<u>Problema</u>: Seja a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (2x+y+z,\ 2x+3y+2z,\ 3x+3y+4z) \qquad (1)$$

cuja representação matricial, em relação à base canónica

$$E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

para o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, é

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (2,2,3) \\ T(0,1,0) &= (1,3,3) \\ T(0,0,1) &= (1,2,4) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Determine os seus valores próprios.

Recorrendo ao polinómio característico

$$p(\lambda) = |\lambda I - \mathrm{T}| = \underset{\substack{\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow \\ c_1 - c_2 \qquad\qquad c_3 - c_2}}{\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -3 & -3 & \lambda-4 \end{vmatrix}} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 1-\lambda & \lambda-3 & 1-\lambda \\ 0 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 1-\lambda & \lambda-3 & 1-\lambda \end{matrix} \end{array} =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-1) - [-3(\lambda-1)(1-\lambda) - (1-\lambda)(\lambda-1)] =$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-3) + 4(\lambda-1)(1-\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-3) - 4(\lambda-1)^2 =$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-7)$$

as suas raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 7$. Dado que são todas reais ($\mathbb{R}^3$ é um espaço vectorial real) os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad ma(1) = 2 \quad (\text{raiz dupla})$$

$$\lambda_3 = 7 \quad \Rightarrow \quad ma(1) = 1 \quad (\text{raiz simples})$$

Convém notar que se deverá verificar

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 9 = tr(\mathrm{T})$$

$$\prod_{i=1}^{3} \lambda_i = 7 = |\mathrm{T}|$$

<u>NOTA</u>

$ma(\lambda)$: multiplicidade algébrica do valor próprio λ

b) Calcule os seus vectores próprios.

Seja $\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 1}$

$$[1I - T]X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left\{ x_1 = -x_2 - x_3 \quad \forall_{x_2, x_3 \in \mathbb{R}} \right.$$

O sistema é possível e duplamente indeterminado. Os vectores próprios de T associados a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ são

$$X(1) = \{ X = (-x_2 - x_3, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \}$$

Seja $\underline{\lambda_3 = 7}$

$$[7I - T]X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 3x_1 \\ x_2 = 2x_1 \end{array} \right. \quad \forall_{x_1 \in \mathbb{R}}$$

O sistema é possível e simplesmente indeterminado. Os vectores próprios de T associados a $\lambda_3 = 7$ são

$$X(7) = \{ X = (x_1, 2x_1, 3x_1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \}$$

c) Caracterize os espaços próprios de T associados a cada valor próprio

O espaço próprio associado a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ é

$$E(1) = \{ X = (-x_2 - x_3, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Trata-se de um subespaço de $\mathbb{R}^3$ que tem como base o conjunto

$$S_1 = \{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$$

e, portanto,

$$\dim E(1) = mg(1) = 2$$

NOTA

$mg(\lambda)$ = multiplicidade geométrica do valor próprio λ

Convém notar que $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$

O espaço próprio associado a $\lambda_3 = 7$ é

$$E(7) = \{X = (x_1, 2x_1, 3x_1) \in \mathbb{R}^3\}$$

Trata-se de um subespaço de $\mathbb{R}^3$ que tem como base o conjunto

$$S_7 = \{(1,2,3)\}$$

e

$$\dim E(7) = mg(7) = 1$$

<u>Confirmação</u> dos resultados encontrados: recorrendo a (1) tem-se

$$T(-1,1,0) = (-1,1,0) = 1\,(-1,1,0) \checkmark \quad (\lambda = 1)$$
$$T(-1,0,1) = (-1,0,1) = 1\,(-1,0,1) \checkmark \quad (\lambda = 1)$$
$$T(1,2,3) = (7,14,21) = 7\,(1,2,3) \checkmark \quad (\lambda = 7)$$

d) Mostre que a matriz T é diagonalizável; indique a sua matriz diagonalizadora.

A matriz T é diagonalizável se for possível encontrar uma matriz diagonal que lhe é semelhante, isto é, que representa a mesma transformação linear T em relação a uma outra base de vectores para o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Para que tal se verifique é necessário que seja possível definir uma base de vectores próprios de T para $\mathbb{R}^3$.

Assim, tendo em atenção que

i) $\dim E(1) = 2$

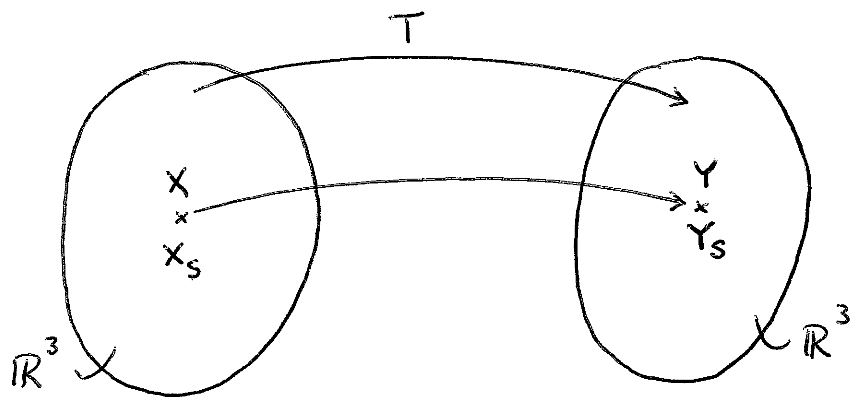
$\dim E(7) = 1$

ii) vectores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes

pode concluir-se que o conjunto de vectores próprios de T

$$S = \{(-1,1,0), (-1,0,1), (1,2,3)\}$$

é linearmente independente, constituindo uma base de vectores próprios para o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.



$$X_E = M_S^E X_S \qquad \begin{tikzcd} \boxed{E} \arrow[r, "T"] & \boxed{E} \\ \boxed{S} \arrow[u, bend left, "M_S^E"] \arrow[r, "T_{S,S}"] & \boxed{S} \arrow[u, bend right, "M_S^E"'] \end{tikzcd} \qquad Y_E = M_S^E Y_S$$

Nestas condições a matriz T é diagonalizável, já que a matriz diagonal

$$T_{S,S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{S,S} = \text{diag}\,(1,1,7)_{S,S}$$

definida em relação à base de vectores próprios S, representa a transformação linear T em relação à base S, sendo, por isso, uma matriz diagonal semelhante à matriz T.

Tem-se, então,

$$T_{S,S} = (M_S^E)^{-1}\ T\ M_S^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{S,S} \qquad (2)$$

onde M_S^E, a matriz de mudança de base de S para E, é designada por matriz diagonalizadora da matriz T.

Designando

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \qquad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

as matrizes que contêm, nas suas colunas, os vectores que formam as bases E e S, respectivamente, resulta

$$E X_E = \mathcal{S} X_S \iff X_E = E^{-1}\mathcal{S}\, X_S \implies M_S^E = E^{-1}\mathcal{S}$$

ou seja ($E = E^{-1} = I$)

$$M_S^E = \mathcal{S} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

é a matriz diagonalizadora da matriz T.

Ainda que tal não se justifique, confirmemos o resultado expresso em (2).

$$T M_S^E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 21 \end{bmatrix}$$

Sabendo que

$$|M_S^E| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \underset{\uparrow\, C_3 + C_1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-3-3) = 6$$

e

$$(M_S^E)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

resulta finalmente

$$(M_S^E)^{-1} T M_S^E = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 21 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{bmatrix}_{S,S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{S,S} = T_{S,S}$$

como era já previsto.

[signature]