Algumas funções reais importantes

Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

Algumas funções reais importantes

A. Funções trigonométricas

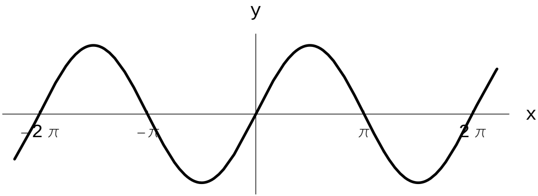
B. Funções trigonométricas inversas

C. Funções hiperbólicas

D. Funções hiperbólicas inversas

Função trigonométrica **seno**

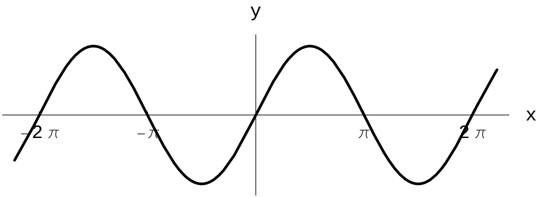
Função seno: $\sin x$



- Domínio: $D_{\sin} = \mathbb{R}$
- Contradomínio: $D'_{\sin} = [-1, 1]$
- Continuidade: contínua em $\mathbb{R}$
- É uma função ímpar: $\sin(-x) = -\operatorname{sen} x, \forall x \in \mathbb{R}$
- Zeros: $x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
- Periodicidade: é uma função periódica de período 2π

Definição: Função periódica
Uma função f é periódica se existe um número positivo p tal que $f(x+p) = f(x), \forall x \in D_f$. Ao menor valor de p chama-se período da função.

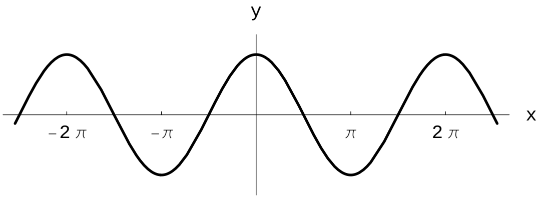
Função trigonométrica **seno**



- Sinal:
  positiva, $\sin x > 0$, para $x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[, \; k \in \mathbb{Z}$
  negativa,$\sin x < 0$, para $x \in]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi, [, \; k \in \mathbb{Z}$
- Máximo absoluto: 1 , nos pontos $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; k \in \mathbb{Z}$
- Mínimo absoluto:-1 , nos pontos $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \; k \in \mathbb{Z}$
- Monotonia:
  estritamente crescente nos intervalos $]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[, \; k \in \mathbb{Z}$
  estritamente decrescente nos intervalos $]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[, \; k \in \mathbb{Z}$
- Injectividade: **Não é injectiva**

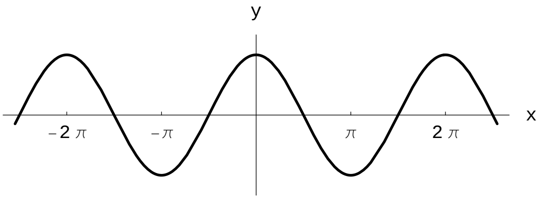
Função trigonométrica **cosseno**

Função cosseno: $\cos x$



- Domínio: $D_{\cos} = \mathbb{R}$
- Contradomínio: $D'_{\cos} = [-1, 1]$
- Continuidade: contínua em $\mathbb{R}$
- É uma função par: $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$
- Zeros: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$
- Periodicidade: é uma função periódica de período 2π
- Sinal:
  positiva, $\cos x > 0$, para $x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[, \;\; k \in \mathbb{Z}$
  negativa, $\cos x < 0$, para $x \in]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, [, \;\; k \in \mathbb{Z}$

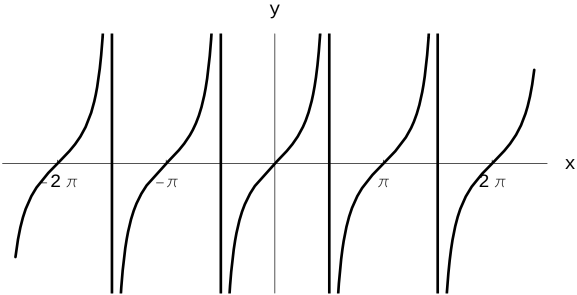
Função trigonométrica **cosseno**



- Máximo absoluto: 1 , nos pontos $x = 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$
- Mínimo absoluto: -1 , nos pontos $x = \pi + 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$
- Monotonia:
  estritamente decrescente nos intervalos $]2k\pi, \pi + 2k\pi, [, \;\; k \in \mathbb{Z}$;
  estritamente crescente nos intervalos $]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[, \;\; k \in \mathbb{Z}$
- Injectividade: **Não é injectiva**

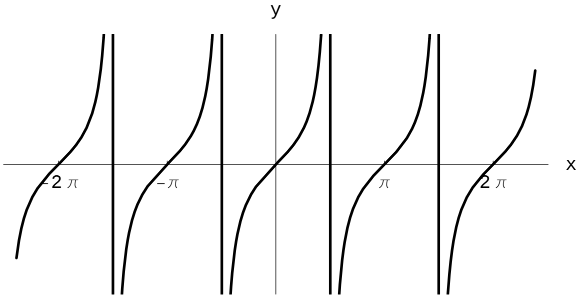
Função trigonométrica **tangente**

Função tangente: $tg\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$



- Domínio: $D_{tg} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio: $D'_{tg} = \mathbb{R}$
- Continuidade: contínua no seu domínio
- É uma função ímpar: $tg(-x) = -tg\, x, \forall x \in D_{tg}$
- Zeros: $x = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$
- Periodicidade: é uma função periódica de período π

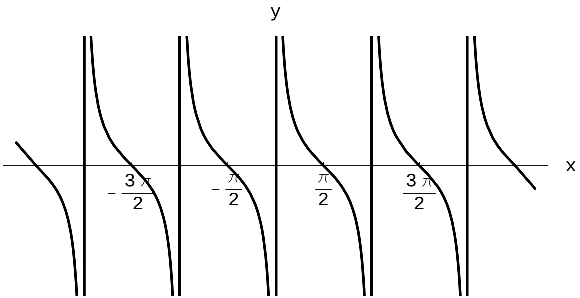
Função trigonométrica **tangente**



- Sinal:
  positiva, $tg\, x > 0$, para $x \in]2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$ e $x \in]\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
  negativa, $tg\, x < 0$, para $x \in]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$ e $x \in]\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[, \ k \in \mathbb{Z}$
- Máximos e mínimos: não tem
- Monotonia: estritamente crescente no seu domínio
- Injectividade: **Não é injectiva**

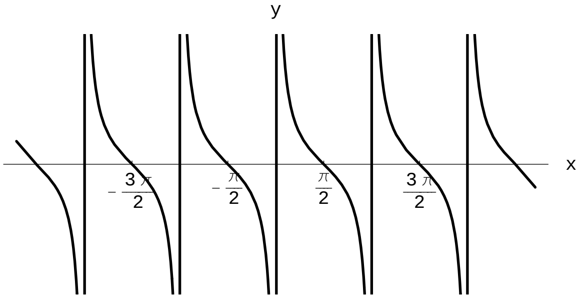
Função trigonométrica **cotangente**

Função cotangente: $cotg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$



- Domínio: $D_{cotg} = \mathbb{R} \backslash \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio: $D'_{cotg} = \mathbb{R}$
- Continuidade:contínua no seu domínio
- É uma função ímpar: $cotg(-x) = -cotg\, x, \forall x \in D_{cotg}$
- Zeros: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$
- Periodicidade: é uma função periódica de período π

Função trigonométrica **cotangente**



- Sinal:
  positiva, $cotg\, x > 0$, para $x \in]2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$ e $x \in]\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
  negativa, $cotg\, x < 0$, para $x \in]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$ e $x \in]\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[, \ k \in \mathbb{Z}$
- Máximos e mínimos: não tem
- Monotonia: estritamente decrescente no seu domínio
- Injectividade: **Não é injectiva**

Função trigonométricas **inversas**

As funções trigonométricas seno, cosseno, tangente e cotangente são funções não injetivas e, portanto, não possuem inversa.

Considerando restrições adequadas das funções trigonométricas, obtemos funções contínuas e bijetivas definidas em intervalos. A injetividade será conseguida excluindo do domínio todos os pontos onde a função se repete. A sobrejetividade será obtida eliminando do conjunto de chegada todos os pontos que a função não assume. As inversas das restrições assim defnidas serão também contínuas.

Função trignométrica inversa **arco-seno**

A função seno é injectiva quando restringida a um intervalo do tipo:

$$[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi],\ k\in\mathbb{Z}$$

De entre estas, chama-se **restrição principal** da função seno a

$$\begin{array}{rccc} \sin: & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & \mathbf{x} \hookrightarrow & & y=\sin x \end{array}$$

Definição: Função arco-seno

Chama-se função arco-seno à inversa da função seno, quando restringida ao intervalo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, e define-se por:

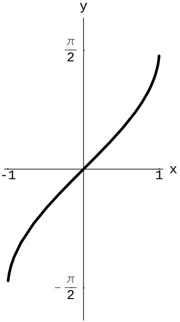
$$\begin{array}{rccc} \arcsin: & [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ & \mathbf{x} \hookrightarrow & & y=\arcsin x \end{array}$$

onde $\arcsin x$ indica o único arco do intervalo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ cujo seno é igual x. Assim,

$$y=\arcsin x\,,\ x\in[-1,1] \iff x=\operatorname{sen} y\,,\ y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Função trignométrica inversa **arco-seno**

Gráfico da função arco-seno:



- Domínio: $D_{\text{arcsin}} = [-1, 1]$
- Contradomínio: $D'_{\text{arcsin}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Continuidade: contínua no seu domínio
- É uma função ímpar
- Zeros: $x = 0$
- Sinal: negativa para $x \in]-1, 0[$ e positiva para $x \in]0, 1[$
- Máximo absoluto: $\frac{\pi}{2}$ em $x = 1$
- Mínimo absoluto: $-\frac{\pi}{2}$ em $x = -1$
- Monotonia: estritamente crescente em todo o seu domínio

Função trigonométrica inversa **arco-seno**

Pelo facto das funções arcsin e sin serem inversas uma da outra , tem-se

$$\arcsin(\sin x) = x, \ \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\arcsin y) = y, \ \ \forall y \in [-1, 1].$$

No entanto, apesar de fazer sentido calcular $\arcsin(\sin z)$, para $z \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

tem-se

$$\arcsin(\sin z) \neq z\,, \ \ \forall z \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

uma vez que $D'_{\text{arcsin}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Função trigonométrica inversa **arco-seno**

Exercício 1

1. Calcular:
   1.1 $\arcsin 1$
   1.2 $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$
   1.3 $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. Considere a função $h(x) = 2 + \arcsin(3x + 1)$. Determine:
   2.1 O domínio de h.
   2.2 O contradomínio da função h.
   2.3 Caracterize a função inversa de h.
   2.4 h(0)
   2.5 As soluções da equação $h(x) = 2 + \dfrac{\pi}{3}$

Função trigonométrica inversa **arco-cosseno**

A função cosseno é injectiva quando restringida a um intervalo do tipo:

$$[k\pi, \pi + k\pi],\ k \in \mathbb{Z}$$

De entre estas, chama-se **restrição principal** da função cosseno a

$$\begin{array}{rcl} \cos: & [0,\pi] \longrightarrow & [-1,1] \\ & \mathbf{x} \hookrightarrow & y = \cos x \end{array}$$

Definição: Função arco-cosseno
Chama-se função arco-cosseno à inversa da função cosseno, quando restringida ao intervalo $[0,\pi]$, e define-se por:

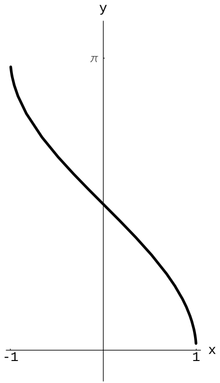
$$\begin{array}{rcl} \operatorname{arccos}: & [-1,1] \longrightarrow & [0,\pi] \\ & \mathbf{x} \hookrightarrow & y = \operatorname{arccos} x \end{array}$$

onde $\operatorname{arccos} x$ indica o único arco do intervalo $[0,\pi]$ cujo cosseno é igual x.
Assim,

$$y = \operatorname{arccos} x\,,\ x \in [-1,1] \iff x = \cos y\,,\ y \in [0,\pi]\,.$$

Função trigonométrica inversa **arco-cosseno**

Gráfico da função arco-cosseno:



- Domínio: $D_{\text{arccos}} = [-1, 1]$
- Contradomínio: $D'_{\text{arccos}} = [0, \pi]$
- Continuidade: contínua no seu domínio
- É uma função que não é par nem é ímpar
- Zeros: $x = 1$
- Sinal: é não negativa no seu domínio
- Máximo absoluto: π em $x = -1$
- Mínimo absoluto: 0 em $x = 1$
- Monotonia: estritamente decrescente em todo o seu domínio

Função trigonométrica inversa **arco-cosseno**

Pelo facto das funções arccos e cos serem inversas uma da outra , tem-se

$$\arccos(\cos x) = x, \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$\cos(\arccos y) = y, \quad \forall y \in [-1, 1].$$

No entanto, apesar de fazer sentido calcular $\arccos(\cos z)$, para $z \in \mathbb{R} \setminus [0, \pi]$, tem-se

$$\arccos(\cos z) \neq z\,, \quad \forall z \notin [0, \pi]\,,$$

uma vez que $D'_{\text{arccos}} = [0, \pi]$.

Função trigonométrica inversa **arco-cosseno**

Exercício 2
Calcular:

1.1 $\arccos 1$

1.2 $\arccos(-1)$

1.3 $\arccos(\frac{-\sqrt{2}}{2})$

1.4 $\arccos(\cos(5\pi))$

1.5 $\arccos(\cos(\frac{25\pi}{4}))$

1.6 $\sin(\arccos(-\frac{5}{13}))$

Função trigonométrica inversa **arco-tangente**

A função tangente é injectiva quando restringida a um intervalo do tipo:

$$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$$

De entre estas, chama-se **restrição principal** da função tangente a

$$\begin{array}{rccc} tg: &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} \hookrightarrow & y = tg\, x \end{array}$$

Definição: Função arco-tangente

Chama-se função arco-tangente à inversa da função tangente, quando restringida ao intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, e define-se por:

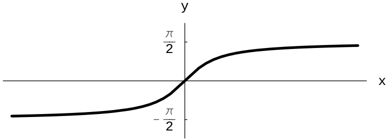
$$\begin{array}{rccc} arctg: & \mathbb{R} \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ & \mathbf{x} \hookrightarrow & y = arctg\, x \end{array}$$

onde $arctg\, x$ indica o único arco do intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ cujo tangente é igual x. Assim,

$$y = arctg\, x\,,\ x \in \mathbb{R} \iff x = tg\, y\,,\ y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

Função trigonométrica inversa **arco-tangente**

Gráfico da função arco-tangente:



- Domínio: $D_{arctg} = \mathbb{R}$
- Contradomínio: $D'_{arctg} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- Continuidade: contínua no seu domínio
- É uma função ímpar
- Zeros: $x = 0$
- Sinal: negativa para $x \in]-\infty, 0[$ e positiva para $x \in]0, +\infty[$
- Monotonia: estritamente crescente em todo o seu domínio

Função trigonométrica inversa **arco-cotangente**

A função cotangente é injectiva quando restringida a um intervalo do tipo:

$$]k\pi, \pi + k\pi[, \ k \in \mathbb{Z}$$

De entre estas, chama-se **restrição principal** da função cotangente a

$$\begin{array}{rll} cotg: &]0,\pi[\longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} \hookrightarrow & y = cotg\, x \end{array}$$

Definição: Função arco-cotangente

Chama-se função arco-cotangente à inversa da função cotangente, quando restringida ao intervalo $]0,\pi[$, e define-se por:

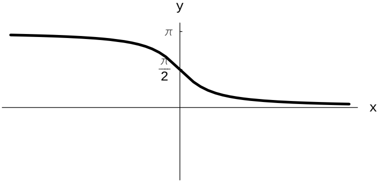
$$\begin{array}{rll} arccotg: & \mathbb{R} \longrightarrow &]0,\pi[\\ & \mathbf{x} \hookrightarrow & y = arccotg\, x \end{array}$$

onde $arccotg\, x$ indica o único arco do intervalo $]0,\pi[$ cujo tangente é igual x. Assim,

$$y = arccotg\, x\,, \ x \in \mathbb{R} \iff x = cotg\, y\,, \ y \in]0,\pi[.$$

Função trigonométrica inversa **arco-cotangente**

Gráfico da função arco-cotangente:



- Domínio: $D_{arccotg} = \mathbb{R}$
- Contradomínio: $D'_{arccotg} =]0, \pi[$
- Continuidade: contínua no seu domínio
- É uma função que não é par nem é ímpar
- Zeros: não tem
- Sinal:é sempre positiva para $x \in \mathbb{R}$
- Monotonia: estritamente decrescente em todo o seu domínio

Função Hiperbólicas

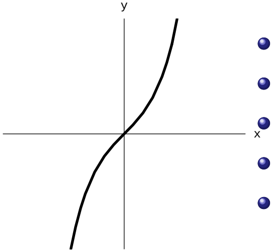
Vamos agora introduzir as funções hiperbólicas, apresentar algumas das suas propriedades e esboçar os seus gráficos. São funções que resultam de combinações de funções exponenciais e possuem propriedades semelhantes, do ponto de vista formal, às das funções trigonométricas.

Função **seno hiperbólico**

Definição: Função seno hiperbólico
Chama-se seno hiperbólico à função definida por :

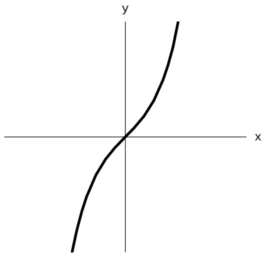
$$\begin{array}{rcl} sh: & \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} \hookrightarrow & sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

Gráfico da função seno hiperbólico:



- Domínio: $D_{sh} = \mathbb{R}$
- Contradomínio: $D'_{sh} = \mathbb{R}$
- Continuidade: contínua no seu domínio
- É uma função ímpar
- Zeros: $x = 0$

Função **seno hiperbólico**



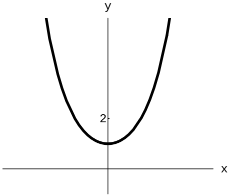
- Sinal: negativa para $x \in]-\infty, 0[$ e positiva para $x \in]0, \infty[$
- Monotonia: estritamente crescente em $\mathbb{R}$
- Injectividade: **É injectiva**
- Mais ainda, $\lim_{x\to+\infty} sh\, x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} sh\, x = -\infty$

Função **cosseno hiperbólico**

Definição: Função cosseno hiperbólico
Chama-se cosseno hiperbólico à função definida por :

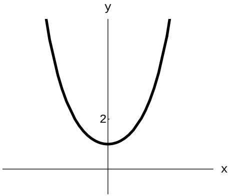
$$\begin{array}{rccl} ch: & \mathbb{R} \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & \mathbf{x} \hookrightarrow & ch\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

Gráfico da função cosseno hiperbólico:



- Domínio: $D_{ch} = \mathbb{R}$; Contradomínio: $D'_{ch} = [1, +\infty[$
- Continuidade: contínua em $\mathbb{R}$
- É uma função par

Função **cosseno hiperbólico**



- Zeros: não tem
- Sinal: é sempre positiva em $\mathbb{R}$
- Monotonia: estritamente decrescente para $x \in]-\infty, 0[$ e estritamente crescente para $x \in]0, +\infty[$
- Mínimo absoluto: 1 , no ponto $x = 0$.
- Injectividade: **Não é injectiva**
- Mais ainda, $\lim_{x \to +\infty} ch\, x = \lim_{x \to -\infty} ch\, x = +\infty$

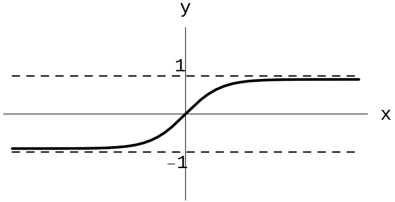
Definição: Função tangente hiperbólica
Chama-se tangente hiperbólica à função definida por:

$$\begin{aligned} th: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \quad]-1,1[\\ \mathbf{x} &\hookrightarrow \qquad th\,x = \frac{shx}{ch\,x} \end{aligned}$$

ou seja, definida por

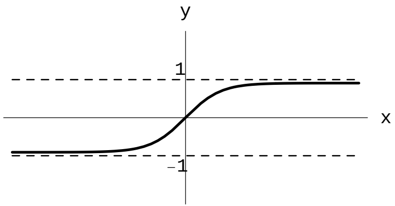
$$th\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Gráfico da função tangente hiperbólica:



- Domínio: $D_{th} = \mathbb{R}$; Contradomínio: $D'_{th} =]-1,1[$

Função **tangente hiperbólica**



- Continuidade: contínua em $\mathbb{R}$
- É uma função ímpar
- Zeros: $x = 0$
- Sinal: negativa para $x \in]-\infty, 0[$ e positiva para $x \in]0, +\infty[$
- Monotonia: estritamente crescente em todo o seu domínio
- Injectividade: **É injectiva**
- Mais ainda, $\lim_{x \to +\infty} th\, x = 1$ e $\lim_{x \to -\infty} th\, x = -1$. (A.H. y=-1 e y=1)

Função **cotangente hiperbólica**

Definição: Função cotangente hiperbólica

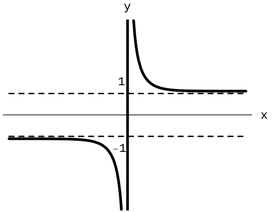
Chama-se cotangente hiperbólica à função definida por :

$$\begin{array}{rccc} coth: & \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash[-1,1] \\ & \mathbf{x} \hookrightarrow & coth\, x = \dfrac{ch\, x}{sh\, x} \end{array}$$

ou seja, definida por

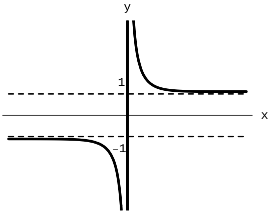
$$coth\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Gráfico da função cotangente hiperbólica:



- Domínio: $D_{coth} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; Contradomínio: $D'_{coth} = \mathbb{R}\backslash[-1,1]$

Função **cotangente hiperbólica**



- Zeros: não tem
- Sinal: negativa para $x \in]-\infty, 0[$ e positiva para $x \in]0, +\infty[$
- Monotonia: estritamente decrescente em todo o seu domínio
- Injectividade: **É injectiva**
- Mais ainda, $\lim_{x\to +0^+} \mathit{coth}\, x = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \mathit{coth}\, x = -\infty$. (A.V. x=0) e
- $\lim_{x\to +\infty} \mathit{coth}\, x = 1$ e $\lim_{x\to -\infty} \mathit{coth}\, x = -1$. (A.H. y=-1 e y=1)

Propriedades das funções hiperbólicas

Com manipulações algébricas simples, é fácil verificar que estas funções hiperbólicas verificam as seguintes propriedades:

1. $ch^2 x - sh^2 x = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $ch\, x + sh\, x = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$
3. $th^2 x + \dfrac{1}{ch^2 x} = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$
4. $coth^2 x - \dfrac{1}{sh^2 x} = 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$
5. $sh\,(x \pm y) = sh\, x\, ch\, y \pm ch\, x\, sh\, y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
6. $ch\,(x \pm y) = ch\, x\, ch\, y \pm sh\, x\, sh\, y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $sh\,(2x) = 2sh\, x\, ch\, x, \ \forall x \in \mathbb{R}$
8. $ch\,(2x) = ch^2 x + sh^2 x, \ \forall x \in \mathbb{R}$
9. $ch^2 x = \dfrac{ch\,(2x) + 1}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$
10. $sh^2 x = \dfrac{ch\,(2x) - 1}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Demonstração:

1. Seja $x \in \mathbb{R}$ qualquer. Então

$$\begin{aligned} ch^2 x - sh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = 1 \end{aligned}$$

6. Seja $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer. Então

$$\begin{aligned} ch\, x ch\, y + sh\, x sh\, y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = ch\,(x+y) \end{aligned}$$

As restantes alíneas demonstram-se de maneira semelhante.

Funções hiperbólicas inversas

Vamos agora definir as funções hiperbólicas inversas. Como vimos anteriormente, as funções *sh* , *th* e *coth* são injetivas, enquanto que a função *ch* não é injetiva e, portanto, não será invertível. Para esta última, iremos considerar uma restrição apropriada.

Definição: Função argumento do seno hiperbólico
Chama-se função argumento do seno hiperbólico à função inversa do seno hiperbólico e define-se por :

$$\begin{array}{rccc} argsh: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{y} & \hookrightarrow & x = argsh\, y \end{array}$$

onde

$$x = argsh\, y,\ \ y \in \mathbb{R} \iff y = sh\, x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Função argumento do seno hiperbólico

Cálculo da expressão analítica de *argsh*. Seja $x \in \mathbb{R}$ qualquer. Então

$$\begin{aligned} y = sh\, x \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Esta última condição é uma equação do segundo grau na incógnita e^x. Aplicando a fórmula resolvente, sai

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

sendo a solução com o sinal $+$ a única admissível, uma vez que

$$e^x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y - \sqrt{y^2 + 1} < 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Mas

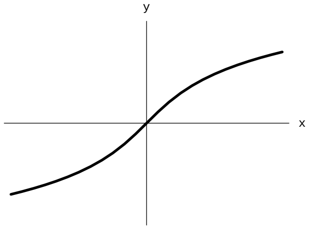
$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

donde,

$$argsh\, y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Função argumento do seno hiperbólico

Gráfico da função argumento do seno hiperbólico



- Domínio: $D_{argsth} = \mathbb{R}$; Contradomínio: $D'_{argsh} = \mathbb{R}$
- Continuidade: contínua no seu domínio
- É uma função ímpar
- Zeros: $x = 0$
- Sinal: negativa para $x \in]-\infty, 0[$ e positiva para $x \in]0, +\infty[$
- Monotonia: estritamente crescente em todo o seu domínio
- Mais ainda, $\lim_{x\to+\infty} argsh\, x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} argsh\, x = -\infty$

Função argumento do cosseno hiperbólico

Como a função cosseno hiperbólico não é injectiva, não admite função inversa. No entanto, observa-se que a função cosseno hiperbólico é injectiva quando restringida a um dos intervalos: $]-\infty, 0]$ ou $[0, \infty[$.

Definição: Função argumento do cosseno hiperbólico

Chama-se função argumento do cosseno hiperbólico à inversa da função cosseno hiperbólica, quando restringida ao intervalo $[0, \infty[$, e define-se por:

$$\begin{array}{rcl} argch: & [1,\infty[\longrightarrow & [0,\infty[\\ & \mathbf{y} \hookrightarrow & x = argch\, y \end{array}$$

onde

$$x = argch\, y,\ \ y \in [1, \infty[\iff y = ch\, x, \quad x \in [0, \infty[.$$

Função argumento do seno hiperbólico

Cálculo da expressão analítica de *argch*. Seja $x \geq 0$ qualquer. Então

$$\begin{aligned} y = ch\, x \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Esta última condição é uma equação do segundo grau na incógnita e^x. Aplicando a fórmula resolvente, sai

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Como $x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1$ a solução com o sinal $+$ é a única admissível (a solução com o sinal - corresponderia à inversa da restrição do ch para $x \leq 0$). Mas

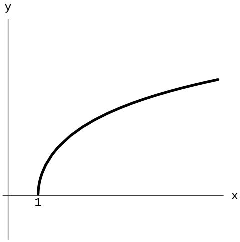
$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}\ x \geq 0,\ y \geq 1 \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)\ x \geq 0,\ y \geq 1$$

donde,

$$argch\, y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right),\ \forall y \in [1, +\infty[.$$

Função argumento do cosseno hiperbólico

Gráfico da função argumento do cosseno hiperbólico



- Domínio: $D_{argch} = [1, \infty[$; Contradomínio: $D'_{argch} = [0, \infty[$
- Continuidade: contínua no seu domínio
- É uma função que não é par nem é ímpar
- Zeros: $x = 1$
- Sinal: sempre positiva para $x \in]1, +\infty[$
- Monotonia: estritamente crescente em todo o seu domínio
- Mais ainda, $\lim_{x \to +\infty} argch\, x = +\infty$

Função argumento da tangente hiperbólica

A função tangente hiperbólica é injectiva em todo o seu domínio. Portanto, admite função inversa.

Definição: Função argumento da tangente hiperbólica

Chama-se função argumento da tangente hiperbólica à função inversa da tangente hiperbólica e define-se por :

$$\begin{array}{rcl} argth: &]-1,1[\longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{y} \hookrightarrow & x = argth\, y \end{array}$$

onde

$$x = argth\, y, \ \ y \in]-1,1[\iff y = th\, x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Função argumento da tangente hiperbólica

Cálculo da expressão analítica de *argth*.

Para $x \in \mathbb{R}$ e $y \in]-1,1[$ tem-se

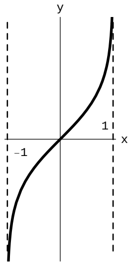
$$
\begin{aligned}
y = th\, x \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Leftrightarrow e^{2x}(1-y) = y + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \Leftrightarrow x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)
\end{aligned}
$$

donde,

$$argth\, y = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right), \ \forall y \in]-1,1[$$

Função argumento da tangente hiperbólica

Gráfico da função argumento da tangente hiperbólica



- Domínio: $D_{argth} =]-1, 1[$
- Contradomínio: $D'_{argth} = \mathbb{R}$
- Continuidade: contínua no seu domínio
- Zeros: $x = 0$
- Sinal: negativa para $x \in]-1, 0[$ e positiva para $x \in]0, 1[$
- Monotonia: estritamente crescente em D_{argth}
- Mais ainda, $\lim_{x \to 1^-} argth\, x = 1$ $\lim_{x \to -1^+} argth\, x = -1$.
  (A.V. x=-1 e x=1)

Função argumento da cotangente hiperbólica

A função cotangente hiperbólica é injectiva em todo o seu domínio. Portanto, admite função inversa.

Definição: Função argumento da cotangente hiperbólica
Chama-se função argumento da cotangente hiperbólica à função inversa da cotangente hiperbólica e define-se por :

$$\begin{array}{lll} argcoth: & \mathbb{R}\backslash[-1,1] \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ & \mathbf{y} \hookrightarrow & x = argcoth\, y \end{array}$$

onde

$$x = argcoth\, y,\ \ y \in \mathbb{R}\backslash[-1,1] \iff y = coth\, x, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Função argumento da cotangente hiperbólica

Cálculo da expressão analítica de *argcoth*.
Para $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $y \in \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$ tem-se

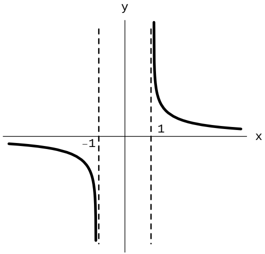
$$
\begin{aligned}
y = coth\, x \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \Leftrightarrow e^{2x}(y-1) = y + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad e^x = \sqrt{\frac{y+1}{y-1}} \Leftrightarrow x = \ln\left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\right)
\end{aligned}
$$

donde,

$$argcoth\, y = \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right), \ \forall y \in \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$$

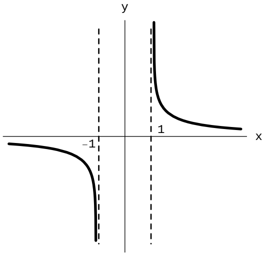
Função argumento da cotangente hiperbólica

Gráfico da função argumento da cotangente hiperbólica



- Domínio: $D_{argcoth} = \mathbb{R} \backslash [-1, 1]$
- Contradomínio: $D'_{argcoth} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$
- Continuidade: contínua no seu domínio
- É uma função ímpar
- Zeros: não tem

Função argumento da cotangente hiperbólica



- Sinal: negativa para $x \in]-\infty, -1[$ e positiva para $x \in]1, +\infty[$
- Monotonia: estritamente decrescente em $D_{argcoth}$
- Mais ainda, $\lim_{x \to 1^+} argcoth\, x = +\infty$. (A.V. x=1)
  $\lim_{x \to -1^-} argcoth\, x = -\infty$. (A.V. x=-1) e
- $\lim_{x \to -\infty} argcoth\, x = 0$,
  $\lim_{x \to +\infty} argcoth\, x = 0$. (A.H. y=0)