DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES 08 /06/ 2016

Duração: 90 minutos

2º Teste de Análise Matemática EE

Nome: ______________________ Nr.: __________ Curso:

GRUPO I

Em cada uma das perguntas seguintes, apresente e justifique todos os cálculos realizados.

1. Considere a função $f(x,y) = x^3e^{-4y}$ e o ponto $(1,0)$ do seu domínio. Determine a taxa de variação instantânea da função f em $(1,0)$ na direção do vetor $\vec{u} = (2,1)$.

$\bullet\ f'_{\vec{u}}(1,0) = \vec{\nabla} f(1,0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ onde $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

e $\vec{\nabla} f(1,0) = (f'_x(1,0), f'_y(1,0))$

$f'_x = 3x^2e^{-4y} \Rightarrow f'_x(1,0) = 3$

$f'_y = -4x^3e^{-4y} \Rightarrow f'_y(1,0) = -4$

Assim, $f'_{\vec{u}}(1,0) = (3,-4)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ //

2. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{1}{2x+3y}$ e $(1,1)$ um ponto do seu domínio.

(a) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,f(1,1))$.

$z = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1)$ onde

$\bullet\ f(1,1) = \frac{1}{5}$

$\bullet\ f'_x = -\frac{2}{(2x+3y)^2} \Rightarrow f'_x(1,1) = -\frac{2}{25}$

$\bullet\ f'_y = -\frac{3}{(2x+3y)^2} \Rightarrow f'_y(1,1) = -\frac{3}{25}$

Assim

$z = \frac{1}{5} - \frac{2}{25}(x-1) - \frac{3}{25}(y-1).$

(b) Determine a direção segundo a qual a taxa de variação instantânea de f em $(1,1)$ é máxima.

A taxa é máxima na direção do vector $\vec{\nabla} f(1,1) = \left(-\frac{2}{25}, -\frac{3}{25}\right)$

Pois, a taxa é dada por $f'_{\vec{u}}(1,1) = \|\vec{\nabla} f(1,1)\|\,\|\vec{u}\| \cdot \cos\alpha$
$= \|\vec{\nabla} f(1,1)\| \cdot \cos\alpha$

É máxima quando $\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$. ($\alpha \to$ ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{\nabla} f$)

3. Considere a função $z = f(x,y)$ que admite derivadas parciais de 1ªordem contínuas e tal que $x = \dfrac{u}{v}$ e $y = v.\ln u$. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

$$z \begin{cases} x \begin{cases} u \\ v \end{cases} \\ y \begin{cases} u \\ v \end{cases} \end{cases}$$

$\bullet\ \frac{\partial z}{\partial u} = f'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + f'_y \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = f'_x \cdot \frac{1}{v} + f'_y \cdot \frac{v}{u}$

$\bullet\ \frac{\partial z}{\partial v} = f'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + f'_y \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = f'_x\left(-\frac{u}{v^2}\right) + f'_y \cdot \ln u$

4. Considere a função real $f(x, y) = x^2.\cos(xy)$ definida na vizinhança de $(2, 0)$.

(a) Determine o diferencial de f no ponto $(2, 0)$. $df = f'_x(2,0)\,dx + f'_y(2,0)\,dy$

• $f'_x = 2x.\cos(xy) - yx^2\,\text{sen}(xy) \Rightarrow f'_x(2,0) = 4$

• $f'_y = -x^3.\text{sen}(xy) \Rightarrow f'_y(2,0) = 0$ Então $\boxed{df = 4dx}$

(b) Usando diferenciais, calcule um valor aproximado de $2.001^2.\cos(2.001 \times 0.002)$.

$2.001^2.\cos(2.001 \times 0.002) = f(2.001, 0.002)$

se $(x,y) = (2,0) \Rightarrow dx = 0.001$ e $dy = 0.002$

$f(2.001, 0.002) \approx f(2,0) + df = 4 + 4 \times 0.001 = 4.004$

5. Considere a função $f(x, y) = y^2x - yx + 4y + 5$.

(a) Determine os pontos críticos de f.

$\begin{cases} f'_x = y^2 - y = 0 \\ f'_y = 2yx - x + 4 = 0 \end{cases}$ $y(y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \lor y = 1$

• Se $y = 0 \xRightarrow{\text{na 2ª equação}} -x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow (4,0)$

• Se $y = 1 \Rightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \Rightarrow (-4,1)$

pts críticos

(b) Classifique os pontos críticos determinados na alínea anterior.

$f''_{x^2} = 0$

$f''_{y^2} = 2x$

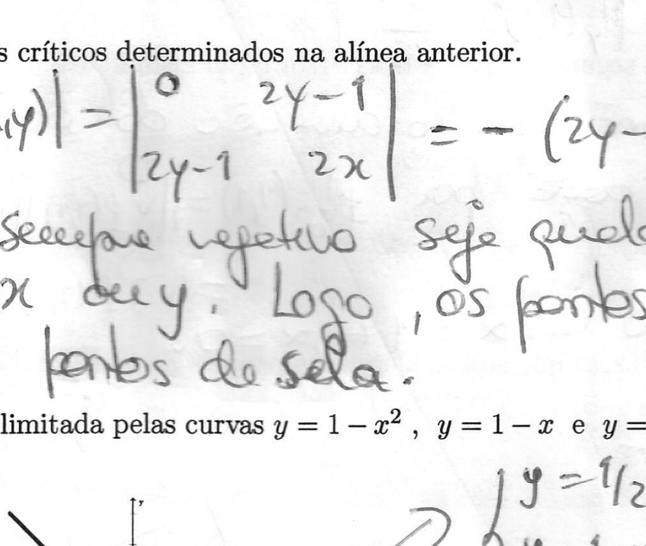
$f''_{xy} = 2y - 1$

$|H(x,y)| = \begin{vmatrix} 0 & 2y-1 \\ 2y-1 & 2x \end{vmatrix} = -(2y-1)^2 < 0$

Sempre negativo seja qualquer o valor de x ou y. Logo, os pontos críticos são pontos de sela.

6. Considere a região plana limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$, $y = 1 - x$ e $y = \frac{1}{2}$, sombreada na figura.

$\begin{cases} y = 1/2 \\ y = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



pois $\begin{cases} y = 1 - x \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1/2$

(a) Escreva o integral duplo, em coordenadas cartesianas, que permite calcular a área da região limitada sombreada na figura.

$$\int_0^{1/2}\int_{1-x}^{1-x^2} 1\,dy\,dx + \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\int_{1/2}^{1-x^2} dy\,dx$$

(b) Troque a ordem de integração.

$$\int_{1/2}^{1}\int_{1-y}^{\sqrt{1-y}} dx\,dy$$

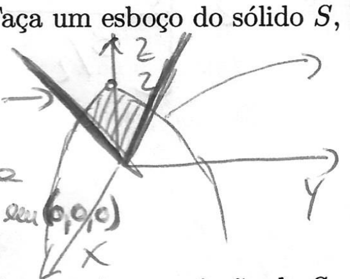
$y = 1-x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1-y \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{1-y}$

7. Considere o sólido S limitado pelas superfícies $z = 2 - x^2 - y^2$ e $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Faça um esboço do sólido S, identificando as superfícies.

$z = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow$ sup. cónica com vértice em $(0,0,0)$

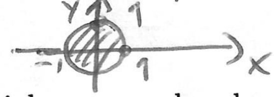


$\rightarrow z = 2-x^2-y^2 \rightarrow$ parabolóide elíptico com vértice em $(0,0,2)$ e voltado para baixo

(b) Represente a projeção de S no plano XOY, identificando as curvas envolvidas.

$$\begin{cases} z = 2-x^2-y^2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2-(x^2+y^2) \Leftrightarrow z = 2 - z^2 \Leftrightarrow z^2+z-2=0 \Leftrightarrow \\ z=1 \vee z=-2 \end{cases}$$

De $z = 1$, tem-se $\boxed{1 = 2-x^2-y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=1}$



(c) Escreva o integral triplo, em coordenadas cartesianas, que permite calcular o volume do sólido.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$$

$-1 \leq x \leq 1$

$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2-x^2-y^2$

(d) Escreva o integral triplo, em coordenadas cilíndricas, que permite calcular o volume do sólido.

$x = R\cos\theta$

$y = R\,\text{sen}\,\theta$

$z = z$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_R^{2-R^2} R\,dz\,d\theta\,dR$$

com $0 \leq R \leq 1$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$R \leq z \leq 2-R^2$

(e) Calcule o integral da alínea anterior.

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_R^{2-R^2} R \, dz \, d\theta \, dR = \int_0^1 \int_0^{2\pi} R\left(2-R^2-R\right) d\theta \, dR = 2\pi \int_0^1 \left(2R - R^3 - R^2\right) dR$$

$$= 2\pi \left[R^2 - \frac{R^4}{4} - \frac{R^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

8. Considere um fio com a forma de uma curva $\mathcal{C}$ definida por $\vec{c}(t) = (3, \frac{t^2}{2} + 1, t)$, $t \in [0,1]$ com uma densidade de $f(x,y,z) = xz + \frac{z^2}{2} - y + 1$ gramas por unidade de comprimento.

Determine a massa total do fio. $\int_\Gamma f(\vec{c}(t)) \, \|\vec{c}\,'(t)\| \, dt$

onde

$$f(\vec{c}(t)) = 3t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} - 1 + 1 = 3t$$

$$\vec{c}\,'(t) = (0, t, 1)$$

$$\|\vec{c}\,'(t)\| = \sqrt{t^2+1}$$

$$\int_0^1 3t\sqrt{t^2+1}\, dt = $$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 2t\,(t^2+1)^{1/2} dt = \frac{3}{2}\left[\frac{(t^2+1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 =$$

$$= 2\sqrt{2} - 1$$

9. Considere o campo de forças $\vec{F}(x,y,\cancel{z}) = (-\sin x, 2y)$.

(a) Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}$ ao deslocar uma partícula ao longo da curva $\mathcal{C}$ definida por $\vec{c}(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. $\int_\Gamma \vec{F}(\vec{c}(t)) \cdot d\vec{c}$

onde $\vec{F}(\vec{c}(t)) = (-\text{sen}\, t, 2t^2)$

$$d\vec{c} = (1, 2t)$$

$$\int_0^{\pi/2} (-\text{sen}\, t, 2t^2)\cdot(1, 2t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (-\text{sen}\, t + 4t^3)\, dt = \left[\cos t + t^4\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - \cos 0 - 0 = \frac{\pi^4}{16} - 1$$

(b) Prove que $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, onde Γ é a circunferência de raio 1, centrada em $(-1, 0)$. Justifique convenientemente.

$\vec{F}(x,y)$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$, pois

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial(-\text{sen}\, x)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial(2y)}{\partial x}.$$

e aqui Γ é uma curva fechada.

Logo, $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$