Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância) — 1ª Prova de Reavaliação

---

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos dois grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1) [**1,8**] Seja o conjunto $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}\subset\mathbb{R}^4$, em que $\vec{u}_1=(1,k,0,1)$, $\vec{u}_2=(1,k,-k,1)$ e $\vec{u}_3=(0,k+1,k,k+1)$. Obtenha os valores de *k*, de modo que U seja um conjunto linearmente independente.

2) [**6,2**] Seja o conjunto $\mathrm{S}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}\subset\mathbb{R}^4$, tal que $\vec{a}=(1,3,-2,2)$, $\vec{b}=(0,2,1,3)$ e $\vec{c}=(1,2,0,3)$, e o subespaço de $\mathbb{R}^4$, $T=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+y-w=0\}$. Calcule:

a) O subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$; indique uma base para o subespaço obtido e conclua em relação à sua dimensão. Justifique a resposta.

b) Uma base ortogonal, W, para o subespaço *T* que inclua um elemento de S.

c) Uma base, V, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que contenha o maior número possível de elementos de S.

3) [**1,2**] Considere os conjuntos de vetores do espaço $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{U}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_r\}$ e $\mathrm{V}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_r,\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_t\}$. Mostre que $L(\mathrm{U})=L(\mathrm{V})$, se $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_t\}\subset L(\mathrm{U})$.

....*(continua no verso)*

GRUPO II

4) [**2,5**] Seja o conjunto ortogonal $S=\{\vec{a},\vec{b}\}\subset\mathbb{R}^3$, tal que $\|\vec{a}\|=\sqrt{3}$ e $\|\vec{b}\|=\sqrt{6}$. Considere ainda os vetores $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ e $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{c}$. Determine:

a) A norma do vetor $\vec{d}$.

b) O ângulo entre os vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$.

c) A norma do vetor $(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}$.

5) [**1,3**] Sejam as retas $r=L(P,\vec{a})$ e $s=L(Q,\vec{c})$ do espaço $\mathbb{R}^3$. Recorrendo às propriedades dos produtos vetorial e misto, estabeleça condições necessárias e suficientes para que as retas dadas sejam concorrentes. Justifique a resposta.

6) [**7,0**] Considere a reta $r\ :\ X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(0,1,0)$ e $\vec{a}=(1,-1,1)$, o plano $M\ :\ x-y=1$ e o ponto $S=(1,1,2)$.

a) Calcule a distância do ponto *S* à reta *r* e o ângulo que esta reta faz com *M*.

b) Seja *I* o ponto do plano $M_1\ :\ x+y-z=3$ mais próximo de *S*. Obtenha a reta, *h*, que passa em *I*, é concorrente com *r* e é paralela ao plano *M*.

c) Determine os planos que contêm a reta *r* e fazem um ângulo de $60°$ com *M*.