FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

DEMEC
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

# ANÁLISE MATEMÁTICA I

## *Problemas Propostos para as Aulas Práticas*

**2020 / 2021**

***Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica***

***Mestrado Integrado em Engenharia Industrial e Gestão***

***Autores: Carlos A. Conceição António***

***Catarina Ferreira Castro***

***Luísa Costa Sousa***

# *A. Diferenciação em R*



# *B. Integral de Riemann em R*



# *C. Tópicos adicionais*

## *BIBLIOGRAFIA:*

**[1]** Carlos Conceição António; ANÁLISE MATEMÁTICA I - Conteúdo Teórico e Aplicações (edição aumentada), AEFEUP, 2017. ISBN: 978-989-99559-6-7 (edição em português).

**[2]** Larson, R., Hostetler, R.P., Edwards, B.H.; "Cálculo", 8ª Edição, McGraw-Hill Interamericana. ISBN: 85-86804-56-8 (vol.1), 85-86804-82-7 (vol.2).

**[3]** Tom M. Apostol, "*Cálculo*", Editora Reverté, Ltd. (editor), Vol.1.

**[4]** Michael Spivak, "*Cálculo Infinitesimal*", Editora Reverté, S.A. (editor), Vol.1.

**[5]** G.H. Edwards e D.E. Penney, "*Calculus with analytic geometry*", Fifth Edition, Prentice Hall, New Jersey, ISBN: 0-13-736331-1

**[6]** Ana Alves de Sá e Bento Louro, "Sucessões e Séries, Teoria e Prática", Escolar Editora, 2008. ISBN: 978-972-592-238-5

# *A. DIFERENCIAÇÃO EM R*

## 1. REGRAS DE DERIVAÇÃO – REVISÕES E NOVAS APLICAÇÕES

### 1.1 Regras de Derivação

Calcular a derivada de *f(x)* considerando que *x* toma unicamente os valores para os quais a fórmula que define *f(x)* tem significado:

**1.**

$$f(x)=\sqrt[5]{\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{3x^7} \qquad \text{Solução: } f'(x)=-\frac{1}{5x\sqrt[5]{x}}+\frac{7x}{3}\sqrt[3]{3x}$$

**2.**

$$f(x)=\frac{5\pi}{x^2+x+3}$$

**3.**

$$f(x)=\frac{x^5}{x^2+1}+\sqrt{x} \qquad \text{Solução: } f'(x)=\frac{3x^6+5x^4}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**4.**

$$f(x)=x^{3/2}+\tfrac{5}{2}x^2$$

**5.**

$$f(x)=x^2e^{-x} \qquad \text{Solução: } f'(x)=e^{-x}\left(2x-x^2\right)$$

**6.**

$$f(x)=\frac{e^x-x-1}{x^2}$$

**7.**

$$f(x)=\exp\left(x^2+{}^1\!/_x+3\right) \qquad \text{Solução: } f'(x)=e^{x^2+\frac{1}{x}+3}\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)$$

**8.**

$$f(x)=3x\,ln(x)$$

**9.**

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{2x}$$

**10.**

$$f(x)=3x\ln(3x^2+1) \qquad \text{Solução: } f'(x)=3\ln(3x^2+1)+\frac{18x^2}{3x^2+1}$$

**11.**

$$f(x)=\frac{1}{1+\ln(x)}x^{3/2}$$

**12.**

$$f(x)=\ln(\ln(x+1)) \qquad \text{Solução: } f'(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$$

**13.**

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \qquad \text{Solução: } f'(x)=\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+2)}$$

**14.**

$$f(x)=e^{1/x}\ln(x)$$

**15.**

$$f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^4+x+1)} \qquad \text{Solução: } f'(x)=\frac{\frac{2x}{x^2+1}\ln(x^4+x+1)-\frac{4x^3+1}{x^4+x+1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^4+x+1)\right]^2}$$

**16.**

$$f(x)=\frac{e^x\log(x+1)}{x^2}$$

**17.**

$$f(x)=\frac{\log(x)}{2^x}$$

**18.**

$$f(x)=x^e+e^x+5^{x-1}$$

**19.**

$$f(x)=5\cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{Solução: } f'(x)=\frac{5}{x^2}sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

**20.**

$$f(x)=x^4\cos(x) \qquad \text{Solução: } f'(x)=4x^3\cos(x)-x^4 sen(x)$$

**21.**

$$f(x)=x\,sen(\tfrac{\pi}{2}x)sen(x^{-1})$$

**22.**

$$f(x)=sen(xe^{x}) \qquad \text{Solução: } f'(x)=e^{x}(x+1)\cos(xe^{x})$$

**23.**

$$f(x)=tg(x^{2}+1)$$

**24.**

$$f(x)=\ln(x)\ tg(x^{2}) \qquad \text{Solução: } f(x)=\frac{1}{x}tg(x^{2})+2x\ \ln x\ \sec^{2}\left(x^{2}\right)$$

**25.**

$$f(x)=\sec(x)+\log(x) \qquad \text{Solução: } f'(x)=\sec(x)tg(x)+\frac{1}{x}$$

**26.**

$$f(x)=\sec(x)+\operatorname{cosec}(x)$$

**27.**

$$f(x)=x^{2}tg(x^{3})$$

**28.**

$$f(x)=\log(\cos(x))+tg(\log(x))$$

**29.**

$$f(x)=sen^{2}(x+1)+tg(x^{3})$$

**30.**

$$f(x)=\cos(\sqrt{x})+sen^{2}(x) \qquad \text{Solução: } f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}sen(\sqrt{x})+2sen(x)\cos(x)$$

**31.**

$$f(x)=2tg(e^{x})-5\sec(x)+\tfrac{\pi}{2}$$

**32.**

$$f(x)=\frac{tg(x)+sen(x^{2}+1)}{\cos^{2}(x)}$$

**33.**

$$f(x)=(\text{sen }x)^{\text{tg }x} \qquad \text{Solução: } f'(x)=\left(sen(x)\right)^{tg(x)}\left(\sec^{2}(x)\ln(sen(x))+1\right)$$

**34.**

$$f(x)=e^{\text{tg}(x)\ln(\text{sen}(x))}$$

**35.**

$f(x)=(\ln(x))^{1/x}$ Solução: $f'(x)=[\ln(x)]^{\frac{1}{x}}\left[-\dfrac{\ln(\ln(x))}{x^2}+\dfrac{1}{x^2\ln(x)}\right]$

**36.** $f(x)=(\sec(x)+3)^{\ln(x)}$

Solução: $f'(x)=(\sec(x)+3)^{\ln(x)}\left[\dfrac{\ln(\sec(x)+3)}{x}+\dfrac{\ln(x)\sec(x)tg(x)}{\sec(x)+3}\right]$

## 1.2 Derivação da função inversa

Usando o conceito de derivada da inversa de uma função calcule a derivada das funções:

**37.**

$$f(x)=arcsen(x)$$

**38.**

$$f(x)=arccos(x)$$

**39.**

$$f(x)=arctg(x)$$

**40.**

$$f(x)=arcsec(x)$$

**41.**

$$f(x)=arccotg(x)$$

**42.**

$$f(x)=arccossec(x)$$

**43.**

$f(x)=arcsen\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ Solução: $f'(x)=\dfrac{-2}{(1+x^2)\sqrt{(2+x^2)}}$

**44.**

$$f(x)=\frac{arctg(x)}{x^2}$$

**45.**

$$f(x)=x^7\left(\tfrac{\pi}{2}-arctg(x)\right)$$

**46.**

$$f(x)=\frac{arctg\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1}$$

**47.**

$$f(x)=\log\left(arctg\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$$

**48.**

$$f(x)=arc\sec(\ln x)$$

**49.**

$$f(x)=\operatorname{arccosec}(x^2)+sen(sen(sen(x)))$$

Solução: $$f'(x)=\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}+\cos(sen(senx))\,\cos(senx)\,\cos x$$

**50.**

$$f(x)=\left(arctg\left(\pi\sqrt{x}\right)\right)^3$$

## 1.3 Gráficos de funções

Traçar o gráfico de cada uma das seguintes funções:

**51.**

$$f(x)=3\sec(x)$$

**52.**

$$f(x)=\cos(x^2)$$

**53.**

$$f(x)=arctg(x)+\frac{\pi}{2}$$

**54.**

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-1}$$

**55.**

$$f(x)=\operatorname{cosec}(x)$$

**56.**

$$f(x)=\operatorname{cotg}(x)$$

## 1.4 Derivada da função composta (regra da cadeia): exercícios de aplicação

**a)** O volume de um cubo cresce à razão de 300 cm$^3$/min no instante em que a aresta é 20 cm. Qual a razão de variação da aresta nesse instante? (Solução: 0.25cm/min)

**b)** Um pequeno balão esférico está a ser cheio de gás à razão de 1m$^3$/s. Qual a razão de crescimento do diâmetro, 2 s depois da operação começar. (Solução: $\frac{2}{\sqrt[3]{12^2\pi}}$ m/s). Qual a velocidade de crescimento da área superficial do balão? (Solução: $4\sqrt[3]{\frac{\pi}{12}}$ m$^2$/s **)**

**c)** Verte-se água num tanque cónico invertido (vértice para baixo) à razão de 2cm$^3$/s. Qual a razão de variação do nível de água quando esta atinge metade da altura do cone?

**d)** No topo de um poste com 20 m de altura está instalado um foco de luz. Uma bola é largada de 20 m de altura a uma distância de 15 m do poste. Calcular a velocidade de deslocamento da sombra da bola no solo quando decorreu 0,5 s após a largada. (Obs.: considerar que a queda da bola se faz de acordo com a seguinte lei de espaços: $s = 0.5\,g\,t^2$).

**e)** Uma escada de 5 m de altura está apoiada numa parede vertical. Se a base da escada é arrastada horizontalmente da parede a 5m/s, a que velocidade desliza a parte superior da escada ao longo da parede quando a base se encontra a 3 m desta? (Solução: 3.75m/s)

**f)** Um menino soltando um papagaio liberta a corda a 0.2 m/s quando o papagaio se move horizontalmente a uma altura de 10 m. Supondo a corda tensa determine a velocidade do papagaio quando a corda está com 12.5 m. (Solução: 1/3 m/s)

**g)** Enche-se um recipiente de água, à razão de 100 cm$^3$/s. O recipiente tem 3 m de comprimento e a secção perpendicular a esta dimensão é trapezoidal, de altura 50cm, de base inferior 25 cm e base superior 1 m. A que velocidade sobe o nível da água quando a profundidade da água é de 25 cm. (Solução: $5.33\times10^{-3}$ cm/s)

**h)** Se $y$ é uma função de $u$ e $u$ função de $x$ e se existe $d^2y/dx^2$, então prove que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{du^2}$$

**i)** Se $y$ é uma função diferenciável de $u$, $u$ uma função diferenciável de $v$ e $v$ uma função diferenciável de *x*, então prove que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

**j)** Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+1/x}$ se $x \neq 0$, e seja $g(x) = \dfrac{1}{1+1/f(x)}$. Calcular $f'(x)$ e $g'(x)$.

## 1.5 Outros exercícios de aplicações de derivadas

**a)** Em que pontos o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ tem recta tangente horizontal?

**b)** Ao vender *x* unidades de um produto obtém-se um lucro dado por

$$P(x) = 50\sqrt{x} - 0.5x - 500 \quad , \quad \text{para } 0 \leq x \leq 8000$$

Qual a taxa de variação de *P* relativamente a *x*, quando *x* = 900 ou *x* = 1600?

**c)** Determinar as equações das duas rectas que são tangentes simultaneamente aos gráficos das funções $y = x^2$ e $y = -x^2 + 6x - 5$. Faça um esboço destes gráficos.

**d)** Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e que é paralela à recta $x + 2y - 6 = 0$.

**e)** Determinar as equações das rectas tangentes ao gráfico de $y = 4x - x^2$ e que passam pelo ponto (2,5).

**f)** Analisar se existe algum valor de *x* em $[0, 2\pi[$ tal que a taxa de variação de $y = secx$ e de $y = cosec\, x$ são iguais.

**g)** Verifique que a função $y = \dfrac{1}{1 + x + ln\,x}$ satisfaz a equação $x\,y' = y\,(y\,ln\,x - 1)$.

**h)** Determinar o ângulo entre as curvas $y = x^2$ e $y = x^3$ em cada ponto de intersecção.

## 2. NOÇÃO DE DIFERENCIAL E REGRAS DE CÁLCULO

(Aplicações e exercícios introduzidos nas aulas teóricas)

## 3. TEOREMA DE CAUCHY E REGRA DE L'HÔPITAL

Calcule os seguintes limites usando a regra de L'Hôpital

**a)** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-x}\sqrt{x}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

**d)** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (sen\,x)^x$ **e)** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - (1 + x)}{x^3}$ **f)** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{ln\,x}{x^2 - 1}$

**g)** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{sen\,2x}{sen\,3x}$ **h)** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (e^x + x)^{1/x}$

## 4. APROXIMAÇÃO POLINOMIAL

**4.** Obtenha os polinómios de Taylor das seguintes funções no ponto dado e com o grau indicado. Escreva a fórmula de Taylor com resto de Lagrange correspondente a cada uma das alíneas

**a)** $f(x) = e^x$ , ponto $x_o = 0$ , grau $n$

**b)** $f(x) = cos\,x$ , ponto $x_o = 0$ , grau $2n$

**c)** $f(x) = sen\,x$ , ponto $x_o = \pi/2$ , grau $2n$

**d)** $f(x) = log\,x$ , ponto $x_o = 2$ , grau $n$

**e)** $f(x) = 1/x$ , ponto $x_o = 2$ , grau $n$

**f)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ , ponto $x_o = 1$ , grau $n$

# 5. SÉRIES DE TAYLOR como limite dos polinómios de Taylor

(Aplicações e exercícios introduzidos nas aulas teóricas)

# 6. SÉRIES NUMÉRICAS

**6.1** Prove que as seguintes séries são convergentes e têm a soma indicada

**a)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)} = \frac{1}{2}$

**b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$

**c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$

**d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$

**e)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$

**f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$

**6.2** Calcule a soma, se existir, das séries:

**a)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$

**b)** $\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$

**c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$

**6.3** Classifique as séries:

**a)** $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\,(n-1)}$

**b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,!}{(n+2)!}$

**c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$

**d)** $\sum_{n=1}^{\infty} n \; sen \, \frac{1}{n}$

**e)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n\,(n+1)} - \frac{4}{n} \right)$

**f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{8^n} - \frac{1}{n\,(n+1)} \right)$

**6.4** Estude a convergência das séries:

**a)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n\,(n+1)}$

**b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,!}{e^n}$

**c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

**d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$

**e)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$

**f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^2 + 2n}{3^{n+1}\, n\,(n+2)}$

**g)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$

**h)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

**i)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{log(e^n + e^{-n})}$

**j)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$

**k)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

**l)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

**m)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2+n^3}$

**n)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

# *B. INTEGRAL DE RIEMANN EM R*

## 7. O CONCEITO DE INTEGRAL DEFINIDO

**7.1** Utilizando os integrais já conhecidos e as propriedades do integral definido, calcule:

**a)** $\int_1^2 (5x^4-1)\ dx$ **b)** $\int_0^2 (5x^3-3x+6)\ dx$

**c)** $\int_{-1}^0 (x+1)^2\ dx$ **d)** $\int_{-1}^4 (1-t)(t-2)\ dt$

**e)** $\int_0^3 (2x-5)^5\ dx$ **f)** $\int_{-2}^3 \left|x^2-1\right|\ dx$

**g)** $\int_{-1}^3 \left|x(1-x)\right|\ dx$ **h)** $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

**i)** $\int_4^1 \sqrt[5]{5x}\ dx$ **j)** $\int_1^8 4\ \sqrt[3]{x-1}\ dx$

**k)** $\int_1^4 \frac{t-3}{\sqrt{t}}\ dt$ **l)** $\int_1^3 \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) dx$

**7.2** Calcule os seguintes integrais:

**a)** $\int_0^2 f(x)\ dx$ sendo $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 2-x\ , & \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

**b)** $\int_0^1 g(t)\ dt$ sendo $g(t)=\begin{cases} t & , \quad 0 \le t \le c \\ c-\dfrac{1-t}{1-c} & , \quad c < x \le 1 \end{cases}$

**7.3** Determine um polinómio quadrático tal que:

$$P(0)=P(1)=0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 P(x)\ dx = 1$$

**7.4** Seja $f$ uma função cujo domínio contém $-x$ sempre que contém $x$. Se $f$ é integrável em [0,b], prove que:

**a)** $\int_{-b}^b f(x)\ dx=0$ se $f$ é ímpar **b)** $\int_{-b}^b f(x)\ dx = 2\int_0^b f(x)\ dx$ se $f$ é par

**7.5** Calcule $\int_a^b sen\, x\; dx$ em cada um dos casos seguintes e interprete o resultado em termos de área

**a)** $a=0 \quad , \quad b=p/2$ **b)** $a=-p/2 \quad , \quad b=p/2$

# 8. CÁLCULO DE ÁREAS E TEOREMAS DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

**8.1** Calcule a área da região **S** entre os gráficos de $f$ e $g$ sobre [a,b], sendo

$$f(x) = |x+1|+|x+2| \qquad g(x)= x^2+3x \qquad a=-3 \quad \text{e} \quad b=0$$

**8.2** Calcule as áreas das regiões limitadas por:

**a)** $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ e as rectas $x=-1$ e $x=1$

**b)** $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1-x^2$

**c)** $f(x) = \sqrt{x}$ , $y=x$ e $x=2$

**d)** $f(x)=|x-1|$ , $g(x) = x^2-2x$ , $x=0$ e $x=2$

**e)** $f(x)=|x|+|x-1|$ , $g(x)=0$ , $x=-1$ e $x=2$

**f)** $f(x)=|x|$ , $g(x) = 1-x^2$

**g)** $f(x) = 4-x^2$ , $g(x) = 8-2x^2$ , $x=-2$ e $x=2$

**8.3** Determine valores que satisfazem o Teorema do Valor Médio para integrais nos seguintes casos

**a)** $\int_{-1}^{3} (3x^2-2x+3)\, dx = 32$ **b)** $\int_1^8 4\sqrt[3]{x}\; dx = 45$

**8.4** Calcule em cada caso o valor médio de *f(x)* no intervalo indicado.

**a)** $f(x)=cos\, x \qquad x\in[-\pi/2\ ,\ \pi/2]$

**b)** $f(x)=(sen\, x)^2 \qquad x\in[0\ ,\ \pi/2]$

# 9. TEOREMAS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO

**9.1** Calcule os seguintes integrais indefinidos:

**a)** $\int_0^x (4t^2+5t+6)\,dt \qquad x\in\mathbf{R}$

**b)** $\int_{\pi/2}^x \cos t\ \ sen\ t\ dt \qquad x\in\mathbf{R}$

**c)** $\int_{-2}^x f(t)\,dt \qquad x\in\mathbf{R}$ e $f(t)=\begin{cases} \left|-t^2+1\right| & , \quad t\le 2 \\ t+1 & , \quad t>2 \end{cases}$

**d)** $\int_{-1}^x |\,t\,|\,dt \qquad x\in\mathbf{R}$

**9.2** Uma função $f$ é contínua para o todo $x\in\mathbf{R}$ e satisfaz a equação

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}+x^2+sen\ 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$$

Calcule $f(\pi/2)$ e $f'(\pi/4)$.

**9.3** Encontre uma função $f$ contínua e um valor da constante $c$ tais que:

**a)** $\int_c^x f(t)\,dt = cos\,2x-\frac{1}{2} \qquad x\in\mathbf{R}$

**b)** $\int_c^x f(t)\,dt = sen\,x - x\,cos\,x-\frac{1}{2}x^2 \qquad x\in\mathbf{R}$

**c)** $\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 t^2 f(t)\,dt+\frac{x^{16}}{8}+\frac{x^{18}}{9}+c \qquad x\in\mathbf{R}$

**9.4** Sem calcular os integrais, determinar em cada caso $f'(x)$, sendo $f(x)$ respetivamente:

**a)** $\int_0^x (1+t^2)^{-3}\,dt$ **b)** $\int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt$ **c)** $\int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt$

**9.5** Em cada caso calcule $f(2)$ sabendo que $f$ é contínua e que satisfaz, para todo o $x\ge 0$, cada uma das fórmulas seguintes

**a)** $\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$ **b)** $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^2(1+x)$

**c)** $\int_0^{f(x)} t^2\ dt = x^2(1+x)$ **d)** $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\ dt = x$

**9.6** Determine uma função $h$ contínua, não nula e derivável que satisfaça a equação

$$\left[h(x)\right]^2 = \int_0^x h(t)\ \frac{sen\,t}{1+cos\,t}\ dt$$

# 10. PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO E POR PARTES

**10.1** Primitive em **R** a função $f(x) = |x|$

**10.2** Seja $f(x)$ uma função de variável real tal que $f'(x) = e^{|x|}$ e $f(o) = 1$. Determine $f(x)$.

**10.3** Calcule as seguintes primitivas usando o seu conhecimento de derivadas e o método de substituição

**a)** $\int \sqrt{x+1}\ dx$ **b)** $\int \frac{1}{4+x^2}\ dx$ **c)** $\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+2e^x}}\ dx$

**d)** $\int \frac{x^2+5x+6}{x^2+4}\ dx$ **e)** $\int a^x\ dx$ ,a > 0 **f)** $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\ dx$

**g)** $\int 2^{3x}\ dx$ **h)** $\int x\ sec^2(x^2)\ dx$ **i)** $\int \frac{log\,x}{x}\ dx$

**j)** $\int cotg\,x\ dx$ **k)** $\int \frac{4}{(1+2x)^3}\ dx$ **l)** $\int cos\,x\ sen^2 x\ dx$

**m)** $\int \frac{2a}{(a-x)^2}\ dx$ **n)** $\int \frac{x\ e^{x^2-1}}{e^{x^2-1}-1}\ dx$ **o)** $\int \frac{1}{a^2-x^2}\ dx$

**p)** $\int x^2 cos\,x^3\ dx$ **q)** $\int \frac{x^3}{x^4+a^4}\ dx$ **r)** $\int sec\ 2x\ \ tg\,2x\ \ dx$

**s)** $\int \frac{x}{a+bx}\ dx$ **t)** $\int cosh\,x\ dx$ **u)** $\int \frac{x^2+1}{x-1}\ dx$

**v)** $\int \cos x \ \ sen\, x \ \ e^{\cos^2 x} \ dx$ **x)** $\int \frac{x}{(x+1)^2} \ dx$

**10.4** Determine em cada um dos seguintes casos uma primitiva *P(x)* de *f(x)*, sabendo que *P(0)=0*.

**a)** $f(x)=3^x e^x$ **b)** $f(x)=x^2 e^{x^3}$ **c)** $f(x) = e^x \big/ (1-e^{2x})^{1/2}$

**10.5** Calcule ainda pelo método de substituição

**a)** $\int \frac{1}{x^2} e^{1/x} \ dx$ **b)** $\int 16^{x^2-1} \ 2x \ dx$

**c)** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \ dx$ **d)** $\int x \sqrt{1+3x} \ dx$

**e)** $\int x^2 \sqrt{1+x} \ dx$ **f)** $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x}} \ dx$

**g)** $\int t\,(t+t)^{1/4} \ dt$ **h)** $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} \ dx$

**i)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \ dx$ **j)** $\int \frac{x}{1+x^2+(1+x^2)^{3/2}} \ dx$

**k)** $\int \frac{sen\ x}{(3+\cos x)^2} \ dx$ **l)** $\int \frac{sen\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \ dx$

**m)** $\int x^{-2} \ sen\frac{1}{x} \ dx$ **n)** $\int sen(2x) \ \sqrt{1+3\cos^2 x} \ dx$

**10.6** Calcule integrando por partes

**a)** $\int x \cos x \ dx$ **b)** $\int x^2 \ sen\, x \ dx$

**c)** $\int \ sen^2 x \ dx$ **d)** $\int \cos^5 x \ dx$

**e)** $\int \cos^4 x \ dx$ **f)** $\int e^x \cos x \ dx$

**g)** $\int x^2 \; e^x \; dx$ **h)** $\int log\,(1+x^2)\; dx$

**i)** $\int x \; log^2 x \; dx$ **j)** $\int x^2 \; log(1+x)\; dx$

**k)** $\int \; arcsen \frac{x}{\sqrt{2}} \; dx$ **l)** $\int x \; arctg\, x \; dx$

**m)** $\int \frac{x \; arctg\, x}{\sqrt{1+x^2}} \; dx$ **n)** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \; dx$

**o)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \; dx$ **p)** $\int sen^2 x \; cos^2 x \; dx$

**q)** $\int x \; sec^2 x \; dx$ **r)** $\int sec^3 x \; dx$

**s)** $\int \; tg^4 x \; dx$ **t)** $\int cotg^5 x \; dx$

## 11. CÁLCULO DE VOLUMES USANDO INTEGRAIS

**11.1** Em cada alínea esboce a região **R** delimitada pelos gráficos das equações dadas e determine o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo indicado.

**a)** $y = \frac{1}{x}$ , $x = 1$ , $x = 3$ , $y = 0$ ; em torno do eixo dos xx.

**b)** $y - x^2 - 1 = 0$ , $y - x - 3 = 0$ ; em torno do eixo dos xx.

**c)** $x + y = 1$ , $x = 0$ , $y = 0$ ; em torno da recta y = 1.

**d)** $y^2 = x$ , $2y = x$ ; em torno do eixo dos yy.

**e)** $y = 3^x$ , $y = 1 - x^2, x = 1$; em torno da recta x = 2.

**11.2** Determine o volume do sólido gerado pela revolução da região limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 4$ em torno de:

**a)** y = 0 **b)** y = 4 **c)** $y = 5$ **d)** $x = 2$ **e)** $x = 3$

**11.3** Em cada caso esboce o gráfico da região **R** do plano e determine o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação de **R** em torno do eixo indicado

**a)** $R = \left\{ (x, y) \in R^2 : \; 1 \leq \; x \leq 2 \quad \wedge \quad -x^2 \leq \; y \; \leq x-2 \right\}$ ; $x = 4$

**b)** $R=\left\{ (x,y)\in R^2:\ \left|x^2-2x-1\right|\le y \quad \wedge \quad \left|y^2-2\right| \le y \right\}$ ; $\qquad y=2$

**c)** $R=\left\{ (x,y)\in R^2: x\le -\left| y-1\right| \quad \wedge \quad -3 \le x \le 0 \right\}$ ; $\qquad x=3$

**d)** $R=\left\{ (x,y)\in R^2:\ y\ge \dfrac{x^2}{2}+1 \quad \wedge \quad 2y+3x \ge 3 \quad \wedge \quad y\le 3 \right\}$ ; $\quad y=3$

**e)** $R=\left\{ (x,y)\in R^2:\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \quad \wedge \quad 0\le y\le \operatorname{sen} x\cos x \right\}$ ; $\qquad y=0$

## 12. DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES E CÁLCULO DE ÁREAS USANDO COORDENADAS POLARES

**12.1** Determinar a equação polar das curvas de equações cartesianas,

**a)** $x^2+y^2-x=(x^2-y^2)^{1/2}$ **b)** $9x^2+4y^2=36$

**c)** $(x-1)^2+y^2=1$ **d)** $(x^2+y^2)^2=\left|x^2-y^2\right|$

**e)** $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2 \quad , \quad y^2\le x^2$

**12.2** Desenhe o gráfico de $f$ em coordenadas polares e calcule a área do conjunto radial de $f$ no intervalo indicado:

**a)** $f(\theta)=\theta \quad , \quad 0\le\theta\le 2\pi$ (espiral de Arquimedes)

**b)** $f(\theta)=2\cos\theta \quad , \ -\pi/2\le\theta\le\pi/2$ (circunferência tangente a *Oy*)

**c)** $f(\theta)=2\left|\cos\theta\right| \quad , \quad 0\le\theta\le 2\pi$ (duas circunferências tangentes a *Oy*)

**d)** $f(\theta)=sen\, 2\theta \quad , \quad 0\le\theta\le\pi/2$ (pétala de rosa)

**e)** $f(\theta)=\left|sen\, 2\theta\right| \quad , \quad 0\le\theta\le 2\pi$ (rosa de 4 folhas)

**f)** $f(\theta)=4\, sen\theta \quad , \quad 0\le\theta\le\pi$ (circunferência tangente a *Ox*)

**g)** $f(\theta)=4\left|sen\theta\right| \quad , \quad 0\le\theta\le 2\pi$ (duas circunferências tangentes a *Ox*)

**h)** $f(\theta)=\left|\cos\theta\right|^{1/2} \quad , \quad 0\le\theta\le 2\pi$ (oito achatado)

**i)** $f(\theta)=\left|\cos 2\theta\right|^{1/2}$ , $0 \le \theta \le 2\pi$ (trevo de 4 folhas)

**j)** $f(\theta)=1+\cos\theta$ , $0 \le \theta \le 2\pi$ (cardioide)

**k)** $f(\theta)=2+\cos\theta$ , $0 \le \theta \le 2\pi$ (caracol)

**12.3** Em cada alínea esboce os gráficos das funções $f$ e $g$ em coordenadas polares, determinando os respectivos domínios, e calcule a área da região do plano comum às regiões limitadas pelos seus gráficos:

**a)** $f(\theta)=2\ sen 2\theta$ ; $g(\theta)=2\left|\cos\theta\right|$

**b)** $f(\theta)=1+\cos\theta$ ; $g(\theta)=1$

**c)** $f(\theta)=1-\cos\theta$ ; $g(\theta)=sen\theta$

**d)** $f(\theta)=sen 2\theta$ ; $g(\theta)=sen 4\theta$

**e)** $f(\theta)=2-2\cos\theta$ ; $g(\theta)=2\cos\theta$

**f)** $f(\theta)=\cos 3\theta$ ; $g(\theta)=-sen\theta$

# 13. OUTROS MÉTODOS DE PRIMITIVAÇÃO

**13.1** Calcule os seguintes integrais recorrendo à decomposição em fracções racionais:

**a)** $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$

**b)** $\int \frac{x^4-x^3-3x^2-2x+2}{(x^3+x^2-2)\,x}\,dx$

**c)** $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$

**d)** $\int \frac{x^3+2}{x^3-1}\,dx$

**e)** $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx$

**f)** $\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$

**g)** $\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}\,dx$

**h)** $\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$

**i)** $\int \frac{3x^2}{x^4+5x^2+4}\,dx$

**j)** $\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$

**13.2** Usando técnicas de primitivação apropriadas para funções racionais trigonométricas, calcule:

**a)** $\int sen^5 x \ dx$

**b)** $\int sen^4 x \ cos^2 x \ dx$

**c)** $\int sen^4 x \ cos^3 x \ dx$

**d)** $\int sen^3 x \ cos^2 x \ dx$

**e)** $\int tg^2 x \ sec^4 x \ dx$

**f)** $\int tg^2 x \ sec^3 x \ dx$

**g)** $\int tg^5 x \ dx$

**h)** $\int cotg^3 x \ cosec^5 x \ dx$

**i)** $\int cosec\, x \ dx$

**j)** $\int sen 5x \ sen 3x \ dx$

**13.3** Calcule as primitivas de expressões irracionais seguintes por meio de substituição trigonométrica.

**a)** $\int \sqrt{x^2+5} \ dx$

**b)** $\int \sqrt{x(6-x)} \ dx$

**c)** $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} \ dx$

**d)** $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} \ dx$

**e)** $\int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2-9}} \ dx$

**f)** $\int \frac{1-x}{x\sqrt{1-x^2}} \ dx$

**g)** $\int \frac{1}{(4+x^2)^{3/2}} \ dx$

**h)** $\int x\sqrt{3+4x-4x^2} \ dx$

**i)** $\int \frac{1}{x\sqrt{2+x-x^2}} \ dx$

**j)** $\int \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}} \ dx$

**k)** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x-25}} \ dx$

**13.4** Cálculo de primitivas usando o método da substituição universal

(Exercícios introduzidos nas aulas teóricas)

# *C. Tópicos adicionais*

## 14. FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

(Aplicações e exercícios introduzidos nas aulas teóricas)

## 15. INTEGRAIS IMPRÓPRIOS

**15.1** Calcule os seguintes integrais impróprios:

**a)** $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$ **b)** $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^5}$ **c)** $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^{3/2}}$

**d)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ **e)** $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ **f)** $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$

**15.2** Calcule os seguintes integrais impróprios de 2ª espécie (ou mistos):

**a)** $\int_{1^+}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$ **b)** $\int_1^{2^-} \frac{1}{x^2-2x}\,dx$ **c)** $\int_{0^+}^{1} \log x\,dx$

**d)** $\int_0^{3} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$ **e)** $\int_{0^+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **f)** $\int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$

**15.3** Encontre os valores de $a$ e $b$ tais que:

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)} - 1\right] dx = 1$$

**15.4**

**a)** Mostre que

$$\lim_{h\to 0^+} \left(\int_{-1}^{-h} \frac{dx}{x} + \int_h^1 \frac{dx}{x}\right) = 0$$

e que

$$\lim_{h\to +\infty} \int_{-h}^{h} sen\,x\;dx = 0$$

**b)** Estude a convergência de

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} sen\,x\,dx$$

# 16. INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

**16.1** Resolva as equações diferenciais,

$$y' = \frac{2x}{y}$$

$$y' = \frac{\sqrt{x}}{3y}$$

$$\frac{dy}{dx} = x + 2$$

$$(1 + x^2)\ y' - 2\ x\, y = 0$$

$$xy + y' = 100\, x$$

**16.2** Determine a solução particular que satisfaz as condições iniciais:

| Equação diferencial | Condição inicial |
|---|---|
| $2xy' - \ln x^2 = 0$ | $y(1) = 2$ |
| $y\ (1 + x^2)\, y' - x\ (1 + y^2) = 0$ | $y(0) = \sqrt{3}$ |
| $\frac{du}{dv} = u\ v\ sen(v^2)$ | $u(0) = 1$ |
| $dT + k\,(T - 70)\ dt = 0$ | $T(0) = 140$ |

**16.3** Uma comissão pública de caça solta 40 alces numa reserva de caça. Após 5 anos a população de alces é de 104 animais. Segundo a comissão, o ambiente suporta no máximo 4000 alces. A taxa de crescimento da população $p$ de alces é

$$\frac{dp}{dt} = k\ p\left(1 - \frac{p}{4000}\right)\ ,\quad 40 \le p \le 4000$$

onde $t$ é o número de anos.

a) Escreva um modelo para a população de alces, em termos de *t*.

b) Escreva a solução que passa pelo ponto (0,40) e esboce o respectivo gráfico.

c) Use o modelo para estimar a população de alces após 5 anos.

d) Calcule o limite do modelo quando $t \to \infty$.

**16.4** A taxa de decomposição do rádio radioactivo num certo instante é proporcional à quantidade de rádio existente naquele instante. A meia-vida do rádio radioactivo é de 1599 anos. Qual a percentagem que restará após 25 anos de uma certa quantidade existente hoje?

**16.5** Determine a solução geral de

a) $y' + y = e^x$

b) $x y' - 2 y = x^2$

c) $y' - y \; tg\, t = 1 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

d) $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2}{x}\right) y = 3x + 2$

**16.6** Determine a solução particular da equação diferencial que satisfaz a condição de fronteira dada:

| Equação diferencial | Condição de fronteira |
|---|---|
| $y' \cos^2 x + y - 1 = 0$ | $y(0) = 5$ |
| $x^3 \; y' + 2y = e^{1/x^2}$ | $y(1) = e$ |
| $y' + y \; tg\, x = \sec x + \cos x$ | $y(0) = 1$ |
| $y' + y \; \sec x = \sec x$ | $y(0) = 4$ |
| $x \; dy = (x + y + 2) \; dx$ | $y(1) = 10$ |

**16.7** Resolva as equações diferenciais de Bernoulli:

a) $y' + 3x^2 y = x^2 \, y^3$

b) $y' + xy = x \, y^{-1}$

c) $y' + \left(\frac{1}{x}\right) y = x y^2$

d) $y' - y = e^x \sqrt[3]{y}$

e) $y y' - 2y^2 = e^x$