VALORES/VECTORES PRÓPRIOS

Introdução

- Seja V um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$. Considere a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, cujas *representações matriciais* serão sempre *matrizes quadradas de ordem n*.

- Relativamente à transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ pretende-se resolver o problema seguinte:

  i) Será possível obter uma única *base ordenada*, U, *para* V (comum ao domínio e ao conjunto de chegada), em relação à qual a *matriz* $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}} = m(T)_{\mathrm{U}}$ seja uma *matriz diagonal*?

  ii) Como determinar a base U no caso de ela existir?

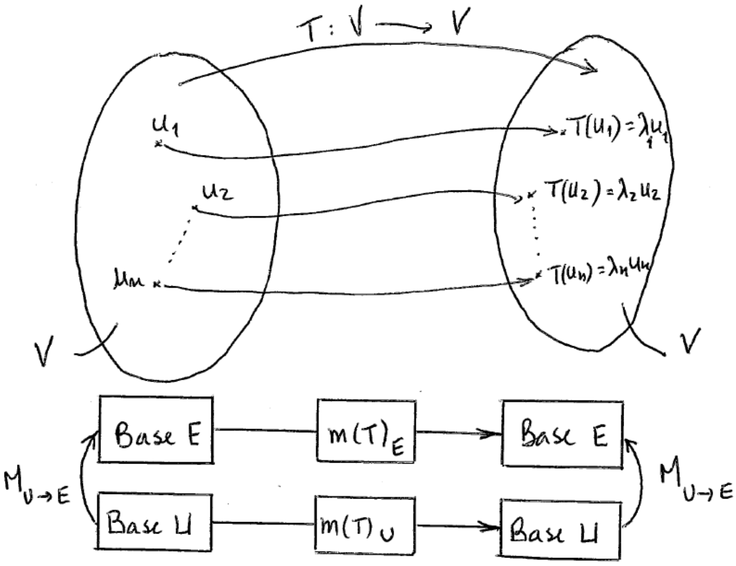
- Como se verá, o problema anterior nem sempre terá solução. Se for possível, a matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}} = m(T)_{\mathrm{U}}$ será uma *matriz semelhante* a qualquer outra matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} = m(T)_{\mathrm{E}}$, que represente a transformação linear *T* em relação a uma dada base ordenada E para V.

Definição [5.1]: Uma transformação linear *T*, num espaço linear V de dimensão finita, diz-se *diagonalizável*, se existir uma *base ordenada* U *para* V, tal que a matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}} = m(T)_{\mathrm{U}}$ é uma *matriz diagonal*.

Definição [5.2]: Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ diz-se *diagonalizável*, se for *semelhante* a uma *matriz diagonal*, isto é, se existir uma matriz *não singular* $\boldsymbol{P}$, tal que a matriz $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}$ é uma matriz diagonal. Neste caso, a matriz $\boldsymbol{P}$ é designada por *matriz diagonalizadora* da matriz $\boldsymbol{A}$.

Matriz diagonal numa transformação linear

- Seja V um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim V = n$. Se $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma *base ordenada para* V, designe-se por $\boldsymbol{T}_E = m(T)_E$ a *representação matricial* da transformação linear $T : V \to V$ *em relação à base* E.



Teorema **[5.1]**: A *condição necessária e suficiente* para que a transformação linear $T : V \to V$ possua uma *representação matricial diagonal* é que exista um conjunto de *n elementos linearmente independentes* de V, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ (*base ordenada para* V), e um conjunto de escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Omega$ (distintos ou não), tais que

$$T(u_j) = \lambda_j \, u_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Neste caso, a *representação matricial de T em relação à base ordenada* U é a *matriz diagonal*

$$\boldsymbol{T}_U = \left(\boldsymbol{M}_{U \to E}\right)^{-1} \boldsymbol{T}_E \; \boldsymbol{M}_{U \to E} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}_U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_U \in M_{(n)}(\Omega)$$

- Em relação às matrizes $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} = m(T)_{\mathrm{E}}$ e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}} = m(T)_{\mathrm{U}}$ (*matriz diagonal*) podemos afirmar:

  i) São *matrizes semelhantes*, já que

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}}\right)^{-1}\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}} = \boldsymbol{P}^{-1}\ \boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}\ \boldsymbol{P}$$

  ii) $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}}$ é a *matriz diagonalizadora* da matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} = m(T)_{\mathrm{E}}$.

Definições e propriedades

- Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que V é um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$; seja 0_{V} o elemento zero de V.

Definição [5.3]: Valores próprios e vectores próprios
Um escalar $\lambda \in \Omega$ é designado um *valor próprio* de $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, se existir um elemento $x \in \mathrm{V} \setminus \{0_{\mathrm{V}}\}$ tal que

$$T(x) = \lambda\, x$$

Além disso, o elemento x chama-se *vector próprio de T associado ao valor próprio* λ; diz-se, ainda, que λ é um *valor próprio de T correspondente ao vector próprio* x.

Teorema [5.2]: Em relação à transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ verifica-se:

a) Existe *um e um só* valor próprio correspondente a um dado vector próprio de *T*.

b) Se $x \in \mathrm{V}$ é um vector próprio de *T* associado a um valor próprio λ, então qualquer elemento não nulo e múltiplo de x é, também, vector próprio de *T* associado ao valor próprio λ.

- O conjunto dos vectores próprios da transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ associados ao valor próprio λ é representado por

$$x(\lambda) = \left\{ x \in \mathrm{V} \setminus \left\{ 0_{\mathrm{V}} \right\} \ : \ T(x) = \lambda\, x \right\} \subset \mathrm{V}$$

Apesar de ser um subconjunto de V, *não é um subespaço de* V.

Definição [5.4]: Espaço próprio associado a um valor próprio
Sendo $\lambda \in \Omega$ um *valor próprio* de $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, chama-se *espaço próprio associado a* λ, representando-se por $\mathrm{E}(\lambda)$, ao subconjunto de V

$$\mathrm{E}(\lambda) = \left\{ x \in \mathrm{V} \ : \ T(x) = \lambda\, x \right\} \subset \mathrm{V}$$

Teorema [5.3]: O *espaço próprio* $\mathrm{E}(\lambda)$ associado ao valor próprio λ da transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ *é um subespaço* do espaço linear V.

Teorema [5.4]: Se $x_1, x_2, \ldots, x_k$ são vectores próprios do espaço próprio $\mathrm{E}(\lambda)$, então qualquer combinação linear não nula deles é, ainda, um vector próprio de $\mathrm{E}(\lambda)$.

- Se V é um espaço linear de dimensão finita, então o espaço próprio $\mathrm{E}(\lambda) \subset \mathrm{V}$ é, também, de dimensão finita, admitindo uma *base de vectores próprios* associados ao valor próprio λ.

Definição [5.5]: Multiplicidade geométrica de um valor próprio
Chama-se *multiplicidade geométrica* do valor próprio λ da transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, representando-se por $\mathrm{m_g}(\lambda)$, à dimensão do espaço próprio $\mathrm{E}(\lambda)$ que lhe está associado.

Exemplo 1 **[5.1]**: Seja V um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim V = n$; considere-se a transformação linear $T : V \to V$, tal que

$$T(x) = k\,x \quad , \quad k \in \Omega$$

A transformação linear só possui um valor próprio $\lambda = k$. Os vectores próprios que lhe estão associados são

$$x(k) = \{x \in V \setminus \{0_V\}\} = V \setminus \{0_V\}$$

O espaço próprio é

$$E(k) = \{x \in V\} = V$$

e, portanto,

$$m_g(k) = \dim E(k) = \dim V = n$$

Qualquer base para V será uma base (de vectores próprios) para $E(k)$.
Se $k = 1$, a transformação linear T reduz-se à *transformação identidade* $I_V : V \to V$, em que $I_V(x) = x$, possuindo a unidade como único valor próprio.

Exemplo 2 **[5.2]**: Seja a transformação linear $T : V \to V$ e admita-se que $\lambda = 0$ é um dos seus valores próprios. Assim, os vectores próprios que lhe estão associados são

$$x(0) = \{x \in V \setminus \{0_V\} \;:\; T(x) = 0x = 0_V\}$$

Neste caso, o espaço próprio é

$$E(0) = \{x \in V \;:\; T(x) = 0_V\} = N(T)$$

coincidindo com o núcleo de *T*; a *multiplicidade geométrica* do valor próprio $\lambda = 0$ *é igual à nulidade* da transformação linear, isto é,

$$m_g(0) = \dim E(0) = \dim N(T)$$

Cálculo dos valores próprios

- Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que V é um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$. Admita-se que $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} = m(T)_{\mathrm{E}}$ é a *representação matricial* de *T em relação à base ordenada* $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ para V e que $\boldsymbol{I}_n$ é a *matriz identidade* de ordem *n*.

- Se $\boldsymbol{X}_{\mathrm{E}}$ é a *matriz-coluna* que contém as *coordenadas do elemento* $x \in \mathrm{V}$ em relação à *base ordenada* E, então

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}\, \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \lambda\, \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} \ , \ \lambda \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}\, \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \lambda\, \boldsymbol{I}_n\, \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} \ , \ \lambda \in \Omega \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda\, \boldsymbol{I}_n\, \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}\, \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{O} \ , \ \lambda \in \Omega \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad [\lambda\, \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}]\, \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{O} \ , \ \lambda \in \Omega \tag{1}$$

- A equação matricial (1) representa um *sistema homogéneo* de *n* equações lineares a *n* incógnitas (as *n* coordenadas do elemento $x \in \mathrm{V}$), onde $\lambda\, \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}$ é a *matriz dos coeficientes do sistema*, que admite, apenas, uma das duas situações seguintes:

  i) O sistema é *possível e determinado*, possuindo a solução nula $\boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{O}$ como única solução, se

$$\left| \lambda\, \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} \right| \neq 0$$

  ii) O sistema é *possível e indeterminado*, possuindo uma infinidade de soluções (onde se inclui a solução nula), se

$$\left| \lambda\, \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} \right| = 0$$

  Esta é a condição que deverá ser observada para se obterem os valores próprios e os vectores próprios da transformação linear.

Definição [5.6]: Polinómio característico de uma matriz
Sendo $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n sobre um corpo Ω, o determinante $p(\lambda) = |\, \lambda\, \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\, |$, em que $\boldsymbol{I}_n$ é a *matriz identidade* de ordem n, designa-se por *polinómio característico* da matriz $\boldsymbol{A}$.

- Em relação ao polinómio característico $p(\lambda) = |\, \lambda\, \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{T}_\mathrm{E}\, |$ da matriz $\boldsymbol{T}_\mathrm{E} = m(T)_\mathrm{E}$ há a realçar o seguinte:

  i) É uma função polinomial de grau n na variável λ, do tipo

  $$p(\lambda) = |\, \lambda\, \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{T}_\mathrm{E}\, | = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

  ii) Se for *factorizável*, então pode ser reescrito sob a forma de um produto de n factores lineares

  $$p(\lambda) = |\, \lambda\, \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{T}_\mathrm{E}\, | = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

  onde os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \Omega$ (*raízes*, ou *zeros*, *do polinómio*) podem ser, ou não, todos distintos;

  iii) É possível mostrar que

  $$|\, \boldsymbol{T}_\mathrm{E}\, | = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{e} \quad tr\left(\boldsymbol{T}_\mathrm{E}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Teorema [5.5]: Seja $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ uma transformação linear, em que V é um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$. Designe-se por $\boldsymbol{T}_\mathrm{E} = m(T)_\mathrm{E}$ a *representação matricial de T em relação a uma base ordenada* E *para* V. Então os *valores próprios* de $\boldsymbol{T}_\mathrm{E}$ serão as *raízes* (ou *zeros*) do seu *polinómio característico* que pertencem a Ω.

Teorema [5.6]: *Matrizes semelhantes* possuem o mesmo polinómio característico e, portanto, os mesmos valores próprios.

- Pode-se concluir o seguinte em relação aos *valores próprios* da transformação linear $T : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{V}$:

  i) Os valores próprios são *invariantes* face à sua representação matricial, sendo, portanto, possível falar-se no *polinómio característico de T*;

  ii) No caso de V ser um *espaço linear complexo*, conclui-se que o *polinómio característico será sempre factorizável* e que todas as suas raízes serão valores próprios de T – a transformação linear possuirá *n* valores próprios (distintos ou não);

  iii) Se V for um *espaço linear real*, então o *polinómio característico poderá não ser factorizável*, pelo que apenas as suas *raízes reais* serão valores próprios de *T* – a transformação linear terá, no máximo, *n* valores próprios, podendo esse número ser inferior a *n* se algumas das raízes forem imaginárias.

Definição [5.8]: Multiplicidade algébrica de um valor próprio
Chama-se *multiplicidade algébrica* do valor próprio λ da transformação linear $T : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{V}$, representando-se por $\mathrm{m_a}(\lambda)$, ao número de vezes que ele é raiz (ou zero) do polinómio característico de *T*.

- Se $\lambda = \lambda_1$ for uma raiz simples do polinómio característico, então $\mathrm{m_a}(\lambda_1) = 1$, se for uma raiz dupla, então $\mathrm{m_a}(\lambda_1) = 2$, e assim sucessivamente.

Cálculo dos vectores próprios

- Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que V é um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$. Admita-se que $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} = m(T)_{\mathrm{E}}$ é a *representação matricial* de T *em relação à base ordenada* $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ para V e que $\boldsymbol{I}_n$ é a *matriz identidade* de ordem *n*.

- Uma vez calculados os valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Omega$ $(k \leq n)$ da transformação linear, obtêm-se os *vectores próprios* associados a cada um dos valores próprios, resolvendo o conjunto de sistemas de equações lineares homogéneos

$$[\lambda_i \, \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}] \, \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{O} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{2}$$

  que serão necessariamente *possíveis e indeterminados*; os vectores próprios encontrados estão expressos em relação à base ordenada E.

- A multiplicidade geométrica de cada valor próprio, $\mathrm{m_g}(\lambda_i) = \dim \mathrm{E}(\lambda_i)$, é igual ao grau de indeterminação do sistema homogéneo (2).

Teorema [5.7]: Seja V um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$. Sejam $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}$ e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}}$ duas *matrizes semelhantes*, definidas, respectivamente, *em relação às bases ordenadas* E e U *para* V, que têm $\lambda_1 \in \Omega$ como valor próprio comum. Se $\boldsymbol{X}_{\mathrm{E}}$ é um vector próprio de $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}$ associado ao valor próprio λ_1, então

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{E} \to \mathrm{U}} \, \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}}$$

é um vector próprio de $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}}$ associado a esse mesmo valor próprio, onde $\boldsymbol{M}_{\mathrm{E} \to \mathrm{U}}$ é a *matriz mudança de base* de E para U.

Teorema [5.8]: Se $\lambda_1 \in \Omega$ é um valor próprio da transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que V é um espaço linear sobre um corpo Ω, então

$$1 \le \mathrm{m_g}(\lambda_1) \le \mathrm{m_a}(\lambda_1) \tag{3}$$

- Relativamente à transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, em que $\dim \mathrm{V} = n$, é possível realçar o seguinte:

  i) Se $\lambda = \lambda_1$ é um valor próprio associado a uma raiz simples do polinómio característico, então $\mathrm{m_g}(\lambda_1) = \mathrm{m_a}(\lambda_1) = 1 = \dim \mathrm{E}(\lambda_1)$;

  ii) Se T possuir n valores próprios distintos, sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Omega$,

$$\mathrm{m_g}(\lambda_i) = \mathrm{m_a}(\lambda_i) = 1 \;,\; i = 1, 2, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \dim \mathrm{E}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m_g}(\lambda_i) = n$$

  iii) Se T possuir n valores próprios, sendo alguns deles múltiplos, isto é, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Omega$, em que

$$k < n \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m_a}(\lambda_i) = n$$

  então

$$\sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{E}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m_g}(\lambda_i) \le n$$

  iv) Se T possuir um número de valores próprios inferior a n, não necessariamente distintos, isto é, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Omega$, em que

$$k < n \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m_a}(\lambda_i) < n$$

  então

$$\sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{E}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m_g}(\lambda_i) < n$$

Exemplo 3 **[5.8]**: Em relação à transformação linear $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$Q(x,y,z) = (2x + 2y - z, x + 3y - z, x + 4y - 2z)$$

determine:

a) Os seus valores próprios.

b) Os vectores próprios e os espaços próprios associados a cada um dos valores próprios; para cada um dos subespaços encontrados indique uma base e a sua dimensão.

Solução:

a) A *representação matricial* de *Q* em relação à *base canónica*, $E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, *para* $\mathbb{R}^3$ é

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_{E_3} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

O seu *polinómio característico* é

$$p(\lambda) = |\, \lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q} \,| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 & 1 \\ -1 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

O *polinómio característico é factorizável em* $\mathbb{R}$ (as *raízes* são todas *reais*), pelo que a transformação linear *Q* possui *três valores próprios distintos*

$$\lambda_1 = -1\,, \quad \lambda_2 = 1\,, \quad \lambda_3 = 3$$

e, portanto,

$$\mathrm{m_a}(-1) = \mathrm{m_a}(1) = \mathrm{m_a}(3) = 1$$

b) Tendo em atenção (3), conclui-se, desde já, que

$$\dim \mathrm{E}(-1) = \dim \mathrm{E}(1) = \dim \mathrm{E}(3) = 1$$

Considere-se o valor próprio $\lambda_1 = -1$; resolvendo o sistema de equações homogéneo

$$[-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}]\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x - 2y + z = 0 \\ -x - 4y + z = 0 \\ -x - 4y + z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 5y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Os *vectores próprios* associados a $\lambda_1 = -1$ são

$$x(-1) = \left\{(y, y, 5y) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y \neq 0\right\}$$

O *espaço próprio* associado a $\lambda_1 = -1$ é

$$\mathrm{E}(-1) = \left\{(y, y, 5y) \in \mathbb{R}^3\right\} \ \text{ e } \ \text{Base } \mathrm{E}(-1) = \left\{(1,1,5)\right\}$$

Considere-se o valor próprio $\lambda_2 = 1$; resolvendo o sistema de equações homogéneo

$$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}]\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x - 2y + z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ -x - 4y + 3z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Os *vectores próprios* associados a $\lambda_2 = 1$ são

$$x(1) = \left\{(-z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \neq 0\right\}$$

O *espaço próprio* associado a $\lambda_2 = 1$ é

$$\mathrm{E}(1) = \left\{(-z, z, z) \in \mathbb{R}^3\right\} \ \text{ e } \ \text{Base } \mathrm{E}(1) = \left\{(-1,1,1)\right\}$$

Considere-se o valor próprio $\lambda_3 = 3$; resolvendo o sistema de equações homogéneo

$$[3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}]\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Os *vectores próprios* associados a $\lambda_3 = 3$ são

$$x(3) = \left\{(z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \neq 0\right\}$$

O *espaço próprio* associado a $\lambda_3 = 3$ é

$$\mathrm{E}(3) = \left\{(z, z, z) \in \mathbb{R}^3\right\} \ \text{ e } \ \text{Base } \mathrm{E}(3) = \left\{(1,1,1)\right\}$$

Exemplo 4 [5.9]: Em relação à transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (2x+2z, -x+3y+z, x-y+3z)$$

determine:

a) Os seus valores próprios.

b) Os vectores próprios e os espaços próprios associados a cada um dos valores próprios; para cada um dos subespaços encontrados indique uma base e a sua dimensão.

Solução:

a) A *representação matricial* de T em relação à *base canónica*, $\mathrm{E}_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, *para* $\mathbb{R}^3$ é

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{E}_3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

O seu *polinómio característico* é

$$p(\lambda) = |\,\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}\,| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16 = (\lambda-2)^2(\lambda-4)$$

O *polinómio característico é factorizável em* $\mathbb{R}$ (as *raízes* são todas *reais*); a transformação linear T possui, apenas, *dois valores próprios distintos*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \ , \ \ \lambda_3 = 4$$

e, neste caso,

$$\mathrm{m_a}(2) = 2 \ , \quad \mathrm{m_a}(4) = 1$$

b) Tendo em atenção (3), conclui-se, desde já, que

$$\dim \mathrm{E}(2) \leq 2 \quad \text{e} \quad \dim \mathrm{E}(4) = 1$$

Considere-se o valor próprio $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; resolvendo o sistema de equações homogéneo

$$[2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}]\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad\quad -2z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Os *vectores próprios* associados a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ são

$$x(2) = \left\{(y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y \neq 0\right\}$$

O *espaço próprio* associado a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ é

$$\mathrm{E}(2) = \left\{(y, y, 0) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

e, portanto,

$$\text{Base } \mathrm{E}(2) = \{(1,1,0)\} \quad \Rightarrow \quad \dim \mathrm{E}(2) = 1$$

Constata-se que, no caso do valor próprio $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, se verifica

$$\mathrm{m_g}(2) = 1 < \mathrm{m_a}(2) = 2$$

Considere-se o valor próprio $\lambda_3 = 4$; resolvendo o sistema de equações homogéneo

$$[4\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}]\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x \qquad - 2z = 0 \\ \ x + y - \ z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Os *vectores próprios* associados a $\lambda_3 = 4$ são

$$x(4) = \left\{(z,0,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \neq 0\right\}$$

O *espaço próprio* associado a $\lambda_3 = 4$ é

$$\mathrm{E}(4) = \left\{(z,0,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \ \text{ e } \ \text{Base } \mathrm{E}(4) = \{(1,0,1)\}$$

Exemplo 5 [5.10]: Em relação à transformação linear $R:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$R(x,y,z) = (-3x - y + 3z, 4x + 2y - 2z, -x - y + z)$$

determine:

a) Os seus valores próprios.

b) Os vectores próprios e os espaços próprios associados a cada um dos valores próprios; para cada um dos subespaços encontrados indique uma base e a sua dimensão.

Solução:

a) A *representação matricial* de R em relação à *base canónica*, $E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, *para* $\mathbb{R}^3$ é

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{E_3} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

O seu *polinómio característico* é

$$p(\lambda) = |\,\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}\,| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda + 4 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

Sendo $\mathbb{R}^3$ um espaço linear real, o *polinómio característico não é factorizável em* $\mathbb{R}$, uma vez que

$$r(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

não admite raízes reais (são *complexas conjugadas*).
Conclui-se que a transformação linear R possui *um único valor próprio*

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{e} \quad \mathrm{m_a}(-2) = 1$$

b) Tendo em atenção (3), conclui-se, desde já, que

$$\dim E(-2) = 1$$

Considerando o valor próprio $\lambda_1 = -2$, da resolução do sistema de equações homogéneo resulta

$$[-2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}]\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \iff \begin{cases} x + \ \ y - 3z = 0 \\ -4x - 4y + 2z = 0 \\ x + \ \ y - 3z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Os *vectores próprios* associados a $\lambda_1 = -2$ são

$$x(-2) = \left\{(-y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y \neq 0\right\}$$

O *espaço próprio* associado a $\lambda_1 = -2$ é

$$E(-2) = \left\{(-y, y, 0) \in \mathbb{R}^3\right\} \ \text{ e } \ \text{Base } E(-2) = \{(-1, 1, 0)\}$$

Exemplo 6 **[5.11]**: Obtenha, sem recorrer ao polinómio característico, os valores próprios da transformação linear $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que possui como representação matricial em relação à base canónica, $\text{E}_3 = \left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$, para $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_{\text{E}_3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução:

Sabendo que $\lambda_1 = 7$ é um dos valores próprios (anula a 2ª linha/coluna do determinante $|\, \lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{S} \,|$), os restantes valores próprios podem ser obtidos recorrendo às seguintes igualdades

$$\begin{cases} |\, \boldsymbol{S} \,| = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = -56 \\ tr\left(\boldsymbol{S}\right) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\lambda_2\lambda_3 = -56 \\ 7 + \lambda_2 + \lambda_3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

Conclui-se que os valores próprios da matriz são $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 4$.