Produto Vectorial

- A operação *produto vectorial* encontra-se apenas definida entre vectores do espaço $\mathbb{R}^3$.

Definição: Sejam os vectores $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ e $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ do espaço $\mathbb{R}^3$. Define-se o *produto vectorial* de $\vec{a}$ por $\vec{b}$, o vector de $\mathbb{R}^3$**,** representado por $\vec{a}\times\vec{b}$**,** definido da forma seguinte:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

Propriedades: Sejam os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ de $\mathbb{R}^3$ e o escalar $k\in\mathbb{R}$:

a) Propriedade *antisimétrica*: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

b) Propriedade *distributiva*: $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

c) Propriedade *homogénea*: $k(\vec{a}\times\vec{b})=(k\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\vec{b})$

d) *Ortogonalidade em relação ao vector* $\vec{a}$: $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}\times\vec{b}=0$

e) *Ortogonalidade em relação ao vector* $\vec{b}$: $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\vec{a}\times\vec{b}=0$

f) *Identidade de Lagrange*: $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|^2=\left\|\vec{a}\right\|^2\left\|\vec{b}\right\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

- Convém notar que a operação *produto vectorial não satisfaz* as *propriedades comutativa e associativa*, ou seja, em geral verifica-se:

$$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a} \quad \text{e} \quad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$

Propriedade: Sejam os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\theta = \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$. Então:

$$\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\operatorname{sen}\theta$$

- Interpretação *geométrica* para o vector não nulo $\vec{a}\times\vec{b}$:

  a) O vector $\vec{a}\times\vec{b}$ tem a *direcção ortogonal* às direcções definidas pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$;

  b) A *norma* do vector $\vec{a}\times\vec{b}$ é função das normas dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e do ângulo $\theta = \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ por estes formado;

  c) O *sentido* do vector $\vec{a}\times\vec{b}$ está dependente do tipo de *referencial* $Oxyz$ que for considerado:

    i) *Referencial directo*, *positivo* ou '*dextrorsum*': o sentido de $\vec{a}\times\vec{b}$ é definido pela *regra da mão direita*;

    ii) *Referencial inverso*, *negativo* ou '*sinistrorsum*': o sentido de $\vec{a}\times\vec{b}$ é definido pela *regra da mão esquerda*;

  d) A *norma do vector* $\vec{a}\times\vec{b}$ tem exactamente o mesmo valor da *área do paralelogramo* determinado pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

- A operação *produto vectorial* é frequentemente utilizada na determinação da *área de polígonos*.

Exemplo 1: Relativamente aos vectores coordenados unitários verifica-se:

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \;\; ; \;\; \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \;\; ; \;\; \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$

Exemplo 2: Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{b}\| = 1$, $\|\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{6}/2$ e $\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$. Determine $\|\vec{a}\|$.

Solução: $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}/6$.

Teorema: Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Então o conjunto $S_1 = \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$ é *linearmente dependente*, se e só se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Teorema: Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Se o conjunto $S_1 = \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$ é *linearmente independente*, então:

i) $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto *linearmente independente*;

ii) Qualquer vector $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{n} \perp \vec{a}$ e $\vec{n} \perp \vec{b}$ é um *vector múltiplo* de $\vec{a} \times \vec{b}$, isto é,

$$\vec{n} = k\vec{a} \times \vec{b}\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

Exemplo 3: Considere o conjunto ortogonal $S = \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$, com $\|\vec{b}\| = 1$; seja o vector $\vec{d} = \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b}$, em que $\vec{c} \in L(S)$. Admitindo que $\|\vec{d}\| = \sqrt{6}$ e que $\theta = \measuredangle(\vec{c}, \vec{d}) = \pi/3$, calcule $\|\vec{a}\|$.

Solução: $\|\vec{a}\| = 3\sqrt{2}/2$.

- Existe uma *regra prática* para o cálculo do vector $\vec{a}\times\vec{b}$, que envolve os conceitos de *determinante de 2ª ordem* e de *determinante de 3ª ordem* (assuntos abordados no capítulo *Determinantes*).

- *Regra prática* para o cálculo do vector $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo 4: Determine a área do triângulo definido pelos vectores $\vec{a} = (2,1,-1)$ e $\vec{b} = (1,2,2)$.

Solução: $A = \frac{1}{2}\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\| = \frac{1}{2}\left\|(4,-5,3)\right\| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Produto Misto

- A operação *produto misto* aglutina, numa única operação, as operações *produto escalar* e *produto vectorial*, encontrando-se apenas definida entre vectores do espaço $\mathbb{R}^3$.

- Sendo $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ e $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, então

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}=(c_1,c_2,c_3)\cdot(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}=c_1a_2b_3-c_1a_3b_2+c_2a_3b_1-c_2a_1b_3+c_3a_1b_2-c_3a_2b_1$$

- Interpretação *geométrica* para o produto misto $\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}$:

  i) O *módulo* do *produto misto*, $\left|\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}\right|$, tem exactamente o mesmo valor do *volume do prisma* determinado pelos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$;

  ii) A operação *produto misto* é frequentemente usada na determinação do *volume de poliedros*.

- Existe uma *regra prática* para o cálculo do *produto misto* $\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}$, que envolve os conceitos de *determinante de 2ª ordem* e de *determinante de 3ª ordem* (assuntos abordados no capítulo *Determinantes*).

- *Regra prática* para o cálculo do *produto misto* $\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} = (c_1, c_2, c_3)\cdot(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- Da aplicação da *Regra de Sarrus* para o cálculo de *determinantes de 3ª ordem* resulta:

$$\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} = c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 + c_2a_3b_1 - c_2a_1b_3 + c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1$$

$$\begin{array}{r|ccc|c|ccc|c|ccc|}
\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} = & c_1 & c_2 & c_3 & = & c_1 & & & - & & & c_3 \\
 & a_1 & a_2 & a_3 & & a_1 & a_2 & & & & a_2 & a_3 \\
 & b_1 & b_2 & b_3 & & b_1 & b_2 & b_3 & & b_1 & b_2 & b_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
\phantom{\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} =} & c_1 & c_2 & c_3 & & & c_2 & c_3 & & c_1 & c_2 & \\
 & a_1 & a_2 & a_3 & & & & a_3 & & a_1 & &
\end{array}$$

Exemplo 5: Determine o volume do tetraedro definido pelos vectores $\vec{a} = (2,1,-1)$, $\vec{b} = (1,2,2)$ e $\vec{c} = (-2,2,-2)$.

Solução: $V = \frac{1}{6}\left|\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}\right| = 4$.

Teorema: Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Então:

i) $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a}$;

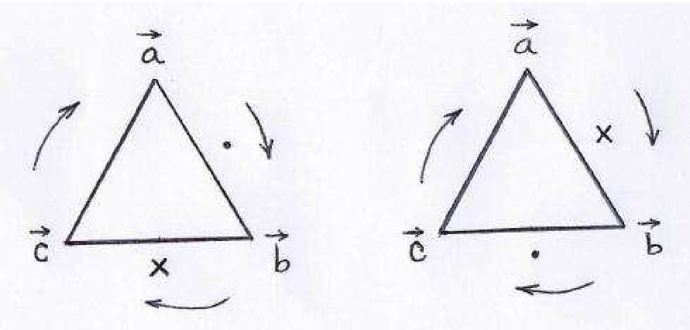
ii) $\vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$.

- As *propriedades* expostas no teorema anterior para o *produto misto* e a *propriedade comutativa* para o *produto escalar*, permitem escrever:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} & = & \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} & = & \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} \\ = & & & & = \\ \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} & = & \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} & = & \vec{c} \times \vec{a} \cdot \vec{b} \end{array}$$

Em resumo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \right]$$



Teorema: Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Então o conjunto $S = \left\{ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ é *linearmente dependente*, se e só se $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0$.