Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância) — 1ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**2,0**] Seja o conjunto $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}\subset\mathbb{R}^4$, tais que $\vec{u}_1=(1,2,0,k)$, $\vec{u}_2=(1,k,2-k,2)$, $\vec{u}_3=(-2,-k,1,-1)$ e $\vec{u}_4=(0,1,1,1)$. Calcule os valores de k, de forma que U seja uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$. Justifique.

2. [**6,2**] Considere o conjunto $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}\subset\mathbb{R}^4$, com $\vec{a}=(1,-1,2,0)$, $\vec{b}=(1,1,0,1)$, $\vec{c}=(1,-1,3,0)$ e $\vec{d}=(2,2,1,2)$, e os vetores $\vec{v}=(\alpha-1,\alpha+1,0,\beta)$ e $\vec{w}=(\beta,-\beta,1,0)$.

a) Determine o subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$. Indique uma base para o subespaço obtido e conclua em relação à sua dimensão.

b) Será o conjunto S linearmente independente? Justifique.

c) Calcule os valores dos escalares α e β de modo que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ possam pertencer a uma base ortogonal, Q, para o subespaço $L(\mathrm{S})$. Obtenha Q.

d) Determine uma base, W, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que contenha o maior número possível de elementos de S.

GRUPO II

3. [**2,2**] Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores não nulos do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=\sqrt{2}$ e $\vec{c}=\vec{a}-(2\vec{a})\times(2\vec{b})$. Considere o conjunto ortonormal $\mathrm{S}=\{\alpha\vec{a},\alpha\vec{a}\times\vec{b}\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) Determine α e calcule o ângulo, θ, entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

b) Obtenha o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{c}$ (se não resolveu a alínea **a)**, admita $\theta=45^\circ$).

c) Verifique, justificando devidamente, se os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ definem um prisma. Em caso afirmativo calcule o seu volume.

..........*(continua no verso)*

GRUPO III

4. [2,5] Seja o plano $M = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ : \ (X - P) \cdot \vec{n} = 0 \right\}$. Mostre que:

a) $O' = \dfrac{P \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$ é o ponto do plano M mais próximo da origem.

b) $\left\| \overrightarrow{PO'} \right\| = \left[\|P\|^2 - \dfrac{(P \cdot \vec{n})^2}{\|\vec{n}\|^2} \right]^{1/2} = \dfrac{\|P \times \vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$.

5. [4,7] Sejam o ponto $P = (1, 0, -1)$, o plano $M \ : \ x + 2y + z = 3$ e a reta, h, com a equação vetorial $X(t) = R + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, em que $R = (1, -1, 0)$ e $\vec{a} = (1, 0, 1)$.

a) Determine a distância do ponto P ao plano M e o ângulo que a reta h faz com M.

b) Seja I o ponto de interseção de h com M. Obtenha todas as soluções para o ponto, S, que pertence a h e tal que o triângulo $[PIS]$ tenha $\sqrt{3}$ unidades de área.

6. [2,4] Considere o ponto P e a reta h do exercício **5**. Calcule as equações vetoriais de todas as retas que passam em P, são concorrentes com h e fazem, com esta reta, um ângulo de $30°$.

1) Qualquer base para o espaço $\mathbb{R}^4$ deverá ser constituída por 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes.

Verifiquemos então se os 4 vectores que constituem o conjunto U são linearmente independentes.

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 + \alpha_4 \vec{u}_4 = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & k & -k & 1 & 0 \\ 0 & 2-k & 1 & 1 & 0 \\ k & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ \\ L_4 - kL_1 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & k-2 & 4-k & 1 & 0 \\ 0 & 2-k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-k & 2k-1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & k-2 & 4-k & 0 \\ 0 & 1 & 2-k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-k & 2k-1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_3 - L_2 \\ \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & k-2 & 4-k & 0 \\ 0 & 0 & 4-2k & k-3 & 0 \\ 0 & 0 & 4-2k & 3k-5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & k-2 & 4-k & 0 \\ 0 & 0 & 4-2k & k-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k-2 & 0 \end{array}\right]$$

A solução nula, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, será a única solução do sistema homogéneo se este for possível e determinado, ou seja, se

$$4 - 2k \neq 0 \ \wedge \ 2k - 2 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 2 \ \wedge \ k \neq 1$$

2)

a) $\alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c} + \alpha_4 \bar{d} = \bar{x} = (x, y, z, w)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ -1 & 1 & -1 & 2 & y \\ 2 & 0 & 3 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & 2 & w \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2+L_1 \\ L_3-2L_1 \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 2 & 0 & 4 & x+y \\ 0 & -2 & 1 & -3 & z-2x \\ 0 & 1 & 0 & 2 & w \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3+L_2 \\ 2L_4-L_2 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 2 & 0 & 4 & x+y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z-x+y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2w-x-y \end{array}\right]$$

$\vec{x} \in L(S) \Leftrightarrow 2w - x - y = 0 \Leftrightarrow x = 2w - y$

$L(S) = \{ \bar{x} = (2w-y, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \}$

$\bar{x} = y(-1,1,0,0) + z(0,0,1,0) + (2,0,0,1) \in L(S)$

Base para $L(S) = \{ (-1,1,0,0), (0,0,1,0), (2,0,0,1) \} \Rightarrow \dim L(S) = 3$

b) Substituindo o vector nulo no sistema de equações anterior

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_4 \\ \alpha_2 = -2\alpha_4 \\ \alpha_3 = -\alpha_4 \end{cases} \forall \alpha_4 \in \mathbb{R}$$

O sistema homogéneo é possível e simplesmente indeterminado, pelo que a solução nula não é a única solução do sistema.

O vector nulo não é gerado de forma única pelo conjunto S, concluindo-se que S é um conjunto linearmente dependente.

c) Como $\dim L(S)$ então $Q = \{ \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3 \} \subset L(S)$.

$\bar{q}_1 = \bar{v} = (\alpha-1, \alpha+1, 0, \beta) \in L(S) \Rightarrow \alpha - \cancel{1} = 2\beta - \alpha - \cancel{1} \Rightarrow \alpha = \beta$

$\bar{q}_2 = \bar{w} = (\beta, -\beta, 1, 0) \in L(S) \Rightarrow \beta = \beta$ (verdade)

$\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 = 0 \Rightarrow (\beta-1, \beta+1, 0, \beta) \cdot (\beta, -\beta, 1, 0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\beta^2} - \beta - \cancel{\beta^2} - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 = \alpha$

$\bar{q}_1 = (-1, 1, 0, 0)$ e $\bar{q}_2 = (0, 0, 1, 0)$

$\bar{q}_3 \in L(S) \Rightarrow \bar{q}_3 = (2w-y, y, z, w)$

$\bar{q}_3 \cdot \bar{q}_1 = 0 \Rightarrow -2w + y + y = 0 \Rightarrow y = w$

$\bar{q}_3 \cdot \bar{q}_2 = 0 \Rightarrow z = 0$

Então $\bar{q}_3 = (w, w, 0, w)$

Seja, por exemplo, $\bar{q}_3 = (1, 1, 0, 1)$

d) $W = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4\} \subset \mathbb{R}^4$

Como $\dim L(S) = 3$ existem no conjunto S um número máximo de 3 vectores linearmente independentes.

Considerando, por exemplo, $S_1 = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$, verifiquemos se S_1 é linearmente independente.

$$\alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c} = \bar{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema homogéneo é possível e determinado pelo que a solução nula, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, é a única solução do sistema. Nestas condições o conjunto S_1 é linearmente independente. Tem-se então

$\bar{w}_1 = \bar{a} = (1, -1, 2, 0)$

$\bar{w}_2 = \bar{b} = (1, 1, 0, 1)$

$\bar{w}_3 = \bar{c} = (1, -1, 3, 0)$

O quarto vector da base W não deverá ser combinação linear de $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$ e $\bar{w}_3$, ou seja, $\bar{w}_4 \notin L(S)$.

Seja, por exemplo, $\bar{w}_4 = (0, 1, 0, 0)$

3) a) $\|\alpha \vec{a}\| = 1$

$\|\alpha \bar{a} \times \bar{b}\| = 1$

$(\alpha \bar{a}) \cdot (\alpha \bar{a} \times \bar{b}) = 0$

$$(\alpha a) \cdot (\alpha \bar{a} \times \bar{b}) = \alpha^2 \underbrace{\bar{a} \cdot \bar{a} \times \bar{b}}_{=0} = 0$$

$$\|\alpha \bar{a}\| = |\alpha| \, \|\bar{a}\| = 1 \Leftrightarrow |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\|\alpha \, \bar{a} \times \bar{b}\| = 1 \Leftrightarrow |\alpha| \, \|\bar{a} \times \bar{b}\| = 1 \Leftrightarrow \|\bar{a} \times \bar{b}\| = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\bar{a}\|^2 \|\bar{b}\|^2 - (\bar{a} \cdot b)^2 = 2 \Leftrightarrow (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = 2 \Leftrightarrow (\bar{a} \cdot \bar{b}) = \pm \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\pm \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \theta = \measuredangle(\bar{a}, \bar{b}) = 45^\circ \vee \theta = 135^\circ$$

b) $\beta = \measuredangle(\bar{a}, c)$

$$\cos\beta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{\|\bar{a}\| \, \|\bar{c}\|}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{a} - (2\bar{a}) \times (2\bar{b})) =$$

$$= \|\bar{a}\|^2 - 4 \underbrace{\bar{a} \cdot \bar{a} \times \bar{b}}_{=0} = \|\bar{a}\|^2 = 2$$

$$\|\bar{c}\|^2 = (\bar{a} - 4\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{a} - 4\bar{a} \times \bar{b}) =$$

$$= \|\bar{a}\|^2 + 16 \|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 - 8 \underbrace{\bar{a} \cdot \bar{a} \times \bar{b}}_{=0} = 2 + 16(2) = 34$$

$\|\bar{c}\| = \sqrt{34}$

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{34}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right)$$

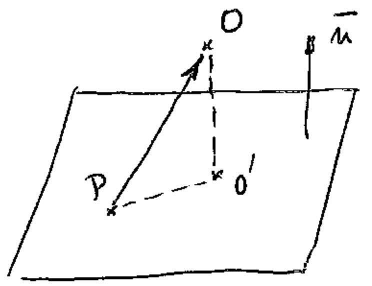
c)
$$\bar{c} \cdot \bar{a} \times \bar{b} = (\bar{a} - 4\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{a} \times \bar{b} = \underbrace{\bar{a} \cdot \bar{a} \times \bar{b}}_{=0} - 4 \|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 =$$

$$= -8 \neq 0$$

$\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ é linearmente independente, logo os vectores definem um prisma.

O volume do prisma é $|\bar{c} \cdot \bar{a} \times \bar{b}| = 8$

4) a)



$$\overrightarrow{O'O} = \text{proj}_{\bar{n}}\, \overline{PO} = \frac{\overline{PO}\cdot\bar{n}}{\|\bar{n}\|^2}\,\vec{n} =$$

$$= -\frac{P\cdot\bar{n}}{\|\bar{n}\|^2}\,\bar{n}$$

Então $\quad O' = O - \overrightarrow{O'O} = \dfrac{P\cdot\bar{n}}{\|\bar{n}\|^2}\,\vec{n}$

b) $\quad \overrightarrow{PO'} = O' - P = \dfrac{P\cdot\bar{n}}{\|\bar{n}\|^2}\,\bar{n} - P$

$$\|\overline{PO'}\|^2 = \overline{PO'}\cdot\overline{PO'} = \left[\frac{P\cdot\bar{n}}{\|\bar{n}\|^2}\,\bar{n} - P\right]\cdot\left[\frac{P\cdot\bar{n}}{\|\bar{n}\|^2}\,\bar{n} - P\right] =$$

$$= \frac{(P\cdot\bar{n})^2}{\|\bar{n}\|^4}\,\|\bar{n}\|^2 + \|P\|^2 - 2\,\frac{P\cdot\bar{n}}{\|\bar{n}\|^2}\,(P\cdot\bar{n}) =$$

$$= \frac{(P\cdot\bar{n})^2}{\|\bar{n}\|^2} + \|P\|^2 - 2\,\frac{(P\cdot\bar{n})^2}{\|\bar{n}\|^2} = \|P\|^2 - \frac{(P\cdot\bar{n})^2}{\|\bar{n}\|^2}$$

Então $\quad \|\overline{PO'}\| = \left[\|P\|^2 - \dfrac{(P\cdot\bar{n})^2}{\|\bar{n}\|^2}\right]^{1/2}$

$$\|\overline{PO'}\| = \frac{1}{\|\bar{n}\|}\left[\|P\|^2\,\|\bar{n}\|^2 - (P\cdot\bar{n})^2\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\|\bar{n}\|}\left[\|P\times\bar{n}\|^2\right]^{1/2} = \frac{\|P\times\bar{n}\|}{\|\bar{n}\|}$$

5| a) $d_{P,M} = \dfrac{|(P-Q)\cdot \bar{n}|}{\|\bar{n}\|}$ em que $P=(1,0,-1)$

$\bar{n} = (1,2,1)$

$\bar{Q}\cdot\bar{n} = 3$

$$d_{P,M} = \frac{|P\cdot\bar{n} - \cancel{d}|}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\theta = \measuredangle(r, M) \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{|\bar{a}\cdot\bar{n}|}{\|\bar{a}\|\,\|\bar{n}\|} = \dfrac{|2|}{\sqrt{2}\,\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\theta = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $I = r \cap M \Rightarrow I = \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1 \\ z = t \\ x+2y+z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = (3,-1,2) \\ t = 2 \end{cases}$

$S = (1+t, -1, t) \in r$

$\overrightarrow{IS} = (1+t,-1,t) - (3,-1,2) = (t-2, 0, t-2)$

$\overrightarrow{IP} = (-2, 1, -3)$

$$\overrightarrow{IS} \times \overrightarrow{IP} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ t-2 & 0 & t-2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (2-t, -2t+4+3t-6, t-2) =$$

$$= (2-t, t-2, t-2)$$

$\dfrac{\|\overline{IS} \times \overline{IP}\|}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3(t-2)^2 = 12 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 0 \lor t = 4$

$S = (1,-1,0) = R \quad \lor \quad S = (5,-1,4)$

6) $P = (1,0,-1)$

$r: X(t) = R + t\bar{a},\ t \in \mathbb{R}$

$R = (1,-1,0)$

$\bar{a} = (1,0,1)$

$s: X(u) = P + u\,\bar{b},\ u \in \mathbb{R}$

$P = (1,0,-1)$

$\bar{b} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\| \cos 30^\circ \Leftrightarrow a + c = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + c = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\bar{b} \cdot \bar{a} \times \overrightarrow{PR} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - b - c = 0$$

$$\begin{cases} a - b - c = 0 \\ a + c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 3 \\ c = 3 - a \\ a^2 + 4a^2 + 9 - 12a + 9 + a^2 - 6a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} = \\ = \\ 6a^2 - 18a + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} = \\ = \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 2 \\ a = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 1 \\ c = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Existem apenas ~~uma~~ duas rectas nestas condições, ou seja,

$s: X(u) = P + u\,\bar{b},\ u \in \mathbb{R}$

$P = (1,0,-1)$ e $\bar{b} = (1,-1,2)$

$s_1: X(v) = P + v\,\bar{b},\ v \in \mathbb{R}$

$P = (1,0,-1)$ e $\bar{b} = (2,1,1)$