Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância). 2ª Prova de Reavaliação

* **Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
* **A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
* **Não é permitido o uso de telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
* **Resolva cada um dos grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**8,9**] Considere as transformações lineares $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $S(x,y,z) = (x-y, 2x+y)$, e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, representada pela matriz

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_2 \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathrm{E}_3 \subset \mathbb{R}^3$.

Sejam as bases $\mathrm{U} = \{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$, $\mathrm{V} = \{(1,1,0),(0,0,1),(0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathrm{W} = \{(1,1),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Obtenha o núcleo e o contradomínio de *T*. Identifique, para cada um desses subespaços, uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Classifique as transformações *S* e *T* quanto à injetividade e determine, se tal for possível, as respetivas transformações inversas. Justifique.

c) Obtenha a matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{U},\mathrm{E}_2} = m(S)_{\mathrm{U},\mathrm{E}_2}$, representação matricial de *S* em relação às bases U e E_2. Recorrendo ao cálculo matricial e à matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{U},\mathrm{E}_2}$, calcule a matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{V},\mathrm{W}} = m(S)_{\mathrm{V},\mathrm{W}}$, representação matricial de *S* em relação às bases V e W.

d) Determine a matriz $m(TS)_{\mathrm{V},\mathrm{V}}$, que representa a transformação composta *TS* relativamente à base V.

2. [**1,4**] Seja a transformação linear $Q : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$. Mostre que se *Q* é injetiva, então *Q* é invertível e a sua transformação inversa $Q^{-1} : Q(\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$ é linear.

....*(continua no verso)*

3. [**2,7**] Calcule o determinante e a característica da matriz:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1+g & 0 & g & g^2+1\\ 1 & 0 & 1 & g+1\\ 0 & g & 0 & g\\ g & -g & g & 1\end{bmatrix}$$

GRUPO II

4. [**1,1**] Seja a matriz não singular $\boldsymbol{A}\in \mathrm{M}_{(n)}(\Omega)$. Mostre que $\boldsymbol{A}^k$, $k\in \mathbb{Z}_0^+$, é também uma matriz não singular.

5. [**5,9**] Seja a transformação linear $F\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\boldsymbol{F}=m(F)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & b & -2\\ a & 1-ab & a\end{bmatrix}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

a) Considerando os valores $a=0$ e $b=3$, calcule os valores próprios de $\boldsymbol{F}$ e os respetivos espaços próprios; indique, para cada um desses subespaços, uma base e a dimensão.

b) Relativamente à matriz definida em a), mostre, justificando, que F admite uma base, V, de vetores próprios para $\mathbb{R}^3$; indique a matriz $\boldsymbol{F}_{\mathrm{V,V}}$ que representa F em relação à base V e apresente as expressões matriciais que comprovam que $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{F}_{\mathrm{V,V}}$ são matrizes semelhantes.

c) Obtenha os valores dos parâmetros a e b para os quais a matriz $\boldsymbol{F}$ possui um valor próprio nulo e o seu traço é igual a um.