Matrizes semelhantes

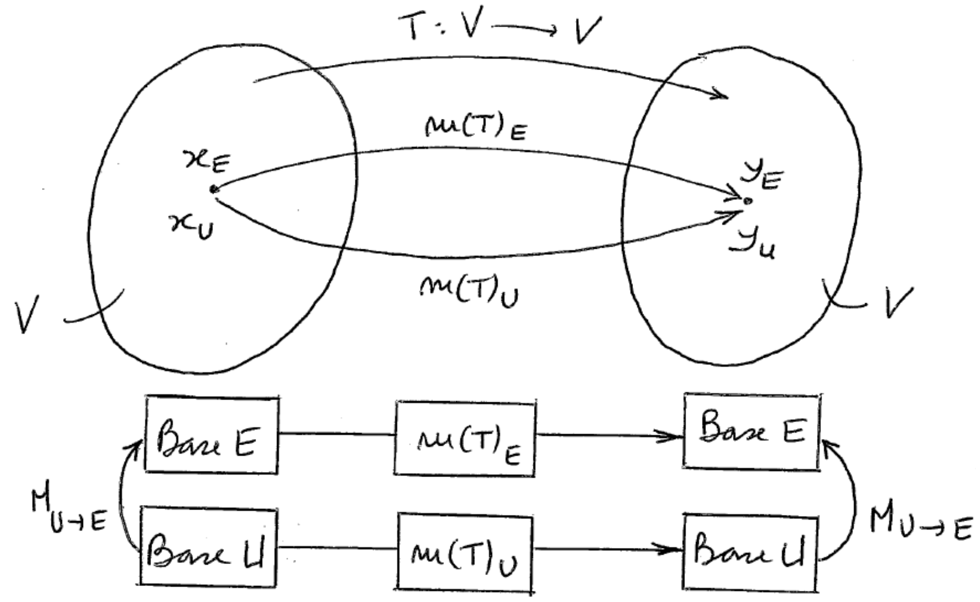
- Seja V um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$.

Teorema [4.3]: Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$. Designem-se por $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} = m(T)_{\mathrm{E}}$ e por $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}} = m(T)_{\mathrm{U}}$ as suas *representações matriciais em relação às bases ordenadas* $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ e $\mathrm{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, respectivamente.
Sendo $\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}}$ a *matriz mudança de base de* U *para* E, então as representações matriciais referidas verificam a relação matricial

$$m(T)_{\mathrm{U}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}}\right)^{-1} m(T)_{\mathrm{E}}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}}$$

ou

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}}\right)^{-1} \boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}}$$



Definição [4.2]: Matrizes Semelhantes
Duas matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ de ordem n sobre um corpo Ω dizem-se *matrizes semelhantes*, se existir uma matriz *não singular*, de ordem n, $\boldsymbol{P}$, tal que

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}$$

representando-se simbolicamente por $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$.

Teorema [4.4]: Duas matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ de ordem n sobre um corpo Ω e *semelhantes* representam a mesma transformação linear.

Teorema [4.5]: Duas matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ de ordem n sobre um corpo Ω são *semelhantes*, se e só se representam a mesma transformação linear.

Teorema [4.6]: Se as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ de ordem n sobre um corpo Ω são *semelhantes*, então possuem o mesmo *determinante*.

Teorema [4.7]: Se as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ de ordem n sobre um corpo Ω são *semelhantes*, então possuem a mesma *característica*.

Teorema [4.8]: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n sobre um corpo Ω e $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}$ uma matriz *semelhante* a $\boldsymbol{A}$. Sendo k um número inteiro positivo, então

$$\boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}^k\,\boldsymbol{P}$$

Teorema [4.9]: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz *não singular*, de ordem *n*, sobre um corpo Ω e $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}$ uma matriz *semelhante* a $\boldsymbol{A}$, então

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{P}$$

e, portanto, $\boldsymbol{B}^{-1}$ e $\boldsymbol{A}^{-1}$ são, também, matrizes *semelhantes*.

Teorema [4.10]: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz não singular, de ordem *n*, sobre um corpo Ω e $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}$ uma matriz *semelhante* a $\boldsymbol{A}$. Sendo *k* um número inteiro positivo, então

$$\boldsymbol{B}^{-k} = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A}^{-k} \boldsymbol{P}$$

e, portanto, $\boldsymbol{B}^{-k}$ e $\boldsymbol{A}^{-k}$ são, também, matrizes *semelhantes*.

Exemplo 4 [4.6]: Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que

$$T(x,y,z) = (3x + 2y - z, -2x - 2y + 2z, 3x + 6y - z)$$

Seja a *base ordenada para* $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(1,2,0),(0,1,1),(0,1,0)\}$$

Determine:

a) A *matriz* $\boldsymbol{T} = m(T)$, que representa T em relação à *base canónica* para $\mathbb{R}^3$.

b) A *matriz semelhante* a $\boldsymbol{T} = m(T)$ definida em relação à *base ordenada* U e indique a *lei de transformação* que lhe está associada.

Solução:

a) A matriz

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

constitui a *representação matricial* de T em relação à *base canónica* para $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{E}_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

b) A matriz *semelhante* a $\boldsymbol{T} = m(T)$ definida em relação à *base ordenada* U é a matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}} = m(T)_{\mathrm{U}}$, que se relaciona com a matriz $\boldsymbol{T}$ através da relação matricial

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}_3}\right)^{-1} \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}_3}$$

onde $\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}_3}$, a matriz *mudança de base de* U *para* E_3, é definida por

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}_3} = \boldsymbol{E}_3^{-1}\ \boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}_3\ \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e tem como matriz inversa

$$\left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}_3}\right)^{-1}=\boldsymbol{U}^{-1}=\frac{1}{|\,\boldsymbol{U}\,|}\left[\boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{U}\right]^{\mathrm{T}}=-\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Assim,

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}}=\left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}_3}\right)^{-1}\boldsymbol{T}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}_3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 6 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}_3}=$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 3 & 6 & -1\\ -11 & -12 & 5\end{bmatrix}_{\mathrm{E}_3,\mathrm{U}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 1 & 2\\ 15 & 5 & 6\\ -35 & -7 & -12\end{bmatrix}_{\mathrm{U}}$$

Uma vez que $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}}\approx\boldsymbol{T}$, então verifica-se $|\,\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}}\,|=|\,\boldsymbol{T}\,|=-16$.
Designando por $\vec{x}_{\mathrm{U}}=(x_1,y_1,z_1)_{\mathrm{U}}$ as *coordenadas* do vector genérico de $\mathbb{R}^3$ *em relação à base ordenada* U, então

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{U}}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{U}}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}}=\begin{bmatrix}7 & 1 & 2\\ 15 & 5 & 6\\ -35 & -7 & -12\end{bmatrix}_{\mathrm{U}}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}_{\mathrm{U}}=\begin{bmatrix}7x_1+y_1+2z_1\\ 15x_1+5y_1+6z_1\\ -35x_1-7y_1-12z_1\end{bmatrix}_{\mathrm{U}}$$

pelo que a *lei de transformação* de T *em relação à base* U é

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

em que

$$T(x_1,y_1,z_1)_{\mathrm{U}}=(7x_1+y_1+2z_1,15x_1+5y_1+6z_1,-35x_1-7y_1-12z_1)_{\mathrm{U}}$$