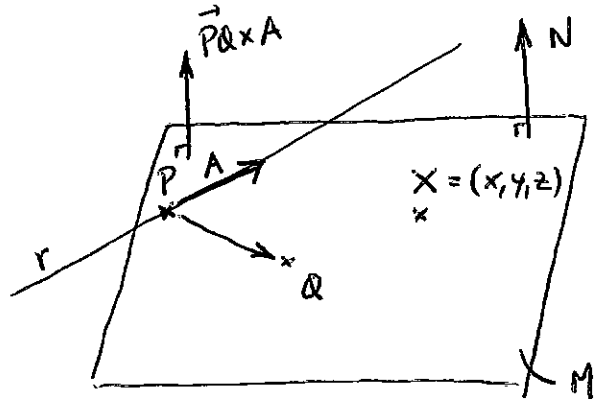
Problema: Seja a recta $r: X(t) = P + tA$, sendo $P = (1,2,3)$ e $A = (1,1,1)$.

Considere ainda os pontos $Q = (2,3,5)$ e $R = (4,1,1)$.

a) Determine as equações vectorial e cartesiana do plano M que passa no ponto Q e contém a recta r.

O plano M só estará definido se $Q \notin r$.

Verifiquemos tal situação.



$r: X(t) = P + tA, \ t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (1+t, 2+t, 3+t), \ t \in \mathbb{R}$

? $Q \in r$

$$\begin{cases} 1+t = 2 \\ 2+t = 3 \\ 3+t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow$$ o sistema é impossível, pelo que $Q \notin r$.

Os vectores A e $\vec{PQ} = (1,1,2)$ são vectores geradores do plano M. Então, a equação vectorial do plano M será dada por

$$X(u,v) = P + uA + v\,\vec{PQ}, \ u,v \in \mathbb{R} =$$

$$= (1,2,3) + u(1,1,1) + v(1,1,2), \ u,v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (1+u+v, 2+u+v, 3+u+2v), \ u,v \in \mathbb{R}$$

De forma a obter a equação cartesiana para o plano M determinemos o vector $\vec{PQ} \times A$, que é um vector normal ao plano.

$$\vec{PQ} \times A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

O vector normal ao plano N será qualquer vector não nulo de $\mathbb{R}^3$ que seja paralelo a $\vec{PQ} \times A$.

$$N \parallel \vec{PQ} \times A \Rightarrow N = (-1,1,0) \text{, por exemplo.}$$

Tem-se, então,

$$(X-P) \cdot N = 0 \Leftrightarrow X \cdot N = P \cdot N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x + y = P \cdot N \quad \text{e} \quad P \cdot N = 1$$

A equação cartesiana do plano é

$$M: -x + y = 1$$

Trata-se de um plano paralelo ao eixo dos zz.

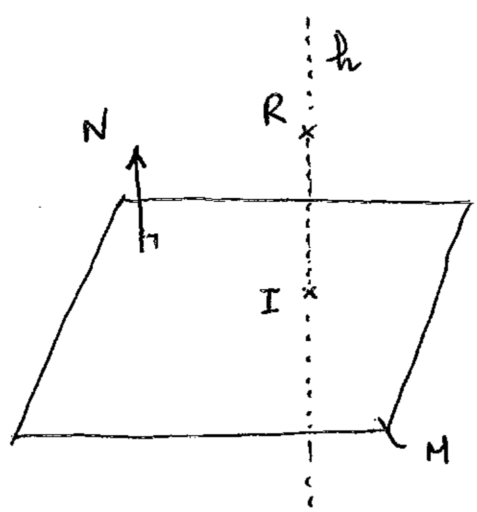
b) Determine a distância do ponto R ao plano M.

Recorrendo à equação $-x+y=1$ é evidente que $R \notin M$.

<u>Opção I</u>

Sabe-se que

$d_{R,M} = \|\vec{IR}\|$ em que o ponto I é o ponto do plano mais próximo de R.



Consideremos a recta h, que passa no ponto R e é perpendicular ao plano M. A sua equação vectorial é

$$h: X(w) = R + wN, \; w \in \mathbb{R} = (4,1,1) + w(-1,1,0), \; w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (4-w, 1+w, 1), \; w \in \mathbb{R}$$

Tem-se, então,

$$I = h \cap M = \begin{cases} x = 4 - w \\ y = 1 + w \\ z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ - \\ -4 + w + 1 + w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \\ w = 2 \end{cases} \Rightarrow I = (2, 3, 1)$$

Sabendo que

$$\vec{IR} = R - I = (2, -2, 0)$$

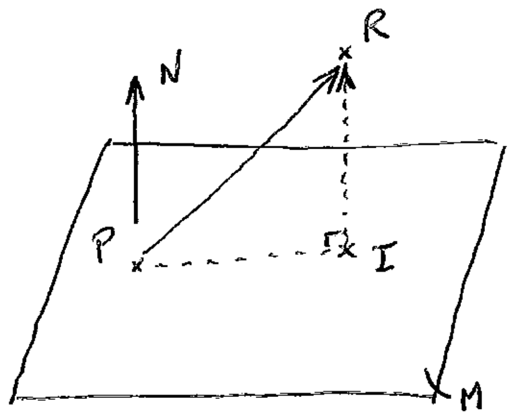
obtém-se

$$d_{R,M} = \| (2, -2, 0) \| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

<u>OPÇÃO II</u>

Verifica-se que

$$\vec{IR} = \vec{proj}_N \vec{PR} = \alpha N$$



em que

$$\alpha = \frac{\vec{PR} \cdot N}{\|N\|^2} \quad \text{e} \quad \vec{PR} = (3, -1, -2)$$

$$\vec{PR} \cdot N = -4 \;, \quad \|N\|^2 = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\vec{IR} = -2(-1, 1, 0) = (2, -2, 0)$$

Tem-se, então,

$$d_{R,M} = \| \vec{IR} \| = 2\sqrt{2}$$

José Afonso Barbosa