

Curso MIEM / MIEGI Data 11/20

Disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica Ano 1º Semestre 1º

Nome José Augusto Trigo Barboza

Espaço reservado para o avaliador

Notas de apoio ao Capítulo 3 do manual:

"Noções sobre Matrizes e Sistemas de Equações Lineares".

Exemplo 1 [3.1; 2; 5]

Seja matriz quadrada de ordem 2:  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

- Número de termos distintos:  $2! = 2$

Termo	$\alpha_L$	$\alpha_C$	$\alpha$	$(-1)^\alpha$	
$a_{11} a_{22}$	0	0	0	+1	Termo principal
$a_{21} a_{12}$	1	0	1	-1	Termo secundário

Permutação principal:  $1 \rightarrow 2$  (0 inversões)

$2 \rightarrow 1$  ( $\underbrace{1}_{\text{inv}}$  inversão)

- Número de termos positivos é igual ao número de termos negativos
- É irrelevante a ordem pela qual os elementos da matriz se dispõem no termo (o sinal do termo mantém-se). Por exemplo:

$$a_{22} a_{11} \Rightarrow \alpha_L = \alpha_C = 1, \alpha = 2, (-1)^\alpha = +1$$

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = + a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

Regras dos Produtos Cruzados pag. 5

WTR

### Exemplo 2 [3.2; 4; 5; 7]

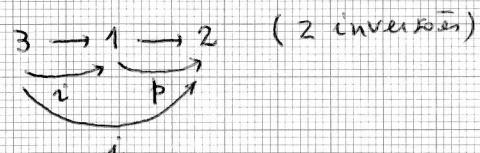
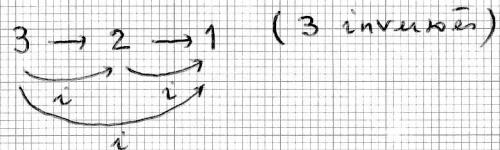
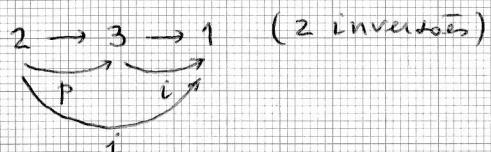
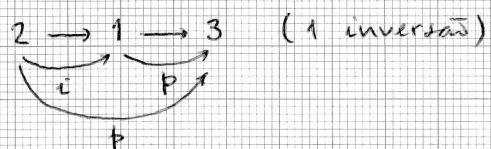
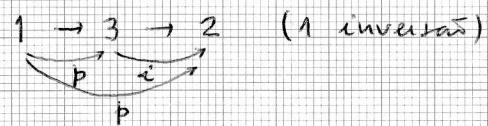
Seja a matriz quadrada de ordem 3 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Número de termos distintos :  $3! = 6$

Termo	$\alpha_L$	$\alpha_C$	$\alpha$	$(-1)^\alpha$	
$a_{11} a_{22} a_{33}$	0	0	0	+1	Termo principal
$a_{11} a_{23} a_{32}$	0	1	1	-1	
$a_{12} a_{21} a_{33}$	0	1	1	-1	
$a_{12} a_{23} a_{31}$	0	2	2	+1	
$a_{13} a_{22} a_{31}$	0	3	3	-1	Termo secundário
$a_{13} a_{21} a_{32}$	0	2	2	+1	

Permutação principal :  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  (0 inversões)



pag. 6

Wui

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

← termos positivos

$$= + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) -$$

$$- (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

↑                                  ← termos negativos

Regra de Sarrus

pág. 6/7

Propriedade 9

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

x   ↑   x

$C_2$

desdobramento

$$\left[ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} -4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right]$$

$p_1 \quad p_2 \quad p_3$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

x   ↑   x                    x   ↑   x                    x   ↑   x

$p_1 \quad p_2 \quad p_3$

$$= (-6) + (-9) + (0) = -15$$

↑

as linhas 2 e 3 são proporcionais

- A propriedade pode ser também aplicada nas mesmas linhas da determinante.

pág. 19/20

Wmz

### Propriedade 10

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

↑  
 $c_1 + 2c_2 - 4c_3$

$$|B| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |A| = -15, \text{ porque ...}$$

↑  
 $c_1$   
 desdobramos

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$p_1 \quad p_2 \quad p_3$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -8 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad !!$$

$p_1 \quad p_2 \quad p_3$

$$= |A| + (0) + (0)$$

↑  
 as colunas 1 e 3  
 são proporcionais

as colunas 1 e 3  
 são proporcionais

- A propriedade pode ser também aplicada num linha do determinante.

pag. 21/22

*Wm*

Example 25 [3.42]

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^2 |T_{ii}| =$$

$$= |T_{11}| \cdot |T_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-8)(-4) = 32$$

or, em alternativa,

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^3 |T_{ii}| =$$

$$= |T_{11}| \cdot |T_{22}| \cdot |T_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (4)(-2)(-4) = 32$$

pg. 41/42

WV

### Teorema [3.8]

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e não singular, isto é, que admite matriz inversa  $A^{-1}$ , tal que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad \text{e} \quad |A| \neq 0.$$

Então

$$|A^{-1}A| = |I| \Leftrightarrow |A^{-1}| |A| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

pág. 44

### Teorema [3.9]

Seja  $A$  uma matriz ortogonal de ordem  $n$ , isto é, uma matriz não singular tal que

$$A^{-1} = A^T \quad \text{e} \quad |A| \neq 0.$$

Então

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{e} \quad |A^T| = |A|$$

pelos que

$$|A^{-1}| = |A^T| \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A| = +1 \quad \vee \quad |A| = -1.$$

pág. 46

Wmj

Exemplo 29 [3.38]

$$F = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cofatores com sinal positivo

A matriz  $F$  é matriz singular, já que  $|F| = -4 \neq 0$

Cálculo dos cofatores dos elementos da matriz  $F$ :

- Cofatores com sinal positivo

$$\text{cof } f_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = +2$$

$$\text{cof } f_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = +6$$

$$\text{cof } f_{22} = + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -24$$

$$\text{cof } f_{31} = + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{cof } f_{33} = + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

- Cofatores com sinal negativo

$$\text{cof } f_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = +16$$

$$\text{cof } f_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$\text{cof } f_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

$$\text{cof } f_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\text{Cof } F = \begin{bmatrix} 2 & 16 & 6 \\ -3 & -24 & -11 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

pág. 50/51

Wim