УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 109

Студент
Елисеев Константин Иванович
P3108

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург, 2023 г.

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $1 < |x_1x_2x_5 - x_3x_4| \leq 4$ и неопределенное значение при $|x_1x_2x_5 - x_3x_4| = 1$

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_1x_2x_5$	x_3x_4	$x_1x_2x_5$	x_3x_4	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	d
2	0	0	0	1	0	0	1	0	1	d
3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	0	1	0	0	0	2	0	2	1
5	0	0	1	0	1	1	2	1	2	d
6	0	0	1	1	0	0	3	0	3	1
7	0	0	1	1	1	1	3	1	3	1
8	0	1	0	0	0	2	0	2	0	1
9	0	1	0	0	1	3	0	3	0	1
10	0	1	0	1	0	2	1	2	1	d
11	0	1	0	1	1	3	1	3	1	1
12	0	1	1	0	0	2	2	2	2	0
13	0	1	1	0	1	3	2	3	2	d
14	0	1	1	1	0	2	3	2	3	d
15	0	1	1	1	1	3	3	3	3	0
16	1	0	0	0	0	4	0	4	0	1
17	1	0	0	0	1	5	0	5	0	0
18	1	0	0	1	0	4	1	4	1	1
19	1	0	0	1	1	5	1	5	1	1
20	1	0	1	0	0	4	2	4	2	1
21	1	0	1	0	1	5	2	5	2	1
22	1	0	1	1	0	4	3	4	3	d
23	1	0	1	1	1	5	3	5	3	1
24	1	1	0	0	0	6	0	6	0	0
25	1	1	0	0	1	7	0	7	0	0
26	1	1	0	1	0	6	1	6	1	0
27	1	1	0	1	1	7	1	7	1	0
28	1	1	1	0	0	6	2	6	2	1
29	1	1	1	0	1	7	2	7	2	0
30	1	1	1	1	0	6	3	6	3	1
31	1	1	1	1	1	7	3	7	3	1

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$
\begin{aligned}
f = {} & \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4\,x_5 \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5 \vee \\
& \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4\,x_5 \vee \\
& \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5
\end{aligned}
$$

Каноническая КНФ:

$$
\begin{aligned}
f = {} & (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\
& (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) \\
& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})
\end{aligned}
$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$		
m_4	00100	✓
m_8	01000	✓
m_{16}	10000	✓
m_1	00001	✓
m_2	00010	✓
m_6	00110	✓
m_9	01001	✓
m_{18}	10010	✓
m_{20}	10100	✓
m_5	00101	✓
m_{10}	01010	✓
m_7	00111	✓
m_{11}	01011	✓
m_{19}	10011	✓
m_{21}	10101	✓
m_{28}	11100	✓
m_{13}	01101	✓
m_{14}	01110	✓
m_{22}	10110	✓
m_{23}	10111	✓
m_{30}	11110	✓
m_{31}	11111	✓

$K^1(f)$		
m_4-m_5	0010X	✓
m_4-m_6	001X0	✓
m_1-m_5	00X01	✓
m_2-m_6	00X10	✓
m_8-m_9	0100X	✓
m_8-m_{10}	010X0	✓
m_1-m_9	0X001	✓
m_2-m_{10}	0X010	✓
m_{16}-m_{18}	100X0	✓
m_{16}-m_{20}	10X00	✓
m_2-m_{18}	X0010	✓
m_4-m_{20}	X0100	✓
m_6-m_7	0011X	✓
m_5-m_7	001X1	✓
m_{10}-m_{11}	0101X	✓
m_9-m_{11}	010X1	✓
m_9-m_{13}	01X01	✓
m_{10}-m_{14}	01X10	✓
m_5-m_{13}	0X101	✓
m_6-m_{14}	0X110	✓
m_{18}-m_{19}	1001X	✓
m_{20}-m_{21}	1010X	✓
m_{20}-m_{22}	101X0	✓
m_{18}-m_{22}	10X10	✓
m_{20}-m_{28}	1X100	✓
m_5-m_{21}	X0101	✓
m_6-m_{22}	X0110	✓
m_{22}-m_{23}	1011X	✓
m_{21}-m_{23}	101X1	✓
m_{19}-m_{23}	10X11	✓
m_{28}-m_{30}	111X0	✓
m_{22}-m_{30}	1X110	✓
m_7-m_{23}	X0111	✓
m_{14}-m_{30}	X1110	✓
m_{30}-m_{31}	1111X	✓
m_{23}-m_{31}	1X111	✓

$K^2(f)$		
m_4-m_5-m_6-m_7	001XX	✓
m_8-m_9-m_{10}-m_{11}	010XX	
m_1-m_5-m_9-m_{13}	0XX01	
m_2-m_6-m_{10}-m_{14}	0XX10	
m_{16}-m_{18}-m_{20}-m_{22}	10XX0	
m_4-m_5-m_{20}-m_{21}	X010X	✓
m_4-m_6-m_{20}-m_{22}	X01X0	✓
m_2-m_6-m_{18}-m_{22}	X0X10	
m_{20}-m_{21}-m_{22}-m_{23}	101XX	✓
m_{18}-m_{19}-m_{22}-m_{23}	10X1X	
m_{20}-m_{22}-m_{28}-m_{30}	1X1X0	
m_6-m_7-m_{22}-m_{23}	X011X	✓
m_5-m_7-m_{21}-m_{23}	X01X1	✓
m_6-m_{14}-m_{22}-m_{30}	XX110	
m_{22}-m_{23}-m_{30}-m_{31}	1X11X	

$K^3(f)$	
m_4-m_5-m_6-m_7-m_{20}-m_{21}-m_{22}-m_{23}	X01XX

$Z(f)$
010XX
0XX01
0XX10
10XX0
X0X10
10X1X
1X1X0
XX110
1X11X
X01XX

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты	0-кубы														
	0 0 1 0 0	0 0 1 1 0	0 0 1 1 1	0 1 0 0 0	0 1 0 0 1	0 1 0 1 1	1 0 0 0 0	1 0 0 1 0	1 0 0 1 1	1 0 1 0 0	1 0 1 0 1	1 0 1 1 1	1 1 1 0 0	1 1 1 1 0	1 1 1 1 1
	4	6	7	8	9	11	16	18	19	20	21	23	28	30	31
~~010XX~~				X	X	X									
~~0XX01~~					X										
~~0XX10~~		X													
~~10XX0~~							X	X		X					
~~X0X10~~		X						X							
~~10X1X~~								X	X			X			
~~1X1X0~~										X			X	X	
~~XX110~~		X												X	
~~1X11X~~												X		X	X
~~X01XX~~	X	X	X							X	X	X			

Ядро покрытия:

$$T = \begin{Bmatrix} X01XX \\ 010XX \\ 10XX0 \\ 10X1X \\ 1X1X0 \\ 1X11X \end{Bmatrix}$$

Вся таблица вычеркнулась, следовательно ядро покрытия является минимальным покрытием

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} X01XX \\ 010XX \\ 10XX0 \\ 10X1X \\ 1X1X0 \\ 1X11X \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 17$$
$$S^b = 23$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_4 \vee x_1\,x_3\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_3\,x_4$$

Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ

$x_1 = 0$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00		d		d
01	1	d	1	1
11		d		d
10	1	1	1	d

$x_1 = 1$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1	1	1	d
11	1		1	1
10				

$$C_{\min} = \left\{ \begin{matrix} X01XX \\ 010XX \\ 10XX0 \\ 10X1X \\ 1X1X0 \\ 1X11X \end{matrix} \right\}$$

$$S^a = 17$$
$$S^b = 23$$

$$f = \overline{x_2}\, x_3 \vee \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3} \vee x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_5} \vee x_1\, \overline{x_2}\, x_4 \vee x_1\, x_3\, \overline{x_5} \vee x_1\, x_3\, x_4$$

Определение МКНФ

$x_1 = 0$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00	0	d	0	d
01		d		
11	0	d	0	d
10				d

$x_1 = 1$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00		0		
01				d
11		0		
10	0	0	0	0

$$C_{\min} = \left\{ \begin{matrix} 000XX \\ 011XX \\ 110XX \\ X0001 \\ 11X01 \end{matrix} \right\}$$

$$S^a = 17$$
$$S^b = 22$$

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\, (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})\, (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)\, (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\, (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$f = \overline{x_2}\, x_3 \vee \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3} \vee x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_5} \vee x_1\, \overline{x_2}\, x_4 \vee x_1\, x_3\, \overline{x_5} \vee x_1\, x_3\, x_4$ $\quad S_Q = 23 \quad \tau = 2$

$f = \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1\, (x_4 \vee \overline{x_5})\, (\overline{x_2} \vee x_3) \vee \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3}$ $\quad S_Q = 15 \quad \tau = 3$

$\varphi = x_2\, \overline{x_3}$

$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee x_3$

$f = \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1\, (x_4 \vee \overline{x_5})\, \overline{\varphi} \vee \varphi\, \overline{x_1}$ $\quad S_Q = 15 \quad \tau = 4$

Декомпозиция нецелесообразна

$f = \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1\, (x_4 \vee \overline{x_5})\, (\overline{x_2} \vee x_3) \vee \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3}$ $\quad S_Q = 15 \quad \tau = 3$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\ (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)\ (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 2$

Декомпозиция невозможна

$f = (x_2 \vee x_3 \vee x_1\ (x_4 \vee \overline{x_5}))\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\ (x_4 \vee \overline{x_5}))\ (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \quad S_Q = 20 \quad \tau = 4$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 1$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1\ (x_4 \vee \overline{x_5})\ (\overline{x_2} \vee x_3) \vee \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3} \quad (S_Q = 15, \tau = 3)$$

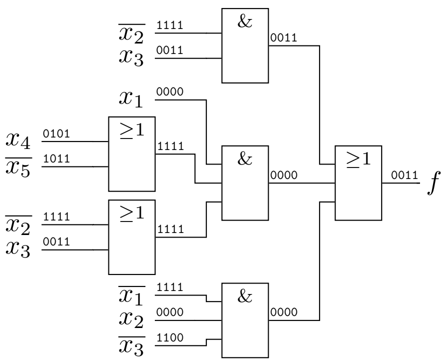
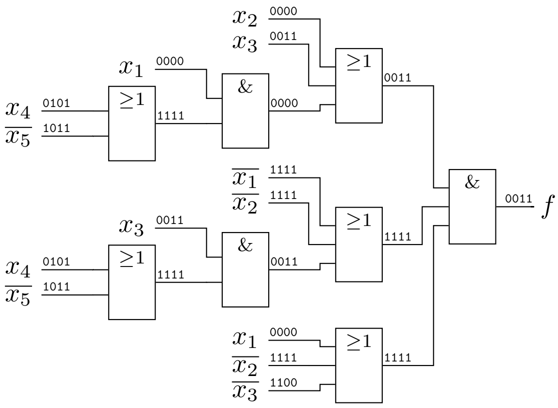


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_2 \vee x_3 \vee x_1\ (x_4 \vee \overline{x_5}))\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\ (x_4 \vee \overline{x_5}))\ (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \quad (S_Q = 20, \tau = 4)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_2}\,x_3}\;\overline{x_1\,\overline{\overline{x_4}\,x_5}\,\overline{\varphi}}\;\overline{\varphi\,\overline{x_1}}} \quad (S_Q = 20, \tau = 6)$$

$$\varphi = x_2\,\overline{x_3}$$

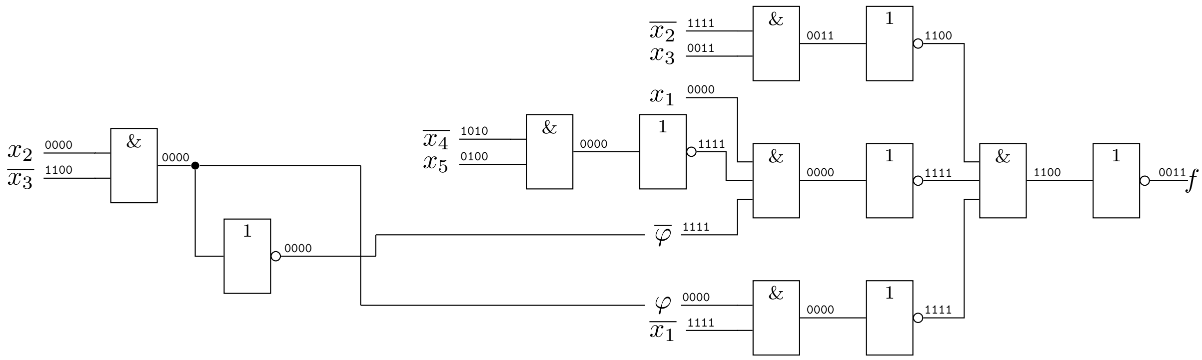
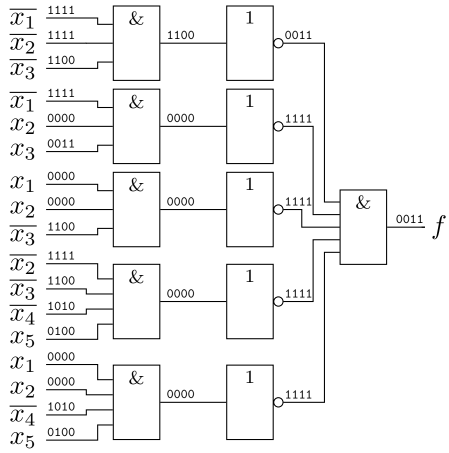


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}}\;\overline{\overline{x_1}\,x_2\,x_3}\;\overline{x_1\,x_2\,\overline{x_3}}\;\overline{\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5}\;\overline{x_1\,x_2\,\overline{x_4}\,x_5}} \quad (S_Q = 27, \tau = 3)$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_2}\,x_3}\;\overline{\overline{x_1\;\overline{\overline{\overline{\overline{x_4}\,x_5}\;\overline{x_2\,\overline{x_3}}}}}\;\overline{\overline{x_1}\;\overline{\overline{x_2\,\overline{x_3}}}}}} \quad (S_Q = 24, \tau = 7)$$

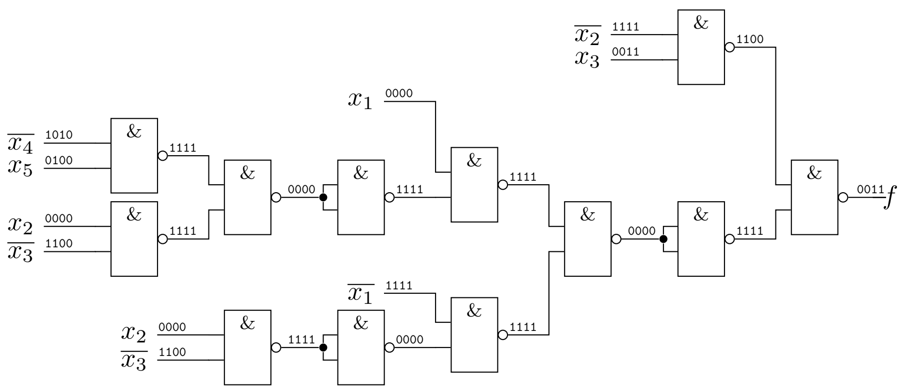


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_2\,\overline{\overline{x_1\,\overline{x_3\,\overline{\overline{x_4}\,x_5}}}\;\overline{\overline{x_1}\,x_3}}}\;\overline{\overline{x_2}\,\overline{\overline{\overline{x_3}\,\overline{x_1\,\overline{\overline{x_4}\,x_5}}}}}}} \quad (S_Q = 26, \tau = 7)$$