UNIVERSIDADE DO MINHO	26 Jan. 2010
Álgebra Linear	
$2^{\underline{o}}$ Teste - **A**	
LEI	Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ **Nº:** __________

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** *têm cotação negativa.*

1. **a)** Existem valores $a, b, c \in \mathbb{R}$, para os quais a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc \end{pmatrix}$ é invertível. V F

b) Se $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ então $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. V F

c) Se B é uma matriz de ordem n tal que $B = (A^T A^{-1})^2$ então $|B| = 1$. V F

d) A matriz A (ordem n) é invertível se e só se $A^T A$ for uma matriz invertível. V F

2. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) O polinómio característico da matriz A é $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda)^2$.

V F

b) A matriz A tem $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ como vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$. V F

c) $|A| = 1$ V F

d) As matrizes diagonais $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ são semelhantes. V F

3. Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) A matriz A é diagonalizável. V F

b) O conjunto $U_\lambda = \{(0,0,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 3$ de A. V F

c) Relativamente à matriz A, a multiplicidade aritmética do valor próprio $\lambda = 3$ é igual a sua multiplicidade geométrica. V F

d) Seja A uma matriz de ordem n e $U_{\lambda 1}$ $U_{\lambda 2}$, dois subespaços próprios associados a dois valores próprios distintos $\lambda 1$ e $\lambda 2$, e tendo-se $v \in U_{\lambda 1}$ e $u \in U_{\lambda 2}$. Os vectores $v, \alpha u$ são vectores linearmente independentes, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. V F

II

*Para cada questão deste grupo, complete, **justificando**, as respectivas afirmações.*

1. Considere a seguinte matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}, \text{com } x \in \mathbb{R}.$$

a) Os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais $|A| = 0$ são:

b) Considerando $x = 1$ tem-se que:

$adj(A) =$

$A^{-1} =$

2. Considere a seguinte matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz $A - \lambda I_4$ tem inversa são:

b) Os valores próprios da matriz A e respectivas multiplicidade algébrica são:

c) O subespaço próprio associado ao valor próprio de A, de maior módulo é

d) Averigue se a matriz A é diagonalizável (*justifique a sua resposta*).

III

*Responda à questão deste grupo **justificando** a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.*

1. Seja A uma matriz de ordem n invertível. Prove que

$$det(adj(A)) = (det(A))^{n-1}.$$

2. Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

   Determine os possíveis valores próprios de A, considerando:

   (a) A uma matriz *idempotente,* ou seja $A^2 = A$,

   (b) A uma matriz *nilpotente*, ou seja $A^2 = O$, sendo O a matriz nula.

Cotações:

Parte I	Parte II	Parte III
6	1.5+1.5+1 ; 1.5+1+1+1.5	2 ; 1.5+1.5