Álgebra Linear B

COM+MEC

Exame da Época de Recurso – 2006/2007 – 13 de Fevereiro de 2007

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia – Universidade do Minho

Curso: Nome: Número: Classificação:

A prova tem a duração de 120 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. Durante a realização da prova os telemóveis devem estar desligados e só se pode abandonar a sala passados 20 minutos do seu início. A prova é constituído por três grupos e termina com a palavra “Fim”. No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 200.

Grupo I — Indique, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas usando para tal os caracteres “V” ou “F”, respectivamente. Cotações — resposta certa: 5; resposta em branco: 0; resposta errada: -5, sendo 0 a cotação mínima neste grupo.

I.1 ☐ Sejam $p = 2x^2 - x - 1 \in \mathbb{R}_2[x]$ e $\mathcal{S} = (x+1, x^2+1, x^2+x)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$. Então, $[p]_{\mathcal{S}} = (-2, 1, 1)$.

I.2 ☐ -3 é um valor próprio simples da matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

I.3 ☐ Seja a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (0, -x)$. Então, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

I.4 ☐ O sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ não tem variáveis livres.

I.5 ☐ Considere o conjunto $V = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ munido das operações $(x, x^2) \oplus (y, y^2) = (x+y, (x+y)^2)$ e $\alpha \odot (x, x^2) = (\alpha x, \alpha^2 x^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \underline{x}, \underline{y} \in V : \alpha \odot (\underline{x} \oplus \underline{y}) = \alpha \odot \underline{x} \oplus \alpha \odot \underline{y}$.

I.6 ☐ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, onde $a_{ij} = \begin{cases} 3 & \text{se } i \leqslant j, \\ 0 & \text{se } i > j. \end{cases}$ Então, $\det(A^2) = 3^{2n}$.

I.7 ☐ Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que $T(x, y) = (x+y, x)$. Então, $\mathcal{I}_T = \mathbb{R}^2$.

I.8 ☐ $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ é uma matriz triangular superior.

Grupo II — Complete, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, as seguintes frases de modo a obter proposições verdadeiras. Cotações — resposta certa: 3; resposta em branco ou errada: 0.

II.1 Seja $X = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) | A = A^T\}$.

(a) ☐ $\in X$.   (b) X é um subespaço de ☐ .

(c) $\dim(X) =$ ☐ . (d) ☐ é uma base de X.

II.2 Considere o sistema de equações lineares (S) cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & s \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{smallmatrix}\right]$, $s, t \in \mathbb{R}$.

(a) $c(A) = 2$ se e só se ☐ .

(b) $c(A|b) = 3$ se e só se ☐ .

(c) (S) é possível e indeterminado se e só se ☐ .

(d) (S) é impossível se e só se ☐ .

II.3 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x, y, z) = (x - z, 0)$.

(a) $A_T = \boxed{}$.

(b) $\mathcal{N}_T = \boxed{}$.

(c) $c_T = \boxed{}$.

(d) $n_T = \boxed{}$.

II.4 Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tal que $|A| = 3$.

(a) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \boxed{}$.

(b) $|AA^T(A^{-1})^2| = \boxed{}$.

(c) $|\operatorname{adj}(A)| = \boxed{}$.

(d) $\begin{vmatrix} -2a & 0 & -2b \\ 0 & 3 & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} = \boxed{}$.

II.5 Sejam as matrizes $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $W = YY^T$ e $Z = Y^TY$.

(a) $X^{-1} = \boxed{}$. (b) $X^2 = \boxed{}$. (c) $W = \boxed{}$. (d) $Z = \boxed{}$.

Grupo III — Responda, nas folhas que lhe foram distribuídas e por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar, bem como as respectivas justificações. Cotações: 20+10+20+(5+5)+20+20.

III.1 Seja $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $x^Tx = [1]$. Mostre que a $I_n - 2xx^T$ é uma matriz simétrica e ortogonal.

III.2 Defina conjunto gerador e base de um espaço vectorial.

III.3 Sejam $X = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) | A = A^T\}$ e $Y = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) | \det(A) = 0\}$. Mostre que X é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e que Y não é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

III.4 Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre, sem o resolver, que o sistema de equações lineares dado é possível e determinado.

(b) Resolva o sistema de equações lineares dado através da Regra de Cramer.

III.5 Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ e o vector dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Resolva-o através do método de Gauss e do método de Gauss-Jordan.

III.6 Determine o espectro da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, bem como o espaço próprio do valor próprio de maior módulo.

Fim.