Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**4,7**] Sejam as transformações lineares $S \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ e $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dadas por

$$S(x,y,z) = (x - z, -x + y + z) \text{ e } T(x,y,z) = (x + z, 2y - z, 2x + z)$$

em relação às bases canónicas E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *S*. Para cada um destes subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que apenas uma das funções é bijetiva; obtenha, se possível, as respetivas transformações inversas.

2) [**2,0**] Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz do tipo $n \times n$ e não singular. Mostre que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ possuem os mesmos valores próprios e que $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

GRUPO II

3) [**4,7**] Considere as transformações lineares $S \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ e $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ da pergunta 1) e as bases $\mathrm{D} = \{(1,-1),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathrm{V} = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Usando o cálculo matricial, calcule as matrizes $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}_3,\mathrm{D}} = m(S)_{\mathrm{E}_3,\mathrm{D}}$, representação matricial de *S* em relação às bases E_3 e D, e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V},\mathrm{E}_3} = m(T)_{\mathrm{V},\mathrm{E}_3}$, representação matricial de *T* em relação às bases V e E_3.

b) Obtenha a matriz da função que é a soma de *S* com a composição possível de *S* com *T* em relação às bases V e D.

....***(continua no verso)***

GRUPO III

4) [**2,8**] Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o determinante e a característica da matriz real

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 2 \\ 1 & h & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

GRUPO IV

5) [**5,8**] Seja a transformação linear $H\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{H} = m(H) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Determine o valor do parâmetro real α, tal que $\vec{x} = (0, \alpha, \alpha)$ é um dos vetores próprios da matriz ***H*** e calcule os valores próprios.

b) Determine os espaços próprios e indique, para cada um desses subespaços, uma base e a dimensão.

c) Verifique, justificando devidamente, se a matriz ***H*** é diagonalizável. Em caso afirmativo, obtenha a sua matriz diagonalizadora e a matriz diagonal que é semelhante à matriz ***H***.