Departamento de Matemática e Aplicações 23/06/ 2015

Duração: 90 minutos

3º Teste de Análise Matemática EE

Nome: ____________________ Nr.: __________ Curso:

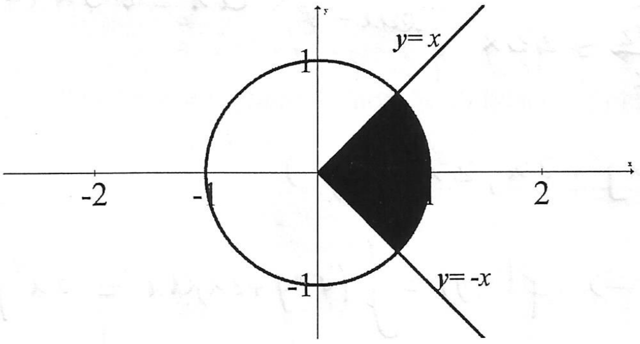
GRUPO I

Em cada uma das perguntas seguintes, responda sem apresentar cálculos.

1. Considere a região sombreada na figura.

Intenseção dos cenvos:

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=|x| \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$



   (a) Escreva um integral duplo em coordenadas cartesianas que lhe permite determinar a área da região sombreada.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{-x}^{x} 1\,dy\,dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\,dy\,dx \quad \underline{\underline{\text{ou}}} \quad \int_0^{\sqrt{2}/2}\int_y^{\sqrt{1-y^2}} 1\,dx\,dy + \int_{-\sqrt{2}/2}^{0}\int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} 1\,dx\,dy$$

   (b) Escreva um integral duplo em coordenadas polares que lhe permite determinar a área da região sombreada.

$$\int_0^1\int_{-\pi/4}^{\pi/4} R\,d\theta\,dR$$

2. Escreva a expressão que permite determinar o volume do sólido definido em $\mathbb{R}^3$, limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 5$,

   (a) usando integrais duplos.

$$\int_0^1\int_0^2 5\,dy\,dx$$

   (b) usando integrais triplos.

$$\int_0^1\int_0^2\int_0^5 dz\,dy\,dx$$

Ver exercício 2 da ficha nº9

3. Considere um fio com a forma de uma secção da parábola $y = 1 - x^2$, para $-1 < x < 1$ e com uma densidade de massa de $f(x, y) = xy$ gramas por unidade de comprimento. Escreva o integral simplificado que permite determinar a massa total do fio.

Parametrização da curva: $\begin{cases} x=t \\ y=1-t^2 \end{cases}$ $t\in]-1,1[$

$f(t)=t(1-t^2)$, $ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\sqrt{1+4t^2}\,dt$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} t(1-t^2)\sqrt{1+4t^2}\,dt}$$

GRUPO II

Apresente todos os cálculos efetuados. Ver exercício nº 7 do ficha nº 9.

1. Considere a função vetorial $\vec{F}(x,y) = (axy + 2x, bx^2 + 3y^2)$ com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Sabendo que $\vec{F}$ é um campo conservativo, qual a relação entre as constantes a e b? Justifique os cálculos efetuados.

Se $\vec{F}$ é conservativo, $\vec{F} = (f'_x, f'_y)$ e pelo teorema de Schwarz

$$f''_{xy} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = f''_{yx}.$$

Como $\frac{\partial f_1}{\partial y} = ax$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2bx$, tem-se $ax = 2bx \Leftrightarrow a = 2b$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(b) Determine a função potencial de $\vec{F}$, considerando $a = 4$ e $b = 2$.

$\vec{F}(x,y) = (4xy + 2x, 2x^2 + 3y^2)$

Como $f'_x = 4xy + 2x \Rightarrow f(x,y) = \int (4xy + 2x)\,dx = 2x^2y + x^2 + C(y)$.

Derivando $f(x,y)$ em ordem a y, tem-se $f'_y(x,y) = 2x^2 + C'(y)$ que tem que ser igual a $F_2 = 2x^2 + 3y^2$, isto é, $2x^2 + C'(y) = 2x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow$ $C'(y) = 3y^2 \Rightarrow C(y) = y^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Assim, $f(x,y) = 2x^2y + x^2 + y^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$

(c) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é o segmento de reta que com ponto inicial em $(0,2)$ e ponto final em $(1,3)$.

Como $\vec{F}$ é campo conservativo,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1,3) - f(0,2) = 2 \times 3 + 1 + 27 - 8 = 26.$$

(d) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a circunferência de raio 1, centrada em $(1,-1)$. Justifique convenientemente o resultado obtido.

$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ pois $\mathcal{C}$ é uma curva fechada e $\vec{F}$ é um campo conservativo, logo $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda a curva $\mathcal{C}$ fechada.

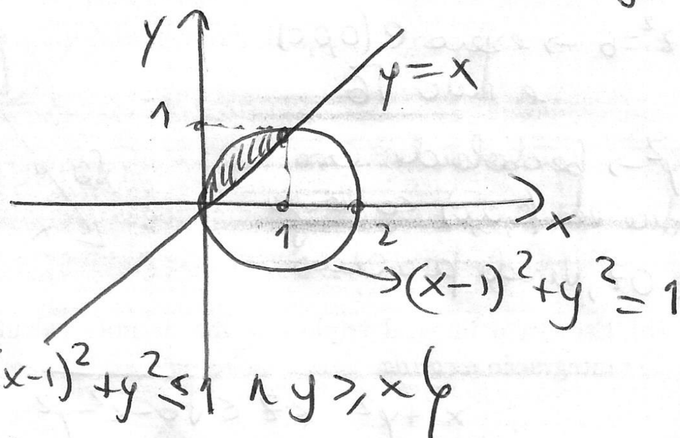
(por exemplo)

2. Considere o integral duplo em coordenadas cartesianas $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{1-(x-1)^2}} dy\,dx$. → Ver exercício 3 do ficha extra sobre integrais.

(a) Identifique e esboce o domínio de integração.

$0 \leq x \leq 1$

$x \leq y \leq \sqrt{1-(x-1)^2}$



A curva $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$ faz parte da circunferência $(x-1)^2+y^2=1$

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\leq 1 \wedge y\geq x\}$

(b) Troque a ordem de integração.

Da equação $(x-1)^2+y^2=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=1-y^2 \Rightarrow x-1=\pm\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{1-y^2}$

$0 \leq y \leq 1$

$1-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq y$

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y} 1\,dx\,dy$$

(c) Calcule o integral duplo usando coordenadas polares. → Por exemplo, ver exercício 2b) do ficha extra sobre integrais

$x = R\cos\theta$

$y = R\,\text{sen}\,\theta$

A circunferência $(x-1)^2+y^2=1$ em coordenadas polares escreve-se da forma $R=2\cos\theta$

Assim,

$0 \leq R \leq 2\cos\theta$

$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} R\,dR\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\frac{R^2}{2}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\cos^2\theta\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos(2\theta))\,d\theta =$$

$$=\left[\theta+\frac{1}{2}\text{sen}(2\theta)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\text{sen}\,\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\text{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

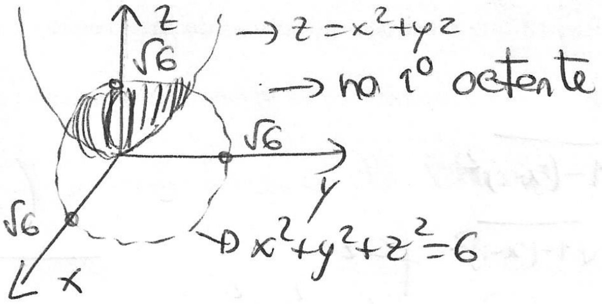
→ Ver, por exemplo, exercício 1 dos int. triplos da ficha extra sobre integrais

3. Considere o sólido V definido em $\mathbb{R}^3$, que se encontra no 1º **octante**, limitado superiormente pela superfície de equação $x^2+y^2+z^2=6$ e limitado inferiormente pela superfície de equação $z=x^2+y^2$.

(a) Esboce geometricamente o sólido V.

$x^2+y^2+z^2=6 \to$ esfera $C(0,0,0)$ e raio $\sqrt{6}$

$z=x^2+y^2 \to$ paraboloide com vértice em $(0,0,0)$ ao longo do eixo OZ, virado para cima.



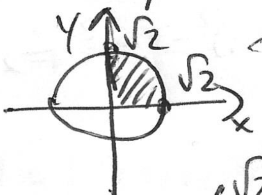
(b) Escreva o integral triplo que lhe permite calcular o volume do sólido V, usando a ordem de integração $dz\,dy\,dx$.

$$x^2+y^2 \le z \le \sqrt{6-x^2-y^2}$$

Projeção no plano XOY:

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \end{cases} \quad z^2+z-6=0 \Leftrightarrow \boxed{z=2} \vee z=-3$$

Assim, $\boxed{x^2+y^2=2}$



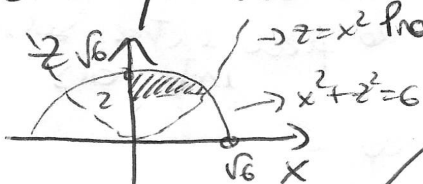
$$0 \le y \le \sqrt{2-x^2}$$
$$0 \le x \le \sqrt{2}$$

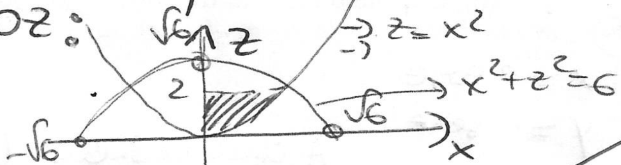
$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} 1\, dz\,dy\,dx$$

(c) Escreva o integral triplo que lhe permite calcular o volume do sólido V, usando a ordem de integração $dy\,dz\,dx$.

$$0 \le y \le \sqrt{6-z-x^2} \qquad \cup \qquad 0 \le y \le \sqrt{2-x^2}$$

Projeção no plano XOZ:





$$2 \le z \le \sqrt{6-x^2} \qquad x^2 \le z \le 2$$
$$0 \le x \le \sqrt{2} \qquad 0 \le x \le \sqrt{2}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_2^{\sqrt{6-x^2}} \int_0^{\sqrt{6-z-x^2}} 1.\,dy\,dz\,dx + \int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} 1.\,dy\,dz\,dx$$

(d) Calcule o volume do sólido, usando coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad R^2 \le z \le \sqrt{6-R^2}, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le R \le \sqrt{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{R^2}^{\sqrt{6-R^2}} R\,dz\,dR\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \left(R\sqrt{6-R^2} - R^3\right) dR\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{3}(6-R^2)^{3/2} - \frac{R^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{3}(6-2)^{3/2} - \frac{2^2}{4} + \frac{1}{3}(6)^{3/2}\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{6\sqrt{6}-11}{3}\right].$$