Exercício: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz em escada equivalente à matriz A através do algoritmo $\boxed{\quad 1.97\text{obs}}$.

Exercício

O objectivo deste exercício é transformar a matriz dada A numa matriz em escada que lhe seja equivalente. Para tal, vai-se recorrer ao algoritmo apresentado em 1.97obs da sebenta. Recorde-se que este algoritmo só considera operações sobre linhas e nunca sobre colunas e apenas faz troca de linhas quando é estritamente necessário. Neste caso, a troca é com a primeira linha possível.

Passo 1 [inicializar o algoritmo]
$i \leftarrow 1$
$j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz A

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & \boxed{j|2} & & & \end{array} \\ \boxed{i|1} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Passo 1 — inicializar o algoritmo

A variável i é inicializada com o valor 1 e a variável j é inicializada com o índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz A, ou seja, com o valor 2. O Passo 1 está terminado

Passo 2 [seleccionar elemento pivô]

se $a_{ij} = 0$ **então**

$\ell_i \leftrightarrow \ell_k$, em que ℓ_k é a primeira linha abaixo da linha ℓ_i com um elemento diferente de zero na coluna c_j

fimse

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & \boxed{j|2} & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \boxed{i|1} \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Passo 2 — seleccionar o elementos pivô

Como o elemento 12 é diferente de zero, então esse é o elemento pivô, não havendo, pois, necessidade de trocar linhas.

Passo 3 [anular os elementos abaixo do pivô]

para $p \leftarrow i + 1$ **até** m **fazer**

$$\ell_p \leftarrow \ell_p - \frac{a_{pj}}{a_{ij}} \ell_i$$

fimpara

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - \ell_1 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Passo 3 — anular os elementos abaixo do pivô

Como as linhas do pivô e as que lhe estão acima ficam inalteradas, tem-se que ℓ_1 já não sofre alterações. Como o elemento 22 já é 0, ℓ_2 também não sofre alterações. Como o elemento 32 é diferente de 0, então ℓ_3 vai passar a ser o que era menos o elemento que se quer anular, ou seja, o 4, a dividir pelo elemento pivô, ou seja, o 2, vezes a linha do pivô, ou seja, ℓ_1. Tem-se então que fazer $\ell_3 - 2\ell_1$, vindo $0 - 2 \times 0$, que dá 0, $4 - 2 \times 2$, que dá 0, $2 - 2 \times 1$, que dá 0, $6 - 2 \times 2$, que dá 2, $(-4) - 2 \times (-2)$, que dá 0. A nova ℓ_3 está calculada. Como o elemento 42 é diferente de 0, então ℓ_4 vai passar a ser o que era menos o elemento que se quer anular, ou seja, o 2, a dividir pelo elemento pivô, ou seja, o 2, vezes a linha do pivô, ou seja, ℓ_1. Tem-se então que fazer ℓ_4 menos ℓ_1, vindo $0 - 0$, que dá 0, $2 - 2$, que dá 0, $1 - 1$, que dá 0, $3 - 2$, que dá 1, e $0 - (-2)$, que dá 2. A nova ℓ_4 está calculada.

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada **então**

terminar

senão

$i \leftarrow i + 1$

$j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz que se obtém eliminando na matriz A as linhas $\ell_1, \ldots, \ell_{i-1}$

ir para o Passo 2

fimse

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & \boxed{j|4} & \end{array} \\ \boxed{i|2} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Passo 4 — terminar?

Como a matriz que se obteve ainda não é uma matriz em escada, o algoritmo não termina, incrementando-se o valor da variável i de uma unidade, ou seja, i passa a valer 2, e a variável j passa a ser o índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz que se obtém eliminando na matriz todas as linhas desde ℓ_1 até ℓ_{i-1}, ou seja, neste caso, eliminando apenas ℓ_1. j passa então a valer 4. O algoritmo continua no Passo 2.

Passo 2 [seleccionar elemento pivô]

se $a_{ij} = 0$ **então**

$\ell_i \leftrightarrow \ell_k$, em que ℓ_k é a primeira linha abaixo da linha ℓ_i com um elemento diferente de zero na coluna c_j

fimse

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & \boxed{j|4} & \end{array} \\ \boxed{i|2} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \xleftrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Passo 2 — seleccionar o elementos pivô

Como elemento 24, é igual a 0, é necessário trocar ℓ_i, ou seja, ℓ_2, com a primeira linha abaixo desta cujo elemento em c_j, ou seja, em c_4, seja diferente de 0. Neste caso, é ℓ_3. Assim, ℓ_1 e ℓ_4 não sofrem alterações, ℓ_2 passa a ser a antiga ℓ_3 e ℓ_3 passa a ser a antiga ℓ_2.

Passo 3 [anular os elementos abaixo do pivô]

para $p \leftarrow i+1$ **até** m **fazer**

$$\ell_p \leftarrow \ell_p - \frac{a_{pj}}{a_{ij}}\ell_i$$

fimpara

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_4 \leftarrow \ell_4 - \frac{1}{2}\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Passo 3 — anular os elementos abaixo do pivô

Como as linhas do pivô e as que lhe estão acima ficam inalteradas, tem-se que ℓ_1 e ℓ_2 já não sofrem alterações. Como o elemento 34 já é 0, ℓ_3 também não sofre alterações. Como o elemento 44 é diferente de 0, então ℓ_4 vai passar a ser o que era menos o elemento que se quer anular, ou seja, o 1, a dividir pelo elemento pivô, ou seja, o 2, vezes a linha do pivô, ou seja, ℓ_2. Tem-se então que fazer $\ell_4 - \frac{1}{2}\ell_2$, vindo $0 - \frac{1}{2} \times 0$, que dá 0, $0 - \frac{1}{2} \times 0$, que dá 0, $0 - \frac{1}{2} \times 0$, que dá 0, $1 - \frac{1}{2} \times 2$, que dá 0, e $2 - \frac{1}{2} \times 0$, que dá 2. A nova ℓ_4 está calculada.

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada **então**

terminar

senão

$i \leftarrow i+1$

$j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz que se obtém eliminando na matriz A as linhas $\ell_1, \ldots, \ell_{i-1}$

ir para o Passo 2

fimse

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & & \boxed{j|5} \end{array} \\ \boxed{i|3} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Passo 4 — terminar?

Como a matriz que se obteve ainda não é uma matriz em escada, o algoritmo não termina, incrementando-se o valor da variável i de uma unidade, ou seja, i passa a valer 3, e a variável j passa a ser o índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz que se obtém eliminando na matriz todas as linhas desde ℓ_1 até ℓ_{i-1}, ou seja, neste caso, eliminando ℓ_1 e ℓ_2. j passa então a valer 5. O algoritmo continua no passo 2.

Passo 2 [seleccionar elemento pivô]

se $a_{ij} = 0$ **então**

$\ell_i \leftrightarrow \ell_k$, em que ℓ_k é a primeira linha abaixo da linha ℓ_i com um elemento diferente de zero na coluna c_j

fimse

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & & \boxed{j|5} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{i|3} \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Passo 2 — seleccionar o elementos pivô

Como o elemento 35 é diferente de 0, então esse é o elemento pivô, não havendo, pois, necessidade de trocar linhas.

Passo 3 [anular os elementos abaixo do pivô]

para $p \leftarrow i+1$ **até** m **fazer**

$$\ell_p \leftarrow \ell_p - \frac{a_{pj}}{a_{ij}} \ell_i$$

fimpara

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_4 \leftarrow \ell_4 - 2\ell_3]{\hspace{5em}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 3 — anular os elementos abaixo do pivô

Como as linhas do pivô e as que lhe estão acima ficam inalteradas, tem-se que ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 já não sofrem alterações. Como o elemento 45 é diferente de zero, então ℓ_4 vai passar a ser o que era menos o elemento que se quer anular, ou seja, o 2, a dividir pelo elemento pivô, ou seja, o 1, vezes a linha do pivô, ou seja, ℓ_3. Tem-se então que fazer $\ell_4 - 2\ell_3$, vindo $0 - 2 \times 0$, que dá 0 $0 - 2 \times 0$, que dá 0, $0 - 2 \times 0$, que dá 0, $0 - 2 \times 0$, que dá 0, e $2 - 2 \times 1$, que dá 0. A nova ℓ_4 está calculada.

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada **então**

terminar

senão

$i \leftarrow i + 1$

$j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz que se obtém eliminando na matriz A as linhas $\ell_1, \ldots, \ell_{i-1}$

ir para o Passo 2

fimse

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4 — terminar?

Como a matriz que se obteve já é uma matriz em escada, o algoritmo termina.