Departamento de Matemática e Aplicações 06/05/ 2015

Duração: 90 minutos

2º Teste de Análise Matemática EE

Nome: ______________________ Nr.: __________ Curso:

GRUPO I

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correta no quadrado correspondente

1. Se a taxa de variação instantânea da função $z = f(x,y)$ no ponto $(1,-1)$ na direção do vector $\vec{u} = (1,0)$ é -5, significa que:

☐ $f'_y(1,-1) = -5$; ☐ $f'_z(1,-1) = -5$; ☒ $f'_x(1,-1) = -5$; ☐ $f'_y(1,0) = -5$.

2. Considere a função $z = f(x,y)$ tal que $f'_x(2,3)$ existe. Geometricamente, $f'_x(2,3)$ representa o declive da recta tangente à curva obtida pela interseção do gráfico de f com o:

☒ Plano $y = 3$; ☐ Plano $x = 2$; ☐ Plano $z = f(2,3)$; ☐ Plano $2x + 3y = f(2,3)$.

3. Considere uma função $z = f(x,y)$ definida em $\mathbb{R}^2$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☐ Se f admite derivadas parciais no ponto (x_0, y_0) então f é diferenciável em (x_0, y_0);

☒ Se f é diferenciável no ponto (x_0, y_0) então f é contínua em (x_0, y_0);

☐ Se f admite derivadas direccionais no ponto (x_0, y_0) na direção de qualquer vector $\vec{u}$ então f é diferenciável em (x_0, y_0);

☐ Se $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0)$ então f é diferenciável em (x_0, y_0).

4. Considere uma função $z = f(x,y)$ diferenciável em $(0,0)$, com $f(0,0) = 0$, $f'_x(0,0) = 2$ e $f'_y(0,0) = 3$. Então para os pontos (x,y) pertencentes a uma vizinhança de $(0,0)$, tem-se:

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$;

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (f(x,y) - 2x - 3y) = 0$;

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-3x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$;

☒ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-2x-3y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

5. Considere uma função $z = f(x,y)$ diferenciável em (x_0, y_0), com $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0)$ e $f''_{x^2}(x_0, y_0) = 0$. Então:

☐ $f(x_0, y_0)$ é máximo local de f;

☐ $f(x_0, y_0)$ é mínimo local de f;

☒ (x_0, y_0) é ponto de sela de f;

☐ Nada se pode concluir sobre o ponto (x_0, y_0).

6. Seja $f(x,y)$ diferenciável em $(-1,1)$ e considere um vector $\vec{u} = (2,-3)$. A taxa de variação instantânea de f na direção do vector $\vec{u}$ é dada por:

☒ $\frac{2}{\sqrt{13}} f'_x(-1,1) - \frac{3}{\sqrt{13}} f'_y(-1,1)$; ☐ $-\frac{3}{\sqrt{13}} f'_x(-1,1) + \frac{2}{\sqrt{13}} f'_y(-1,1)$;

☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}} f'_x(2,-3) + \frac{1}{\sqrt{2}} f'_y(2,-3)$; ☐ $f'_x(-1,1) + f'_y(-1,1)$.

7. Seja $f(x,y)$ diferenciável em (x_0, y_0). O plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é horizontal se

☐ $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ não existe; ☒ $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0)$;

☐ $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (1,0)$; ☐ $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,1)$.

GRUPO II

Em cada uma das perguntas seguintes, responda sem apresentar cálculos.

1. Seja f definida em $\mathbb{R}^2$ que admite derivadas parciais contínuas até à ordem 2 em $(0,0)$, com $f(0,0)=1$, $f'_x(0,0)=-2$, $f'_y(0,0)=3$, $f''_{x^2}(0,0)=-1$, $f''_{xy}(0,0)=\frac{1}{3}$ e $f''_{y^2}(0,0)=4$.

   (a) O diferencial de f no ponto $(0,0)$ é dado por:

   $df = -2dx + 3dy$

   (b) A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,0,f(0,0))$ é:

   $z = 1 - 2x + 3y$

   (c) O polinómio de grau 2 que melhor se aproxima à função f para (x,y) pertencente a uma vizinhança de $(0,0)$ é:

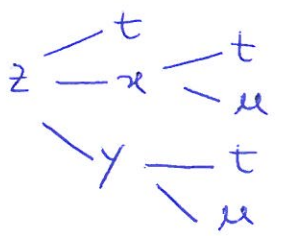
   $f_2(x,y) = 1 - 2x + 3y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}xy + 2y^2.$

GRUPO III

Apresente todos os cálculos efetuados.

1. Considere a relação $z = 2t + 3x + \sin y$, onde $x = \dfrac{t}{u}$ e $y = t^2u$. Sem determinar a função composta, determine

   (a) $\dfrac{\partial z}{\partial t}$



$\frac{\partial z}{\partial t} = 2 + 3 \cdot \frac{1}{u} + \cos y \cdot 2tu$

   (b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial t}$ $= \frac{\partial}{\partial u}\left(2 + \frac{3}{u} + 2tu \cdot \cos y\right) = -\frac{3}{u^2} + 2t \cdot \cos y + 2tu \cdot (-\operatorname{sen} y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$

$= -\frac{3}{u^2} + 2t \cdot \cos y - 2tu \cdot \operatorname{sen} y \cdot 2tu$

$= -\frac{3}{u^2} + 2t \cdot \cos y - 4t^2u^2 \cdot \operatorname{sen} y.$

2. A área de um triângulo é dado por $A = \frac{1}{2}ab\cos C$, onde a, b são os comprimentos de dois lados do triângulo e C é a medida do ângulo entre os lados referidos. Considere $a = 20$, $b = 16$ e $C = \frac{\pi}{3}$radianos. Usando diferenciais, determine o valor aproximado da variação da área do triângulo se ambos os comprimentos a e b forem aumentados em $0,01$, mantendo o ângulo C constante.

$dA = \frac{\partial A}{\partial a} \cdot da + \frac{\partial A}{\partial b} \cdot db + \frac{\partial A}{\partial C} \cdot dC$

$da = db = 0{,}01$

$dC = 0$

$dA = \frac{1}{2} b \cdot \cos C \cdot da + \frac{1}{2} a \cdot \cos C \cdot db - \frac{1}{2} ab \cdot \operatorname{sen} C \cdot dC$

$a = 20$

$b = 16$

$C = \frac{\pi}{3}$

$dA = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \cos\frac{\pi}{3} \times 0{,}01 + \frac{1}{2} \times 20 \cdot \cos\frac{\pi}{3} \times 0{,}01 + 0$

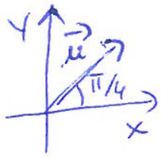
$dA = 8 \times \frac{1}{2} \times 0{,}01 + 10 \times \frac{1}{2} \times 0{,}01 = 0{,}04 + 0{,}05 = 0{,}09$

$dA = 0{,}09$

3. Seja $h(x,y) = 2\exp(xy) + \exp(x^2)$ a função que representa a altura de uma montanha na posição (x,y).

(a) Determine a derivada direccional de h no ponto $P = (0,2)$ na direção do vector $\vec{u}$ que faz com o semi - eixo positivo OX um ângulo de $\frac{\pi}{4}$radianos.

$\vec{u} = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



$h'_{\vec{u}}(P) = \vec{\nabla} h(0,2) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$h'_x(x,y) = 2y e^{xy} + 2x e^{x^2}$

$h'_y(x,y) = 2x e^{xy}$

Então $h'_{\vec{u}}(P) = (4 \cdot e^0 + 0, 0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$ //

(b) Qual a direção (a partir do ponto P) se deve caminhar, de modo a escalar a montanha mais rapidamente? Qual é a taxa de variação de h nessa direção? Justifique adequadamente a sua resposta.

$h(x,y)$ representa a altura da montanha na posição (x,y).

$h'_{\vec{u}}(x,y)$ ″ a taxa de variação da altura da montanha.

A taxa de variação da altura é maior quando $\vec{u} = \vec{\nabla} h(0,2)$

$\vec{\nabla} h(0,2) = (h'_x(0,2), h'_y(0,2)) = (4,0) = 4(1,0)$. Na direção do semi-eixo positivo $\vec{OX}$.

Nesse direção, a taxa é $h'_{\vec{\nabla} h}(0,2) = 16$.

pois $h'_{\vec{u}} = \|\vec{u}\| . \cos\alpha$, α = ∢ entre $\vec{u}$ e o vector gradiente $\vec{\nabla} h$.

(c) Qual a direção, a partir do ponto P, segundo a qual a altura da montanha não se altera? Justifique adequadamente.

A altura $h(x,y)$ não se altera quando $h'_{\vec{u}}(x,y) = 0$.

Neste caso, quando $h'_{\vec{u}}(0,2) = 0$. Como

$h'_{\vec{u}}(x,y) = \|\vec{u}\| . \cos\alpha$, onde α é o ângulo entre $\vec{u}$ e o vector gradiente $\vec{\nabla} h$, a taxa é nula quando $\cos\alpha = 0$, isto é, quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$. A direção segundo a qual a altura $h(x,y)$ ñ se altera é a direção perpendicular ao vector $\vec{\nabla} h = (4,0)$, isto é, $\vec{u} = (0,1)$.

4. Considere a função $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$.

(a) Determine os pontos críticos de f.

$$\begin{cases} f'_x = 3y^2 + 3x^2 - 3 = 0 \\ f'_y = 6xy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{———} \\ x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

se $x = 0 \Rightarrow 3y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$

$(0,1)$ e $(0,-1)$

se $y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (1,0)$ e $(-1,0)$.

Os pontos críticos são $(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$.

(b) Classifique os pontos críticos verificando se são extremantes de f

$f''_{y^2} = 6x$

$f''_{x^2} = 6x$

$f''_{xy} = 6y$

$|H(0,1)| = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} < 0$ logo $(0,1)$ não é extremante, é ponto de sela.

$|H(0,-1)| = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} < 0$ logo $(0,-1)$ não é extremante, é ponto de sela

$|H(1,0)| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} > 0$ e $f''_{x^2}(1,0) = 6 > 0$, logo $f(1,0)$ é mínimo de f.

$|H(-1,0)| = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} > 0$ e $f''_{x^2}(1,0) = -6 > 0$, logo $f(-1,0)$ é máximo de f.