Departamento de Matemática e Aplicações 06/07/ 2015

Duração: 120 minutos

Exame de Análise Matemática EE

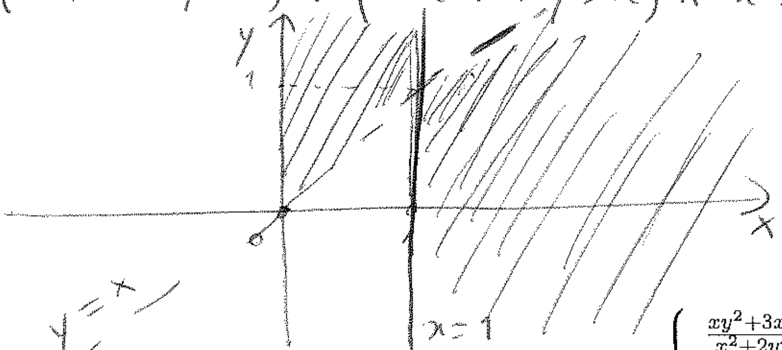
Nome: ____________________ Nr.: __________ Curso:

Apresente todos os cálculos efetuados.

1. Determine e represente geometricamente o domínio da função real de duas variáveis $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x-y}}$.

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (\ln x\geq 0 \wedge x-y>0) \vee (\ln x \leq 0 \wedge x-y<0) \wedge x>0\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x\geq 1 \wedge y<x) \vee (x\leq 1 \wedge y>x) \wedge x>0\}$



2. Estude a continuidade da função real definida em $\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2+3xy}{x^2+2y^4} \text{ se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ no seu domínio.

$D_f=\mathbb{R}^2$

- Para $(x,y)\neq(0,0)$, f é contínua pois é o quociente de polinómios e o denominador é diferente de zero.
- Para $(x,y)=(0,0)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy^2+3xy}{x^2+2y^4}\right)=0=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy^2+3xy}{x^2+2y^4}\right)$$

Usando a direção $y=mx$, $m\neq 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\left(\frac{x^2(m^2x+3m)}{x^2(1+2m^4x^2)}\right)=\frac{3m}{1}$$

Como depende de m, não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Logo, f não é contínua em $(0,0)$. f é contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

3. Considere a função real $f(x,y)=x^4y^2+x.\cos y$ onde $x=g(t)$ com $g(t)$ diferenciável em $\mathbb{R}$ e $y=ue^{t^2}+\sin u$. Determine a expressão de $\dfrac{\partial f}{\partial t}$.

f — x — t
f — y — t, u

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=(4x^3y^2+\cos y)\cdot g'(t)+(2x^4y-x\,\text{sen}\,y)\cdot 2tu.e^{t^2}$$

4. Considere a função $g(x, y, z) = y\,z\,e^y + x^2 \ln z$, definida no seu domínio.

(a) Determine a derivada da função g no ponto $(3, 0, 1)$ na direção do vetor $\vec{u} = (-1, 2, -2)$.

$$D_{\vec{u}}\, g(3,0,1) = \vec{\nabla} g(3,0,1) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$g'_x(x,y,z) = 2x \ln z$$

$$g'_y(x,y,z) = z e^y + y z e^y$$

$$g'_z(x,y,z) = y e^y + \frac{x^2}{z}$$

$$\vec{\nabla} g(3,0,1) = (0, 1, 9)$$

$$D_{\vec{u}}\, g(3,0,1) = (0,1,9) \cdot \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2\times 9}{3} = -\frac{16}{3}$$

(b) Determine a direção segundo a qual a taxa de variação da função g é máxima, a partir do ponto $(3, 0, 1)$ e indique qual o valor desse máximo. Justifique adequadamente a sua resposta.

$D_{\vec{u}}\, g(3,0,1) = \|\vec{\nabla} g(3,0,1)\| \, \|\vec{v}\| . \cos\alpha$

onde $\|\vec{v}\| = 1$ e α é o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{\nabla} g(3,0,1)$.

$D_{\vec{u}}\, g(3,0,1)$ atinge o valor máximo quando $\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0^\circ$.

Assim, $D_{\vec{u}}\, g(3,0,1)$ atinge o seu valor máximo quando $\vec{v} = \vec{\nabla} g(3,0,1) = (0,1,9)$

e $D_{\vec{u}}\, g(3,0,1) = \|\vec{\nabla} g(3,0,1)\| = \|(0,1,9)\| = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$.

(c) Determine os pontos onde a taxa de variação máxima é e^{-1} e é obtida na direção do vetor $-\vec{e}_3$.

Pela alínea anterior, a taxa de variação máxima satisfaz as condições pretendidas quando $\vec{\nabla} g(x,y,z) = (0, 0, -e^{-1})$. Assim,

$$\begin{cases} 2x \ln z = 0 \\ z e^y + y z e^y = z e^y (1+y) = 0 \\ y e^y + \dfrac{x^2}{z} = -e^{-1} \end{cases}$$

$x = 0 \;\vee\; z = 1$

$\boxed{\text{se } x = 0:}$

$$\begin{cases} y = -1 \\ -e^{-1} = -e^{-1} \end{cases} \vee$$

$(0, -1, z)$

se $z = 1$:

$$\begin{cases} y = -1 \\ -e^{-1} + x^2 = -e^{-1} \Leftrightarrow x^2 = 0 \end{cases}$$

$(0, -1, 1)$

$\boxed{\text{Pontos } (0,-1,z) \text{ com } z > 0.}$

5. Considere a função $f(x, y) = 2x^3 - 4x^2y^2 - x + 1$.

(a) Determine os pontos críticos de f.

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 - 8xy^2 - 1 = 0 \\ f'_y = -8x^2 y = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \;\vee\; y = 0$

se $x = 0$: $-1 = 0$ impossível

se $y = 0$: $6x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$

Pt^{os} críticos $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$

(b) Classifique os pontos críticos.

$f''_{x^2} = 12x - 8y^2$

$f''_{y^2} = -8x^2$

$f''_{xy} = -16xy$

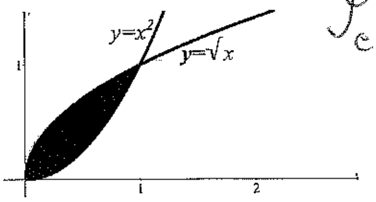
$\left|H\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)\right| = \begin{vmatrix} 2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = -\frac{8\sqrt{6}}{3} < 0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$ é ptº de sela.

$\left|H\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)\right| = \begin{vmatrix} -2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{8\times\sqrt{6}}{3} > 0$ e $f''_{x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right) = -2\sqrt{6} < 0$

logo $f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$ é máximo local de f.

6. Calcule $\oint_C (xy)dx + (x^2y^3)dy$ onde C é a fronteira da região sombreada na figura, usando o teorema de Green.



$\oint_C (xy)\,dx + (x^2y^3)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dA$ onde

D é a região do plano limitada por C e

$f_1(x,y) = xy$ e $f_2(x,y) = x^2y^3$.

A região D é
$0 \leq x \leq 1$
$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$

$\oint_C (xy)\,dx + (x^2y^3)\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (2xy^3 - x)\,dy\,dx =$

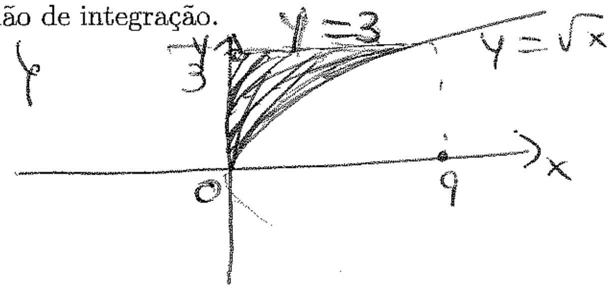
$= \int_0^1 \left[\frac{xy^4}{2} - xy\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} \cdot x^2 - x\sqrt{x} - \frac{x\,x^8}{2} + x^3\right) dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 - x^{3/2} - \frac{x^9}{2}\right) dx = \left(\frac{3}{8}x^4 - \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{x^{10}}{20}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{8} - \frac{2}{5} - \frac{1}{20} = -\frac{3}{40}$

7. Considere o integral duplo $\int_0^9 \int_{\sqrt{x}}^3 \cos y^3 \, dy\, dx$.

(a) Identifique e represente geometricamente a região de integração.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 9 \wedge \sqrt{x} \leq y \leq 3\}$



(b) Troque a ordem de integração.

$0 \leq y \leq 3$
$0 \leq x \leq y^2$

$\int_0^3 \int_0^{y^2} \cos y^3 \, dx\, dy$

(c) Calcule o integral. $\int_0^3 [x]_0^{y^2} \cos y^3 \, dy = \int_0^3 y^2 \cdot \cos y^3 \, dy = \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen} y^3\right]_0^3 =$

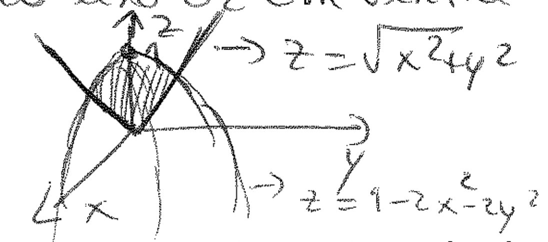
$= \frac{1}{3} \operatorname{sen} 27.$

8. Considere o sólido V definido em $\mathbb{R}^3$, limitado superiormente pela superfície de equação $z = 1-2x^2-2y^2$ e limitado inferiormente pela superfície de equação $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Identifique as superfícies envolvidas e esboce geometricamente o sólido V.

$z = 1-2x^2-2y^2 \rightarrow$ parabolóide ao longo do eixo Oz com vértice em $(0,0,1)$ virado para baixo.

$z = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow$ superfície cónica ao longo do eixo Oz com vértice na origem virado para cima



(b) Escreva o integral triplo que lhe permite calcular o volume do sólido V, usando coordenadas cartesianas.

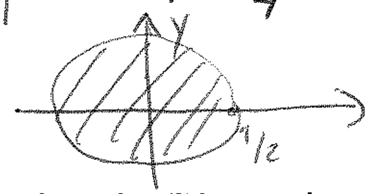
$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1-2x^2-2y^2$

Projeção no plano xOy

$$\begin{cases} z = 1-2x^2-2y^2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad z = 1-2z^2 \Leftrightarrow 2z^2+z-1=0 \Leftrightarrow z=-1 \vee z=\frac{1}{2}$$

$x^2+y^2 = \frac{1}{4}$ $\qquad -\sqrt{\frac{1}{4}-x^2} \leq y \leq \sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$

$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$



$$\int_{-1/2}^{\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1-2x^2-2y^2} 1 \, dz\,dy\,dx$$

(c) Calcule o volume do sólido, usando coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} R \leq z \leq 1-2R^2 \\ 0 \leq R \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \int_R^{1-2R^2} R \, dz\,dR\,d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \left(R(1-2R^2) - R^2\right) dR\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} (R-2R^3-R^2)\,dR\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2} - \frac{R^3}{3}\right]_0^{1/2} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\times 4} - \frac{1}{2\times 2^4} - \frac{1}{3\times 8}\right) d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{8}\left[1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right] = \frac{\pi}{4} \times \frac{5}{12} = \frac{5\pi}{48} \,//$$