maf@math.uminho.pt
Departamento de Matemática
Universidade do Minho

Folha 3 - Sistemas de Equações Lineares

1. Considere o seguinte sistema de quatro equações lineares, de coeficientes reais, nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x4 = 0 \\ x1 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

a) $(-1, 1, 0, 0)$ é solução do sistema,

b) $(-1, 1, 0, 0)$ é a única solução do sistema,

c) $(-3, 2, 1, 0)$ é solução do sistema,

d) o sistema admite um conjunto infinito de soluções.

2. Considere o sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x + 3y - 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

(a) Escreva a equação matricial do sistema.

(b) Resolva o sistema anterior.

3. Utilizando o método de eliminação Gaussiana resolva os seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - y + z = -3 \\ -x + 4y - z = 3 \\ x + z = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = 8 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y + 2z + t = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ -x - 2y - z - 2t = 1 \\ -2x - y - 2z = 1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x + 3y - 2z + t = 1 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases}$

4. Identifique quais das seguintes matrizes são matrizes em escada.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5. Converta cada uma das matrizes do exercicio 4, que nãom se apresente em escada de linhas, numa matriz escada de linhas.

Determine qual a característica de cada uma das matrizes.

6. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine a característica da A.

   (b) Qual a característica da matriz A^T?

   (c) Qual a característica da matriz $B = 2A$?

7. Determine a característica das seguintes matrizes:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

8. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \lambda & 3-\lambda & 6 \\ 2 & 2 & 2 & \lambda & 8 \end{pmatrix}, \text{com} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Mostre que, se $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq 2$ então a característica de A é 4.

   Qual a característica de A se $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$?

9. Classifique e resolva cada um dos seguintes sistemas.

   (a) $\begin{cases} x + y = k \\ 3x - ky = 2 \end{cases}$, $(k \in \mathbb{R})$

   (b) $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + z = 2 \\ x - y + 2z = \beta \end{cases}$, $(\beta \in \mathbb{R})$

10. Verifique que o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 6y + 3z = 4 \\ 3x + 8y + 2z = 10 \end{cases}$$

   não tem solução.

11. Determine os valores do parâmetro real α para o qual o seguinte sistema tem solução.

$$\begin{cases} x - 3y - z - 10t = \alpha \\ x + y + z = 5 \\ 2x - 4t = 4 \\ x + y + t = 4 \end{cases}$$

12. Discuta em função dos parâmetros reais os seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 3x-y+5z=2, \\ 4x+y+(\alpha^2-1)z=\alpha+1 \end{cases}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad$ (b) $\begin{cases} x-y+2z=b \\ 2x+az=2, \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$

13. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & \alpha \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Prove que a equação matricial $AX = B$ tem solução.

14. Use o método de Gauss para resolver, em simultâneo, três sistemas de cuja matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

e cujas colunas dos termos independentes, sejam, respectivamente

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

15. Para $t,k \in \mathbb{R}$, sejam $A = \begin{pmatrix} k & t & 1 \\ 1 & kt & 1 \\ 1 & t & k \end{pmatrix}$ $\quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$.

    (a) Determine, justificando, os valores de t e k para os quais o sistema $A_{k,t}X = B$ é:

        i. possível e determinado,

        ii. impossível.

    (b) Resolva os sistemas $A_{0,2}X = B_2$ e $A_{1,1}X = B_1$.

16. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4 cuja matriz ampliada é:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & | & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

    (a) Resolva o sistema homogéneo $Ax = 0$.

    (b) Verifique que $(\frac{3}{2}, 0, -1, 1)$ é solução do sistema dado.

17. Considere o sistema de equações lineares $AX = B$, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

    (a) Resolva o sistema $AX = 0$ e verifique se $(-1, 3/2, -1/2, -1/2)$ é solução de $AX = B$.

    (b) Determine o conjunto solução de $AX = B$.

18. Considere um sistema cuja matriz ampliada tem a forma

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \beta & 0 \end{array}\right).$$

   (a) Diga, justificando, se o sistema pode ser impossível.
   (b) Indique os valores de β para os quais o sistema tem uma infinidade de soluções.

19. Construa um sistema de equações lineares, de coeficientes reais, de quatro equações a três incógnitas que seja:

   (a) possível e determinado,
   (b) possível e indeterminado,
   (c) impossível.

20. Calcule, recorrendo ao método de Guass-Jordan, a inversa das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

21. Considere as matrizes do exercício anterior, e determine, se possível:

   (a) a inversa da matriz $A.B$,
   (b) a inversa da matriz $A - B$,
   (c) a inversa da matriz D^T,
   (d) a inversa da matriz C.

22. Se A e B são matrizes quadradas, sendo A invertível, prove que

$$(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B)$$

23. Use o método de eliminação de Guass para calcular o determinante das seguintes matrizes:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{pmatrix}$

24. Determine para que valores de k, $k \in \mathbb{R}$, a matriz seguinte não tem inversa

$$\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$$

25. Mostre que o sistema de equações $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}$ tem uma única solução, para as seguintes matrizes do sistema. Utilize a regra de Cramer para resolver os sistemas.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.