Prova sem consulta. Duração: 3h (15m de tolerância). Prova de Reavaliação Global

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos quatro grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**3,3**] Sejam as transformações lineares $S,T \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ dadas por

$$S(x,y,z)=(x+z,x+2y+3z,y+2z) \text{ e } T(x,y,z)=(x+z,x-y,x+y+2z)$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$.

a) Obtenha o núcleo e o contradomínio de *T*. Para cada um destes subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que apenas a função *S* é injetiva e determine a sua transformação inversa. Classifique as funções dadas quanto à sua sobrejetividade. Justifique.

2) [**2,0**] Seja a transformação linear $R : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$. Mostre que se *R* é injetiva, então *R* é invertível e a sua função inversa $R^{-1} : R(\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$ é linear.

3. [**3,6**] Considere o ponto $P=(1,1,0)$, o plano $M : 2x+y-z=-3$ e a reta $t : X(v)=Q+v\vec{a}$, $v\in\mathbb{R}$, com $Q=(1,0,0)$ e $\vec{a}=(-1,0,1)$. Determine:

a) A distância de *P* ao plano *M* e o ponto, *I*, deste plano mais próximo de *P*.

b) A equação vetorial da reta, *h*, que passa em *P*, é paralela a *M* e é complanar com *t*. Classifique, justificando, as retas *h* e *t* quanto à sua posição relativa.

GRUPO II

4) [**1,7**] Considere as transformações lineares $S,T \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ da pergunta 1) e a base $\mathrm{U}=\{(1,0,2),(-1,-1,0),(1,0,1)\}\subset\mathbb{R}^3$. Calcule a matriz que representa a função ST^2 em relação à base U.

.... ***(continua no verso)***

GRUPO III

5) [**1,8**] Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o determinante da matriz real

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & k & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & h & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

GRUPO IV

6. [**4,5**] Seja o conjunto $\mathrm{S} = \left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right\} \subset \mathbb{R}^3$, em que $\vec{a} = (1,0,1)$, $\vec{b} = (0,1,1)$, $\vec{c} = (1,1,2)$ e $\vec{d} = (1,2,3)$.

a) Sem efetuar quaisquer cálculos, indique, justificando adequadamente, a dimensão máxima admissível para o subespaço, $L(\mathrm{S})$, gerado pelo conjunto S.

b) Determine o subespaço $L(\mathrm{S})$. Indique uma possível base, T, para $L(\mathrm{S})$ que só inclua elementos de S e conclua em relação à sua dimensão.

c) Obtenha uma base ortogonal, W, para o espaço $\mathbb{R}^3$ que contenha o maior número possível de elementos de $L(\mathrm{S})$.

7) [**3,1**] Considere a transformação linear $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{H} = m(H) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Seja o espaço próprio associado a um dos seus valores próprios: $\mathrm{W} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - 2y = 0 \ \wedge \ z + 2y = 0\right\}$.

a) Calcule os valores próprios da matriz $\boldsymbol{H}$.

b) Determine os espaços próprios e indique, para cada um desses subespaços, uma base e a dimensão.