Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

Sei $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{E}$ Ereignisse. Dann gilt:

(a) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.

(b) $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.

(c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. (Siebformel)

Aufgabe 6.2

Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum und eine Wahrscheinlichkeitsfunktion für das folgende Zufallsexperiment an: Es werden zwei ununterscheidbare faire Würfel gleichzeitig geworfen.

Aufgabe 6.3

Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Multiplikationssatzes von Folie 117: Sind A, B, C Ereignisse (eines vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsraums) mit $P(B \cap C) > 0$, so gilt:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C) \cdot P(B|C) \cdot P(C).$$

Überlegen Sie sich, wie sich dieser Sachverhalt in einem Baumdiagramm ausdrückt.

Anmerkung: *Allgemeiner gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$:*
$P(A_n \cap \cdots \cap A_1) = P(A_n|A_{n-1} \cap \cdots \cap A_1) \cdot P(A_{n-1}|A_{n-2} \cap \cdots \cap A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$.

Aufgabe 6.4

In einem Lotterietopf befinden sich 20 Lose, darunter nur ein Gewinnlos. 5 Schüler einer Schulklasse dürfen jeweils ein Los ziehen. Die Lehrerin schlägt vor, dass die Schüler in alphabetischer Reihenfolge ziehen. Der Schüler Zimmermann beschwert sich, da er als letzter zieht und der Meinung ist, erheblich schlechtere Gewinnchancen zu haben als die Schüler, die vor ihm ziehen. Als Begründung gibt er an, dass 4 Schüler vor ihm bereits die Chance haben, das Gewinnlos zu ziehen, bevor er dran ist.

Hat Zimmermann recht? Berechnen Sie dazu die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person beim k-ten Zug das Gewinnlos erhält für $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aufgabe 6.5

In einer Kiste befinden sich 10 Werkstücke, von denen 3 fehlerhaft sind. Es werden nacheinander zwei Werkstücke folgendermaßen der Kiste entnommen:

Zunächst wird das erste Werkstück zufällig entnommen. Dabei wird aber nicht festgestellt oder bekanntgegeben, ob das erste Stück fehlerhaft ist oder nicht. Danach wird (ohne Zurücklegen des ersten entnommenen Werkstücks) zufällig ein zweites Stück ausgewählt und untersucht, ob es fehlerhaft ist.

(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies der Fall?

(2) Ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn man nach Entnehmen des ersten Werkstücks zunächst prüft, ob dieses fehlerhaft ist?

Aufgabe 6.6

Von 100 Münzen sind mindestens 99 fair (Kopf/Zahl) und eine Münze ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 unfair (Kopf auf beiden Seiten). Von den 100 Münzen wird eine zufällig ausgewählt und 6-mal geworfen. Alle 6 Würfe ergeben Kopf.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine der 100 Münzen unfair?

Aufgabe 6.7

An einer bestimmten Krankheit leiden 2% der Menschen. Ein Diagnosetest habe die Eigenschaft, dass er bei Kranken mit Wahrscheinlichkeit 99% und bei Gesunden mit 95% die richtige Diagnose liefert. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person

(a) bei der die Krankheit diagnostiziert wird, auch tatsächlich an der Krankheit leidet,

(b) bei der die Krankheit nicht diagnostiziert wird, auch tatsächlich nicht an der Krankheit leidet?

Aufgabe 6.8

(a) Aus einer Urne mit 5 weißen und 6 roten Kugeln werden 3 Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich für die Ereignisse?

  (i) A: 3 weiße Kugeln

  (ii) B: 2 weiße und 1 rote Kugel

(b) Eine Warensendung vom Umfang 20 Stück enthalte 4 Stück Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer Zufallsstichprobe vom Umfang 4 höchstens 1 Stück Ausschuss befindet?