maf@math.uminho.pt
Departamento de Matemática
Universidade do Minho

Álgebra Linear
LEI - 2009/2010

Folha 1 - Matrizes

1. Dê exemplo de uma matriz real:
   (a) quadrada de ordem 3,
   (b) rectangular de ordem 4×2,
   (c) linha de ordem 1×6,
   (d) coluna de ordem 4×1,
   (e) triangular de ordem 5,
   (f) diagonal de ordem 4.

2. (a) Escreva por extenso a matriz de ordem $n \times m$ definida por:
   i. $A = (a_{ij})$ e $a_{ij} = i + j, \quad (n = 5, m = 4)$,
   ii. $B = (b_{ij})$ e $b_{ij} = \begin{cases} 2 & , \text{ se } i = j \\ -1 & , \text{ se } \mid i - j \mid = 1, \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \qquad (n = 5, m = 4)$
   iii. $C = (c_{ij})$ e $c_{ij} = \begin{cases} 2i & , \text{ se } i > j \\ i + j & , \text{ se } i = j, \\ 2j & , \text{ se } i < j \end{cases} \qquad (n, m = 5)$
   iv. $D = (d_{ij})$ e $D = A + 2B$
   v. $E = (e_{ij})$ e $e_{ij} = (-1)^{i+j}, (n, m = 3)$

   (b) Para cada uma das matrizes determinadas na alínea anterior indique os elementos que constituem a sua diagonal principal.

3. Considere as matrizes A, B, C e D de ordens respectivamente iguais a 4×3, 4×3, 3×4 e 4×2. Diga quais das seguintes expressões identificam matrizes, e nesses casos indique a ordem da matriz resultado.
   (a) A+2B (b) AB (c) AC+D (d) (A+B)C (e) ACD (f) 2ACA+ B

4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   Calcule:
   (a) $A + D$,
   (b) $3u - 2v$,
   (c) BC,
   (d) CA,

(e) AD e DA, (Obs. Note que D comuta com A.)

(f) Bu, (Obs. Note que u é solução do sistema $Bu = v$.)

(g) Cx, (Obs. Note que se tem $Cx = 0$ sem que $C = O$ ou $x = 0$.)

5. Sejam A e B as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determine a primeira linha da matriz $A + B$.

(b) Determine a segunda coluna da matriz BA.

(c) Determine a terceira linha da matriz A^2.

6. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifique que:

(a) $A^2 - 3A + 2I_3 = O_{3\times 3}$

(b) $AI_3 = A = I_3A$

(c) $AO_{3\times 3} = O_{3\times 3}$

(d) $2A - 3A = -A$

7. Seja A uma matriz de ordem $m \times (m + 5)$ e B uma matriz de ordem $n \times (11 - n)$. Determine os possíveis valores para m e n sabendo que estão definidos os produtos AB e BA.

8. Determine a matriz X tal que

$$A + 3X = B$$

onde $A = [2i - 3j]_{\substack{i=1,\ldots,4 \\ j=1,2}}$ e $B = [i + j]_{\substack{i=1,\ldots,4 \\ j=1,2}}$.

9. Considere as matrizes apresentadas no exercício 4. Calcule:

(a) AC^T,

(b) C^TB,

(c) uv^T,

(d) v^Tu,

(e) u^TBu.

10. Dada a equação matricial $((A^{-1})^T)X)^{-1} = I$,

(a) resolva-a em ordem a X,

(b) calcule a matriz X sabendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

11. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \;,\; C = \begin{pmatrix} -21 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Verifique e comente os seguintes resultados:

(a) $AB = O_2$,

(b) $AC = AD$.

12. (a) Determine todas as matrizes X que comutam com a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Determine uma matriz B tal que $AB = O_2$.

13. Seja A uma matriz simétrica de ordem n. Se P é uma matriz real da mesma ordem prove que $P^T AP$ é simétrica.

14. Sejam A e B duas matrizes simétricas de ordem n. Prove que a matriz AB é uma matriz simétrica se e só se $AB = BA$.

15. Uma matriz real A, quadrada de ordem n, diz-se *anti-simétrica* se $A^T = -A$.

(a) Mostre que A é anti-simétrica se e só se $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo o i, j.

(b) Seja P uma matriz real de ordem n. Prove que a matriz $P - P^T$ é uma matriz anti-simétrica.

16. (a) Prove que o produto de duas matrizes ortogonais é ainda uma matriz ortogonal.

(b) Prove que a transposta de uma matriz ortogonal é ainda uma matriz ortogonal.

17. Verifique que a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

18. Considere $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule A^2 e A^3.

(b) Verifique que a matriz $I_3 + A + A^2$ é a inversa de $I_3 - A$.

19. Calcule a inversa das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

20. (a) Seja A uma matriz ortogonal. Prove que a inversa da matriz A é a matriz A^T.

(b) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

i. Prove que A é uma matriz ortogonal.

ii. Calcule a inversa da matriz A.

21. Sejam A, B e C matrizes invertíveis de ordem n.

    (a) Qual a matriz inversa de $AB^{-1}C$?
    (b) Se A e B verificam $(AB)^T = A^T B^T$ prove que $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

22. Prove que se A é uma matriz invertível então:

    (a) $AB = O \Rightarrow B = O$
    (b) $AX = AY \Rightarrow X = Y$

23. Mostre que:

    (a) a soma de duas matrizes diagonais é uma matriz diagonal;
    (b) o produto de duas matrizes diagonais é uma matriz diagonal;
    (c) duas matrizes diagonais são comutáveis.