<u>Problema</u>: Considere o plano

$$M : x+y-z=3 \Rightarrow N=(1,1,-1) \perp M$$

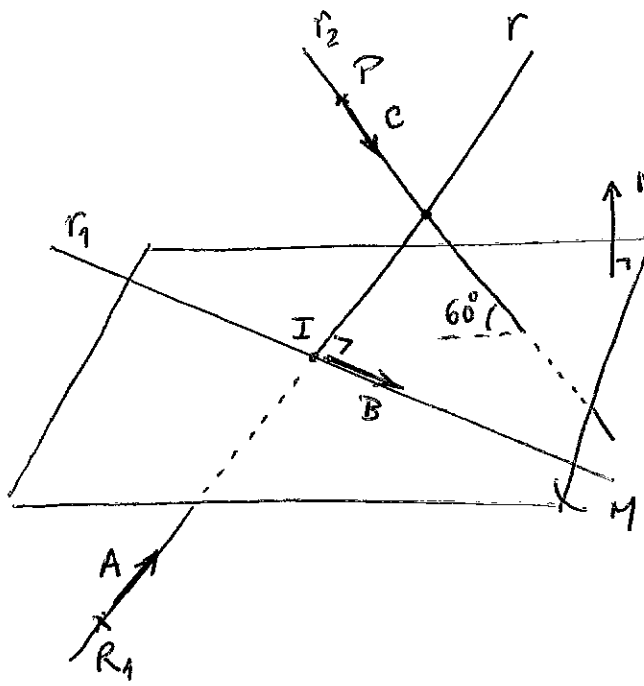
a recta

$$r : X(t) = R_1 + tA \ , \ R_1 = (1,2,3) \ \text{e} \ A=(2,1,0)$$
$$(x,y,z) = (1+2t,\ 2+t,\ 3) \ , \ t \in \mathbb{R}$$

e os pontos

$$P=(3,5,2) \Rightarrow P \notin M \ \text{e} \ P \notin r$$
$$Q=(1,5,2) \Rightarrow Q \notin M \ \text{e} \ Q \notin r$$

a) Determine a recta r_1 do plano M, que é concorrente e perpendicular à recta r.



Uma vez que

$A \cdot N = 3 \neq 0$

então

$r \cap M = I$

Sabendo que

$r_1 \subset M$

e

r_1 é concorrente com r

então

$I \in r_1$

Assim,

$$r_1 : X(u) = I + uB \ , \ u \in \mathbb{R}$$

Determinemos, em primeiro lugar, o ponto I:

$$I = r \cap M \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = 3 \\ x+y-z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ - \\ 3t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = (3,3,3) \\ t = 1 \end{cases}$$

Determinemos, agora, o vector direcção B:

$$\left.\begin{array}{lll} r_1 \perp r & \Rightarrow & B \perp A \\ r_1 \subset M & \Rightarrow & B \perp N \end{array}\right\} \Rightarrow B \parallel A \times N$$

$$A \times N = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, 1)$$

Seja, por exemplo, $B = A \times N = (-1,2,1)$

A equação vectorial da recta r_1 é

$$r_1 : X(u) = I + uB, \; u \in \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) = (3-u, 3+2u, 3+u), \; u \in \mathbb{R}$$

b) Determine uma recta r_2 que passa em P, é concorrente com a recta r e faz um ângulo de $60°$ com o plano M.

Seja a recta

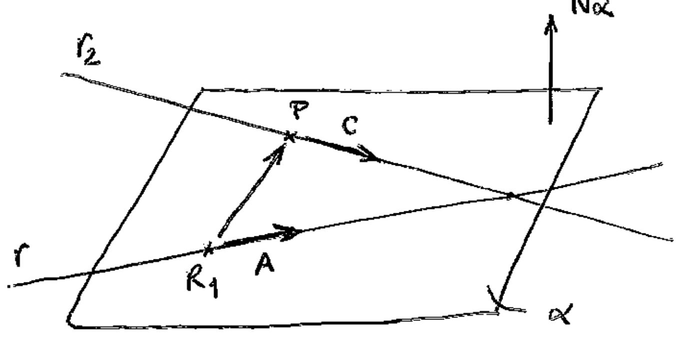
$$r_2 : X(v) = P + vC, \; v \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad P = (3, \sqrt{\ }, 2)$$

Determinemos o vector direcção $C = (a,b,c)$:

$$\measuredangle(r_2, M) = 60° \Rightarrow \measuredangle(C, N) = 30° \Rightarrow C \cdot N = \|C\| \, \|N\| \cos 30° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b-c = \sqrt{3} \, \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow a+b-c = \frac{3}{2} \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Se r_2 é concorrente com a recta r, então estão situadas num mesmo plano α:



Sabe-se que

$$N_\alpha \parallel A \times \overrightarrow{R_1P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, 4)$$

Seja, por exemplo, $N_\alpha = A \times \vec{R_1P} = (-1,2,4)$

$r_2 \subset \alpha \Rightarrow C \perp N_\alpha \Rightarrow C \circ N_\alpha = 0 \Rightarrow -a+2b+4c=0$

A determinação do vector C passa pela resolução do sistema de 2 equações a 3 incógnitas:

$$\begin{cases} -a+2b+4c=0 \\ a+b-c = \frac{3}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \qquad (1) \end{cases}$$

cuja resolução envolve um processo de cálculo que pode levantar algumas dificuldades.

Uma vez que o vector C não tem uma norma pré-definida (trata-se de um vector que define a direcção da recta r_2 no espaço), é possível escolher um valor particular para a sua norma. De forma a simplificar a equação (1) vamos admitir que

$$\|C\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = 4$$

Assim, passamos a resolver um sistema de 3 equações a 3 incógnitas:

$$\begin{cases} -a+2b+4c=0 \\ a+b-c=3 \\ a^2+b^2+c^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2+2c \\ b = 1-c \\ 2^2(1+c)^2+(1-c)^2+c^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ 6c^2+6c+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ c = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6-2\sqrt{3}}{6} \\ b = \frac{9+\sqrt{3}}{6} \\ c = \frac{-3-\sqrt{3}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \frac{6+2\sqrt{3}}{6} \\ b = \frac{9-\sqrt{3}}{6} \\ c = \frac{-3+\sqrt{3}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{6}\left(6-2\sqrt{3}, 9+\sqrt{3}, -3-\sqrt{3}\right) \vee C = \frac{1}{6}\left(6+2\sqrt{3}, 9-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}\right)$$

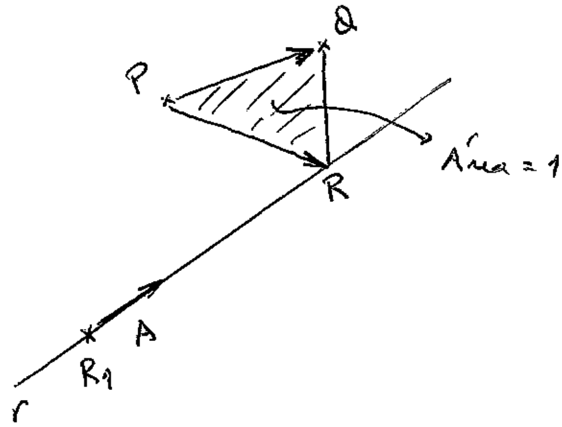
Conclui-se, assim, que existem duas soluções possíveis para a recta r_2. Uma delas é

$$r_2 : X(v) = P + vC \ , \ v \in \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) = \left(3 + \frac{6-2\sqrt{3}}{6}v \ , \ 5 + \frac{9+\sqrt{3}}{6}v \ , \ 2 - \frac{3+\sqrt{3}}{6}v\right) \ , \ v \in \mathbb{R}$$

c) Determine o ponto R da recta r, tal que P, Q e R são vértices de um triângulo com 1 unidade de área.

$$A_\Delta = \frac{\|\vec{PR} \times \vec{PQ}\|}{2} = 1 \iff$$



$$\iff \|\vec{PR} \times \vec{PQ}\| = 2 \qquad (2)$$

$$R \in r \Rightarrow R = (2t+1, t+2, 3)$$

$$\vec{PR} = R - P = (2t-2, t-3, 1)$$

$$\vec{PQ} = Q - P = (-2, 0, 0)$$

$$\vec{PR} \times \vec{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t-2 & t-3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -2, 2t-6) = 2(0, -1, t-3)$$

$$\|\vec{PR} \times \vec{PQ}\| = |2| \sqrt{1^2 + (t-3)^2} = 2\sqrt{t^2 - 6t + 10}$$

Substituindo em (2)

$$\sqrt{t^2 - 6t + 10} = 1 \iff t^2 - 6t + 9 = 0 \iff (t-3)^2 = 0 \iff$$

$$\iff t = 3 \Rightarrow R = (7, 5, 3) \in r$$

José Araújo Barbosa