Exercício: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz em escada reduzida equivalente à matriz A através do algoritmo $\boxed{\text{1.98obs}}$.

Exercício

O objectivo deste exercício é transformar a matriz dada A na matriz em escada reduzida que lhe é equivalente. Para tal, vai-se recorrer ao algoritmo apresentado em 1.98obs da sebenta.

Passo 1 [inicializar o algoritmo]

determinar $A' = [a'_{ij}] \in \text{fe}(A)$ (no que se segue, ℓ' refere-se às linhas da matriz A')

$i \leftarrow$ índice da última linha não-nula da matriz A'

$j \leftarrow$ índice da coluna pivô da linha ℓ_i

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \boxed{i|3} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & \boxed{j|5} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Passo 1 — inicializar o algoritmo

Para se obter uma matriz em escada reduzida equivalente à matriz A, começa-se por obter uma matriz em escada que lhe seja equivalente (e que se identifica por A'). Esta tarefa foi feita no exercício anterior. A variável i é inicializada com o índice da última linha não-nula da matriz A', ou seja, com o valor 3, e a variável j é inicializada com o índice da coluna pivô de ℓ_i, ou seja, com o valor 5.

Passo 2 [colocar elemento pivô a 1]

se $a'_{ij} \neq 1$ **então**

$$\ell'_i \leftarrow \frac{1}{a'_{ij}} \ell'_i$$

fimse

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & & \boxed{j|5} \end{array} \\ \boxed{i|3} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Passo 2 — colocar elemento pivô a 1

Como o elemento 35 já é 1, não há necessidade de efectuar operações neste passo.

Passo 3 [anular os elementos acima do pivô]

para $p \leftarrow 1$ **até** $i-1$ **fazer**

$$\ell'_p \leftarrow \ell'_p - a'_{pj}\ell'_i$$

fimpara

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 + 2\ell_3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 3 — anular os elementos acima do pivô

Como as linhas do pivô e as que lhe estão abaixo ficam inalteradas, tem-se que ℓ_3 e ℓ_4 já não sofrem alterações. Como o elemento 25 já é 0, ℓ_2 também não sofre alterações. Como o elemento 15 é diferente de 0, então ℓ_1 vai passar a ser o que era menos o elemento que se quer anular, ou seja, o -2, vezes a linha do pivô, ou seja, ℓ_3. Tem-se então que fazer $\ell_1 + 2\ell_3$, vindo $0 + 2 \times 0$, que dá 0, $2 + 2 \times 0$, que dá 2, $1 + 2 \times 0$, que dá 1, $2 + 2 \times 0$, que dá 2, e $-2 + 2 \times 1$, que dá 0. A nova linha ℓ_1 está calculada.

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada reduzida **então**

terminar

senão

$i \leftarrow i - 1$

$j \leftarrow$ índice da coluna pivô da linha i

ir para o Passo 2

fimse

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & \boxed{j|4} & \end{array} \\ \boxed{i|2} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Passo 4 — terminar?

Como a matriz que se obteve ainda não é uma matriz em escada reduzida, o algoritmo não termina, decrementando-se o valor da variável i de uma unidade, ou seja, i passa a valer 2, e a variável j, que é o índice da coluna pivô de ℓ_i, ou seja, ℓ_2, passa a valer 4. O algoritmo continua no passo 2.

Passo 2 [colocar elemento pivô a 1]

se $a'_{ij} \neq 1$ **então**

$$\ell'_i \leftarrow \frac{1}{a'_{ij}} \ell'_i$$

fimse

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & \boxed{j|4} & \end{array} \\ \boxed{i|2} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 2 — colocar elemento pivô a 1

Como elemento 24, é diferente de 1, é necessário dividir todos os elementos da linha ℓ_i, ou seja ℓ_2, pelo elemento pivô, ou seja, 2, ou seja, efectuar a operação $\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2$. Assim, ℓ_1, ℓ_3 e ℓ_4 não sofrem alterações. A nova linha ℓ_2 passa a ser 0/2, ou seja, 0, 0/2, ou seja, 0, 0/2, ou seja, 0, 2/2, ou seja, 1, 0/2, ou seja, 0. A nova linha ℓ_2 está calculada.

Passo 3 [anular os elementos acima do pivô]

para $p \leftarrow 1$ **até** $i-1$ **fazer**

$\ell'_p \leftarrow \ell'_p - a'_{pj}\ell'_i$

fimpara

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 3 — anular os elementos acima do pivô

Como as linhas do pivô e as que lhe estão abaixo ficam inalteradas, tem-se que ℓ_2, ℓ_3 e ℓ_4 já não sofrem alterações. Como o elemento 14 é diferente de 0, então ℓ_1 vai passar a ser o que era menos o elemento que se quer anular, ou seja, o 2, vezes a linha do pivô, ou seja, ℓ_2. Tem-se então que fazer $\ell_1 - 2\ell_2$, vindo $0 - 2 \times 0$, que dá 0, $2 - 2 \times 0$, que dá 2, $1 - 2 \times 0$, que dá 1, $2 - 2 \times 1$, que dá 0, e $0 - 2 \times 0$, que dá 0. A nova linha ℓ_1 está calculada.

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada reduzida **então**

terminar

senão

$i \leftarrow i - 1$

$j \leftarrow$ índice da coluna pivô da linha i

ir para o Passo 2

fimse

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & \boxed{j|2} & & & \end{array} \\ \boxed{i|1} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Passo 4 — terminar?

Como a matriz que se obteve ainda não é uma matriz em escada reduzida, o algoritmo não termina, decrementando-se o valor da variável i de uma unidade, ou seja, i passa a valer 1, e a variável j, que é o índice da coluna pivô de ℓ_i, ou seja, ℓ_1, passa a valer 2. O algoritmo continua no passo 2.

Passo 2 [colocar elemento pivô a 1]

se $a'_{ij} \neq 1$ **então**

$$\ell'_i \leftarrow \frac{1}{a'_{ij}} \ell'_i$$

fimse

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & \boxed{j|2} & & & \end{array} \\ \boxed{i|1} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 2 — colocar elemento pivô a 1

Como elemento 12, é diferente de 1, é necessário dividir todos os elementos da linha ℓ_i, ou seja ℓ_1, pelo elemento pivô, ou seja, 2, ou seja, efectuar a operação $\ell_1 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_1$. Assim, ℓ_2, ℓ_3 e ℓ_4 não sofrem alterações. A nova linha ℓ_1 passa a ser $0 \div 2$, ou seja, 0, $2 \div 2$, ou seja, 1, $1 \div 2$, ou seja, 1/2, $0 \div 2$, ou seja, 0, $0 \div 2$, ou seja, 0. A nova linha ℓ_1 está calculada.

Passo 3 [anular os elementos acima do pivô]

para $p \leftarrow 1$ **até** $i-1$ **fazer**

$$\ell'_p \leftarrow \ell'_p - a'_{pj}\ell'_i$$

fimpara

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & \boxed{j|2} & & & \end{array} \\ \boxed{i|1} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Passo 3 — anular os elementos acima do pivô

Como já não há linhas acima do pivô, não há operações a fazer neste passo.

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada reduzida **então**

  terminar

senão

  $i \leftarrow i - 1$

  $j \leftarrow$ índice da coluna pivô da linha i

  ir para o Passo 2

fimse

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4 — terminar?

Como a matriz que se obteve já é uma matriz em escada reduzida, o algoritmo termina.