Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**4,7**] Sejam as transformações lineares $T \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$, $R,S \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ dadas por

$$T(x,y,z)=(x+y+z,-y-z),\qquad S(x,y,z)=(x+z,y,-x+y)$$

$$R(x,y,z)=(x-y-2z,x-y-2z,y+z)$$

em relação às bases canónicas E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de R. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Serão as funções dadas sobrejetivas? Justifique.

c) Mostre que apenas uma das funções é injetiva e obtenha a sua função inversa.

2) [**2,0**] Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, em que $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{W} = n$, e admita que T é injetiva. Mostre que T é bijetiva e que a sua inversa é também uma transformação linear.

GRUPO II

3) [**4,7**] Sejam as transformações lineares definidas na pergunta 1) e as bases $\mathrm{U}=\{(1,1),(0,1)\}\subset\mathbb{R}^2$ e $\mathrm{V}=\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,0)\}\subset\mathbb{R}^3$.

a) Recorrendo ao cálculo matricial, determine as matrizes $\boldsymbol{R}_{\mathrm{V},\mathrm{E}_3}=m(R)_{\mathrm{V},\mathrm{E}_3}$, representação matricial de R em relação às bases V e E_3, e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}_3,\mathrm{U}}=m(T)_{\mathrm{E}_3,\mathrm{U}}$, representação matricial de T em relação às bases E_3 e U.

b) Usando preferencialmente as matrizes obtidas na alínea anterior, calcule a matriz $m(TSR+T)_{\mathrm{V},\mathrm{U}}$, representação matricial de $TSR+T$ em relação às bases V e U.

.... *(continua no verso)*

GRUPO III

4) [**2,8**] Obtenha, indicando todas as operações efetuadas, o determinante e a característica da matriz real:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} k & 2 & 7 & k^2+1 \\ 2 & k & -k & k \\ 0 & 2-k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & k \end{bmatrix}$$

GRUPO IV

5) [**5,8**] Seja a transformação linear $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{Q}=m(Q)=\begin{bmatrix} 1 & a+1 & -b \\ 1 & 1 & 1 \\ a & a & a+b+1 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os valores dos parâmetros reais *a* e *b*, de modo que $\lambda = 2$ seja um dos seus valores próprios e que $tr(\boldsymbol{Q}) = 2$.

b) Considerando $a=0$ e $b=-1$, calcule os valores próprios da matriz. Determine os espaços próprios e indique, para cada um desses subespaços, uma base e a dimensão.

c) Tendo em atenção os resultados obtidos na alínea anterior, verifique, justificando devidamente, se a transformação linear admite uma base de vetores próprios, U, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, obtenha as matrizes $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{U,U}}$ e $\boldsymbol{Q}^5_{\mathrm{U,U}}$.