Livro : CAP. 3

28)

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 - (4) = -5 \neq 0 \quad \text{(A é não singular)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 1 - (3+3) = 11 \neq 0 \quad \text{(B é não singular)}$$

$$\begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 - (-1+2) = 5 \neq 0 \quad \text{(C é não singular)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{matrix}$$

b)

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A+B| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 72 + 2 - (6+12) = 56$$

$$\begin{matrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$2A - B + 3C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 3 \\ -6 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 12 & 2 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|2A - B + 3C| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 12 & 2 \\ -2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 12 & 2 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} \leftarrow L_2/2 =$$

$$\begin{array}{ll} \uparrow & \uparrow \\ C_1/2 & C_2/2 \end{array}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 8\,[27 - 1 - (-15)] = 8\,(41) = 328$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix}$$

c) É evidente que $|A+B| \neq |A| + |B|$

$$|A+B| = 56$$

$$|A| + |B| = -5 + 11 = 6$$

As propriedades dos determinantes mostra que a adição de determinantes é uma operação que não pode ser relacionada com a operação adição de matrizes (ver propriedade 9 dos determinantes).

d)

$$|AB| = |A|\,|B| = (-5)\,11 = -55$$

$$|A(BC)| = |A|\,|BC| = |A|\,|B|\,|C| = (-55)\,5 = -275$$

Atendendo a que

$$|KA| = K^n\,|A| \qquad (A \text{ é uma matriz } n\times n)$$

e

$$|A| = |A^T|$$

obtém-se

$$\left|\left(\tfrac{1}{5} A C^T\right) B\right| = \left|\tfrac{1}{5}(AC^T)\right|\,|B| = \left(\tfrac{1}{5}\right)^3 |AC^T|\,|B| =$$

$$= \frac{1}{5^3}\,|A|\,|C^T|\,|B| = \frac{1}{5^3}\,|A|\,|C|\,|B| =$$

$$= \frac{-275}{125} = -\frac{11}{5}$$

Problema : Exercício 2) do 2° Teste de 08/01/2009

$$|D| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & a & 5 & 9 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & \uparrow & \uparrow \\ & & C_3+C_2 & C_4+2C_2 \end{array} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & b+2 \\ 1 & a & a+5 & 9+2a \end{vmatrix} =$$

$$= (1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & b+2 \\ 1 & a+5 & 9+2a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & b+2 \\ 1 & a+5 & 9+2a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1/3 \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+2 \\ 1 & a+5 & 9+2a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2-L_1 \\ \leftarrow L_3-L_1 \end{array} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 \\ 0 & a+4 & 8+2a \end{vmatrix} =$$

$$= -3\,(1)\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & b+1 \\ a+4 & 8+2a \end{vmatrix} = -3\left[-(b+1)(a+4)\right] =$$

$$= 3\,(b+1)(a+4)$$

D é não singular $\Leftrightarrow$ $|D| \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $b \neq -1 \wedge a \neq -4$

$$r(D) = 4 \Leftrightarrow |D| \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -1 \wedge a \neq -4 \qquad (1)$$

$$D = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & a & 5 & 9 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ C_3 & C_1 & C_2 & \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 5 & 1 & a & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2+2L_1 \\ \\ \leftarrow L_4+5L_1 \end{array} \Rightarrow$$

$$(r(D) \geq 1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & a+5 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow L_2/3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$(r(D) \geq 2)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & a+5 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_3 - L_2 \\ \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$(r(D) \geq 2)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & a+4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_4 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$(r(D) \geq 2)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{bmatrix}$$

$(r(D) \geq 2)$

$r(D) = 2 \iff a = -4 \wedge b = -1$

$r(D) = 3 \iff (a \neq -4 \wedge b = -1) \vee (a = -4 \wedge b \neq -1)$

Tal como já tínhamos concluído em (1)

$r(D) = 4 \iff a \neq -4 \wedge b \neq -1$

[signature]