DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES 31/03/ 2015

Duração: 90 minutos

1º Teste de Análise Matemática EE

Nome: ______________________ Nr.: __________ Curso:

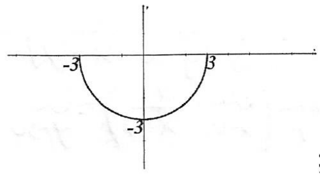
GRUPO I

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correta no quadrado correspondente $x^2+y^2=(3\,sen(\frac{\pi}{2}-t))^2+(3\cos(\frac{\pi}{2}-t))^2=9$

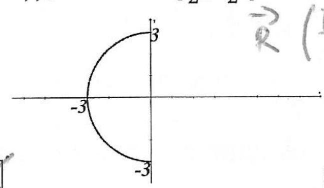
1. A curva descrita por $\vec{r}(t) = (3\sin(\frac{\pi}{2}-t), 3\cos(\frac{\pi}{2}-t))$, com $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ é da forma:

$\vec{R}(\frac{\pi}{2})=(0,3)$; $\vec{R}(\pi)=(-3,0)$

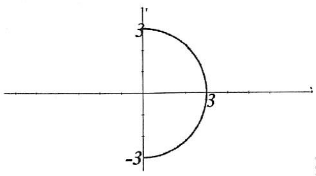
$\vec{R}(\frac{3\pi}{2})=(0,-3$

☐ 

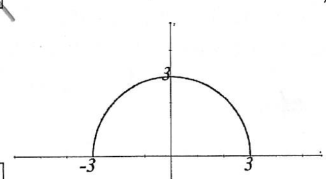
;

☒ 

;

☐ 

;

☐ 

.

$t^2-1\geq 0 \wedge t\neq 0 \Leftrightarrow$
$t\leq -1 \vee t\geq 1$

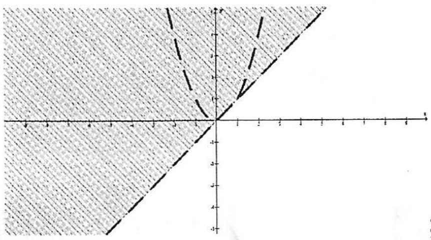
2. O domínio da função $\vec{f}(t) = (\frac{t^2+4}{t}, \sqrt{t^2-1}, t\exp(t-1))$ definida em $\mathbb{R}$ é:

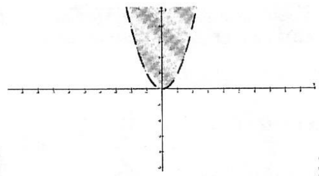
☐ $[-1,1]\setminus\{0\}$; ☒ $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$; ☐ $[1,+\infty[$; ☐ $[-1,+\infty[\setminus\{0\}$.

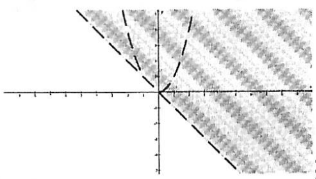
3. A representação gráfica do domínio da função real $f(x,y) = \dfrac{\ln(y-x)}{y-x^2}$ definida em $\mathbb{R}^2$ é:

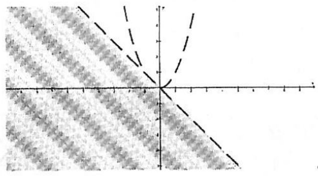
$y-x>0 \wedge y-x^2\neq$

$y>x \wedge y\neq x^2$

☒ 
;

☐ 
;

☐ 
;

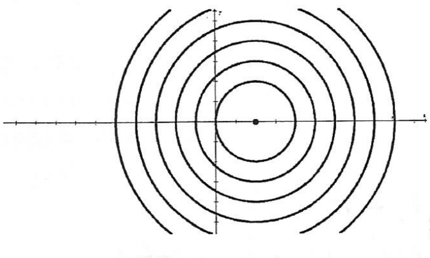
☐ 
.

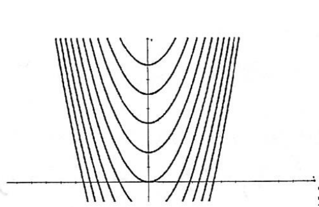
4. As curvas de nível do gráfico da função real $f(x,y) = \dfrac{x^2+(y-1)^2}{2}$ definida em $\mathbb{R}^2$ são da forma:

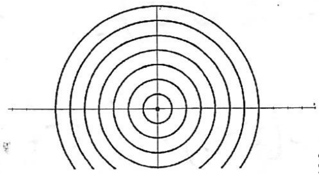
$\frac{x^2+(y-1)^2}{2}=k$

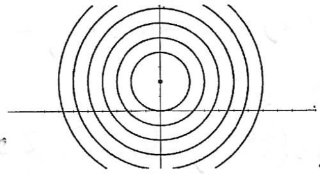
$x^2+(y-1)^2=2k$

$\begin{cases} \text{raio } 2k \\ c(0,1) \end{cases}$

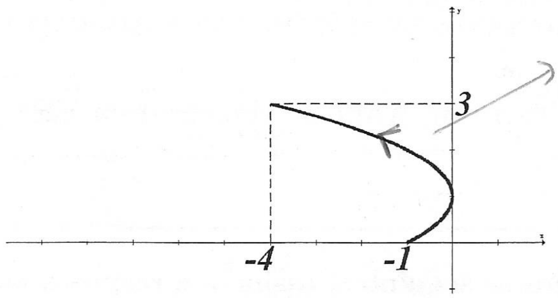
☐ 
;

☐ 
;

☐ 
;

☒ 
.

5. Qual das seguintes equações descreve a curva representada na figura, percorrida no sentido direto?



faz parte da parábola $x = -(1-y)^2$

logo $\vec{R}(0) = (-1, 0)$

$\vec{R}(3) = (-4, 3)$

☒ $\vec{r}(t) = (-(1-t)^2,\, t),\ t \in [0,3]$; ☐ $\vec{r}(t) = (t^2,\, 1+t),\ t \in [-2,1]$;

☐ $x = -(1-y)^2$; ☐ $\vec{r}(t) = (t,\, \frac{1}{4}t(t+1)),\ t \in [-4,-1]$.

6. Considere o $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x}{x+y}\right)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x}{x+y}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x}{x}$

$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x}{x+y}\right) = \lim_{y\to0}\frac{0}{y} =$

☒ O limite não existe porque os limites iterados dão valores diferentes;

☐ O limite não existe porque o valor do limite depende da parábola $x = ky^2$, $k \in \mathbb{R}$, pelo qual é calculado;

☐ O limite existe e é igual a zero;

☐ Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

7. Considere o $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ onde f é uma função real definida em $\mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) é um ponto pertencente ao seu domínio. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☐ Se $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$ então existe limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

☐ Se o valor do limite calculado por uma curva $\mathcal{C}$ contida no domínio que passe por (x_0, y_0) for zero então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$.

☒ Se existir limite então o seu valor será o valor do limite calculado por qualquer curva $\mathcal{C}$ contida no domínio que passe por (x_0, y_0).

☐ Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

8. Qual das seguintes funções é contínua em $(0,1)$?

☐ $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 \text{ se } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 \text{ se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$ ☐ $f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+y \text{ se } (x,y) \ne (0,1) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$

☐ $f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y \text{ se } (x,y) \ne (0,1) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$ ☒ $f(x,y) = \begin{cases} 3xy \text{ se } (x,y) \ne (0,1) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$

GRUPO II

Em cada uma das perguntas seguintes, responda sem apresentar cálculos.

1. Considere a função vetorial $\vec{r}(t) = \vec{u}_1 + t.\vec{u}_2 + \sin(t^2+1).\vec{u}_3 + t.\ln(t^2).\vec{u}_4$, onde $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ e $\vec{u}_4 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, ($\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ são os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^2$).

(a) Escreva a função vetorial nas suas componentes.

$\vec{R}(t) = (1,-1) + t(-1,-2) + \text{sen}(t^2+1)(1,1) + t\ln t^2(-1,2)$

$\vec{R}(t) = (1 - t + \text{sen}(t^2+1) - t\ln t^2,\ -1 - 2t + \text{sen}(t^2+1) + 2t\ln t^2)$

(b) Escreva a função $\vec{r}\,'(t)$.

$\vec{R}'(t) = \left(-1 + 2t.\cos(t^2+1) - \ln t^2 - \cancel{t}.\frac{2}{\cancel{t}},\ -2 + 2t.\cos(t^2+1) + 2\ln t^2 + 2\cancel{t}.\frac{2}{\cancel{t}}\right)$

$= (-3 + 2t.\cos(t^2+1) - \ln t^2,\ 2 + 2t.\cos(t^2+1) + 2\ln t^2)$.

GRUPO III

Apresente todos os cálculos efetuados.

1. Considere a função vetorial $\vec{r}(t) = \begin{cases} x = \exp(t^2 - t) \\ y = t.\exp(3t) \end{cases}$, com $t \geq 0$, que descreve o movimento de uma partícula no plano XOY.

(a) Determine o vetor velocidade da partícula no instante $t = 1$.

O vector velocidade determina-se a partir da derivada de $\vec{R}(t)$: $\vec{R}'(t) = \left((2t-1)e^{t^2-t}, e^{3t}+3te^{3t}\right) =$

$=\left((2t-1)e^{t^2-t}, (1+3t)e^{3t}\right)$

No instante $t=1$ $\vec{R}'(1) = (e^0, e^3+3e^3) = (1, 4e^3)$

(b) Determine uma equação da reta tangente à curva $\vec{r}(t)$ no ponto $(e^2, 2e^6)$.

Primeiro, é preciso determinar o instante t correspondente ao ponto $(e^2, 2$

$\vec{R}(t)=(e^2,2e^6) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{t^2-t}=e^2 \\ te^{3t}=2e^6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t=2 \Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t=2 \vee t= \\ \text{Como para } t=2,\ 2e^6=2e^6, \text{ tem-se}\end{cases}$

que $t=2$.

$\vec{R}'(2)=(3e^2,7e^6)$ → vector tangente à curva no instante $t=2$

$(x,y)=(e^2,2e^6)+k(3e^2,7e^6), k\in\mathbb{R}$ → equação da recta pretendi

(c) Determine em que instante e em que ponto da curva, a reta tangente à curva é vertical. E qual é a equação dessa reta?

A recta tangente é vertical quando o vector tangente dado por $\vec{R}'(t)=\left((2t-1)e^{t^2-t},(1+3t)e^{3t}\right)$ é vertical. Este vector é vertical quando a 1ª coordenada é nula, isto é, $(2t-1)e^{t^2-t}=0 \Leftrightarrow (2t-1)=$

$t=1/2$

Instante $t=1/2$

Ponto $\vec{R}(1/2)=\left(e^{-1/4}, \frac{e^{3/2}}{2}\right)$

Recta tangente é $x=e^{-1/4}$

2. Uma partícula move-se no espaço e no instante $t = 1$ está na posição associada ao vetor $\vec{r}(1) = (e^2, 0, 0)$. Sabendo que o vetor velocidade é, em cada instante t, dado por $\vec{v}(t) = (2.\exp(2t),\ t - t^3,\ 4)$, determine a função vetorial $\vec{r}(t)$ que descreve o movimento da partícula no espaço e a sua posição inicial.

Se $\vec{R}'(t)=(2e^{2t}, t-t^3, 4)$ então $\vec{R}(t)=\left(e^{2t}+C_1, \frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{4}+C_2, 4t+C_3\right)$

com C_1, C_2, C_3 constantes a determinar

Como $\vec{R}(1)=(e^2,0,0)=\left(e^2+C_1, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+C_2, 4+C_3\right)$ tem-se

$C_1=0$, $C_2=-1/4$, $C_3=-4$

Assim $\vec{R}(t)=\left(e^{2t}, \frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{4}-\frac{1}{4}, 4t-4\right)$ e $\vec{R}(0)=\left(1,-\frac{1}{4},-4\right)$

posição inicial.

3. Considere a função real definida em $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-2y}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, se existir.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} = \infty$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe.

4. Verifique se a função $f(x,y) = 4\cos(xy^2)$ é solução da equação diferencial $\frac{1}{x} f'_y - 2xy^3.f - f''_{xy} = 0$ para $x \neq 0$.

$$f'_y(x,y) = -8xy \cdot \operatorname{sen}(xy^2)$$

$$f''_{xy}(x,y) = -8y \operatorname{sen}(xy^2) - 8xy^3 \cdot \cos(xy^2).$$

Pelo T. de Schwarz, tem-se que $f''_{xy} = f''_{yx}$

Verificar se a igualdade é verdadeira:

$$\frac{1}{x} f'_y - 2xy^3 \cdot f - f''_{xy} = \frac{1}{x}\left(-8xy \cdot \operatorname{sen}(xy^2)\right) - 2xy^3\left(4\cos(xy^2)\right) + 8y\operatorname{sen}(xy^2) + 8xy^3 \cdot \cos(xy^2)$$

$$= -8y \operatorname{sen}\cancel{(xy^2)} - \cancel{8xy^3 \cos(xy^2)} + 8y \operatorname{sen}\cancel{(xy^2)} + \cancel{8xy^3 \cdot \cos(xy^2)} =$$

$= 0$. Logo a igualdade verifica-se.