

# 1 Лабораторная работа №1

## 1.1 Вероятностное пространство, формула Байеса

Выполнил: Диденко Андрей

### Задача 1

Определить (с обоснованием), зависимы или независимы следующие события:

(a) Несовместные события.

Пусть  $A \cap B = \emptyset$ . Тогда  $P(A \cap B) = 0$ .

Для независимости требуется  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

Если  $P(A) > 0$  и  $P(B) > 0$ , то  $P(A)P(B) > 0 \neq 0$ .

Значит, равенство не выполняется  $\Rightarrow$  события **зависимы**.

(Если одно из событий имеет вероятность 0, то равенство может выполняться, но это тривиальный случай.)

(b) События, образующие  $\sigma$ -алгебру  $\Sigma$ .

$\sigma$ -алгебра — это семейство подмножеств  $\Omega$ , замкнутое относительно объединений, пересечений и дополнений.

Она определяет *структуру* событий, но *не их вероятности*.

Независимость:  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  — это условие на вероятности.

Пример:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $P(\omega) = \frac{1}{4}$ .

$A = \{1, 2\}$ ,  $\sigma$ -алгебра, порождённая  $A$ :  $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$ .

Пусть  $B = \{3, 4\}$ . Тогда  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A \cap B) = 0 \neq \frac{1}{4}$ .

Значит,  $A$  и  $B$  — зависимы, хотя лежат в одной  $\sigma$ -алгебре.

Вывод: события из  $\sigma$ -алгебры **не обязаны быть независимыми**.

(c) События с одинаковой вероятностью.

$P(A) = P(B)$  — это только про числа, ничего не говорит о  $P(A \cap B)$ .

Пример 1 (независимы): два броска монеты,  $A$  — орёл на первой,  $B$  — орёл на второй,  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$ .

Пример 2 (зависимы):  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ,  $P = \frac{1}{3}$ ,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ ,  $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$ , но  $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \neq \frac{4}{9}$ .

Вывод: события с равной вероятностью **могут быть как зависимыми, так и независимыми**.

### Задача 2

Два независимых броска симметричной монеты.

Обозначим: **O** — орёл, **P** — решка.

Исходы:  $\Omega = \{OO, OP, PO, PP\}$ ,  $P(\omega) = \frac{1}{4}$ .

События:

- $A = \{OO, OP\}$  — орёл на первой монете;
- $B = \{PO, PP\}$  — решка на первой монете;

- $C = \{00, P0\}$  — орёл на второй монете;
- $D = \{0P, PP\}$  — решка на второй монете;
- $E = \{00, 0P, P0\}$  — хотя бы один орёл;
- $F = \{0P, P0, PP\}$  — хотя бы одна решка;
- $G = \{0P, P0\}$  — ровно один орёл и одна решка;
- $H = \{PP\}$  — ни одного орла;
- $K = \{00\}$  — два орла.

(a)  $A + C = A \cup C = \{00, 0P\} \cup \{00, P0\} = \{00, 0P, P0\} = E$ .  
 $\Rightarrow A + C = E$ .

(b)  $AC = A \cap C = \{00, 0P\} \cap \{00, P0\} = \{00\} = K$ .  
 $\Rightarrow AC = K$ .

(c)  $EF = E \cap F = \{00, 0P, P0\} \cap \{0P, P0, PP\} = \{0P, P0\} = G$ .  
 $\Rightarrow EF = G$ .

(d)  $G + E = G \cup E$ . Так как  $G \subset E$ , то  $G \cup E = E$ .  
 $\Rightarrow G + E = E$ .

(e)  $GE = G \cap E = G$  (поскольку  $G \subset E$ ).  
 $\Rightarrow GE = G$ .

(f)  $BD = B \cap D = \{P0, PP\} \cap \{0P, PP\} = \{PP\} = H$ .  
 $\Rightarrow BD = H$ .

(g)  $E + K = E \cup K$ . Так как  $K \subset E$ , то  $E \cup K = E$ .  
 $\Rightarrow E + K = E$ .

### Задача 3

Мишень — круг  $360^\circ$ . Два непересекающихся сектора по  $20^\circ$ .

Общая закрашенная область:  $20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$ .

Попадание равновозможно по углу  $\Rightarrow$  вероятность пропорциональна доле угла.

$$P = \frac{40^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{9}.$$

### Задача 4

Времена прихода  $t_1, t_2 \in [0, 24]$  — независимы, равномерны.

Первый стоит 1 ч, второй — 2 ч.

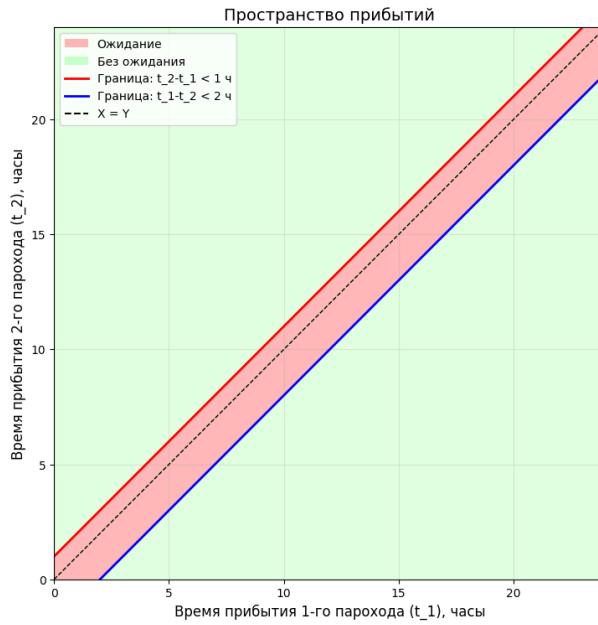
Случай 1:  $t_1 < t_2$  (первым приходит первый пароход).

Ожидание, если  $t_2 - t_1 < 1$ .

Случай 2:  $t_2 < t_1$  (первым приходит второй пароход).

Ожидание, если  $t_1 - t_2 < 2$ .

Пространство: квадрат  $[0, 24] \times [0, 24]$ , площадь  $24^2 = 576$ .  
Найдём площадь  $S$ , где  $-2 < t_2 - t_1 < 1$ .



Фиксируем  $t_1$ , найдём длину допустимого  $t_2 \in [0, 24]$ :

- Если  $0 \leq t_1 < 2$ :  $t_2 > t_1 - 2$  (но  $t_2 \geq 0$ )  $\Rightarrow t_2 \in [0, t_1 + 1]$ , длина =  $t_1 + 1$ .
- Если  $2 \leq t_1 \leq 23$ :  $t_2 \in (t_1 - 2, t_1 + 1) \cap [0, 24] = [t_1 - 2, t_1 + 1]$ , длина = 3.
- Если  $23 < t_1 \leq 24$ :  $t_2 < t_1 + 1$  (но  $t_2 \leq 24$ )  $\Rightarrow t_2 \in [t_1 - 2, 24]$ , длина =  $26 - t_1$ .

Площадь:

$$S = \int_0^2 (t_1 + 1) dt_1 + \int_2^{23} 3 dt_1 + \int_{23}^{24} (26 - t_1) dt_1.$$

$$\int_0^2 (t_1 + 1) dt_1 = \left[ \frac{t_1^2}{2} + t_1 \right]_0^2 = \frac{4}{2} + 2 = 4,$$

$$\int_2^{23} 3 dt_1 = 3 \cdot (23 - 2) = 63,$$

$$\int_{23}^{24} (26 - t_1) dt_1 = \left[ 26t_1 - \frac{t_1^2}{2} \right]_{23}^{24} = (624 - 288) - (598 - 264.5) = 336 - 333.5 = 2.5.$$

$$S = 4 + 63 + 2.5 = 69.5 = \frac{139}{2}.$$

Вероятность:

$$P = \frac{S}{576} = \frac{139/2}{576} = \frac{139}{1152}.$$

## Задача 5

$m$  снарядов попало в самолёт. Каждый независимо попадает: в часть 1 с  $p_1$ , в часть 2 с  $p_2$ , в часть 3 с  $p_3$ ,  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ .

Пусть  $X_1, X_2, X_3$  — число попаданий в части 1, 2, 3,  $X_1 + X_2 + X_3 = m$ .

Самолёт поражён ( $A$ ), если:

$$A = \{X_1 \geq 1\} \cup \{X_2 \geq 2\} \cup \{X_3 \geq 3\}.$$

Удобно считать дополнение:

$$A^c = \{X_1 = 0, X_2 \leq 1, X_3 \leq 2\}.$$

Тогда  $P(A | m) = 1 - P(A^c | m)$ .

Распределение  $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{Mult}(m; p_1, p_2, p_3)$ :

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3) = \frac{m!}{k_1!k_2!k_3!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}, \quad k_1 + k_2 + k_3 = m.$$

**При**  $m = 1$ : возможные исходы:  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ .

$A^c$ : только если  $X_1 = 0$  и  $X_2 \leq 1, X_3 \leq 2 \Rightarrow (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ .

Но  $A$  — при  $X_1 \geq 1 \Rightarrow$  только  $(1, 0, 0)$ .

$$P(A | 1) = p_1.$$

**При**  $m = 2$ :  $A^c — X_1 = 0, X_2 \leq 1, X_3 \leq 2, X_2 + X_3 = 2$ .

Возможные:  $(0, 1, 1), (0, 0, 2)$ . (При  $(0, 2, 0)$   $X_2 = 2$  — поражение, не в  $A^c$ .)

$$P(0, 1, 1) = \frac{2!}{0!1!1!} p_2 p_3 = 2p_2 p_3,$$

$$P(0, 0, 2) = \frac{2!}{0!0!2!} p_3^2 = p_3^2.$$

$$P(A^c | 2) = 2p_2 p_3 + p_3^2 \quad \Rightarrow \quad P(A | 2) = 1 - p_3^2 - 2p_2 p_3.$$

**При**  $m = 3$ :  $X_1 = 0, X_2 + X_3 = 3, X_2 \leq 1, X_3 \leq 2$ .

Если  $X_2 = 0$ , то  $X_3 = 3 > 2$  — нельзя.

Если  $X_2 = 1$ , то  $X_3 = 2$  — подходит.

Только  $(0, 1, 2)$ :

$$P(0, 1, 2) = \frac{3!}{0!1!2!} p_2 p_3^2 = 3p_2 p_3^2.$$

$$P(A | 3) = 1 - 3p_2 p_3^2.$$

**При**  $m = 4$ :  $X_1 = 0, X_2 + X_3 = 4, X_2 \leq 1, X_3 \leq 2$ .

Если  $X_2 = 0, X_3 = 4 > 2$ ; если  $X_2 = 1, X_3 = 3 > 2$ .

Нет подходящих  $\Rightarrow P(A^c | 4) = 0 \Rightarrow P(A | 4) = 1$ .

**Ответ:**

$$P(A | 1) = p_1, \quad P(A | 2) = 1 - p_3^2 - 2p_2 p_3, \quad P(A | 3) = 1 - 3p_2 p_3^2, \quad P(A | 4) = 1.$$

## 1.2 Случайный вектор и числовые характеристики

### Задача 1

Проверим, является ли функция

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)}$$

плотностью совместного распределения случайного вектора  $(\xi, \eta)$ .

Для этого нужно:

1.  $f(x, y) \geq 0$  для всех  $x, y$  — очевидно, экспонента и знаменатель положительны.
2.  $\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ .

Считаем двойной интеграл:

$$\iint f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)} dy dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|y|} dy.$$

Первый интеграл — арктангенс:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Второй — экспоненциальный:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|y|} dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-2y} dy = 2 \left[ -\frac{e^{-2y}}{2} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

Итого:

$$\iint f(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi} \cdot \pi \cdot 1 = 1.$$

Условия выполнены  $\Rightarrow$  да, это плотность.

### Задача 2

Дана таблица совместного распределения  $\xi$  и  $\eta$ :

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	1/3	1/6	0

(a) Маргинальные распределения.

Суммируем по строкам для  $P(\xi)$  и по столбцам для  $P(\eta)$ .

Для  $\xi = -1$ :

$$P(\xi = -1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{7}{24} = \frac{3}{24} + \frac{2}{24} + \frac{7}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Для  $\xi = 1$ :

$$P(\xi = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Для  $\eta = -1$ :

$$P(\eta = -1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{3}{24} + \frac{8}{24} = \frac{11}{24}.$$

Для  $\eta = 0$ :

$$P(\eta = 0) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{2}{24} + \frac{4}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Для  $\eta = 1$ :

$$P(\eta = 1) = \frac{7}{24} + 0 = \frac{7}{24}.$$

Проверка:  $\frac{11}{24} + \frac{1}{4} + \frac{7}{24} = \frac{11}{24} + \frac{6}{24} + \frac{7}{24} = \frac{24}{24} = 1$ .

Итог:

$$P(\xi = -1) = \frac{1}{2}, \quad P(\xi = 1) = \frac{1}{2},$$

$$P(\eta = -1) = \frac{11}{24}, \quad P(\eta = 0) = \frac{1}{4}, \quad P(\eta = 1) = \frac{7}{24}.$$

**(b)** Числовые характеристики вектора  $(\xi, \eta)$ .

Матожидания:

$$E\xi = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$E\eta = (-1) \cdot \frac{11}{24} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{7}{24} = \frac{-11+7}{24} = -\frac{4}{24} = -\frac{1}{6}.$$

Дисперсии и ковариация через совместные вероятности:

$$E\xi^2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow D\xi = 1 - 0^2 = 1,$$

$$E\eta^2 = 1 \cdot \frac{11}{24} + 0 + 1 \cdot \frac{7}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \Rightarrow D\eta = \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{36} = \frac{27}{36} - \frac{1}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18},$$

$$E(\xi\eta) = \sum x_i y_j P(\xi = x_i, \eta = y_j).$$

$$E(\xi\eta) = (-1)(-1) \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot 0 \cdot \frac{1}{12} + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{7}{24} + 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 1 \cdot 0 = \frac{1}{8} - \frac{7}{24} - \frac{1}{3}.$$

$$E(\xi\eta) = \frac{3}{24} - \frac{7}{24} - \frac{8}{24} = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2}.$$

Ковариация:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta = -\frac{1}{2} - 0 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Корреляция:

$$\rho = \frac{\text{cov}}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{-1/2}{\sqrt{1 \cdot 13/18}} = \frac{-1/2}{\sqrt{13/18}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{18}{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Матрицы:

$$E \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/6 \end{pmatrix},$$

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} D\xi & \text{cov}(\xi, \eta) \\ \text{cov}(\xi, \eta) & D\eta \end{pmatrix}$$

$$\text{Corr}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cov} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 13/18 \end{pmatrix},$$

$$\text{Corr} = \begin{pmatrix} 1 & -3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 1 \end{pmatrix}.$$

**(c)** Независимость и некоррелированность.

Проверяем независимость:  $P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$ ?

Возьмём  $\xi = -1$ ,  $\eta = -1$ :

$$P(-1, -1) = \frac{1}{8}, \quad P(\xi = -1)P(\eta = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{24} = \frac{11}{48} \neq \frac{1}{8} = \frac{6}{48}.$$

Не равно  $\Rightarrow$  **зависимы**.

Некоррелированность:  $\text{cov} \neq 0 \Rightarrow$  **коррелированы**.

### Задача 3

Два одинаковых тетраэдра, грани 1,2,3,4.  $\xi_1, \xi_2$  — выпавшие числа.

Определяем:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta = \begin{cases} 1, & \xi_1 : \xi_2 \quad \vee \quad \xi_2 : \xi_1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**(a)** Таблица совместного распределения:

Сначала перечислим все исходы  $(\xi_1, \xi_2)$  и вычислим  $(\xi, \eta)$ :

$\xi_1 \setminus \xi_2$	1	2	3	4
1	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)
2	(3,1)	(4,1)	(5,0)	(6,1)
3	(4,1)	(5,0)	(6,1)	(7,0)
4	(5,1)	(6,1)	(7,0)	(8,1)

Теперь составим таблицу вероятностей по  $\xi$  и  $\eta$ :

$\xi \setminus \eta$	0	1	$\sum$
2	0	1/16	1/16
3	0	2/16	2/16
4	0	3/16	3/16
5	2/16	2/16	4/16
6	0	3/16	3/16
7	2/16	0	2/16
8	0	1/16	1/16
$\sum$	4/16	12/16	1

**(b)** Маргинальные распределения

$$P_\xi(\xi) = \begin{cases} 2 : 1/16, & 3 : 2/16, \\ 4 : 3/16, & 5 : 4/16, \\ 6 : 3/16, & 7 : 2/16, \\ 8 : 1/16 & \end{cases}$$

$$P_\eta(\eta) = \begin{cases} 0 : 4/16 = 1/4, & 1 : 12/16 = 3/4 \end{cases}$$

(c) Числовые характеристики:

$$E\xi = 5, \quad E\eta = \frac{3}{4}, \quad D\xi = \frac{5}{2}, \quad D\eta = \frac{3}{16},$$

$$E(\xi\eta) = 3.5, \quad \text{cov} = -\frac{1}{4}, \quad \rho = -\sqrt{\frac{2}{15}}.$$

Матрицы:

$$E \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \quad \text{Cov} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/4 \\ -1/4 & 3/16 \end{pmatrix}, \quad \text{Corr} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2/15} \\ -\sqrt{2/15} & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Независимость и некоррелированность

$P(\xi = 5, \eta = 1) = \frac{1}{8} \neq \frac{3}{16} = P(\xi = 5)P(\eta = 1) \Rightarrow \text{зависимы}.$   
 $\text{cov} \neq 0 \Rightarrow \text{коррелированы}.$

## Задача 4

$\xi \sim U[-\pi, \pi]$ ,  $\eta_1 = \cos \xi$ ,  $\eta_2 = \sin \xi$ . Вектор:  $(\xi, \eta_1, \eta_2)$ .

Плотность  $\xi$ :  $f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}$  при  $x \in [-\pi, \pi]$ .

(a) Характеристики для вектора  $(\xi, \eta_1, \eta_2)$ .

$$E\xi = \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \frac{1}{2\pi} dx = 0.$$

$$E\eta_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{2\pi} [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$E\eta_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \frac{1}{2\pi} dx = -\frac{1}{2\pi} [\cos x]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$E\xi^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}, \quad D\xi = \frac{\pi^2}{3}.$$

$$E\eta_1^2 = \int \cos^2 x \cdot \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}. \quad D\eta_1 = 1/2.$$

Аналогично  $D\eta_2 = 1/2$ .

Ковариации:

$$\text{cov}(\xi, \eta_1) = \int x \cos x \cdot \frac{1}{2\pi} dx = 0 \text{ (нечётная функция)},$$

$$\text{cov}(\xi, \eta_2) = \int x \sin x \cdot \frac{1}{2\pi} dx = 2 \int_0^\pi x \sin x \cdot \frac{1}{2\pi} dx = 1 \text{ (чётная)},$$

$$\text{cov}(\eta_1, \eta_2) = \int \cos x \sin x \cdot \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{4\pi} \int \sin 2x dx = 0.$$

Корреляции:

$$\rho(\xi, \eta_2) = \frac{1}{\sqrt{(\pi^2/3) \cdot (1/2)}} = \frac{1}{\pi/\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}.$$

Остальные корреляции равны нулю.

Матрицы:

$$E \begin{pmatrix} \xi \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Cov}(\xi, \eta_1, \eta_2) = \begin{pmatrix} \pi^2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Corr}(\xi, \eta_1, \eta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{\pi} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{\pi} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Независимость и некоррелированность.

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$$

Это функциональная зависимость  $\Rightarrow \eta_1$  и  $\eta_2$  не могут быть независимыми.  
 $\Rightarrow$  **зависимы**.

Между  $\eta_1$  и  $\eta_2$  ковариация равна 0, то есть они **некоррелированы**.

## Задача 5

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — независимые случайные величины, причём

$$\xi \sim \text{Exp}(2), \quad \eta \sim \text{U}[0, 1].$$

Найти плотность распределения случайной величины

$$\zeta = \xi + \eta.$$

Плотности исходных величин имеют вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f_\eta(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как  $\xi$  и  $\eta$  независимы, плотность суммы определяется свёрткой:

$$f_\zeta(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(t) f_\eta(x-t) dt.$$

Плотность  $f_\eta(x-t)$  отлична от нуля, если

$$0 \leq x-t \leq 1 \implies x-1 \leq t \leq x,$$

а  $f_\xi(t) \neq 0$  только при  $t \geq 0$ . Значит,

$$\max(0, x-1) \leq t \leq x.$$

Рассмотрим случаи.

1.  $0 \leq x \leq 1$

Тогда пределы интегрирования:  $0 \leq t \leq x$ .

$$f_\zeta(x) = \int_0^x 2e^{-2t} dt = [-e^{-2t}]_0^x = 1 - e^{-2x}.$$

2.  $x > 1$

Тогда пределы:  $x-1 \leq t \leq x$ .

$$f_\zeta(x) = \int_{x-1}^x 2e^{-2t} dt = [-e^{-2t}]_{x-1}^x = e^{-2(x-1)} - e^{-2x} = (e^2 - 1)e^{-2x}.$$

3.  $x < 0$

Очевидно,  $f_\zeta(x) = 0$ .

Ответ:

$$f_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-2x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ (e^2 - 1)e^{-2x}, & x > 1. \end{cases}$$