Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Mestrados Integrados em Eng Mecânica e em Eng Industrial e Gestão

Álgebra Linear e Geometria Analítica

2011-11-21

1ª Prova de Avaliação

- Identifique as folhas de capa (nome completo), bem como as folhas de continuação usadas.
- O exame tem a duração de 1h45m, sendo considerados 30m de tolerância para a sua conclusão. A desistência só é possível 1h após o seu início.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular gráficas nem de microcomputadores.

ATENÇÃO: Resolva cada um dos Grupos utilizando folhas de capa distintas.

GRUPO I

1. Seja o conjunto de vectores $S=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}\subset\mathbb{R}^4$, em que $\vec{a}=(1,1,0,1)$, $\vec{b}=(2,-1,3,2)$, $\vec{c}=(0,-1,\alpha,1)$ e $\vec{d}=(-1,-2,1,\beta)$. Obtenha α e β de modo que o conjunto S seja linearmente independente. Poderão existir em S não mais de dois vectores linearmente independentes? Justifique a resposta.

2. Considere $\alpha=1$ e $\beta=2$ no conjunto S do exercício anterior.

   a) Determine o subespaço, $L(S)$, gerado por S; obtenha uma base para $L(S)$ e conclua em relação à dimensão do subespaço.

   b) Calcule uma base ortogonal, U, para o subespaço $L(S)$, que seja constituída por vectores com norma igual a $\sqrt{3}$.

   c) Exprima o vector $\vec{b}=(2,-1,3,2)$ como combinação linear dos elementos da base U.

3. Sejam o plano $M=\{X\in\mathbb{R}^3 \ : X=P+s\vec{a}+t\vec{b},\ s,t\in\mathbb{R}\}$ e o vector $\vec{n}$, não nulo, de $\mathbb{R}^3$ que é perpendicular aos vectores geradores de M. Mostre que qualquer elemento do conjunto $R=\{X\in\mathbb{R}^3 \ : \ (X-P)\cdot\vec{n}=0\}$ pertence ao conjunto M.

(continua no verso)

GRUPO II

4. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\|=3$, $\|\vec{b}\|=1$, $\|\vec{c}\|=2$, $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{6}$, $\measuredangle(\vec{c},\vec{b})=30°$, $\vec{c}\cdot\vec{b}\times\vec{a}=-2$ e $\vec{d}=\vec{c}+\vec{a}\times\vec{b}$. Determine:

   a) A norma do vector $\vec{d}$.

   b) O ângulo formado pelos vectores $\vec{b}$ e $\vec{d}$ e a norma do vector $\vec{c}\times\vec{d}$ (se não resolveu a alínea a) admita que $\|\vec{d}\|=\sqrt{13}$).

5. Considere o plano $M: x+z=4$, a recta $r: X(u)=P+u\vec{a}$, $u\in\mathbb{R}$, em que $P=(1,0,1)$ e $\vec{a}=(1,1,-1)$, e o ponto $Q=(1,0,-1)$. Determine:

   a) Os pontos do eixo dos *yy* que se encontram à mesma distância da recta *r* e do plano *M*.

   b) A equação cartesiana do plano M_1, perpendicular à recta *r* e que passa no ponto, *I*, desta recta mais próximo da origem.

   c) A equação vectorial de uma recta *s* que passa no ponto *Q*, é paralela ao plano *xOy* e faz um ângulo de 30° com o plano *M*.

6. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Mostre que se o conjunto $S=\{\vec{a},\vec{b}\}$ é linearmente dependente, então $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Cotação prevista	1 2.1 ; 2 a) 2.0 b) 1.6 c) 1.6 ; 3 1.3 ; 4 a) 1.3 b) 1.2 5 a) 2.5 b) 2.5 c) 2.7 ; 6 1.2 .

Álgebra Linear e Geometria Analítica
1ª Prova de Avaliação
2011 - 11 - 21

1) O conjunto S é linearmente independente se gerar de forma única o vector nulo, isto é,

$$\delta_1 \vec{a} + \delta_2 \vec{b} + \delta_3 \vec{c} + \delta_4 \vec{d} = (0,0,0,0) \Rightarrow \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$$

$$\delta_1 (1,1,0,1) + \delta_2 (2,-1,3,2) + \delta_3 (0,-1,\alpha,1) + \delta_4 (-1,-2,1,\beta) = (0,0,0,0)$$

Recorrendo ao método de eliminação de Gauss

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \beta & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \\ \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta+1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_3 + L_2 \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta+1 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} & & \uparrow & \uparrow \\ & & C_4 & C_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_4 \\ \leftarrow L_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_4 & \delta_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Big\} (*)$$

O sistema homogéneo é possível e determinado, tendo como única solução $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$, se

$$\beta + 1 \neq 0 \ \wedge \ \alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1 \ \wedge \ \beta \neq -1$$

Só existiriam 2 vectores linearmente independentes no conjunto S se o sistema de equações fosse duplamente indeterminado; tal situação não é possível porque o sistema terá, no mínimo, 3 equações principais (as três primeiras equações do sistema de equações final (*)).

Prij

2) $\alpha = 1 \wedge \beta = 2$

a) $\delta_1 \vec{a} + \delta_2 \vec{b} + \delta_3 \vec{c} + \delta_4 \vec{d} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{cccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & x_1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & x_2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & x_4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \\ \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & x_4 - x_1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_3 + L_2 \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 + x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & x_4 - x_1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_4 \\ \leftarrow L_3 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & x_4 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 + x_2 - x_1 \end{array}\right]$$

O sistema é possível (e simplesmente indeterminado) se

$$x_3 + x_2 - x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 + x_3$$

$$L(S) = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 + x_3 \} =$$

$$= \{ \vec{x} = (x_2 + x_3, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \}$$

Notando que

$$\vec{x} = (x_2 + x_3, x_2, x_3, x_4) = x_2 (1,1,0,0) + x_3 (1,0,1,0) + x_4 (0,0,0,1)$$

sabe-se que o conjunto

$$\{ (1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,0,1) \}$$

é uma base para $L(S)$ e

$$\dim L(S) = 3$$

Wij

b) $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$: Base ortogonal para L(S)

$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = \|\vec{u}_3\| = \sqrt{3}$

Seja, por exemplo, $\boxed{\vec{u}_1 = \vec{a} = (1,1,0,1)}$, com $\boxed{\|\vec{a}\| = \sqrt{3}}$

Calculemos o vector $\vec{u}_2$:

$\vec{u}_2 \in L(S) \setminus \{\vec{0}\}$

$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = 0$

$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{3}$

$\vec{u}_2 = (x_2 + x_3, x_2, x_3, x_4)$

$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = 0 \iff x_2 + x_3 + x_2 + x_4 = 0 \iff x_4 = -x_3 - 2x_2$

$\vec{u}_2 = (x_2 + x_3, x_2, x_3, -x_3 - 2x_2) \in L(S)$

Considerando $x_3 = 1 \wedge x_2 = 0$ obtém-se

$\boxed{\vec{u}_2 = (1,0,1,-1)}$ e $\boxed{\|\vec{u}_2\| = \sqrt{3}}$

Calculemos o vector $\vec{u}_3$:

$\vec{u}_3 \in L(S) \setminus \{\vec{0}\}$

$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 = 0$

$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 = 0$

$\|\vec{u}_3\| = \sqrt{3}$

$\vec{u}_3 = (x_2 + x_3, x_2, x_3, x_4)$

$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 = 0 \iff x_4 = -x_3 - 2x_2$

$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 = 0 \iff x_2 + x_3 + x_3 - x_4 = 0 \iff x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$

$$\begin{cases} x_4 = -x_3 - 2x_2 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} - \\ x_2 + 2x_3 + x_3 + 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_4 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$\vec{u}_3 = (0, -x_3, x_3, x_3)$

Considerando $x_3 = 1$ obtém-se $\boxed{\vec{u}_3 = (0,-1,1,1)}$ e $\boxed{\|\vec{u}_3\| = \sqrt{3}}$ Wj

c) $\vec{b} = (2,-1,3,2) \in L(S)$, pelo que

$$\vec{b} = \gamma_1 \vec{u}_1 + \gamma_2 \vec{u}_2 + \gamma_3 \vec{u}_3$$

Como U é uma base <u>ortogonal</u>, então

$$\gamma_1 \vec{u}_1 = \mathrm{proj}_{\vec{u}_1} \vec{b} \Rightarrow \gamma_1 = \frac{\vec{b} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\gamma_2 \vec{u}_2 = \mathrm{proj}_{\vec{u}_2} \vec{b} \Rightarrow \gamma_2 = \frac{\vec{b} \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\gamma_3 \vec{u}_3 = \mathrm{proj}_{\vec{u}_3} \vec{b} \Rightarrow \gamma_3 = \frac{\vec{b} \cdot \vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|^2} = \frac{6}{3} = 2$$

Conclui-se que

$$\vec{b} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 2\,\vec{u}_3$$

Wiv

3) $M = \{ X \in \mathbb{R}^3 : X = P + s\vec{a} + t\vec{b},\ s,t \in \mathbb{R} \}$

$\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \cdot \vec{a} = \vec{u} \cdot \vec{b} = 0$

$R = \{ X \in \mathbb{R}^3 : (X - P) \cdot \vec{u} = 0 \}$

$\forall_{X \in R}\ ,\ X \in M$

$X \in R \Rightarrow (X-P) \cdot \vec{u} = 0$

Por outro lado, sabe-se que

$$T = \{ \vec{a}, \vec{b}, \vec{u} \}$$

é um conjunto linearmente independente, constituindo uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$; nestas condições, o vector $X-P$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base T, isto é,

$$X - P = s_1 \vec{a} + s_2 \vec{b} + s_3 \vec{u} \quad , \ s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$$

Sabendo que $(X-P) \cdot \vec{u} = 0$, obtém-se

$$(s_1 \vec{a} + s_2 \vec{b} + s_3 \vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s_1 \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{u}}_{=0} + s_2 \underbrace{\vec{b} \cdot \vec{u}}_{=0} + s_3 \|\vec{u}\|^2 = 0 \Leftrightarrow s_3 \underbrace{\|\vec{u}\|^2}_{>0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s_3 = 0$$

Assim, conclui-se que

$$X - P = s_1 \vec{a} + s_2 \vec{b} \quad , \ s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

ou seja,

$$X = P + s_1 \vec{a} + s_2 \vec{b} \Rightarrow X \in M$$

Wiz

4) $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 1$, $\|\vec{c}\| = 2$, $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{6}$

$\alpha = \measuredangle(\vec{c}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$

$\vec{c} \cdot \vec{b} \times \vec{a} = -2$

$\vec{d} = \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b}$

a) $\|\vec{d}\|^2 = (\vec{c} + \vec{a}\times\vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{a}\times\vec{b}) =$

$= \|\vec{c}\|^2 + \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 + 2\,\vec{c} \cdot \vec{a}\times\vec{b} =$

$= 4 + \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 + 2\,\vec{c} \cdot \vec{a}\times\vec{b}$

$\vec{c} \cdot \vec{a}\times\vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}\times\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}\times\vec{c} = -\vec{c} \cdot \vec{b}\times\vec{a} = 2$

$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = 9 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

$\|\vec{a} + b\|^2 = 6 \iff (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = 6 \iff$

$\iff \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 \iff 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 - 9 - 1 \iff$

$\iff \vec{a}\cdot\vec{b} = -2$

Assim, $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = 9 - (-2)^2 = 5$

e

$\|d\|^2 = 4 + 5 + 2(2) = 13 \iff \|\vec{d}\| = \sqrt{13}$

b) $\|\vec{c}\times\vec{d}\| = \|\vec{c}\| \|\vec{d}\| \operatorname{sen} \gamma$

$\|\vec{c}\times\vec{d}\|^2 = \|\vec{c}\|^2 \|\vec{d}\|^2 - (\vec{c}\cdot\vec{d})^2$

$\vec{c}\cdot\vec{d} = \vec{c}\cdot(\vec{c} + \vec{a}\times\vec{b}) = \|\vec{c}\|^2 + \vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} = 4 + 2 = 6$

$\|\vec{c}\times\vec{d}\|^2 = 4(13) - 36 = 16 \iff \|\vec{c}\times\vec{d}\| = 4$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{d}}{\|\vec{b}\| \|\vec{d}\|} = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{d}}{\sqrt{13}}$

Wiz

7)

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot (\vec{c} + \vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{c} + \underbrace{\vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{b}}_{=0} = \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \|\vec{b}\| \, \|\vec{c}\| \cos\frac{\pi}{6} = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = \sqrt{3}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}}{13} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{39}}{13}\right)$$

5) $M: x+z=4$

$r: X(u) = P + u\vec{a}, \quad u \in \mathbb{R}$

$P = (1,0,1)$

$\vec{a} = (1,1,-1)$

$Q = (1,0,-1)$

a) Seja $R = (0,y,0) \in yy, \quad y \in \mathbb{R}$

$$d_{R,M} = \frac{|(R-T)\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$ em que $\vec{n} = (1,0,1)$ – vector normal a M

$T = (4,0,0) \in M$

$R-T = (-4, y, 0)$

$(R-T)\cdot\vec{n} = -4$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{2}$

$$d_{R,M} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$d_{R,r} = \frac{\|\vec{PR}\times\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} = \frac{\|\vec{PR}\times\vec{a}\|}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{PR}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & y & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-y+1, -2, -1-y)$$

$$\|\vec{PR}\times\vec{a}\| = \sqrt{(1-y)^2 + 4 + (-1-y)^2} = \sqrt{2y^2+6}$$

$$d_{R,M} = d_{R,r} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2y^2+6}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2y^2+6} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow$$

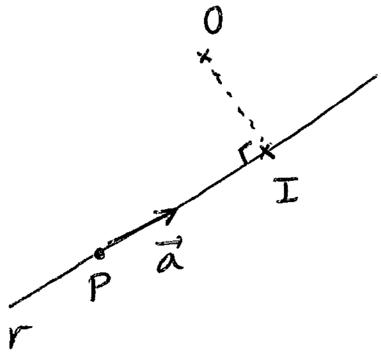
$$\Leftrightarrow 2y^2+6 = 24 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y=3 \vee y=-3$$

As soluções são:

$R = (0,3,0) \vee R = (0,-3,0)$

b) $M_1 \; : \; r \perp M_1 \; \wedge \; I \in M_1$

Cálculo do ponto I:



$\vec{OI} = I$

$I \in r \Leftrightarrow I = P + \mu \vec{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I = (1+\mu, \mu, 1-\mu)$

$\vec{OI} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow 1 + \mu + \mu - 1 + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$

$I = (1, 0, 1) = P$!

$r \perp M_1 \Rightarrow \vec{n}_1 = \vec{a} = (1,1,-1)$ é um vector normal a M_1

Equação cartesiana de M_1:

$(X - I) \cdot \vec{n}_1 = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{n}_1 = I \cdot \vec{n}_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y - z = 0$

c) $s \; : \; Q \in s \; \wedge \; s \parallel xOy \; \wedge \; \measuredangle(s, M) = \frac{\pi}{6}$

Equação vectorial de s:

$s : X(t) = Q + t\vec{b}, \; t \in \mathbb{R}$

$Q = (1, 0, -1)$

$\vec{b} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$

$s \parallel xOy \Leftrightarrow \vec{b} \parallel xOy \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{k} = 0$

$\vec{b} \cdot \vec{k} = 0 \Leftrightarrow (a,b,c) \cdot (0,0,1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = 0}$

Wmj

$$\measuredangle(s, \pi) = \frac{\pi}{6} \iff \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{\|\vec{b}\|\,\|\vec{n}\|} \iff$$

$$\iff \vec{b}\cdot\vec{n} = \|\vec{b}\|\,\|\vec{n}\|\,\frac{1}{2} \iff$$

$$\iff (a, b, 0)\cdot(1, 0, 1) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{2}\,\frac{1}{2} \iff$$

$$\iff a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

Considerando, por exemplo, $\|\vec{b}\| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$, obtém-se

$$\begin{cases} c = 0 \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \vec{b} = (1, 1, 0) \vee \vec{b} = (1, -1, 0)$$

Uma das rectas é:

$$s: X(t) = (1, 0, -1) + t\,(1, 1, 0),\ t \in \mathbb{R}$$

Wnj

6) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$S = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ é linearmente dependente $\Rightarrow$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Se S é linearmente dependente, então:

<u>CASO I</u> : $\vec{a} = \vec{0}$

É evidente que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \times \vec{b} = \vec{0}$

<u>CASO II</u> : $\vec{b} = \vec{0}$

É evidente que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{0} = \vec{0}$

<u>CASO III</u> : $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$

Se S é linearmente dependente gera de forma não única o vector nulo

$\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} = \vec{0}$, com α_1 e α_2 não necessariamente nulos

ou seja (admitindo que $\alpha_1 \neq 0$)

$$\vec{a} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{b} = k \vec{b} \quad , k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Obtém-se, assim,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (k\vec{b}) \times \vec{b} = k(\vec{b} \times \vec{b}) = k\,\vec{0} = \vec{0}$$

Wir