

Folha 4 - Espaços Vectoriais

1. Prove que $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : \forall i = 1, 2\}$, algebrizado com as operações usuais constitui um espaço vectorial real.
2. Prove que $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, algebrizado com a adição de matrizes e multiplicação de um número real por uma matriz, é um espaço vectorial real.
3. Averigue se \mathbb{R}^2 , algebrizado com as operações seguintes, é um espaço vectorial real:

- (a) $\left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) : \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \\ k(x_1, x_2) = (kx_1, x_2), \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \forall k \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$
- (b) $\left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2) : \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \\ k(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2), \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \forall k \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$

4. Considere o subconjunto de \mathbb{R}^2 ,

$$B = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 \right\}$$

- (a) Prove que B é um subespaço de \mathbb{R}^2 .
 - (b) Geometricamente o que representa B ?
5. Seja E o subconjunto de \mathbb{R}^2 definido por:

$$E = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \right\}$$

- (a) Identifique geometricamente E ?
 - (b) Verifique se E é um subespaço de \mathbb{R}^2 .
6. Considerando o espaço vectorial \mathbb{R}^4 , determine quais dos seguintes subconjuntos são seus subespaços vectoriais:

- (a) $A_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y, z = t\}$,
- (b) $A_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$,
- (c) $A_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 1, y = 0, z + t = 1\}$,
- (d) $A_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z = x + 2y, t = x - 3y\}$,
- (e) $A_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : xt = yz\}$.

7. Considerando o espaço vectorial $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, das matrizes reais quadradas de ordem 3, determine quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vectoriais:

- (a) o conjunto de todas as matrizes simétricas,
- (b) o conjunto de todas as matrizes diagonais,
- (c) o conjunto de todas as matrizes invertíveis,
- (d) o conjunto de todas as matrizes triangulares superiores.

8. Seja $P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_i \in \mathbb{R}; \forall i = 0, 1, 2\}$, o espaço vectorial real dos polinómios de grau não superior a 2. Determine quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vectoriais de P_2 :

- (a) o conjunto dos polinómios de grau exactamente igual a 2,
- (b) o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a 1.

9. No espaço vectorial \mathbb{R}^4 considere os subespaços A e B tais que:

$$A = \langle (1, 2, 0, 1), (-1, 1, 1, 1) \rangle,$$

$$B = \langle (0, 0, 1, 1), (2, 2, 2, 2) \rangle.$$

Determine o subespaço $A \cap B$ e diga qual a dimensão deste subespaço.

10. Considere os seguintes subespaços vectoriais do espaço vectorial real \mathbb{R}^3 :

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\},$$

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\},$$

$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, 2y + z = 0\},$$

$$V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}.$$

(a) Mostre que

$$\text{i. } V_3 = \{(a, a, -2a) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\},$$

$$\text{ii. } V_2 = \{(b, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\},$$

(b) Diga, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^3 são subespaços vectoriais de \mathbb{R}^3 :

$$\text{i. } V_2 \cap V_4,$$

$$\text{ii. } V_3 \cup V_2,$$

$$\text{iii. } V_2 \cup V_1.$$

11. Determine um conjunto de geradores para os seguintes subespaços vectoriais de \mathbb{R}^3 .

$$\text{(a) } U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\},$$

$$\text{(b) } U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\},$$

$$\text{(c) } U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y = 0, z = 0\}.$$

12. Determine um conjunto de geradores para os seguintes subespaços vectoriais de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

$$\text{(a) } \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a = 0 \right\}$$

$$\text{(b) } \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}$$

13. Seja $P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2\} : a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, 1, 2\}$, o espaço vectorial real dos polinómios de grau não superior a 2.

Averigue se os seguintes vectores constituem um conjunto de geradores de P_2 , sendo:

- (a) $p(x) = 1 + 2x + x^2$ e $q(x) = 2 + x^2$;
- (b) $p(x) = 1 + x^2, q(x) = 1 - x + x^2$ e $r(x) = x - x^2$.

14. Considere, no espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , os vectores

$$v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (2, 1, -2), u_1 = (-1, 0, 1), u_2 = (1, 0, 0), u_3 = (1, 0, 1).$$

Verifique se

- (a) $(1, -4, 5)$ é combinação linear de v_1, v_2 ,
- (b) $(1, 2, 1)$ é combinação linear de v_1, v_2 ,
- (c) $(3, 0, 2)$ é combinação linear de u_1, u_2, u_3 ,
- (d) $(0, 2, 1)$ é combinação linear de u_1, u_2, u_3 .

15. Verifique se $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

16. Determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, de modo que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

17. Averigue quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes:

- (a) $\{(1, 2, -1), (3, 2, 5)\}$,
- (b) $\{(1, 0), (0, 1), (2, -2)\}$,
- (c) $\{(4, 2, 1), (2, 6, -5), (1, -2, 3)\}$,
- (d) $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (3, 6, 6)\}$.

18. Averigue quais dos seguintes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ são linearmente independentes:

- (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \right\}$
- (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

19. Averigue quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes:

- (a) $\{2x^2 + 1, x^2 + 3, x\}$,
- (b) $\{3x + 1, 2x^2 + 1, 2x^2 + 6x + 3\}$,

20. Para os subespaços vectoriais determinados no Exercício 6, calcule uma base e indique a dimensão do respectivo subespaço.

21. Para os subespaços vectoriais determinados no Exercício 7, calcule uma base e indique a dimensão do respectivo subespaço.

22. Para os subespaços vectoriais determinados no Exercício 8, calcule uma base e indique a dimensão do respectivo subespaço.

23. Sem efectuar quaisquer cálculos, diga, justificando, se:

- (a) os vectores $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (3, -1, -2)$ geram R^3 ;
- (b) os vectores $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (3, 5)$ e $v_3 = (7, -4)$ são vectores linearmente independentes de R^2 ?

24. Determine quais dos seguintes conjuntos constituem uma base de \mathbb{R}^3 :

- (a) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$,
- (b) $\{(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)\}$.

25. Escreva a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

26. Considere o vector $x = (1, 0, -1)$ e U o subespaço definido por:

$$U = \langle (1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, -1, -2), (1, -2, 5) \rangle$$

- (a) Escreva o vector x como combinação linear dos vectores de U .
- (b) Determine uma base de U .
- (c) Escreva o vector x como combinação linear dos vectores da base determinada na alínea anterior.
- (d) Determine α de modo que o vector $y = (0, 2, \alpha)$ seja combinação linear dos vectores da base de U determinada na alínea b).

27. Considere o espaço vectorial real P_3 .

- (a) Indique uma base do subespaço S de P_3 tal que

$$S = \langle x^3 + x, x^3 - x, x^2 + x, x^2 - x \rangle$$

- (b) Escreva o vector $2x^3 + x^2 - x$ como combinação linear dos vectores da base determinada na alínea anterior.

28. Considere os elementos de R^3 , $v_1 = (2, -3, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$, $v_3 = (1, 1, -2)$.

- (a) Determine as coordenadas do vector $(3, 2, 1)$ relativamente a esta base

29. Considere os seguintes vectores do espaço vectorial real R^3 :

$$v_1 = (\alpha, 6, -1), \quad v_2 = (1, \alpha, -1), \quad v_3 = (2, \alpha, -3).$$

- (a) Determine os valores do parâmetro real α para os quais o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de R^3 .
- (b) Para um dos valores de α determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vector $v = (-1, 1, 2)$ em relação à base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

30. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canónica de \mathbb{R}^3 . Considere os vectores $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$.

- (a) Mostre que v_1, v_2 e v_3 formam uma base de \mathbb{R}^3 .
- (b) Exprima os vectores e_1, e_2 e e_3 na base $\{v_1, v_2, v_3\}$.
- (c) Determine as coordenadas do vector $u = 3e_1 + 4e_2 - e_3$ na base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

31. Mostre que quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ os vectores de \mathbb{R}^4 , $x_1 = (1, a, b)$, $x_2 = (0, 1, c)$ e $x_3 = (0, 0, 1)$ são linearmente independentes.

32. Seja $S = \{(-2y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}$ um subconjunto de \mathbb{R}^3 .

- (a) Verifique que S é um subespaço vectorial de \mathbb{R}^3 .
- (b) Determine uma base de S .
- (c) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $S = \langle (1, 0, -1), (-1 - 1, \alpha) \rangle$.

33. Seja $T = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle$:

- (a) Determine a forma genérica dos vectores de \mathbb{R}^4 que pertencem a T .
- (b) Os vectores $(1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 1)$ constituem uma base de T ?

34. Considere, no espaço vectorial real \mathbb{R}^4 , os subespaços:

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\},$$

$$W_1 = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\},$$

$$W_2 = \langle (1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 3, 2, 1), (-3, 1, -1, 2) \rangle.$$

- (a) Diga, justificando, se $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ é uma base de U .
- (b) Determine uma base de W_1 e uma base de W_2 .

35. Mostre que os vectores $(a, b), (c, d)$ são uma base de \mathbb{R}^2 se e só se $ad - bc \neq 0$.

36. Para cada uma das alienas seguintes indique se é verdadeira ou falsa a respectiva afirmação.

- (a) Se $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, então $\dim V = n$.
- (b) Se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V , então o vector nulo não pode escrever-se como combinação linear dos vectores v_1, v_2, \dots, v_n .
- (c) Se $\dim V = n$ e v_1, v_2, \dots, v_n são vectores de V linearmente independentes, então $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V .
- (d) Se $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ então $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ é uma base de V .
- (e) Se $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ é uma base de V , então $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_1 + v_n\}$ também é uma base de V .
- (f) Se $\dim V = n$, então quaisquer $n - 1$ vectores de V são linearmente independentes.
- (g) O conjunto $T = \{\alpha v_1 + \beta v_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in V\}$ é um subespaço vectorial de V .
- (h) O subespaço $T = \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ tem dimensão 3.

37. Determine a dimensão e indique uma base para o espaço das colunas e para o espaço das linhas de cada uma das seguintes matrizes.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

38. Determine a dimensão e indique uma base para o núcleo de cada uma das matrizes do exercício 37.
39. Determine uma base e indique a dimensão do subespaço de \mathbb{R}^4 formado pelas soluções do sistema homogêneo:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

40. Resolva o seguinte sistema indeterminado escrevendo a sua solução geral como soma de uma solução particular do sistema do sistema com a solução geral do sistema homogêneo associado.

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

41. Determine uma base do espaço das soluções do seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$