Prova sem consulta. Duração: 2h (15m de tolerância) 1ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta.**

GRUPO I

1. [**7,2**] Seja o conjunto $S=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}\subset\mathbb{R}^4$, onde $\vec{a}=(1,1,-1,-2)$, $\vec{b}=(2,1,-1,0)$, $\vec{c}=(0,1,1,2)$ e $\vec{d}=(1,-1,1,1)$. Sejam $H=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \ : x-y-z-w=0\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$ e os vetores $\vec{e}=(1,1,0,2)$ e $\vec{f}=(-1,2,1,1)$.

a) Verifique, justificando, se o conjunto S é linearmente independente.

b) Determine o subespaço gerado pelo conjunto S, $L(S)$; indique uma base para o subespaço obtido e conclua em relação à sua dimensão. Justifique.

c) Obtenha uma base ortogonal, W, para H que contenha o maior número possível de elementos de S.

d) Calcule um vetor $\vec{g}$ de modo que o conjunto $U=\{\vec{e},\vec{f},\vec{g}\}\subset\mathbb{R}^4$ seja linearmente independente e, além disso, não exista em U nenhum par de vetores ortogonais.

2. [**1,3**] Sejam $B=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_{i-1},\vec{b}_i,\vec{b}_{i+1},\ldots,\vec{b}_n\}$ uma base para o espaço $\mathbb{R}^n$ e o vetor $\vec{v}=c_1\vec{b}_1+\ldots+c_{i-1}\vec{b}_{i-1}+c_i\vec{b}_i+c_{i+1}\vec{b}_{i+1}+\ldots+c_n\vec{b}_n$, $c_j\in\mathbb{R}$, $j=1,\ldots,n$, e tal que $c_i\neq 0$. Mostre que o conjunto $B_1=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_{i-1},\vec{v},\vec{b}_{i+1},\ldots,\vec{b}_n\}$ é uma base para $\mathbb{R}^n$, sabendo que B_1 foi obtido a partir de B substituindo o vetor $\vec{b}_i$ pelo vetor $\vec{v}$.

....*(continua no verso)*

GRUPO II

3. [**2,6**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b}\}$ é uma base ortonormada para $L(\mathrm{S})$, subespaço gerado pelo conjunto S, $\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{b})-2\vec{c}$, $\vec{c}\in L(\mathrm{S})$, $\|\vec{c}\|=\sqrt{2}$ e $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1$. Calcule:

a) O volume do prisma definido pelos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{d}$.

b) O ângulo, α, formado pelos vetores $\vec{d}$ e $\vec{a}-\vec{c}$.

c) O valor do produto escalar $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

GRUPO III

4. [**5,1**] Sejam o plano $M: x+y+z=1$, o ponto $R=(-1,0,1)$ e a reta, r, com a equação vetorial $X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(1,0,1)$ e $\vec{a}=(0,-1,-2)$.

a) Classifique a reta r quanto à sua posição relativa em relação ao plano M e determine a distância do ponto R a M.

b) Calcule o ângulo, α, que a reta r faz com o plano M e obtenha a equação vetorial da reta, r_1, que é a projeção ortogonal de r sobre M.

5. [**2,6**] Considere os dados indicados na pergunta **4.**. Determine as equações vetoriais das retas, h e h_1, que passam no ponto R, são concorrentes com a reta r e fazem, com esta reta, um ângulo, α, tal que $\alpha=\arccos\sqrt{5}/3$.

6. [**1,2**] Seja $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b}\}\subset\mathbb{R}^3$ um conjunto linearmente independente. Verifique se o conjunto $\mathrm{V}=\{\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+2\vec{b},\vec{a}+(\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})\}$ é uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$. Justifique.

1) a) O conjunto S é linearmente independente, se e só se

$$\alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c} + \alpha_4 \bar{d} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

Considerando

$$\alpha_1 (1,1,-1,-2) + \alpha_2 (2,1,-1,0) + \alpha_3 (0,1,1,2) + \alpha_4 (1,-1,1,1) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, -2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_4) = (0,0,0,0)$$

resulta o sistema de 4 equações lineares a 4 incógnitas (homogéneo)

$$\begin{array}{c} \quad\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \leftarrow L_3 + L_1 \\ \leftarrow L_4 + 2L_1 \end{array} \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_3 + L_2 \\ \leftarrow L_4 + 4L_2 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow L_4 - 3L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema homogéneo é possível e determinado (4 equações principais a 4 incógnitas, que são principais), possuindo, portanto, a solução nula como única solução, isto é,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

Conclui-se, assim, que o conjunto S é linearmente independente.

b) Como o conjunto S é constituído por 4 vectores do espaço $\mathbb{R}^4$ que são linearmente independentes, pode-se afirmar que o conjunto S é uma base para o espaço $\mathbb{R}^4$ e, portanto,

$$L(S) = \mathbb{R}^4$$

Uma vez que S é uma base para $\mathbb{R}^4$, então $\dim L(S) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$

c) Comecemos por determinar a dimensão do espaço H, procurando uma base para este subespaço.

Sabendo que $x - y - z - w = 0 \Leftrightarrow w = x - y - z$

pelo que

Nuf

$$H = \{ \vec{x} = (x, y, z, x-y-z) \in \mathbb{R}^4 \} =$$

$$= \{ \vec{x} = x(1,0,0,1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1) \in \mathbb{R}^4 \}$$

Então o conjunto

$$V = \{ (1,0,0,1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1) \} \subset H$$

é uma base para H e $\dim H = 3$.

Assim, a base W deverá ser constituída por três vectores ortogonais e não nulos do espaço H:

$$W = \{ \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \} \subset H$$

Analisando o conjunto S verifica-se que $\bar{d} = (1,-1,1,1)$ é o único vector que pertence a H. Seja $\bar{w}_1 = \bar{d} = (1,-1,1,1)$

Cálculo do vector $\bar{w}_2$:

$$\begin{cases} \vec{w}_2 \in H \setminus \{\vec{0}\} \\ \bar{w}_2 \cdot \bar{w}_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = x-y-z \\ x-y+z+w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = -z \\ x = y \end{cases}$$

Seja, por exemplo, $\bar{w}_2 = (1,1,0,0) \in H$

Cálculo do vector $\bar{w}_3$:

$$\begin{cases} \bar{w}_3 \in H \setminus \{\vec{0}\} \\ \bar{w}_3 \cdot \bar{w}_1 = 0 \\ \bar{w}_3 \cdot \bar{w}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = x-y-z \\ x-y+z+w=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=-z \\ x=y \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=-z \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Seja, por exemplo, $\bar{w}_3 = (0,0,1,-1) \in H$

d) O conjunto $U = \{\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}\} \subset \mathbb{R}^4$ é linearmente independente, se e só se $\bar{g} \notin L(\bar{e}, \bar{f})$.

NOTA: o subconjunto $\{\bar{e}, \bar{f}\} \subset U$ é linearmente independente, já que os vectores $\bar{e}$ e $\bar{f}$ não são colineares.

Cálculo de $L(\bar{e}, \bar{f})$:

$$L(\bar e,\bar f) = \{\vec x = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \bar x = \alpha_1 \bar e + \alpha_2 \bar f \ , \ \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\alpha_1 (1,1,0,2) + \alpha_2(-1,2,1,1) = (x,y,z,w) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1-\alpha_2 \, , \, \alpha_1+2\alpha_2 \, , \, \alpha_2 \, , \, 2\alpha_1+\alpha_2) = (x,y,z,w) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \\ 2 & 1 & w \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \\ \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 3 & y-x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 3 & w-2x \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 3L_3 - L_2 \\ \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 3 & y-x \\ 0 & 0 & 3z-y+x \\ 0 & 0 & w-y-x \end{array}\right]$$

O sistema é possível e determinado $[\vec x \in L(\bar e,\bar f)]$, se e só se

$$\begin{cases} 3z - y + x = 0 \\ w - y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{3}(y-x) \\ w = x+y \end{cases}$$

$$L(\bar e,\bar f) = \{\vec x = (x, y, \tfrac{y-x}{3}, x+y) \in \mathbb{R}^4\}$$

Assim, seja, por exemplo, $\bar g = (1,0,0,0) \notin L(\bar e,\bar f)$; convém notar que $\bar g \cdot \bar e = 1 \neq 0 \ \wedge \ \bar g \cdot \bar f = -1 \neq 0 \ \wedge \ \bar e \cdot \bar f = 3 \neq 0$

3) a)

$$V = |\bar a \cdot \bar b \times \bar d| = |\bar b \cdot \bar a \times \bar d| = |\bar d \cdot \bar a \times \bar b|$$

$$\bar d \cdot \bar a \times \bar b = [(\bar a \times \bar b) - 2\bar c] \cdot \bar a \times \bar b = \|\bar a \times \bar b\|^2 - 2\,\bar c \cdot \bar a \times \bar b$$

Dado que $\vec c = \alpha_1 \bar a + \alpha_2 \bar b$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $(\bar c \in L(S))$, então

$$\bar c \cdot \bar a \times \bar b = (\alpha_1 \bar a + \alpha_2 \bar b) \cdot \bar a \times \bar b = \alpha_1 \underbrace{\bar a \cdot \bar a \times \bar b}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\bar b \cdot \bar a \times \bar b}_{=0} = 0$$

$$\|\bar a \times \bar b\|^2 = \|\bar a\|^2 \|\bar b\|^2 - (\bar a \cdot \bar b)^2 = 1$$

$S = \{\bar a, \bar b\}$ é uma base ortonormada $\Rightarrow \|\bar a\| = \|\bar b\| = 1 \ \wedge \ \bar a \cdot \bar b = 0$

Então $\bar d \cdot \bar a \times \bar b = 1 - 0 = 1$, pelo que

$$V = |\bar d \cdot \bar a \times \bar b| = 1$$

b)
$$\|\bar d\|^2 = \left[(\bar a\times\bar b) - 2\bar c\right]\cdot\left[(\bar a\times\bar b) - 2\bar c\right] =$$
$$= \|\bar a\times\bar b\|^2 + 4\|\bar c\|^2 - 4\,\bar c\cdot\underbrace{\bar a\times\bar b}_{=0} = 1+8 = 9 \Leftrightarrow \|\bar d\| = 3$$

$$\|\bar a-\bar c\|^2 = (\bar a-\bar c)\cdot(\bar a-\bar c) = \|\bar a\|^2 + \|\bar c\|^2 - 2\bar a\cdot\bar c =$$
$$= 1+2-2 = 1 \Leftrightarrow \|\bar a-\bar c\| = 1$$

$$\bar d\cdot(\bar a-\bar c) = \left[(\bar a\times\bar b)-2\bar c\right]\cdot(\bar a-\bar c) =$$
$$= \bar a\cdot\underbrace{\bar a\times\bar b}_{=0} - 2\bar c\cdot\bar a - \bar c\cdot\underbrace{\bar a\times\bar b}_{=0} + 2\|\bar c\|^2 = -2+4 = 2$$

$$\cos\alpha = \frac{\bar d\cdot(\bar a-\bar c)}{\|\bar d\|\,\|\bar a-\bar c\|} = \frac{2}{(3)(1)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$$

c)
$$\bar a\times\bar c = \bar a\times(\alpha_1\bar a+\alpha_2\bar b) = \alpha_1\underbrace{\bar a\times\bar a}_{=\vec 0} + \alpha_2\,\bar a\times\bar b = \alpha_2\,\bar a\times\bar b$$
$$\bar b\times\bar c = \bar b\times(\alpha_1\bar a+\alpha_2\bar b) = \alpha_1\,\bar b\times\bar a + \alpha_2\underbrace{\bar b\times\bar b}_{=\vec 0} = -\alpha_1\,\bar a\times\bar b$$
$$(\bar a\times\bar c)\cdot(\bar b\times\bar c) = (\alpha_2\bar a\times\bar b)\cdot(-\alpha_1\,\bar a\times\bar b) = -\alpha_1\alpha_2\underbrace{\|\bar a\times\bar b\|^2}_{=1} = -\alpha_1\alpha_2$$
$$\bar a\cdot\bar c = 1 \Leftrightarrow \bar a\cdot(\alpha_1\bar a+\alpha_2\bar b) = 1 \Leftrightarrow \alpha_1\|\bar a\|^2 + \alpha_2\underbrace{\bar a\cdot\bar b}_{=0} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 1$$
$$\bar b\cdot\bar c = 1 \Leftrightarrow \bar b\cdot(\alpha_1\bar a+\alpha_2\bar b) = 1 \Leftrightarrow \alpha_1\underbrace{\bar b\cdot\bar a}_{=0} + \alpha_2\|\bar b\|^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_2 = 1$$

Então
$$(\bar a\times\bar c)\cdot(\bar b\times\bar c) = -\alpha_1\alpha_2 = -1$$

4) $M: x+y+z=1$ e $\bar n = (1,1,1)\perp M$

$r: X(t) = P + t\,\bar a,\ t\in\mathbb{R}$, $P=(1,0,1)$, $\bar a = (0,-1,-2)$

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = 1-2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

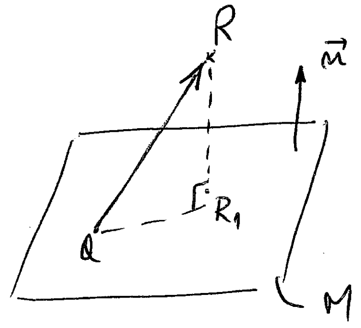
$R = (-1,0,1)$ tal que $R\notin M \wedge R\notin r$.

a) Considerando

$$\bar{a}\cdot\bar{n} = (0,-1,-2)\cdot(1,1,1) = -3 \neq 0$$

então a recta r é secante ao plano M. Por outro lado, dado que os vectores $\bar{a}$ e $\bar{n}$ não são colineares, conclui-se que a recta r é oblíqua em relação ao plano M.

Seja $Q = (1,0,0) \in M$



$$\overrightarrow{R_1R} = \operatorname{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{QR} = \frac{\overrightarrow{QR}\cdot\bar{n}}{\|\bar{n}\|^2}\,\vec{n}$$

$$\overrightarrow{QR} = R - Q = (-2,0,1)$$

$$\overrightarrow{QR}\cdot\bar{n} = -2+1 = -1$$

$$\|\bar{n}\|^2 = 3$$

$$\overrightarrow{R_1R} = \frac{-1}{3}(1,1,1) \rightarrow d_{R,M} = \|\overrightarrow{RR_1}\| = \left|-\frac{1}{3}\right| \|(1,1,1)\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\bar{a}\cdot\bar{n}|}{\|\bar{a}\|\|\bar{n}\|} = \frac{|-3|}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

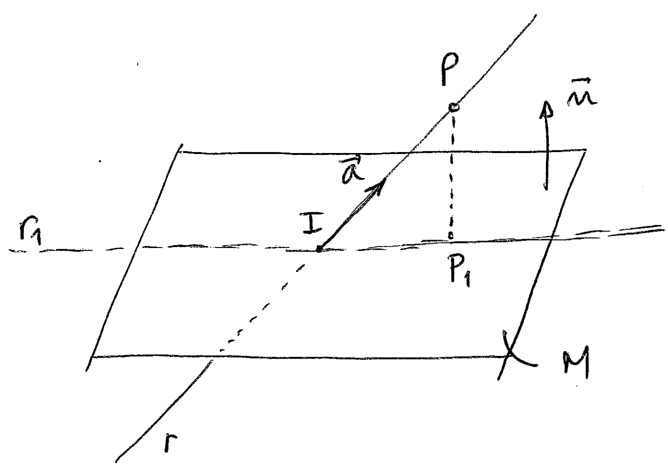
$$\bar{a}\cdot\bar{n} = -3$$

A recta r_1 vai ser definida pelos pontos

$I = r \cap M$

e

P_1 que é a projecção do ponto P sobre o plano M.



$$I = r\cap M = \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = 1-2t \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} = \\ = \\ - \\ 1-t+1-2t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = \left(1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \\ t = 1/3 \end{cases}$$

$$P_1 = P - \overrightarrow{P_1 P} = (1,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{P_1 P} = \text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{IP} = \frac{\overrightarrow{IP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{1}{3}(1,1,1)$$

$$\overrightarrow{IP} = P - I = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{IP} \cdot \vec{n} = 1$$

O vector director da recta r_1 será qualquer vector que seja colinear com o vector

$$\overrightarrow{IP_1} = P_1 - I = \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

Assim, seja, por exemplo, $\vec{b} = (-1,0,1) \parallel \overrightarrow{IP_1}$

Obtém-se, então,

$$r_1 : X(u) = I + u\vec{b}, \quad u \in \mathbb{R}$$

$$I = \left(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \; ; \quad \vec{b} = (-1,0,1)$$

5) Seja a recta $h : X(u) = R + u\vec{c}, \; u \in \mathbb{R}$

$$R = (-1,0,1) \; ; \quad \vec{c} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

h é concorrente com r (complanar) $\Rightarrow \overrightarrow{PR} \cdot \vec{a} \times \vec{c} = 0$

$$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ b & c \end{vmatrix} = 2(2b - c) = 0 \Leftrightarrow 2b - c = 0$$

$$\alpha = \measuredangle(h, r) = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \Leftrightarrow \alpha = \measuredangle(\vec{a}, \vec{c}) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = \|\vec{a}\| \|\vec{c}\| \cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -b - 2c = \sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow -b - 2c = \frac{5}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Considerando, por exemplo, $\|\vec{c}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{9} = 3$ obtém-se:

$$\begin{cases} 2b - c = 0 \\ -b - 2c = 5 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -2 \\ a^2 + 1 + 4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -2 \\ a = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 1 \\ c = -2 \\ a = -2 \end{cases}$$

Existem, então, duas soluções para o problema:

Hmp

recta h: $X(u) = R + u\bar{c}$, $u \in \mathbb{R}$

$R = (-1,0,1)$; $\bar{c} = (2,-1,-2)$

recta h_1: $X(v) = R + v\bar{c}$, $v \in \mathbb{R}$

$R = (-1,0,1)$; $\bar{v} = (-2,-1,-2)$

2) $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_{i-1}, \bar{b}_i, \bar{b}_{i+1}, \dots, \bar{b}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ é uma base para o espaço $\mathbb{R}^n$, logo é um conjunto de n vectores linearmente independentes, isto é,

$$\beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_{i-1} \bar{b}_{i-1} + \beta_i \bar{b}_i + \beta_{i+1} \bar{b}_{i+1} + \dots + \beta_n \bar{b}_n = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{i+1} = \beta_i = \beta_{i+1} = \dots = \beta_n = 0$$

Seja $\bar{v} = c_1 \bar{b}_1 + c_2 \bar{b}_2 + \dots + c_{i-1} \bar{b}_{i-1} + c_i \bar{b}_i + c_{i+1} \bar{b}_{i+1} + \dots + c_n \bar{b}_n$,

$c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ $\wedge$ $c_i \neq 0$

O conjunto $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ é uma base para $\mathbb{R}^n$, se e só se:

i) For constituído por n vectores de $\mathbb{R}^n$.
Esta condição é verificada já que B_1 tem o mesmo número de elementos de B; o vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, já que $\bar{v}$ é uma combinação linear dos elementos do conjunto B.

ii) For um conjunto de vectores linearmente independentes, isto é,

$$\alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha_{i-1} \bar{b}_{i-1} + \alpha_i \bar{v} + \alpha_{i+1} \bar{b}_{i+1} + \dots + \alpha_n \bar{b}_n = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{i-1} = \alpha_i = \alpha_{i+1} = \dots = \alpha_n = 0$$

Substituindo o vector $\bar{v}$ na expressão anterior resulta;

$$\alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha_{i-1} \bar{b}_{i-1} + \alpha_i (c_1 \bar{b}_1 + c_2 \bar{b}_2 + \dots + c_{i-1} \bar{b}_{i-1} + c_i \bar{b}_i + c_{i+1} \bar{b}_{i+1} + \dots +$$
$$+ c_n \bar{b}_n) + \alpha_{i+1} \bar{b}_{i+1} + \dots + \alpha_n \bar{b}_n = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 + c_1\alpha_i)\vec{b}_1 + (\alpha_2 + c_2\alpha_i)\vec{b}_2 + \cdots + (\alpha_{i-1} + c_{i-1}\alpha_i)\vec{b}_{i-1} + \alpha_i c_i \vec{b}_i +$$
$$+ (\alpha_{i+1} + c_{i+1}\alpha_i)\vec{b}_{i+1} + \cdots + (\alpha_n + c_n\alpha_i)\vec{b}_n = \vec{0}$$

Como o conjunto B é linearmente independente, deverá verificar-se, na equação anterior,

$$\begin{cases} \alpha_1 + c_1\alpha_i = 0 \\ \alpha_2 + c_2\alpha_i = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{i-1} + c_{i-1}\alpha_i = 0 \\ \alpha_i c_i = 0 \quad \wedge \quad c_i \neq 0 \\ \alpha_{i+1} + c_{i+1}\alpha_i = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n + c_n\alpha_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{i-1} = 0 \\ \alpha_i = 0 \\ \alpha_{i+1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$$

Conclui-se que o conjunto B_1 é linearmente independente, pelo que B_1 é uma base para o espaço $\mathbb{R}^n$.

6) Se $S = \{\bar{a}, \bar{b}\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto linearmente independente, então $\bar{a} \times \bar{b} \neq \vec{0}$ e o conjunto $S_1 = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\times\bar{b}\} \subset \mathbb{R}^3$ é também um conjunto linearmente independente, ou seja,

$$\beta_1 \bar{a} + \beta_2 \bar{b} + \beta_3 \bar{a}\times\bar{b} = \vec{0} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

Dado que S_1 contém 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ é possível afirmar que S_1 é uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$.

O conjunto V é uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$, se e só se:

i) for constituído por 3 vectores de $\mathbb{R}^3$

Trata-se de uma condição que é verificada.

ii) for um conjunto linearmente independente, isto é,

$$\alpha_1(\bar{a} - \bar{b}) + \alpha_2(\bar{a} + 2\bar{b}) + \alpha_3(\bar{a} - 2\bar{b})\times(\bar{a} + \bar{b}) = \vec{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Notando que

$$(\bar{a}-2\bar{b})\times(\bar{a}+\bar{b}) = \underbrace{(\bar{a}\times\bar{a})}_{=\vec{0}} - 2\underbrace{(\bar{b}\times\bar{b})}_{=\vec{0}} + (\bar{a}\times\bar{b}) - 2(\bar{b}\times\bar{a}) =$$

$$= (\bar{a}\times\bar{b}) + 2(\bar{a}\times\bar{b}) = 3\,\bar{a}\times\bar{b}$$

a condição anterior pode ser reescrita sob a forma:

$$\alpha_1(\bar{a}-\bar{b}) + \alpha_2(\bar{a}+2\bar{b}) + 3\alpha_3\,\bar{a}\times\bar{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

Tem-se, então,

$$\alpha_1\bar{a} - \alpha_1\bar{b} + \alpha_2\bar{a} + 2\alpha_2\bar{b} + 3\alpha_3(\bar{a}\times\bar{b}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1+\alpha_2)\,\bar{a} + (2\alpha_2-\alpha_1)\,\bar{b} + 3\alpha_3(\bar{a}\times\bar{b}) = \vec{0}$$

Como o conjunto S_1 é linearmente independente, deverá verificar-se, na equação anterior,

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=0 \\ 2\alpha_2-\alpha_1=0 \\ 3\alpha_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=0 \end{cases}$$

Conclui-se que o conjunto V é linearmente independente, pelo que V é uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$.