Prova sem consulta. Duração: 3h (20m de tolerância). Prova de Reavaliação Global

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos dois grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**3,4**] Sejam as transformações lineares $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ e $U, S \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dadas por

$$T(x,y,z) = (x+y, x+y-z), \qquad U(x,y,z) = (x+z, x-y, x+y+2z),$$

$$S(x,y,z) = (x+z, x+2y+3z, y+2z)$$

em relação às bases canónicas E_3, para o espaço $\mathbb{R}^3$, e E_2, para o espaço $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule o núcleo e o contradomínio de *T*. Para cada um desses subespaços, indique uma base e conclua em relação à sua dimensão.

b) Mostre que apenas a função *S* é bijetiva e obtenha a sua função inversa.

2. [**1,8**] Considere as transformações lineares definidas na questão 1 e as bases $\mathrm{B} = \{(1,0,0), (-1,1,1), (1,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathrm{V} = \{(1,-1), (1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$. Obtenha a matriz que representa a composição possível de *T* com *US* em relação às bases B e V.

3. [**3,8**] Sejam o plano $M : 2x + y - z = -3$, o ponto $R = (1,1,0)$ e a reta, *s*, com a equação vetorial $X(t) = P + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, em que $P = (-1,0,2)$ e $\vec{a} = (-1,0,1)$. Calcule:

a) A distância do ponto *R* ao plano *M* e o ponto, *I*, deste plano mais próximo de *R*.

b) A equação vetorial da reta, *r*, que passa no ponto *R*, é paralela ao plano *M* e é complanar com a reta *s*.

GRUPO II

4. [**2,0**] Sejam a reta $r : X(\alpha) = A + \alpha\vec{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e os pontos *P* e *Q* exteriores à reta *r*. Mostre que se *C* e *D* são, respetivamente, os pontos de *r* mais próximos de *P* e *Q*, então:

a) $\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \left|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}\right|$, tal que $\vec{v} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$.

b) $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| \geq \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$.

.... ***(continua no verso)***

5. [**4,5**] Considere o conjunto $\mathrm{S}=\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}\subset\mathbb{R}^4$, em que $\vec{a}=(1,2,-1,2)$, $\vec{b}=(1,0,3,1)$ e $\vec{c}=(-1,-2,1,0)$, e o subespaço de $\mathbb{R}^4$, $\mathrm{H}=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\ :\ x+z=0\right\}$.

a) Calcule o subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$; indique uma base para o subespaço obtido que só inclua elementos de S e conclua em relação à sua dimensão; justifique devidamente.

b) Determine uma base ortogonal, W, para $L(\mathrm{S})$, que inclua dois elementos de H.

c) Obtenha uma base, V, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que inclua o maior número possível de elementos de H.

6. [**1,7**] Calcule, indicando todas as operações efetuadas, o determinante da matriz real:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -5\\ -1 & 2 & 0 & -1\\ -1 & 0 & a & 5\\ 2 & 6 & a & -7\end{bmatrix}$$

7. [**2,8**] Seja a transformação linear $T\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ representada, em relação à base canónica, E, para o espaço $\mathbb{R}^3$, pela matriz $\boldsymbol{T}=m(T)$, tal que $\left|\boldsymbol{T}\right|=1$ e o seu traço é igual a cinco; admita que a matriz $\boldsymbol{T}^{-1}=m(T^{-1})$ possui um valor próprio igual a dois. Considere o espaço próprio, associado a um dos valores próprios de $\boldsymbol{T}=m(T)$, $\mathrm{E}(\beta)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ z=0\right\}$ e o conjunto $\mathrm{U}=\left\{(1,\alpha,\delta),(1,1,0),(1,0,2)\right\}\subset\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os valores próprios de $\boldsymbol{T}=m(T)$. O que pode concluir em relação ao valor próprio correspondente ao espaço próprio $\mathrm{E}(\beta)$?

b) Determine α e δ de modo que U seja uma base de vetores próprios para a transformação linear. Indique a base U, justificando.