

## Operações com Transformações Lineares

### Definição [3.5]: Adição (soma) de funções

Sejam  $S : V \rightarrow W$  e  $T : V \rightarrow W$  duas funções com o mesmo domínio,  $V$ , e o mesmo conjunto de chegada,  $W$ . Define-se a *adição*, ou *soma*, das funções  $S$  e  $T$  como sendo a função  $S + T : V \rightarrow W$ , tal que

$$\forall x \in V \quad (S + T)(x) = S(x) + T(x)$$

### Definição [3.6]: Multiplicação (produto) de uma função por um escalar

Seja  $T : V \rightarrow W$  uma função. Se  $c$  é um escalar de  $W$ , define-se a *multiplicação*, ou *produto*, de  $T$  pelo escalar  $c$  como sendo a função  $cT : V \rightarrow W$ , tal que

$$\forall x \in V \quad (cT)(x) = cT(x)$$

**Teorema [3.5]:** Se  $V$  e  $W$  são espaços lineares sobre um corpo  $\Omega$  e  $S : V \rightarrow W$  e  $T : V \rightarrow W$  são *transformações lineares*, então as funções  $S + T : V \rightarrow W$  e  $cT : V \rightarrow W$  são, também, *transformações lineares*.

- Seja  $L(V, W)$  o conjunto de todas as transformações lineares de domínio  $V$  e conjunto de chegada  $W$ .

**Teorema [3.6]:** O conjunto de todas as transformações lineares de domínio  $V$  e conjunto de chegada  $W$ ,  $L(V, W)$ , é um espaço linear (vectorial).

- Sejam as funções  $S : V \rightarrow W$  e  $T : V \rightarrow W$ . A operação **subtração de funções** pode ser entendida como um caso particular da adição. A função  $S - T : V \rightarrow W$

$$\forall x \in V \quad (S - T)(x) = S(x) - T(x)$$

pode ser considerada como o resultado da adição a  $S : V \rightarrow W$  da função  $-T : V \rightarrow W$ , que é o elemento *simétrico* (ou *oposto*) de  $T$ .

**Exemplo 22 [3.34]:** Sejam as transformações lineares  $R, U \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ , tais que

$$R(x, y, z) = (z, y, x) \quad \text{e} \quad U(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$$

Determine as transformações lineares  $R + U$  e  $3R - 2U$ .

Solução:

$$(R + U)(x, y, z) = R(x, y, z) + U(x, y, z) = (x + z, x + 2y, 2x + y + z)$$

$$(3R - 2U)(x, y, z) = 3R(x, y, z) - 2U(x, y, z) = (-2x + 3z, -2x + y, x - 2y - 2z)$$

Concluindo

$$R + U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad (R + U)(x, y, z) = (x + z, x + 2y, 2x + y + z)$$

$$3R - 2U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad (3R - 2U)(x, y, z) = (-2x + 3z, -2x + y, x - 2y - 2z)$$

**Definição [3.7]: Composição de funções**

Sejam as funções  $T : U \rightarrow V$  e  $S : V \rightarrow W$ , em que o conjunto de chegada de  $T$  é coincidente com o domínio de  $S$ . Define-se a *composição de  $S$  com  $T$* , como sendo a *função composta*  $ST : U \rightarrow W$ , tal que

$$\forall x \in U \quad (ST)(x) = S(T(x))$$

- A *função composta*  $ST : U \rightarrow W$  é muitas vezes designada por “ $S$  após  $T$ ” e representa-se por  $S \circ T : U \rightarrow W$ .

**Teorema [3.9]:** Sejam  $U$ ,  $V$  e  $W$  espaços lineares sobre um corpo  $\Omega$ . Se  $T : U \rightarrow V$  e  $S : V \rightarrow W$  são *transformações lineares*, então a função composta  $ST : U \rightarrow W$  é uma *transformação linear*.

- A **composição** satisfaz a propriedade **associativa**.

**Teorema [3.7]:** Sejam as transformações lineares  $T : U \rightarrow V$ ,  $S : V \rightarrow W$  e  $R : W \rightarrow Q$ . Então existe a *função composta*  $RST : U \rightarrow Q$ , em que

$$RST = R(ST) = (RS)T$$

- A **composição não** satisfaz a propriedade **comutativa**. Duas transformações lineares  $T : V \rightarrow V$  e  $S : V \rightarrow V$  dizem-se *comutativas (comutam entre si)* ou *permutáveis* se  $ST = TS$ .

**Teorema [3.8]:** Seja a transformação linear  $T : V \rightarrow V$ . Tem-se, então,  $TI = IT = T$ , em que  $I : V \rightarrow V$  é a *transformação identidade*.

**Definição [3.8]: Potências inteiras positivas**

Seja  $T : V \rightarrow V$  uma transformação linear que tem  $V$  como domínio e conjunto de chegada. Definem-se as *potências inteiras positivas* de  $T$  do seguinte modo

$$T^k = TT^{k-1} = T^{k-1}T, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

e, por convenção,

$$T^0 = I$$

onde  $I$  é a transformação identidade. Além disso, a *lei associativa* para a *composição* permite ainda estabelecer a seguinte lei de expoentes

$$T^p T^q = T^{p+q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}_0^+$$

**Teorema [3.10]:** Sejam  $U, V$  e  $W$  espaços lineares sobre um corpo  $\Omega$  e as transformações lineares  $S : V \rightarrow W$  e  $T : V \rightarrow W$ . Então:

**a)** Para qualquer transformação linear  $R : U \rightarrow V$  e  $k \in \Omega$  tem-se

$$(S + T)R = (SR) + (TR) \quad \text{e} \quad (kT)R = T(kR) = k(TR)$$

em que  $(S + T)R : U \rightarrow W$  e  $(kT)R : U \rightarrow W$ .

**b)** Para qualquer transformação linear  $R : W \rightarrow U$  e  $k \in \Omega$  tem-se

$$R(S + T) = (RS) + (RT) \quad \text{e} \quad R(kT) = (kR)T = k(RT)$$

em que  $R(S + T) : V \rightarrow U$  e  $R(kT) : V \rightarrow U$ .

**Exemplo 23 [3.35]:** Sejam as transformações lineares  $R, U \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  e  $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ , tais que

$$R(x, y, z) = (z, y, x)$$

$$U(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$$

$$T(x, y) = (x - y, -x + y, x + y)$$

Determine as transformações lineares  $RU$ ,  $UR$ ,  $RU - UR$ ,  $RUT$ ,  $(RU)^2$  e  $(RU - UR)^2$ .

Solução:

$$RU : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ e } (RU)(x, y, z) = R(U(x, y, z)) = (x + y + z, x + y, x)$$

$$UR : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ e } (UR)(x, y, z) = U(R(x, y, z)) = (z, y + z, x + y + z)$$

$$RU - UR : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ e}$$

$$(RU - UR)(x, y, z) = (RU)(x, y, z) - (UR)(x, y, z) = (x + y, x - z, -y - z)$$

$$RUT : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ e } (RUT)(x, y) = (RU)(T(x, y)) = (x + y, 0, x - y)$$

$$(RU)^2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ e}$$

$$(RU)^2(x, y, z) = (RU)((RU)(x, y, z)) = (3x + 2y + z, 2x + 2y + z, x + y + z)$$

$$(RU - UR)^2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} (RU - UR)^2(x, y, z) &= (RU - UR)((RU - UR)(x, y, z)) = \\ &= (2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z) \end{aligned}$$