Conjuntos ortogonais de vectores

Definição [2.9]: **Conjunto ortogonal / ortonormal**

Um conjunto $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é um *conjunto ortogonal*, se os seus elementos forem ortogonais entre si, isto é, se

$$\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = 0 \ , \ i, j = 1, 2, \ldots, k \ \wedge \ i \neq j$$

Por outro lado, S é um *conjunto ortonormal*, se for ortogonal e se todos os seus elementos forem unitários, ou seja, se

$$\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \ , \text{ se } i \neq j \\ 1 \ , \text{ se } i = j \end{cases} \ , \ i, j = 1, 2, \ldots, k$$

- O *vector nulo* poderá pertencer a qualquer *conjunto ortogonal*.

Teorema [2.23]: Seja $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ um *conjunto ortogonal*, tal que

$$\vec{s}_i \neq \vec{0} \ , \ i = 1, 2, \ldots, k$$

Considere o vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gerado pelo conjunto S, ou seja,

$$\vec{x} \in L(S) \ \Leftrightarrow \ \vec{x} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{s}_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{s}_i$$

Então:

i) O conjunto S é *linearmente independente*;

ii) Verifica-se

$$\alpha_i = \frac{\vec{x} \cdot \vec{s}_i}{\vec{s}_i \cdot \vec{s}_i} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{s}_i}{\|\vec{s}_i\|^2} \ , \ i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\vec{x} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_1} \vec{x} + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_2} \vec{x} + \ldots + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_k} \vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_i} \vec{x}$$

Teorema [2.24]: Sejam $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ um *conjunto ortonormal* e $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ um vector gerado pelo conjunto S, ou seja,

$$\vec{x} \in L(S) \iff \vec{x} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{s}_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{s}_i$$

Então:

i) O conjunto S é *linearmente independente*;

ii) Verifica-se

$$\alpha_i = \vec{x} \cdot \vec{s}_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{s}_1} \vec{x} + \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{s}_2} \vec{x} + \ldots + \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{s}_k} \vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{s}_i} \vec{x}$$

Definição [2.10]: Base ortogonal e base ortonormal
Seja $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ uma *base* para o subespaço $L(S)$. O conjunto S é uma *base ortogonal* para $L(S)$, se for um conjunto ortogonal. Por outro lado, S é uma *base ortonormal* para $L(S)$, se for um conjunto ortonormal.

Exemplo 18 [2.30]: Em $\mathbb{R}^2$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$E = \{\vec{i}, \vec{j}\} = \{(1,0), (0,1)\}$$

é uma *base ortonormal* para $\mathbb{R}^2$ (*base canónica*, ou *base natural*).

Exemplo 19 [2.30]: Em $\mathbb{R}^3$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

é uma *base ortonormal* para $\mathbb{R}^3$ (*base canónica*, ou *base natural*).

Exemplo 20 [2.30]: Em $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\} = \{(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),(0,0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,1)\}$$

é uma *base ortonormal* para $\mathbb{R}^n$ (*base canónica*, ou *base natural*).

Exemplo 21 [2.32]: O conjunto de vectores

$$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \{(3,4),(-4,3)\} \subset \mathbb{R}^2$$

é uma *base ortogonal* para o espaço $\mathbb{R}^2$.
Da *normalização* dos elementos do conjunto B resulta a *base ortonormal* para o espaço $\mathbb{R}^2$

$$\overline{B} = \left\{ \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|}, \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{5}(3,4), \frac{1}{5}(-4,3) \right\}$$

Exemplo 22 [2.31]: O conjunto de vectores

$$A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{(1,1,0),(1,-1,-2),(1,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é uma *base ortogonal* para o espaço $\mathbb{R}^3$.
Normalizando os vectores do conjunto A obtém-se a *base ortonormal* para o espaço $\mathbb{R}^3$

$$\overline{A} = \left\{ \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_2\|}, \frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \right\}$$

Exemplo 23 [2.34]: Considere o subespaço

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_2 - x_3 + x_4 \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

a) Encontre uma *base*, C, para M e indique a dimensão do subespaço.

b) Determine uma *base ortogonal*, U, para o subespaço M que inclua o vector $\vec{u}_1 = (1,0,0,1) \in M$.

c) Obtenha uma *base ortonormal* para o subespaço M.

d) Construa, a partir da base U, uma *base ortogonal*, V, e uma *base ortonormal*, W, para o espaço $\mathbb{R}^4$.

e) Calcule as *coordenadas* do vector $\vec{a} = (1,1,-2,2)$ em relação às bases ordenadas V e W.

f) Construa, a partir da base C, uma *base*, Z, para o espaço $\mathbb{R}^4$.

g) Calcule as *coordenadas* do vector $\vec{a} = (1,1,-2,2)$ em relação à base Z.

Solução:

a) $M = \left\{ (x_2 - x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}$ resultando, por exemplo, a base

$$C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\} = \{(1,1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,1)\} \subset M \ \Rightarrow \ \dim M = 3$$

b) A *base ortogonal*, U, para o subespaço M é, por exemplo,

$$U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(1,0,0,1), (0,1,1,0), (1,1,-1,-1)\} \subset M$$

notando que

$$\begin{cases} \vec{u}_2 \in M \setminus \{\vec{0}\} \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \vec{u}_3 \in M \setminus \{\vec{0}\} \\ \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases}$$

c) *Normalizando* os vectores da base U obtém-se a *base ortonormal* para o subespaço M

$$\overline{\mathrm{U}} = \left\{ \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}, \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0), \frac{1}{2}(1,1,-1,-1) \right\} \subset \mathrm{M}$$

d) A base ortogonal para o espaço $\mathbb{R}^4$ é, por exemplo,

$$\mathrm{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1)\}$$

notando que

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 \ , \ \vec{v}_2 = \vec{u}_2 \ , \ \vec{v}_3 = \vec{u}_3 \ \text{ e } \begin{cases} \vec{v}_4 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\} \\ \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_2 = 0 \\ \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_3 = 0 \end{cases}$$

Normalizando os vectores da base V obtém-se a *base ortonormal* para o espaço $\mathbb{R}^4$

$$\mathrm{W} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0), \frac{1}{2}(1,1,-1,-1), \frac{1}{2}(1,-1,1,-1) \right\}$$

e) As coordenadas de $\vec{a} = (1,1,-2,2)$ em relação à *base ortogonal* V são

$$\vec{a} = (1,1,-2,2) = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 + \alpha_4\vec{v}_4 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{\mathrm{V}}$$

Notando que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 + \alpha_4\vec{v}_4 = \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{v}_1}\vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{v}_2}\vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{v}_3}\vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{v}_4}\vec{a}$$

obtém-se

$$\alpha_1 = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} = \frac{3}{2},\ \alpha_2 = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} = -\frac{1}{2},\ \alpha_3 = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|^2} = \frac{1}{2},\ \alpha_4 = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}_4}{\|\vec{v}_4\|^2} = -1$$

e, portanto,

$$\vec{a} = (1,1,-2,2) \ \Leftrightarrow\ \vec{a}_V = \left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)_V$$

As coordenadas de $\vec{a} = (1,1,-2,2)$ em relação à *base ortonormal* W são

$$\vec{a} = (1,1,-2,2) = \beta_1\vec{w}_1 + \beta_2\vec{w}_2 + \beta_3\vec{w}_3 + \beta_4\vec{w}_4 = (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)_W$$

Notando que

$$\beta_1\vec{w}_1 + \beta_2\vec{w}_2 + \beta_3\vec{w}_3 + \beta_4\vec{w}_4 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{w}_1}\vec{a} + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{w}_2}\vec{a} + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{w}_3}\vec{a} + \overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{w}_4}\vec{a}$$

obtém-se

$$\beta_1 = \vec{a}\cdot\vec{w}_1 = \frac{3}{\sqrt{2}},\ \beta_2 = \vec{a}\cdot\vec{w}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \beta_3 = \vec{a}\cdot\vec{w}_3 = 1,\ \beta_4 = \vec{a}\cdot\vec{w}_4 = -2$$

e, portanto,

$$\vec{a} = (1,1,-2,2) \ \Leftrightarrow\ \vec{a}_W = \left(\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1,-2\right)_W$$

f) A *base* para o espaço $\mathbb{R}^4$ é, por exemplo,

$$Z = \{\vec{z}_1,\vec{z}_2,\vec{z}_3,\vec{z}_4\} = \{(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,0,0,0)\}$$

notando que

$$\vec{z}_1 = \vec{c}_1\ ,\ \vec{z}_2 = \vec{c}_2\ ,\ \vec{z}_3 = \vec{c}_3 \ \text{ e } \begin{cases} \vec{z}_4 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\} \\ \vec{z}_4 \notin M \end{cases}$$

g) As coordenadas de $\vec{a} = (1,1,-2,2)$ em relação à *base* Z são

$$\vec{a} = (1,1,-2,2) = \delta_1\vec{z}_1 + \delta_2\vec{z}_2 + \delta_3\vec{z}_3 + \delta_4\vec{z}_4 = (\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)_Z$$

Resolvendo o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 1 \\ \delta_1 = 1 \\ \delta_2 = -2 \\ \delta_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_1 = 1 \\ \delta_2 = -2 \\ \delta_3 = 2 \\ \delta_4 = -4 \end{cases}$$

resulta

$$\vec{a} = (1,1,-2,2) \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_Z = (1,-2,2,-4)_Z$$