maf@math.uminho.pt
Departamento de Matemática
Universidade do Minho

Folha 7 - Exercícios de Revisão

1. Indique o valor lógico das afirmações seguintes, justificando convenientemente:

   (a) Dada uma matriz real A, a equação $Ax = 0$ é sempre possível.

   (b) Existe uma matriz real triangular superior com determinante igual a -3.

   (c) Existe uma matriz real com valores próprios -1, 1.

2. Indique o valor lógico das afirmações seguintes, justificando convenientemente:

   (a) Se A e B são matrizes semelhantes então $\det A = \det B$.

   (b) A matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ invertível.

   (c) Se A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

3. Indique o valor lógico das afirmações seguintes, justificando convenientemente:

   (a) Se $A^2 = -2A^4$, então $(I_n + A^2)(I_n - 2A^2) = I_n$.

   (b) A matriz A é invertível se e somente se, 0 for um valor próprio de A.

   (c) Se A e B são matrizes quadradas tais que $\det(A) = -2$ e $\det(B) = 3$, então $\det(A^T B^{-1}) = -3/2$.

   (d) Se A é uma matriz não singular tal que $A^2 = A$ então $\det(A) = 1$.

4. Considere a matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 2 \\ -\beta & \beta & 1-\beta \\ 1 & \beta & \beta+3 \end{pmatrix}$

   Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   (a) $c(A) = 3$ se e só se $\beta \neq -1$.

   (b) se $\beta = -1$ então $c(A) = 2$.

   (c) se $\beta \neq -1$ então $c(A) \geq 2$.

   (d) se $\beta = 0$ então $c(A) = 1$.

5. Seja $F = \{(x, y, z, w) \in R^4 : 2x - z = y - w = 0\}$.

   Qual das seguintes afirmações é falsa?

   (a) F e um subespaço do espaço vectorial real R^4.

   (b) $\{(2, 2, 4, 2), (-1, 1, -2, 1)\}$ é um conjunto de vectores de F linearmente independente..

   (c) $\{(2, 2, 4, 2), (-1, 1, -2, 1), (0, 1, 0, 1)\}$ é um conjunto de vectores de F linearmente independente.

   (d) $\{(1, -1, 2, -1), (-1, -1, -2, -1)\}$ é uma base de F.

6. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que a característica da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1k \end{pmatrix}$$

seja inferior a 3.

7. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Verifique que $3, -1$ são os valores próprios de A.

   (b) Verifique se $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é vector próprio associado ao valor próprio 3 e se $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vector próprio associado ao valor próprio -1.

   (c) Diga, justificando, se a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é invertível, e caso afirmativo calcule a sua inversa.

8. Seja $T : V \longrightarrow R^5$ uma transformação linear.

   (a) Se T é sobrejectiva e $dim(N(T)) = 2$, qual a dimensão de V?

   (b) Se T é sobrejectiva e injectiva, qual a dimensão de V?

9. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, tem-se $A = PDP^{-1}$, para $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule $A^k, k \in \mathbb{N}$.

10. No espaço vectorial real R^4 considere o subconjunto

$$G = \{(x, y, z, t) \in R^4 : x - y + t = 0 \ e \ z - 4t = 0\}.$$

   (a) Mostre que G é um subespaço vectorial de R^4.

   (b) Determine um conjunto de geradores para o subespaço vectorial G.

11. Considere a aplicação $f : R^3 \to R^2$ definida por: $f(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z)$.

   (a) Mostre que f é uma aplicação linear.

   (b) Determine o núcleo de f.

   (c) Determine ainda, as imagens inversas dos vectores $(1, 0)$ e $(-1, 3)$ de R^2.

   (d) Escreva a matriz da aplicação linear f.