$$S = \{A_1\} \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{com} \quad A_1 = (1,1,1)$$

$$L(S) = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \alpha_1 A_1 \,,\ \alpha_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

Seja $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 A_1 = X \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{array}\right] \\ (\alpha_1) \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_3 - x_1 \end{array}\right]$$

Sistema Impossível : $x_2 \neq x_1 \vee x_3 \neq x_1$
$X \notin L(S)$

Sistema Possível : $x_2 = x_1 \wedge x_3 = x_1$
$X \in L(S)$

Então $L(S) = \{X = (x_1, x_1, x_1) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^3$

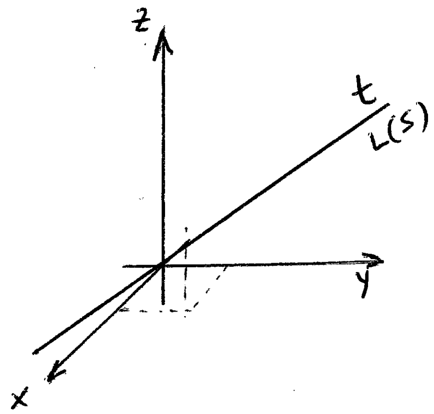
↳ recta t que passa na origem

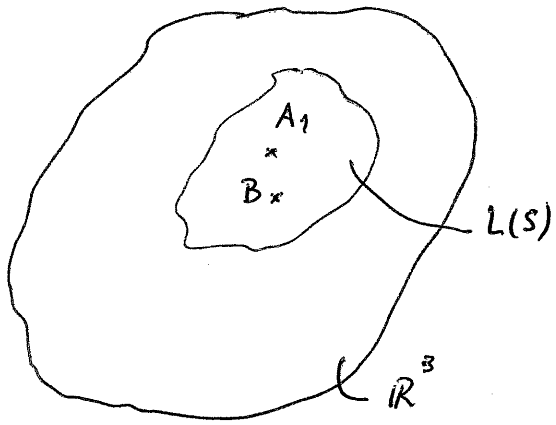
Além disso, o sistema é determinado, tendo a solução $\alpha_1 = x_1$

S é um conjunto linearmente independente (gera $L(S)$ de forma única)

S é uma base para $L(S) \Rightarrow \dim L(S) = 1$

Convém notar que : $0 \in L(S) \wedge A_1 \in L(S)$





Seja $B = (2,2,2) \in L(S)$

$W = \{A_1, B\} \Rightarrow$ $L(W) = L(S)$
W é um conjunto linearmente dependente
(gera $L(S)$ de forma não única)

Confirmação :

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 B = X \Leftrightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2) = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \end{array}\right] \\ (\alpha_1)\ (\alpha_2) \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \end{array}\right]$$

Sistema Possível : $x_2 = x_1 \wedge x_3 = x_1$
$L(W) = L(S)$

Sistema Simplesmente indeterminado, tendo como solução $\alpha_1 = x_1 - 2\alpha_2 \quad \forall \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$S_1 = \{A_1, A_2\} \subset \mathbb{R}^3$ com $A_2 = (1,1,2) \notin L(S)$

Neste caso $L(S_1) \supset L(S)$, já que $S \subset S_1$

$L(S_1) = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \,,\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = X \Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2) = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \end{array}\right] \\ (\alpha_1)\ (\alpha_2) \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & x_3 - x_1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \end{array}\right]$$

Sistema Impossível: $x_2 \neq x_1$
$X \notin L(S_1)$

Sistema Possível: $x_2 = x_1 \,,\; x_3 \in \mathbb{R}$
$X \in L(S_1)$

Então $L(S_1) = \{X = (x_1, x_1, x_3) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^3$

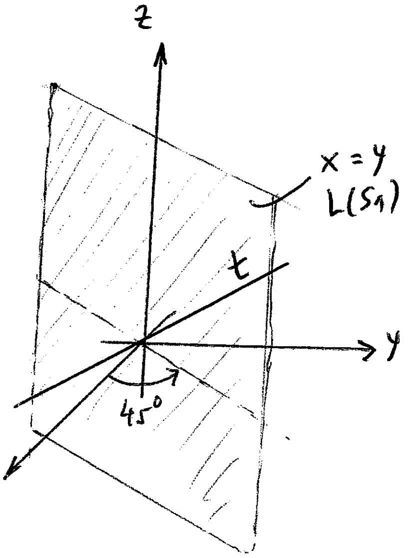
↳ plano que passa na origem (contém a recta t)

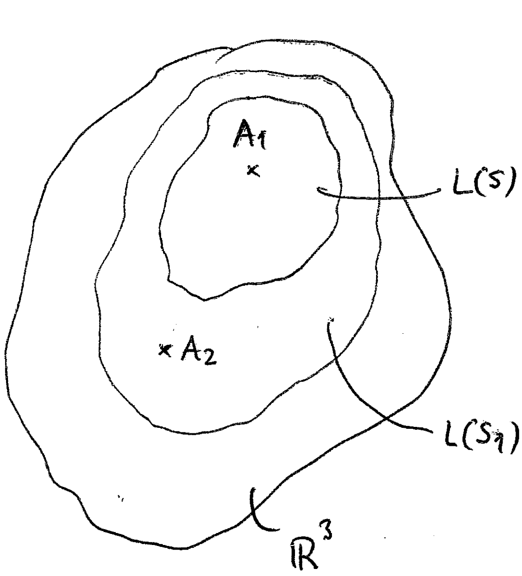
Além disso, o sistema é determinado, tendo como solução $\begin{cases} \alpha_1 = 2x_1 - x_3 \\ \alpha_2 = x_3 - x_1 \end{cases}$ (1)

S_1 é um conjunto linearmente independente (gera $L(S_1)$ de forma única)

S_1 é uma base para $L(S_1) \Rightarrow \dim L(S_1) = 2$

Convém notar que: $0 \in L(S_1) \wedge A_1 \in L(S_1) \wedge A_2 \in L(S_1)$





Nota: Como $A_2 \notin L(S)$ então:

S_1 é linearmente independente

$S_2 = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathbb{R}^3$ com $A_3 = (0,1,1)$

Sabe-se que $A_3 \notin L(S_1)$

Como S_1 é linearmente independente $\Rightarrow$ S_2 é linearmente independente

S_2 é base para $L(S_2)$ $\Rightarrow$ $\dim L(S_2) = 3$

Sabendo que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, então $L(S) = \mathbb{R}^3$

Confirmação

$L(S_2) = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \; , \; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$

$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = X \Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & 1 & x_3 \end{array}\right] \\ (\alpha_1)\;(\alpha_2)\;(\alpha_3) \quad\quad \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 - x_1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 - x_1 \end{array}\right]$$

O sistema nunca é impossível $\Rightarrow$ $\forall_{X \in \mathbb{R}^3} \; X \in L(S_2)$ $\Rightarrow$ $L(S_2) = \mathbb{R}^3$

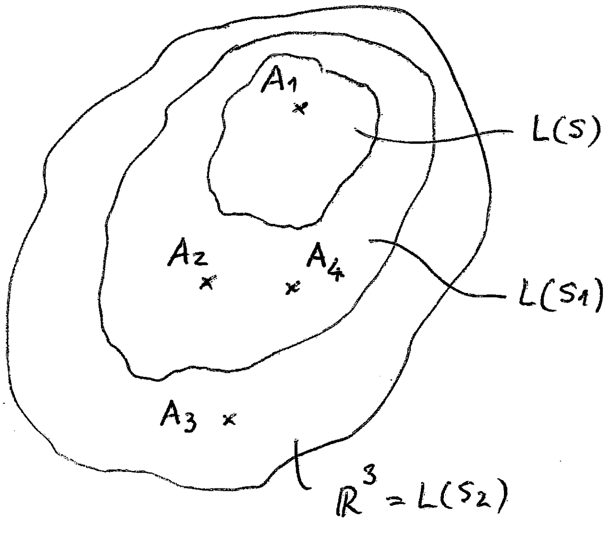
O sistema é possível e determinado, tendo como solução $\begin{cases} \alpha_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ \alpha_2 = \quad\; -x_2 + x_3 \\ \alpha_3 = x_2 - x_1 \end{cases}$

Então $L(S_2) = \mathbb{R}^3$

S_2 é um conjunto linearmente independente (gera $L(S_2)$ de forma única)

S_2 é uma base para $L(S_2) = \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $\dim L(S_2) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

Convém notar que: $0 \in L(S_2) \wedge A_1 \in L(S_2) \wedge A_2 \in L(S_2) \wedge A_3 \in L(S_2)$



$S_3 = \{A_1, A_2, A_4\} \subset \mathbb{R}^3$ com $A_4 = (-1,-1,0)$

Sabe-se que $A_4 \in L(S_1) \wedge S_1 \subset S_3$ (ver figura anterior)

Sendo S_1 linearmente independente $\Rightarrow$ S_3 é linearmente dependente

Como $S_1 \subset S_3 \Rightarrow L(S_3) = L(S_1)$

Confirmação

$$L(S_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_4 A_4, \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_4 A_4 = X \Leftrightarrow (\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2-\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2) = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x_1 \\ 1 & 1 & -1 & x_2 \\ 1 & 2 & 0 & x_3 \end{array}\right] \\ (\alpha_1)\ (\alpha_2)\ (\alpha_4) \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3-x_1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3-x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-x_1 \end{array}\right]$$

Sistema Impossível : $x_2 \neq x_1$
$X \notin L(S_3)$

Sistema Possível : $x_2 = x_1$, $x \in \mathbb{R}$
$X \in L(S_3) \wedge L(S_3) = L(S_1)$

Além disso, o sistema é simplesmente indeterminado, tendo como solução

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2x_1 - x_3 + 2\alpha_4 \\ \alpha_2 = x_3 - x_1 - \alpha_4 \end{cases} \forall \alpha_4 \in \mathbb{R}$$

Exemplo

Seja $A_5 = (2,2,-1) \in L(S_1)$

Tendo em conta a solução (1) (página 2) tem-se : $\alpha_1 = 5 \wedge \alpha_2 = -3$

$$A_5 = 5A_1 - 3A_2 \Leftrightarrow (2,2,-1) = 5(1,1,1) - 3(1,1,2)$$

Tendo em conta a solução (2) tem-se : $\alpha_1 = 5 + 2\alpha_4 \wedge \alpha_2 = -3 - \alpha_4 \quad \forall \alpha_4 \in \mathbb{R}$

$$A_5 = (5+2\alpha_4)A_1 + (-3-\alpha_4)A_2 + \alpha_4 A_4, \quad \alpha_4 \in \mathbb{R}$$

$\alpha_4 = 0 \Rightarrow A_5 = 5A_1 - 3A_2$

$\alpha_4 = 1 \Rightarrow A_5 = 7A_1 - 4A_2 + A_4 = 7(1,1,1) - 4(1,1,2) + (-1,-1,0)$

José Alves Barbosa