超现实数与不平等博弈

马耀华，代晨昕

广州市第二中学

February 3, 2021

前言

这个 PPT 大概可以理解为集训队论文的某个子集，包含了一些题目，会的童鞋可以跑路了!!!

超现实数定义

我们先来定义超现实数。为了方便，我们提到的“数”默认指超现实数。

Definition

令 L, R 为两个任意的数集合，且 L 中不存在 $\geq R$ 中某个元素的元素，则 $\{L|R\}$ 也是一个数。
所有的数都是由上面的构造得到的。

Definition

我们用 x^L 指代一个数 $x = \{L|R\}$ 的 L 中任意元素，用 x^R 指代 R 中任意元素。此外，我们还经常使用另一个记号
$x = \{a, b, c, \ldots |d, e, f, \ldots\}$，这里 $L = \{a, b, c, \ldots\}, R = \{d, e, f, \ldots\}$。

大小关系定义

Definition

1. $x \geq y$ 当且仅当不存在 $x^R \leq y$ 且不存在 $x \leq y^L$。
2. $x \leq y$ 当且仅当 $y \geq x$。

Definition

1. $x = y$ 当且仅当 $x \geq y$ 且 $y \geq x$。
2. $x > y$ 当且仅当 $x \geq y$ 且 $y \ngeq x$。
3. $x < y$ 当且仅当 $y > x$。

运算定义

Definition

1. $x + y = \{x^L + y, x + y^L | x^R + y, x + y^R\}$。
2. $-x = \{-x^R | -x^L\}$。
3. $x - y = x + (-y)$。
4. $xy = \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R | x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$。

数的实例

上述定义都是递归定义，而一开始我们没有任何数。
不过，我们可以取 $\mathrm{L}=\mathrm{R}=\emptyset$，这样我们得到了一个数 $\{|\}$，我们称它为 0。容易验证，我们有 $0\geq 0, 0\leq 0, 0=0$，以及 $0\not> 0, 0\not< 0, -0=0$。
在超现实数的二叉树中，0 位于第 1 层。
接着，我们可以取 $\mathrm{L}=0, \mathrm{R}=\emptyset$，这样我们得到了一个数 $\{0|\}$，我们称它为 1。容易验证，我们有 $1\geq 0$ 和 $1>0$，但没有 $0\geq 1$ 和 $0>1$。我们还可以得到 $-1=\{|-0\}=\{|0\}$。同样容易验证，
$0+1=1+0=1, 0+(-1)=(-1)+0=-1, 1+(-1)=0$。
以上的数在二叉树中位于第 2 层。

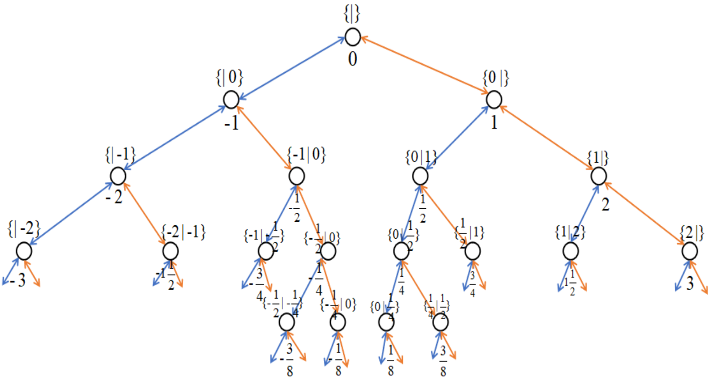
数的实例

接着，我们可以取 $L=0, R=1$，构造出 $\frac{1}{2}=\{0|1\}$; 取 $L=-1, R=0$，构造出 $-\frac{1}{2}=\{-1|0\}$; 取 $L=1, R=\emptyset$，构造出 $2=\{1|\}$；取 $L=\emptyset, R=-1$，构造出 $-2=\{|-1\}$。同样可以验证，这些数满足我们期望的通常意义下的一切性质。

以上的数在二叉树中位于第 3 层。

进一步，二叉树的有限层中包含了所有形如 $\frac{p}{2^q}$ 的有理数（p, q 是整数）。

超现实数的二叉树



超现实数域 No

Theorem

超现实数形成一个有序域，记作超现实数域 No。

Theorem

实数域 $\mathbb{R}$ 是超现实数域 No 的子域。也即，我们可以任意对值是实数的超现实数（或博弈）进行我们熟悉的实数运算，而不必担心得到相异结果。

超现实数还满足许多其它性质，具体参见论文。

简单性法则

Theorem

对于数 $x = \{x^L | x^R\}$，若存在数 z 使得满足 $x^L \not\geq z \not\geq x^R$ 的限制，且对某个 z 的形式 $z = \{z^L | z^R\}$ 不存在 z^L 和 z^R 满足相同限制，则 $x = z$。

Corollary

（简单性法则）对于一个数 $x = \{x^L | x^R\}$，若存在至少一个数 z 满足 $x^L < z < x^R$，则其中最简单的数即为 x 的值。这里的“最简单”可以理解为在二叉树中所在层数最低的（显然是唯一的）。

博弈定义

类似地，我们可以定义博弈。

Definition

令 L, R 为两个任意的博弈集合，则 $\{\mathrm{L}|\mathrm{R}\}$ 也是一个博弈。
所有的博弈都是由上面的构造得到的。

可以发现，博弈与超现实数的定义区别仅是我们去掉了“L 中不存在 $\geq$ R 中某个元素的元素”这一限制。于是我们可以使用使用与超现实数相同的符号来描述博弈，同样定义博弈的大小关系，加法，加法逆元，乘法等。同时，博弈满足许多超现实数的性质，具体参见论文。
两个博弈 G 和 H 若满足 $\mathrm{G} = \mathrm{H}$，我们只称它们值相等，而它们形式相等需要 L 和 R 中每个元素能对应。
我们可以将超现实数看作一种特殊博弈，称一个博弈 G 的值是数，若存在超现实数 x 使 $\mathrm{G} = \mathrm{x}$。

博弈的组合意义

Definition

一个（双人）博弈有两位玩家，分别为左玩家和右玩家。在博弈的某一状态中，左右玩家分别有若干个（可能为 0 个）可能的行动，可以转移到另一状态。两位玩家在某个固定的初始状态开始，按最优策略交替行动，了解一切游戏信息，且行动必须是确定性的。达到终止状态，不能行动的则为输家。

这个定义事实上与我们上一节的定义是相同的。也即，对于一个博弈 $x = \{L|R\}$，我们认为 L 是左方行动后所达到的状态集合，R 是右方行动后所达到的状态集合。于是，我们所定义的博弈的运算和大小关系，以及一切相关性质仍然成立。

博弈加法的组合意义

Definition

给定两个博弈 G 和 H，我们定义它们的和博弈 $\mathrm{G}+\mathrm{H}$ 是这样一个博弈：有两个子博弈 G 和 H，两位玩家每次只能恰好在其中一个行动，不能行动的则为输家。
显然，这与我们定义的博弈的加法是相同的，同样有
$\mathrm{G}+\mathrm{H}=\{\mathrm{G}^{\mathrm{L}}+\mathrm{H},\mathrm{G}+\mathrm{H}^{\mathrm{L}}|\mathrm{G}^{\mathrm{R}}+\mathrm{H},\mathrm{G}+\mathrm{H}^{\mathrm{R}}\}$。

有限博弈

我们只讨论最简单的有限博弈，也即有下面的额外限制：

Definition

一个有限博弈是满足下述限制的博弈：仅有有限多个状态，每个状态能转移到的状态有限，且不存在一个长度无穷的双方交替行动的序列。
两个有限博弈的和仍是有限博弈。
可以证明，一个有限博弈不可能出现平局，且博弈结果只可能是以下四种之一：

1. 左方必胜
2. 右方必胜
3. 后手必胜
4. 先手必胜

博弈大小关系

此前我们定义的博弈大小关系比较复杂，不过我们可以得到下面的等价定义，这在实践中更加简便：

Theorem

对博弈 G，有：

1. G 左方必胜当且仅当 $G > 0$。
2. G 右方必胜当且仅当 $G < 0$。
3. G 后手必胜当且仅当 $G = 0$。
4. 其余情况 G 先手必胜，记作 $G \parallel 0$。

这蕴含 G 左方后手必胜当且仅当 $G \geq 0$，且 G 右方后手必胜当且仅当 $G \leq 0$。

博弈大小关系

Definition

1. $G \mathrel{||\!>} 0$ 当且仅当 $G > 0$ 或 $G \mathrel{||} 0$，也即 G 左方先手必胜。
   $G \mathrel{||\!>} 0$ 当且仅当 $G \not\leq 0$。
2. $G \mathrel{<\!||} 0$ 当且仅当 $G < 0$ 或 $G \mathrel{||} 0$，也即 G 右方先手必胜。
   $G \mathrel{<\!||} 0$ 当且仅当 $G \not\geq 0$。

博弈大小关系

Corollary

对于任意博弈 G 和 H，有：

1. $G+(-H)$ 左方必胜当且仅当 $G>H$。
2. $G+(-H)$ 右方必胜当且仅当 $G<H$。
3. $G+(-H)$ 后手必胜当且仅当 $G=H$。
4. $G+(-H)$ 先手必胜当且仅当 $G \,||\, H$。

类似可得 $G \geq H$，$G \leq H$，$G \,||\!> H$，$G <\!||\, H$ 等的等价定义。

模糊博弈

我们称满足 $G \mid\mid 0$ 的博弈为模糊博弈。

Theorem

1. 若 $G \mid\mid> 0$，$H \geq 0$，则 $G + H \mid\mid> 0$。
2. 若 $G <\mid\mid 0$，$H \leq 0$，则 $G + H <\mid\mid 0$。

$*$

一个典型的模糊博弈是 $* = \{0|0\}$。$*$ 具有一些显然的性质，例如 $* = -*$，$\{*|*\} = 0$，且对于任意的正数 x，有 $x >> *, -x << *$，也即它的值非常接近于 0。
为了方便，我们引入一个记号，在不致混淆的情况下，对于任意的博弈 x，$x* = x + *$。

$\uparrow$ 和 $\downarrow$

我们另外定义 $\uparrow=\{0|*\}$ 以及 $\downarrow=\{*|0\}$，显然 $\uparrow=-\downarrow$。容易验证，$\uparrow>0,\downarrow<0$，但对于任意的正数 x，有 $x>>\uparrow,-x<<\downarrow$，也即它们的值非常接近于 0。同样可以验证，$\uparrow*\,||\,0,\downarrow*\,||\,0$，这意味着 $*\,||\uparrow,*\,||\downarrow$。

题目大意

给一个长不超过 10^5 的仅由 $'W','B','.'$ 组成的字符串。左方每次行动可以将相邻两个 $'.'$ 染成 $'W'$，右方每次行动可以将相邻两个 $'.'$ 染成 $'B'$，但任何一方均不能使该次行动中某个染色的格子与一个已有的同色格子相邻。不能操作的一方判负。
问游戏的胜负关系。

题解

显然已有的 $'W','B'$ 以及左右端点将字符串分隔成若干段，每段都是一个子博弈。我们可以尝试对每一个子博弈计算出博弈值。

对于一个子博弈，它的值只跟最左边和最右边的状态（$'W','B'$ 或端点）以及中间 $'.'$ 的长度 n 有关。于是，我们可以将一个子博弈按最左边和最右边状态分为 9 类：

$WnW = -BnB, WnB = BnW, Wn = nW = -Bn = -nB, n$。

计算一个子博弈的值，只需要枚举双方可能走法，此时会得到两个新的 n 更小的子博弈，它们的值已经计算过，直接按定义计算即可。

例如，$W5W$ 的值按定义计算为 $\{W1W + W2W, W2W + W1W | W0B + B3W, W1B + B2W, W2B + B1W, W3B + B0W\}$。

当 $n<2$ 时，显然博弈值一定为 0。
通过观察和计算，我们可以得到前面的状态的博弈值：

状态 \ $n=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
WnW	0	0	-1	-1	$*$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$*$	$\cdots$
BnB	0	0	1	1	$*$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$*$	$\cdots$
WnB = BnW	0	0	0	$*$	$*$	$*$	0	0	0	$*$	$*$	$\cdots$
Wn = nW	0	0	-1	$*$	$*$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$*$	$*$	$\cdots$
Bn = nB	0	0	1	$*$	$*$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$*$	$*$	$\cdots$
n	0	0	$*$	$*$	$*$	0	0	0	$*$	$*$	$*$	$\cdots$

规律是较为明显的。

题解

那我们剩下的工作就是将博弈值求和，并判定胜负了。
注意到子博弈的博弈值要么是 $0, *$，要么是 $\pm\frac{1}{2^k}(k \in \mathbb{N})$。于是我们可以先将数字部分求和，若这部分非 0，可以按正负性直接知道是某方必胜，否则是先手必胜还是后手必胜取决于 $*$ 数目的奇偶性。
对数字求和的时候，我们可以直接在二进制下计算，一个好写的做法是分开考虑正负数，分别转成一个标准的二进制小数，最后直接比较两个二进制小数大小即可。
时间复杂度显然是 $O(\mathrm{len})$ 的。

Nim 游戏

我们来分析一下单一堆的 Nim 游戏：
若这堆没有石子，双方均不能行动，此时博弈值为 0。
若恰有 1 个石子，则双方行动后都会变为没有石子的 0 状态，于是此时博弈值 $* = \{0|0\}$。
对于有 $n > 1$ 个石子的状态，双方行动后可以变为 $0 \sim n-1$ 个石子，那么如何描述它们呢？

Nimber

Definition

对于 $n > 1$，定义 $*_n = \{0, *, *_2, \ldots, *_{n-1} | 0, *, *_2, \ldots, *_{n-1}\}$。也即，$*_n$ 为恰有 n 个石子的单堆 Nim 游戏状态的博弈值。

显然 $*_n$ 是一个先手必胜态（先手可以直接行动到 0 状态获胜），于是有 $*_n \| 0$，容易验证 $*_n = -*_n$，且对于任意的正数 x，有 $x >> *_n, -x << *_n$，也即它们的值非常接近于 0。
我们称 $0, *, *_2, \ldots, *_n, \ldots$ 为 Nimber。

Nimber

我们发现，仅用 Nimber 就可以描述任意公平博弈的值。

Theorem

任意（有限）公平博弈的值一定是某个 Nimber $*_n$。

公平博弈的和

对于单个的公平博弈，计算其值通常是容易的。我们更关心的是若干个公平博弈的和。显然有限个公平博弈的和仍是公平博弈，按定理 4.2，若两个有限公平博弈的值分别是 Nimber，则它们的和的的值也是一个 Nimber，那么如何计算这个值呢？广为人知的 Sprague-Grundy 定理给出了计算方法：

Theorem

（Sprague-Grundy 定理）值为 $*_{n}$ 的公平博弈 G 与值为 $*_{m}$ 的公平博弈 H 的和 $G+H$ 值为 $*_{n\oplus m}$。这里 $\oplus$ 是二进制按位异或运算。也即，两个 Nimber$*_{n}$ 与 $*_{m}$ 的和 $*_{n}+*_{m}=*_{n\oplus m}$。

综合运算

引入了 Nimber 后，我们可以研究它们与数字，$\uparrow, \downarrow$ 间的和博弈。由于 Nimber 的和还是 Nimber，且 $\uparrow = -\downarrow$，我们只需要研究形如 $a + *_b + c\uparrow$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{Z})$ 这样的博弈。

对于 $x > 0$，我们已知 $x >> *_b, x >> \uparrow, -x << *_b, -x << \downarrow$。于是若 $a > 0$，显然有 $a + *_b + c\uparrow > 0$；若 $a < 0$，显然有 $a + *_b + c\uparrow < 0$。若 $b = 0$ 或 $c = 0$ 时也容易讨论。我们下面只讨论 $a = 0, b, c \neq 0$ 的非平凡情况。

综合运算

我们已知 $\uparrow * \parallel 0, \downarrow * \parallel 0$，且 $\{\uparrow \mid \uparrow\} = \Uparrow * > 0, \{\downarrow \mid \downarrow\} = \Downarrow * < 0$。那么一般地，当 $c > 1$ 时 $* + c\uparrow > 0$；当 $c < -1$ 时 $* + c\uparrow < 0$；当 $-1 \leq c \leq 1$ 时 $* + c\uparrow \parallel 0$。
而在博弈 $\uparrow + *_n\ (n \geq 2)$ 中，左方先手可以将 $*_n$ 变为 0 而获胜，右方先手时，若在 $*_n$ 中行动后左方同样行动可获胜，而在 $\uparrow$ 中行动后变为 $* + *_n = *_{n \oplus 1} \parallel 0$，于是左方仍然获胜。这样，就有
$\uparrow + *_n\ (n \geq 2) > 0$，同理有 $\downarrow + *_n\ (n \geq 2) < 0$。进一步地，当 $c > 0$ 时 $*_n + c\uparrow > 0 (n \geq 2)$；当 $c < 0$ 时 $*_n + c\uparrow < 0 (n \geq 2)$。

题目大意

有一种“跳青蛙”博弈：在一个 5 格棋盘上，初始时左边两格各有一只向右的青蛙，右边两格各有一只向左的青蛙，中间空出一格，左方只能操作向右的青蛙，右方只能操作向左的青蛙。每次行动为让己方的某只青蛙向对应方向行动：若它前一格是唯一的空格，可以直接走一格；若它前一格是一只不同朝向的青蛙，且再前一格是唯一空格，可以跳过那只青蛙到达空格。显然，任意时刻某方要么有唯一的行动方式，要么不能行动。

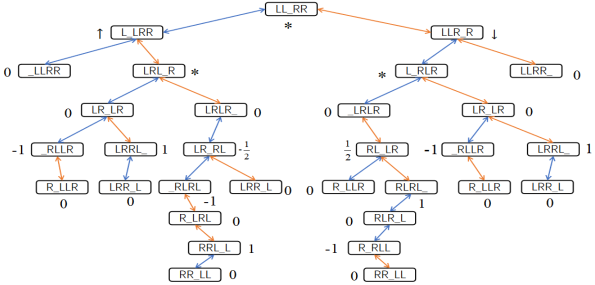
有多次询问。每次给定一个大小为 m 的博弈可重集合，其中每个博弈都是由初始状态经过若干次行动后可得到的状态（但不保证是由双方交替行动所得），共有 23 种不同状态。可重集里的每个博弈都可出现也可不出现，你需要回答所有可能的情况的各自和博弈中，左方必胜，右方必胜，后手必胜，先手必胜的各有多少种，答案对 998 244 353 取模。询问组数 $T \leq 100$，每组询问 $m \leq 10^6$，且每种不同状态出现次数大致相同。

题解

由于只有 5 格，我们可以试着直接算出所有可达状态的博弈值。
我们用一个长度为 5 的字符串表示一个博弈，从左到右每个字符表示该格状态，L 表示有一只向右青蛙，R 表示有一只向左青蛙，_ 表示一个空格。由于博弈状态只有 23 种，且每种状态下每方最多只有一种行动，通过递推我们不难得到所有状态的博弈值：

题解

由于只有 5 格，我们可以试着直接算出所有可达状态的博弈值。
我们用一个长度为 5 的字符串表示一个博弈，从左到右每个字符表示该格状态，L 表示有一只向右青蛙，R 表示有一只向左青蛙，_ 表示一个空格。由于博弈状态只有 23 种，且每种状态下每方最多只有一种行动，通过递推我们不难得到所有状态的博弈值：



题解

从图中可看出，所有状态的博弈值只可能是 $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, *, \uparrow, \downarrow$。于是我们可以预见到若干个博弈的和一定是 $a + *_b + c\uparrow$ 形式。特别地，这里 a 是 $\frac{1}{2}$ 的整数倍，且 b 只能是 0 或 1。

由于不同类型博弈之间无关，只需分别对值是数的博弈计算出 $a > 0, a = 0, a < 0$ 的方案数，对值是 $*$ 的博弈计算出 $b = 0, b = 1$ 的方案数，对值是 $\uparrow$ 与 $\downarrow$ 的博弈计算出 $c > 1, c < -1, -1 \le c \le 1$ 的方案数，即可简单统计出答案。这些计算大部分是类似的，我们只讨论最复杂的值是数的博弈的计数。我们可以将所有数 $\times 2$ 后变为整数，方便计算。显然值为 0 的博弈不需要关注，而对于其它绝对值为 x 的博弈，是否出现会让和的博弈值改变 x。那么容易将问题转化为给定 p 个 $0/1$ 变量与 q 个 $0/2$ 变量，询问和 $>, <, =$ 某个给定常数 r 的方案数。这只需要枚举 q 个 $0/2$ 变量中选了多少个 2，对 p 个 $0/1$ 变量中选择 1 的个数的方案数做前缀和即可，每部分的系数都是一个组合数。

若预处理阶乘和阶乘逆，可 $O(1)$ 计算出组合数。因为 $p + q \le m$，故总时间复杂度为 $O(Tm)$。但由于不同状态出现次数大致相同，因此 $p + q$ 大约只有 $\frac{8}{23}m$，实际运行效率很快。

平移原理

对于一个值不是数字的博弈 $\mathrm{G}=\{\mathrm{G}^{\mathrm{L}}|\mathrm{G}^{\mathrm{R}}\}$ 与值是数字的博弈 x，我们有 $\mathrm{G}+\mathrm{x}=\{\mathrm{G}^{\mathrm{L}}+\mathrm{x}|\mathrm{G}^{\mathrm{R}}+\mathrm{x}\}$。也即，给定若干个博弈，若其中还有值不是数字的，则每位玩家的最佳走法都是在这些博弈中行动。

题目大意

给定 n 个矩形，第 i 个大小为 $w_i \times h_i$。现在有一个博弈，每次玩家可以选择一个矩形，以及一个可以切的方向，均匀切成 $n > 1$ 份，要求切完后长宽仍是整数。对于第 i 个矩形，还会有参数 $a_i, b_i \in \{0, 1\}$。若 $a_i = 1$，则第 i 个矩形与它切出来的所有小矩形双方都可以在 w 这一维横着切，否则只有左方能横着切。若 $b_i = 1$，则第 i 个矩形与它切出来的所有小矩形双方都可以在 h 这一维竖着切，否则只有右方能竖着切。现在给定 q 个询问，第 i 个询问为若仅留下第 $l \sim r$ 个矩形，左方先手能否获胜。

$n, q \leq 10^5, 1 \leq w, h \leq 10^5$。

题解

首先显然需要算出每个矩形单独博弈时的博弈值。令 $\lambda(n)$ 为 n 的可重质因子个数，$\lambda^*(n)$ 为 n 的可重奇质因子个数，下面对 a, b 分类讨论。若 $a = b = 1$，则这是一个公平博弈。注意到每次切割后的所有矩形都相同，因此出现奇数个时相当于只有 1 个，偶数个时直接变为 0。通过对 w 和 h 小时情况观察，我们可以猜测并证明如下结论：

Lemma

当 $a = b = 1$ 时，一个 $w \times h$ 的矩形对应博弈值为：

$$\begin{cases} *\lambda^*(w) \oplus \lambda^*(h), & \text{if } w \times h \text{ is odd} \\ *(\lambda^*(w) \oplus \lambda^*(h)) + 1, & \text{if } w \times h \text{ is even} \end{cases}$$

证明考虑归纳，只需注意到双方每次可以除去任意个数的奇质因子，且可能可以通过除去一个偶质因子得到 0 状态。这里略去具体证明。

题解

首先显然需要算出每个矩形单独博弈时的博弈值。令 $\lambda(n)$ 为 n 的可重质因子个数，$\lambda^*(n)$ 为 n 的可重奇质因子个数，下面对 a, b 分类讨论。若 $a = b = 0$，通过对 $\lambda(w)$ 和 $\lambda(h)$ 小时情况观察，我们可以猜测并证明如下结论：

Lemma

令 w 的可重质因子降序排列为 $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_{\lambda(w)}$，$h$ 的可重质因子降序排列为 $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_{\lambda(h)}$。则当 $a = b = 0$ 时，一个 $w \times h$ 的矩形对应博弈值为：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\lambda(w)-\lambda(h)} \prod_{j=1}^{i-1} p_j, & \text{if } \lambda(w) > \lambda(h) \\ -\sum_{i=1}^{\lambda(h)-\lambda(w)} \prod_{j=1}^{i-1} q_j, & \text{if } \lambda(w) < \lambda(h) \\ 0, & \text{if } \lambda(w) = \lambda(h) \end{cases}$$

证明考虑归纳，只需注意到双方每次选的 n 若质因子数目 > 1 一定不优，同时一定选择最大质因子。这里略去具体证明。

题解

首先显然需要算出每个矩形单独博弈时的博弈值。令 $\lambda(n)$ 为 n 的可重质因子个数，$\lambda^*(n)$ 为 n 的可重奇质因子个数，下面对 a, b 分类讨论。若 $a = 0, b = 1$，我们同样可以观察和猜测下述结论：

Lemma

令 w 的可重质因子降序排列为 $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_{\lambda(w)}$。则当 $a = 0, b = 1$ 时，一个 $w \times h$ 的矩形对应博弈值为 $h \cdot (\sum_{i=1}^{\lambda(w)} \prod_{j=1}^{i-1} p_j) + *_{\lambda^*(h)+[2|h]}$。

题解

Proof.

考虑归纳。
当 $h=1$ 时由上一引理易得。
当 $h>1$ 时，令 $f(w)=\sum_{i=1}^{\lambda(w)}\prod_{j=1}^{i-1}p_j$，则 h 个 $w\times 1$ 的矩形博弈值即为 $h\cdot f(w)$。若先手在 h 这一维竖着切，根据归纳假设，行动后得到的博弈值一定形如 $hf(w)+*_k$。具体来说，若 n 为偶数，则 $k=0$，否则 $k=\lambda^*(h)-\lambda^*(n)$。那么显然有右方先手行动后的博弈值集合 $\{hf(w),hf(w)+*_1,\dots,hf(w)+*_{\lambda^*(h)+[2|h]-1}\}$，这个集合中的博弈值也是左方能达到的。而若左方在 w 这一维竖着切，显然会发现得到的博弈值数字部分 $<hf(w)$，会被优超，可以不必考虑。那么最后的博弈值就是 $\{hf(w),hf(w)+*_1,\dots,hf(w)+*_{\lambda^*(h)+[2|h]-1}|hf(w),hf(w)+*_1,\dots,hf(w)+*_{\lambda^*(h)+[2|h]-1}\}$，根据平移原理，这就是 $hf(w)+\{0,*_1,\dots,*_{\lambda^*(h)+[2|h]-1}|0,*_1,\dots,*_{\lambda^*(h)+[2|h]-1}\}=hf(w)+*_{\lambda^*(h)+[2|h]}$。 □

$a=1,b=0$ 的情况与 $a=0,b=1$ 类似。

题解

这样，我们计算出了每个矩形的博弈值，发现都是 $a+*_b$ 的形式。那么一个区间的和博弈值仍然是一个 $a+*_b$ 的形式，只需要预处理前缀和即可 $O(1)$ 查询。知道博弈值后，通过它与 0 的大小关系就容易知道胜负了。
时间复杂度为 $O(n+\max\{w,h\}+q)$。

题目大意

有一个游戏，第 i 堆石子有 n_i 个，左方每次能从里面拿恰好 a_i 个，右方每次能拿恰好 b_i 个。
对 $k = 1 \sim n$，问仅考虑前 k 堆石子的胜负情况。
总堆数 $n \le 10^5, n_i, a_i, b_i \le 10^9$。

题解

我们称一个有 n 个石子，左方每次能拿 a 个，右方每次能拿 b 个的堆称为状态 (n, a, b)。
石子数太大的时候，双方都可以反复行动，不利于分析，尝试简化一下：

Lemma

状态 $G = (n, a, b)$ 的博弈值同状态 $G' = (n \bmod (a+b), a, b)$ 博弈值相同。

Proof.

考虑差博弈 $G - G'$，显然若先手在 G 中行动，且行动前 $n \geq a + b$，则后手也可以在 G 中行动，行动后 $n \bmod (a+b)$ 不变，其它情况后手只需要在另一侧行动即可获胜。于是不论如何都有后手获胜，即 $G = G'$。 □

题解

这样，我们只需要考虑 $n < a + b$ 的状态了。由对称性，不妨设 $a \leq b$。
那么若 $n < a$，显然 $G = 0$。
若 $a \leq n < b$，则 $G = \lfloor \frac{n}{a} \rfloor - 1$。
若 $b \leq n < a + b$，则 $G = \{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor - 1|0\}$，这是一个转换（$\{x|y\}(x \geq y)$，其中 x, y 都是数）。

题解

那么问题变为对若干转换和数求和，并判断和博弈的胜负关系。
由平移原理，对于和博弈
$\{x_1|y_1\}+\{x_2|y_2\}+\ldots+\{x_k|y_k\}+c(x_1-y_1\geq x_2-y_2\geq\ldots\geq x_k-y_k)$，
双方都会按 $i=1\sim k$ 的顺序在 $\{x_i|y_i\}$ 中行动，最终只需要按剩下的数的正负性和当前行动的人来判断胜负。
那么单个询问就很简单了。
现在还需要对每个前缀求解，拿个数据结构维护即可（可以平衡树在线，也可以离线树状数组）。

全部小博弈

Definition

一个博弈是全部小的，若它的每个后继状态中，要么双方都不能行动，要么双方都能行动。公平博弈是一种特殊的全部小博弈。
显然，有限个全部小博弈的和还是全部小的。

例如，博弈 $0, *_n, n\uparrow, n\uparrow +*$ 都是全部小的。

原子量

Definition

远星 ☆ 是一个 n 足够大的 $*_n$。这里的“足够大”的 n，可以认为是比涉及的其它博弈后继状态中的任何 $*_k$ 的 k 都要严格大的任意整数。

Definition

我们递归定义一个全部小博弈 G 的原子量 G'' 如下：
$G'' = \{G^{L''} - 2 | G^{R''} + 2\}$，除非如此定义得到的 G'' 是一个整数，且 $G > ☆$ 或 $G < ☆$。对于前者，我们令 G'' 为 $<|| G^{R''} + 2$ 的最大整数，对于后者，我们令 G'' 为 $||> G^{L''} - 2$ 的最小整数。

原子量

例如，0 的原子量显然是 0；$* = \{0|0\}$ 的原子量为 $\{0-2|0+2\} = 0$，类似地，一切 $*_n$ 的原子量均为 0；$\uparrow = \{0|*\}$ 的原子量直接计算是 $\{0-2|0+2\} = 0$，但由于 $\uparrow > ☆$，于是真实原子量是 $<||\ 2$ 的最大整数 1，类似地，$n\uparrow$ $(n \in \mathbb{Z})$ 的原子量为 n；$\Uparrow * = \{0|\uparrow\}$ 的原子量直接计算是 $\{0-2|1+2\} = 0$，但由于 $\Uparrow * > ☆$，于是真实原子量是 $<||\ 1+2$ 的最大整数 2。

原子量未必是整数，甚至未必是数。例如，我们有 $\{\Uparrow | \Downarrow\}$ 的原子量是 $\{2-2|-2+2\} = *$。

原子量定理

Theorem

对于全部小博弈 G, H，有：

1. $(-G)'' = -(G'')$。
2. $(G + H)'' = G'' + H''$。
3. $G'' \geq 1$ 当且仅当 $G > \star$。
4. $G'' \leq -1$ 当且仅当 $G < \star$。
5. $-1 <\| G'' <\| 1$ 当且仅当 $G \| \star$。
6. 若 $G'' \geq 2$，则 $G > 0$。
7. 若 $G'' \leq -2$，则 $G < 0$。
8. 若 $G'' \|> 0$，则 $G \|> 0$。
9. 若 $G'' <\| 0$，则 $G <\| 0$。

原子量定理

看起来很能有应用？究竟会不会有题目呢？