proj

Problema: Seja a recta r, que passa no ponto $P = (-3,1,1)$ e tem o vector $A = (1,-2,3)$ como vector direcção.

a) Determine a equação vectorial e as equações cartesianas da recta r.

A equação vectorial da recta é

$$X(t) = P + tA = (-3,1,1) + t\,(1,-2,3), \; t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (-3+t, 1-2t, 1+3t), \; t\in\mathbb{R}$$

As equações escalares paramétricas são:

$$\begin{cases} x = -3+t \\ y = 1-2t \\ z = 1+3t \end{cases}, \; t\in\mathbb{R}$$

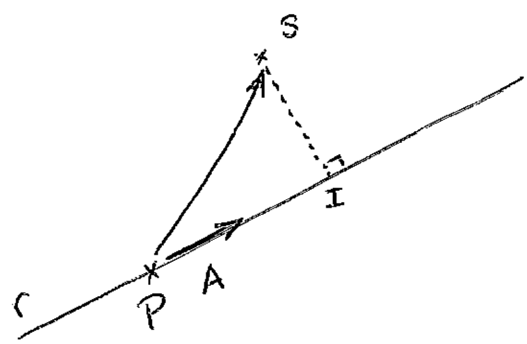
Eliminando o parâmetro t obtêm-se as equações cartesianas:

$$\begin{cases} t = x+3 \\ y = 1-2x-6 \\ z = 1+3x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = -5 \\ -3x+z = 10 \end{cases}$$

b) Determine a distância do ponto $S = (1,1,1)$ à recta r.

<u>OPÇÃO I</u>

Antes de resolvermos o problema verifiquemos que $S \notin r$.



$$\begin{cases} 1 = -3+t \\ 1 = 1-2t \\ 1 = 1+3t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{o sistema é impossível.}$$

$$d_{S,r} = \|\overrightarrow{IS}\| \quad \text{em que} \quad \overrightarrow{IS} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PI}$$

sendo $\overrightarrow{PI} = \text{proj}_A \overrightarrow{PS}$

$$\vec{PI} = \text{proj}_A \vec{PS} = k A \quad \text{com} \quad k = \frac{\vec{PS} \cdot A}{\|A\|^2}$$

$$\vec{PS} = S - P = (4,0,0)$$

$$\vec{PS} \cdot A = 4 \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

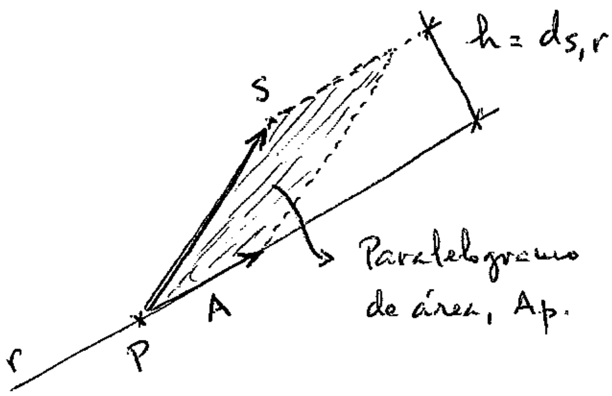
$$\|A\|^2 = 14$$

$$\vec{PI} = \frac{2}{7}(1,-2,3) \Rightarrow \vec{IS} = (4,0,0) - \frac{2}{7}(1,-2,3) = \left(\frac{26}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{6}{7}\right)$$

$$d_{s,r} = \|\vec{IS}\| = \frac{1}{7}\sqrt{26^2+4^2+6^2} = \frac{\sqrt{728}}{7} = \frac{2\sqrt{182}}{7}$$

OPÇÃO II

Considerando o paralelogramo da figura, sabe-se que a sua área, A_p, é



$$A_p = \|A\| \, d_{s,r}$$

Por outro lado, verifica-se que

$$A_p = \|A \times \vec{PS}\| \Rightarrow d_{s,r} = \frac{\|A \times \vec{PS}\|}{\|A\|}$$

$$A \times \vec{PS} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,12,8) \Rightarrow \|A \times \vec{PS}\| = \sqrt{12^2+8^2} = \sqrt{208}$$

$$= 2\sqrt{52} = 4\sqrt{13}$$

Assim,

$$d_{s,r} = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{182}}{14} = \frac{2\sqrt{182}}{7}$$

[signature]