Curso: MIEM / MIEGI — Data: / 10/ 20

Disciplina: Álgebra Linear e Geometria Analítica — Ano: 1º — Semestre: 1º

Nome: José Augusto Trigo Barbosa

Espaço reservado para o avaliador

Notas de apoio ao Capítulo 2 do manual:
"Noções sobre Matrizes e Sistemas de Equações Lineares".

- Matriz - linha do tipo $1 \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

- Matriz - coluna do tipo $m \times 1$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

pág. 3

Multiplicação de matrizes

$A = (a_{ij})$ do tipo $m \times p$

$B = (b_{ij})$ do tipo $p \times n$ $\Rightarrow$ $AB = C = (c_{ij})$ do tipo $m \times n$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} =$$

$$= (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{pj}) =$$

pág. 12/13

$$= A_{(i)} \cdot B^{(j)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m \ ; \ j = 1, 2, \ldots n)$$

$A_{(i)}$: vector cujas coordenadas são os elementos situados na linha i da matriz A ;

$B^{(j)}$: vector cujas coordenadas são os elementos situados na coluna j da matriz B.

pág. 12/13

Exemplo 8 [2.9;10]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tipo } 2\times 3 \qquad C = AB \text{ tipo } 2\times 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tipo } 3\times 2 \qquad D = BA \text{ tipo } 3\times 3$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ & \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} & & \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pág. 14

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} & \\ 1 & 1 \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 3 & 1 & 1 \\ & & \end{bmatrix} \qquad D = BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} & \\ & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pág. 14

Teorema [2.4]

$A = (a_{ij})$ do tipo $m \times n$ $\qquad P = AC$ do tipo $m \times p$

$C = (c_{ij})$ do tipo $n \times p$ $\qquad Q = P^T = (AC)^T$ do tipo $p \times m$ ✓

A^T do tipo $n \times m$

C^T do tipo $p \times n$ $\qquad R = C^T A^T$ do tipo $p \times m$ ✓

$$q_{ij} = p_{ji} = A_{(j)}\, C^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, c_{ki} \quad ✓$$

$$r_{ij} = C^T_{(i)} \cdot A^{T(j)} = C^{(i)}\, A_{(j)} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\, a_{jk} \quad ✓$$

$$q_{ij} = r_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, p\,;\; j = 1, 2, \ldots, m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = R \Rightarrow (AC)^T = C^T A^T$$

pág. 15

Teorema [2.7]

A, B matriz quadradas de ordem n (tipo $n \times n$)

c)

Seja $P = AB$ matriz do tipo $n \times n$ (ordem n)

$$tr(AB) = tr(P) = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}$$

$$p_{ii} = A_{(i)} B^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

Seja $Q = BA$ matriz do tipo $n \times n$ (ordem n)

$$tr(BA) = tr(Q) = \sum_{j=1}^{n} q_{jj}$$

$$q_{jj} = B_{(j)} A^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij}$$

$$tr(BA) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = tr(AB)$$

pág. 21

Papel 100% Reciclado

Nuy

Teorema [2.9]

A matriz do tipo $n \times n$ (ordem n)
B " " " $m \times n$

A^T matriz do tipo $n \times n$ (ordem n)
B^T " " " $n \times m$

a) $C = A + A^T$ tipo $n \times n$ (ordem n)

C é uma matriz simétrica

b) $D = A\,A^T$ tipo $n \times n$ (ordem n)

$E = A^T A$ tipo $n \times n$ (ordem n)

D e E são matrizes simétricas

c) $F = B\,B^T$ tipo $m \times m$ (ordem m)

$G = B^T B$ tipo $n \times n$ (ordem n)

F e G são matrizes simétricas

pág. 31

Teorema [2.10]

A matriz do tipo $n \times n$ (ordem n)
A^T " " " $n \times n$ (ordem n)

a) $C = A - A^T$ tipo $n \times n$ (ordem n)

C é uma matriz hemi-simétrica

b)

$$A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T\right) + \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T\right) \Leftrightarrow$$

pág. 33

$$\Leftrightarrow \quad A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{simétrica}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{hemi-simétrica}}}$$

pág. 33

Inversão de matrizes quadradas

Teorema [2.14]

A, B matrizes do tipo $n \times n$ (ordem n) e são matrizes não singulares

c) Para mostrar que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ tem que se verificar as seguintes condições:

i) $(A^{-1})^T A^T = I$

Sabendo que $(A^T)^{-1} A^T = I$ então

$$(A^{-1})^T A^T = (A A^{-1})^T = I^T = I \quad ✓$$

ii) $A^T (A^{-1})^T = I$

Sabendo que $A^T (A^T)^{-1} = I$ então

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = I^T = I \quad ✓$$

pág. 40

Cálculo da matriz inversa de uma matriz quadrada

Exemplo 31 [2.30]

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{tipo } 2\times 2 \text{ (ordem 2)}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{tipo } 2\times 2 \text{ (ordem 2)}$$

$$C\,C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-2c & 2b-2d \\ -a+3c & -b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinação de a, c

$$\begin{cases} 2a-2c = 1 \\ -a+3c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{C}$$

Determinação de b, d

$$\begin{cases} 2b-2d = 0 \\ -b+3d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} b & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{C}$$

$$\begin{array}{cc} a;b & c;d \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow 2L_2 + L_1 \end{array}$$

método de eliminação de Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

Solução

$$\begin{cases} a = 3/4 \ ; \ b = 1/2 \\ c = 1/4 \ ; \ d = 1/2 \end{cases}$$

método de eliminação de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1/4 \\ \leftarrow L_2/4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\quad\quad}_{I} \quad \underbrace{\quad\quad}_{C^{-1}}$$

pág. 41

Lei das potências inteiras

Teorema [2.15]

A matriz do tipo $n \times n$ (ordem n)

$k \in \mathbb{N}$

Mostrar que $(A^k)^T = (A^T)^k$

Recorre-se ao método de indução:

i) mostrar a validade para $k = 1$:

$$(A^1)^T = (A^T)^1$$

$$(A^1)^T \underset{\text{lei da potência}}{=} (A A^0)^T = (A I)^T = A^T = A^T I = A^T (A^T)^0 \underset{\text{lei da potência}}{=} (A^T)^1$$

ii) admitindo que a proposição é verdadeira para a potência k

$$(A^k)^T = (A^T)^k \quad \text{(verdade)}$$

mostra-se que é ainda verdadeira para a potência $k+1$

$$(A^{k+1})^T = (A^T)^{k+1}$$

$$(A^{k+1})^T \underset{\text{lei da potência}}{=} (A A^k)^T \underset{\substack{\text{propriedade} \\ \text{da transposta}}}{=} \underbrace{(A^k)^T}_{\text{hipótese de indução}} A^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^{k+1})^T = (A^T)^k A^T \underset{\text{lei da potência}}{=} (A^T)^{k+1}$$

pág. 47

Matriz ortogonal

Teorema [2.20]

A, B são duas matrizes ortogonais do tipo $n \times n$ (ordem n).

Mostrar que a matriz

AB tipo $n \times n$ (ordem n)

é também uma matriz ortogonal, isto é, verifica a condição

$$(AB)^{-1} = (AB)^T$$

Tendo em atenção que $A^{-1} = A^T$ e $B^{-1} = B^T$ então

$$(AB)^{-1} \underset{\substack{\text{propriedade}\\ \text{da inversa}}}{=} B^{-1} A^{-1} = B^T A^T \underset{\substack{\text{propriedade}\\ \text{da transposta}}}{=} (AB)^T$$

pág. 52

Exemplo 39 [2.39]

Considerando, por exemplo, as linhas da matriz

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

verifica-se que

$$B = \{ (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \}$$

é um conjunto ortonormado; logo a matriz B é uma matriz ortogonal.

Considerando, por exemplo, as colunas da matriz

$$C = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

pág. 52/53

verifica-se que

$$C = \{ (\cos(\theta), 0, \operatorname{sen}(\theta)), (0, 1, 0), (-\operatorname{sen}(\theta), 0, \cos(\theta)) \}$$

é um conjunto ortonormal ; logo a matriz C é uma matriz ortogonal.

pág. 52/53

Matriz sob a forma de escada de linhas

Exemplo 40 [2.40]

- D é uma matriz sob a forma de escada de linhas
- E é uma matriz sob a forma de escada de linhas
- F não é uma matriz sob a forma de escada de linhas
  - é necessária a troca das duas linhas da matriz ou a troca das colunas 1 e 3.
- G não é uma matriz sob a forma de escada de linhas
  - é necessário o anulamento do elemento g_{33}
- H não é uma matriz sob a forma de escada de linhas
  - é necessária a deslocação da linha 2 para a posição 4 e o arrastamento das linhas 3 e 4 para as posições 2 e 3, respectivamente.

pág. 55