Universidade do Minho(DMA)
Novembro 201

Cálculo
Teste Modelo 1 (90 minutos)

Nome ______________________________

Número ______________________ Curso ______________________

1. Determinar o domínio das funções seguintes.

1. $f(x) = \sqrt{|x-2|-1}$.
2. $f(x) = \ln(|\tan(x)| - 1)$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\arg\tanh(x)}$.

2. Calcular as derivadas das funções seguintes.

1. $f(x) = \cos\big(\ln(x^2+1) + x + 1\big)$.
2. $f(x) = \arctan\big(4\sqrt{x^2+1}\big)$.
3. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)$.

3. Determine os pontos críticos das funções seguintes e caracterize-os.

1. $f(x) = \ln(x^2) - x^2 - 3x$.
2. $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$.

4. Deteminar o polinómio e o resto de Taylor.

1. $f(x) = \ln(1+2x)$ no ponto 0 de ordem 2.
2. $f(x) = \sinh(x^2)$ no ponto 0 de ordem 4.

5. Determinar as primitivas seguintes

1. Imediata da função $f(x) = \exp(3x-1) - \cosh(-x/4)$.
2. Imediata da função $f(x) = 2 + \tan^2(x)$.
3. Por primitivação por parte da função $f(x) = \ln(2x)$.
4. Por mudança de variável da funcção $f(x) = -6\sin(x)\cos^3(x)$.

solução

1.1 A função faz sentido desde que $|x-2|-1\geq 0$ seja $|x-2|\geq 1$. Então, ou $x-2\geq 1$, ou $x-2\leq -1$ logo $x\in]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$.

1.2 A função faz sentido desde que $\tan(x)>1$ ou $\tan(x)<-1$. Além de mais, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ com $k\in\mathbb{Z}$. Logo, o domínio é

$$D(f)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}\left(]-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{4}+k\pi[\cup]\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[\right).$$

1.3 O domínio da função $\arg\tanh(x)$é $]-1,1[$. Por outro lado, a função f faz sentido desde que $\arg\tanh(x)\neq 0$. Logo $D(f)=]-1,0[\cup]0,1[$.

2.1 $f(x)=\cos\left(\ln(x^2+1)+x+1\right)$ então $f'(x)=-\operatorname{sen}(\ln(x^2+1)+x+1)\left\{\ln(x^2+1)+x+1\right\}'$. Seja $f'(x)=-\operatorname{sen}(\ln(x^2+1)+x+1)\left(\frac{2x}{x^2+1}+1\right)$.

2.2 $f(x)=\arctan(4\sqrt{x^2+1})$ então $f'(x)=\dfrac{1}{1+(4\sqrt{x^2+1})^2}\left\{4\sqrt{x^2+1}\right\}'$.

Logo $f'(x)=\dfrac{1}{17+16x^2}\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2.3 $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)$ então $f'(x)=\cos\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)'=\cos\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)(\cos(x)^{-1})'$.

Como $(\cos(x)^{-1})'=-\cos(x)^{-2}\,(-\sin(x))$, deduzimos

$f'(x)=\cos\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)\cos(x)^{-2}\sin(x)=\cos\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$.

3.1 $f(x)=\ln(x^2)-x^2-3x$ tem como derivada a função $f'(x)=\frac{2}{x}-2x-3$. $f'(x)=0$ implica $\frac{1}{x}(2-3x-2x^2)=0$,seja $-(2x-1)(x+2)=0$. Concluimos que os pontos $1/2$ e -2 são pontos críticos. A derivada de segunda ordem dá $f''(x)=-\frac{2}{x^2}-2$ e calculamos $f''(1/2)=-10$, $f''(-2)=-5/2$. Deduzimos que os dois pontos correspondem à dois máximos locais.

3.2 $f(x)=2(\sinh(x)-x)$ tem a derivada $f'(x)=2(\cosh(x)-1)$ e o ponto crítico é 0. A derivada de segunda ordem dá $f''(x)=\sinh(x)$ e calculamos $f''(0)=0$, então não podemos concluir com este argumento. Portanto, notamos que $f'(x)>0$ se $x\neq 0$ então 0 é um ponto de inflexão.

4.1 $f(x)=\ln(1+2x)$, $f^{(1)}(x)=\dfrac{2}{1+2x}$, $f^{(2)}(x)=-\dfrac{4}{(1+2x)^2}$, $f^{(3)}(x)=\dfrac{16}{(1+2x)^3}$. Obtemos $p_2(h)=f(0)+f^{(1)}(0)h+\frac{f^{(2)}(0)}{2}h^2=2h-2h^2$ e o resto

$$r_2(h)=\frac{f^{(3)}(\theta h)}{6}h^3=\frac{8h^3}{3(1+2\theta h)^3},\quad \theta\in]0,1[.$$

4.2 Determinamos as derivadas sucessivas.

- $f(x)=\sinh(x^2)$, $f^{(1)}(x)=2x\cosh(x^2)$, $f^{(2)}(x)=2\cosh(x^2)+4x^2\sinh(x^2)$,
- $f^{(3)}(x)=12x\sinh(x^2)+8x^3\cosh(x^2)$, $f^{(4)}(x)=(12+16x^4)\sinh(x^2)+48x^2\cosh(x^2)$
- $f^{(5)}(x)=160x^3\sinh(x^2)+(120x+32x^5)\cosh(x^2)$

Obtemos $p_4(h)=f(0)+f^{(1)}(0)h+\frac{f^{(2)}(0)}{2}h^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6}h^3+\frac{f^{(4)}(0)}{24}h^2=h^2$ e o resto

$$r_4(h)=\frac{f^{(5)}(\theta h)}{120}h^5=\frac{h^5}{120}\left\{160(\theta h)^3\sinh((\theta h)^2)+\left(120\theta h+32(\theta h)^5\right)\cosh((\theta h)^2)\right\},\quad \theta\in]0,1[.$$

5.1 $\displaystyle\int \exp(3x-1)dx - \int \cosh(-x/4)dx = \frac{1}{3}\exp(3x-1) - 4\sinh(x/4).$

5.2 $\displaystyle\int (2+\tan^2(x))dx = \int 1dx + \int (1+\tan^2(x))dx = x + \tan(x)$

5.3 $\displaystyle\int \ln(2x)dx = \int 1\ \ln(2x)dx = \Big[x\ln(2x)\Big] - \int \frac{x}{x}dx.$ Logo $\int \ln(2x)dx = x\ln(2x) - x.$

5.4 $\displaystyle\int -6\sin(x)\cos^3(x)dx = -\frac{3}{2}\Big[\cos(x)\Big]^4$