UNIVERSIDADE DO MINHO		19 de novembro de 2011
	Álgebra Linear	
	1º Teste - **A**	
LEI	Esboço de possível resolução	Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ **Nº:** __________

Responda às seguintes questões, do grupo I e II, justificando convenientemente a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** *têm cotação negativa.*

1. **a)** Se $2\left(3A+\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}-2A$ então $A=\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$. V F

b) A matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verifica $A^2-5A+4I_2=O$. V F

c) As matrizes $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$ são comutáveis, se $k=4$ ou $k=-11$. V F

d) Se A e B são matrizes de ordem n invertíveis, tais que $ABA=A$, então $B=A^{-1}$. V F

e) Se A é uma matriz idempotente ($A^2=A$) então $A^k=A$, para qualquer $k\in\mathbb{N}$. V F

2. Considere a matriz $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$, onde α é um número real.

a) A matriz A é simétrica, para qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$. V F

b) A matriz A é ortogonal, para qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$. V F

c) A matriz A é invertível tendo-se $A^{-1}=A$, para qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$. V F

d) O subespaço das soluções do sistema homogéneo associado a A é gerado pelo conjunto $\{\mathbf{0}\}$. V F

3. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ e S um subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por estes.

a) Os vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ geram S. V F

b) Os vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{0}$ são linearmente dependentes. V F

c) Existem reais α e β tais que $\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}=\mathbf{0}$. V F

d) A caracteristica da matriz $A=(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{u}+\mathbf{v})$ é igual 3. V F

II

1. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ \alpha y + \beta z &= 1 \end{cases} \quad \text{com } \alpha, \beta \in R.$$

a) Complete, de acordo com os valores de α e β, de modo a obter afirmações verdadeiras.

(i) O sistema é impossível se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

(ii) O sistema é possível indeterminado se $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$.

b) Existem valores para α e β que tornam o sistema possível determinado? Se sim, quais?

Não. Sendo, no máximo, $c(A) = 2$ e tendo-se, número de variáveis $n = 3$, o sistema nunca pode ser possível determinado.

c) Sendo $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ determine o conjunto solução do sistema.

Considerando a matriz ampliada do sistema tem-se: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$,

donde vem $\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ z &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= -y+1 \\ z &= 1 \end{cases}$

e assim o conjunto solução é $S = \{(-y+1, y, 1), y \in \mathbb{R}\}$.

d) Considere o respectivo sistema homogéneo associado ao sistema dado e determine, tendo em atenção as diferentes possibilidades para os parâmetros α e β, o seu conjunto solução.

A matriz dos coeficientes do sistema homogéneo é: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$

$\boxed{\alpha = 0 \text{ e } \beta = 0}$ $c(A) = 1; n = 3$, tendo-se $x+y-z = 0 \Leftrightarrow x = -y+z$ e $S = \{(-y+z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\alpha \neq 0 \text{ e } \beta = 0}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ \alpha y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= z \\ y &= 0 \end{cases}$; $S = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\alpha = 0 \text{ e } \beta \neq 0}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ \beta z &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= -y \\ z &= 0 \end{cases}$; $S = \{(x, -x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq 0}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ \alpha y + \beta z &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= z + \frac{\beta}{\alpha} z \\ y &= -\frac{\beta}{\alpha} z \end{cases}$; $S = \{(z + \frac{\beta}{\alpha} z, -\frac{\beta}{\alpha} z, z) : z \in \mathbb{R}\}$

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}\,b & 3 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Determine os valores de a e b para os quais:

(i) a característica de A é igual a 2, $b = 0$ ou $a = -1$ ou $a = 1$.

(ii) a característica de A é igual a 3. $b \neq 0$ e $a \neq -1$ e $a \neq 1$.

3. Seja U_α, uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, definida por:

$$U_\alpha = \{(3a, b + \alpha, b) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

a) Considere $\alpha = 0$ e mostre que $U = U_0$ é um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^3$.

- $U_0 \neq \emptyset$, pois, por exemplo, $(0, 0, 0) \in U_0$.
- Sejam $\mathbf{x} = (3a, b, b)$ e $\mathbf{y} = (3a', b', b')$ elementos de U_0, com $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$. Então $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (3(a + a'), b + b', b + b')$ e, portanto, é também um elemento de U_0.
- Seja $k \in \mathbb{R}$ e seja $\mathbf{x} = (3a, b, b)$ um elemento de U_0, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então $k\mathbf{x} = (3ka, kb, kb)$ e, portanto, é também um elemento de U_0.

Portanto, sendo U_0 um subconjunto de $\mathbb{R}^3$, não vazio, fechado relativamente à soma de vectores e relativamente ao produto escalar, conclui-se que é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine um conjunto de vectores geradores de U_0 que sejam linearmente independentes.

Qualquer elemento de U_0 ($\alpha = 0$) é da forma $(3a, b, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Veja-se que, $(3a, b, b) = 3a(1, 0, 0) + b(0, 1, 1)$, ou seja, os vectores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são geradores de U_0.

Além disso, estes vectores são linearmente independentes pois, $\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \beta) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

c) Para que valores de α, U_α é um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^3$? Justifique.

Sejam $(3a, b + \alpha, b)$ e $(3a', b' + \alpha, b')$ elementos de U_α, com $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$.

Então $(3a, b + \alpha, b) + (3a', b' + \alpha, b') = (3(a + a'), b + b' + 2\alpha, b + b')$ e o vector soma $(3(a + a'), b + b' + 2\alpha, b + b')$ pertence a U_α se $2\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Também, $\forall k \in \mathbb{R}$, o produto escalar, $k(3a, b + \alpha, b) = (3ka, kb + k\alpha, kb)$, será um elemento de U_α se $k\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha(k - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ pois k é um valor real qualquer.

Logo U_α é um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^3$ se $\alpha = 0$.

4. Mostre que:

a) Se A, B e C são matrizes de ordem n, invertíveis, tais que, $C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n$, então $X = CB - A$.

$$\begin{aligned}
C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n \quad & \underset{\mathbf{1.}}{\Rightarrow} \quad C(C^{-1}(A+X)B^{-1}) = C.I_n \\
& \underset{\mathbf{2., 3.}}{\Rightarrow} \quad (CC^{-1})((A+X)B^{-1}) = C \\
& \underset{\mathbf{4.}}{\Rightarrow} \quad I_n((A+X)B^{-1}) = C \\
& \underset{\mathbf{2.}}{\Rightarrow} \quad (A+X)B^{-1} = C \\
& \underset{\mathbf{5.}}{\Rightarrow} \quad ((A+X)B^{-1})B = C.B \\
& \underset{\mathbf{3.}}{\Rightarrow} \quad (A+X)(B^{-1}B) = C.B \\
& \underset{\mathbf{4.}}{\Rightarrow} \quad (A+X)I_n = C.B \\
& \underset{\mathbf{2.}}{\Rightarrow} \quad (A+X) = C.B \\
& \underset{\mathbf{6.}}{\Rightarrow} \quad X = C.B - A
\end{aligned}$$

1. multiplicando ambos os membros, à esquerda, pela matriz C.

2. propriedade de existência de elemento neutro (matriz I_n) relativamente à multiplicação de matrizes.

3. propriedade associativa da multiplicação de matrizes.

4. definição de matriz inversa.

5. multiplicando ambos os membros, à direita, pela matriz B.

6. para qualquer matriz $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, existe $-A = (-a_{ij})$.

b) Sejam A e S matrizes de ordem n.

Se A é uma simétrica e S é ortogonal, então $S^{-1}AS$ é uma matriz simétrica.

Hipóteses:

1. A é uma simétrica, ou seja $A = A^T$.
2. S é ortogonal, ou seja, $S.S^T = S^T.S = I_n$, tendo-se $S^{-1} = S^T$.

Tese: $S^{-1}AS$ é uma matriz simétrica, ou seja, $S^{-1}AS = (S^{-1}AS)^T$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
(S^{-1}AS)^T \quad & \underset{\mathbf{1.}}{\Rightarrow} \quad S^TA^T(S^{-1})^T \\
& \underset{\mathbf{2.}}{\Rightarrow} \quad S^TA(S^{-1})^T \\
& \underset{\mathbf{3.}}{\Rightarrow} \quad S^TA(S^T)^T \\
& \underset{\mathbf{4.}}{\Rightarrow} \quad S^{-1}AS
\end{aligned}$$

1. $\forall A, B \quad (AB)^T = B^TA^T$.

2. hipótese 1, A é uma matriz simétrca.

3. hipótese 2, S é uma matriz ortogonal tendo-se $S^{-1} = S^T$.

4. $\forall A, (A^T)^T = A$.

Cotação:

I	II - 1	II - 2	II - 3	II - 4
6.5	1+1+1+1.5	3	1.5+2+1	0.75+0.75