Problema: Seja a transformação linear

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (3x-2z, y+z)$$

definida em relação às bases canónicas

$$E_3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \quad (\mathbb{R}^3)$$
$$E_2 = \{(1,0), (0,1)\} \quad (\mathbb{R}^2)$$

a) Determine a matriz $A = m(T)$ que representa a transformação T em relação às bases E_3 e E_2.

Tendo em conta que

$$T(1,0,0) = (3,0)$$
$$T(0,1,0) = (0,1)$$
$$T(0,0,1) = (-2,1)$$

obtém-se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T(x,y,z) = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-2z \\ y+z \end{bmatrix}.$$

b) Seja a base $P = \{(1,1), (1,-1)\}$ para o espaço $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz de mudança de base de P para E_2, $M_P^{E_2}$.

Seja $Y = (a,b)$ as coordenadas do vector Y em relação à base E_2 e $Y_P = (a_1, b_1)_P$ as coordenadas do vector em relação à base P.

Assim,

$$E_2 Y_{E_2} = P Y_P$$

em que

$$E_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sabendo que

$$Y_{E_2} = M_P^{E_2} Y_P \qquad (1)$$

obtém-se

$$M_P^{E_2} = (E_2)^{-1} P = I_2 P = P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

o que permite escrever

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{E_2} = M_P^{E_2} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}_P \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{E_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}_P \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a_1 + b_1 \\ b = a_1 - b_1 \end{cases} \rightarrow$$ Expressões de mudança de coordenadas $P \rightarrow E_2$

A expressão inversa de (1) é

$$Y_P = M_{E_2}^{P} Y_{E_2} = \left(M_P^{E_2}\right)^{-1} Y_{E_2}$$

Sabendo que

$$|M_P^{E_2}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{e} \quad \mathrm{Adj}\, M_P^{E_2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$\left(M_P^{E_2}\right)^{-1} = \frac{1}{(-2)} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}_P = \left(M_P^{E_2}\right)^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{E_2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}_P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{E_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}(a+b) \\ b_1 = \frac{1}{2}(a-b) \end{cases} \rightarrow$$ Expressões de mudança de coordenadas $E_2 \rightarrow P$

c) Seja a base $Q = \{(1,-1,0), (0,1,1), (1,0,-1)\}$ para o espaço $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz de mudança de base de Q para E_3, $M_Q^{E_3}$. Seja $X = (x,y,z)$ as coordenadas do vector X em relação à base E_3 e $X_Q = (x_1, y_1, z_1)_Q$ as coordenadas do vector em relação à base Q.

Assim,

$$E_3 \, X_{E_3} = Q \, X_Q$$

em que

$$E_3 = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tendo em atenção que

$$X_{E_3} = M_Q^{E_3} \, X_Q \qquad (2)$$

obtém-se

$$M_Q^{E_3} = (E_3)^{-1} Q = I_3 \, Q = Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{E_3} = M_Q^{E_3} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_Q \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_Q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + z_1 \\ y = -x_1 + y_1 \\ z = y_1 - z_1 \end{cases} \rightarrow \text{Expressões de mudança de coordenadas } Q \rightarrow E_3$$

A expressão inversa de (2) é

$$X_Q = M_{E_3}^{Q} \, X_{E_3} = (M_Q^{E_3})^{-1} \, X_{E_3}$$

Dado que

$$|M_Q^{E_3}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - (0) = -2$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

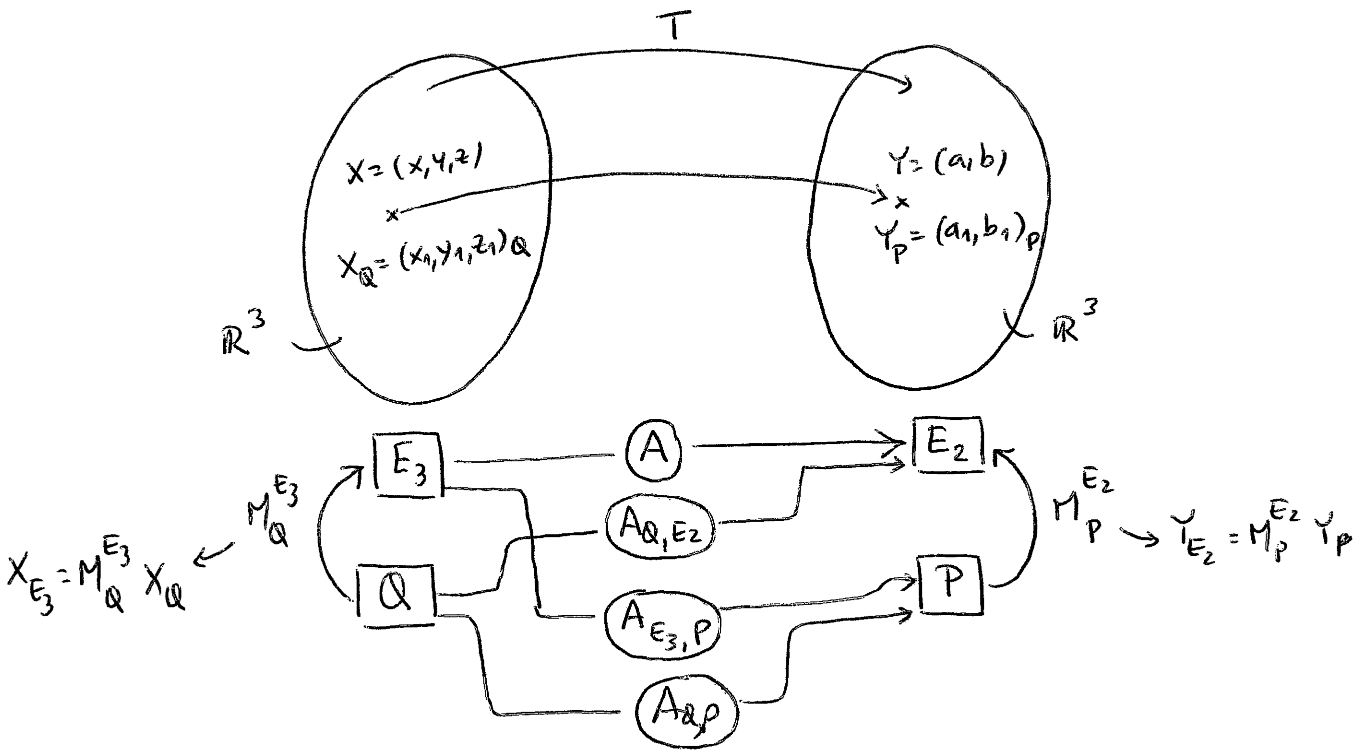
e

$$\text{Adj } M_Q^{E_3} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$(M_Q^{E_3})^{-1} = \frac{1}{(-2)} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

d) Determine a matriz A_{Q,E_2}, que representa a transformação linear T em relação às bases Q e E_2.



$$A_{Q,E_2} = A\,M_Q^{E_3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{Q,E_2}$$

$\downarrow$

$$Y_{E_2} = A_{Q,E_2} X_Q \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{Q,E_2}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_Q = \begin{bmatrix} 3x_1-2y_1+5z_1 \\ -x_1+2y_1-z_1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,y_1,z_1)_Q \longrightarrow (3x_1-2y_1+5z_1, -x_1+2y_1-z_1)$$

e) Determine a matriz $A_{E_3,P}$, que representa a transformação linear T em relação às bases E_3 e P.

$$A_{E_3,P} = \left(M_P^{E_2}\right)^{-1} A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}_{E_3,P}$$

$\downarrow$

$$Y_P = A_{E_3,P} X_{E_3} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}_P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}_{E_3,P}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3x+y-z \\ 3x-y-3z \end{bmatrix}_P$$

$\downarrow$

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow \frac{1}{2}\,(3x+y-z,\,3x-y-3z)_P$$

f) Determine a matriz $A_{Q,P}$, que representa a transformação linear T em relação às bases Q e P.

$$A_{Q,P} = \underbrace{(M_P^{E_2})^{-1} A}\, M_Q^{E_3} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 6 \end{bmatrix}_{Q,P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{Q,P}$$

$$Y_P = A_{Q,P}\, X_Q \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{Q,P}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_Q = \begin{bmatrix} x_1 + 2z_1 \\ 2x_1 - 2y_1 + 3z_1 \end{bmatrix}_P$$

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,y_1,z_1)_Q \longrightarrow (x_1+2z_1,\,2x_1-2y_1+3z_1)_P$$

g) Considere o vector $X=(1,2,-1)$ com coordenadas na base canónica E_3. Calcule a imagem do vector X através de T recorrendo a cada uma das matrizes atrás definidas.

i) <u>Matriz A</u>

$$Y = T(1,2,-1) = A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

imagem na base E_2

ii) <u>Matriz A_{Q,E_2}</u>

$$X_Q = (M_Q^{E_3})^{-1} X_{E_3} \Rightarrow X_Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}_Q = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_Q$$

$$Y = T(-1,1,2)_Q = A_{Q,E_2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_Q = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{Q,E_2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_Q = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

imagem na base E_2

iii) Matriz $A_{E_3,P}$

$$Y_P = T(1,2,-1) = A_{E_3,P}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\3 & -1 & -3\end{bmatrix}_{E_3,P}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} =$$

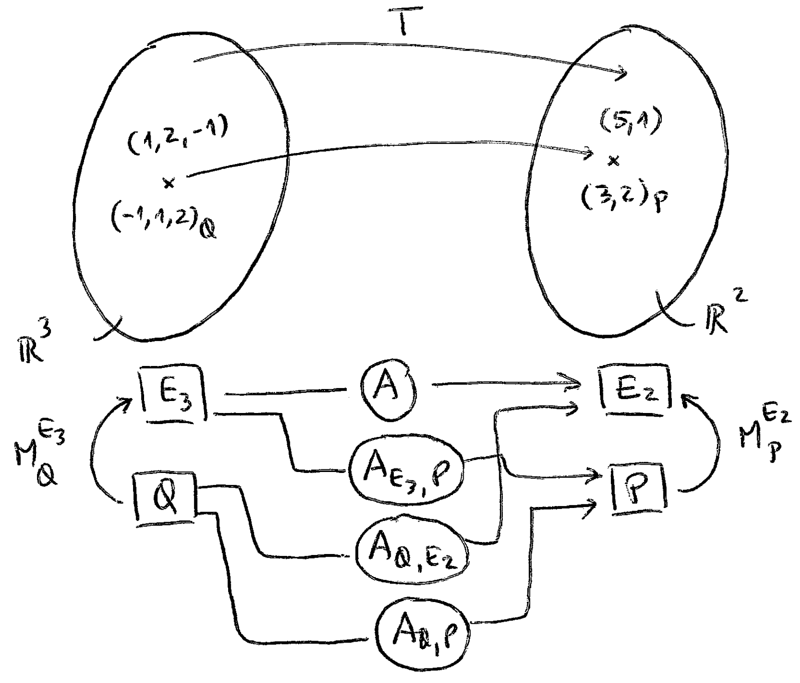
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_P$$

imagem na base P

iv) Matriz $A_{Q,P}$

$$Y_P = T(-1,1,2)_Q = A_{Q,P}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}_Q = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\2 & -2 & 3\end{bmatrix}_{Q,P}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}_Q = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_P$$

imagem na base P



Convém notar que $Y = (5,1)$ e $Y_P = (3,2)_P$ representam o mesmo vector imagem

$$Y_{E_2} = M_P^{E_2}\, Y_P = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$

José Alberto Barbosa