Álgebra Linear B

COM+MEC

Exame da 1ª chamada da Época Normal – 2006/2007 – 12 de Janeiro de 2007

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia – Universidade do Minho

Curso: Nome: Número: Classificação:

A prova tem a duração de 120 minutos, é sem consulta e não é permitida a utilização de máquina de calcular. Durante a realização da prova os telemóveis devem estar desligados e só se pode abandonar a sala passados 20 minutos do seu início. A prova é constituído por três grupos e termina com a palavra "Fim". No início de cada grupo indicam-se as cotações na escala de 0 a 200.

Grupo I — Indique, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas usando para tal os caracteres "V" ou "F", respectivamente. Cotações — resposta certa: 5; resposta em branco: 0; resposta errada: -5, sendo 0 a cotação mínima neste grupo.

I.1 ☐ $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,-1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

I.2 ☐ A aplicação $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $f(A) = A^2$, é linear.

I.3 ☐ $\{1, x, x^2\}$ e $\{2, 2x, 2x^2\}$ são conjuntos geradores de $\mathbb{R}_2[x]$.

I.4 ☐ Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então, $\text{fer}(A) = A$.

I.5 ☐ Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido das operações $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ e $\alpha \odot (x_1, x_2) = (\alpha^2 x_1, \alpha^2 x_2)$. Então, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^2 : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$.

I.6 ☐ Seja A uma matriz triangular inferior. Então, A é uma matriz não-singular.

I.7 $\square$ $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

I.8 $\square$ Seja A uma matriz ortogonal de ordem 4. Então, $c(A) = 4$.

Grupo II — Complete, na folha do enunciado da prova sem apresentar cálculos nem justificações, as seguintes frases de modo a obter proposições verdadeiras. Cotações — resposta certa: 3; resposta em branco ou errada: 0.

II.1 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis. Se $A^{-1}XB^{-1} - A^{-1} = 0_{n\times n}$, então $X = \boxed{}$.

II.2 As matrizes $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} a & 6 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $a \in \mathbb{R}$, são comutáveis se e só se $a \in \boxed{}$.

II.3 Considere o sistema de equações lineares (S) cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(\alpha-2) \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) $c(A) = 1$ se e só se $\alpha \in \boxed{}$.

(b) Se $\alpha = 2$, então $c(A) = \boxed{}$.

(c) (S) é possível e determinado se e só se $\alpha \in \boxed{}$.

(d) Se $\alpha = 2$, então $CS_{(S)} = \boxed{}$.

II.4 Seja V um espaço vectorial tal que $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Então, $\dim(V) \boxed{}$.

II.5 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $T(x, y) = (x + y, 2x)$.

(a) $A_T = \boxed{}$.

(b) $\mathcal{N}_T = \boxed{}$.

II.6 Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tal que $|A| = 8$.

(a) $\left| \begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix} \right| = \boxed{}$.

(c) $|\operatorname{adj}(A)| = \boxed{}$.

(b) $|A^2 A^T A^{-1}| = \boxed{}$.

(d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix} = \boxed{}$.

II.7 (a) Sejam $x = (0, 2, 3)$ e $\mathcal{S}_1 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Então, $[x]_{\mathcal{S}_1} = \boxed{}$.

(b) Sejam $y = (2, 1, 3)$ e $\mathcal{S}_2 = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Então, $[y]_{\mathcal{S}_2} = \boxed{}$.

(c) Sejam $z = (1, 1, 0)$ e $\mathcal{S}_3 = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Então, $[z]_{\mathcal{S}_3} = \boxed{}$.

(d) Sejam $p = x^2 + x + 1$ e $\mathcal{S}_4 = (x^2, x^2 - 1, x + 2)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$. Então, $[p]_{\mathcal{S}_4} = \boxed{}$.

II.8 Sejam as matrizes $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right]$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } \ i \geq j, \\ 1 & \text{se } \ i < j. \end{cases}$

(a) $A^2 = \boxed{}$. (b) $AB = \boxed{}$. (c) $B^{-1} = \boxed{}$.

Grupo III — Responda, nas folhas que lhe foram distribuídas e por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar, bem como as respectivas justificações. Cotações: 20+10+(5+5)+20+20+20.

III.1 Seja A uma matriz quadrada tal que $A^p = \underline{0}$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Mostre que $(I - A)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{p-1} A^k$.

III.2 Defina conjunto gerador e base de um espaço vectorial.

III.3 Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{smallmatrix}\right]$ e o vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Mostre, sem o resolver, que o sistema de equações lineares dado é possível e determinado.

(b) Resolva o sistema de equações lineares através da Regra de Cramer.

III.4 Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{smallmatrix}\right]$ e o vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Resolva-o através do método de Gauss e do método de Gauss-Jordan.

III.5 Considere a seguinte definição: sejam os conjuntos A, B e C, e f uma aplicação de A em B e g uma aplicação de B em C. Então, chama-se composição de f com g, que se representa por $g \circ f$ e que se lê "g após f", à aplicação

$$\begin{array}{rrcl} g \circ f: & A & \longrightarrow & C \\ & x & \longmapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Considere, agora, as aplicações lineares $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $S(x, y) = (x + y, 2x, 0)$ e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(a, b, c) = (b, a - 3c)$. Verifique que $A_{S \circ T} = A_S A_T$.

III.6 Determine o espectro da matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, bem como o espaço próprio do valor próprio de menor módulo.

Fim.

Classifique numa escala de 1 (horrível) a 6 (espectacular) o *Maple TA*: $\square$.