炫酷反演魔术

VFleaKing

ICPC WC 2014 Day 7

刚才的标题是唬人的。。。

1 一道经典题

我们先说点水爆了的内容吧！说从前有 n 个人，编号为 $1, \dots, n$。这 n 个人站成一排，编号为 i 的人不能站在第 i 个。求方案数。$n \le 10^5$

1.1 小学生的容斥

作为小学生，我们只会算 3 个人！

考虑随便站，一共 $3!$ 种站法。然后减去 1 号站对了的站法 $2!$ 然后减去 2 号站对了的站法 $2!$ 然后减去 3 号站对了的站法 $2!$ 然后加上 $1, 2$ 号站对了的站法 $1!$ 然后加上 $2, 3$ 号站对了的站法 $1!$ 然后加上 $3, 1$ 号站对了的站法 $1!$ 然后减去都站对了的站法 $1!$ 于是得到答案是 2。

1.2 中学生的容斥

作为中学生，我们可以发现刚才的过程是：容斥斥斥容容容斥。注意容斥的系数一定是正负一。选若干个人我们显然可以用组合数。大胆猜想小 (bu) 心 (yong) 证明之后，对于一般的 n，我们可以得到：

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! \tag{1}$$

1.3 容斥的幕后

为啥恰好是 $+1$ 或者 -1？原理：考虑一个恰有 m 个人站对了的方案（$m \ge 1$），那么在考虑 0 到 $m-1$ 个人的时候，会一不小心把这组方案算这么多次：

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} && (2) \\ = & \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} - (-1)^m && (3) \\ = & (1 + (-1))^m - (-1)^m && (4) \\ = & -(-1)^m && (5) \end{aligned}$$

既然是 $-(-1)^m$，那就强行加回来！于是有 m 个人站对了的方案就全被消了。

1.4　另一个角度

我们证明的过程中，其实主要就是用了这货：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0 \tag{6}$$

请注意上面的式子有个例外，就是 $n=0$ 时左边为 1。正确的写法是：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=[n=0] \tag{7}$$

其中 $[P]$ 即 P 成立时为 1，不成立时为 0。

1.5　一点小性质

设 $f(n)$ 为 n 个人随便站的方案数。设 $g(n)$ 为 n 个人都站错的方案数。如果知道 g 的表达式，那么我们可以通过枚举有多少人站错了位置来得到 f：

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g(k) \tag{8}$$

等等我们好像是不知道 g 而知道 f 吧！

1.6　魔术

首先说一句废话：

$$g(n)=\sum_{m=0}^{n}[n-m=0]\binom{n}{m}g(m) \tag{9}$$

回忆我们刚才发现的性质：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=[n=0] \tag{10}$$

代进去：

$$g(n)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n-m}{k}\binom{n}{m}g(m) \tag{11}$$

注意 $\binom{n-m}{k}\binom{n}{m}$ 意思是在 n 个里面两个子集一个大小为 m 另一个大小为 k，所以和 $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}$ 其实是等价的。

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n-m}{k}\binom{n}{m}g(m) && (12)\\ &= \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}g(m) && (13)\end{aligned}$$

交换两个求和符号：

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{m=0}^{n-k}\binom{n-k}{m}g(m) \tag{14}$$

注意最右边的那个小朋友！其实就是 f！变成：

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(n-k) \tag{15}$$

把下标换得漂亮点：

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \tag{16}$$

2 二项式反演

所以我们就得到了酱紫的东西：（妈呀其实就是容斥）

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(k) \tag{17}$$

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \tag{18}$$

2.1 反演的定义

假设有两个函数 f 和 g 满足：

$$f(n) = \sum_{k} a_{n,k} g(k) \tag{19}$$

已知 g 求 f 当然很水啦，而已知 f 求 g 的过程就称为反演。在一般情况下，直接裸上求反演只能高斯消元解方程爽爽……利用一些特别的反演，可以给解题提供思路。即，可以用未知量表示已知量，然后解出来。

3 又一道经典题

求长度为 n 且仅包含小写英文字母且循环节长度恰为 n 的字符串的个数。循环节就是最短的复制若干遍后拼起来跟原串相等的字符串。$n \le 10^9$

一忘皆空！哈哈我假设你们都不会莫某某的反演了。设 $f(n)$ 表示长度为 n 的字符串的个数。设 $g(n)$ 表示长度为 n 的且周期为 n 的字符串的个数。而且：

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{20}$$

f 显然好求，他就是 26^n。看起来如果这里有个反演就爽了。

3.1 魔术准备

回忆二项式反演时我们干了什么。找到了一个 if 语句：

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = [n = 0] \tag{21}$$

说了一句废话：

$$g(n) = \sum_{m=0}^{n} [n - m = 0] \binom{n}{m} g(m) \tag{22}$$

然后带进去搞搞居然就凑出来了个 f。

3.2 魔术

我们如法炮制。由于现在是各种整除，所以我们可以利用两数之比为 1 来判定是否等于 n。我们设函数 $\mu(n)$ 满足：

$$\sum_{d|n}\mu(d) = [n = 1] \tag{23}$$

可以知道 $\mu(\prod_p p^\alpha) = \prod_p[\alpha = 1](-1)$ （为啥是这个式子以后再侃 = =）接下来说一句废话

$$g(n) = \sum_{m|n}[\frac{n}{m} = 1]g(m) \tag{24}$$

代进去！

$$g(n) = \sum_{m|n}\sum_{d|\frac{n}{m}}\mu(d)g(m) \tag{25}$$

注意 $d \mid \frac{n}{m}$ 其实就是 $md \mid n$，所以跟 $m \mid \frac{n}{d}$ 等价。似曾相识，对不？交换两个求和符号：

$$g(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\sum_{m|\frac{n}{d}}g(m) \tag{26}$$

f 君好久不见。

$$g(n) = \sum_{d|n}\mu(d)f(\frac{n}{d}) \tag{27}$$

把下标换得漂亮点：

$$g(n) = \sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})f(d) \tag{28}$$

4 莫比乌斯反演

所以我们就得到了酱紫的东西:（妈呀其实这也是容斥）

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{29}$$

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f(d) \tag{30}$$

4.1 魔术幕后

首先要有一个性质，比如这样:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = [n = 1] \tag{31}$$

但是你会发现我们其实真正用的是这个:

$$[m \mid n] \sum_{d|\frac{n}{m}} \mu(d) = [\frac{n}{m} = 1] = [n = m] \tag{32}$$

令 $c = md$ 左边可以写成这样:

$$\sum_{c|n} [m \mid c] \mu(\frac{c}{m}) \tag{33}$$

4.2 矩阵形式

令 $A_{c,n} = [c \mid n]$，$B_{m,c} = [m \mid c]\mu(\frac{c}{m})$ 刚才的结论就是 $BA = I$ 刚才解 $Ax = b$ 的推导过程就是:

$$x = Ix \tag{34}$$

$$x = (BA)x \tag{35}$$

$$x = B(Ax) \tag{36}$$

$$x = Bb \tag{37}$$

所以瞬间这个魔术就无聊了。找那个神奇的“性质”难度等同于找逆矩阵。

4.3 下三角矩阵

= =……我还是得说几句。刚才我们看到的要反演原式……

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(k) \tag{38}$$

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{39}$$

他们都有一个共同特点，就是 $f(n)$ 所依赖的 $g(k)$ 都满足 $k \leq n$。妈呀这不就是下三角矩阵？那逆矩阵还用我来说?

4.4 魔术

现在我们来推 $k \le n$ 的一般情况，即：

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} g(k) \tag{40}$$

不过你已经知道对手的底牌了，其实就没什么意思了。由于是线性变换，所以我们就是要算每个 $f(m)$ 对答案的贡献。所以对于每一个 m 我们求出当 $f(m) = 1$ 而其它的 f 都是 0 的情况下的 g 就行了，用 $\mu(n, m)$ 来表示这个解。那么一定满足性质：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} \mu(k, m) = [n = m] \tag{41}$$

这个可以递推求出。然后我们不用废话了，答案很明显了：

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(n, k) f(k) \tag{42}$$

魔术变完了！

成功骗过若干位小朋友。这个魔术没有任何实际效果，因为这个倒霉的 μ 啊就是逆矩阵，刚才推了半天等于白推。数论里的 μ 能求出表达式也不是每个 μ 都能搞的。假如你不能手推出 μ 的表达式，那么还不如 $O(n^2)$ 裸消元。曾经看见过“偏序集上的莫比乌斯函数”！但是对于一般情况感觉它设了个逆矩阵然后弃疗了？也可能是我读书少……T_T……弃疗吧……大概就这样了。

4.5 另一方向的莫比乌斯反演?

$$f(n) = \sum_{n|d} g(d) \tag{43}$$

$$g(n) = \text{萌萌哒} \tag{44}$$

问萌萌哒是什么?

$$\text{萌萌哒} = \sum_{n|d} \mu(\frac{d}{n}) f(d) \tag{45}$$

5 UOJ ROUND #5 C

令 $p = 998244353$（$7 \times 17 \times 2^{23} + 1$，一个质数）。给你整数 n, c, d。现在有整数 $x_1, \dots, x_n$ 和 $b_1, \dots, b_n$ 满足 $0 \le x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_n < p$，且对于 $1 \le i \le n$ 满足：

$$\sum_{j=1}^{n} \gcd(i,j)^c \cdot \operatorname{lcm}(i,j)^d \cdot x_j \equiv b_i \pmod p \tag{46}$$

有 q 个询问，每次给出 $b_1, \dots, b_n$，请你解出 $x_1, \dots, x_n$ 的值。$n \le 10^5, nq \le 3 \times 10^5$

首先学过小学奥数的我们知道：$\operatorname{lcm}(i,j) = \frac{ij}{\gcd(i.j)}$。所以这题其实是：

$$\sum_{j=1}^{n} \gcd(i,j)^{c-d} \cdot i^d \cdot j^d \cdot x_j = b_i \tag{47}$$

但是其实这种题都可做：

$$\sum_{j=1}^{n} f(\gcd(i,j)) \cdot g(i) \cdot h(j) \cdot x_j = b_i \tag{48}$$

其实关键的坑人的地方在于 $f(\gcd(i,j))$。假设我有一个函数 $f_r(n)$，满足 $f(n) = \sum_{d|n} f_r(d)$。知道 f 后 f_r 是很好搞的，只要莫比乌斯反演就行了。为什么要这样?因为我们知道如果 $d \mid \gcd(i,j)$ 那么肯定有 $d \mid i$ 且 $d \mid j$，反之亦然。这样就把讨厌的 gcd 给去掉了。所以我们可以写出这样的等式：

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{d} [d \mid i][d \mid j] \cdot f_r(d) \cdot g(i) \cdot h(j) \cdot x_j = b_i \tag{49}$$

接下来怎么办？好像并没有简化问题。我们老样子把两个求和符号反过来，得到：

$$\sum_{d} \sum_{j=1}^{n} [d \mid i][d \mid j] \cdot f_r(d) \cdot g(i) \cdot h(j) \cdot x_j = b_i \tag{50}$$

然后我们移一下项：

$$\sum_{d|i} f_r(d) \sum_{j=1}^{n} [d \mid j] \cdot h(j) \cdot x_j = b_i / g(i) \tag{51}$$

仔细观察，发现 $\sum_{j=1}^{n} [d \mid j] \cdot h(j) \cdot x_j$ 的意思是把所有 j 是 d 的倍数的 $h(j) \cdot x_j$ 加起来。反正这个只跟 d 的值有关，我们记为 z_d。于是我们得到：

$$\sum_{d|i} f_r(d) z_d = b_i / g(i) \tag{52}$$

这个式子的意思是，对于每个 i，把所有 d 是 i 的约数的 $f_r(d) z_d$ 加起来，得到结果 $b_i/g(i)$。现在我们知道右边，想求左边，莫比乌斯反演就行了。

这样得到就得到了 $f_r(d) z_d$。想得到 z_d？由于 $f_r(d)$ 已经求出，所以除一下就行。但是 z_d 并不是最终答案。回忆 z_d 的表达式：

$$z_d = \sum_{j=1}^{n} [d \mid j] \cdot h(j) \cdot x_j \tag{53}$$

现在知道左边，想求右边，还是莫比乌斯反演。嗯，现在我们知道了 $h(j) x_j$，那么 x_j 就好求了。小细节：由于中间过程涉及了除法，所以就会带来无解和多解的情况，这个自己玩吧。

咳，预备，起！这题其实就是把 b 除以 $g(i)$ 然后莫比乌斯反演，然后除以 f 的莫比乌斯反演，再进行莫比乌斯反演，再除以 $h(j)$，三个莫比乌斯反演掷地有声。

5.1 题外话

这题其实就是求了 $A_{i,j} = f(\gcd(i,j)) \cdot g(i) \cdot h(j)$ 的逆矩阵。见过有人对一个数组求它的莫比乌斯反演是：筛法筛素数！筛法同时求莫比乌斯函数！$O(\sqrt{n})$ 枚举约数，狄利克雷卷积！丢代码跑：

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{54}$$

```
for (int i = 1; i <= n; i++)
        g[i] = f[i];
for (int i = 1; i <= n; i++)
        for (int j = i + i; j <= n; j += i)
                g[j] -= g[i];
```

6 又一道经典题

有两个长度为 2^n 的数列 $a_0, \ldots, a_{2^n-1}$，$b_0, \ldots, b_{2^n-1}$。求数列 c，其中

$$c_r = \sum_{p,q} [p \text{ or } q = r] a_p b_q \tag{55}$$

$n \le 20$

显然我们把下标看作集合为妙。下面不区分普通的数和集合。那么原式相当于 $p \cup q = r$ 的 p, q 给 r 做贡献。但是 $p \cup q = r$ 并不好处理。注意到 $[p \cup q \subseteq s] = [p \subseteq s][q \subseteq s]$，这样能把贡献拆开。我们对于一个数列 a 定义 a' 满足 $a'_s = \sum_{p \subseteq s} a_p$。

已知 a 求 a' 这个 $O(n2^n)$ DP 下就行对吧，其实就是个高维前缀和。

$$\begin{aligned} c'_r &= \sum_{p,q} [p \text{ or } q \subseteq r] a_p b_q & (56) \\ &= \sum_{p,q} [p \subseteq r][q \subseteq r] a_p b_q & (57) \\ &= \sum_{p} [p \subseteq r] a_p \sum_{q} [q \subseteq r] b_q & (58) \\ &= a'_r b'_r & (59) \end{aligned}$$

反演君我看见你了！现在已知 c' 要求 c。

其实这个很无脑啊，倒着写就行了。方便代码能力弱的选手：

```
for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int s = 0; s < (1 << n); s++)
                if (s >> i & 1)
                        f[s] += f[s ^ 1 << i];
```

无脑反着写：

```
for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int s = 0; s < (1 << n); s++)
                if (s >> i & 1)
                        f[s] -= f[s ^ 1 << i];
```

6.1 魔术

不过要是用于数学推导的话代码君是推不动滴。所以我们还是来按以前方法直接上吧。然后发现一个比较显然的性质：（妈呀其实就是二项式反演里的那个玩意儿）

$$\sum_{r \subseteq p} (-1)^{|r|} = [p = 0] \tag{60}$$

这里的 $|r|$ 表示集合的大小。然后像以前一样做：

$$\begin{aligned}
g(p) &= \sum_{q \subseteq p} [p-q=0] g(q) && (61)\\
&= \sum_{q \subseteq p} \sum_{r \subseteq p-q} (-1)^{|r|} g(q) && (62)\\
&= \sum_{r \subseteq p} (-1)^{|r|} \sum_{q \subseteq p-r} g(q) && (63)\\
&= \sum_{r \subseteq p} (-1)^{|r|} f(p-r) && (64)\\
&= \sum_{r \subseteq p} (-1)^{|p|-|r|} f(r) && (65)
\end{aligned}$$

7 子集反演

所以我们就得到了酱紫的东西：（妈呀就是裸容斥）

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T) \tag{66}$$

$$g(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f(T) \tag{67}$$

可以算 $r = p$ and q 和 $r = p$ or q 啦啦啦！莫比乌斯反演还能算 $r = \gcd(p, q)$ 和 $r = \ \mathrm{lcm}(p, q)$ 啦啦啦！

7.1 小练习：多重子集反演

多重子集即允许元素出现多次的集合。

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T) \tag{68}$$

$$g(S) = \text{沼跃鱼} \tag{69}$$

问沼跃鱼是什么？

定义 $\mu(S)$，S 包含重复元素则为 0，否则为 $(-1)^{|S|}$。（嘛。。。就是容斥时的系数）可以知道：

$$\sum_{T \subseteq S} \mu(T) = [S = 0] \tag{70}$$

于是：

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T) \tag{71}$$

$$g(S) = \sum_{T \subseteq S} \mu(S - T) f(T) \tag{72}$$

你会觉得非常似曾相识！一个数可以对应着一个多重子集，即它的素因数分解。所以以多重子集的角度来看，数论里的莫比乌斯函数简直显然得不能再显然了。

8 又一道经典题

有两个长度为 n 的数列 $a_0, \dots, a_{n-1}$，$b_0, \dots, b_{n-1}$。求数列 c，其中

$$c_r = \sum_{p,q} [(p+q) \bmod n = r] a_p b_q \tag{73}$$

n 是 2 的整数次幂，$n \le 2^{20}$。

数论中走街串巷杀题越货之必备良品——复数。设 ϵ 是单位根，即满足 $\epsilon^n = 1$ 的……那个长得很像单位的根，即 $e^{-\frac{2\pi i}{n}}$。显然：

$$\sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{vk} = \frac{\epsilon^{nvk} - 1}{\epsilon^{vk} - 1} = 0 \tag{74}$$

有什么问题？学过小学数学的我们知道，等比数列公比为 1 时要特判。看，if 来了：

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{vk} = [v \bmod n = 0] \tag{75}$$

8.1 魔术

注意到：

$$\begin{aligned} & [(p+q) \bmod n = r] && (76) \\ = \ & [(p+q-r) \bmod n = 0] && (77) \\ = \ & \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{(p+q-r)k} && (78) \\ = \ & \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{-rk} \epsilon^{pk} \epsilon^{qk} && (79) \end{aligned}$$

这三部分几乎是独立的！

$$\begin{aligned} c_r &= \sum_{p,q} [(p+q) \bmod n = r] a_p b_q && (80) \\ &= \sum_{p,q} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{-rk} \epsilon^{pk} \epsilon^{qk} a_p b_q && (81) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{-rk} \sum_{p,q} \epsilon^{pk} a_p \epsilon^{qk} b_q && (82) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{-rk} \sum_{p} \epsilon^{pk} a_p \sum_{q} \epsilon^{qk} b_q && (83) \\ & && (84) \end{aligned}$$

抓到你了！反演君！

8.2 离散傅里叶变换

所以我们就得到了酱紫的东西:

$$f_m = \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{mk} g_k \quad (85)$$

$$g_m = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{-mk} f_k \quad (86)$$

利用分治和单位根的小性质，这两个都是可以快速求的。

8.3 魔术幕后

看起来反演解决了一些在下标上的奇怪二元运算的卷积。

$$c_r = \sum_{p,q} [f(p,q) = r] a_p b_q \quad (87)$$

而我们反演的任务是，把 f 分成两个独立的部分。比如 $[d \mid gcd(i,j)] = [d \mid i][d \mid j]$。于是经过反演的处理后，通常是正变换一下，乘起来，再逆变换一下。

8.4 另一个方向的子集反演?

有两个长度为 2^n 的数列 $a_0, \dots, a_{2^n-1}$，$b_0, \dots, b_{2^n-1}$。求数列 c，其中

$$c_r = \sum_{p,q} [p \text{ and } q = r] a_p b_q \quad (88)$$

$n \le 20$

妈呀那你就把集合取反然后搞 or。然后就没有然后了。。。至少对于码代码来说这样就够了。如果要用于推导:

$$f(S) = \sum_{S \subseteq T} g(T) \quad (89)$$

$$g(S) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T|-|S|} f(T) \quad (90)$$

9 子集卷积

有两个长度为 2^n 的数列：$a_0, \dots, a_{2^n-1}$ 和 $b_0, \dots, b_{2^n-1}$。求数列 c，其中

$$c_r = \sum_{p \subseteq r} a_p b_{r-p} \tag{91}$$

要求 $O(n^2 2^n)$

$$\begin{aligned}
c_r &= \sum_{p,q \subseteq r} [p \text{ and } q = 0][p \text{ or } q = r] a_p b_q & (92)\\
&= \sum_{p,q \subseteq r} [p \text{ and } q = 0] \sum_{v \subseteq r} (-1)^{|r|-|v|} [p \subseteq v][q \subseteq v] a_p b_q & (93)\\
&= \sum_{v \subseteq r} (-1)^{|r|-|v|} \sum_{p,q \subseteq v} [p \text{ and } q = 0] a_p b_q & (94)\\
&= \sum_{v \subseteq r} (-1)^{|r|-|v|} \sum_{u \subseteq v} (-1)^{|u|} \sum_{p} [u \subseteq p \subseteq v] a_p \sum_{q} [u \subseteq q \subseteq v] b_q & (95)
\end{aligned}$$

妈呀不会做了！

失败的原因是又用交集又用并集，让我们统一成并集吧！多记录一维，$c_{r,i}$ 表示 $\sum_{p \subseteq r} [|p| = i] a_p b_{r-p}$。这样就爽多了：

$$\begin{aligned}
c_{r,i} &= \sum_{p,q \subseteq r} [|p| = i][|q| = |r| - i][p \text{ or } q = r] a_p b_q & (96)\\
&= \sum_{p,q \subseteq r} [|p| = i][|q| = |r| - i] \sum_{v \subseteq r} (-1)^{|r|-|v|} [p \subseteq v][q \subseteq v] a_p b_q & (97)\\
&= \sum_{v \subseteq r} (-1)^{|r|-|v|} \sum_{p,q \subseteq v} [|p| = i][|q| = |r| - i] a_p b_q & (98)\\
&= \sum_{v \subseteq r} (-1)^{|r|-|v|} \sum_{p \subseteq v} [|p| = i] a_p \sum_{q \subseteq v} [|q| = |r| - i] b_q & (99)
\end{aligned}$$

搞定！只要对 a 定义 a' 满足 $a'_{p,i} = \sum_{s \subseteq p} [|s| = i] a_s$，然后就行了。显然都能在 $O(n^2 2^n)$ 时间内搞定。

10　最后说几句

妈呀最怕这种时候要我总结点什么了！反演还是蛮强大的！能搞定很多事情的样子（虽然不见得直观和简洁）。反演好，风景旧曾谙；日出江花红胜火，春来江水绿如蓝。能不爱反演？（雾）

THE END

祝大家 WC 后面几天过得愉快！