Departamento de Matemática e Aplicações — 8/07/ 2013

Duração: 120 minutos

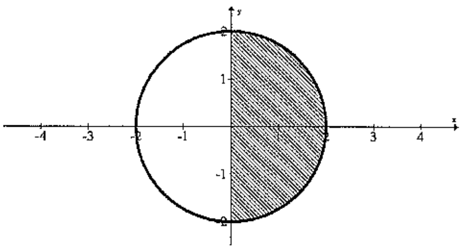
Exame de Análise Matemática EE - versão A

Nome: ______________________________ Nr.: __________ Curso: MIEGI

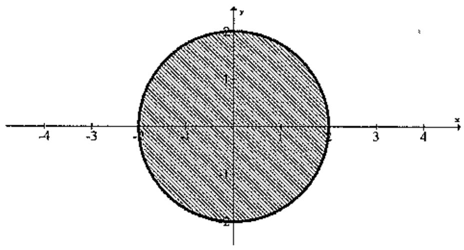
GRUPO I (8 valores)

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correcta no quadrado correspondente. Cada resposta correcta vale 1 valor.

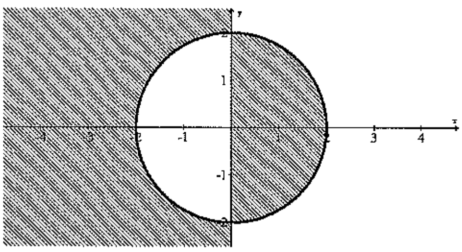
1. Qual o domínio da função real $f(x,y) = \sqrt{x(4-x^2-y^2)}$?



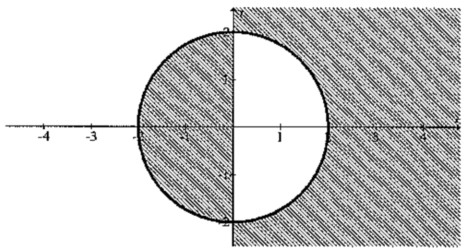
☐



☐



☒



☐

☐ Nenhuma das anteriores.

2. Considere a função real $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x+y} & \text{se } x \neq -y \\ k & \text{se } x = -y \end{cases}$ definida no seu domínio. Qual o valor de k de modo que a função f seja contínua em $(2,-2)$?

☐ 2; ☐ 1; ☐ 0; ☒ 4; ☐ Nenhuma das anteriores.

3. Qual das seguintes funções reais **não** satisfaz a equação diferencial $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$?

☐ $f(x,y) = 5x + 5y + 9$
☒ $f(x,y) = x^2 - y^2 + x^2y^2$
☐ $f(x,y) = \ln x - y^2$
☐ $f(x,y) = 3x^4 + \sin y$
☐ Nenhuma das anteriores.

4. A taxa de variação de f no ponto (a,b), na direção do vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é dada por:

☐ $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu_1,b)-f(a,b)}{h}$
☒ $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu_1,b+hu_2)-f(a,b)}{h}$
☐ $\lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+hu_2)-f(a,b)}{h}$
☐ $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+u_1,b+u_2)-f(a,b)}{h}$
☐ Nenhuma das anteriores.

5. Considere a função real dada $w = y.\cos x$ onde $x = u^2 + v$ e $y = u - v^2$. A expressão de $\frac{\partial w}{\partial u}$ é:

- [ ] $-y \sin x - 2v \cos x$
- [ ] $-y \sin x + \cos x$
- [X] $-2uy \sin x + \cos x$
- [ ] $y \sin x + 2u \cos x$
- [ ] Nenhuma dos anteriores.

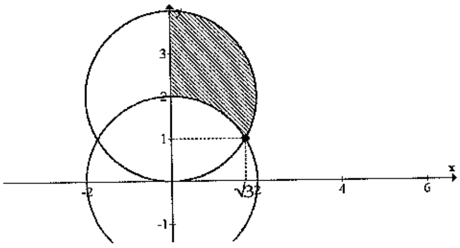
6. Considere a função real $f(x, y) = e^x.\ln y$ definida no seu domínio. A aproximação df do valor da diferença $f(dx, 1 + dy) - f(0, 1)$ é dada por:

[ ] dx; [ ] $dx + dy$; [X] dy; [ ] $-dx + dy$; [ ] Nenhuma das anteriores.

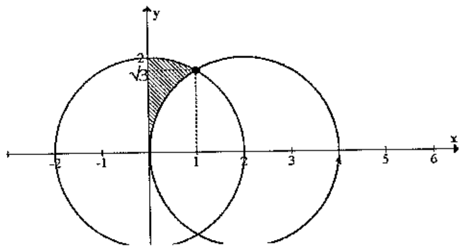
7. Seja $f(x, y)$ uma função real diferenciável e (a, b) um ponto do domínio de f tal que $\vec{\nabla} f(a, b) = (0, 0)$ e $\left(f''_{x^2}.f''_{y^2} - \left[f''_{xy}\right]^2\right)(a, b) < 0$. Então:

- [X] (a, b) é ponto de sela.
- [ ] (a, b) é maximizante local de f.
- [ ] (a, b) é minimizante local de f.
- [ ] Nada se pode concluir sobre (a, b).
- [ ] Nenhum dos anteriores.

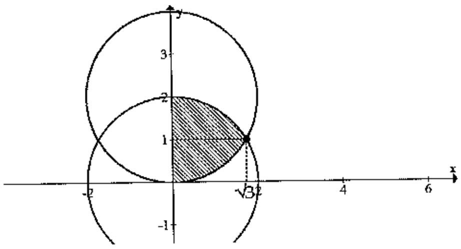
8. Considere o integral duplo $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_{4\cos\theta}^{2} r \, dr d\theta$. Qual das seguintes regiões sombreadas representa a região de integração do integral dado?



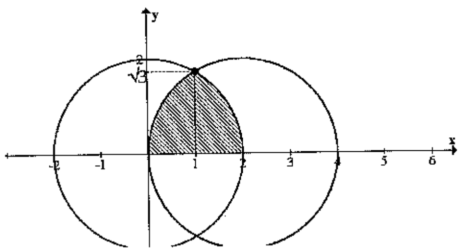
[ ]



[X]



[ ]



[ ]

- [ ] Nenhum dos anteriores.

GRUPO II (12 valores)

Apresente todos os cálculos efectuados.

1. Considere a função $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 y - y^2 - 6y$

(a) Determine os pontos críticos de f.

$f'_x = 3xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

$f'_y = \frac{3}{2}x^2 - 2y - 6 = 0$

$\begin{cases} \text{se } x = 0 \Rightarrow -2y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -3 \Rightarrow (0, -3) \\ \text{se } y = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \quad (2, 0) \; (-2, 0) \end{cases}$

Pt^{os} críticos: $(0, -3)$ $(2, 0)$ $(-2, 0)$

(b) Classifique os pontos críticos.

$f''_{x^2} = 3y$

$f''_{y^2} = -2$

$f''_{xy} = 3x$

$|H(0,-3)| = \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 18 > 0 \Rightarrow (0,-3)$ é maximizante pois $f''_{x^2}(0,-3) < 0$

$|H(2,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -36 < 0$

$|H(-2,0)| = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = -36 < 0$

$(2,0)$ e $(-2,0)$ são pontos de sela.

2. A temperatura num local (x, y) do plano XOY é dada, em graus Celsius, pela fórmula $T(x, y) = 2x^2e^{-2y}$.

(a) Determina o valor de $\frac{\partial T}{\partial x}(1,1)$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(1,1)$.

$T'_x(x,y) = 4x e^{-2y} \Rightarrow T'_x(1,1) = 4e^{-2}$

$T'_y(x,y) = -4x^2 e^{-2y} \Rightarrow T'_y(1,1) = -4e^{-2}$

(b) Qual a taxa de variação da temperatura no ponto $(1,1)$ na direcção que vai do ponto $(1,1)$ para o ponto $(3,1)$?

$\vec{u} = (3,1)-(1,1) = (2,0) \quad ; \quad \vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (1,0)$

$D_{\vec{u}} f(1,1) = (4e^{-2}, -4e^{-2}) \cdot (1,0) = 4e^{-2}(1,-1)\cdot(1,0) = 4e^{-2}$

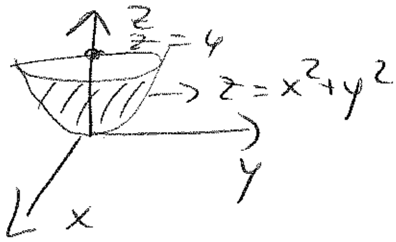
A taxa de variação é $4e^{-2}$.

(c) No ponto $(1,1)$, qual a direção segundo a qual a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa desse aumento?

A direção segundo a qual a temperatura aumenta mais rapidamente é a direção do vetor gradiente $\vec{\nabla} f(1,1) = 4e^{-2}(1,-1)$.

e a taxa de variação nesse direção é $\|\vec{\nabla} f(1,1)\| = 4e^{-2}\sqrt{1+1} = 4\sqrt{2}e^{-2}$.

3. Utilizando integrais triplos ou duplos, calcule o volume do sólido $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$.



$x^2+y^2 \leq z \leq 4$

$\iint$ Projeção no plano xOy é o círculo $x^2+y^2 \leq 4$

$\Downarrow$

$-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$

$-2 \leq x \leq 2$

Transformação para coordenadas cilíndricas.

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} 1 \, dz\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{R^2}^{4} R \, dz\, d\theta\, dR = 8\pi \quad (\dots)$$

4. Determine o valor máximo da função $f(x, y) = x^2y^2$ quando os pontos (x, y) satisfazem a condição $x + y = 2$.

~~Extremos condicionados~~

Se $x+y=2 \Leftrightarrow y = 2-x$

Determinar o valor máximo da função $f(x, 2-x) = x^2(2-x)^2$

$f(x) = x^2(x^2-4x+4) = x^4-4x^3+4x^2$

$f'(x) = 4x^3-12x^2+8x = 4x(x^2-3x+2) = 0$

$x=0 \lor x=1 \lor x=2$

	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$4x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-3x+2	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	mínimo	$\nearrow$	maxi	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(x)$ é máximo quando $x=1$

e nesse caso $y = 2-1 = 1$.

Assim $f(x,y) = x^2y^2$ toma o valor máximo em $f(1,1) = 1$.

O problema dava para resolver usando Extremos Condicionados.