ÁLGEBRA VECTORIAL

Introdução

- Estudo das operações (definição, propriedades e aplicações) que podem ser realizadas com os vectores.

- A noção de *vector* pode ser encontrada em diversas áreas da ciência:
  i) **Geometria**: recta, plano, curva, superfície, etc;
  ii) **Análise**: sistemas de equações lineares, gradiente, derivada direccional, etc;
  iii) **Física**: força, deslocamento, velocidade, aceleração, etc;
  iv) **Mecânica**: estática, cinemática, dinâmica, cálculo estrutural, etc.

Estudo dos vectores

- **Geométrico**:
  i) Vectores – *segmentos orientados* definidos pelo *ponto de aplicação*, *direcção*, *sentido* e *norma*;
  ii) Operações – definidas e estudadas usando métodos geométricos (*regra do paralelogramo*, ou *do triângulo*, por exemplo).

- **Analítico**:
  i) Vectores – representados a partir das suas *coordenadas* (escalares reais);
  ii) Operações – definidas a partir das coordenadas dos vectores e estudadas recorrendo às propriedades dos escalares reais.

- **Axiomático**:
  i) Vectores e operações – conceitos abstractos que devem satisfazer um certo conjunto de axiomas pré-definidos (noção de *Espaço Linear ou Vectorial*);
  ii) Propriedades das operações – derivadas a partir dos axiomas referidos.

Representação matemática (coordenadas)

- Espaço unidimensional, $\mathbb{R}$

$$\vec{a} = \boldsymbol{a} = (a)$$

Vector posição do ponto *A*: $A = \overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a)$

- Espaço bidimensional, $\mathbb{R}^2$

  Referencial *ortonormal* (*ortogonal* e *monométrico*) *Oxy*

$$\vec{a} = \boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$$

a_1: *abcissa*
a_2: *ordenada*

Vector posição do ponto *A*: $A = \overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2)$

- Espaço tridimensional, $\mathbb{R}^3$

  Referencial *ortonormal* (*ortogonal* e *monométrico*) e *directo* (ou *positivo*) *Oxyz*

$$\vec{a} = \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

a_1: *abcissa*
a_2: *ordenada*
a_3: *cota*

Vector posição do ponto *A*: $A = \overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

- Espaço *n*-dimensional, $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

Vector posição do ponto *A*: $A = \overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$

Igualdade de vectores

Definição: Os vectores de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \text{ e } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$$

são *iguais*, se e só se possuírem as mesmas coordenadas, isto é,

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 = b_2 \ \wedge \ a_3 = b_3 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ a_n = b_n$$

ou

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_i = b_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Adição de vectores

Definição: Sejam os vectores de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \text{ e } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$$

O *vector adição* de $\vec{a}$ com $\vec{b}$ é o vector $\vec{a} + \vec{b}$, cujas coordenadas são dadas por

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n)$$

- A definição apresentada satisfaz a *regra do paralelogramo*, ou *do triângulo*, para a adição de vectores em $\mathbb{R}^2$.

Propriedades: Sejam os vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ de $\mathbb{R}^n$

a) Propriedade *comutativa*: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

b) Propriedade *associativa*: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$

c) Existência de *elemento zero*: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

d) Existência de *elemento simétrico*, ou *oposto*: $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

- Em $\mathbb{R}^n$, o *elemento zero* é o *vector nulo*:

$$\vec{0} = \mathbf{0} = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

- Em $\mathbb{R}^n$, o *vector simétrico*, ou *oposto*, de $\vec{x}$ é o vector:

$$-\vec{x} = (-x_1, -x_2, -x_3, \ldots, -x_n)$$

- A *subtração* de vectores pode ser encarada como um caso particular da adição; sendo $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores de $\mathbb{R}^n$, o *vector subtração* $\vec{x} - \vec{y}$ é o resultado da adição do vector $\vec{x}$ com o *vector simétrico*, ou *oposto*, de $\vec{y}$, ou seja,

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \ldots, x_n - y_n)$$

Multiplicação por escalar

Definição: Seja o vector de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

O *vector multiplicação* de $\vec{a}$ *pelo escalar* $k \in \mathbb{R}$ é o vector $k\vec{a}$, cujas coordenadas são dadas por

$$k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3, \ldots, ka_n)$$

dizendo-se, neste caso, que $\vec{a}$ e $k\vec{a}$ são *vectores múltiplos*.

- Em $\mathbb{R}^n$, o *vector simétrico*, ou *oposto*, de $\vec{x}$ pode ser expresso sob a forma:

$$-\vec{x} = (-1)\vec{x} = (-x_1, -x_2, -x_3, \ldots, -x_n)$$

Propriedades: Sejam os vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$ e os escalares $k, h \in \mathbb{R}$:

a) Propriedade *associativa*: $k(h\vec{x}) = (kh)\vec{x} = h(k\vec{x})$

b) Propriedade *distributiva em relação à adição de vectores*:

$$k(\vec{x} + \vec{y}) = k\vec{x} + k\vec{y}$$

c) Propriedade *distributiva em relação à adição de escalares*:

$$(k + h)\vec{x} = k\vec{x} + h\vec{x}$$

d) Existência de *elemento unidade*: $1\vec{x} = \vec{x}$

Definição: **Paralelismo ou colinearidade entre vectores**

Dois vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$ dizem-se *paralelos*, ou *colineares*, sendo usada a notação $\vec{x} \parallel \vec{y}$ para exprimir tal condição, se e só se existir um escalar não nulo *k*, tal que $\vec{y} = k\vec{x}$, isto é,

$$\vec{x} \parallel \vec{y} \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;:\; \vec{y} = k\vec{x}$$

Se $k > 0$ os vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ têm o mesmo sentido, se $k < 0$ possuem sentidos opostos.

Vectores coordenados unitários – $\mathbb{R}^2$

- São os vectores $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$:

  i) O vector $\vec{i} = (1,0)$ define o eixo dos *xx*;

  ii) O vector $\vec{j} = (0,1)$ define o eixo dos *yy*;

  iii) Definem o *referencial ortonormal Oxy* ou $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$;

  iv) Possuem *norma unitária* (são *versores*);

  v) São *vectores ortogonais*;

  vi) São *vectores ortonormados*.

- Relativamente a qualquer vector $\vec{a} = (a_1,a_2)$ de $\mathbb{R}^2$:

  i) Pode escrever-se como *combinação linear* dos versores $\vec{i}$ e $\vec{j}$

  $$\vec{a} = (a_1,a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

  ii) Os *escalares* a_1 e a_2 da combinação linear *são únicos*;

  iii) O vector $\vec{a}$ é *gerado de forma única pelos* versores $\vec{i}$ e $\vec{j}$;

  iv) Os versores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ *geram de forma única* qualquer vector *de* $\mathbb{R}^2$;

  v) O conjunto $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$ é uma *base* para os vectores *de* $\mathbb{R}^2$;

  vi) O conjunto $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$ é uma *base ortonormal* para $\mathbb{R}^2$;

  vii) O conjunto $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$ é a *base canónica* (ou *natural*) para $\mathbb{R}^2$.

- Relativamente ao vector de $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

i) O vector $a_1\vec{i}$ é a 1ª *componente* (*na direcção de* $\vec{i}$ ou *na direcção do eixo dos xx*) do vector $\vec{a}$;

ii) O vector $a_2\vec{j}$ é a 2ª *componente* (*na direcção* de $\vec{j}$ ou *na direcção do eixo dos yy*) do vector $\vec{a}$;

iii) Os escalares a_1 e a_2 da *combinação linear* são as *coordenadas* do vector $\vec{a}$ em relação à *base canónica* $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ ou em relação ao *referencial ortonormal Oxy* ou $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$;

iv) Os escalares a_1 e a_2 são as *coordenadas naturais* de $\vec{a}$.

Vectores coordenados unitários – $\mathbb{R}^3$

- São os vectores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$:

  i) O vector $\vec{i} = (1,0,0)$ define o eixo dos *xx*;

  ii) O vector $\vec{j} = (0,1,0)$ define o eixo dos *yy*;

  iii) O vector $\vec{k} = (0,0,1)$ define o eixo dos *zz*;

  iv) Definem o *referencial ortonormal Oxyz* ou $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$;

  v) Possuem *norma unitária* (são *versores*);

  vi) São *vectores ortogonais*;

  vii) São *vectores ortonormados*.

- Relativamente a qualquer vector $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

  i) Pode escrever-se como *combinação linear* dos versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$

  $$\vec{a} = (a_1,a_2,a_3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

  ii) Os *escalares* a_1, a_2 e a_3 da combinação linear *são únicos*;

  iii) O vector $\vec{a}$ é *gerado de forma única pelos* versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$;

  iv) Os versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ *geram de forma única* qualquer vector *de* $\mathbb{R}^3$;

  v) O conjunto $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ é uma *base* para os vectores *de* $\mathbb{R}^3$;

  vi) O conjunto $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ é uma *base ortonormal* para $\mathbb{R}^3$;

  vii) O conjunto $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ é a *base canónica* (ou *natural*) para $\mathbb{R}^3$.

- Relativamente ao vector de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

i) O vector $a_1\vec{i}$ é a 1ª *componente* (*na direcção de* $\vec{i}$ ou *na direcção do eixo dos xx*) do vector $\vec{a}$;

ii) O vector $a_2\vec{j}$ é a 2ª *componente* (*na direcção* de $\vec{j}$ ou *na direcção do eixo dos yy*) do vector $\vec{a}$;

iii) O vector $a_3\vec{k}$ é a 3ª *componente* (*na direcção* de $\vec{k}$ ou *na direcção do eixo dos zz*) do vector $\vec{a}$;

iv) Os escalares a_1, a_2 e a_3 da *combinação linear* são as *coordenadas* do vector $\vec{a}$ em relação à *base canónica* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ou em relação ao *referencial ortonormal Oxyz* ou $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;

v) Os escalares a_1, a_2 e a_3 são as *coordenadas naturais* de $\vec{a}$.

Vectores coordenados unitários – $\mathbb{R}^n$

- São os vectores

$\vec{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $\vec{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$

i) Possuem *norma unitária* (são *versores*);

ii) São *vectores ortogonais*;

iii) São *vectores ortonormados*.

- Relativamente a qualquer vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

i) Pode ser escrito como *combinação linear* dos vectores coordenados unitários

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + \ldots + a_n\vec{e}_n$$

ii) Os *escalares* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ da combinação linear *são únicos*;

iii) O vector $\vec{a}$ é *gerado de forma única pelos* vectores coordenados unitários;

iv) Os vectores coordenados unitários *geram de forma única* qualquer vector *de* $\mathbb{R}^n$;

v) O conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\}$ é uma *base* para os vectores *de* $\mathbb{R}^n$;

vi) O conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\}$ é uma *base ortonormal* para $\mathbb{R}^n$;

vii) O conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\}$ é a *base canónica* (ou *natural*) para $\mathbb{R}^n$.

- Relativamente ao vector de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + \ldots + a_n\vec{e}_n$$

i) O vector $a_1\vec{e}_1$ é a *componente na direcção de* $\vec{e}_1$ do vector $\vec{a}$;

ii) O vector $a_2\vec{e}_2$ é a *componente na direcção* de $\vec{e}_2$ do vector $\vec{a}$;

iii) O vector $a_3\vec{e}_3$ é a *componente na direcção* de $\vec{e}_3$ do vector $\vec{a}$;

iv) O vector $a_n\vec{e}_n$ é a *componente na direcção* de $\vec{e}_n$ do vector $\vec{a}$;

v) Os escalares $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ da *combinação linear* são as *coordenadas* do vector $\vec{a}$ em relação à *base canónica* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\}$;

vi) Os escalares $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são as *coordenadas naturais* de $\vec{a}$.