1. Matrizes

Alice: *Where shall I begin please your Majesty?*
King: *Begin at the beginning;*
and go on till you come to the end:then stop.

- • a palavra álgebra - talvez tenha surgido pela 1ª vez no tratado *Al-Jabr wa-al-Muqabilah* (*o livro sumário sobre cálculos por transposição*), escrito por Al-Khwarizmi, matemático de origem árabe, nascido na Pérsia, por volta de 800 D.C.
- • a palavra *Al-jabr*, da qual deriva álgebra, significa *reunião*, *conexão* (*a reunião de partes quebradas*).
- • A história da álgebra linear tem talvez origem no século XVIII com o estudo detalhado de sistemas de equações lineares e dos determinantes por Leibniz (alemão, 1646-1716) e Cramer (suíço, 1704-1752).

Álgebra é o ramo que estuda as generalizações dos conceitos e operações de aritmética. Hoje em dia o termo é bastante abrangente podendo referir-se a várias áreas da matemática.

Álgebra linear é um ramo da matemática, que surgiu do estudo detalhado de sistemas de equações lineares, sejam elas algébricas ou diferenciais.

A álgebra linear utiliza conceitos e estruturas fundamentais da matemática como matrizes, sistemas de equações lineares, vectores, espaços vectoriais, aplicações lineares.

Origem:Wikipédia

expressão algébrica, estruturas algébricas, notação algébrica, sistema algébrico computacional, . . .

$\boxed{\text{Exemplo:}}$ Suponhamos que em 3 grandes superfícies se podem adquirir 4 tipos de computadores. Uma forma simples de representar os preços de tipo de computador em cada estabelecimento seria através de uma tabela de dupla entrada.

	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	350	445	1399	1132
S_2	323	515	1645	295
S_3	315	395	1240	875

Na posição (2,3) da tabela (2ª linha, 3ª coluna) encontra-se o preço no estabelecimento S_2 do computador tipo C_3.
Quanto custam 2 computadores C_1, 3 de C_2, 1 de C_3, e 4 de C_4, no supermercado S_1? E no S_2? E no S_3?

	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	350	445	1399	1132
S_2	323	515	1645	295
S_3	315	395	1240	875

$$\begin{pmatrix} 350 & 445 & 1399 & 1132 \\ 323 & 515 & 1645 & 295 \\ 315 & 395 & 1240 & 875 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{350} & \color{blue}{445} & \color{blue}{1399} & \color{blue}{1132} \\ 323 & 515 & 1645 & 295 \\ 315 & 395 & 1240 & 875 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \color{blue}{2} \\ \color{blue}{3} \\ \color{blue}{1} \\ \color{blue}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 350 \times 2 + 445 \times 3 + 1399 \times 1 + 1132 \times 4 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} é o elemento da matriz A da linha i e da coluna j

A matriz A diz-se de ordem $m \times n$ (m linhas, n colunas) (*lê-se m por n*)

$$A = (a_{ij})$$

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 & 0 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 & -1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 & -1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 & -1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Definição

Uma matriz diz-se real se todos os seus elementos são números reais.
$\mathbb{R}^{m \times n}$ - conjunto de todas as matrizes reais, de ordem $m \times n$.

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.
A diz-se quadrada se $m = n$.
A diz-se rectangular se $m \neq n$.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ matriz rectangular}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 4/7 \end{pmatrix} \text{ matriz quadrada}$$

Definição

Uma matriz de ordem $n \times 1$ tem a forma $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ e chama-se matriz coluna.

Uma matriz de ordem $1 \times n$ tem a forma $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ e chama-se matriz linha.

Exemplos

$\begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 & 0 \end{pmatrix}$ matriz linha, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ matriz coluna.

Notação: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}$

Definição

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$.
Diz-se que os elementos (a_{ij}) tal que $i = j$, isto é

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

são os elementos diagonais de A.

Exemplo $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

Definição

Uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero chama-se matriz nula.

$$O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Definição

À matriz **quadrada**, de ordem n, cujos elementos da diagonal são todos iguais a um, e os de fora da diagonal todos iguais a zero, chama-se matriz identidade de ordem n, e representa-se por I_n.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (bij)$ duas matrizes da mesma ordem.
Diz-se que A é igual a B, escreve-se $A = B$ se e só se $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo

Sejam $X = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi & 0 \\ 0 & 0.8 & 3/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & b & 0 \\ a & 0.8 & c \end{pmatrix}$

a=?,
b=?,
c=?

Definição

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (bij)$ duas matrizes da mesma ordem.
Diz-se que A é igual a B, escreve-se $A = B$ se e só se $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo

Sejam $X = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi & 0 \\ 0 & 0.8 & 3/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & b & 0 \\ a & 0.8 & c \end{pmatrix}$

a=?,
b=?,
c=?

Operações com matrizes

$$A + B =? \quad A - B =? \quad \alpha A =? \quad A.B =?$$

Definição

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes da mesma ordem $m \times n$.
A soma de A com B é uma matriz $C = (c_{ij})$ cujos elementos são dados por:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$$

e representa-se por $A + B$.

Exemplo

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
tem-se $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

A adição de matrizes só está definida para **matrizes da mesma ordem.**

Propriedades da adição de matrizes

Teorema

Sejam A, B e C matrizes da mesma ordem $m \times n$. Então:

(i) $A + B = B + A$,

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

(iii) Se O designa a matriz nula de ordem $m \times n$, $A + O = O + A = A$,

(iii) Se $-A = (-a_{ij})$, $A + (-A) = O$.

Definição

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes da mesma ordem $m \times n$. $A - B$ quer significar $A + (-B)$ sendo $-B = (-b_{ij})$.

Exemplo

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

tem-se $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Multiplicação de uma matriz por um número

Definição

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$ e α um número ($\alpha \in \mathbb{R}$).
O produto de α por A é a matriz $C = (c_{ij})$ cujos elementos são dados por:

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad (i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$$

e escreve-se

$$C = \alpha A$$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de uma matriz por um número

Teorema

Sejam A e B matrizes da mesma ordem $m \times n$ e, α e β números reais. Então:

(i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,

(ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(iv) $1A = A$,

(v) $\alpha O_{m\times n} = O_{m\times n}$,

(vi) $0A = O_{m\times n}$,

(vi) $A + (-1)A = O_{m\times n}$, $((-1)A = -A)$

Multiplicação de matrizes

...um ideia engraçada!

A ideia da multiplicação de matrizes pretende dar significado à notação, simples e abreviada de se escrever

$$Ax = b$$

para representar um sistema de m equações a n incógnitas.

Considerando o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 4x_2 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 7 \end{cases}$$

e usando matrizes escrevemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{b}$$

sendo então o produto Ax definido por

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

...um ideia engraçada!

A ideia da multiplicação de matrizes pretende dar significado à notação, simples e abreviada de se escrever

$$Ax = b$$

para representar um sistema de m equações a n incógnitas.

Considerando o sistema e usando matrizes escrevemos

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 4x_2 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 7 \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{b}$$

sendo então o produto Ax definido por

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

...um ideia engraçada!

A ideia da multiplicação de matrizes pretende dar significado à notação, simples e abreviada de se escrever

$$Ax = b$$

para representar um sistema de m equações a n incógnitas.

Considerando o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 4x_2 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 7 \end{cases}$$

e usando matrizes escrevemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{b}$$

sendo então o produto Ax definido por

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

outro exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

tem-se $Ax = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 3 \\ -1 \times 2 + 0 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

e $Ay = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 1 \times 5 \\ -1 \times 4 + 0 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

Considerando $B = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}}_{x} & \underbrace{\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}}_{y} \end{pmatrix}$

podemos escrever

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 3 & 1 \times 4 + 1 \times 5 \\ -1 \times 2 + 0 \times 3 & -1 \times 4 + 0 \times 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}}_{2 \times 2}$$

outro exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

tem-se $Ax = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 3 \\ -1 \times 2 + 0 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

e $Ay = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 1 \times 5 \\ -1 \times 4 + 0 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

Considerando $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, com colunas $\underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}}_{x}$ e $\underbrace{\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}}_{y}$

podemos escrever

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 3 & 1 \times 4 + 1 \times 5 \\ -1 \times 2 + 0 \times 3 & -1 \times 4 + 0 \times 5 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}}_{2 \times 2}$$

ainda outro exemplo

Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Então
$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}}_{2\times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 1+2\times 5 & 1\times 2+2\times 6 & 1\times 3+2\times 7 \\ -1\times 1+1\times 5 & -1\times 2+1\times 6 & -1\times 3+1\times 7 \\ 0\times 1-1\times 5 & 0\times 2-1\times 6 & 0\times 3-1\times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 14 & 17 \\ 4 & 4 & 4 \\ -5 & -6 & -7 \end{pmatrix}}_{3\times 3}$$

e, no caso geral...

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots & \\ \dots & b_{2j} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & b_{nj} & \dots & \end{pmatrix}$$

linha i coluna j

na posição ij: $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$

Definição

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times l$ e $B = (bij)$ uma matriz de ordem $l \times n$. O produto de A por B é uma matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$, cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$$

e escreve-se $C = AB$.

e, no caso geral...

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ldots & b_{1j} & \ldots & \\ \ldots & b_{2j} & \ldots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & b_{nj} & \ldots & \end{pmatrix}$$

linha i coluna j

na posição ij: $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$

Definição

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times l$ e $B = (bij)$ uma matriz de ordem $l \times n$. O produto de A por B é uma matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$, cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$$

e escreve-se $C = AB$.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Teorema

Sejam A, B e C matrizes e α um número real. Então, se todas as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(AB)C = A(BC)$,

(ii) $A(B + C) = AB + AC$,

(iii) $(A + B)C = AC + BC$,

(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Observação: a multiplicação de matrizes **não** goza da propriedade comutativa.

⋆ se A é de ordem $m \times l$

⋆ e $B = (bij)$ é ordem $l \times n$

- o produto AB é definido e AB uma matriz de ordem $m \times n$,
- se $m = n$, BA está definido, mas é uma matriz ordem $l \times l$,
- no entanto, se $m = n = l$, em geral $AB \neq BA$.

Quando se tem **AB=BA** diz-se que as **matrizes** A e B são **comutáveis**.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Teorema

Sejam A, B e C matrizes e α um número real. Então, se todas as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(AB)C = A(BC)$,

(ii) $A(B + C) = AB + AC$,

(iii) $(A + B)C = AC + BC$,

(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Observação: a multiplicação de matrizes **não** goza da propriedade comutativa.

⋆ se A é de ordem $m \times l$

⋆ e $B = (bij)$ é ordem $l \times n$

- o produto AB é definido e AB uma matriz de ordem $m \times n$,
- se $m = n$, BA está definido, mas é uma matriz ordem $l \times l$,
- no entanto, se $m = n = l$, em geral $AB \neq BA$.

Quando se tem **AB=BA** diz-se que as **matrizes** A e B são **comutáveis**.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Teorema

Sejam A, B e C matrizes e α um número real. Então, se todas as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(AB)C = A(BC)$,

(ii) $A(B + C) = AB + AC$,

(iii) $(A + B)C = AC + BC$,

(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Observação: a multiplicação de matrizes **não** goza da propriedade comutativa.

⋆ se A é de ordem $m \times l$

⋆ e $B = (bij)$ é ordem $l \times n$

- o produto AB é definido e AB uma matriz de ordem $m \times n$,
- se $m = n$, BA está definido, mas é uma matriz ordem $l \times l$,
- no entanto, se $m = n = l$, em geral $AB \neq BA$.

Quando se tem **AB=BA** diz-se que as **matrizes** A e B são **comutáveis**.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Teorema

Sejam A, B e C matrizes e α um número real. Então, se todas as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(AB)C = A(BC)$,

(ii) $A(B + C) = AB + AC$,

(iii) $(A + B)C = AC + BC$,

(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Observação: a multiplicação de matrizes **não** goza da propriedade comutativa.

⋆ se A é de ordem $m \times l$

⋆ e $B = (bij)$ é ordem $l \times n$

- o produto AB é definido e AB uma matriz de ordem $m \times n$,
- se $m = n$, BA está definido, mas é uma matriz ordem $l \times l$,
- no entanto, se $m = n = l$, em geral $AB \neq BA$.

Quando se tem **AB=BA** diz-se que as **matrizes** A e B são **comutáveis**.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Teorema

Sejam A, B e C matrizes e α um número real. Então, se todas as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(AB)C = A(BC)$,

(ii) $A(B + C) = AB + AC$,

(iii) $(A + B)C = AC + BC$,

(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Observação: a multiplicação de matrizes **não** goza da propriedade comutativa.

⋆ se A é de ordem $m \times l$

⋆ e $B = (bij)$ é ordem $l \times n$

- o produto AB é definido e AB uma matriz de ordem $m \times n$,
- se $m = n$, BA está definido, mas é uma matriz ordem $l \times l$,
- no entanto, se $m = n = l$, em geral $AB \neq BA$.

Quando se tem **AB=BA** diz-se que as **matrizes** A e B são **comutáveis**.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Teorema

Sejam A, B e C matrizes e α um número real. Então, se todas as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(AB)C = A(BC)$,

(ii) $A(B + C) = AB + AC$,

(iii) $(A + B)C = AC + BC$,

(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Observação: a multiplicação de matrizes **não** goza da propriedade comutativa.

⋆ se A é de ordem $m \times l$

⋆ e $B = (bij)$ é ordem $l \times n$

- o produto AB é definido e AB uma matriz de ordem $m \times n$,
- se $m = n$, BA está definido, mas é uma matriz ordem $l \times l$,
- no entanto, se $m = n = l$, em geral $AB \neq BA$.

Quando se tem **AB=BA** diz-se que as **matrizes** A e B são **comutáveis**.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Teorema

Sejam A, B e C matrizes e α um número real. Então, se todas as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

$$\begin{aligned} \text{(i)} &\quad (AB)C = A(BC), \\ \text{(ii)} &\quad A(B+C) = AB + AC, \\ \text{(iii)} &\quad (A+B)C = AC + BC, \\ \text{(iv)} &\quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B). \end{aligned}$$

Observação: a multiplicação de matrizes **não** goza da propriedade comutativa.

⋆ se A é de ordem $m \times l$

⋆ e $B = (bij)$ é ordem $l \times n$

- o produto AB é definido e AB uma matriz de ordem $m \times n$,
- se $m = n$, BA está definido, mas é uma matriz ordem $l \times l$,
- no entanto, se $m = n = l$, em geral $AB \neq BA$.

Quando se tem **AB=BA** diz-se que as **matrizes** A e B são **comutáveis**.

Operação de Potenciação de matrizes

Definição

Define-se a potência de ordem n de uma matriz quadrada A como sendo o produto de n factores todos iguais à matriz A.

Escreve-se:

$$A^n = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{n}$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $A^2 =?, A^3 =?, \ldots A^n =?$

Exemplo:

Sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

será que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Operação de Potenciação de matrizes

Definição

Define-se a potência de ordem n de uma matriz quadrada A como sendo o produto de n factores todos iguais à matriz A.

Escreve-se:

$$A^n = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{n}$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $A^2 = ?, A^3 = ?, \ldots A^n = ?$

Exemplo:

Sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

será que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Operação de Potenciação de matrizes

Definição

Define-se a potência de ordem n de uma matriz quadrada A como sendo o produto de n factores todos iguais à matriz A.

Escreve-se:

$$A^n = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{n}$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\quad A^2 =?, A^3 =?, \ldots A^n =?$

Exemplo:

Sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

será que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Operação de Potenciação de matrizes

Definição

Define-se a potência de ordem n de uma matriz quadrada A como sendo o produto de n factores todos iguais à matriz A.

Escreve-se:

$$A^n = \underbrace{A.A.\dots.A}_{n}$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\quad A^2 =?, A^3 =?, \dots A^n =?$

Exemplo:

Sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

será que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Matrizes simétricas e matrizes ortogonais

Definição

Dada uma matriz A, de ordem $m \times n$, a matriz cujas colunas são as linhas de A, pela ordem correspondente, diz-se a transposta de A e representa-se por A^T

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Matrizes simétricas e matrizes ortogonais

Definição

Dada uma matriz A, de ordem $m \times n$, a matriz cujas colunas são as linhas de A, pela ordem correspondente, diz-se a transposta de A e representa-se por A^T

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Matrizes simétricas e matrizes ortogonais

Definição

Dada uma matriz A, de ordem $m \times n$, a matriz cujas colunas são as linhas de A, pela ordem correspondente, diz-se a transposta de A e representa-se por A^T

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Nota: Designa-se por $B = A^T$, a matriz B, de ordem $n \times m$, cujos elementos são dados por $b_{ji} = a_{ij}$.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz simétrica de e só se $A = A^T$.

Nota: Se A é simétrica tem-se $a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, n$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Nota: Designa-se por $B = A^T$, a matriz B, de ordem $n \times m$, cujos elementos são dados por $b_{ji} = a_{ij}$.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz simétrica de e só se $A = A^T$.

Nota: Se A é simétrica tem-se $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Nota: Designa-se por $B = A^T$, a matriz B, de ordem $n \times m$, cujos elementos são dados por $b_{ji} = a_{ij}$.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz simétrica de e só se $A = A^T$.

Nota: Se A é simétrica tem-se $a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots n$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Nota: Designa-se por $B = A^T$, a matriz B, de ordem $n \times m$, cujos elementos são dados por $b_{ji} = a_{ij}$.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz simétrica de e só se $A = A^T$.

Nota: Se A é simétrica tem-se $a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, n$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Nota: Designa-se por $B = A^T$, a matriz B, de ordem $n \times m$, cujos elementos são dados por $b_{ji} = a_{ij}$.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz simétrica de e só se $A = A^T$.

Nota: Se A é simétrica tem-se $a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots n$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && (A^T)^T = A,\\
&\text{(ii)} && (A+B)^T = A^T + B^T,\\
&\text{(iii)} && (\alpha A)^T = \alpha A^T,\\
&\text{(iv)} && (AB)^T = B^T A^T.
\end{aligned}
$$

Nota: Designa-se por $B = A^T$, a matriz B, de ordem $n \times m$, cujos elementos são dados por $b_{ji} = a_{ij}$.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz simétrica de e só se $A = A^T$.

Nota: Se A é simétrica tem-se $a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, n$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Nota: Designa-se por $B = A^T$, a matriz B, de ordem $n \times m$, cujos elementos são dados por $b_{ji} = a_{ij}$.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz simétrica de e só se $A = A^T$.

Nota: Se A é simétrica tem-se $a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots n$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes e α um número real. Se as operações, a seguir indicadas, estiverem definidas:

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Nota: Designa-se por $B = A^T$, a matriz B, de ordem $n \times m$, cujos elementos são dados por $b_{ji} = a_{ij}$.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz simétrica de e só se $A = A^T$.

Nota: Se A é simétrica tem-se $a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots n$.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz ortogonal se e só se $A^T A = AA^T = I_n$.

Exemplo:

Se $R_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

uma vez que $R_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

então $RR_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} cos^2\alpha + sin^2\alpha & cos\alpha\ sin\alpha - sin\alpha\ cos\alpha \\ cos\alpha sin\ \alpha - sin\alpha\ cos\alpha & cos^2\alpha + sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Do mesmo modo se verificava que $R_\alpha^T R = I_2$, podendo concluir-se que a matriz R é ortogonal.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz ortogonal se e só se $A^T A = AA^T = I_n$.

Exemplo:

Se $R_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

uma vez que $R_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

então $RR_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} cos^2\alpha + sin^2\alpha & cos\alpha\ sin\alpha - sin\alpha\ cos\alpha \\ cos\alpha sin\ \alpha - sin\alpha\ cos\alpha & cos^2\alpha + sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Do mesmo modo se verificava que $R_\alpha^T R = I_2$, podendo concluir-se que a matriz R é ortogonal.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz ortogonal se e só se $A^TA = AA^T = I_n$.

Exemplo:

Se $R_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

uma vez que $R_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

então $RR_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} cos^2\alpha + sin^2\alpha & cos\alpha\, sin\alpha - sin\alpha\, cos\alpha \\ cos\alpha sin\,\alpha - sin\alpha\, cos\alpha & cos^2\alpha + sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Do mesmo modo se verificava que $R_\alpha^T R = I_2$, podendo concluir-se que a matriz R é ortogonal.

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A diz-se uma matriz ortogonal se e só se $A^T A = AA^T = I_n$.

Exemplo:

Se $R_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

uma vez que $R_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

então $RR_\alpha^T = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} cos^2\alpha + sin^2\alpha & cos\alpha\ sin\alpha - sin\alpha\ cos\alpha \\ cos\alpha sin\ \alpha - sin\alpha\ cos\alpha & cos^2\alpha + sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Do mesmo modo se verificava que $R_\alpha^T R = I_2$, podendo concluir-se que a matriz R é ortogonal.

Inversa de uma Matriz

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se existir uma matriz X, de ordem n, tal que

$$XA = AX = I_n \tag{1}$$

diz-se que A é invertível, regular ou não singular.

Uma matriz X que verifique (1) chama-se inversa de A e representa-se por A^{-1}.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ tem-se que $XA = AX = I_2$, donde $X = A^{-1}$ é a matriz inversa de A.

Inversa de uma Matriz

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se existir uma matriz X, de ordem n, tal que

$$XA = AX = I_n \tag{1}$$

diz-se que A é invertível, regular ou não singular.
Uma matriz X que verifique (1) chama-se inversa de A e representa-se por A^{-1}.

Exemplo:
Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ tem-se que $XA = AX = I_2$, donde $X = A^{-1}$ é a matriz inversa de A.

...nem todas as matrizes quadradas têm inversa

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a sua matriz inversa é a matriz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ tal que $XA = AX = I_2$.

Tendo-se

$$AX = \begin{pmatrix} 2x_{11} + 2x_{21} & 2x_{12} + 2x_{22} \\ x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}$$

para que $AX = I_2$ deve ter-se

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1/2 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases}$$

donde se conclui que o sistema não tem solução, não existe nenhuma matriz tal que $AX = I_2$, logo A não tem inversa.

...nem todas as matrizes quadradas têm inversa

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a sua matriz inversa é a matriz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ tal que $XA = AX = I_2$.

Tendo-se

$$AX = \begin{pmatrix} 2x_{11} + 2x_{21} & 2x_{12} + 2x_{22} \\ x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}$$

para que $AX = I_2$ deve ter-se

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1/2 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases}$$

donde se conclui que o sistema não tem solução, não existe nenhuma matriz tal que $AX = I_2$, logo A não tem inversa.

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a sua matriz inversa é a matriz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ tal que $XA = AX = I_2$.

Tendo-se

$$AX = \begin{pmatrix} 2x_{11} + 2x_{21} & 2x_{12} + 2x_{22} \\ x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}$$

para que $AX = I_2$ deve ter-se

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1/2 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases}$$

donde se conclui que o sistema não tem solução, não existe nenhuma matriz tal que $AX = I_2$, logo A não tem inversa.

...nem todas as matrizes quadradas têm inversa

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a sua matriz inversa é a matriz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ tal que $XA = AX = I_2$.

Tendo-se

$$AX = \begin{pmatrix} 2x_{11} + 2x_{21} & 2x_{12} + 2x_{22} \\ x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}$$

para que $AX = I_2$ deve ter-se

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1/2 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases}$$

donde se conclui que o sistema não tem solução, não existe nenhuma matriz tal que $AX = I_2$, logo A não tem inversa.

...nem todas as matrizes quadradas têm inversa

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a sua matriz inversa é a matriz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ tal que $XA = AX = I_2$.

Tendo-se

$$AX = \begin{pmatrix} 2x_{11} + 2x_{21} & 2x_{12} + 2x_{22} \\ x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}$$

para que $AX = I_2$ deve ter-se

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1/2 \\ x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases}$$

donde se conclui que o sistema não tem solução, não existe nenhuma matriz tal que $AX = I_2$, logo A não tem inversa.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Proposição

Se A é uma matiz invertível, a sua inversa é única.

Demonstração:

Sejam X e Y matrizes inversas da matriz A.

Então

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$

e do mesmo modo se verifica

$$YAX = (YA)X = I_nX = X$$

logo $X = Y$, e foi errado supor que existiam duas matrizes inversas de A.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^TA = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^T A = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^TA = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^TA = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^TA = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal ($A^TA = AA^T = I_n$) então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^TA = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^TA = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Propriedades

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis. Então

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) A^T é invertível $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iv) se A é ortogonal $(A^TA = AA^T = I_n)$ então $(A)^T = A^{-1}$.

Demonstração (ii)

Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, existem as matrizes A^{-1} e B^{-1}. Tendo-se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \cdots = I_n$$

pela definição de matiz invertível, se conclui que AB é invertível e a sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

Definição

Uma matriz $A = (A_{ij})$, quadrada, diz-se uma matriz diagonal se todos os elementos fora da diagonal principal forem iguais a zero, isto é,

$$i \neq j, a_{ij} = 0$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definição

Uma matriz $A = (A_{ij})$, quadrada, diz-se uma matriz diagonal se todos os elementos fora da diagonal principal forem iguais a zero, isto é,

$$i \neq j, a_{ij} = 0$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definição

Uma matriz $A = (A_{ij})$, quadrada, diz-se uma matriz triangular superior (inferior) se todos os elementos abaixo (acima) da diagonal principal forem iguais a zero, ou seja,

$$i > j, a_{ij} = 0$$

$$i < j, a_{ij} = 0$$

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular inferior,

$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular superior.

Definição

Uma matriz $A = (A_{ij})$, quadrada, diz-se uma matriz triangular superior (inferior) se todos os elementos abaixo (acima) da diagonal principal forem iguais a zero, ou seja,

$$i > j, a_{ij} = 0$$

$$i < j, a_{ij} = 0$$

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular inferior,

$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular superior.

Definição

Uma matriz $A = (A_{ij})$, quadrada, diz-se uma matriz banda de largura de banda $2k+1$ se,

$$|i-j| > k, a_{ij} = 0$$

Se $k = 1$ a matriz diz-se matriz tridiagonal.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$ é uma matriz tridiagonal ($k = 1$).

Definição

Uma matriz diz-se densa se a maior parte dos seus elementos são não nulos.

Definição

Uma matriz diz-se dispersa se a maior parte dos seus elementos são nulos.

Definição

Uma matriz $A = (A_{ij})$, quadrada, diz-se uma matriz banda de largura de banda $2k+1$ se,

$$|i-j| > k, a_{ij} = 0$$

Se $k = 1$ a matriz diz-se matriz tridiagonal.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$ é uma matriz tridiagonal ($k = 1$).

Definição

Uma matriz diz-se densa se a maior parte dos seus elementos são não nulos.

Definição

Uma matriz diz-se dispersa se a maior parte dos seus elementos são nulos.

Definição

Uma matriz $A = (A_{ij})$, quadrada, diz-se uma matriz banda de largura de banda $2k+1$ se,

$$|i-j| > k, a_{ij} = 0$$

Se $k = 1$ a matriz diz-se matriz tridiagonal.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$ é uma matriz tridiagonal ($k = 1$).

Definição

Uma matriz diz-se densa se a maior parte dos seus elementos são não nulos.

Definição

Uma matriz diz-se dispersa se a maior parte dos seus elementos são nulos.

Definição

Uma matriz $A = (A_{ij})$, quadrada, diz-se uma matriz banda de largura de banda $2k + 1$ se,

$$|i - j| > k, a_{ij} = 0$$

Se $k = 1$ a matriz diz-se matriz tridiagonal.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$ é uma matriz tridiagonal $(k = 1)$.

Definição

Uma matriz diz-se densa se a maior parte dos seus elementos são não nulos.

Definição

Uma matriz diz-se dispersa se a maior parte dos seus elementos são nulos.

Definição

Uma matriz A, de ordem $m \times n$ diz-se fraccionada em blocos se estiver escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

com A_{ij} uma matriz de ordem $m_i \times n_j$, sendo $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$ e $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

O fraccionamento de uma matriz:

- facilita a manipulação de matrizes de grandes dimensões,
- simplifica operações entre matrizes,
- torna clara a descrição de algumas propriedades referentes a matrizes.

Definição

Uma matriz A, de ordem $m \times n$ diz-se fraccionada em blocos se estiver escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

com A_{ij} uma matriz de ordem $m_i \times n_j$, sendo $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$ e $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

O fraccionamento de uma matriz:

- facilita a manipulação de matrizes de grandes dimensões,
- simplifica operações entre matrizes,
- torna clara a descrição de algumas propriedades referentes a matrizes.

Definição

Uma matriz A, de ordem $m \times n$ diz-se fraccionada em blocos se estiver escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

com A_{ij} uma matriz de ordem $m_i \times n_j$, sendo $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$ e $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

O fraccionamento de uma matriz:

- facilita a manipulação de matrizes de grandes dimensões,
- simplifica operações entre matrizes,
- torna clara a descrição de algumas propriedades referentes a matrizes.

Definição

Uma matriz A, de ordem $m \times n$ diz-se fraccionada em blocos se estiver escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

com A_{ij} uma matriz de ordem $m_i \times n_j$, sendo $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$ e $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

O fraccionamento de uma matriz:

- facilita a manipulação de matrizes de grandes dimensões,
- simplifica operações entre matrizes,
- torna clara a descrição de algumas propriedades referentes a matrizes.

Definição

Uma matriz A, de ordem $m \times n$ diz-se fraccionada em blocos se estiver escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

com A_{ij} uma matriz de ordem $m_i \times n_j$, sendo $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$ e $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

O fraccionamento de uma matriz:

- facilita a manipulação de matrizes de grandes dimensões,
- simplifica operações entre matrizes,
- torna clara a descrição de algumas propriedades referentes a matrizes.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

pode efectuar-se o fraccionamento:

$$A = \begin{pmatrix} B & I_2 \\ I_2 & B \end{pmatrix}$$

com $B = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$