Prova sem consulta. Duração: 2h (30m de tolerância).

*** Não são consideradas as folhas sem identificação. Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não é possível a utilização de máquinas de calcular gráficas nem de microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [8,9] Considere as transformações lineares $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $S(x,y,z) = (-x+2z, x-3z)$, e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, representada pela matriz

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação às bases canónicas E_2 e E_3 para os espaços lineares $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respetivamente. Sejam, ainda, as bases $\mathrm{U} = \{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathrm{V} = \{(1,1),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Obtenha o núcleo e o contradomínio de *T*. Identifique, para cada um destes subespaços, uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Classifique as transformações *S*, *T* e *TS* quanto à injetividade e determine, se tal for possível, as respetivas transformações inversas. Justifique.

c) Usando o cálculo matricial, obtenha as matrizes $\boldsymbol{S}_{\mathrm{U,V}} = m(S)_{\mathrm{U,V}}$, representação matricial de *S* em relação às bases U e V, e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,U}} = m(T)_{\mathrm{V,U}}$, representação matricial de *T* em relação às bases V e U.

d) Determine a matriz $m(STS)_{\mathrm{U,E_2}}$ que representa a transformação composta *STS* relativamente às bases U e E_2.

2. [1,2] Seja *A* uma matriz quadrada real, de ordem *n*, e diagonalizável. Mostre que a sua característica é igual ao número de valores próprios não nulos da matriz.

....(*continua no verso*)

Prova sem consulta. Duração: 2h (30m de tolerância).

GRUPO II

3. [**2,7**] Considere a matriz real

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & -1 & k+1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & k \\ k+5 & 1 & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

Determine a sua característica em função do parâmetro k e indique para que valores de k a matriz é não singular.

GRUPO III

4. [**1,3**] Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que $\dim \mathrm{V} = n$ e admita que $\mathrm{U}=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n\}$ é uma base para V. Mostre que se T é sobrejetiva, então $\overline{\mathrm{U}}=\{T(u_1),T(u_2),T(u_3),\ldots,T(u_n)\}$ é uma base para V.

5. [**5,9**] Considere a transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz real

$$A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ 3 & 6 & -3 \\ \varphi & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

relativamente à base canónica para o espaço linear $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule α, β, δ e φ de forma que o traço de A seja 6, $\vec{x}=(1,1,2)$ seja um dos seus vetores próprios e o cofator do elemento $a_{3,2}$ tenha o valor 9.

b) Determine os valores próprios e os espaços próprios da matriz, indicando, para cada um destes subespaços, uma base e a dimensão (se não resolveu a alínea anterior considere $\alpha=0$ e $\beta=-\delta=-\varphi=-3$).

c) Mostre que a matriz A é diagonalizável; indique, justificando, a matriz diagonal que lhe é semelhante e a respetiva matriz diagonalizadora.

1)

a) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$m(T) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Recorrendo à característica de $m(T)$ verifica-se que $r[m(T)] = 2$ (as suas colunas são linearmente independentes), pelo que

$$\dim T(\mathbb{R}^2) = 2$$

Recorrendo ao teorema da dimensão

$$\dim N(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim T(\mathbb{R}^2) = 2-2 = 0$$

Assim

$$N(T) = \{(0,0)\} \quad \text{e} \quad \text{Base } N(T) = \{\}$$

Calculemos o seu contradomínio $T(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$.

$$T(\mathbb{R}^2) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 : \vec{y} = T(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^2\}$$

Seja $\vec{y} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$; resolvendo o sistema de equações lineares

$$\vec{y} = T(\vec{x}) \Leftrightarrow (a,b,c) = T(x,y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ -1 & 2 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2+L_1 \\ \leftarrow L_3-L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & a+b \\ 0 & 3 & c-a \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 3 & c-a \\ 0 & 0 & a+b \end{array}\right]$$

Conclui-se que

$$\vec{y} \in T(\mathbb{R}^2), \text{ se e só se } a+b=0$$

$$T(\mathbb{R}^2) = \{\vec{y} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b=0\} =$$

$$= \{\vec{y} = (a,-a,c) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\text{Base } N(T) = \{(1,-1,0), (0,0,1)\}$$

b) A transformação T é injectiva já que $N(T) = \{(0,0)\}$

Seja $\quad m(S) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

[signature]

Sabendo que

$$r[m(S)] = \dim S(\mathbb{R}^3) = 2$$ (as duas linhas são linearmente independentes)

Conclui-se, recorrendo ao teorema da dimensão,

$$\dim N(S) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim S(\mathbb{R}^3) = 3-2 = 1$$

pelo que $N(S) \neq \{(0,0,0)\}$

logo S não é injectiva.

Relativamente à função composta $TS : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$m(TS) = m(T)\, m(S) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que

$$r(m(TS)) = \dim TS(\mathbb{R}^3) = 2$$ (só tem duas colunas linearmente independentes)

Então

$$\dim N(TS) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim TS(\mathbb{R}^3) = 3-2 = 1$$

Conclui-se que TS não é injectiva, já que $N(TS) \neq \{(0,0,0)\}$.

Apenas a função T admite função inversa T^{-1}, isto é,

$$T^{-1} : T(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

(note-se que a função não é sobrejectiva)

Recorrendo ao sistema de equações lineares (*) (ver alínea a))

tem-se

$$y = \frac{c-a}{3} \quad \wedge \quad x = a + 2y = \frac{2c-2a}{3} + a = \frac{a+2c}{3}$$

Assim

$$T^{-1} : T(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(a,-a,c) \longrightarrow \left(\frac{a+2c}{3}, \frac{c-a}{3}\right)$$

Wij

c)

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{E_3} \arrow[r, "m(S)"] & \boxed{E_2} \\
\boxed{U} \arrow[u, bend left, "M_U^{E_3}"] \arrow[r, "m(S)_{U,V}"] & \boxed{V} \arrow[u, bend right, "M_V^{E_2}"']
\end{tikzcd}$$

Designando $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$ e $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

tem-se

$$M_U^{E_3} = E_3^{-1} U = I_3 U = U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_V^{E_2} = E_2^{-1} V = I_2 V = V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

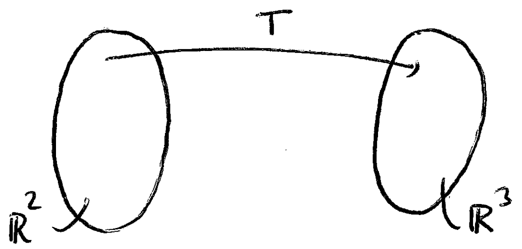
Então

$$m(S)_{U,V} = \left[M_V^{E_2}\right]^{-1} m(S)\, M_U^{E_3}$$

$$\left|M_V^{E_2}\right| = 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{Cof}\, M_V^{E_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[M_V^{E_2}\right]^{-1} = \left[\mathrm{Cof}\, M_V^{E_2}\right]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m(S)_{U,V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} M_U^{E_3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}_{U,V}$$



$$\begin{tikzcd} \boxed{E_2} \arrow[r, "m(T)"] & \boxed{E_3} \\ \boxed{V} \arrow[u, bend left, "M_V^{E_2}"] \arrow[r, "m(T)_{V,U}"] & \boxed{U} \arrow[u, bend right, "M_U^{E_3}"'] \end{tikzcd}$$

Neste caso,

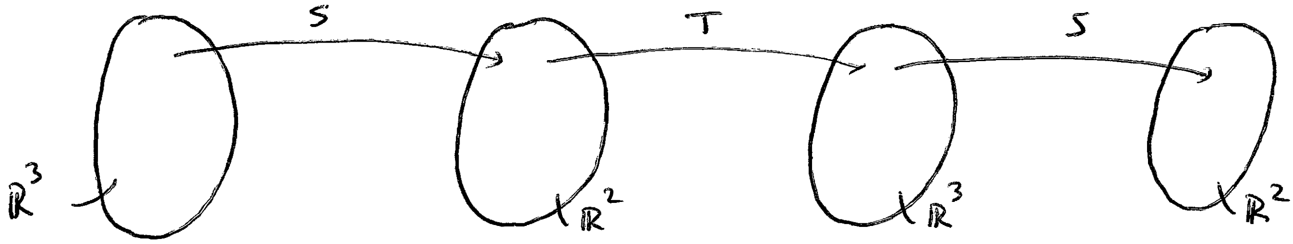
$$m(T)_{V,U} = \left[M_U^{E_3}\right]^{-1} m(T)\, M_V^{E_2}$$

$$|M_U^{E_3}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad e \quad \mathrm{Cof}\, M_U^{E_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[M_U^{E_3}\right]^{-1} = \left[\mathrm{Cof}\, M_U^{E_3}\right]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m(T)_{V,U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} M_V^{E_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}_{V,U}$$

d)



$$\begin{tikzcd} \boxed{E_3} \arrow[r, "m(S)"] \arrow[rrr, bend right, "m(STS)"'] & \boxed{E_2} \arrow[r, "m(T)"] & \boxed{E_3} \arrow[r, "m(S)"] & \boxed{E_2} \\ \boxed{U} \arrow[u, bend left, "M_U^{E_3}"] \arrow[urrr, "m(STS)_{U,E_2}"'] & & & \end{tikzcd}$$

Recorrendo à matriz $m(TS)$ obtida na alínea b), obtém-se

$$m(STS) = m(S)\,m(TS) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -10 \\ -3 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Então

$$m(STS)_{U,E_2} = m(STS)\, M_U^{E_3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -10 \\ -3 & 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -10 & 3 \\ 0 & 11 & -3 \end{bmatrix}_{U,E_2}$$

2) Ver teorema 5.17 do manual "Noções sobre Álgebra Linear".

3)

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & -1 & k+1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & k \\ k+5 & 1 & 0 & 2k \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ C_2 & C_1 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ -1 & 1 & k+1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 1 & k+5 & 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2+L_1 \\ \\ \leftarrow L_4-L_1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & 2 & k & k+2 \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & k+4 & 1 & k \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_2 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 2 & k & k+2 \\ 0 & k+4 & 1 & k \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ \leftarrow L_4 - (k+4)L_2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k-2 & 2-k \\ 0 & 0 & -k-3 & -k(k+3) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow (k-2)L_4 + (k+3)L_3 \quad \text{e} \quad \underline{k \neq 2} \end{array} \Rightarrow$$

Nota: $k - (k+4)\,k$

$$\shortparallel$$

$k - k^2 - 4k = -k(k+3)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k-2 & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & (k+3)(k-2)(-k-1) \end{bmatrix} \quad e \quad \underline{k \neq 2}$$

Nota : $-k(k+3)(k-2)+(k+3)(2-k) =$

$= (k+3)(k-2)(-k-1)$

Seja $\underline{k=2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k-2 & 2-k \\ 0 & 0 & -k-3 & -k(k+3) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_4 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

Concluindo :

$r(A) = 4 \iff k \neq -1 \wedge k \neq -3 \wedge k \neq 2$

$r(A) = 3 \iff k = -1 \vee k = -3 \vee k = 2$

4) $T : V \longrightarrow V$ e $\dim V = n$;

$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base para V ;

T é sobrejectiva.

Pretende-se mostrar que $\bar{U} = \{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base para V.

Demonstração :

Uma vez que $\bar{U}$ é constituído por n elementos, $\bar{U}$ será base para V se for um conjunto linearmente independente.

V.s.f.f.

Mostremos, então, que $\overline{U}$ gera o elemento zero de V de forma única, isto é,

$$\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \cdots + \alpha_n T(u_n) = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Dado que T é uma transformação linear a expressão anterior pode ser reescrita sob a forma

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) = 0_V$$

e, portanto,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \in N(T)$$

Uma vez que T é sobrejectiva, então $T(V) = V$ e $\dim T(V) = \dim V = n$, pelo que, atendendo ao teorema de dimensão,

$$\dim N(T) = \dim V - \dim T(V) = 0$$

ou seja,

$$N(T) = \{0_V\} \quad (T \text{ é injectiva})$$

Assim

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n = 0_V$$

pelo que, atendendo que U é um conjunto linearmente independente,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

como queríamos demonstrar.

[illegible]

5)

a)

$$tr(A) = 6 \Leftrightarrow \alpha + 6 + 0 = 6 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$\text{Cof } a_{32} = 9 \Leftrightarrow (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(-3\alpha - 3\delta) = 9 \Leftrightarrow 3\delta = 9 \Leftrightarrow \delta = 3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ \varphi & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \beta + 6 \\ 3 \\ \varphi + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3 - 6 = -3 \\ \lambda = 3 \\ \varphi = 6 - 3 = 3 \end{cases}$$

b) Designemos $\lambda_1 = 3 \neq 0$ (calculado em a))

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(duas colunas iguais)}$$

$\uparrow$
$C_2 + C_3$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ |A| = 0 \\ tr A = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Os valores próprios de A são: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 0$

Seja $\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 3}$

$$[3I - A] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow z = x + y \quad \forall_{x,y \in \mathbb{R}}$$

Wuj

$E(3) = \{ \vec{x} = (x, y, x+y) \in \mathbb{R}^3 \}$

Base $E(3) = \{ (1,0,1), (0,1,1) \}$

$\dim E(3) = 2$

Seja $\underline{\lambda_3 = 0}$

$$[0I - A]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \forall z \in \mathbb{R}$$

$E(0) = \{ \vec{x} = (-z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \}$

Base $E(0) = \{ (-1,1,1) \}$

$\dim E(0) = 1$

c) A matriz A possui três valores próprios (o polinómio característico de A é factorizável), que são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \quad \wedge \quad \lambda_3 = 0$$

Por outro lado

$$m_a(3) = m_g(3) = \dim E(3) = 2$$

$$m_a(0) = m_g(0) = \dim E(0) = 1$$

Podemos então concluir que, nestas condições, a matriz A possui três vectores próprios linearmente independentes

$$U = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \} = \{ (1,0,1), (0,1,1), (-1,1,1) \}$$

que formam uma base, U, para o espaço linear $\mathbb{R}^3$.

Conclui-se assim que a matriz A é diagonalizável.

Existe, portanto, uma matriz diagonal semelhante à

vira

matriz A

$$A_U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_U$$

definida em relação à base U e que se relaciona com a matriz A através da relação matricial

$$A_U = \left[M_U^{E_3} \right]^{-1} A \; M_U^{E_3}$$

onde $M_U^{E_3}$ é a matriz mudança de base, da base U para a base canónica $E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ para o espaço linear $\mathbb{R}^3$.

A matriz $M_U^{E_3}$ é dada por

$$M_U^{E_3} = (E_3)^{-1} U = I_3 \, U = U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo designada por matriz diagonalizadora da matriz A.

Wmg