Prova sem consulta. Duração: 3h (30m de tolerância). Prova de Reavaliação Global

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos três grupos utilizando folhas de capa distintas. Na resolução da prova deve utilizar uma esferográfica azul ou preta.**

GRUPO I

1. [**3,4**] Considere as transformações lineares $R \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $S \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ e $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dadas por

$$R(x, y, z) = (x - z, -x + y + z), \qquad S(x, y) = (-x + y, x + 2y, 2x + y),$$
$$T(x, y, z) = (x + z, 2y - z, x + z)$$

em relação às bases canónicas E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *R*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que apenas uma das funções é injetiva, mas não bijetiva, e obtenha a sua função inversa.

2. [**2,0**] Seja $\mathrm{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \ldots, \vec{b}_k\}$ um conjunto de *k* vetores do espaço $\mathbb{R}^n$.

a) Defina $\dim L(\mathrm{B})$, dimensão do subespaço, $L(\mathrm{B})$, gerado pelo conjunto B. Qual a dimensão máxima que o subespaço $L(\mathrm{B})$ pode assumir e em que circunstâncias é que tal ocorrerá.

b) Seja o vetor $\vec{v} \in L(\mathrm{B})$. Mostre que se B é linearmente independente, então o conjunto $\mathrm{B}_1 = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \ldots, \vec{b}_k, \vec{v}\}$ é linearmente dependente.

3. [**3,8**] Sejam o plano $M \; : \; x - y = 3$, o ponto $R = (-1, 0, 1)$ e a reta, *r*, com a equação vetorial $X(t) = P + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, em que $P = (1, 0, 1)$ e $\vec{a} = (1, -1, 1)$. Determine:

a) A distância do ponto *R* à reta *r* e o ponto, *I*, desta reta mais próximo de *R*.

b) A equação vetorial de uma reta *s* que passa no ponto *R*, é paralela ao plano *M* e é concorrente com a reta *r*.

.... ***(continua no verso)***

GRUPO II

4. [**1,8**] Sejam as transformações lineares definidas na questão 1. e as bases $\mathrm{U}=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ e $\mathrm{B}=\{(0,1),(1,1)\}\subset\mathbb{R}^2$. Determine a matriz $m(RT+R)_{\mathrm{U,B}}$, representação matricial de $RT+R$ em relação às bases U e B.

5. [**1,7**] Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o determinante da matriz real:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ \alpha & \beta & \beta & 1 \\ 2 & \beta & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

GRUPO III

6. [**3,5**] Seja o conjunto $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}\subset\mathbb{R}^4$, em que $\vec{a}=(1,2,-1,-2)$, $\vec{b}=(3,2,-2,-3)$, $\vec{c}=(0,2,-1,-1)$ e $\vec{d}=(1,4,-2,-3)$.

Considere o subespaço $\mathrm{H}=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\ :\ z=x+y\ \wedge\ w=-z\}$. Determine:

a) O subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$; indique uma base para o subespaço que apenas inclua elementos de S e conclua em relação à sua dimensão. Justifique.

b) Uma base ortogonal, W, para $L(\mathrm{S})$ que inclua um elemento de H.

7. [**3,8**] Considere a transformação linear $T\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$m(T)=\begin{bmatrix} 0 & -3 & b \\ b & 6 & -3 \\ 3 & b & 0 \end{bmatrix},\ b\in\mathbb{R}$$

em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Seja o conjunto de vetores $\mathrm{W}=\{(-\alpha,\alpha,\alpha),(\alpha,\alpha,2)\}\subset\mathbb{R}^3$. Determine:

a) O valor do parâmetro *b*, de modo que $\lambda=b$ seja um dos seus valores próprios.

b) Os seus valores próprios e os respetivos espaços próprios; indique, para cada um destes subespaços, uma base e a dimensão.

c) O valor do parâmetro α, de modo que o conjunto W possa estar incluído numa base de vetores próprios, U, para o espaço $\mathbb{R}^3$. Obtenha a base U, justificando devidamente.