Exercício: Sejam as transformações lineares $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, que possuem as representações matriciais

$$m(T) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad m(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

em relação às bases canónicas para os espaços lineares $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

Seja $U = \{U_1, U_2, U_3\} = \{(0,1,1), (1,1,0), (0,1,-1)\}$ uma base ordenada para $\mathbb{R}^3$ e designem-se por E_3 e E_2 as bases canónicas para $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

a) Determine as representações matriciais de $ST-S$ e de RST em relação às bases canónicas. Escreva as leis de transformação para cada uma dessas funções.

$$m(ST-S) = m(ST) - m(S)$$

$$m(ST) = m(S)\,m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$m(ST-S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$m(ST-S) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - 2z \\ -x + y - z \end{bmatrix}$$

$$ST - S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (y-2z, -x+y-z)$$

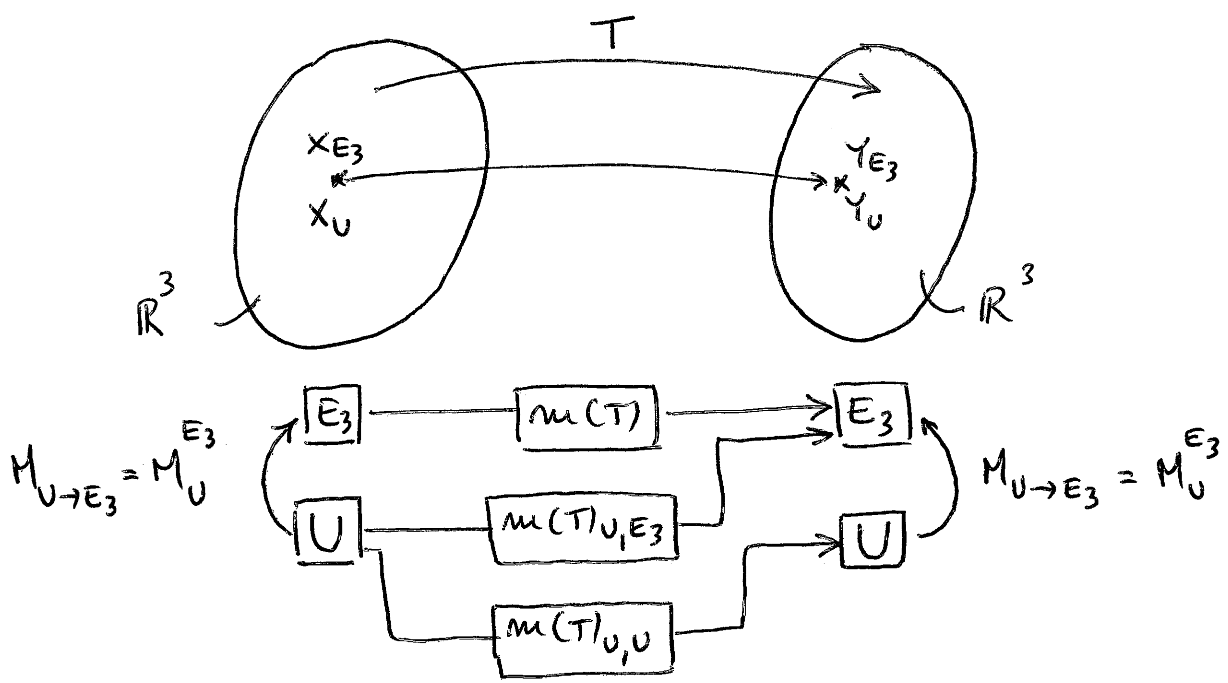
$$m(RST) = m(R)\,m(ST) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; m(RST) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -5 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m(RST) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -5 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+3y-z \\ -5x+3y-2z \\ -2x+2y-z \\ 4x+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} RST : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) &\longrightarrow (-x+3y-z, -5x+3y-2z, -2x+2y-z, 4x+z) \end{aligned}$$

b) Obtenha, usando preferencialmente o cálculo matricial, a matriz $m(T)_{U,E_3}$, que represente a transformação linear T em relação às bases U (domínio) e E_3 (conjunto de chegada), e a matriz $m(T)_{U,U}$, que represente T relativamente à base U (domínio e conjunto de chegada).



Designando as matrizes

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(base E_3) (base U)

tem-se

$$E_3 X_{E_3} = U X_U \qquad E_3 Y_{E_3} = U Y_U$$

(domínio) (conj. de chegada)

$$X_{E_3} = (E_3)^{-1} U X_U \qquad Y_{E_3} = (E_3)^{-1} U Y_U$$

pelo que a matriz mudança de base de U para E_3 é

$$M_{U \to E_3} = M_U^{E_3} = (E_3)^{-1} U$$

ou seja,

$$M_{U \to E_3} = M_U^{E_3} = U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

já que E_3 é a matriz identidade de ordem 3.

Relativamente à matriz $m(T)_{U,E_3}$ verifica-se

$$Y_{E_3} = m(T)\, X_{E_3} = m(T)\, M_U^{E_3} X_U \iff$$

$$\iff Y_{E_3} = m(T)_{U,E_3} X_U$$

ou seja,

$$m(T)_{U,E_3} = m(T)\, M_U^{E_3}$$

Assim,

$$m(T)_{U,E_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{U,E_3}$$

Relativamente à matriz $m(T)_{U,U}$ tem-se

$$Y_{E_3} = m(T)\, X_{E_3} \Leftrightarrow M_U^{E_3}\, Y_U = m(T)\, M_U^{E_3}\, X_U \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y_U = \left[M_U^{E_3}\right]^{-1} m(T)\, M_U^{E_3}\, X_U \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y_U = m(T)_{U,U}\, X_U$$

ou seja,

$$m(T)_{U,U} = \left[M_U^{E_3}\right]^{-1} m(T)\, M_U^{E_3} = \left[M_U^{E_3}\right]^{-1} m(T)_{U,E_3}$$

$$M_U^{E_3} = \frac{1}{|M_U^{E_3}|} \left[\operatorname{Adj} M_U^{E_3}\right]^T$$

$$|M_U^{E_3}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \operatorname{Adj} M_U^{E_3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

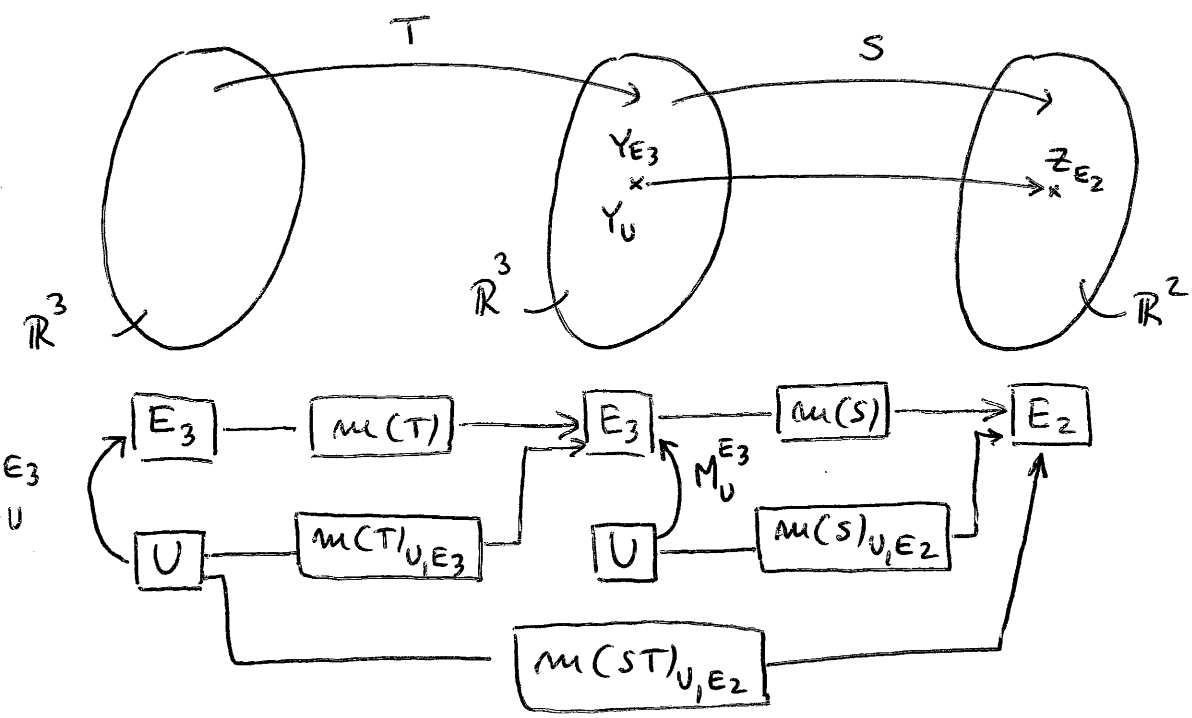
$$M_U^{E_3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$m(T)_{U,U} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{U,E_3} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{U,U}$$

c) Recorrendo a uma das matrizes obtida na alínea anterior, determine a matriz $m(ST-S)_{U,E_2}$ que representa a transformação linear $ST-S$ em relação às bases U (domínio) e E_2 (conjunto de chegada).

$$m(ST-S)_{U,E_2} = m(ST)_{U,E_2} - m(S)_{U,E_2}$$



$$m(ST)_{U,E_2} = m(S)_{E_3,E_2}\, m(T)_{U,E_3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{U,E_2}$$

Relativamente à matriz $m(S)_{U,E_2}$ verifica-se

$$Z_{E_2} = m(S)\, Y_{E_3} = m(S)\, M_U^{E_3}\, Y_U \iff$$

$$\iff Z_{E_2} = m(S)_{U,E_2}\, Y_U$$

ou seja,

$$m(S)_{U,E_2} = m(S)\, M_U^{E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{U,E_2}$$

Obtém-se finalmente

$$m(ST-S)_{U,E_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{U,E_2} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{U,E_2} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{U,E_2}$$

Joaquim Anacleto Barbosa