uma linha e/ou coluna são iguais a zero então $\det(A) = 0$.

Teorema

Seja B resulta de A por multiplicação dos elementos de uma linha ou coluna de A por um n$\underline{0}$ α, então $\det(B) = \alpha \det(A)$.

Teorema

Se A é uma matriz de ordem n, então $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Teorema

Sejam A e B matrizes de ordem n.
Então

$$\det(AB) = \det(A).\det(B)$$

Teorema

Sejam A é uma matriz de ordem n. Se A é invertível então $\det(A) \neq 0$, tendo-se

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Demonstração

Como $AA^{-1} = I_n$, e usando o teorema anterior, tem-se que:

$$\begin{array}{rcl} det(AA^{-1}) = detI_n & \Leftrightarrow & det(A)det(A^{-1}) = 1 \\ & \Leftrightarrow & det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \end{array}$$

Definição

Seja A uma matriz de ordem n. Seja c_{ij} o complemento algébrico do elemento a_{ij} de A. A transposta da matriz quadrada, de ordem n, cujo elemento na posição (i, j) é c_{ij} chama-se matriz adjunta de A e representa-se por $Adj(A)$, isto é:

$$Adj(A) = (c_{ij})^T$$

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ e calculemos a matriz adjunta de A

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

Teorema

Seja A uma matriz de ordem n.

(i) A matriz A é invertível se e só se $|A| \neq 0$.

(ii) Se A é invertível tem-se

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, tendo-se $|A| = 9$, calculemos a matriz inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 & -1/9 \\ 1/9 & 0 & 2/9 \\ -1/9 & -1 & -2/9 \end{pmatrix}$$